



TITRE: LES PROBLÈMES DE GÉNÉRALISATION À LA TRANSITION PRIMAIRE/COLLÈGE EN TUNISIE : QUELLES POTENTIALITÉS POUR FAVORISER LE DÉVELOPPEMENT DE LA PENSÉE ALGÈBRIQUE ?

AUTEURS: BEN NEJMA SONIA, KHALOUFI-MOUHA FATEN ET ADEL FADHEL

PUBLICATION: ACTES DU HUITIÈME COLLOQUE DE L'ESPACE MATHÉMATIQUE FRANCOPHONE – EMF 2022

DIRECTEUR: ADOLPHE COSSI ADIHOUE, UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE (CANADA/BÉNIN) AVEC L'APPUI DES MEMBRES DU COMITÉ SCIENTIFIQUE ET DES RESPONSABLES DES GROUPES DE TRAVAIL ET PROJETS SPÉCIAUX

ÉDITEUR: LES ÉDITIONS DE L'UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

ANNÉE: 2023

PAGES: 245 - 259

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Les problèmes de généralisation à la transition primaire/collège en Tunisie : Quelles potentialités pour favoriser le développement de la pensée algébrique ?

BEN NEJMA¹ Sonia – KHALOUFI-MOUHA² Faten - ADEL³ Fadhel

Résumé – En se plaçant dans la lignée des travaux du mouvement « Early algebra » et ceux de la théorie anthropologique du didactique, ce travail exploite un Modèle Praxéologique de Référence de la Pensée Algébrique pour explorer le potentiel des problèmes de généralisation proposés dans les manuels officiels de 6^{ème} année primaire et de première année de collège en Tunisie, à développer la pensée algébrique avant l'introduction du formalisme conventionnel.

Mots-clefs : Pensée algébrique, Modèle praxéologique, Généralisation, Potentiel algébrique, Transition primaire/collège.

Abstract – In line with the “Early algebra” movement and the anthropological theory of didactics, this paper uses a Praxeological Reference Model of Algebraic Thinking to explore the potential of generalization activities proposed in the official textbooks of the 6th year of primary school and the first year of secondary school in Tunisia to develop algebraic thinking prior to the introduction of conventional formalism.

Keywords: Algebraic thinking, Praxeological model, Generalization, Algebraic potential, Primary/college transition.

1. Université de Carthage, Laboratoire LaRINA, Faculté des sciences de Bizerte-Tunisie, sonianejma@yahoo.com

2. Université de Carthage, Faculté des sciences de Bizerte, Tunisie, faten.khalloufi@fsb.u-carthage.tn

3. Ministère de l'éducation tunisienne, Circonscription de l'éducation à Kairouan, afadhel34@yahoo.fr

Introduction et problématique

Ce travail s'inscrit dans le cadre du projet international « Transition primaire-collège au Bénin, Maroc et Tunisie, état des lieux, comparaison et perspectives de l'enseignement de l'arithmétique et de l'algèbre » du programme international APPRENDRE, mis en œuvre par l'Agence universitaire de la Francophonie (AUF) avec l'appui de l'Agence Française de Développement (AFD) (Appel à projet d'avril 2019). Il s'inspire également des recherches de l'Observatoire International sur la Pensée Algébrique (OIPA) (Squalli, 2015, Vlasiss, Demonty, Squalli, 2017, Jeannotte, Squalli, Robert, 2019, Bronner, squalli, 2021). Il s'agit, plus particulièrement, d'analyser les enjeux du passage de l'arithmétique vers l'algèbre enseignée à la transition primaire (6^{ème} année de base) /collège (7^{ème} année de base) en Tunisie (élèves de 11 à 13 ans). Nous nous situons dans la lignée des travaux portant sur le développement de la pensée algébrique dès les premières années du primaire sans recours au symbolisme algébrique conventionnel qui sera rencontré ultérieurement au collège. Contrairement aux approches d'enseignement classiques de l'algèbre, l'objectif n'est pas d'introduire le symbolisme littéral pour donner du sens aux concepts ou faire émerger des propriétés mais plutôt de mettre l'accent sur l'importance de la généralisation dans le développement du raisonnement analytique. Bien que la présence d'opérations (lois de composition interne ou externe, binaire ou n-aires) en nombre fini soit essentielle et assure le caractère algébrique de l'activité, la présence des lettres n'y est pas indispensable, elle serait selon Marchand et Bednarz (1999) un moyen d'exprimer la généralité. Ce travail est motivé par les réformes des mathématiques actuellement en vigueur dans les pays anglophones qui s'inscrivent dans le mouvement Early-algebra visant à renforcer les acquis en arithmétique par le développement d'une vision relationnelle de l'algèbre. Dans le contexte tunisien, c'est à partir de la 7^{ème} année de base, en fin d'année, que le langage algébrique est explicitement introduit via le calcul littéral et la résolution d'équations du premier degré à une inconnue, comme on peut lire :

« L'apprenant sera sensibilisé au domaine algébrique à travers sa familiarisation progressive avec les écritures algébriques et la manipulation de certaines expressions par des opérations d'addition et de soustraction ainsi que la simplification et le calcul d'expressions algébriques connaissant des indéterminées ainsi que s'entraîner à résoudre des problèmes en rapport avec des équations simples ou des relations entre deux variables ».(Programme officiel de l'enseignement de base tunisien, 2020)

Cette analyse revient à identifier parmi les activités de généralisation proposées dans les manuels officiels tunisiens (Ben Nejma et al, 2022), celles ayant un potentiel algébrique à développer un raisonnement analytique. Dans quelle mesure les tâches posées en 6^{ème} année de base permettent-elles de développer éventuellement une généralisation algébrique ? Le potentiel de ces tâches évolue-t-il en 7^{ème} année ? Quelle importance est-elle accordée par l'institution scolaire tunisienne à la généralisation comme moyen de développer la pensée algébrique chez les élèves à la transition primaire/collège ?

