Titre: Rapprochement inépuisable en géométrie dynamique : étude de la conceptualisation de la notion de tangente comme position limite chez un lycéen au Cameroun

Auteur: NGUEMBOU NANA Giscard

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 608 - 621

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Rapprochement inépuisable en géométrie dynamique : étude de la conceptualisation de la notion de tangente comme position limite chez un lycéen au Cameroun

NGUEMBOU NANA[1] Giscard

Résumé – Ce travail montre comment le lycéen peut prendre appui sur le rapprochement inépuisable pour appréhender la droite tangente comme étant une position limite. La construction de connaissances opératoires et prédicatives relatives au concept de droite tangente est rendue possible grâce à la coordination des fonctionnalités déplacement et zoom d'un environnement de géométrie dynamique. En effet, ils permettent de rapprocher sans cesse et autant que l'on veut la droite sécante de la droite tangente.

Mots-clés : rapprochement inépuisable, position limite, droite tangente, connaissance opératoire, connaissance prédicative.

Summary - this work shows how the high school student relies on the concept of inexhaustible rapprochement to apprehend the tangent line as a limit position. The construction of operational and predicative knowledge on this concept occurs, thanks to the coordination of the displacement and zoom functionalities of the dynamic geometry environment, with a view to bringing the secant line closer to the straight line as much as desired tangent.

Keywords: endless rapprochement, limit position, tangent line, operating knowledge, predicative knowledge

1. Université de Yaoundé 1, Cameroun, giscardnana@yahoo.fr

L’idée de rapprochement inépuisable dans le concept de limite

Dans le cadre de ce travail, nous entendons par vision dynamique de la limite, celle-là qui intègre l’idée du rapprochement sans cesse, dans la **technique** mise en œuvre pour *déterminer la limite*, comme par exemple, la vision de la limite présente dans la définition proposée par d’Alembert :

> On dit qu’une grandeur est une limite d’une autre grandeur, quand la seconde peut approcher de la première plus près que d’une grandeur donnée, si petite que l’on puisse la supposer, sans pourtant que la grandeur qui approche puisse jamais surpasser la grandeur dont elle approche : En quelque sorte que la différence d’une pareille quantité à la limite est absolument inassignable. […) A proprement parler, la limite ne coïncide jamais, ou ne devient jamais égale à la quantité dont elle est la limite ; mais celle-ci s’en approche toujours de plus en plus, et peut en différer aussi peu qu’on voudra. (L’article LIMITE de l’encyclopédie de Diderot et d’Alembert).

La formulation ci-dessus, peut laisser sous-entendre que la limite est toujours non atteignable. Pourtant, dans certains cas, la technique mise en œuvre pour déterminer la limite montre qu’elle est bel et bien atteignable, comme nous le verrons ci-dessous avec l’expérience de (Cornu, 1983). Plus loin, nous allons tenter de reformuler cette définition pour le lycéen, dans le but de lui faire travailler sur la notion de droite tangente avec une vision dynamique et en cherchant à lui faire comprendre que, la technique mise en œuvre pour rapprocher, peut laisser percevoir la droite tangente comme étant une position limite.

Plusieurs chercheurs proposent un sens à la notion de droite tangente en s’appuyant sur l’idée de rapprochement. Ainsi Cornu (1983), par exemple, a conduit une expérience, qui consiste en un dispositif matériel constitué d’une règle appuyée contre 2 clous, l’un, A, planté dans une feuille sur laquelle est tracée une courbe et l’autre, M, pouvant se déplacer vers le premier. Le chercheur observe les difficultés des apprenants à interpréter en termes de limite ce qui se passe lorsque le clou en mouvement arrive à la position du clou fixe :

> « Tous les élèves font allusion au mouvement de la règle. […] Mais beaucoup ne font pas allusion à ce qui se passe lorsque **le point M arrive en A**. Et, parmi ceux qui font allusion beaucoup **n’ont pas vu la notion de limite** » (Cornu, 1983, p. 244).

