



TITRE: LE RAISONNEMENT PAR L'ABSURDE A L'ENTRÉE À L'UNIVERSITÉ

AUTEUR: BATTIE VÉRONIQUE

PUBLICATION: ACTES DU HUITIÈME COLLOQUE DE L'ESPACE MATHÉMATIQUE FRANCOPHONE – EMF 2022

DIRECTEUR: ADOLPHE COSSI ADIHOUE, UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE (CANADA/BÉNIN) AVEC L'APPUI DES MEMBRES DU COMITÉ SCIENTIFIQUE ET DES RESPONSABLES DES GROUPES DE TRAVAIL ET PROJETS SPÉCIAUX

ÉDITEUR: LES ÉDITIONS DE L'UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

ANNÉE: 2023

PAGES: 486 - 498

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Le raisonnement par l'absurde a l'entrée à l'université

BATTIE¹ Véronique

Résumé – Comment le raisonnement par l'absurde est-il institutionnalisé à l'entrée à l'Université et quelles difficultés sont rencontrées par les étudiants dans sa mise en oeuvre ? C'est à ces questions que nous tentons d'apporter des éléments de réponse tant en appui sur nos recherches en didactique des mathématiques qu'en écho à notre pratique enseignante.

Mots-clefs : raisonnement par l'absurde, transition secondaire-supérieur, arithmétique, preuve, dimensions organisatrice et opératoire.

Abstract – How *reductio ad absurdum* is presented to students at the beginning of University ? What are the difficulties of undergraduates in the *reductio ad absurdum* process ? In this presentation we study those didactical issues thanks to our researches in didactic of mathematics and our teaching practice.

Keywords: *reductio ad absurdum*, secondary-tertiary transition, number theory, proof, organizing and operative dimensions.

1. Univ Lyon, Université Claude Bernard Lyon 1, Département de mathématiques, S2HEP UR 4148, F-69622, Lyon, France, vbattie@univ-lyon1.fr

On ne peut parler de la transition Secondaire-Supérieur (Gueudet et Thomas, 2020) sans évoquer les nombreuses difficultés rencontrées par les étudiants (Gueudet et Vandebrouck, 2019). Notre pratique enseignante à l'Université nous amène au constat d'une accentuation de ces difficultés accompagnée de la nécessité d'accueillir un public de plus en plus hétérogène en termes de parcours d'études et de formation mathématique. Depuis quelques années, un parcours dit aménagé (la première année de Licence est aménagée sur deux années d'enseignement) a été créé pour tenter de répondre aux besoins de formation de tout étudiant inscrit dans le Portail Maths-Informatique et nous y intervenons depuis sa création.

Dans nos recherches en didactique des mathématiques, nous étudions les questions d'enseignement et d'apprentissage relatives à la preuve et au raisonnement (Hanna, 2020) en exploitant de façon privilégiée les spécificités et potentialités de l'arithmétique (Battie, 2003). Pour outiller épistémologiquement nos analyses, tant *a priori* qu'*a posteriori*, nous distinguons dans le raisonnement deux dimensions complémentaires et en interaction. La dimension organisatrice s'identifie au raisonnement global qui traduit la mise en acte d'une visée. Cette dimension organise et structure les différentes étapes du raisonnement. Outre les figures usuelles du raisonnement mathématique, en particulier le raisonnement par l'absurde sur lequel nous centrons cette présentation, on identifie au niveau de cette dimension le raisonnement par récurrence (et autres formes d'exploitation de la propriété de bon ordre de l'ensemble $\mathbb{N}$), la réduction à l'étude d'un nombre fini de cas (telle la disjonction de cas) et le jeu d'extension-réduction (propre aux anneaux factoriels). La dimension opératoire quant à elle est relative à tout ce qui relève des manipulations de calcul (au sens le plus large) opérées sur les objets en jeu et qui permettent la mise en œuvre des différentes étapes du raisonnement global suivi (dimension organisatrice). Nous identifions par exemple les formes de représentation choisies pour les objets (telle la décomposition unique en produit de nombres premiers en appui sur le théorème fondamental de l'arithmétique, les congruences), l'utilisation de théorèmes, les manipulations algébriques et l'ensemble des traitements relatifs à l'articulation entre l'ordre divisibilité (anneau $\mathbb{Z}$) et l'ordre naturel (ensemble bien ordonné $\mathbb{N}$).

