LE RAISONNEMENT LOGIQUE POUR ASSURER UN ENSEIGNEMENT DE LA PENSEE MATHEMATIQUE : LE CAS DES EQUATIONS ET DES FONCTIONS ALGEBRIQUES

RAHIM KOUKI
Université de Tunis El Manar, Tunis, Tunisie.
Université de Lyon, LEPS-LIRDHIST, France
kouki_ra@yahoo.fr

Résumé. Les travaux de recherche conduits en Tunisie ont mis en évidence un recul du travail sémantique au profit du travail syntaxique dans l'enseignement secondaire, alors même que de nombreuses applications nécessitent une articulation entre les deux points de vue. C'est le cas des relations entre courbe, équations et fonctions. L'hypothèse qu'il est possible de proposer un travail favorisant cette articulation en renversant la relation entre parabole et fonction trinôme a été mise à l'épreuve dans une expérience didactique. La communication donnera un aperçu des résultats théoriques et empiriques de la recherche.

Mots-clés. Didactique des mathématiques, Expérience didactique, Enseignement secondaire, Raisonnement logique, Travail sémantique, Travail syntaxique, Courbe, Parabole, Equation quadratique, Fonction trinôme

Introduction

Dans l'enseignement secondaire, la parabole est introduite le plus souvent comme courbe représentative des fonctions trinômes, et donnée par une équation de la forme $y = ax^2 + bx + c$, où la lettre y est le plus souvent vue non pas comme une lettre de variable, mais comme le nom de la fonction associée. De la sorte, la définition de la parabole apparaît comme subordonnée à la fonction trinôme, et la construction de la parabole peut se faire par des techniques syntaxiques, évacuant la dimension sémantique liée à l'équation cartésienne associée; à savoir que la parabole est l'ensemble des points dont les coordonnées (x, y) vérifient l'équation du second degré a deux inconnues (en fait deux variables) correspondantes à $y - ax^2 + bx + c = 0$.

Dans les travaux de recherche que nous avons conduits en Tunisie nous avons mis en évidence un recul du travail sémantique au profit du travail syntaxique dans l'enseignement secondaire, alors même que de nombreuses applications nécessitent une articulation entre les deux points de vue. C'est le cas des relations entre courbe, équations et fonctions et nous avons fait l'hypothèse qu'il est possible de proposer un travail favorisant cette articulation en renversant la relation entre parabole et fonction trinôme. Nous avons donc proposé à titre expérimental à des élèves volontaires d'une classe de deuxième année secondaire section sciences, qui ont déjà étudié le chapitre sur les fonctions trinômes.[1] Une séquence consistant à partir de la définition géométrique de la parabole en termes d'équidistance à une droite et à un point n'appartenant pas à la droite, pour en déterminer l'équation cartésienne, d'où l'on dégage la fonction associée. Des entretiens semi directifs ont ensuite été conduits avec des enseignants suivant un Master 2 de Didactique des mathématiques. Les enseignants avaient visionné la vidéo de la séance sans aucune indication préalable. Le but de l'entretien était, d'une part, de dégager le point de vue des praticiens sur les

[1] L'équivalent d'une classe de seconde en France.

enjeux et les spécificités de la séquence d'enseignement et, d'autre part, à repérer leurs conceptions des points de vue sémantique et syntaxique dans les résolutions des problèmes de mathématiques relatives à la manipulation des objets équations, inéquations et fonctions,

Dans la première partie de cette communication nous donnerons quelques résultats concernant l'articulation entre syntaxe et sémantique à la lumière du point de vue adopté en logique sur ces deux notions, ainsi que quelques repères historiques sur les relations entre courbes, équations et fonctions. Dans la deuxième partie, nous présentons une situation expérimentale à travers laquelle nous essayons de dégager les enjeux pour l'appropriation de la notion de fonction, et nous donnerons quelques uns des résultats obtenus dans la recherche conduite en Tunisie auprès des élèves participant à l'expérience et auprès des enseignants interrogés.

1. Analyse logique et mathématique des objets équation et fonction : entre syntaxe et sémantique

1. 1. Insuffisance du calcul propositionnel pour l'analyse des discours mathématiques

En logique propositionnelle, la valeur de vérité d'une proposition complexe dépend uniquement de la valeur de vérité des propositions qui la composent. Ainsi, la valeur de vérité de $[(p \vee q) \Leftrightarrow r]$ est déterminée par les valeurs de vérité des propositions élémentaires p, q et r en rapport avec la définition des connecteurs. Le calcul de la valeur de vérité se fait en manipulant des lettres de variables propositionnelles, qui s'interprètent comme des propositions[2], représentant les plus petits composants d'une analyse logique. L'insuffisance du calcul des propositions pour analyser certaines propositions complexes a conduit à élargir le système relatif au calcul propositionnel et à considérer le système du calcul des prédicats qui permet d'analyser la structure de la proposition tout en tenant compte de la quantification. En effet, la proposition possède une forme fonctionnelle ou prédicative qui désigne soit une propriété soit une relation qui se décompose en deux parties : l'une est dite fermée, l'autre requérant un complément. (cf. Ouelbani, 2000). Par exemple « *Un rectangle admet deux diagonales isométriques* » est une proposition sous réserve que, conformément à la pratique mathématique, l'on donne à l'article indéfini une valeur générique, et que, donc, l'on considère qu'il s'agit d'un énoncé général.

Il est évident qu'un discours mathématique, aussi simple soit-il, ne peut pas en général être analysé par le calcul propositionnel. En effet, un discours mathématique parle généralement *d'objets* et de *propriétés* relatives à ces objets, ainsi que de relations entre objets, et met en jeu des questions de quantifications. La structure de la proposition et les rapports entre ses constituants sont donc importants pour l'activité mathématique.

