Titre: L'identification d'invariants - une entrée dans la pensée algébrique - un exemple au collège en France

Auteurs: CIAVALDINI Jérôme-Ange, DEMAILLY Marie-Claire, GRAVAS Julien, LE-MEN Karine, SOFONEA Carmen, BOULAIS Pascale et DURAND-GUERRIER Viviane

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 260 - 270

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

L'identification d'invariants - une entrée dans la pensée algébrique - un exemple au collège en France

CIAVALDINI Jérôme-Ange – DEMAILLY Marie-Claire – GRAVAS Julien – LE-MEN Karine – SOFONEA Carmen – BOULAIS Pascale – DURAND-GUERRIER Viviane[1]

Résumé – Un enjeu important de la scolarité obligatoire au début du collège (élèves 12-14 ans) est de permettre aux élèves une entrée réussie dans l'algèbre. Dans ce texte, nous défendrons l'importance de l'identification d'invariants dans des activités mettant en jeu des nombres entiers pour favoriser l'entrée des élèves dans la pensée algébrique. Nous illustrerons ceci dans le cas d'une situation didactique empruntée à Gustavo Barallobres que nous avons mise en œuvre à de nombreuses reprises dans nos classes.

Mots-clefs : Pensée algébrique, invariants, situation didactique, conjecture, dimension expérimentale en mathématique.

Abstract – An important issue of compulsory education at the beginning of secondary school (pupils aged 12-14) is to enable pupils to successfully enter algebra. In this paper, we will defend the importance of identifying invariants in activities involving natural numbers to help students enter algebraic thinking. We will illustrate this in the case of a didactic situation borrowed from Gustavo Barallobres that we have implemented many times in our classes.

Keywords: Algebraic thinking, invariants, didactic situation, conjecture, experimental dimension in mathematics.

1. IREM de Perpignan, Académie de Montpellier, France

Introduction

Il est bien connu que l'entrée dans l'algèbre est un facteur d'échec électif au début du collège (élèves entre 12 et 14 ans), y compris pour des élèves ayant été en réussite en mathématiques jusque-là. De nombreux travaux de recherche abordent cette question (voir par exemple Coulange et al. 2012). Dans le groupe IREM[2] de Perpignan[3], nous avons souhaité proposer à des élèves des classes de cinquième et de quatrième des activités pour les aider à entrer dans la pensée algébrique, comme préalable à l'introduction de l'algèbre au sens propre du terme.

Nous voulions utiliser une situation dont le scénario respecte la théorie des situations didactiques de Brousseau tout en s'appuyant sur le lien développé entre pensée algébrique et invariants, décrits dans de nombreux travaux (Bronner, A. & Squalli, H. (2021), *La généralisation dans la pensée algébrique*, Revue québécoise de didactique des mathématiques, vol 3, p. 3-38). Toute collection de situations qui caractérisent une même connaissance mathématique, possède au moins une situation fondamentale qui les génère toutes par la détermination des valeurs de ses variables (La théorie des situations didactiques de Brousseau, article d'Alain Kuzniaj[4]). Le groupe IREM de Perpignan a vu dans la situation didactique développée par Gustavo Barallobres dans sa thèse[5] et présentée au colloque EMF 2008 à Sherbrooke (Barallobres et Giroux 2008) le potentiel d'une situation fondamentale. Cette situation illustre de ce que la multiplication des expériences, en appui sur des objets, des méthodes et des connaissances naturalisées pour le sujet, favorise l'élaboration de nouveaux objets conceptuels et de leurs propriétés, de résultats nouveaux et de leurs preuves, et contribue de manière essentielle au processus de conceptualisation (Vergnaud, 1991).

Elle pourrait générer, au moyen des patterns (motifs), des situations visant le développement de l'algèbre chez l'élève de 12 ans. Nous émettons donc l'hypothèse que la recherche d'invariants dans cette situation d'actions mettant en jeu des entiers naturels permet une entrée fondamentale et facilitée dans la pensée algébrique.

Dans cette proposition de communication, nous allons tout d'abord préciser ce que nous entendons par invariant et pourquoi nous faisons l'hypothèse de leur rôle dans l'entrée dans la pensée algébrique. Nous présenterons ensuite la situation didactique retenue en motivant nos choix et en donnant des éléments d'analyse a priori centrée sur l'émergence d'invariants en lien avec les conjectures attendues. Nous terminerons par des analyses de travaux d'élèves issues de mises en œuvre en classe.

2. Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques

3. Groupe délocalisé à Perpignan de l'IREM de l'académie de Montpellier

4. https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/ST/IST04030/IST04030.pdf

5. https://papyrus.bib.umontreal.ca/xmlui/bitstream/handle/1866/16466/Barallobres_Gustavo_2005_these.pdf

Rôle des invariants dans l'émergence d'une pensée algébrique

Un aspect essentiel de l'algèbre est son aspect formel, entendu au sens que ce terme peut avoir par exemple lorsque l'on parle de logique formelle chez Aristote : les raisonnements conduits en algèbre sont valides ou non en fonction de leur forme : par exemple, si vous avez une équation de la forme $ab+ac = d$, vous pouvez la transformer en l'équation équivalente $a(b+c)=d$. Ces deux équations auront exactement les mêmes solutions en raison de leur forme, ce qui renvoie à la syntaxe des deux expressions. On parlera ici d'équivalence syntaxique.

Cependant, en amont de ces équivalences syntaxiques, se trouvent des équivalences sémantiques, que l'on peut repérer à partir d'invariants dans les calculs numériques. Si nous revenons à l'exemple ci-dessus, imaginez une situation où vous avez des boites d'œufs comportant soit six œufs, soit quatre œufs, et vous devez préparer des commandes pour lesquelles on vous demande systématiquement de fournir autant de boite de 4, que de boites de 6. Lorsque vous préparez la commande, vous devez indiquer le nombre de boites commun et le nombre total d'œufs de la commande. Au bout de quelques commandes réalisées, il va apparaître un invariant : le nombre total d'œufs est égal à 10 fois le nombre de boîtes. Ceci permet de remplacer le calcul $4B + 6B$ où B représente le nombre de boîtes par la multiplication $10B$; or $10 = 4 + 6$. Ceci ayant été observé, on peut identifier que connaissant le nombre total d'œufs commandés par l'entreprise, il suffit de diviser ce nombre par dix pour avoir le nombre de boîtes de chaque catégorie. Ceci va faire émerger un nouvel invariant : si le nombre d'œufs commandé est un multiple de 10, on pourra fournir exactement tous les œufs demandés avec des boîtes complètes. Si ce nombre n'est pas un multiple de 10, il n'y a pas de solution en nombres entiers de l'équation. Comme on travaille dans le domaine discret, on va s'intéresser au reste dans la division euclidienne et il faudra décider ce que l'on fait de ces œufs restants (aspect pragmatique). Pour poursuivre dans la voie de recherche d'invariants dans une perspective de généralisation, on pourra varier les types d'objets et les nombres en conservant la même règle : par exemple fabriquer deux types de colliers avec des nombres de perles différents en ayant le même nombre de type de colliers pour chaque commande. Progressivement, un nouvel invariant pourra apparaître associer à la règle de la distributivité mentionnée ci-dessus. En accord avec Larguier (2015, p. 327), nous considérons que l'identification d'invariants en situation est un indicateur d'un début de pensée algébrique.

La situation que nous présentons ci-dessous est issue de la thèse de Gustavo Barallobres. Elle a été présentée lors du congrès EMF 2006 à Sherbrooke (Barallobres et Giroux 2008). Elle a été adaptée pour une implémentation dans des classes ordinaires par les membres du groupe de l'IREM de Perpignan (Académie de Montpellier) en France et elle a été mise en œuvre à de nombreuses reprises. Une présentation de ce travail est publiée dans Boulais (2022). Dans ce texte, après avoir présenté rapidement la situation, nous mettons l'accent sur les opportunités a priori qu'offre cette situation pour faire émerger des invariants. Nous terminerons en montrant sur des exemples de productions d'élèves l'apparition en situation de tels invariants.