Après avoir étudié l'institutionnalisation du raisonnement par l'absurde dans différents cours magistraux (CM), nous étudierons sa mise en œuvre par les étudiants via l'analyse d'une soixantaine de copies issues d'une évaluation au sein du parcours aménagé.

Le raisonnement par l'absurde en cours magistral

Le raisonnement par l'absurde est une dimension organisatrice qui repose à la fois sur le principe de tiers exclu et celui de non contradiction, comme le rappelle Bernard et al. (2018). Adopter cette dimension organisatrice pour démontrer qu'une proposition A est vraie :

C'est démontrer que $(\text{non } A)$ est fausse en exhibant une proposition C telle que :

(1) $[(\text{non } A) \implies C]$ vraie et C fausse

(2) $[(\text{non } A) \implies (C \text{ et } (\text{non } C))]$ vraie (Bernard et *al.*, 2018)

Dans le cas où l'assertion est une implication notée $(P \text{ et } (\text{non } Q))$, la négation de cette implication étant $(\text{non } (P \text{ et } (\text{non } Q)))$, démontrer par l'absurde c'est :

Établir que $(\text{non } (P \text{ et } (\text{non } Q)))$ est fausse en trouvant une proposition C telle que :

(1) $[(P \text{ et } (\text{non } Q)) \implies C]$ vraie et C fausse

(2) $[(P \text{ et } (\text{non } Q)) \implies (C \text{ et } (\text{non } C))]$ (Bernard et *al.*, 2018)

Dans notre Université, le raisonnement par l'absurde est au programme de la première UE (Unité d'Enseignement) de mathématiques de la Licence du Portail Mathématiques-Informatique. Son habitat² privilégié par ce programme est « Bases de logique : quantificateurs, équivalence, contraposée, négation, raisonnement par récurrence, par l'absurde. Ensembles. Inclusion, intersection, réunion, complémentaire, parties d'un ensemble E , produit cartésien. », chapitre qui apparaît en troisième position après les chapitres « calculs algébriques » et « nombres complexes » (dans la maquette 2022-2023, cet habitat devient le chapitre « Logique » en deuxième position après « calculs algébriques »). Les CM sont faits par des enseignants du Département de mathématiques différents suivant le parcours (classique ou aménagé) et la mention visée (mathématiques ou informatique). Nous abordons ci-après la question de l'institutionnalisation de cet objet dans ces différents CM en étudiant sa présence dans les polycopiés/notes de cours rédigés par les enseignants à destination des étudiants ainsi que l'ouvrage de référence³ indiqué aux étudiants par tous ces enseignants.

Dans le CM mention mathématiques (parcours classique), l'habitat indiqué par le programme apparaît sous l'intitulé « Logique » (après les chapitres « Calculs algébriques » et « Ensembles et applications », l'ordre des chapitres indiqué par la programme n'étant pas respecté) et parmi les « techniques de preuve » retenues par l'enseignant(e) le raisonnement par l'absurde n'est pas présenté. Si on regarde l'ensemble du polycopié, on a confirmation que le raisonnement par l'absurde n'est pas institutionnalisé. Il est néanmoins utilisé quatre fois sous l'appellation « par l'absurde » dans les habitats « Calculs algébriques », « Suites réelles » et « Limites et continuité » avec pour niche :

2. Nous nous référons à l'approche écologique des savoirs (Artaud, 1998) qui définit les habitats d'un objet de savoir comme les différents lieux où on le trouve et les objets avec lesquels il entre en association. Et en chacun de ses habitats, la niche écologique qu'il occupe est la fonction avec laquelle il y vit.

