Titre: Premiers pas dans l'élaboration d'une séquence visant la propriété de complétude de l'ensemble des nombres réels

Auteurs: BERGÉ Analia, TANGUAY Denis et BARALLOBRES Gustavo

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 499 - 513

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Premiers pas dans l’élaboration d’une séquence visant la propriété de complétude de l’ensemble des nombres réels

BERGÉ[1] Analia – TANGUAY[2] Denis – BARALLOBRES[3] Gustavo

Résumé – Nous présentons une séquence d’enseignement visant à problématiser la non-complétude de / et la complétude de γ. Nous rendons compte d’une expérimentation de la première phase de la séquence, durant laquelle deux étudiants devaient trouver une paire de suites adjacentes rationnelles qui ne convergent pas. Les étudiants sont incités à montrer la non-convergence des deux suites qu’ils proposent « en restant dans / ». Ils ne comprennent pas bien la finalité de cette exigence, qui est discutée.

Mots-clefs : incomplétude des rationnels, complétude des réels, suites adjacentes, convergence.

Abstract – We present a teaching sequence aimed at problematizing the non-completeness of / and the completeness of γ. We report on an experiment of the first phase of the sequence, during which two students had to find a pair of rational adjacent sequences that do not converge. The students are asked to show the non-convergence of the two sequences they propose “without getting out of /”. They don’t understand well the purpose of this requirement, which is discussed.

Keywords: incompleteness of the rationals, completeness of the reals, adjacent sequences, convergence.

1. Université du Québec à Rimouski (UQAR), Québec, analia_berge@uqar.ca

2. Université du Québec à Montréal (UQAM), Québec, tanguay.denis@uqam.ca

3. Université du Québec à Montréal (UQAM), Québec, barallobres.gustavo@uqam.ca

Objet d'étude

Nous faisons l'hypothèse qu'une bonne compréhension de l'ensemble des nombres réels est nécessaire pour travailler avec des suites et des fonctions au niveau post-secondaire. Nous tenons pour acquis que l'un des aspects à considérer est l'apprentissage de la propriété de complétude de ce corps ordonné. Rappelons que, puisque **γ** est complet, on est assuré que l'intersection de toute suite d'intervalles fermés emboîtés dont les longueurs tendent vers zéro est un nombre ; que tout ensemble non vide et majoré possède un supremum ; que le théorème des valeurs intermédiaires (TVI) est vérifié ; que toute suite fondamentale (ou « de Cauchy ») possède une limite de même que toute suite croissante majorée ou que toute suite décroissante minorée ; que tout développement décimal fini ou infini, périodique ou non, est un réel bien défini. Tous ces énoncés sont utilisés en *Analyse réelle* pour prouver l'existence de nombres sous certaines conditions, ils y sont donc mis en jeu à l'intérieur d'un cours où une bonne partie du travail est axé sur les définitions et les preuves. Aucun de ces énoncés n'est valable dans un sous-corps de **γ** non complet tel que /, le corps des rationnels. Dans un premier temps, deux éléments nous sont apparus importants à retenir pour plonger dans le travail didactique :

1. la compréhension d'au moins l'un de ces énoncés (à quoi ils servent, d'où ils viennent, sur quoi ils informent, ce qui se passe quand ils ne sont pas vérifiés…),

2. la possibilité que ces énoncés soient compris comme équivalents par quelqu'un qui apprend, comme une étape dans l'apprentissage des démonstrations d'équivalences.

Nous avons avancé à propos du premier de ces deux éléments.

Éléments contextuels

Nous avons en tête les étudiants universitaires en sciences ou en formation des enseignants, en mathématiques. De toutes les expressions de la complétude de ¡ mentionnées plus haut, nous évaluons que les plus proches des étudiants, les plus facilement accessibles à l'intuition, sont : « toute suite croissante majorée converge » et « Le TVI est vérifié ». Il nous a donc semblé souhaitable d'élaborer des situations d'apprentissage qui viseraient d'abord ces énoncés. En outre, le premier permet de donner un sens mieux justifié théoriquement qu'à tout développement décimal, même infini non périodique, correspond un nombre, nombre qu'on peut définir comme la limite de la suite (croissante majorée) des développements tronqués. Ce sens permet à son tour de justifier plus rigoureusement l'égalité 0,9999… = 1, si épineuse pour de nombreux étudiants (cf. Vivier, 2015).

Comprendre la complétude de **γ**, c'est d'abord prendre acte de l'incomplétude de /, autrement dit comprendre qu'il manque à / quelque chose que **γ** possède. Pour les étudiants, il est clair que ce qui manque à / ce sont les irrationnels, quoique ces derniers sont généralement considérés *individuellement* ou par *sous-ensembles* ($\sqrt{2}$, π, *e*, les racines non entières, les zéros de certains polynômes…) :