C'est également le point de vue développé en didactique des mathématiques par Durand-Guerrier (1996) et par Durand-Guerrier et Arsac (2003) qui ont montré que le modèle théorique proposé par Raymond Duval dans le cadre de la géométrie[3], est

---

[2] Nous adoptons un point de vue de la logique propositionnelle articulant une syntaxe et une sémantique (les tables de vérité), telle qu'il est développé dans Wittgenstein (1921). On en trouve une présentation dans Durand-Guerrier (2005).

[3] Pour analyser le rôle du langage en géométrie, Duval distingue trois niveaux d'opérations discursives : la dénomination, l'énonciation de propriétés, la déduction.

RAHIM KOUKI Université de Tunis El Manar, Tunis, Tunisie. Université de Lyon, LEPS-LIRDHIST, France
kouki_ra@yahoo.fr

insuffisant, et par suite devient inopérant, dans de nombreux cas et particulièrement au niveau de l'analyse.

Lorsqu'on aborde les démonstrations en Analyse, il apparaît très clairement que le cadre théorique proposé par Raymond Duval pour la Géométrie devient inopérant dans de nombreux cas, en particulier lorsqu'interviennent des théorèmes existentiels. (Durand-Guerrier & Arsac, 2003, p. 298)

Il est alors nécessaire de considérer un système de calcul qui permette d'analyser la structure des propositions au lieu de se limiter au calcul des valeurs de vérité de ces propositions.

1. 2. Éléments pour une théorie de la quantification

1. 2. 1. Fonction, argument et variable

Le calcul propositionnel forme une partie fondamentale de la logique. Cependant, plusieurs concepts, comme l'identité ou les relations, ne font pas partie du calcul propositionnel. Contrairement à la logique des propositions, qui a pour objet la transformation de propositions au moyen des foncteurs logiques ($\wedge$, $\vee$, $\neg$, etc.), la logique prédicative est une logique intra-propositionnelle permettant d'analyser la structure de la proposition tout en tenant compte de la quantification (lorsque les expressions sont quantifiées).

Les propositions en général, et pas uniquement dans le domaine des mathématiques, ont une nature fonctionnelle, puisqu'elles sont décomposables en deux parties : l'une dite fermée et l'autre requérant un complément. Par exemple, l'énoncé suivant : « César conquit les Gaules » se décompose selon Frege en deux parties :

– « César » est appelé *l'argument* et peut varier puisqu'on pourrait aussi bien dire : « Napoléon conquit les Gaules ».

– « conquit les Gaules » est la *fonction* que l'on peut exprimer sous la forme « x conquit les Gaules ».

Dans ce sens, Frege (1971) précise à la page 91, que

« Ce n'est qu'après avoir rempli cette place par un nom propre ou par une autre expression qui représente un nom propre, qu'on voit naître un sens fermé sur lui-même. J'appelle fonction la dénotation de la partie non saturée. Dans ce cas, l'argument est ici « César »»

Quant à Quine (1950, 1972), il précise que l'expression (phrase) « x conquit les Gaules » où x est une lettre de variable, un *marque-place*, est ce que l'on appelle en logique *« une phrase ouverte »*. Pour les logiciens Frege et Russell, inventeurs de la logique prédicative moderne, contrairement à la proposition, la fonction est ambiguë et n'exprime pas un sens complet.

Par analogie, cette définition s'applique à tous les types d'énoncés, y compris les énoncés mathématiques. En effet, l'équation « $2x-1=3$ » ne reçoit un sens complet, autrement dit, la phrase ouverte ne devient vraie ou fausse, que si l'on attribue une valeur à x.

Les expressions contenant des variables sont appelées des fonctions désignatives ou descriptives que nous pouvons interpréter comme des termes généraux.

Celles-ci sont nommées dans le domaine des mathématiques « fonctions ». Nous nous limitons dans notre travail aux fonctions à un seul argument.

En mathématiques, nous disons qu'une fonction est une expression ou une formule qui contient x. D'où l'expression $3x^2+1$ est une fonction de la variable x et $3\times1^2+1$ est

RAHIM KOUKI Université de Tunis El Manar, Tunis, Tunisie. Université de Lyon, LEPS-LIRDHIST, France
kouki_ra@yahoo.fr

une fonction de l'argument 1. Frege (1971) explique qu'une fonction est une expression de la forme, par exemple, $3() + 1$, qui est incomplète et ayant besoin d'une chose, appelée dans le langage logique, argument.
En termes de logique, on pourra dire que la fonction est la partie prédicative de la phrase désignant soit une *propriété* soit une *relation*. Une propriété correspond aux prédicats unaires ou monadiques qui s'applique à un seul objet. Par exemple *avoir des diagonales qui se coupent en leurs milieux* pour les quadrilatères. Les relations correspondent aux prédicats à n places (n-aires) avec $n \geq 2$ ou encore polyadiques s'appliquant à plusieurs objets. Par exemple : *être compris entre… et…* est un prédicat ternaire.
Frege explique encore qu'en mathématiques
On a l'habitude de lire l'équation « $y = f(x)$ » « y est une fonction de x ». C'est commettre une double faute. Premièrement, on traduit le signe d'égalité par la copule ; deuxièmement, on confond la fonction avec sa valeur pour un argument. Ces fautes ont fait naître l'opinion que la fonction est un nombre, dût-il être un nombre variable ou indéterminé. (Frege, 1971, p. 168-169)
C'est pourquoi nous pensons qu'il est extrêmement important de préciser les différences entre les concepts de fonction en logique et en mathématiques.