3. Soyeur, A., Capaces, F., Vieillard-Baron, E. (2011) *Cours de Mathématiques Sup MPSI PCSI PTSI TSI*. Sésamath & les-mathematiques.net

prouver un résultat du cours. L'unique commentaire centré sur cette dimension organisatrice est fait dans le chapitre « Logique » lors de l'institutionnalisation du raisonnement dit ensembliste :

On a encore un avatar de la démonstration par l'absurde. Pour montrer $A \subset B$, on peut montrer que $(E - B) \subset (E - A)$:

Figure 0 - Extrait du CM mention mathématiques

Ce qui est doublement problématique : d'une part le mot « encore » ne fait écho à aucun commentaire dans ce qui précède et d'autre part il s'agit là d'un raisonnement par contraposée. A noter que nous avons aussi identifié cette confusion entre raisonnement par l'absurde et raisonnement par contraposée dans les documents d'accompagnement des programmes du Lycée (Battie, à paraître).

Dans le CM mention informatique (parcours classique), on a l'extrait suivant dans l'habitat prévu :

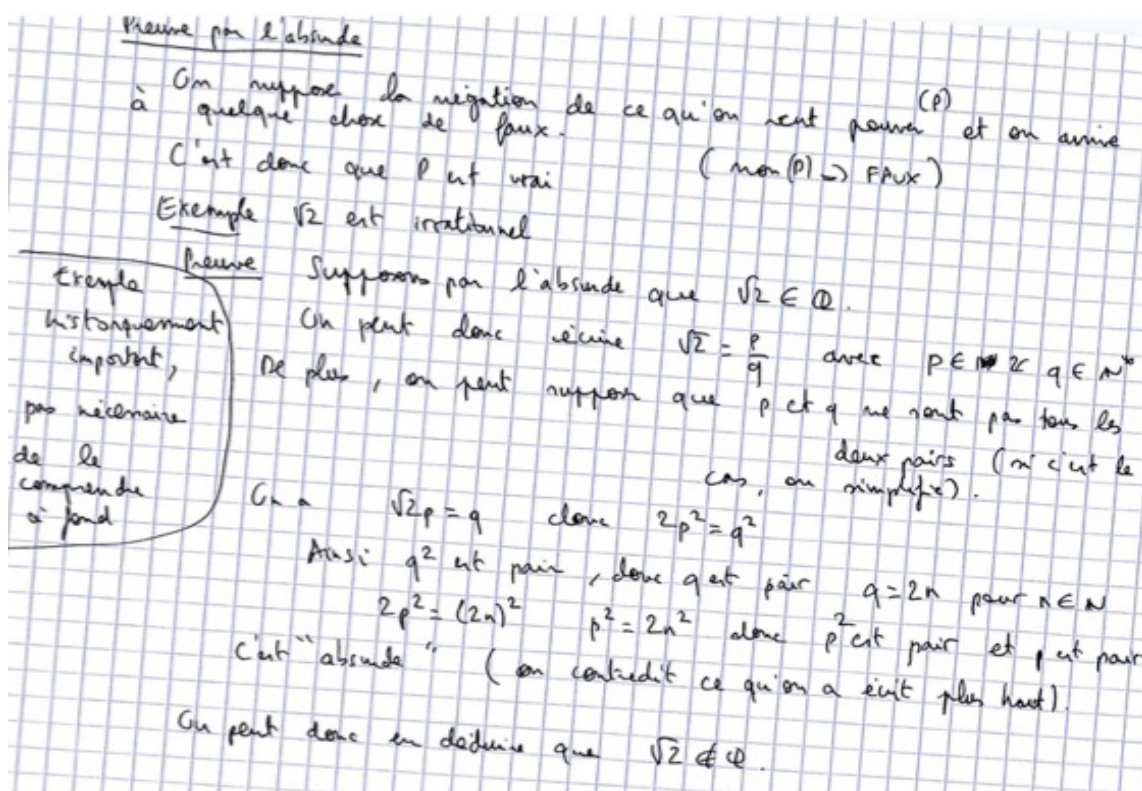


Figure 1 - Extrait du CM mention Informatique (parcours classique)

