Titre: Une approche expérimentale des fonctions numériques avec le logiciel de la géométrie dynamique Geogerba au Niger

Auteurs: NOUHOU Abdoul Massalabi et LECORRE Thomas

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 622 - 635

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Une approche expérimentale des fonctions numériques avec le logiciel de la géométrie dynamique Geogerba au Niger

NOUHOU[1] Abdoul Massalabi – LECORRE[2] Thomas

Résumé – Cette contribution se situe dans le cadre de l'étude de l'usage d'un logiciel de la géométrie dynamique pour l'apprentissage des mathématiques au lycée. Les analyses se focalisent sur les stratégies mobilisées au cours de résolutions des problèmes sur les fonctions numériques et les difficultés rencontrées par les élèves. Les résultats montrent que l'utilisation de GeoGebra a provoqué une diversification des stratégies en termes des registres de représentation des fonctions numériques à une variable réelle.

Mots clé : Fonctions, représentations sémiotique, GeoGebra, résolution de problèmes, lycée.

Abstract – This contribution is within the study of the use of dynamic geometry software for learning mathematics in the higher secondary school. The analyzes focus on the strategies used in the problems solving on numerical functions and the difficulties encountered by the students. The results show that the use of GeoGebra in learning process causes a diversification of strategies in terms of semiotic registers of numerical functions.

Keywords: Functions, semiotic representations, GeoGebra, problems solving, higher secondary school.

1. Université Djibo Hamani de Tahoua, Niger, nouhou.abdoulmassalabi@udh.edu.ne

2. CY Cergy Paris Université, France, thomas.lecorre@cyu.fr

Introduction et problématique

L'étude des fonctions numériques est centrale dans les programmes d'enseignement de mathématiques au lycée (Nachit et al., 2012), plus particulièrement au Niger. La maîtrise du concept des fonctions et des notions connexes est décisive pour effectuer des études supérieures dans les domaines des mathématiques, de l'ingénierie et des sciences (Oehrtman et al., 2008). Le programme de mathématique du lycée au Niger vise l'étude des fonctions numériques tout au long de ce cycle (MES, 2015). Le concept de fonction est introduit en seconde à partir de l'étude des fonctions élémentaires (fonctions affines par intervalles, fonctions carrées, fonctions cubiques etc.) et des propriétés générales des fonctions numériques. En première, ce sont les propriétés générales qui sont approfondies et l'étude des notions de comparaisons de deux fonctions, de limites et de continuité des fonctions de références, puis toutes ces notions sont consolidées en terminale avec des activités d'étude des fonctions de références. L'objectif de l'enseignement des fonctions numériques est d'amener les élèves à appréhender ce concept à travers les différents registres de représentation (Duval, 1993 ; 2006) : langue naturelle, algébrique, symbolique, numérique. Les recherches en didactiques de mathématiques ont montré que la plus part des élèves du lycée rencontrent malheureusement des difficultés avec l'apprentissage des fonctions (Artigue, 2009 ; Duffour, 2011 ; Duval, 2017 ; Hitt, 1998 ; Gagatsis & Monoyiou, 2013). Ces difficultés, comme le souligne Hitt (1998), sont dues aux obstacles extrinsèques de type didactique (les approches d'enseignement des fonctions au lycée) et aux obstacles intrinsèques au sens où les élèves éprouvent des difficultés à mobiliser de manière cohérente les différents registres de représentation des fonctions. Artigue (2009) souligne que la compréhension du concept de fonction n'est pas simple pour les élèves du lycée et les étudiants du début universitaire. Selon elle, les élèves du lycée éprouvent des difficultés à la fin du second cycle et même au début universitaire à détacher la fonction de ses représentations notamment les représentations algébriques qui sont les plus utilisées dans l'enseignement de la notion de fonction (Ibid., 2009, p. 24). Les élèves du lycée ont besoin de travailler sur les registres en les articulant de manière cohérente pour appréhender ce concept et plus tard travailler sur la fonction comme objet de l'analyse à l'université. Les recherches en didactique des mathématiques sur les registres de représentations des objets mathématiques ont montré que l'apprentissage des fonctions par les élèves du lycée se construit peu à peu par le travail sur les registres de représentations sémiotiques (Duval, 2006). Pour apprendre, les élèves ont besoin d'un enseignement leur permettant de mobiliser de manière cohérente les différents registres de représentation de la fonction numérique (Hitt, 1998). D'autres recherches (Bloch, 2005) proposent une approche par les conversions de registres. Elle souligne que de nombreuses tâches disponibles sur les registres de représentation de la fonction ne sont pas investies dans l'enseignement secondaire. L'utilisation des conversions de registres offre des possibilités de travailler sur des tâches non routinières. L'apprentissage des fonctions au lycée doit prendre en compte des tâches disponibles sur les registres qui ne figurent pas dans les tâches routinières, mobilisables pour élargir la place du travail mathématiques des élèves sur l'objet fonction. Cette approche suscite un intérêt pour les pratiques des enseignants en mettant en évidence l'importance de la mise en fonctionnement des connaissances sur les traitements et les conversions entre registres de représentation des fonctions numériques dans un processus d'apprentissage. La nécessité et les raisons invoquées par ces différentes recherches, qui pourraient être classés comme théoriques et pratiques, sont à l'origine de notre intention d'analyser les stratégies de résolution de problème et les difficultés des élèves du lycée pour apprendre les fonctions numériques dans un environnent numérique particulier. L'objectif de cette recherche est d'étudier le travail des élèves du lycée sur les fonctions numériques dans un environnement dynamique d'apprentissage des mathématiques basé sur GeoGebra™. L'hypothèse est qu'il est possible, pour les élèves, de travailler sur les multiples représentations sémiotiques des fonctions en utilisant GeoGebraTM lors de processus de résolution de problème. La question qui guide cette recherche est : dans une classe ordinaire, l'utilisation de GeoGebra dans l'apprentissage des fonctions numériques au lycée provoque-t-elle une diversification des stratégies de résolution de tâches sur les fonctions numériques en termes de registres et quel rôle pour le professeur dans ce processus ?