1. 2. 2. Fonctions et relations en mathématiques

Les fonctions ou les relations fonctionnelles ou encore les relations univoques au sens de Tarski constituent une catégorie particulière des relations. En effet, une fonction est une relation qui à chaque objet y correspond au plus un objet x [4]. Par exemple x est la mère de y est une relation fonctionnelle puisque pour chaque y il n'existe qu'une seule personne x qui soit mère. En mathématiques, nous avons une abondance de relations fonctionnelles. Par exemple la relation $x = y^2$ peut s'interpréter comme une relation fonctionnelle puisqu'à chaque nombre réel y nous ne pouvons faire correspondre qu'un seul nombre réel x vérifiant l'égalité donnée. En outre, les valeurs de l'argument de cette fonction ne sont que des nombres réels et les valeurs de la fonction, après l'avoir saturée, sont des termes[5] ou des nombres réels positifs. Ainsi, une dénotation de cette relation fonctionnelle par le symbole f rendra la formule $x = y^2$ sous la forme $x = f(y)$[6]. D'où à une fonction sur un domaine donné[7] on peut associer une relation binaire en interprétant cette égalité comme une phrase ouverte (une équation à deux variables) ; en outre, dans notre exemple on a les équivalences : « $x = f(y) \iff x = y^2 \iff x - y^2 = 0 \iff F(x, y) = 0$ », où F est une fonction de deux variables.
D'autre part, il est important de remarquer que dès les mathématiques élémentaires, nous pouvons rencontrer des relations qui ne sont pas des fonctions. Par exemple, la relation $x^2 + y^2 = 100$ n'est pas une relation fonctionnelle, puisque à un seul et même nombre y peuvent correspondre deux nombres différents pour lesquels la relation est satisfaite.

---

[4] Les objets y sont les valeurs de la fonction et les x sont les valeurs de l'argument.
[5] Au sens logique que nous allons expliciter ci-dessous.
[6] Evidement x et y peuvent se remplacer mutuellement.
[7] Dans notre cas le domaine est l'ensemble des nombre réels IR.

RAHIM KOUKI Université de Tunis El Manar, Tunis, Tunisie. Université de Lyon, LEPS-LIRDHIST, France
kouki_ra@yahoo.fr

1. 2. 4. Terme singulier, terme général, variable

Pour pouvoir parler d'un objet, on lui attribue un *nom*. En logique, un nom d'objet est un *terme* qui peut se présenter sous deux formes :

– *Terme singulier* ou nom propre qui s'applique à un seul objet bien délimité. En mathématique, par exemple, chaque nombre réel est un terme singulier.

– *Terme général* ou nom commun qui peut s'appliquer à plusieurs objets : nombre, fonction, polygone… Ces termes désignent des classes d'objets.

Ainsi, si on applique un prédicat à un ou plusieurs termes singuliers on obtient une proposition, appelée proposition singulière. Par exemple :

– « 8 est un nombre impair » est une proposition fausse de l'arithmétique.

– « π est inférieur à 4 » est une proposition vraie dans l'ensemble des réels muni de la relation d'ordre habituelle.

Par contre, si l'on applique un prédicat à un terme général, on produit une expression dépourvue de valeur de vérité qui n'est donc pas une proposition. Par exemple, l'expression « x est inférieur ou égale à 3 », que Russel (1989) appelle fonction propositionnelle, est une expression vraie dans certains cas et fausse dans d'autres.

Russell (1989) et Tarski (1960) ont insisté sur la notion de variable qui est l'une des notions capitales en mathématiques. D'un point de vue logique, la variable est un marque place ; elle ne désigne rien ; elle permet l'attribution de valeurs par des objets de l'univers du discours dans une interprétation donnée.

Elle permet aussi la substitution par un terme complexe. Bien que le terme variable en mathématique soit polysémique et souvent utilisé dans un sens métaphorique, on l'utilise également dans de nombreux cas avec son statut logique de marque place, particulièrement en algèbre.

Il était alors essentiel d'introduire de nouveaux concepts afin de distinguer les propositions des fonctions propositionnelles (Frege, Russell) ou encore des *phrases ouvertes* au sens de Quine (1950, 1972)[8], qui sont dépourvues de valeur de vérité. Quine réserve la notion de fonction propositionnelle pour les systèmes formels.

1. 2. 5. Les phrases ouvertes et la notion de satisfaction

L'application d'un prédicat à un terme général, ou à plusieurs termes dont l'un au moins est un terme général, donne ce que Quine appelle une phrase ouverte (cf. Durand-Guerrier et al., 2000) ou une fonction propositionnelle (cf. Tarski, 1960) qui n'est pas une proposition, et n'est donc pas susceptible de recevoir une valeur de vérité.

Etant donné un domaine de référence pertinent pour la variable, une phrase ouverte peut être transformée en un énoncé clos (une proposition) de trois manières :

– En considérant sa clôture universelle : « Pour tout x, x est un nombre premier ». (1)

– En considérant sa clôture existentielle : « Il existe x tel que x est nombre premier ». (2)

– En assignant un élément du domaine de référence à la variable : « 41 est un nombre premier » (3) ; « 121 est un nombre premier » (4).

Dans l'ensemble *N* des entiers naturels, (1) et (4) sont des propositions fausses ; (2) et (3) sont des propositions vraies.

[8] Quine réserve la notion de fonction propositionnelle pour les énoncés des systèmes formels comportant une ou des variables libres.