Cette expérience qui consiste à rapprocher le présentant d’un point M pour le superposer à celui d’un point A et obtenir une intersection double (entre la sécante (AM) et la courbe) correspond à une vision statique de la limite associée à la notion de droite tangente. En effet, la technique mise en œuvre pour rapprocher le point M vers le point A, ne vise pas à faire émerger chez le lycéen l’idée de rapprochement sans cesse entre la sécante et la tangente. Aussi, la classe se focalise davantage sur ce qui se passe lorsque le point M arrive en A. Elle pourrait alors, aboutir à une définition de la limite, suivant une vision statique, comme celle proposée par Vivier (2010, p. 187) lorsqu’il dit :

« une tangente est une sécante qui forme une intersection d'ordre de multiplicité au moins 2 avec la courbe »

En plus, L'arrivée du point M en A, marque le passage de la droite sécante à sa position limite qui correspond à la droite tangente. Ce qui laisse clairement entendre que la limite (la droite tangente) est bel et bien atteignable. Ainsi, la vision statique de la limite, intègre dans la technique mise en œuvre pour déterminer la limite, l'idée que celle-ci est atteignable, pendant que la vision dynamique peut laisser sous-entendre que la limite est non atteignable. En cela, Dufour (2019) soutient qu'il possible pour le lycéen « d'hésiter sur le caractère *accessible ou non* de la limite » (p.73).

Les travaux de Cornu (1983) montrent que la limite, appréhendée de façon statique, aurait un faible potentiel pour faire émerger l'idée de position limite chez le lycéen, en particulier dans le cas de la droite tangente. C'est, sans doute, ce que note Schneider lorsqu'elle déclare : « Cette définition est, elle aussi, purement géométrique, en ce sens qu'elle ne suppose aucun détour par les pentes, mais contrairement à la perception des élèves, elle évoque plus une possibilité *de dépassement* qu'une réalisation effective » (1992, p. 327). Dès lors, trouver une technique géométrique dont la mise en œuvre est susceptible de faire percevoir la droite tangente comme étant une position limite nous semble être une piste de travail avec les élèves. Ainsi, nous reprenons de la définition de d'Alembert, que nous adaptons pour le lycéen et que nous précisons pour le cadre géométrique afin de proposer une définition de la limite, suivant une vision dynamique : *un objet géométrique du plan (A) est limite ou position limite d'un objet de même nature (B), si l'on peut trouver une* ***technique*** *permettant rapprocher sans cesse et autant que l'on veut, l'objet (B) de l'objet (A), sans jamais l'atteindre, ni le surpasser*. Cette définition repose, entre autres, sur le rapprochement toujours possible, sans jamais atteindre la limite, que nous proposons de nommer « **rapprochement inépuisable** ». Nous faisons l'hypothèse que le rapprochement inépuisable pourrait permettre au lycéen de percevoir la droite tangente comme étant une position limite, dès lors qu'il est possible de proposer une **technique** permettant d'opérer un tel rapprochement.

Une technique opératoire de construction de la droite tangente vue sous le prisme de la position limite

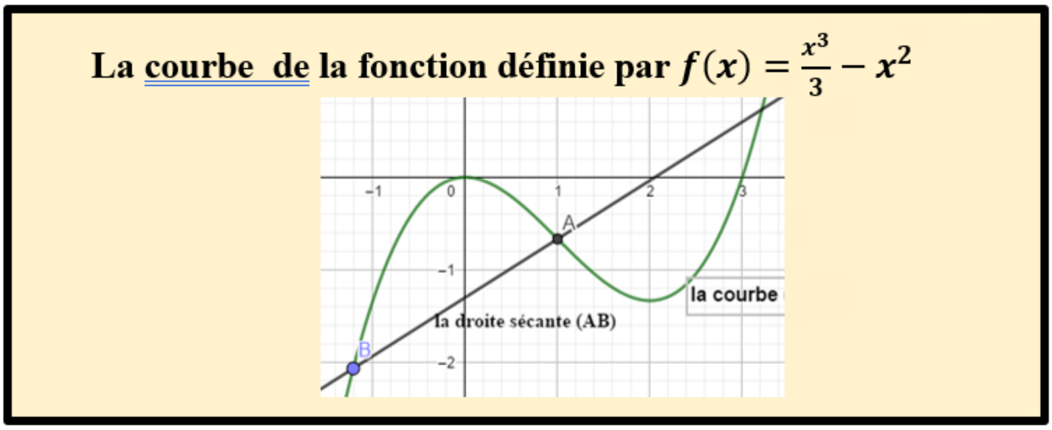


Figure 1. – B le point mobile sur la courbe (c) ; A un point fixe de (c) ; échelle sur les axes : 1/1