Le cas particulier d'une implication est laissé à la charge de l'étudiant(e) et, à travers l'exemple de la preuve communément dite d'Euclide, c'est exclusivement une dimension organisatrice de type 2 qui est présentée. Quant au commentaire « exemple historiquement important, pas nécessaire de le comprendre à fond », il nous laisse perplexe : la compréhension est-elle attendue exclusivement du côté de la dimension organisatrice ? La compréhension en termes de dimension opératoire et, de façon essentielle, d'interactions entre ces dimensions en écho à l'institutionnalisation en jeu serait-elle

laissée à la charge de l'étudiant(e) ? Pour approfondir l'étude, le discours accompagnant cet écrit serait éclairant.

Dans le CM parcours aménagé, on a l'extrait suivant :

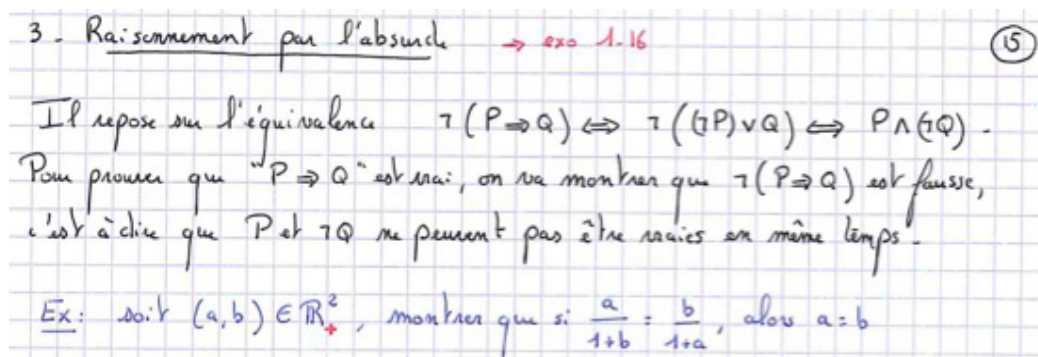


Figure 2 - Extrait du CM parcours aménagé

C'est à travers le cas particulier d'une implication que le raisonnement par l'absurde est institutionnalisé. Et avec la preuve de l'exemple choisi (non reproduite ici), c'est exclusivement une dimension organisatrice de type 2 qui est présentée. L'exercice mentionné fait référence à la feuille de travaux dirigés (TD) :

« Sur une île, on trouve deux sortes de personnes : les sincères, qui disent toujours la vérité, et les menteurs, qui mentent toujours. Question 1 : Jules et Jim sont deux habitants de cette île. Jules déclare : « L'un d'entre nous deux au moins est un menteur ». En raisonnant par l'absurde, démontrer que Jules est sincère. Qu'en est-il de Jim ? Question 2 : Anne, Émilie et Charlotte sont trois habitantes. Anne déclare : « Nous sommes toutes menteuses ». Émilie dit : « Une et une seule d'entre nous est sincère ». En raisonnant par l'absurde, démontrer qu'Anne est une menteuse, puis qu'Émilie est sincère. Qu'en est-il de Charlotte ? »

On constate une double rupture par rapport au CM : cet exercice n'est pas formulé dans le domaine mathématique avec son langage spécifique, et il ne s'agit pas du cas particulier d'une implication pour la proposition à prouver. Soulignons que l'enseignant(e) propose le chapitre « Bases de logique » en premier chapitre.