RAHIM KOUKI Université de Tunis El Manar, Tunis, Tunisie. Université de Lyon, LEPS-LIRDHIST, France
kouki_ra@yahoo.fr

La troisième manière correspond à la notion de satisfaction d'une phrase ouverte[9] par un objet qui fonde la théorie sémantique de la vérité de Tarski.
D'ailleurs, quand Tarski (1936, 1972) introduit la notion de satisfaction d'une phrase ouverte, il renvoie à l'algèbre scolaire.
Cette présentation de la notion de satisfaction d'une phrase ouverte par un élément, correspond à la conception « sémantique » de la vérité dans les langages formalisés due à Tarski (1936), qui, lorsqu'il l'introduit, la relie explicitement à la notion de solution d'une équation familière au mathématicien. (Durand-Guerrier et al., 2000, p. 9)
Une phrase ouverte est dépourvue d'une valeur de vérité et on peut dire que d'un point de vue logique, une équation est une phrase ouverte et la résoudre dans un domaine d'objet donné (appelé en logique *univers du discours)*, revient à déterminer tous les objets de ce domaine qui satisfont cette phrase ouverte.
En ce qui concerne les équations, une terminologie spéciale est passée dans l'usage en mathématiques ; ainsi, les variables figurant dans une équation s'appellent les inconnues, et les nombres satisfaisant à l'équation, les racines de l'équation. Par exemple, dans l'équation : $x^2+6=5x$, la variable « x» est l'inconnue, tandis que les nombres 2 et 3 sont les racines de l'équation. (Tarski, 1960, p. 6)
Parmi les phrases ouvertes qui peuvent se présenter, il y a celles qui sont vraies de tous les objets de l'univers du discours, par exemple : *un nombre est divisible par lui-même* ; d'autres sont fausses de tous les objets de l'univers du discours : $x>x+1$ pour tout $x\in R$. Alors que les autres sont pour quelque(s) objet(s) vraies et fausses pour d'autre(s). p. ex. « *un multiple de* 5 *est divisible par* 3 »
Tarski signale qu'en général nous ne différencions pas facilement les termes qui dénotent les objets que traite une science.
On peut présumer que bien peu sont conscients du fait que des termes tel que «équations », « inégalité », polynôme » ou « fraction algébrique», qui se rencontrent continuellement dans les manuels d'algèbre élémentaire, n'appartiennent pas, à strictement parler, au domaine des mathématiques ou de la logique, puisqu'ils ne dénotent pas des objets considérés dans ce domaine ; les équations et les inégalités sont certaines fonctions propositionnelles spéciales…. (Tarski, 1960, p. 28)
Dans ce qui suit, comme c'est le cas le plus souvent en logique aujourd'hui, nous utiliserons le terme de *prédicat* pour modéliser les propriétés et les relations, et nous réserverons le terme de fonction à la notion mathématique, qui, à un terme, associe un nouveau terme.

[9] Fonction propositionnelle au sens de Tarski.

RAHIM KOUKI Université de Tunis El Manar, Tunis, Tunisie. Université de Lyon, LEPS-LIRDHIST, France
kouki_ra@yahoo.fr

1. 3. Syntaxe et Sémantique en Logique Prédicative

1. 3. 1. La syntaxe du calcul des prédicats

Selon Carnap (1934), la syntaxe s'occupe de la partie de la langue qui a les caractéristiques d'un calcul ; donc, elle se limite à l'aspect formel de la langue. Elle se donne un alphabet de signes dépourvus de sens et susceptibles d'être combinés suivant des règles (voir, par exemple, Ouelbani, 1992, et Sebestik, 1997).

Ouelbani explique que

Carnap parle d'une syntaxe logique du langage scientifique. Par logique de la science, il entend essentiellement une théorie formelle de ce langage, c'est-à-dire l'établissement systématique des règles valant pour ce langage et le développement des conséquences de ces règles. Cette théorie est formelle, elle ne considère donc ni la signification des termes, ni le sens des expressions. (Ouelbani, 1992, p. 183)

En logique, la syntaxe d'un langage formel donne donc les règles de formation et de transformations des énoncés du langage considéré ; elle permet de reconnaître si un énoncé est bien formé ou non et si le passage d'un énoncé à un autre dans une démonstration de théorème par exemple est valide. Les règles de formation sont les suivantes :

P_1 Un prédicat saturé par autant de termes qu'il a de place est une formule.

P_2 Si F est une formule, $\neg F$ est une formule.

P_3 Si F et G sont des formules, $F \wedge G$, $F \vee G$, $F \Rightarrow G$, $F \Leftrightarrow G$ sont des formules.

P_4 Si F est une formule et x une lettre de variable $\exists\, x\, F$ et $\forall\, x\, F$ sont des formules.

Rien d'autre n'est une formule.

Nous ne traiterons pas ici de la théorie de la démonstration (dérivabilité formelle), car ceci déborde largement le cadre de ce que nous étudions dans ce travail.

1. 3. 2. La sémantique logique

Étant donné un langage formalisé, comme le calcul des prédicats, *la sémantique logique* étudie les interprétations possibles des symboles utilisés ainsi que les relations entre les diverses interprétations des formules utilisées. La théorie sémantique de la vérité due à Tarski (1936, 1944) permet d'associer une valeur de vérité à une formule donnée dans une interprétation donnée. Elle nécessite donc une structure interprétative : un univers du discours, des interprétations pour les lettres de prédicats, de fonctions et éventuellement de constantes et de fonctions. Tarski a résolu ce problème en proposant une construction récursive de la satisfaction d'une phrase ouverte, ce qui permet, d'après Durand-Guerrier (2005), de définir la vérité pour laquelle l'appareil logique n'excède pas le calcul des prédicats du premier ordre. Dans ce cas nous pouvons dire que si une formule F contient une variable libre x est une fonction propositionnelle définie par sa clôture universelle $\forall x F(x)$ et sa clôture universelle $\exists x F(x)$ et ne sera vraie ou fausse que par assignation d'un objet à la variable libre. Sinaceur (1991) rejoint ce point de vue et explique que

[i]l s'agit en effet, compte tenu de tel ou tel langage, de construire une définition de l'expression « proposition vraie », définition qui soit matériellement adéquate et formellement correcte. (constatation de Tarski citée dans Durand-Guerrier, 2004)

Ce point de vue de Tarski est à mettre en relation avec la pratique habituelle du mathématicien en particulier lorsqu'il travaille avec des équations ou des inéquations.