voir par exemple Vergnac et Durand-Guerrier (2014), Bergé (2008), Bronner (1997)... Or, la complétude n'est pas nécessairement en jeu si l'on considère les irrationnels ainsi ; par exemple, le corps des nombres algébriques n'est pas complet. Compléter **γ**, c'est ajouter tous les irrationnels ; il devient alors nécessaire de les définir d'une façon ou d'une autre, autrement que par des énoncés vagues et circulaires du style « **γ** c'est l'ensemble de tous les nombres », et « les irrationnels sont les réels qui ne sont pas rationnels ». Il faut alors les considérer par le biais d'une *propriété* qui distinguera **γ** de /, en tant que corps ordonnés. La description circulaire peut convenir jusqu'à un certain stade de la scolarité, mais doit être défaite si l'on veut avancer dans la conceptualisation des ensembles numériques. Selon le niveau de scolarité considéré, d'autres descriptions de **γ** ont cours, par exemple celles qui renvoient à « l'ensemble des nombres en bijection avec les points de la droite », ou à l'ensemble de « toutes les longueurs possibles, chacune avec son opposée ». Elles reposent sur l'objet *droite numérique*, dont la définition partage les mêmes enjeux que ceux de définir **γ**, et où par ailleurs la complétude n'est pas « visible », **γ** et / ne se distinguant pas graphiquement (Durand-Guerrier, 2016). En outre, le recours aux représentations graphiques peut donner lieu à des conceptions qui se posent en obstacle à une conceptualisation numériquement adéquate des réels : voir par exemple Tanguay, Bergé et Barallobres (2020).

L'histoire des mathématiques nous laisse savoir que le travail en analyse s'est longtemps accompli sans prendre appui sur une définition (formelle) de **γ**, la définition de **γ** comme corps ordonné complet datant du dernier tiers du 19e siècle. Les premières explicitations de la complétude trouvent leur origine précisément dans la nécessité de disposer d'un domaine numérique bien défini, afin d'asseoir le travail sur des bases solides, par exemple pour démontrer (rigoureusement, autrement que par le recours à l'évidence perceptive) le TVI et s'assurer de la convergence des suites fondamentales (Bergé et Sessa, 2018).

D'un point de vue didactique, cela place devant un défi : pour que la définition de **γ** ait un sens aux yeux des étudiants, il est nécessaire de générer son besoin. Le besoin que nous visons n'est pas celui de pouvoir compter sur les irrationnels, mais d'avoir un système numérique dans lequel le travail en analyse puisse être validé ; notamment par la *preuve*.

Premiers pas dans l'élaboration d'une séquence

Nous avons élaboré des séquences d'enseignement à partir des prémisses exposées ci-dessus. Celle que nous nous apprêtons à décrire prévoit deux phases. Nous voulons y susciter la prise de conscience que le TVI nécessite un domaine numérique complet pour être valable. Pour suggérer l'idée qu'ajouter des nombres « à la pièce » pourrait être inopérant, que c'est bien plutôt une ***propriété*** de **γ** non valable dans / qui donne accès au zéro suggéré par la représentation graphique, nous avons choisi pour zéro un irrationnel aussi éloigné que possible de ceux que les étudiants conçoivent spontanément, un zéro qui ne s'exprime pas comme une combinaison finie de racines, de rationnels et des nombres transcendants usuels, en l'occurrence le zéro de $g(x) = 30\,x^5 + x + 13$. La **2e phase de**

la séquence consiste donc à montrer, à partir des arguments « classiques » de divisibilité conduits sur les coefficients, que la fonction g n'a pas de zéro rationnel. On demande ensuite d'expliquer « comment construire le développement décimal du zéro par approximations successives », à partir de deux suites adjacentes. La construction attendue se fait en considérant des paires de développements finis de plus en plus rapprochés, entre lesquels g change de signe. Les suites adjacentes ne constituant pas un concept familier des étudiants auprès de qui nous comptions expérimenter, elles faisaient, justement, l'objet de la **1re phase de la séquence**. La voici :

Dans les tâches qui suivent, on travaille dans /. On appelle *suites adjacentes rationnelles* deux suites $(u_n)_{n\in\infty}$ et $(v_n)_{n\in\infty}$ de rationnels, satisfaisant :

a) la suite $(u_n)_{n\in\infty}$ est croissante c'est-à-dire que pour tout $n\in\infty$, $u_n \leq u_{n+1}$,

b) la suite $(v_n)_{n\in\infty}$ est décroissante c'est-à-dire que pour tout $n\in\infty$, $v_{n+1} \leq v_n$,

c) la suite $(v_n - u_n)_{n\in\infty}$ converge vers 0.

1. Soit $(u_n)_{n\in\infty}$ et $(v_n)_{n\in\infty}$ deux suites adjacentes de rationnels. Montrez que pour tout $n\in\infty$, pour tout $m\in\infty$, $u_n \leq v_m$. *Indice :* preuve par contradiction.
2. Trouvez $(u_n)_{n\in\infty}$ et $(v_n)_{n\in\infty}$, deux suites adjacentes de rationnels, qui convergent dans /. Vous devez donner une règle de formation ou un algorithme qui permettent de calculer explicitement chacun des termes de ces suites (aussi grand en soit le rang). Attention, tous les termes de ces suites doivent être dans /.
3. a) Est-il possible d'avoir deux suites adjacentes de rationnels dont l'une converge (dans /) et l'autre pas ? b) Est-il possible d'avoir deux suites adjacentes de rationnels qui convergent (dans /) vers deux limites distinctes ? Justifiez vos réponses.
4. Trouvez $(u_n)_{n\in\infty}$ et $(v_n)_{n\in\infty}$ deux suites adjacentes de rationnels qui ne convergent pas dans /. Vous devez donner une règle de formation ou un algorithme qui permet de calculer explicitement chacun des termes de ces suites, et prouver que les suites ne convergent pas dans /, c'est-à-dire qui soient telles que quel que soit $q \in$ □ , q n'est pas la limite de ces suites.