Dans l'ouvrage de référence cité dans les trois CM, nous trouvons dans l'annexe « Techniques de démonstration », après l'institutionnalisation du raisonnement par contraposée, l'extrait suivant :

Remarque 1.3 On utilise souvent le *raisonnement par l'absurde* en mathématiques. On veut montrer qu'une proposition Q est vraie. On suppose Q fausse et on aboutit à une absurdité.
Formellement, on utilise une suite d'implications $\neg Q \Rightarrow Q_1, Q_1 \Rightarrow Q_2, \dots, Q_{n-1} \Rightarrow Q_n$ toutes vraies, avec la proposition Q_n qui est fausse.

Exemple 1.3 Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel. On suppose par l'absurde que $\sqrt{2}$ est rationnel : il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\sqrt{2} = p/q$. En élevant au carré, $2q^2 = p^2$, mais alors 2 apparaîtrait à une puissance paire dans la décomposition en facteurs premiers de $2q^2$, alors qu'il apparaît avec une puissance paire dans la décomposition de p^2 . On aboutit à une contradiction avec l'unicité de la décomposition en facteurs premiers d'un entier (voir le théorème 20.18 page 757). On généralise cette preuve pour montrer que si un nombre p est premier, le réel $\sqrt{p}$ est irrationnel.

Figure 3 - Extrait de l'ouvrage de référence commun aux CM

Le raisonnement par l'absurde est institutionnalisé dans le cas général et, de façon cohérente, l'exemple met en scène cette dimension organisatrice sous le type 1. A noter qu'une erreur apparaît dans la preuve, il faut lire « mais alors 2 apparaîtrait à une puissance impaire dans la décomposition en facteurs premiers de $2q^2$ ». La proposition Q_n s'identifie ici à « il existe un nombre impair égal à un nombre pair » ou encore « $1 \equiv 0 \pmod{2}$ » en utilisant le langage des congruences. Il s'agit là de la preuve que nous qualifions de preuve fondamentale (Battie, 2007). Il est toutefois étonnant que l'institutionnalisation soit faite dans un paragraphe dédié à l'implication et qu'il reste à la charge de l'étudiant(e) de savoir mettre en oeuvre cette dimension organisatrice dans ce cas particulier.

Cette étude institutionnelle a mis à jour une diversité certaine dans les choix didactiques pour l'institutionnalisation du raisonnement par l'absurde au programme commun aux différents CM étudiés. L'éventail recouvre une non-institutionnalisation et des institutionnalisations diverses, plus ou moins réductrices d'un point de vue mathématique et épistémologique, ce qui donne à voir ce qui reste à la charge des étudiants. Les niches identifiées sont « être une technique de preuve » et « prouver un résultat du CM » et chacune d'elle est présente dans chaque élément du corpus. Il est à souligner que cette étude est exploratoire au sens où elle reste à approfondir notamment en analysant les « moments d'exposition des connaissances » (Bridoux et al., 2016). L'analyse du discours des enseignants qui accompagne les éléments écrits serait particulièrement éclairante, même si au-delà de l'étude l'institutionnelle et à la lumière des résultats propres aux pratiques des étudiants entrant à l'Université (Gueudet et Vandebrouck, 2019), cette voie méthodologique serait de moindre intérêt : tant l'assiduité des étudiants aux CM que l'impact du discours de l'enseignant(e) sur leurs apprentissages sont analysés au mieux comme faibles. Cette étude exploratoire du côté des CM pourrait être complétée lors du colloque de l'EMF en présentant les résultats de l'analyse d'un corpus élargi : feuilles des TD et sujets d'examens.

Analyse de copies d'étudiants

Nous analysons à présent une soixantaine de copies d'étudiants inscrits en 2021-2022 dans le parcours aménagé où nous intervenons comme chargée de TD. A l'issue de chaque chapitre, un test de 30 minutes a lieu et sa conception vise à situer les étudiants quant aux compétences-clefs du chapitre à travers des exercices considérés par l'équipe pédagogique comme applications relativement directes du CM et reprenant ce qui a été traité en TD. On se centre sur l'exercice suivant issu du premier test relatif au chapitre « Bases de logique » :

En suivant un raisonnement par l'absurde, démontrer le résultat suivant : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si n est le carré d'un entier alors $2n$ n'est pas le carré d'un entier.