Fonctions et régistres de représentation sémiotique

Évolution des représentations sémiotiques de la notion de fonction

Les premières utilisations de la dépendance de deux grandeurs remontent à l'époque des babyloniens (vers 1800 av. J. C.). Elle leur permettait d'exécuter des calculs difficiles comme la table de calcul du carré d'un nombre ou la table astronomique pour déterminer les jours (Kiem, 2011). Les traces des fonctions sont apparues en Inde antique. À cette époque, la relation de dépendance entre deux grandeurs permettait d'étudier la table de valeurs de cordes d'un cercle pour déterminer l'équivalent des tables de sinus. Les traces des fonctions sont ensuite apparues en Grèce antique (Gilbert & Schlomiuk, 2007). Les mathématiciens grecs, notamment les Pythagoriciens, utilisaient le tableau de valeurs pour rendre compte de la dépendance entre deux grandeurs afin de modéliser les phénomènes naturels ou de schématiser des lieux géométriques. En ces périodes de l'antiquité, chaque cas de dépendance entre deux quantités est défini par un tableau, ce qui marque aussi l'introduction de la représentation des tableaux de correspondance.

La civilisation musulmane (vers 800 après J. C.) a permis l'introduction du mot « algèbre » dans le langage mathématique, grâce aux travaux du mathématicien Al-Khwarizmi (780-850). L'algèbre désignait l'étude des opérations mathématiques ainsi que la résolution des équations de type $ax^2 = bx + c$. Les résolutions d'Al-Khwarizmi sont exprimées par des phrases qui peuvent se traduire dans le langage moderne de l'algèbre par des expressions canoniques telles que $x^2 + ax = (x + \frac{a}{2})^2 - \frac{a^2}{4}$. Ces travaux ont marqué la naissance de l'algèbre moderne et de l'expression algébrique sous forme de phrases, puis sous formes des lettres, de chiffres et de symboles. C'est au Moyen Âge, que les mathématiciens européens ont fait émerger la relation de dépendance entre deux quantités variables explicites définies sous la forme d'une description verbale ou graphique (Tran Kiem, 2012). La relation de dépendance définie a alors permis d'étudier et d'analyser des phénomènes physiques par le calcul de dépendance entre deux quantités. Cette période a permis le développement du savoir sur les quantités variables explicites pour modéliser des problèmes. À la fin du Moyen Âge, chaque cas concret de dépendance entre deux grandeurs est défini par une description verbale ou par un graphe. C'est le début de l'introduction des représentations graphiques, en plus des tableaux de correspondances et des expressions langagières.