En plus de familiariser les étudiants avec les suites adjacentes, la première phase permet un premier abord de l'incomplétude de / : il y a dans / des suites adjacentes qui ne convergent pas (tâche 4). Des étudiants bien allumés qui répondent correctement aux tâches 1 et 4 peuvent également déduire qu'il y a dans / des suites croissantes majorées, et décroissantes minorées, qui ne convergent pas. En effet par la tâche 1, $(u_n)_{n\in\infty}$ croissante est majorée par n'importe quel des vi, et $(v_n)_{n\in\infty}$ décroissante est minorée par n'importe quel des u_j, les deux suites adjacentes à trouver en 4 illustrent donc chacune ces autres formes de l'incomplétude (de /).

Dû au manque d'espace, nous nous restreignons à la 1re phase de la séquence, et n'entrerons pas dans l'analyse détaillée de chaque tâche. Nous nous contenterons des éléments centraux, et nous attacherons plus longuement à la tâche 4, qui porte directement sur l'incomplétude de /.

La preuve par contradiction attendue à la tâche 1 consiste à supposer qu'il existe n_0 et m_0 tels que $u_{n_0} > v_{m_0}$. Puisque $(u_n)_{n\in\infty}$ est croissante et $(v_n)_{n\in\infty}$ décroissante, on aurait, pour tout $n \geq \max\{n_0, m_0\}$, que $u_n - v_n \geq u_{n_0} - v_{m_0} > 0$, si bien que la condition $|u_n - v_n| \xrightarrow{n\to\infty} 0$, équivalente à la condition c) de la définition, ne peut être satisfaite. Pour être rédigé formellement, ce dernier élément de preuve nécessite de travailler avec la négation de la définition de limite, ce qui peut être ardu pour les étudiants. L'intention n'est pas ici d'insister sur les preuves formelles, l'objectif est plutôt de mieux faire comprendre ce qu'est une paire de suites adjacentes.

C'est aussi l'objectif de la tâche 2, des exemples simples étant relativement faciles à trouver, par exemple $u_n = q$ (suite constante, avec $q \in \square$) et $v_n = q + \frac{1}{n}$. Pour montrer que $(v_n - u_n)_{n\in\infty}$ converge vers 0, on peut se contenter ici aussi d'une preuve informelle.

La tâche 3 cherche à amener les étudiants à creuser la question de la convergence de deux suites adjacentes sans énoncer explicitement que dans P, de telles suites sont forcément convergentes. Il est bien sûr impossible d'avoir deux suites adjacentes qui convergent vers des limites distinctes. La preuve par contradiction demande cependant une assez bonne maîtrise des arguments ε-*N*, sans parler des inégalités (dont celle du triangle) et de la valeur absolue.

La 2e question de la tâche 3 peut mettre sur la piste d'une preuve plus accessible et qui en fait, montre les deux résultats en même temps. Si l'une des deux suites converge, disons (u_n) vers $L \in \square$, alors l'autre converge forcément vers la même limite. L'argument en ε-*N*, plus facile, peut aller comme suit, aux détails près :

$$|v_n - L| = |v_n - u_n + u_n - L| \leq |v_n - u_n| + |u_n - L| < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Cette tâche 3 sert de « préalable » à la tâche 4, et chacune des deux sous-questions pourrait intervenir dans le raisonnement escompté en 4.

Pour la tâche 4, nous attendons des étudiants qu'ils proposent une solution du style : (u_n) et (v_n) sont les approximations décimales successives à l'ordre *n*, respectivement par défaut et par excès, de $\sqrt{2}$ ou de tout autre irrationnel. Dans l'énoncé, la directive sur l'algorithme vient de l'intérêt de faire produire la paire de suites adjacentes *sans utiliser explicitement un développement décimal* déjà donné, par exemple celui de l'affichage d'une calculatrice. L'idée est de plonger l'étudiant dans un monde où les réels ne sont pas disponibles *a priori*, et où ces suites adjacentes non convergentes se construisent *sans sortir des rationnels*.

La construction attendue, par exemple à partir de $\sqrt{2}$, est relativement standard. On part avec $u_0 = 1$ et $v_0 = 2$ (puisque $1^2 < 2$ et $2^2 > 2$), on poursuit avec $u_1 = 1{,}4$ et $v_1 = 1{,}5$ (puisque $(1{,}4)^2 < 2$ et $(1{,}5)^2 > 2$), suivi de $u_2 = 1{,}41$ et $v_2 = 1{,}42$ (puisque…), etc. On n'a à l'étape *n* que neuf essais à faire, un pour chacune des décimales possibles à l'ordre *n*. Clairement par construction, $v_n - u_n = \frac{1}{10^n}$. Le fait que (u_n) est croissante est immédiat (une décimale s'ajoute), celui que (v_n) est décroissante l'est un peu moins. Mais la difficulté est surtout de montrer, sans utiliser explicitement le nombre $\sqrt{2}$, que $(u_n)_{n\varepsilon\infty}$ et $(v_n)_{n\varepsilon\infty}$ ne convergent pas en tant que suites de **Θ**.