Et une preuve attendue est la suivante :

On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que n est le carré d'un entier et que $2n$ est le carré d'un entier. Il existe donc deux entiers non nuls k et m tels que $2n = m^2$ et $n = k^2$. On obtient alors $2k^2 = m^2$ d'où $2 = \frac{m^2}{k^2}$. En conclusion, il existe deux entiers non nuls m et k tels que $\sqrt{2} = \frac{m}{k}$, ce qui contredit l'irrationalité de $\sqrt{2}$. Le résultat mentionné dans l'énoncé de l'exercice est donc démontré.

Dans le prolongement du CM, la proposition à démontrer est formulée sous forme d'implication. Et en rupture avec l'exemple donné en CM, d'une part une quantification universelle apparaît⁴ et c'est le type 1 (avec pour proposition C « $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel ») qui est à développer du côté de la dimension organisatrice. Deux premiers éléments-clefs de la dimension opératoire sont d'une part la double traduction opératoire de la propriété être un carré via l'existence de deux entiers à introduire dans la preuve et d'autre part le passage à la racine qui conduit à la sortie du domaine propre à l'arithmétique. Le résultat de la non-rationalité de $\sqrt{2}$ est au cœur des interactions entre dimensions organisatrice et opératoire : il est porteur de la mise à jour de la contradiction visée dans le raisonnement par l'absurde.

Dans le cadre de l'analyse *a priori*, nous donnons ci-après les exercices traités dans les quatre groupes de TD en lien avec le raisonnement par l'absurde, auxquels s'ajoute l'exercice cité précédemment dans l'étude institutionnelle :

Exercice 1-15 (principe des tiroirs). Soit n un nombre entier, $n \geq 1$. Démontrer que, si vous rangez $n + 1$ paires de chaussettes dans n tiroirs distincts, alors il y a au moins un tiroir contenant au moins deux paires de chaussettes. *Application* : un fichier contient 500 000 mots formés d'au plus quatre lettres de l'alphabet latin. Peuvent-ils être tous distincts ?

4. Le cas d'implications quantifiées universellement par une variable est une voie privilégiée pour travailler la distinction entre raisonnement par l'absurde et raisonnement par contraposée.

Exercice 1-17. En mettant en œuvre un raisonnement par l'absurde, démontrer que le nombre réel $\sqrt{2}$ est irrationnel. On rappelle qu'un nombre x est rationnel si et seulement s'il existe deux entiers p et q , avec q non nul, tels que $x = \frac{p}{q}$.

Exercice 1-18. Soit $n \geq 1$ un nombre entier naturel. On se donne $n + 1$ nombres réels x_0, x_1 dans $[0, 1]$ tels que $x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n$. On veut démontrer par l'absurde la propriété (P) suivante : il existe deux de ces nombres qui sont distants de moins de $\frac{1}{n}$ (inégalité large).

1. Écrire à l'aide de quantificateurs et de l'expression $x_i - x_{i-1}$ une formule logique équivalente à la propriété (P).
2. Écrire la négation de cette formule logique.
3. Rédiger une démonstration par l'absurde de la propriété (P) (pour cela, on pourra chercher à prouver $x_n - x_0 > 1$).
4. Donner une nouvelle preuve de la propriété (P) en utilisant cette fois le principe des tiroirs.

Ainsi, dans le prolongement du CM, la dimension organisatrice en jeu est abordée dans la diversité pointée dans le rappel mathématique et épistémologique précédent : proposition à démontrer non exclusivement sous la forme d'une implication et les types 1 et 2 pour le raisonnement par l'absurde sont en jeu (quelque soit la preuve privilégiée par les chargés de TD pour l'exercice 1-17). Dans le groupe que nous encadrions (groupe A), les exercices avaient été commentés de façon transversale en décontextualisant et spécifiant pour chaque exercice la dimension organisatrice en pointant les interactions avec la dimension opératoire

A posteriori, sur la base d'une soixantaine de copies analysées, seulement deux étudiants maîtrisent la mise en œuvre complète du raisonnement par l'absurde. Et cinq d'entre eux savent comment démarrer (à la fois que n est un carré et $2n$ aussi). Parmi les 7 copies où des points sont accordés, 4 sont celles d'étudiants du groupe A.