Mais il a fallu attendre les travaux des mathématiciens européens du 16e et de la fin du 17e siècle, pour qu'il y ait introduction de l'algèbre moderne par Viète (1540 – 1603) et de la géométrie analytique par Descartes (1596 – 1650). Cela a permis d'étudier des mouvements et des phénomènes physiques par la coordination des différents modes de représentations : courbe, tableau de correspondance, formule algébrique et expression analytique. En introduisant la géométrie cartésienne, Descartes a donné également les perspectives pour l'utilisation du cadre numérique en géométrie. Le terme « fonction » a été introduit explicitement par Leibniz (1646 – 1716) pour représenter une relation entre variables (Kiem, 2011). Les travaux des mathématiciens du 19e siècle à nos jours ont permis d'introduire des expressions algébriques et la théorie des fonctions La fonction est alors représentée sur toutes les formes que nous connaissons aujourd'hui.

L'élaboration progressive du concept de fonction s'est donc réalisée avec le développement progressif et complexe des registres de représentation sémiotique associés.

GeoGebra : un environnement à multiples représentations sémiotiques

GeoGebra est un logiciel qui permet de travailler sur les multiples représentations sémiotiques de l'objet fonction. Il peut être utilisé comme un environnement d'exploration active des fonctions à l'aide de représentations multiples (Freiman et al., 2009). Geogebra peut également être un moyen de visualisation multi référentielle de l'objet mathématique, permettant ainsi d'établir des liens entre les multiples représentations sémiotiques de la fonction (Ibid, p. 45). La ligne de saisie permet d'écrire les expressions algébriques et symboliques d'une fonction. La fenêtre algébrique permet de faire apparaître des écritures algébriques, numériques ou formelles. La fenêtre de géométrie dynamique permet de faire apparaître la représentation graphique de la fonction (la courbe et le graphe). La fenêtre de calcul formel permet de saisir des expressions symboliques de la fonction et d'effectuer les calculs usuels de l'analyse fonctionnelle (résolution d'une équation ou inéquation, calcul des limites, calcul de la dérivée, calcul d'intégrales etc.). La fenêtre du tableur permet de saisir des nombres, des coordonnées, des fonctions ou des commandes et d'établir un tableau de correspondance $(x ; y)$.

Éléments théoriques du cadre de l'étude

Aspects sémiotiques dans l'activité mathématique

Dans le cadre général de la sémiotique, Duval (1993) s'intéresse à la sémiotique dans l'activité mathématique et au fonctionnement cognitif de la pensée mathématique. Il souligne ainsi *le paradoxe cognitif de la pensée mathématique* qui tient au fait que les objets mathématiques ne sont pas directement accessibles par la perception, mais seulement à travers des représentants et que, seule la distinction entre un objet mathématique et sa représentation peut garantir son appréhension qui ne peut être que conceptuel (Yavuz, 2005, p. 12). Il introduit ainsi les notions de *sémiosis* et de *noésis* pour désigner respectivement l'appréhension, ou la production, d'une représentation sémiotique et l'appréhension conceptuelle d'un objet mathématique. Il affirme que « la noésis est inséparable de la sémiosis » pour favoriser un apprentissage. Pour Duval (2017), il n'y a pas de noèse sans sémiosis c'est-à-dire il n'y a pas de pensée mathématique sans transformation des représentations sémiotiques quelles qu'elles soient (Duval, 2017). Il souligne que l'enseignement mathématique doit être organisé de façon à prendre en compte la forte liaison entre sémiosis et noésis.

Ainsi Duval (1993) propose de placer les élèves dans des conditions qui permettent cette prise de conscience plus globale, et pour cela, de leur proposer des tâches spécifiques. Il propose ainsi trois types de tâches :

- *Des tâches de variations comparatives relatives à la signifiance des représentations* : ces tâches concernent l'appréhension des représentations sémiotiques. En faisant varier systématiquement les représentations, on change le contenu représenté : le choix, parmi plusieurs représentations possibles dans le registre d'arrivée, de celle qui correspond à la représentation modifiée dans le registre de départ permet ainsi d'identifier les variations des unités signifiantes dans chaque registre de représentation.