RAHIM KOUKI Université de Tunis El Manar, Tunis, Tunisie. Université de Lyon, LEPS-LIRDHIST, France
kouki_ra@yahoo.fr

1. 4. La sémantique et la syntaxe en mathématiques

Le travail que nous nous proposons accorde une importance aux définitions et exemples relatifs au sens et à la dénotation d'un signe ainsi qu'à ses valeurs de vérités. Dans le cas de l'étude des valeurs de vérité d'une proposition Frege écrit que :
[l]e sens de ces propositions, c'est-à-dire la pensée qu'elle exprime, entre en compte autant que la dénotation, laquelle est la valeur de vérité de ces propositions. Si $a=b$ la dénotation de b est bien la même que celle de a, et la valeur de vérité de $a=b$ est aussi la même que celle de $a=a$. Toutefois, le sens de b peut être différent du sens de a et par là la pensée exprimée dans $a=b$ peut être différente de celle dans $a=a$. Dans ce cas, les deux propositions n'ont pas non plus la même valeur pour la connaissance. (Frege, 1971, p. 126)
Frege définit la dénotation d'une proposition comme étant sa valeur de vérité, et son sens comme étant la pensée exprimée. Par conséquent, d'un point de vue extensionnelle « Berlin est la capitale de l'Allemagne » et « $2+2=4$ » sont équivalentes parce qu'elles ont la même valeur de vérité, bien qu'elles n'ont évidemment pas le même sens. Ce sont cependant les apports de Tarski qui vont permettre de donner une définition non ambiguë de la notion d'équation et d'inéquation.
Dans le langage de l'algèbre, une équation est une phrase ouverte : elle comporte une ou plusieurs variables libres. Etant donné un domaine d'objets (par exemple un ensemble de nombres, mais pas seulement), un élément de ce domaine est solution de l'équation si et seulement s'il satisfait la phrase ouverte, c'est-dire si et seulement si la proposition obtenue en assignant cet objet à la variable est une proposition vraie dans le domaine considéré. La même définition vaut pour les inéquations[10].
Sous ce point de vue, une lettre d'inconnue est un nom d'objet et on devrait plutôt parler d'équations à deux variables (Durand-Guerrier, 2004 b). Certaines équations sont vraies de tous les objets du domaine considéré, on a alors une identité. Ceci est toujours lié au domaine considéré.
La syntaxe fournit des règles de transformations des équations qui préservent le plus souvent la satisfaction. Deux équations sont équivalentes si et seulement si elles sont satisfaites exactement par les mêmes éléments.
De telles transformations permettent de travailler essentiellement au niveau de la syntaxe. Cependant, au moment de conclure il faut bien revenir aux objets. En outre, certaines transformations ne préservent pas la satisfaction, ce qui nécessite un contrôle sémantique. Par exemple, Résoudre l'équation : $\frac{2x+1}{x-3}=\frac{x-3}{2x+1}$ peut se faire par des techniques de résolution syntaxiques utilisant des implications et les propriétés du corps des nombres réels. En revanche, ces résolutions peuvent nous amener à des domaines qui, sans assignation de valeurs ou interprétation, ne seront pas valides.

1. 5. Aperçu historique

[10] Notons que Wittgenstein distingue les mathématiques de la logique. En mathématiques, nous avons à faire à des équations et en logique à des tautologies.

Il est bien connu que dans l'Antiquité et jusqu'à la fin du premier millénaire, les résolutions des équations et des inéquations se font par des méthodes arithmétiques et/ou des méthodes géométriques (Diophante). Nous disons que ceci correspond à un point de vue *sémantique*, dans la mesure où on ne se détache pas de la signification et/ou de l'interprétation des grandeurs qu'on manipule. Au début du IXème siècle, on voit apparaître chez certains mathématiciens arabes tels que Al-Khawarizmi, Al Kharaji, Ibn Al Yassamin (Abdeljaouad, 2003) et Sharaf al-Din al-Tusi (Rached, 1986) des algorithmes comme méthodes de résolution des équations de degré supérieur ou égal à deux sans recours explicite aux interprétations géométriques. Abdeljaouad (2003) explique que, par exemple, dans la résolution des équations quadratiques.
Ibn al-Haîm commence par prévenir qu'il n'aura pas recours aux justifications géométriques de la tradition euclidienne, mais qu'il utilisera des identités remarquables, plus commodes à comprendre par l'étudiant, même si- en définitive- la justification ultime de ces identités se trouve chez Euclide. (Abdeljaouad, 2003, p. 19)
Il nous semble que l'on peut reconnaître ici une première apparition de ce que l'on appellera, à la suite des logiciens du XX^{ème} siècle, un point de vue syntaxique, où l'on travaille sur les expressions en appliquant des règles fonctionnant plus ou moins comme des axiomes. Il faudra cependant attendre le XVI^{ème} siècle pour que le système d'écriture symbolique mathématique permette des avancées significatives dans ce domaine qui fut exploité par Descartes, Newton et Leibniz… qui ont élargi ce système dans plusieurs directions parmi lesquelles la représentation des courbes par des équations, où les quantités à rechercher sont désignées par des lettres indiquant le statut de l'indéterminée.
Cette possibilité de déterminer les équations des courbes[11] a montré que ces objets mathématiques représentent effectivement l'ensemble des solutions d'équations à deux inconnues particulières et très simples. Ceci montre, nous semble-t-il, que la mise en relation des concepts d'équation et de fonction par le biais des relations fonctionnelles et par l'intermédiaire des courbes est en accord avec l'émergence dans l'histoire du concept de fonction. Nous pensons ainsi, que ceci est en cohérence avec les analyses de Tarski relatives à la notion de *relations univoques* ou *fonctions* dans laquelle réside la notion de variables dépendantes et celle de variables indépendantes qui se traduit par la dualité entre l'équation de Descartes exprimée en $aeq(x, y) = 0$ et celle de la notion de fonction introduite par Leibniz et Euler qui est symbolisée par $y = f(x)$.