La feuille des résultats que nous avions prévu donner aux étudiants en guise de rappel (voir Annexe) visait en particulier à donner des outils pour mener à bien cette preuve. Supposons qu'au contraire, l'une des deux suites (u_n) ou (v_n) converge dans **Θ**. La conclusion de la tâche 3 permet de déduire que les deux suites convergeront vers la même limite $L\varepsilon$**Θ**. Or par construction, $u_n^2 < 2 < v_n^2$ (*), et

$$\left|v_n - u_n\right| = v_n - u_n = \frac{1}{10^n} \quad \Rightarrow \quad v_n^2 - u_n^2 = (v_n + u_n)(v_n - u_n) \leq \frac{4}{10^n}$$ (ni u_n ni v_n ne dépassant 2),

si bien que par (*) on peut écrire, $\left|u_n^2 - 2\right| = 2 - u_n^2 < v_n^2 - u_n^2 \leq \frac{4}{10^n}$, ce qui implique que (u_n^2) a pour limite 2. Si (u_n) avait pour limite $L\varepsilon$**Θ**, alors (u_n^2) aurait pour limite L^2 (résultat 8 de l'annexe) et comme la limite d'une suite est unique (résultat 9 de l'annexe), on aurait $L^2 = 2$ ce qui est impossible, sachant qu'aucun rationnel n'a pour carré 2. Bien entendu, nous sommes conscients que les étudiants risquent de se contenter de l'argument : « par construction, la distance de u_n à $\sqrt{2}$ est inférieure à 10^{-n} puisque $\sqrt{2}\varepsilon\,]\,u_n , v_n\,[$, donc (u_n) converge vers $\sqrt{2}\notin$**Θ** et n'est pas convergente dans **Θ** ». Nous reviendrons sur ce point dans les sections suivantes.

Rester dans Θ pour définir γ

Revenons sur cette idée d'éviter l'utilisation explicite du nombre √2 (ou de tout autre irrationnel en jeu) pour la tâche 4. L'intention est ici de mettre en évidence qu'un énoncé — comme la convergence des suites adjacentes — dont la validité doit être assurée pour bien développer l'analyse, n'est pas vrai si l'on est cantonné à □ . On peut penser qu'un étudiant qui justifie sa réponse en arguant simplement que la limite est (un irrationnel) hors de □ n'aurait pas saisi cette intention de la tâche. Selon sa compréhension, il n'y a pas de manque, et il n'y a pas de problème : les suites adjacentes ont été construites de sorte qu'elles convergent vers un irrationnel, il est donc clair pour l'étudiant qu'elles ne convergent pas dans □ ! Mais alors il pourrait s'interroger sur cette directive relative à l'algorithme à produire, alors que pour lui il suffit d'effectuer des troncatures directement sur l'expansion décimale de l'irrationnel en cause.

Tenir pour acquis l'existence de cette limite revient à tenir pour acquis que □ est plongé dans □, la réunion des rationnels et des irrationnels ; mettant ainsi bien en évidence la définition des nombres réels que les étudiants ont en tête. La question « pourquoi et comment compléter □ ? » est alors éludée, □ étant disponible. Le problème, c'est qu'on ne peut éviter que la solution soit pensée à partir de cette prémisse — les deux suites convergent vers un irrationnel —sans quoi on n'arrive tout simplement pas à trouver une solution à la tâche 4.

Bien sûr, les constructions de **γ**, conduites pendant la 2^{e} moitié du 19^{e} siècle, se sont toutes élaborées *à partir* des rationnels. Les mathématiciens qui ont ainsi défini **γ** — Cantor, Dedekind et d'autres — se trouvaient en mode « validation du travail mathématique », la question en était une de *fondements*. Mais ce n'est généralement pas le mode de travail d'un étudiant qui fait face à un problème proposé par son enseignant. Nous faisons l'hypothèse que des interventions de l'enseignant devront complémenter les tâches afin de favoriser l'accès à la non-complétude de □ et à la complétude de **γ**, en tant que propriétés intrinsèques. Nous avons expérimenté la séquence pour, entre autres, avancer sur cette hypothèse.

La situation expérimentée en laboratoire

Nous avons proposé la séquence à deux étudiants[4], en laboratoire (hors cours), pendant l'été. Le travail s'est déroulé en deux séances, la 1^{re} d'une durée de trois heures, la 2^{e} de deux heures. Il s'agissait de deux étudiants à la maîtrise en didactique des mathématiques. Les séances ont été filmées et à chaque séance, deux chercheurs étaient présents. Comme nous l'avons déjà mentionné, une feuille de rappels était fournie. Il s'agissait d'un répertoire de résultats en principe déjà connus des étudiants — chacun avait suivi un cours d'analyse dans sa scolarité de 1^{er} cycle — et qui pourraient leur être utiles dans la résolution.

Pour cet écrit, nous nous attachons principalement à la résolution de la tâche 4, phase 1. Dans ce qui suit, les deux étudiants sont désignés par E_1 et E_2.