Il est à souligner que dans 15 copies des exemples sont mentionnés en guise de tentative de preuve. Le *théorème-en-acte*⁵ « un ou plusieurs exemples suffisent à démontrer une proposition avec quantification universelle » est à l'origine de ces productions et, en référence à notre pratique enseignante, très résistant chez les étudiants de ce parcours. Enfin, 15 autres étudiants n'ont pas traité l'exercice.

Nous avons sélectionné certaines copies et en reproduisons trois ci-après. Dans la copie ci-dessous, les éléments-clefs du côté opératoire sont explicités (double traduction d'être un carré avec deux entiers distincts, passage à la racine et résultat de l'irrationalité de) mais seul le mot « contradiction » fait intervenir explicitement la dimension organisatrice :

5. « Un théorème-en-acte est une proposition tenue pour vraie dans l'activité [...] » (Vergnaud, 2007). Il peut être vrai ou faux en référence au savoir savant (Chevallard, 1985).

Exercice 3

$$n = p^2$$

$$2n = q^2$$

$$2 = \frac{q^2}{p^2}$$

Avec la racine carrée :

$$\sqrt{2} = \frac{q}{p} \text{ . or } \sqrt{2} \text{ est irrationnel}$$

Donc nous avons une contradiction.

Figure 4 - Copie 1 (groupe B)

Toute quantification est absente tant du côté opératoire que du raisonnement par l'absurde. Ci-après, une autre copie :

Suite 1.3

Donc par raisonnement de l'absurde $P \wedge \neg Q$ est fausse

1.3

Si m est le carré d'un entier alors $2m$ n'est pas le carré d'un entier.

Il faut démontrer par l'absurde que $P \wedge \neg Q \Rightarrow$ fausse

Pour cela il faut soit trouver une réponse fausse ou bien ~~être~~ en contradiction de la réponse juste.

On suppose $m = 4$ pour P $2^2 = 4$ et $Q = 2 \times 4 = 8$
 $= 2 \times 4$
 $= 8$

donc pour $P \wedge \neg Q$ on fait : $2m$ est le carré d'un nombre entier = 8

donc P : $2^2 = 4$

$\neg Q$: $2 \times 4 = 8$ 8 n'est pas le carré d'un nombre entier
est fausse. Donc $P \wedge \neg Q = f$ donc son carré est égal à 8, l'affirmation
suite en haut

Figure 5 - Copie 2 (groupe A)

Est illustrée ici une mise en oeuvre du raisonnement par l'absurde parasitée du côté opératoire par le théorème-en-acte faux mentionné précédemment. Et c'est la dimension organisatrice qui guide prioritairement l'opérateur (erroné) développé par l'étudiant(e) ; ce phénomène avait été analysé dans (Battie, 2015). On retrouve le problème de la non prise en compte de la quantification en jeu pour l'objet n . Nous reproduisons une dernière copie :

Par l'absurde, il existe un entier différent de 0, si n est le carré d'un entier alors $2n$ est le carré d'un entier.
 Supposons que ce soit vrai, on prend $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{Z}$ $\forall$ n étant un entier d'un carré il peut s'écrire sous la forme $n = k^2 \Leftrightarrow \sqrt{n} = \pm k$
 et d'après l'énoncé $2n$ est également un carré, $2n = k^2 \Leftrightarrow n = \frac{k^2}{2}$
 $\Leftrightarrow \sqrt{n} = \left(\frac{k}{\sqrt{2}}\right)$
 $\Leftrightarrow \sqrt{2} = \frac{k}{\sqrt{n}}$
 or $\sqrt{2}$ ne peut pas s'écrire sous la forme d'un quotient, c'est faux donc l'énoncé de base est vrai