[11] En particulier les équations des lignes droites, le cercle, la parabole, l'ellipse et l'hyperbole qui est un travail très caractéristique de Descartes.

2. De la parabole à la fonction trinôme au lycée

Nous avons explicité dans la première partie les relations logiques entre équation et fonction pour lesquelles nous avons montré que le cadre logique propose un point de vue unificateur qui est une relecture *a posteriori* de ces différentes relations. D'un autre côté, l'aperçu historique sur les objets mathématiques d'équation et de fonction, montre clairement que le concept de fonction s'inscrit dans le sens d'équation fonctionnelle et de recherche d'une relation entre une abscisse et une ordonnée qui satisfait certaines conditions. Ceci éclaire le lien essentiel entre problèmes géométriques et caractérisation algébrique.

2. 1. Situation expérimentale

Nous avons envisagé une situation (cf. Annexe 1) qui rend possible un travail sémantique lié à l'équation cartésienne associée à la parabole, à savoir qu'elle est l'ensemble des points du plan dont les coordonnées vérifient l'équation du second degré à deux inconnues réelles.
L'objet parabole peut être défini par la propriété fondamentale des foyers et de la directrice, que nous appelons définition *mono-focale*, comme étant un lieu des points du plan équidistants par rapport à un point et une droite donnée. Cette activité vise d'une part à mettre en relation l'interprétation géométrique et le calcul algébrique et d'autre part à montrer aux élèves que les coniques, et en particulier les paraboles, qui peuvent être interprétés en tant que représentations graphiques des fonctions trinômes et rationnelles, peuvent être aussi interprétés en tant que représentations graphiques de l'ensemble des solutions d'équations à deux variables.
Notre projet, à travers la situation d'enseignement proposée, est l'étude de l'articulation sémantique syntaxe que nous avons mis en rapport avec les objets équation, inéquation et fonction dans des situations de résolution et en particulier l'approche équationnelle de l'objet parabole. La situation d'enseignement a été mise en place en une séance d'environ une heure, le 12 mai 2006, auprès d'un groupe composé de dix élèves d'une classe de deuxième année secondaire section sciences d'un lycée d'une banlieue de Tunis. Ces élèves étaient tous volontaires pour participer à cette expérimentation qui était organisée en dehors du temps scolaire.
Les analyses *a postériori* du déroulement de la séquence expérimentale[12] ont montré que les élèves ont un niveau technique, au sens de Robert, du type syntaxique puisqu'ils mobilisent, dans la plupart du temps, des formules et des transformations purement algébriques pour résoudre des types de tâche pouvant se traiter par un autre type de techniques sémantiques relatives au registre graphique et / ou algébrique qui s'est traduit dans le cas du calcul de distance d'un point à une droite où

11. L'élève E_2 s'adresse à l'expérimentateur en disant : *On commence par rappeler la règle générale puis on l'applique à notre cas !*
12. L'expérimentateur : *Quelle règle ?*
13. E_5 : *La règle de la distance et innh !*
14. L'expérimentateur : *La règle de calcul d'une distance d'un point à une droite !*
15. E_2 : *oui c'est ça.*

[12] S'appuyant essentiellement sur le protocole que nous avons redigé à travers la vidéo.

RAHIM KOUKI Université de Tunis El Manar, Tunis, Tunisie. Université de Lyon, LEPS-LIRDHIST, France
kouki_ra@yahoo.fr

En plus, le niveau de mise en fonctionnement des connaissances disponibles[13], qui de notre point de vue correspond à la flexibilité dans l'articulation des deux points de vues sémantiques et syntaxiques dans différents registres est repéré chez un ou deux élèves. En effet,

22. L'élève E_2 dit : *impossible*.

23. L'expérimentateur intervient et lui dit : *C'est quoi impossible !*

24. E_2 répond : *On a* M *euh !* M *est variable (en faisant tourner son doigt) et il faut préciser* M *pour savoir la distance qui sépare* M *à la droite* D.