- *Des tâches de couplage et de découplage entre des traitements non-sémiotiques comme des représentations visuelles constructibles instrumentalement (la figure géométrique par exemple) et des traitements sémiotiques* : elles concernent l'apprentissage des traitements propres à une certaine catégorie de registres. Duval précise que l'enseignement des mathématiques fait une grande place à l'apprentissage des traitements de registres seulement dans le cas où les traitements sont de type calcul, mais beaucoup moins à ceux où les traitements ne sont pas de type calcul.

- *Des tâches de double production pour les représentations sémiotiques complexes* : elles concernent le mode de production des représentations complexes. Duval appelle représentation complexe toute représentation qui « expose une démarche », comme un calcul comprenant plusieurs étapes. Il est essentiel, selon toujours Duval, lorsque ces productions soient faites dans un registre où l'organisation est linéaire, de demander préalablement une production dans un registre où l'organisation n'est pas linéaire (graphe, schéma…) et demander ensuite la production dans le registre à organisation linéaire comme une description de la première production. Ces tâches de double production se révèlent décisives pour l'apprentissage des élèves.

Dans la perspective de l'analyse d'une situation d'apprentissage des fonctions numériques au lycée, la sémiotique nous permettra d'analyser les stratégies de traitement et de conversion des registres *utilisés dans le processus d'acquissions des connaissances*.

L'approche des fonctions et les registres de représentation sémiotique

La conceptualisation de la fonction par les élèves passe par trois stades : la formation des représentations de la fonction dans différents registres, le traitement de ces représentations dans chaque registre et la conversion entre ces représentations d'un registre à un autre (Duval, 2002). Les fonctions usuelles peuvent ainsi acquérir dans ce processus le statut d'objet puis peu à peu d'objet abstrait ou concept de fonction (Anderson, 2015).

Prenons par exemple, la fonction numérique de la variable réelle $f(x)$ = x2 = 2x-1. Elle a plusieurs représentations, issues de différents systèmes sémiotiques : le type f polynômiale, la courbe de la fonction f dans le repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$, la courbe parabolique de la fonction f, le tableau de correspondance des couples de réels $(x;f(x))$. Selon Coppé, Dorier et Yavuz (2007) six principaux registres sont susceptibles d'intervenir dans l'étude d'une fonction numérique : le registre de la langue naturelle (Rl), le registre algébrique des formules (Ra), le registre graphique de courbes (Rg), le registre numérique des tableaux de valeurs (Rn), le registre graphique des tableaux de variation (Rtv) et le registre symbolique intrinsèque (Rs). Le traitement d'une représentation s'effectue en lien avec des règles de traitement propres au registre. Il est interne à chaque registre. Les traitements spécifiques aux registres de représentation des fonctions numériques au lycée sont : définition d'une fonction, d'une notion connexe ou une propriété d'une fonction par une formulation verbale (Tl), calcul algébrique (Ta), calcul numérique (Tn), résolution algébrique d'équations (Ta), résolution graphique d'équation (Tg), construction du graphe (Tg), lecture de graphes (Tg) pour ne citer que ceux-là. Chacun des registres de représentation de la fonction numérique à une variable réelle n'explicite pas les mêmes aspects de l'objet (Pavlopoulou, 1993 p. 68). Les différentes représentations sémiotiques de la fonction ne sont pas évoquées pour l'objet fonction ou pour communiquer, elles sont évoquées pour faire des traitements c'est-à-dire des calculs, des raisonnements, etc. Autrement dit, les représentations sémiotiques de la fonction ne sont importantes que dans la mesure où elles peuvent être transformées en d'autres représentations. La conversion des registres est une transformation externe d'un registre à un autre registre. Par exemple, le passage de l'expression $f(x)$=0 (Ra) aux valeurs de correspondance sur le tableau de valeur de $f(x$;0) (Rn) ou sur la courbe de f au point $A(x$;0) à appartenant à la courbe de la fonction f (Rg) permet de définir deux types de conversion distinctes, que l'on peut respectivement noter par Can et Cag. Dans un environnement numérique, il est nécessaire de prendre en compte de la présentation de l'objet mathématique telle qu'elle se présente sur l'outil

(Hitt, 2006). Les traitements et les conversions entre registres de la fonction numérique à variable réelle à l'aide de GeoGebra impliquent la prise en compte des représentations de l'objet fonction telles qu'elles se présentent sur l'outil.

Le point fondamental de l'activité mathématique sur la fonction n'est pas l'utilisation nécessaire des différentes représentations sémiotiques mais la capacité de faire la conversion. L'apprentissage du concept de fonction au lycée implique une articulation cohérente des différents registres de représentation sémiotique entrant en jeu dans la résolution d'un problème lié à ce concept (Hitt, 1998).