Une technique pour travailler le concept de tangente comme étant une position limite est possible en utilisant la géométrie dynamique. Dans le cas d'une droite tangente à une courbe (c) en un point A, elle consiste à construire le point A fixe sur la courbe (c), un point B sur la courbe, la droite sécante à (c) passant par les points A et B. De cette façon, le déplacement du point B vers le point A (voir la figure 1) en convoquant une technique adéquate, peut permettre de faire émerger l'idée d'un rapprochement inépuisable de la droite sécante vers la droite tangente.

L'idée rapprochement inépuisable obtenue par la coordination des fonctionnalités zoom et déplacement

Suite à ce premier travail, la construction se poursuit en rapprochant le point B à proximité du point A à l'aide de la fonctionnalité déplacement. La fonctionnalité zoom est ensuite mobilisée pour agrandir la représentation à l'écran de la distance entre le point B et le point A. Par la suite, on rapproche comme précédemment le point B à proximité du point A. On réitère le processus de rapprochement autant que nécessaire. On choisit de s'arrêter lorsque la figure a atteint un point de saturation. Autrement dit, lorsqu'une portion de la courbe (c) et une portion de la droite sécante (AB) se confondent, en formant à l'écran une image semblable à un segment de droite, avec les points A et B bien distincts à l'écran dans la fenêtre géométrie (la figure 2).

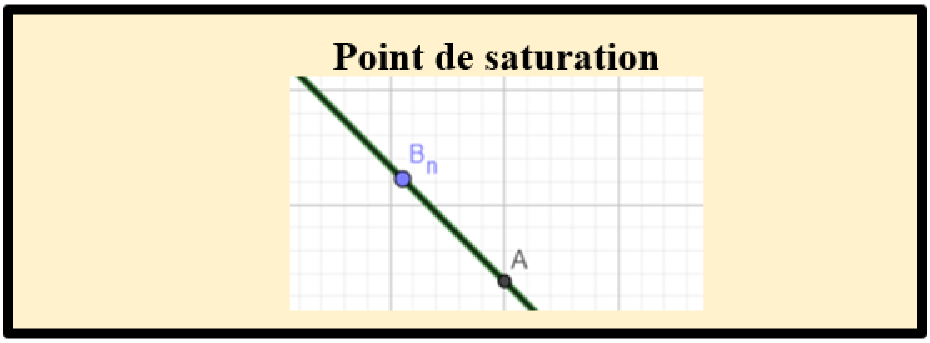


Figure 2. – La courbe (c) et la droite sécante (AB) sont confondues à l'écran. Échelle : 0,001 x 0,001

Chaque rapprochement du point B vers le point A, rapproche la sécante de la tangente. Ainsi, avec la géométrie dynamique et la coordination des fonctionnalités zoom et déplacement, on met évidence un moyen de rapprocher sans cesse et autant que l'on veut, la sécante de la tangente, ce qui caractérise le *rapprochement inépuisable*. Notre hypothèse est que cette technique de rapprochement permet de mobiliser une vision dynamique de la limite.

Le passage de la droite sécante à sa position limite

Au point de saturation, les représentants des points A et B sont bien distincts à l'écran. Une possibilité pour les faire coïncider, consiste à utiliser la fonctionnalité zoom inverse. Dans la pratique, on effectue des zooms inverses consécutifs entre les représentants des points A et B jusqu'à ce qu'ils se superposent à l'écran. En ce moment-là, la droite sécante passe à sa position limite qui correspond à la droite tangente (voir la figure 3).