25. L'expérimentateur dit : *Comment ! si j'ai un point* M *de coordonnées* (x, y) *dans le plan orienté je ne peux pas déterminer la distance !*

26. E_5 : *Monsieur on peut déterminer mais pas! euh !*

27. E_2 : *C'est dans le cas général !*

28. E_5 : *Oui c'est dans le cas général ! C'est tout à fait la règle et c'est tout*.

Ceci nous renvoie à la question de l'effet potentiel du contrat didactique (Brousseau, 1998) selon lequel les techniques syntaxiques devraient être préférées aux techniques sémantiques dans les résolutions de problèmes liés à la manipulation des équations et fonctions.
En revanche nous pensons que la situation a conduit les élèves à faire certains changements de mise en fonctionnement des connaissances et certaines adaptations pour pouvoir avancer suite à des nécessités rencontrées dans leurs milieu. Ceci est clairement repérable dans les interactions suivantes

32. L'expérimentateur : *Qu'est ce que vous voulez dire par cas général ?*

33. E_5 : *C'est-à-dire la règle de la valeur absolue de* ax_M *+ eh !*

34. E_2 : *On ne peut pas préciser exactement la valeur de cette distance.*

35. L'expérimentateur : *On ne vous a pas demandé de calculer la distance mais de déterminer cette distance !*

36. E_5 : *Déterminer ! Ah oui ! donc la distance serait* $d = \dfrac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Ce qui nous conduit à conclure que le processus de dévolution qui s'est traduit par la réponse suivante des élèves

235. L'expérimentateur : *D'une façon générale qu'est ce que je peux conclure ?*

236. E_2 : *On peut passer des équations du type* $y = ax^2 + bx + c$ *aux fonctions trinômes.*

237. E_6 : *On peut transformer notre équation* $x^2 - y - \dfrac{3}{4} = 0$ *en une* fonction.

Était localement repérable dans cette situation et par la suite, le point de vue de Robert (1998) sur la possibilité d'avancer dans une situation plus élaborée même si les connaissances sont partiellement disponibles est ainsi confirmé et par la suite nous pouvons confirmer l'hypothèse qui consiste en la possibilité d'introduire l'objet parabole par le biais d'une forme équationnelle en vue d'éviter la subordination de parabole à la fonction trinôme.

[13] Ce niveau est lié à la connaissance de situations de références variées dans lesquelles les élèves sont capables de résoudre ce qui est proposé sans aucune indication.

RAHIM KOUKI Université de Tunis El Manar, Tunis, Tunisie. Université de Lyon, LEPS-LIRDHIST, France
kouki_ra@yahoo.fr

2. 2. Le point de vue de praticiens sur la séquence d'enseignement

Nous avons cherché à repérer de plus près le point de vue des praticiens sur la situation d'apprentissage que nous avons analysé ci-dessus. Pour cela, nous avons mis en place une expérimentation qui consiste à projeter la séquence vidéo de la situation d'enseignement[14] auprès de six enseignants suivant un Master 2 de Didactique des mathématiques d'une part, et de réaliser, avec eux, des entretiens semi-directifs (cf. Annexe 2) qui peuvent, *a priori*, nous permettre de repérer ce que les enseignants ont identifié à travers cette situation, et la place qu'ils accordent à l'articulation sémantique / syntaxe.
La première partie de l'entretien s'appuie sur nos questionnements dégagés à travers les analyses de la situation et la deuxième partie contenait des questions d'ordre professionnel afin de repérer leur conception des points de vue sémantique et syntaxique dans les résolutions des problèmes de mathématiques relatives à la manipulation des objets équations, inéquations et fonctions.
Ces entretiens montrent clairement que les connaissances visées par la situation et les connaissances mobilisées par les élèves ont été repérées par la plupart des enseignants, en particulier l'articulation des deux cadres algébrique et géométrique qui figure parmi les objectifs généraux de la situation, et ceci même si nous avons observé quelques confusions au niveau de la distinction entre ces deux types de connaissances. Par contre, le projet fondamental de la situation qui consiste à proposer une activité mathématique permettant de rencontrer la parabole à partir d'une définition géométrique, afin de mettre en relation la courbe obtenue, avec une fonction trinôme par le biais de son équation cartésienne, n'a pas été clairement identifié par la majorité des enseignants.
D'autre part, la majorité des enseignants favorise l'outil syntaxique de résolution au détriment de l'outil sémantique. Cependant, la mobilisation de l'outil sémantique dans les résolutions n'est pas totalement absente chez ces enseignants puisque certains d'entre eux ont soulevé les questions d'interprétation des écritures mathématiques qui peut relever d'un ou plusieurs registres. Ceci rejoint notre hypothèse selon laquelle le seul point de vue syntaxique ne saurait suffire à traiter les problèmes mobilisant des équations, inéquations et fonctions au secondaire.

Conclusion

Nous pensons avoir montré, dans ce qui précède, que l'explicitation de l'articulation entre les points de vue sémantique et syntaxique, d'un point de vue logique, permet de mettre en lumière ce qui se joue dans les nécessaires allers et retours entre registres algébrique, et graphique. En plus, la mise en place d'une situation d'enseignement qui consiste à mettre en relation des concepts d'équation et de fonction par le biais des relations fonctionnelles (au sens de Tarski) et par l'intermédiaire des courbes qui est en accord avec l'émergence dans l'histoire du concept de fonction contribue à l'enseignement d'une pensée mathématique rationnelle.
De plus, les enjeux de la situation d'enseignement, en termes d'articulation entre syntaxe et sémantique, qui étaient peu repérés par les enseignants montrent que la dimension sémantique est plutôt associée aux problèmes extra mathématiques. Ceci montre qu'il serait pertinent d'étudier dans quelle mesure les pratiques des

[14] Les enseignants on été accompagné par le protocole de la situation.

enseignants[15] concernant cette articulation peut ou non avoir un effet sur ce que les élèves et les étudiants mobilisent et ce, au-delà du seul niveau d'enseignement.

Bibliographie

ABDELJAOUAD Mahdi. *Sharh al-Urjuza al-Yasminiya*. Tunis: Publications de l'Association Tunisienne des Sciences Mathématiques, 2003 a. 123 p (partie française) et 304 p (partie arabe).