Éléments méthodologiques

Le contexte de l'expérimentation

L'expérimentation s'est déroulée dans un fonctionnement régulier de l'enseignement des fonctions numériques à une variable réelle au lycée avec toutes les interférences que l'utilisation de GeoGebra peut entrainer dans le système éducatif du Niger.

- Les séances pré-expérimentales, réalisées au cours de l'année scolaire 2016-2017, ont permis de tisser une relation professionnelle étroite et un sentiment de confiance entre le chercheur et les deux enseignants et ont permis le contrôle de certains biais.
- Les séances expérimentales ont été réalisées au cours de l'année scolaire 2017-2018. Deux classes ordinaires de première (élèves de 17 à 18 ans) tenues par ces deux enseignants ont été choisies. L'enseignant 1 (Ens1) est intervenu dans une classe de mathématiques de première de 45 élèves alors que l'enseignant 2 (Ens2) dans une classe de mathématiques de première de 31 élèves.
- Des observations vidéographiques ont été réalisées à l'aide de trois caméras : la première fixée en fond de classe, la deuxième fixée devant et la troisième fixée sur un groupe d'élève. Le nombre d'élèves par groupe de travail varie entre 4 et 6.

Présentation des problèmes

Le problème 1 a été choisi par les professeurs selon le programme en vigueur. Cela entre dans le cadre du choix d'une expérimentation classe ordinaire de mathématiques pour l'introduction de la notion de comparaison de deux fonctions du chapitre intitulé « les généralités sur les fonctions numériques ». Selon le programme de mathématiques, l'objectif était de « comparer deux fonctions (algébriquement et graphiquement) ». Le problème 2, a été proposé aux élèves par l'enseignant lors de l'introduction de la notion de limite de fonction en un point du chapitre « limites et continuité ». Toujours selon le programme, l'objectif était d'« établir le comportement des fonctions de références ».

Problème 1 : On considère les fonctions f et g définies par : $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^3$. C_f et C_g sont les courbes représentatives de f et g.

a) Représenter graphiquement les fonctions f et g à l'aide du logiciel GeoGebra.

b) Compléter à l'aide de GeoGebra le tableau des valeurs suivant.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$							
$g(x)$							

c) Identifier dans le tableau les points où f et g sont égales.

d) Comparer graphiquement les fonctions f et g sur l'intervalle [-3 ; 3].

e) Déterminer les points d'intersection de C_f et C_g avec l'axe des abscisses.

Problème 2 :

1. Compléter le tableau ci-dessous. On donnera les résultats sous forme d'une puissance de 10.

x	-1000	-100	-10		10	100	1000
x^2							
x^3							
$\sqrt{x}$							
$\frac{1}{x}$							
$\frac{1}{x^2}$							

2. a. Que devient x^2 lorsque x devient indéfiniment grand ?

   b. Lorsque x devient « indéfiniment grand », on convient de dire que x tend vers $+\infty$. Remplacer alors les pointillés par $+\infty$.

   Lorsque x tend vers .... ; x^2 tend vers ......

3. Remplacer alors les pointillés par $+\infty$, $-\infty$ ou 0.

   a. Lorsque x tend vers $+\infty$; x^3 tend vers ......
   b. Lorsque x tend vers $+\infty$; $\sqrt{x}$ tend vers ......
   c. Lorsque x tend vers $+\infty$; $\frac{1}{x}$ tend vers ......
   d. Lorsque x tend vers $+\infty$; $\frac{1}{x^2}$ tend vers ......
   e. Lorsque x tend vers $-\infty$; x^2 tend vers ......
   f. Lorsque x tend vers $-\infty$; x^3 tend vers ......
   g. Lorsque x tend vers $-\infty$; $\frac{1}{x}$ tend vers ......
   h. Lorsque x tend vers $-\infty$; $\frac{1}{x^2}$ tend vers ......

Une analyse a priori de ces problèmes nous a permis de faire le diagnostic des registres de représentation des fonctions numériques disponibles avec GeoGebra, les traitements et les conversions possibles à mobiliser au cours du processus de résolution du problème.