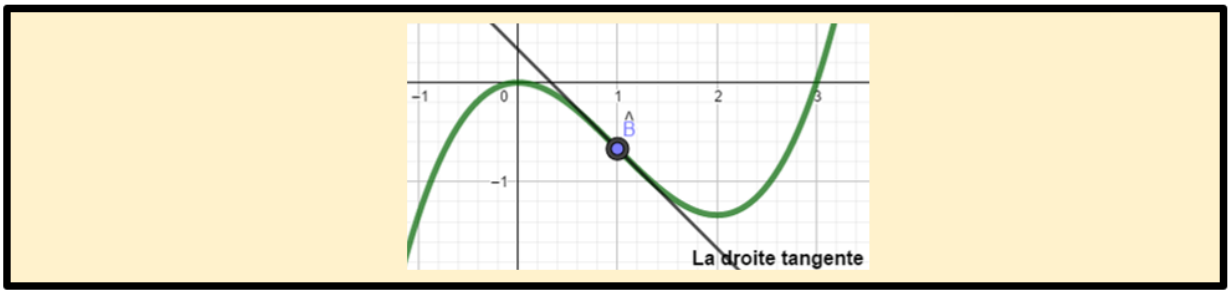


Figure 3. – Les zooms inverses permettent de faire passer la droite sécante à sa position limite.

La poursuite de zooms inverses renforce l'image de superposition du représentant du point B avec celui du point A. Dès lors, la droite et la courbe forment une intersection dont l'ordre de multiplicité est au moins 2 (une vision statique de la limite).

La conceptualisation dans l'action : un moyen pour construire des sens associés au concept de position limite

À propos du concept de limite, nous avons une distinction entre vision statique et vision dynamique et une technique permettant de rapprocher de façon inépuisable la sécante vers la tangente. Or, nous nous intéressons aux sens mathématiques que les lycéens peuvent construire à propos du concept de position limite en particulier en utilisant cette technique. La théorie des champs conceptuels (Vergnaud, 2001) indique un moyen permettant de construire des sens sur un concept mathématique. Elle propose la conceptualisation dans l'action. Or, lors de la mise en œuvre de la technique géométrique sus-décrite le participant est bel et bien dans l'action. Il peut donc avoir conceptualisation sur la notion de position limite pendant cette période. Un indicateur de cette conceptualisation est la construction des *connaissances prédicatives*. En effet, la théorie sus-évoquée reconnait deux formes de connaissances : la forme prédicative « celle qui prend la forme de textes, d'énoncés, de traités et de manuels » (Vergnaud, 2001, p. 1) et la forme opératoire, celle qui permet de faire et de réussir. La connaissance opératoire est d'abord une compétence procédurale, comme le soutient Vergnaud à travers l'exemple suivant relatif au travail d'un porcher :

> Or, ce porcher avait développé des schèmes très subtils pour détecter des porcs présentant des signes de souffrance […] il n'était guère à mesure d'expliquer les indices qu'il prenait, ni les raisons des différents gestes qu'il savait faire pour calmer les porcs stressés. (2001, p. 17).

Le chercheur ajoute que : « Ce décalage entre les connaissances opératoires et leur formulation est un phénomène très général » (2001, p. 17). Par cet exemple l'auteur montre que : « la conceptualisation est une condition de l'énonciation » (2001, p. 12). Ainsi la construction des connaissances prédicatives, à partir des connaissances opératoires, suppose qu'il a eu conceptualisation dans l'action. Nous faisons alors le choix, de faire en sorte que les participants acquièrent les connaissances sur la notion de position limite, d'abord sous la forme opératoire. C'est-à-dire en leurs donnant des moyens de construire la droite tangente suivant une vision dynamique de la limite, dans l'environnement GéoGebra, à l'aide de la technique géométrique sus-décrite. Visant, ainsi la construction des connaissances prédicatives par les participants eux-mêmes, en situation. Avec éventuellement la médiation de l'enseignant. Autrement dit, nous visons la conceptualisation dans l'action sur la notion de position limite. Par adaptation des schèmes, lors de la construction de la droite tangente. Notamment à travers le développement des composantes invariants opératoires, règle d'action, prise d'information et la composante inférence du schème.