BROUSSEAU Guy. *Théorie des situations didactiques (Didactique des mathématiques 1970-1990)*. Grenoble : La pensée sauvage, 1998, 332 p. (Recherches en didactique des mathématiques)

CAVAILLES Jean. Postface. Dans : Jan Sebestic. *Sur la logique et la théorie de la science*. [En ligne], 1997, p. 91-142. Disponible sur <http://books.google.fr/books?id=Nu9SeY6Ksh0C&printsec=frontcover#PPP1,M1> (le 18 août 2008).

DURAND-GUERRIER Viviane. Logique et raisonnement mathématique. Défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication, 291 p. Thèse : Didactique des mathématiques : Lyon1 : 1996.

DURAND-GUERRIER Viviane, et al. Le statut logique des énoncés dans la classe de mathématiques : éléments d'analyse pour les enseignants. Lyon : IREM, 2000, 117 p.

DURAND-GUERRIER Viviane, ARSAC Gilbert, Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. Spécificité de l'analyse. Quelles implications didactiques ?. *Recherche en didactique des mathématiques*, 2003, vol 23, n° 3, p. 295-342.

DURAND-GUERRIER Viviane. *Apport de la théorie élémentaire des modèles pour une analyse didactique du raisonnement*, 159 p. Habilitation à diriger des recherches : Didactique des mathématiques : Lyon1 : 2005.

FREGE Gottlob. *Ecrits de logique et philosophiques*. Paris : Seuil, 1971, 256 p. (Points Essais)

OUELBANI Melika. *Le projet constructionniste de Carnap*. Tunis : Faculté des Sciences Humaines et Sociales de Tunis, 1992, 230 p.

OUELBANI Melika. *Introduction à la logique*. Tunis : Centre de Publication Universitaire, 2000, 138 p.

QUINE Willard Van Orman. *Methods of logic*. New York : Harvard University Press; Traduction française Paris : Armand Colin, 1972, 295 p.

RIVENC François. *Introduction à la logique*. Paris : Payot, 1989, 271 p. (Petite bibliothèque Payot)

ROBERT Aline, Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 1998, vol. 18, n° 2, p. 139-190.

RUSSELL Bertrand. *Ecrits de logique philosophique*. Paris: P.U.F, 1989, 520 p. (Epimethée)

TARSKI Alfred. *Introduction à la logique*. Paris : Gauthier-Villars, 1960, 224 p. (Collection de logique mathématique)

TARSKI Alfred. *Logique, sémantique, mathématique : 1923-1944*. Armand Colin, vol. 1, 1972, 276 p. (Philosophies pour l'âge de la science)

TARSKI Alfred. *Logique, sémantique, mathématique : 1923-1944*. Armand Colin, vol. 2,

[15] S'appuyant sur le point de vue de Robert (2001), Rogalski (2003), Roditi (2005)

RAHIM KOUKI Université de Tunis El Manar, Tunis, Tunisie. Université de Lyon, LEPS-LIRDHIST, France
kouki_ra@yahoo.fr

1974, 314 p. (Philosophies pour l'âge de la science)

RAHIM KOUKI Université de Tunis El Manar, Tunis, Tunisie. Université de Lyon, LEPS-LIRDHIST, France
kouki_ra@yahoo.fr

Annexes

Annexe 1

Contenu de l'activité proposée dans la séquence d'enseignement

On considère un plan P muni d'un repère orthonormé direct $\Re = \left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1) Tracer, dans $\Re$, la droite $D : y = -1$

2) Placer le point $F\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ dans $\Re$.

3) Soit $M(x, y)$ dans $\Re$.

a) Déterminer la distance d séparant le point M de la droite D.

b) Déterminer la distance MF séparant le point M du point F.

4) Soit $\Gamma = \left\{M(x, y) \in P; MF^2 = d^2\right\}$.

a) Montrer que $M \in \Gamma$ si et seulement si $x^2 - y - \frac{3}{4} = 0$

b) Remplir le tableau suivant sachant que x et y représentent les coordonnées du point M de Γ.

x	0	$\frac{1}{2}$		1		-1	-2
y			$\frac{1}{4}$		$\frac{5}{4}$		

c) Placer ces points dans $\Re$.

5) Déduire et décrire ce que représente Γ.

Annexe 2

L'entretient avec des enseignants

Première partie :

1) Proposeriez-vous cette activité à vos élèves ?
2) A quel niveau d'enseignement secondaire proposez-vous cette activité ?
3) Dans quel cadre placez-vous cette activité ?
4) Dans quel chapitre proposez-vous cette activité ?
5) Pensez vous qu'elle peut être placée comme une :
- ❖ Introduction d'un concept mathématique donné
- ❖ Exercice d'application relatif à un concept mathématique bien déterminé
- ❖ Exercice dans la liste des exercices d'un chapitre
6) Pouvez-vous justifier votre choix ?
7) Si vous auriez la tâche de proposer cette activité, vous la proposerez
- ❖ Comme exercice individuel dans la classe
- ❖ Comme devoir à la maison
- ❖ Comme un travail de groupes en dehors des heures prévues pour l'enseignement
8) Pouvez-vous justifier votre choix
9) Quels sont les concepts mathématiques mis en jeu dans cette activité ?
10) Quels sont les attentes de l'enseignant dans la séquence d'enseignement ?

Deuxième partie : (questions d'ordre professionnel)

1) Qu'est ce que vous dites à vos élèves lorsque vous enseignez la résolution des équations ?
2) Comment introduisez-vous le second degré ?
3) Qu'est ce que vous faites pour faire vivre l'aspect sémantique chez vos élèves ?
4) Est ce que vous expliciter les vérifications ?

RAHIM KOUKI Université de Tunis El Manar, Tunis, Tunisie. Université de Lyon, LEPS-LIRDHIST, France
kouki_ra@yahoo.fr