Analyse des résultats

Les stratégies en termes de registres mobilisées par les élèves

Dans le tableau 3, nous avons résumé les stratégies mobilisées par les élèves au sein des groupes de travail pour résoudre les tâches proposées par l'enseignant.

Tableau 3 – Synthèse du problème 1

Numéro de la question (registres concernés)	Stratégies de résolution	Stratégies mobilisées
Question a (Ra)	Cag, Ta7	Stratégie algébrique : Cag, Ta7
Question b (Ra et Rg)	Stratégie 1 : Can, Ta7 Stratégie 2 : Cgn, Tg10	Stratégie algébrique : Can, Ta7
Question c (Rn et Rg)	Stratégie 1 : Csn, Ts5 Stratégie 2 : Cna, Tn1 Stratégie 3 : Cga, Tg1	Stratégie numérique : Cna, Tn1 Stratégie graphique : Cga, Tg1
Question d (Rg et Rn)	Stratégie 1 : Cla, Tl4 Stratégie 2 : Cgl, Tg6 Stratégie 3 : Cnl, Tn1 Stratégie 4 : Cng, Tn1	Stratégie graphique : Cgl, Tg6
Question e (Rg, Ra et Rn)	Stratégie 1 : Csn, Ts5 Stratégie 2 : Cgn, Tg1 Stratégie 3 : Cng, Tn1 Stratégie 4 : Cga, Tg1 Stratégie 5 : Cag, Ta2 Stratégie 6 : Can, Ta2	Stratégie graphique : Cgn, Tg1

Pour répondre la question a), les élèves ont mobilisé la stratégie Cag, Ta7. L'outil de ***saisi*** a facilité pour les élèves l'écriture des formules algébriques et l'outil graphe la lecture des deux graphes de manière distincte. L'enseignant a vérifié que le processus de traitement de la formule algébrique en algorithme par les élèves était approprié ; ils sont parvenus à saisir les formules sur l'outil de GeoGebra. Il a aidé les élèves en difficultés à faire ce traitement.

Pour répondre à la question b), les élèves ont procédé à l'utilisation de la stratégie 1. L'outil de saisi a facilité le calcul de chaque image par les élèves et l'outil ***algèbre*** a permis la lecture de la valeur de l'image obtenue. L'enseignant n'a pas réorienté l'activité des élèves vers la stratégie 2, utilisant le ***tableur***, mais il a aidé les élèves en difficulté à effectuer le calcul algébrique.

Pour répondre à la question c), les élèves ont utilisé une stratégie numérique (stratégie 4). Mais ils se sont heurtés à des difficultés de conversion algébrique sans passer par le graphique. L'outil Graphe a facilité ce passage du numérique au graphique. Même si l'énoncé à explicitement demandé l'introduction numérique, c'est l'enseignant est intervenu pour guider les élèves vers cette stratégie.

Pour répondre à la question d), les élèves ont procédé à l'utilisation de la Stratégie 2 (Cgl, Tg6). Le traitement graphique par ***zoom*** a été d'un grand apport. Il a ainsi permis aux élèves de bien repérer l'intervalle d'étude de cette comparaison graphique. L'enseignant est particulièrement intervenu pour compléter le travail des élèves à l'aide de la stratégie 1 (Cla, Tl4).

Pour répondre à la question e), les élèves n'ont pas tous procédé avec la même stratégie. Certains ont adapté la stratégie (Can, Ta2) et d'autres la stratégie 6 (Cga, Tg1). Les élèves ayant choisi la résolution algébrique de l'équation y sont parvenus sans aide de l'enseignant. L'outil algèbre leur a été utile pour le calcul. Par contre ceux ayant choisi la résolution graphique ont bénéficié de l'aide de l'enseignant, notamment pour placer le point à partir de l'outil ***intersection***.

Tableau 4 - Synthèse du problème 2

Numéro de la question (registre concernés)	Stratégies de résolution	Stratégies mobilisées
Question 1 (Ra et Rg)	Stratégie 1 : Can, Tn3 Stratégie 1 :Cgn, Tn1	Stratégie algébrique
Question 2a (Rn, Ra, Rg et Rl)	Stratégie 1 : Cnl, Tn2 Stratégie 2 : Cal, Ta2 Stratégie 3 : Cgl, Tg9	Stratégie numérique
Question 2b (Rl, Rn, Rg et Ra)	Stratégie 1 : Cls, Tl3 Stratégie 2 : Cgl, Tg9	Stratégie langagière
Question 3 (Rl, Rn, Ra, Rg et Rs)	Stratégie 1 : Cls, Tl3 Stratégie 2 : Cls, Tle4 Stratégie 3 : Cgl, Tg9	Stratégie langagière Stratégie graphique

Dans le tableau 4, nous avons résumé les stratégies mobilisées par les élèves au sein des groupes de travail pour résoudre les tâches proposées par l'enseignant.