Les étudiants ont proposé des solutions valables, bien qu'un peu approximatives du point de vue du formalisme, aux trois premières tâches. Ils attaquent la tâche 4 et demandent s'ils peuvent construire deux suites adjacentes qui convergent vers un irrationnel puisque dans ce cas, étant donné l'unicité de la limite, ces suites ne seront pas convergentes dans □ :

E_1 : « OK, mais est-ce que pour montrer ça… on peut montrer que c'est… Parce que si la limite est unique [référence au point 9 de la feuille des rappels], … et puis, que la limite est dans les irrationnels, nécessairement, il en n'existe pas [de limite]… dans les rationnels… Est-ce que ça fonctionne ? »

4. Le masculin est utilisé pour alléger le texte, tant pour les étudiants que pour les chercheurs.

Il est clair pour E1 que les suites adjacentes ayant une telle limite ne convergeront pas dans $\mathbb{Q}$. La restriction de rester dans $\mathbb{Q}$ n'est pas considérée pour l'instant par les étudiants. Les chercheurs avaient convenu de « ramener les étudiants à $\mathbb{Q}$ » si une question de la sorte émergeait. L'un des chercheurs souligne que l'énoncé d'unicité du point 9 porte sur les suites réelles et que la tâche porte sur des suites rationnelles. Les étudiants acquiescent et se lancent dans des essais. Ils considèrent d'abord $\left(\sqrt{2}-\frac{1}{n}\right)$, mais E2 repère rapidement que les termes ne seront pas rationnels. Ensuite, ils veulent « construire » un irrationnel en considérant des séries, ils envisagent $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{10^n}$ pour s'assurer qu'il n'y ait pas de période, mais ne voient pas comment mener l'argument à bien et l'abandonnent. Ils proposent de se donner une suite qui converge à 2 et de prendre la racine carrée de chaque terme, mais E_2 soulève à nouveau le problème de la rationalité de chaque terme. E_2 dira : « j'ai de la difficulté à voir comment on peut avoir une suite de rationnels qui tende vers un irrationnel, … sans avoir d'irrationnels dans les termes. »

L'un des chercheurs répond : « Que vous utilisiez √2 pour penser, c'est pas grave, mais ensuite il faut montrer que ces deux suites ne convergent pas en $\mathbb{Q}$, pas en présupposant qu'il existe d'autres nombres… » Le chercheur suggère que pour contourner le problème, on peut penser à « élever au carré » plutôt que de « prendre la racine carrée ». E1 propose de construire une suite rationnelle croissante à partir de 1,4 en ajoutant successivement les décimales de √2 ; l'un des chercheurs mentionne qu'ils ne connaissent pas d'emblée toutes les décimales de √2, et les invite à penser la question en termes d'un algorithme ou d'une règle formation tel que mentionné dans l'énoncé de la tâche, en restant dans $\mathbb{Q}$. Après quelques essais les étudiants en viennent à proposer une construction récursive de u_n en testant une à une chacune des décimales possibles à ajouter à u_{n-1}, vérifiant à chaque fois que le carré est bien en dessous de 2. La suite (v_n) n'est pour l'instant pas considérée, mais E_1 dira aux chercheurs : « Là, on a juste travaillé sur u ». E_2 ajoute aussitôt : « mais c'est le même principe pour v, il faut juste qu'elle aille de l'autre sens [geste descendant de droite à gauche]. »