Effet d’une séquence d’enseignement avec géométrie dynamique sur la conceptualisatin de la notion de tangente

Nous avons conçu une situation d’enseignement de la notion de tangente à une courbe que nous avons menée auprès d’un public de lycéens au Cameroun. La technique de collecte de données que nous avons retenue est le *Teaching Expériment* (Dufour, 2019). Il s’agit d’une technique de collecte de données propre à la didactique des mathématiques. Elle a principalement été développée à l’école Russe et plus récemment aux États-Unis par, entre autres, Steffe et Thompson (2000). Elle consiste en des séances d’enseignement orchestrées par **un enseignant-chercheur** qui a ainsi la possibilité d’interagir avec les apprenants et d’intervenir dans les interactions entre les apprenants en vue d’évaluer, d’orienter et de réguler les connaissances construites. Ceci a pour but de s’assurer que les apprenants surmontent la difficulté annoncée par la recherche et surtout de comprendre et d’expliquer comment ils y parviennent. Dans un *Teaching Expériment*, outre l’enseignant chercheur, il y a un chercheur-témoin et des participants. Le chercheur-témoin participe à l’élaboration des tâches à proposer aux participants et donne son avis sur l’interprétation des données, dans le but de renforcer l’objectivité du chercheur-enseignant. Dans notre *teaching experiment*, le rôle d’enseignant-chercheur a été tenu par l’auteur de l’article, celui de chercheur-témoin par un enseignant de lycée. Les participants sont quatre volontaires d’une classe de l’enseignant, choisis en collaboration entre le chercheur et l’enseignant. Ils avaient des genèses d’usage développées par rapport à la géométrie dynamique, ceci dans le but de faciliter l’instrumentalisation des fonctionnalités nécessaires à la construction dynamique de la droite tangente. **Les outils de collecte de données étaient :** une caméra à chaque poste, les cahiers des participants, un journal de bord pour des prises de notes avant, pendant et après les séances. **Les instruments de collecte de données étaient :** un guide d’observation utilisé pendant les séances et un guide d’entretien avec l’élève après les séances.

Les situations d’apprentissage de la tangente

Deux situations ont été proposées aux participants. La première est dans le cadre géométrique, la seconde dans le cadre de l’analyse.

1. Situation 1 : construction et déplacement d'une droite sécante à une courbe

On considère la courbe représentative de la fonction f définie par : $f(x) = \cos(x)$, le point $A = (\frac{\pi}{2}, 0)$ et B un point sur la courbe (c) distinct du point A

Le but de ce travail est de proposer une définition de la droite tangente suivant une vision dynamique de la limite.

1. Dans l'environnement de GéoGebra, construire la courbe (c), le point A et le point B.
2. A l'aide de la fonctionnalité « tangente » du logiciel construire la droite tangente (T) à la courbe (c) au point A.
3. Utilise la coordination des fonctionnalités zoom et déplacement, pour rapprocher le point B du point A jusqu'à ce que la courbe (c), la droite sécante (AB) et la tangente (T) se confondent à l'écran et apparaissent comme un segment de droite, avec les points A et B bien distincts dans la fenêtre géométrie.
4. Propose alors une définition de la droite tangente
5. Utiliser les zooms inverses pour faire coïncider les points A et B

2. Situation 2 : production d'une équation algébrique de la droite en la regardant comme une position limite.

On considère la courbe représentative de la fonction f définie par : $f(x) = \cos(x)$, le point $A = (\frac{\pi}{2}, 0)$ et B un point sur la courbe (c) distinct du point A.

En prenant appui sur la définition proposée ci-dessus, écrire une équation algébrique de la droite tangente à (c) en A. Désigner par n le n ième rapprochement du point B vers le point A et par B_n la n$^{\text{ième}}$ position occupée par le point B dans le cadre d'un rapprochement sans cesse de ce point, vers le futur point de tangence A.