Pour répondre la question 1., les élèves ont mobilisé la stratégie algébrique (Can, Tn3)**.** Les élèves ont débuté à chaque fois par la saisie de la fonction de référence puis ont procédé au calcul des images directes à l'aide de l'outil *algèbre* avant d'établir le tableau de correspondances. Pour les fonctions de références x^2 et x^3, les élèves n'ont pas eu de difficultés à se rappeler les expressions algébriques en algorithme approprié pour GeoGebra. Par contre pour saisir de manière appropriée les fonctions de références . $\sqrt{x}$; $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{x^2}$ dans la barre de saisie de GeoGebra, il a fallu l'intervention de l'enseignant. Pour calculer les images directes et remplir le tableau de correspondance, les élèves n'ont pas éprouvé beaucoup de difficultés. Pour répondre la question 2.a, les élèves ont mobilisé la stratégie numérique (Stratégie 1 : Cnl, Tn2). À partir du tableau de valeurs x^2, ils sont parvenus à interpréter la tendance des valeurs de x lorsque les valeurs devient infiniment grand c'est-à-dire « *lorsque x devient infiniment grand, x^2 devient infiniment grand* »**.** Pour répondre la question 2.b, les élèves ont mobilisé la formulation verbale des tendances des valeurs (Cls, Tl3). Sans beaucoup de difficultés, ils sont parvenus à interpréter en langue pour déduire le signe « +∞ » qui convient pour une expression langagière convenable en mathématiques. Pour répondre à la question 3., les élèves ont mobilisé la formulation verbale des tendances des valeurs (Cls, Tl3). Ils ont établi une correspondance en interprétation verbale (et écrite) vers une expression langagière convenable en mathématiques et déduire le signe qui convient. Les élèves ont eu recours à la stratégie graphique lorsqu'ils ont rencontré des difficultés d'interprétation plutôt que de faire appel à l'aide de l'enseignant.

Le rôle de l'enseignant dans les stratégies mobilisées par les élèves

Au cours du processus de résolution de ces deux problèmes, l'enseignant a aidé les élèves en difficultés à saisir des fonctions $f(x)=x^2$ et $g(x)=x^3$ sur GeoGebra. Pour réaliser les tâches de transformation d'expressions algébriques de f et g en $f(x)$=x^2 et $g(x)$=x^3, ils eu du mal à réconcilier leurs représentations des fonctions numériques et les représentations telles qu'elles doivent se présenter sur GeoGebra. Des interventions similaires par l'enseignant ont été observées lors de l'introduction des fonctions $\sqrt{x}$, $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{x^2}$ nécessitant des transformations algébriques en *sqrt(x)* ,1/(x) et 1/(x^2) adaptées à l'outil GeoGebra. L'enseignant a joué donc un rôle pour l'introduction des registres relatifs à la fonction numérique qui ne sont pas familiers aux élèves. L'intervention de l'enseignant a permis aux élèves de surmonter les difficultés liées aux calculs des images à partir des expressions algébriques des fonctions sur l'outil algèbre de GeoGebra, à la détermination des coordonnées des points d'intersection des courbes représentatives de f et g sur la fenêtre graphique en utilisant les outils appropriés. L'utilisation de l'outil zoom, pour visualiser les graphes de fonctions et émettre des conjectures, n'a pas été possible sans l'aide de l'enseignant. L'enseignant a joué un rôle pour l'utilisation de certains registres de représentations de la fonction par les élèves sur GeoGebra.

Ces différentes interventions de l'enseignant mettent en évidence les difficultés des élèves dans le contrôle des tâches d'introduction ou de mobilisation des registres de représentations des fonctions numériques à une variable réelle, étudiées dans l'environnement GeoGebra.