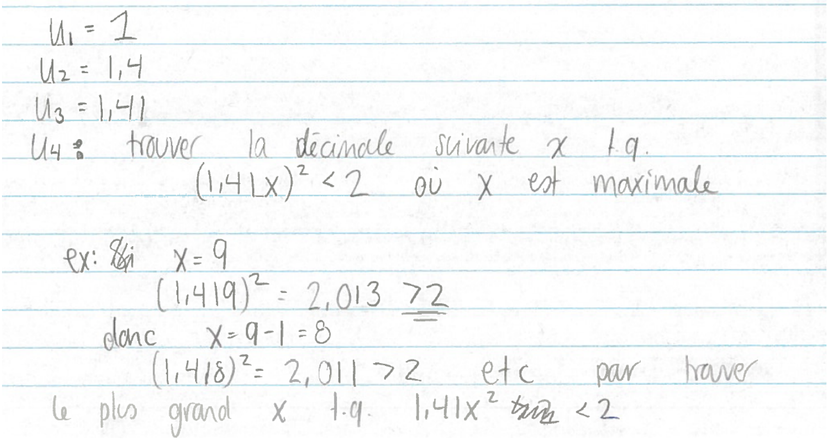

Figure 1 – Les étudiants trouvent un algorithme

Les étudiants expliquent leur algorithme et ils sont fiers de leur travail. À la question d'un des chercheurs, « comment êtes vous certains que ces suites ne convergent pas dans $\mathbb{Q}$? », E2 répond : « Par la construction qu'on fait, les deux suites convergent vers √2, parce qu'on les construit comme ça. Donc forcément elles vont converger… en dehors de $\mathbb{Q}$. » Un chercheur revient sur la question de ne pas s'appuyer sur l'existence de √2 pour la justification : « Le problème c'est, si on accepte cet argument, on sort de $\mathbb{Q}$. […] Dès que tu nommes √2, on est sorti de $\mathbb{Q}$ … » Les étudiants sont perplexes ; cette restriction ne semble pas avoir de sens pour eux. E_1 dira, après un temps : « il faut prouver, … chaque fois qu'on pense que ça converge, c'est pas un rationnel, … je sais pas comment mieux l'expliquer. » E_1 et E_2 cherchent ardemment dans le répertoire de résultats, évoquent la propriété d'Archimède, repèrent l'énoncé 8 dans cette feuille. E_2 : « On a basé notre argument sur le carré de la limite, est-ce qu'on est capable de faire le chemin inverse de cet argument-là ? » Ils ont l'impression que les implications intégrées à l'énoncé 8 ne vont pas dans le bon sens. E_1 pense à haute voix à une preuve par contradiction. Devant l'hésitation de E_1 et E_2, l'un des chercheurs va amorcer le raisonnement : « Elles [les suites construites] ne convergent pas dans $\mathbb{Q}$. Si elles convergeaient dans $\mathbb{Q}$, alors… » Ça y est, E1 a un « flash » et complète correctement le raisonnement par l'absurde basé sur l'énoncé 8, sachant que le carré de la limite rationnelle alléguée serait de 2, alors qu'aucun rationnel n'a son carré égal à 2. C'est l'heure du midi, le bilan sera fait au début de la séance de l'après-midi.

Et la complétude de γ ?

Nous avons pu constater, à plusieurs reprises, la mention de √2 par les étudiants et l'insistance des chercheurs pour ne pas faire appel à ce nombre dans l'argumentation. La condition de rester dans $\mathbb{Q}$ semble artificielle pour les étudiants. Est-il possible de « légitimer » cette situation sans qu'elle soit perçue comme un caprice des chercheurs ou des enseignants ?

Au retour en après-midi, les chercheurs demandent : « quelles conclusions pouvez-vous tirer du travail accompli ? » Les réponses des étudiants tournent d'abord autour des suites adjacentes, un concept nouveau pour eux. Ils mentionnent rapidement le fait que les suites adjacentes pourraient ne pas converger dans $\mathbb{Q}$. La question est soulevée de savoir si « intuitivement », elles « devraient » converger [sous-entendu « dans les réels »]. *E2* : « j'ai de la difficulté à voir deux suites qui divergent [dans les réels], et qui répondent quand même au critère c) [de la définition]. » Il a peut-être pensé à deux suites divergentes dans le sens usuel du terme, c'est-à-dire de limite infinie. L'un des chercheurs veut préciser la question initiale et demande : « si l'on pense qu'on a conçu ces activités pour enseigner quelque chose avec ces 4 tâches, d'après vous ce serait quoi ? » E_1 est hésitant, n'est pas sûr de ce que nous attendons, et mentionne : « les définitions de limite, mais on les savait donc elles seraient comme, 'déjà enseignées'. » E_2 : « Oui, il y a plusieurs propriétés qui sont, … réinvesties, dont la 8 [cf. feuille en annexe], qu'on a utilisée dans le dernier numéro. … Puis aussi, de construire des suites, qui convergent, qui divergent… ».

L'un des chercheurs intervient : « Vous avez construit une suite, … qui divergeait, c'est-à-dire…, qui *ne convergeait pas*, disons ; elle n'allait pas à l'infini, la suite… Cette partie-là de la tâche, qu'est-ce qu'elle a évoqué en vous ? » E_2 : « Bien déjà, qu'il y ait une suite de nombres rationnels qui converge vers un nombre irrationnel, je trouvais ça intéressant, ça m'a même déstabilisé, peut-être... [Il précise :] C'est la façon de faire qui m'a déstabilisé, de construire √2 comme on l'a fait. » E_1 : « oui, *sans parler* de √2. Et aussi l'importance de, dans quoi la suite converge, moi le 4 [la tâche 4], c'est surtout ça qui m'a mis au défi. C'est pas que la suite converge jamais, c'est qu'elle converge pas *dans*... les rationnels. Elle peut converger... ailleurs. » L'autre chercheur demande si le fait de ne pas converger dans les rationnels poserait problème ; il ne semble pas poser problème pour eux que deux suites adjacentes rationnelles ne convergent pas dans tant que **γ** est là.

Après hésitations et discussions, notamment sur la nécessité ou non, pour une paire de suites adjacentes, de converger, un chercheur relance avec la question : « Si on avait posé exactement le même problème, mais en plongeant tout dans **γ**, est-ce que vos conclusions auraient été les mêmes ? » *E1* : « Je pense que le 4 aurait pas été possible. Parce que deux suites qui convergent pas, dans **γ**… leur différence peut pas converger vers 0… C'est dur de s'imaginer le comportement d'une suite qui ne converge pas… » L'idée de non-convergence dans **γ** semble déstabilisante, difficile à concilier avec la notion de suites adjacentes. Après un moment, l'un des chercheurs pose la question : « D'une certaine façon, est-ce qu'on ne peut pas dire que... [...] est-ce qu'il n'y a pas derrière ça un travail sur la structure de , et de **γ** ; [de] en comparaison de la structure de **γ** ? » E_2 mentionne : « On l'a remarqué un peu dans la question 4, quand on était limité aux rationnels... je ne sais pas… je ne sais pas si j'ai remarqué un travail... sur la compréhension de la construction des deux ensembles, mais... les contraintes que ça a amené, ça a amené un travail différent dans la résolution de la tâche, je pense. Si on plongeait tout dans les réels, les contraintes auraient agi différemment [...] mais je ne sais pas si j'aurais réfléchi sur la *construction* des ensembles. » L'idée de faire une distinction entre les structures de et de **γ** ne semble pas émerger pour eux du travail effectué. Leurs hésitations montrent que le problème de la différence entre et ¡ ne se pose pas en termes clairs, et qu'ils ne savent pas à quel niveau faire cette distinction.