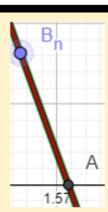
3. Le choix des productions à analyser

La séance, décrite et analysée en partie, s'inscrit dans une séquence d'enseignement visant à faire évoluer les conceptions actuelles de quatre lycéens sur la notion de tangente. Nous nous sommes rendus à la 10^{e} séance sur les 13 séances prévues. Le participant X est celui qui a assisté à toutes les séances faites. Deux participants ont abandonné après la 5^{e} séance. Le participant Y était présent lors de la 10^{e} séance, mais était absent pendant 4 séances successives. Raisons pour lesquelles nous faisons le choix de présenter et d'analyser les productions du participant X. Suites à des phases de formulation et d'institutionnalisation au cours des neuf premières séances, il a aussi acquis un nouveau langage ou vocabulaire consistant et ne figurant pas dans les manuels scolaires. Le but de cette séquence d'enseignement est de proposer au Ministère des Enseignements Secondaires (MINESEC) du Cameroun, une organisation praxéologique centrée l'utilisation de la géométrie dynamique et susceptible de faire de la droite tangente et du cercle tangent de véritables objets d'étude en classe de première ou de terminale.

Les productions du participant X

Construction de sens géométrique et dynamique sur le concept de droite tangente grâce à une technique permettant de mettre en œuvre un rapprochement inépuisable

Les productions graphiques du participant X (Figure 4 ci-dessous), montrent que ce dernier est arrivé à rapprocher le point B du point A jusqu'à saturation. Au cours de ce rapprochement le participant X agit matériellement sur les représentants des objets en jeu. Il constate, dans l'action, que la technique mise en œuvre lui indique un moyen de poursuivre sans cesse le rapprochement entre ces deux points. Ce premier rapprochement du point B vers le point A en implique un autre, celui de la sécante vers la tangente. Ce second rapprochement, n'est pas de même nature que le précédent et se manifeste par la réduction de l'écart angulaire entre la tangente et la sécante. Dans l'action, le participant a constaté que la technique mise en œuvre lui indique un moyen pour réduire sans cesse et autant qu'il veut cet écart angulaire. Autrement dit, il a constaté que le second rapprochement est lui aussi un rapprochement inépuisable.



Connaissances opératoires (1) du participant X

Le point de saturation est atteint grâce à la coordination des fonctionnalités zoom et déplacement.
La courbe (c) en couleur verte ; la droite tangente en couleur noire et la droite sécante en couleur rouge. Les points A et B sont bien distincts à l'écran.

Figure 4. – Les productions du participant X relatives à la tâche (3) de la situation (1) : confusion à l'écran de la sécante (AB) et de la droite tangente

Nous faisons l'hypothèse que la composante concept-en-acte du schème du participant lui a permis de sélectionner ces informations comme importantes pour définir la droite tangente. Et que la composante inférence lui a permis de relier et de transformer les informations sélectionnées en connaissances prédicatives sur la notion de position limite, en articulant les notions de droite sécante (AB), technique, fonction et la notion de rapprochement inépuisable. Pour valider ou invalider ces hypothèses nous analysons ses productions relatives à la tâche (4) de la situation (1).

Les productions du participant X relatives à la tâche (4) de la situation (1)

<u>Connaissances prédicatives (1) du participants X</u>

Une droite (T) est tangente en A à une courbe (c), s'ils existent un point B et une technique permettant de rapprocher sans cesse et autant que l'on veut le point B du point A, sans jamais l'atteindre, ni le surpasser.
En effet, par la même occasion, la technique permet de rapprocher sans cesse et

Figure 5. – Les productions du participant X relatives à la tâche (4) de la situation (1)

La droite tangente : une position limite induite par la mise en œuvre du rapprochement inépuisable

Les connaissances prédicatives (1) ci-dessus encadrées, montrent que le participant X a construit, dans l'action, deux sens géométriques et dynamiques relativement au rapprochement inépuisable, lors de la mise en œuvre de la technique géométrique centrée sur la coordination des fonctionnalités zoom et déplacement, l'un, entre les points et l'autre, entre les deux droites. La construction des sens sus-évoqués a permis au participant de percevoir la droite tangente comme étant une position limite, ici, entendue, comme une position inatteignable. Car, il décrit la droite tangente comme une position inatteignable relativement à la technique mise en œuvre. Il prend appui sur le fait que, les représentants des points A et B restaient toujours bien distincts à l'écran, pour conclure que la droite sécante et la droite tangente restaient aussi bien distinctes, au cours du rapprochement. Ainsi, la coordination des fonctionnalités zoom et déplacement a permis au participant de construire, dans l'action, des connaissances prédicatives sur le concept de rapprochement inépuisable. Et ces connaissances lui ont permis de décrire ou de présenter la droite tangente comme étant une position limite.