Une situation didactique favorisant l'identification d'invariants

La situation qui a été retenue et adaptée est construite autour du problème : « Calculer le plus rapidement possible la somme de 10 nombres consécutifs ». C'est un cas particulier du problème général « Trouver le plus rapidement possible la somme de p nombres consécutifs commençant à n ». Une première variable didactique de ce problème est la parité du nombre p. En effet, lorsque p est impair, le résultat est nécessairement un multiple de p ; tandis que lorsque p est pair, le résultat n'est jamais un multiple de p. Ici, nous sommes dans le cas pair. Une forme générale du résultat est

$$\sum_{k=n}^{k=n+p-1} k = pn + \sum_{k=1}^{p-1} k = pn + \frac{p(p-1)}{2} \quad (1)$$

que l'on peut écrire sous d'autres formes équivalentes comme par exemple

$$\sum_{k=n}^{k=n+p-1} k = \frac{p(2n+p-1)}{2} \quad (2)$$

Dans le cas qui nous intéresse ici, à savoir le cas où le nombre de termes de la liste est 10 nombres consécutifs, les principaux invariants susceptibles d'apparaitre sont d'une part 45 qui correspond à la somme des entiers de 1 à 9, qui est elle-même un invariants, « 10 fois le premier nombre » ainsi que l'invariant « 2 fois le premier nombre plus 9 ». Les trois premiers sont liés à la formule (1), le dernier à la formule (2). Il y a également des invariant de structure, notamment la somme entre deux types d'invariants, le produit ou demi produit d'un invariant par le nombre de termes de la liste.

Dans la mise en œuvre en classe, l'organisation didactique prend appui sur la théorie des situations didactiques (Brousseau 1988) en jouant sur une alternance de phases d'action (sous forme de jeu), de phases de formulation des méthodes les plus rapides et de phases de validation pour justifier les méthodes. Les phases d'actions sont propices à l'identification en acte de certains invariants ; les phases de formulation des méthodes permettent de les expliciter pour préparer les débats pendant les phases de validation qui visent à ce stade à produire des justifications ne faisant pas appel à l'algèbre qui n'a pas encore été introduite en classe. A ce niveau, nous faisons l'hypothèse que les nombres entiers et les opérations élémentaires sur les entiers sont suffisamment stabilisés pour que les élèves aient confiance dans les résultats de leurs calculs ; ils jouent ainsi le rôle d'objets concrets au sens de Durand-Guerrier (2019).

Émergence a priori des invariants dans les phases d'action

La première phase est une phase d'expérimentation et de recherche. Les élèves vont faire des calculs en essayant d'être astucieux et de dégager des conjectures qu'ils mettront à l'épreuve de la série suivante. Les actions possibles et accessibles aux élèves de collège sont nombreuses. Elles sont présentées par exemple dans Durand-Guerrier (2010). La phase d'action est organisée sous la forme d'un jeu où les élèves jouent individuellement. Le critère de rapidité vise à faire émerger des méthodes variées. Certaines méthodes de calcul vont favoriser l'apparence des invariants. Nous donnons ci-dessous les principales[6].

Méthode 1 – Décomposer les nombres sous la forme N, N+1, N+2, …, N+9

Cette méthode fait appel en acte à la notion théorique de « nombres consécutifs ». Cette méthode favorise l'apparition de l'invariant « 10 fois le premier nombre » auquel il faut ajouter « la somme des entiers de 1 à 9 », ce qui produit par calcul l'invariant 45. Ceci produit directement l'une des méthodes la plus rapide.

Méthode 2 – Faire des regroupements par paire

Écrire la liste en ligne et regrouper les nombres par paire : le premier avec le dernier, le second avec l'avant dernier et ainsi de suite. Dans ce cas, à chaque étape, le résultat est « 2 fois le premier nombre +9 ». On voit donc apparaître ici le dernier invariant que nous avions mentionné plus haut. Comme on avait 10 nombres, on a cinq paires, il faut donc multiplier par 5. Cette méthode se justifie par la compensation des écarts au sein des différentes paires.

Méthode 2bis – A la manière du jeune Gauss

Cette méthode consiste à écrire la liste des nombres en ligne, puis à écrire dessous la liste en commençant par le dernier terme, puis l'avant dernier et ainsi de suite. Pour la même raison que dans la méthode 2, toutes les sommes sont égales à « 2 fois le premier nombre plus 9 ». Ici cet invariant apparaît 10 fois, mais en multipliant par 10, on obtient deux fois la somme. Il faut donc diviser par 2.

6. Nous ne donnons pas ici toutes les méthodes possibles. Pour une étude plus complète voir Boulais (2022) ou le site DREAM : https://clarolineconnect.univlyon1.fr/clarolinepdfplayerbundle/pdf/4019128.