Un chercheur redemande s'il aurait été possible d'obtenir deux suites adjacentes réelles qui ne convergent pas dans **γ** ; E1, hésitant, parlera de la construction d'une suite réelle « ... qui converge, mais dans les 'irréels' », et ajoute du même souffle ne pas trop savoir ce que ça voudrait dire. E_2 mentionne qu'on peut refaire le travail, mais cette fois avec deux suites adjacentes réelles qui approcheraient un « irréel ». Les complexes (et le nombre *i*) sont évoqués. Les chercheurs mentionnent qu'il n'y a pas d'ordre dans les complexes, ils attirent l'attention sur la distinction entre la droite (réelle) et le plan (complexe), et sur le fait que les suites adjacentes qui seraient à considérer vivraient sur une droite. E_1 finira par dire : « c'est ça, les suites adjacentes sont sur la droite, sur la droite il n'y a pas 'd'irréels', les irréels [qu'il a entre-temps associés aux complexes] sont *autour.* » E_2 ajoutera : « ...donc elles vont forcément converger dans **γ**. » Le chercheur ajoute aussitôt : « Ça porte un nom, cette propriété-là [les suites adjacentes convergent] ». Dans la discussion qui suit, il est question de *densité*, des « trous » dans , E_1 dira : « *les rationnels sont partout*, mettons, mais laissent des trous », et mentionnera le mot « continu » au sujet des réels. E_2 finit par se rappeler du mot « complet » qu'il a sans doute entendu en cours et qu'il propose. Le chercheur reprendra le mot en parlant de la « complétude de **γ**. »

Ensuite E_1 réfléchit à propos des « trous » :

E_1 : « Mais le parler comme ça c'est comme s'il y avait les trous… dans □ , mais c'est □ quand on le place dans **γ**, que là il y a des trous. […] C'est ça qui est mêlant, souvent on dit 'dans □ il y a des trous', mais… *non…* □ il ne le sait pas, lui, qu'il y a des trous… » Un chercheur reprend ce commentaire au bond : « Une façon de le dire, c'est dire qu'il y a des suites adjacentes, dans □, qui n'ont pas de limite ». Et peu après : « Pour ne pas faire référence à quelque chose qu'on ne peut pas nommer, pour la même raison que tu mentionnes, que ce n'est pas correct de dire 'il y a des trous' (c'est des trous par rapport à quoi ?), si on veut rester dans □ , on peut dire 'il y a dans □ des suites adjacentes qui n'ont pas de limite' ». E_1 ajoutera peu après : « Parce que des suites [adjacentes] qui ne convergent pas, dans **γ**, il n'y en a aucune qui fait ça [converger à l'extérieur de **γ**]. » Et le chercheur : « Non parce que **γ** *est* [appuyé] complet, justement ». Suit une discussion sur ce qu'il faut ajouter à □ pour compléter **γ**. E_1 dit qu'on ne peut pas ajouter les irrationnels un à un et les chercheurs proposent d'essayer de caractériser ce qu'il faut ajouter. Après quelques détours, il sera question d'ajouter les développements décimaux non périodiques. Plus tard, en institutionnalisation de la phase 2, on reviendra sur les *propriétés* qu'il faut ajouter à □ pour avoir **γ**.

En guise de conclusion

Les chercheurs veulent amener les étudiants sur des questions de fondements, de validation, et voudraient pour cela que l'ensemble des rationnels soit considéré pour lui-même, en dehors des réels, afin de comprendre la propriété de complétude que les rationnels ne possèdent pas, à la différence des réels. La complétude y devient alors une propriété à ajouter à celles qui définissent les rationnels. Mais cette posture n'est pas naturelle, encore moins spontanée, chez et pour les étudiants. E_2 a compris que ce sont les contraintes sur les ensembles de référence qui influent sur la résolution de la tâche 4, mais il dira : « Je ne sais pas si j'aurais réfléchi sur la construction des ensembles. » Pour les étudiants, les différents ensembles sont là (de toute éternité ?), emboîtés, et il n'y a pas de raison pour que l'un d'eux ne soit pas disponible. Chercher à le reconstruire est un problème qui ne se pose pas, et considérer l'un comme si l'autre n'y était pas est une démarche dont ils ne perçoivent pas bien la finalité.