La technique donne au rapprochement le statut de rapprochement inépuisable

Toujours, dans la même définition de la droite tangente proposée par le participant X et encadrée ci-dessus, il octroie une place prépondérante à la notion de **technique**. Ce qui nous invite à soutenir que, dans l'action ce dernier a bel et bien compris que, c'est la technique mise en œuvre pour rapprocher, qui a donné au rapprochement, le statut de **rapprochement inépuisable**. Et que c'est, ce rapprochement inépuisable qui permet de percevoir ou de décrire la droite tangente comme étant une position limite. Dans le cas de l'espèce, cette technique correspond à la coordination des fonctionnalités déplacement et zoom. Pour éprouver la pertinence des connaissances prédicatives (1), analysons ses productions relatives à la tâche (1) de la situation (2).

Les productions du participant X relatives à la (1) de la situation (2)

Connaissances opératoires et prédicatives (2) du participant X

A=$\begin{pmatrix}\frac{\pi}{2}\\0\end{pmatrix}$;B=$\begin{pmatrix}\frac{\pi}{2}+\frac{1}{n}\\ \cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{n}\right)\end{pmatrix}$; AB_n: $y_n = \left(-x+\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}y = 0.$

AB_n: $y_n = \left(-x+\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}y = 0$, donc AB_n: $y_n = \left(-x+\frac{\pi}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} - y = 0.$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n} v_n = 1$, on peut donc rapprocher sans cesse et autant que l'on veut, le terme v_n du réel 1, sans jamais l'atteindre, ni le surpasser, en donnant à n des valeurs de plus en plus grandes. Par suite, on peut rapprocher sans cesse et autant que l'on veut, la droite sécante (AB_n) de la droite T :$\left(-x+\frac{\pi}{2}\right) - y = 0$, sans jamais l'atteindre, ni la surpasser, en donnant à n des valeurs de plus en plus grandes. Par conséquence, la droite (T) est limite de la suite de droites sécantes $(AB_n)_n$. Donc la droite (T) est tangente à la courbe (c) au point A.

Figure 6. – Les productions du participant X relatives à la tâche (1) de la situation (2)

Construction d'un sens algébrique associé au rapprochement inépuisable

Le nombre $\boldsymbol{n}$ est un entier naturel non nul, donc le point B_n est bien défini. En lui donnant des valeurs de plus en plus grandes, le participant a trouvé une technique, lui permettant de rapprocher sans cesse le point B_n du point A, sans jamais l'atteindre ni le surpasser. De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} x(B_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{2} = x(A)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} y(B_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{n}\right) = 0 = y(A)$. Il a donc construit, dans le cadre analytique, une technique lui ayant permis de rapprocher de façon inépuisable le point vers le futur point de tangence A. Dans ce nouveau cadre, le participant exprime le rapprochement inépuisable en donnant à , des valeurs de plus en plus grandes. Puisque l'ensemble IN est inépuisable, nous soutenons que le participant X a donné un sens algébrique au rapprochement inépuisable entre les deux points. Ce premier rapprochement, implique un second entre la sécante et la droite tangente. Nous soutenons alors que le participant a donné un sens algébrique au rapprochement inépuisable entre les deux droites. Ce qui confirme que, ce dernier a bel et bien compris que, c'est la technique mise en œuvre pour rapprocher, qui donne ou pas, au rapprochement le statut de rapprochement inépuisable. Et que, c'est ce rapprochement inépuisable qui permet de percevoir ou de décrire ou de présenter la droite tangente comme étant une position limite.