Figure 6 - Copie 3 (groupe C)

Du côté de la dimension organisatrice, la négation de l'implication est formulée sous forme d'une implication (et non d'une conjonction) alors qu'au sein de la dimension opératoire, les propositions « n est un carré » et « $2n$ est un carré » interviennent au titre d'hypothèses. On propose d'interpréter cela en termes de rupture entre la conceptualisation du raisonnement par l'absurde et sa mise en pratique par l'étudiant(e). Le passage à la racine et le résultat de non-rationalité apparaissent mais la double traduction opératoire de « être un carré » est problématique car les entiers en jeu sont supposés égaux.

Remarques conclusives

Avant la réforme du Lycée en France, il semblait déjà que « la première année ne permette pas le développement souhaitable des modes de raisonnement » (Gueudet et Vandebrouck, 2019). Il est à craindre que la faible prise en compte de la réalité des nouveaux publics entrant à l'Université n'aide pas à une amélioration de cette situation. De plus, dans le cadre des échanges avec les collègues au sujet de la nouvelle maquette universitaire (rentrée 2022-2023) une position extrême a été mise à jour : « en niveau 1, il faut bannir tout raisonnement ». En appui sur nos travaux en didactique des mathématiques articulés avec notre pratique enseignante, nous pensons bien au contraire qu'il faut amorcer ce travail dès que possible. L'enjeu est que progressivement les étudiants gagnent en

contrôle dans le développement à la fois des dimensions organisatrice et opératoire en étant outillés pour exploiter leurs spécificités respectives et, de façon essentielle, d'une claire conscience des interactions entre ces deux dimensions dans l'élaboration d'une preuve en appui sur les connaissances nécessaires sur la logique et la quantification articulées avec les concepts mathématiques.

Références

- Artaud, M. (1998). Introduction à l'approche écologique du didactique – L'écologie des organisations mathématiques et didactiques. *Actes de la neuvième école d'été de didactique des mathématiques*.
- Battie, V. (2003). Spécificités et potentialités de l'arithmétique élémentaire pour l'apprentissage du raisonnement mathématique. Université Paris 7 - Denis Diderot.
- Battie, V. (2007). Exploitation d'un outil épistémologique pour l'analyse des raisonnements d'élèves confrontés à la résolution de problèmes arithmétiques, *Recherches en didactique des mathématiques*, 27(1).
- Battie, V. (2015). Arithmétique et raisonnement mathématique en classe de terminale C&E au Gabon. *Revue africaine de didactique des sciences et des mathématiques*, 12.
- Battie, V. (à paraître). Pouvoir générique d'une preuve. *Actes du XXVII^{ème} colloque CORFEM*.
- Bridoux, S., Grenier-Boley N., Hache, C., Robert, A. (2016) Anciennes et nouvelles questions sur l'enseignement supérieur, un exemple de recherches actuelles sur l'exposition des connaissances. *Actes du séminaire national de l'ARDM*.
- Bernard, D., Gardes D., Gardes M.-L., Grenier D. (2018). Une étude didactique du raisonnement par l'absurde pour le Lycée. *Petit x*, 108, 5-40.
- Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné*. La Pensée Sauvage.
- Gueudet G., Thomas, M.O.J. (2020) Secondary-Tertiary transition in Mathematics Education. In Lerman S. (eds) *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer.
- Gueudet, G., & Vandebrouck, F. (2019). *Entrée dans l'enseignement supérieur, éclairages en didactique des mathématiques*. CNESCO.
- Hanna, G., Knipping, C. (2020) Proof in mathematics education, 1980-2020: An Overview. *Journal of Educational Research in Mathematics*, Special Issue.
- Vergnaud, G. (2007) Représentation et activité : deux concepts étroitement associés. *Recherches en Education* 4.