Ainsi, ils prennent acte que / ne vérifie pas cette propriété de complétude, mais il n'y a pour eux aucune raison d'en faire la propriété qui distingue ¡ de / et donc, aucune raison de prime abord pour qu'on ne puisse pas avoir dans ¡ des pathologies analogues. L'irrationnel qui a permis de révéler l'incomplétude de / est certes dans **γ**, mais il y a peut-être des « irréels » qui sont aux réels ce que les irrationnels sont aux rationnels ; pas de raison, donc, pour que **γ** soit complet, et le travail dans la première phase ne mène pas pour eux à cette conclusion. C'est seulement en discutant avec les deux chercheurs, lors de l'institutionnalisation en fin de phase 1, avec les représentations de **γ** et ≤ respectivement comme droite et plan proposées par les chercheurs, que l'image (quasi métaphorique) d'une nécessaire convergence à l'intérieur de la droite émergera. Il nous apparaît donc qu'une intervention des chercheurs (ou des enseignants le cas échéant) a un rôle crucial à jouer, et le besoin de préciser une propriété telle que la complétude ne peut émerger par lui-même du seul engagement des étudiants dans les tâches. Par ailleurs, cette intervention est entendue et fait son chemin, atteint au moins en partie ses objectifs d'enseignement, comme le laisse penser cette remarque de E_1 : « Souvent on dit 'dans □ il y a des trous', mais… non…□ il ne le sait pas, lui, qu'il y a des trous… »

Références

Bergé, A., & Sessa, C. (2018). Complétude et continuité à travers 23 siècles : contributions à une recherche en didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques, 38*(2), 157-205.

Bergé, A. (2008). The completeness property of the set of real numbers in the transition from calculus to analysis. *Educational Studies in Mathematics, 67*(3), pp. 217-235.

Bronner, A. (1997). Les rapports d'enseignants de troisième et de seconde aux objets « nombre réel » et « racine carrée ». *Recherches en Didactique des Mathématiques, 17*(3), pp. 55-80.

Durand-Guerrier, V. (2016). Conceptualization of the Continuum, an Educational Challenge for Undergraduate Students. *International Journal for Research in Undergraduate Mathematics Education*, 2, pp. 338-361.

Tanguay, D., Bergé, A., Barallobres, G. (2020). Une situation qui problématise les passages discret-dense-continu. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, (20), 42-57.

Vergnac, M. et Durand-Guerrier, V. (2014). Le concept de nombre réel au lycée et en début d'université, un objet problématique. Petit x, 96, pp. 7-28.

Vivier, L. (2015). *Sur la route des réels, Points de vue sémiotique, praxéologique, mathématique*. Thèse d'habilitation à diriger les recherches (HDR). Université Paris Diderot – Paris 7.

Appendice

La feuille des résultats préalables donnée au début de la séquence

1. L'ensemble / des nombres rationnels est formé des quotients d'entiers relatifs. Le développement décimal d'un nombre rationnel est toujours périodique à partir d'une certaine décimale (incluant les développements finis comme périodiques de période 0). Réciproquement, si un nombre possède un développement décimal périodique, alors c'est un nombre rationnel.
2. Critère d'inégalité et d'égalité dans /: deux nombres sont distincts dans / si et seulement si la distance entre les deux est strictement positive. Un raisonnement par l'absurde permet d'inférer que si deux nombres sont tels que pour tout $k \in \infty$, leur distance est inférieure à 10^{-k}, alors ces deux nombres sont forcément égaux.
3. On note Δ l'ensemble des décimaux, c'est-à-dire l'ensemble des nombres rationnels qui admettent un développement décimal fini ; de façon équivalente, qui peuvent s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^k}$, avec $a \in □$ et $k \in □$.
4. L'ensemble / vérifie la Propriété d'Archimède : $\forall b \in □$, $b > 0$, $\exists n \in □$ tel que $0 < \frac{1}{n} < b$.
5. Une définition de la convergence d'une suite : $(s_n)_{n \in □}$ une suite réelle converge (dans ϒ) si et seulement si
$$\exists L \in □,\ \forall \varepsilon \in □_+^*,\ \exists N \in □ \text{ tel que } \forall n \in □,\ n \geq N \Rightarrow |L - s_n| < \varepsilon.$$
6. Une définition de la convergence d'une suite dans /: $(u_n)_{n \in □}$ une suite d'éléments de / converge dans / si et seulement si
$$\exists L \in □,\ \forall \varepsilon \in □_+^*,\ \exists N \in □ \text{ tel que } \forall n \in □,\ n \geq N \Rightarrow |L - u_n| < \varepsilon.$$

7. Si une suite $(u_n)_{n \in □}$ d'éléments de / converge dans /, alors elle converge dans ϒ.
8. Si une suite $(u_n)_{n \in □}$ d'éléments de / converge dans / vers une limite L, alors la suite $(u_n^2)_{n \in □}$ converge vers L^2.
9. Si une suite réelle $(s_n)_{n \in □}$ converge, alors sa limite est unique.
10. Si une suite réelle $(s_n)_{n \in □}$ converge vers L et si $\forall n \in □$, $s_n \geq K$, K une constante réelle, alors forcément $L \geq K$. (Attention, si $\forall n \in □$, $s_n > K$, on peut conclure que $L \geq K$ mais pas que $L > K$.) En particulier, si deux suites $(u_n)_{n \in □}$ et $(v_n)_{n \in □}$ convergent vers la même limite L et si les termes de l'une sont tous positifs et les termes de l'autre tous négatifs, alors forcément $L = 0$.
11. Une fonction f continue « préserve la convergence des suites » : f est continue sur $]\,a\,;\,b\,[$ si et seulement si pour toute suite $(s_n)_{n \in □}$ de termes de $]\,a\,;\,b\,[$ convergeant vers $L \in]\,a\,;\,b\,[$,
$$\lim_{n \to \infty} f(s_n) = f(\lim_{n \to \infty} s_n) = f(L).$$