La droite tangente vue comme position limite dans le cadre algébrique

Les mêmes connaissances opératoires et prédicatives du participant X, ci-dessus encadrées (Figure 6), montrent aussi que, ce dernier est arrivé à décrire la droite tangente comme une position limite de la suite $(AB_n)_n$ des droites sécantes. Elles montrent également que, pour y arriver, il prend appui, sur le rapprochement inépuisable construit dans le registre analytique entre les points A et B. Cela nous invite à soutenir que, la coordination des fonctionnalités déplacement et zoom est une technique géométrique permettant de faire émerger l'idée de rapprochement inépuisable qui permet la construction d'une vision dynamique de droite tangente. Nous pouvons aussi avancer l'hypothèse que cette technique est transférable dans le cadre algébrique, et permet de présenter et de décrire la droite tangente comme étant une position limite dans un registre symbolique.

Conclusion

Nous sommes partis du constat selon lequel certains lycéens ont des difficultés à percevoir la droite tangente comme étant une position limite. Les travaux de certains chercheurs, à l'instar de (Balhan et *al.*, 2015; Cornu, 1983), soutiennent que la vision statique de la limite a un faible potentiel pour faire en sorte que le lycéen perçoive la droite tangente comme étant une position limite. La recherche d'une situation favorisant l'émergence d'une vision dynamique de la limite nous a orienté vers l'élaboration de situations d'enseignement utilisant la géométrie dynamique. Dans ce travail nous avons proposé une situation centrée sur une technique ayant permis de faire émerger l'idée de rapprocher sans cesse et autant que l'on veut deux objets géométriques, rapprochement que nous avons qualifié de rapprochement inépuisable. La technique géométrique est centrée sur la coordination des fonctionnalités déplacement et zoom de l'environnement GéoGebra. Notre hypothèse a été qu'une telle technique doit permettre aux lycéens de percevoir la droite tangente comme étant une position limite dans l'environnement de géométrie dynamique. La conversion de cette technique géométrique en une technique analytique permet de décrire la tangente comme étant une position limite et d'en produire une équation algébrique.

Les productions d'un lycéen, observées dans le cadre d'un *teaching experiment* dans lequel nous avons joué le double rôle de l'enseignant et du chercheur, nous a permis d'émettre les premières hypothèses. D'une part, la coordination des fonctionnalités déplacement et zoom avec la géométrie dynamique semble avoir un potentiel élevé pour la construction d'une vision dynamique de la notion de tangente dans le cadre géométrique. Cette vision, accessible au lycéen, a également un potentiel élevé pour faire en sorte qu'il perçoive la droite tangente comme une position limite. D'autre part, les connaissances opératoires et prédicatives construites en situation à partir de la technique géométrique mise en œuvre, nous permettent d'envisager que cette vision dynamique de la limite est transférable au-delà de la géométrie, dans le cadre analytique, permettant de donner du sens à la définition de la tangente à une courbe à partir de son équation.

Références

Balhan, K., Krysinska, M., & Schneider-Gilot, M. (2015). Quelle définition du concept de tangente ? Pour quelles raisons ? *Repères: Revue des Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, 101*. https://orbi.uliege.be/handle/2268/178081

Cornu, B. (1983). *Apprentissage de la notion de limite : Conceptions et obstacles*. [Thèse de doctorat, Université Scientifique et Médicale de Grenoble].

Dufour, S. (2019). *Des processus de compréhension sous l'angle des représentations : Un Teaching Experiment autour de la dérivée*. [Thèse de doctorat non publiée, Université du Québec à Montréal].

Schneider, M. (1992). A propos de l'apprentissage du taux de variation instantane (On Learning the Rate of Instantaneous Change). *Educational Studies in Mathematics, 23*(4), 317-350.

Steffe, L. P., Thompson, P. W. (2000) Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In R. Lesh & A. E. Kelly (Eds.), *Research design in mathematics and science education* (pp. 267-307). Erlbaum.

Vergnaud, G. (2001). *Forme opératoire et forme prédicative de la connaissance*. [Conférence publiée dans les Actes du Colloque GDM-2001]

Vivier, L. (2010). Un milieu théorique pour la notion de tangente dans l'enseignement secondaire. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, volume 15*. 173-199.