Méthode 2ter – Utiliser la médiane

Recopier la liste et la partager en deux parties égales. Comme il n'y a pas de nombre au milieu (car 10 est un nombre pair), il faut introduire « le nombre du milieu », qui n'est pas un entier, qui correspond à la moitié de l'invariant « 2 fois le premier nombre +9 ». Les écarts entre les deux listes se compensent. Le résultat est dix fois « le nombre du milieu ».

Notons que considérée comme une méthode générale, elle fournit une justification au fait que lorsque le nombre p de termes de la liste est pair, le résultat n'est jamais un multiple de p, et permet de prouver que lorsque p est impair, le résultat est toujours un multiple de p (en effet, dans ce cas, la médiane est un nombre de la liste).

Méthode 3 – Ajouter les nombres en colonnes

Cette méthode très élémentaire et qui peut sembler a priori peu rapide peut permettre d'identifier après 2 ou 3 itérations que la somme des unités est toujours égale à 45, et avec une observation un peu plus fine, que la somme des dizaines est toujours égale au nombre de départ. Ceci s'appuie sur les propriétés de la numération décimale de position. Notamment, dans ce système, une liste de 10 nombres consécutifs comporte toujours une fois et une seul chacun des chiffres des unités de 0 à 9. Une fois les invariants identifiés, il est possible d'abandonner cette méthode un peu fastidieuse pour une des méthodes les plus rapides, à savoir « multiplier par 10 le premier nombre et ajouter 45 ».

Notons que l'identification de ce dernier invariant peut aussi éventuellement résulter de l'observation. Ceci peut être le cas si on laisse au tableau pour les différentes étapes la liste des nombres et le résultat une fois celui-ci confirmé collectivement. Notons aussi qu'il est intrinsèquement lié à la numération décimale de position, ce qui explique que nous ne l'ayons pas mentionné dans la liste a priori donnée plus haut.

Méthode 4 – Décomposition décimale

Cette méthode est très proche de la précédente ; elle consiste à décomposer les nombres en dizaines et unités, et à faire la somme des dizaines, puis la somme des unités et à ajouter les deux résultats. Cette méthode fait émerger l'invariant 45 ; comme pour la méthode précédente, ceci est justifié par le fait que dans une somme de dix nombres consécutifs, toutes les unités de 0 à 9 apparaissent une fois et une seule.

Les phases de formulation pour expliciter les méthodes

Dans les mises en œuvre dont sont issus les travaux d'élèves analysés dans la section suivante, les phases de formulation font suite aux phases d'action. Elles se déroulent en groupe de trois ou quatre élèves, en faisant en sorte que dans chaque groupe il y ait au moins un élève ayant répondu rapidement pendant les phases d'action. La consigne proposée est « Échangez sur vos stratégies de calcul et mettez-vous d'accord sur la plus rapide. Expliquez cette stratégie sur la feuille A_4 comme vous le feriez pour un camarade absent. Vous pourrez tester cette stratégie sur deux nouvelles séries après le travail de groupe ». Compte tenu du rôle a priori des invariants dans l'évolution des méthodes individuelles pendant las phases d'action, nous faisons l'hypothèse que les productions d'élèves permettront d'identifier certains des invariants mobilisés par les élèves pendant les phases d'action.

Des invariants dans les productions des élèves

Dans cette section, nous rendons compte de l'identification d'invariants par les élèves à partir des productions des groupes dans les phases de formulation, que nous retranscrivons ici.[7]

Identification de l'invariant 45

> Groupe 2[8] : « On calcule d'abord les dizaines et après les unités. Le nombre des unités fait tout le temps 45 parce que c'est tout le temps 1, 2, 3, 4 etc… ».

Dans ce groupe, on peut faire l'hypothèse que les élèves ont mis en œuvre la méthode 4 qui leur a permis d'identifier l'invariant 45 ; ils ont en outre identifier l'invariant de la liste des unités, qui permet de justifier l'invariant 45. Ceci est manifeste par l'usage deux fois de l'expression « tout le temps ».

> Groupe 3 : On multiplie le premier chiffre de la série par le nombre des autres chiffres et on ajoute toutes les différences avec les autres chiffres.
>
> 10+45

Les élèves mentionnent d'abord un invariant concernant la structuration du calcul. Ils produisent ensuite une expression formelle rendant compte de la structure et montrant qu'ils ont identifié l'invariant 45.