Conclusion

Au regard du cadre théorique de cette recherche, l'utilisation des outils de GeoGebra pour l'apprentissage des fonctions numérique au lycée a provoqué une diversification des stratégies de résolution des tâches en termes de registres (Duval, 2006). Il ressort des résultats que plusieurs registres de représentations des fonctions numériques sont concernés par le processus de résolution de problème avec GeoGebra. Il ressort également que l'utilisation de cet outil numérique a provoqué une évolution dans la diversification des stratégies mobilisables. La comparaison entre les stratégies de résolution possibles et les stratégies effectivement mobilisées révèle que les élèves ont eu des difficultés à mobiliser tout le potentiel de GeoGebra tel qu'a été identifié à priori. Les élèves ont éprouvé des difficultés à prendre le contrôle les modes d'expression qui sont externes au système de représentation sémiotique classique des fonctions numériques au lycée (Artigue, 2002). Il ressort des résultats que le rôle du professeur a plutôt consisté à aider les élèves à réconcilier leurs représentations des fonctions numériques et les représentations telles qu'elles se présentent sur GeoGebra que d'aider les élèves à progresser dans leur apprentissage. L'utilisation de GeoGebra pour l'apprentissage des fonctions numériques au lycée nécessite de la part des élèves le besoin a priori de contrôler certaines tâches, en particulier des tâches plus complexes. Suite à ces résultats une autre étude a été menée qui prend en compte a priori le contrôle de l'utilisation de GeoGebra.

Références

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7*(3), 245-274.

Artigue, M. (2009). L'enseignement des fonctions à la transition lycée–université. *Actes du XVe Colloque CORFEM, 2008*, 25-44.

Bloch, I. (2005). Un milieu graphique pour l'apprentissage de la notion de fonction au lycée. *Educação Matemática Pesquisa, 7*(1), 31-62.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5*, 37-65.

Duval, R. (2006). Transformations de représentations sémiotiques et démarches de pensée en mathématiques. *Actes du XXXIIe colloque COPIRELEM*, 67-89.

Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking-The registers of semiotic representations*. Cham: Springer International Publishing, 1st ed. 2017

Freiman, V., Martinovic, D., & Karadag, Z. (2009). Decouvrir le potentiel ́educatif du logiciel dynamique GeoGebra : Communaute de collaboration et de partage. *Bulletin AMQ Association Mathematique du Quebec, 49*(4), 34-49.

Gagatsis, A., & Monoyiou, A. (2013). Les stratégies des futurs instituteurs dans la résolution de tâches sur les fonctions. Approche ponctuelle ou approche coordonnée ? *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 18*, 115-137.

Gilbert, H., & Schlomiuk, N. H. (2007). *Sur les propriétés des fonctions réelles arbitraires de variable réelle : Une approche historique*. Rapport de l'Université de Montréal CRM 32-45

Hitt, F. (1998). Systèmes sémiotiques de représentation liés au concept de fonction. In *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 6*(1), 7-26.

Hitt, F. (2006). Students' functional representations and conceptions in the construction of mathematical concepts. An example: The concept of limit. In *Annales de didactique et de sciences cognitives, 11*, 253-268.

Kiem, M. T. (2011). *Apprentissage des fonctions au lycée avec un environnement logiciel : Situations d'apprentissage et genèse instrumentale des élèves*. [Thèse de Doctorat, Université Paris VII]. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00658680

Nachit, B., Namir, A., Bahra, M., Kasour, R., & Talbi, M. (2012). *Une approche 3D du concept de fonction d'une variable réelle. MathémaTICE, 32, article 447.*

Oehrtman, M., Carlson, M., & Thompson, P. W. (2008). Foundational reasoning abilities that promote coherence in students' function understanding. In M. P. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics education, 27*, 42. Washington, DC: Mathematical Association of America.

Pavlopoulou, K. (1993). Un problème décisif pour l'apprentissage de l'algèbre linéaire: la coordination des registres de représentation. In *Annales de didactique et de Sciences cognitives, 5*, 67-93.

Tran Kiem, M. (2012). Une approche expérimentale des fonctions au lycée avec le logiciel Casyopée. *Petit x*, 88, 49-74.

Trouche, L. (2004). Environnements Informatisés et Mathématiques : Quels usages pour quels apprentissages ? *Educational Studies in Mathematics, 55*(1), 181-197.

Yavuz, I. (2005). *Evolutions récentes de l'enseignement de la notion de fonction en France en classe de seconde. Utilisation des tableaux de valeurs et de variations*. [Thèse de doctorat, Université Lumière-Lyon II].