7. Les scans des copies correspondantes sont disponibles dans Boulais (2022)

8. Les numéros des groupes correspondent à ceux de Boulais (2022).

Groupe 4 : On prend le dernier nombre de la liste, on ajoute un zéro et on enlève 45.

36-37-38-39-40-41-42-43-44-45

450-45=405

Il n'y a pas de justification pour ce groupe permettant de faire des hypothèses sur la ou les méthodes ayant conduit à l'identification de 45 et à une structure correcte, que nous n'avions pas anticipée.

Groupe 5 : On prend le 5ème chiffre de la série puis on ajoute 5 car les chiffres de 0 à 9 ça fait 45 ; alors automatiquement à la fin il y aura 5.

Exemple : 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 = 585

58 puis on met 5 à la fin.

Dans ce groupe, on ne sait pas comment ils ont identifié le rôle du 5ème nombre de la liste ; en revanche, ils justifient le fait qu'il faut ajouter 5 (sous-entendu à droite du 5ème nombre) par la somme des entiers de 0 à 9.

Identification d'un invariant de type structure

Les productions de plusieurs groupes montrent l'identification d'un invariant de type structure, qui marquent selon nous clairement une entrée dans la pensée algébrique. On l'a vu déjà avec les groupes 3 et 4 analysés ci-dessus. C'est aussi le cas pour la production du groupe 7 ci-dessous.

Groupe 7 : notre stratégie est de prendre le premier nombre et le dernier nombre de la liste. On les additionne et on fait fois 5.

Ceci correspond à la méthode 2. Bien qu'il n'y ait pas de justification, la mise en œuvre de cette méthode nécessite au moins en acte l'identification de l'invariant de la somme des paires.

Conclusion

Dans cette communication, nous avons mis l'accent sur le rôle que peut jouer l'identification d'invariants dans l'entrée dans la pensée algébrique dans des situations didactiques élaborées à cet effet. Nous avons retenu et adapté une situation pensée par Gustavo Barallobres comme situation d'entrée dans l'algèbre, que nous avons mises en œuvre à de nombreuses reprises dans des classes de début de collège. Les analyses des productions d'élèves pendant les phases de formulation suivant les phases d'action montrent que les invariants identifiés a priori apparaissent de manière régulière. On observe dans cette situation plusieurs aspects essentiels de la dimension expérimentale en mathématique pour les apprentissages mathématiques : la multiplication des expériences, en appui sur des objets, des méthodes et des connaissances naturalisées pour le sujet [ici les nombres entiers], favorise l'élaboration de nouveaux objets conceptuels et de leurs propriétés (Durand-Guerrier, 2010). Comme le montre les analyses des preuves produites par les élèves dans Boulais (2022, pp. 14-19), les invariants qui émergent pendant les phases d'action et de validation nourrissent le milieu pour la validation, et favorisent par là-même l'entrée dans une pensée algébrique. L'IREM de Perpignan pense que la situation pensée par Gustavo Barallobres est une situation fondamentale permettant l'émergence d'une pensée algébrique.

Bibligraphie

Barallobres, G. & Giroux, J. (2008), Différents scénarios de situations d'une phase de validation collective, in *Actes électroniques du colloque EMF 2006*, Sherbrooke, pp. 27- 31 mai 2006.

Boulais, P. (2022)

Brousseau, G. (1998), *La théorie des situations didactiques*, La Pensée sauvage.

Larguier M. (2015) Première rencontre avec l'algèbre. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage – Actes du colloque EMF2015* – GT3, pp. 313-333.

Coulange, L, Drouhard, J-P., Dorier, J-L, Robert, A. (2012) Enseignement de l'algèbre élémentaire - Bilan et perspectives. *Recherches en didactique des Mathématiques*, numéro spécial.

Durand-Guerrier, V. (2010), La dimension expérimentale en mathématiques. Enjeux épistémologiques et didactiques. http://educmath.ens-lyon.fr/applet/exprime/texteintroress.pdf.

Durand-Guerrier, V. (2019), La théorie des situations didactiques comme levier pour penser les rapports au monde des connaissances mathématiques, *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2018. Penser et organiser les articulations entre abstrait et concret dans l'apprentissage des mathématiques, de la maternelle à l'université*. pp.370-382. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02421410/document.