Nous présentons le cadre théorique adopté pour aborder notre problématique, la méthodologie d'analyse considérée et les principaux résultats relatifs à l'analyse institutionnelle avant de conclure.

Cadre théorique

Nous faisons référence à l'articulation théorique proposée par (Najar et al 2021) entre la théorie anthropologique du didactique (TAD) (Chevallard, 1992 et 1999) qui permet de modéliser toute activité mathématique en termes de praxéologies selon une dynamique des niveaux de codétermination mathématiques (globale, régionale, locales et ponctuelles) et le modèle épistémologique de référence de la pensée algébrique (MPRPA) (Squalli, et al. 2019). Cette articulation est nourrie par l'approche sémiotique (Duval, 1993). Nous analysons les praxéologies ponctuelles relatives à la praxéologie mathématique régionale « généralisation » et les techniques attendues qui seraient éventuellement compatibles avec les caractéristiques d'un raisonnement analytique ainsi que les registres qui peuvent être convoqués dans la mobilisation de ces techniques. En effet, dans le (MPRPA), la praxéologie mathématique globale élaborée autour de la pensée algébrique s'organise autour de trois praxéologies mathématiques régionales (PMR) : Généralisation (G), Modélisation (M) et Calcul (C), chacune d'elle se décline en des praxéologies mathématiques locales (PML). La PMR « Généralisation » se décline en deux PML : (G1) : « Généralisation de régularités » et (G2) : « Généralisation de règles, de formules, de loi et d'algorithmes ». Celles-ci sont caractérisées, à leur tour, par des praxéologies mathématiques ponctuelles (PMP organisées autour de types de tâches), comme il est illustré dans le tableau suivant.

PML (G1) : Généralisation de régularités	PML (G2) : Généralisation de de règles, de formules, de loi et d'algorithmes
Repérer une régularité dans une suite	Repérer une règle, une loi, un algorithme
Prolonger une suite régulière	Étendre le domaine de validité d'une règle, d'une loi, d'un algorithme
Représenter une suite régulière dans un registre donné	Représenter dans un registre donné une règle, une loi, un algorithme
Créer une suite régulière	Créer une règle, une loi, un algorithme
Justifier/prouver une régularité	Justifier/prouver une règle, une loi, un algorithme
Comparer des suites régulières dans un sens donné	Comparer des règles, des lois, des algorithmes

Tableau 1 - Les PMP relatives aux PML du MPRPA

Nous identifions trois types de registres au sens de Duval (1995) et de Hitt et Passaro (2007), le registre numérique, le registre algébrique conventionnel et le registre intermédiaire. Le registre « numérique » renvoie aux nombres et aux opérations entre ces nombres mis en jeu dans les activités proposées. Le registre algébrique fait appel au formalisme algébrique et à l'usage de la lettre et le registre *intermédiaire* qui renvoie, ici, à toute autre représentation des relations convoquées par l'énoncé, le tableau de valeurs, le dessin, le schéma, la figure géométrique, etc.

Méthodologie

Un bref aperçu sur le système éducatif tunisien : la transition primaire/collège

Le système éducatif scolaire tunisien est composé de deux cycles d'enseignement, l'enseignement de base et l'enseignement secondaire. L'enseignement de base est un cycle complet qui s'étale sur neuf années accueillant des élèves de première année (6 ans) jusqu'à la 9^{ème} année (14-15ans). Il se compose à son tour de deux cycles complémentaires, le premier cycle (cycle primaire) dispensé dans les écoles primaires, d'une durée de six ans, subdivisés en trois degrés de deux ans chacun, et le second cycle (cycle préparatoire) dispensé dans les collèges, d'une durée de trois ans. L'examen de fin d'études de l'enseignement de base est organisé au terme de la neuvième année et sanctionné par le diplôme de fin d'études de l'enseignement de base (DFEB). Pour sa part, l'enseignement secondaire est d'une durée de 4 ans et sanctionné par l'examen national du baccalauréat à la fin de la 4^{ème} année. La langue naturelle en usage à l'écrit et à l'oral en mathématiques dans l'enseignement de base est la langue arabe et se base sur l'approche par compétences dont la résolution de problèmes constitue un enjeu majeur. Dans le contexte tunisien nous disposons, pour chaque niveau d'enseignement, d'un manuel officiel unique qui représente la principale référence à suivre par l'enseignant et ses élèves et traduit les objectifs du programme officiel.

Méthodologie d'analyse des pratiques institutionnelles

Nous identifions les praxéologies ponctuelles développées dans les manuels officiels tunisiens de 6^{ème} année et de 7^{ème} année de base en analysant les tâches qui convoquent de manière implicite ou explicite les PMP identifiées dans le MPRPA. Cette analyse est réalisée à partir des types de tâches convoqués, des techniques permettant de les accomplir ou attendues par l'institution scolaire et des registres de représentations en jeu. Ces critères nous permettent de caractériser le potentiel algébrique des problèmes posés. Ce concept est envisagé en tant qu'outil méthodologique (Ben Nejma et al 2022) permettant de classer ces problèmes en fonction des PMP identifiées. Trois degrés du potentiel algébrique sont considérés, nul, faible et fort. Le premier niveau concerne les tâches purement arithmétiques, c'est à dire celles qui impliquent des nombres qui sont tous déterminés et la réalisation de la tâche repose uniquement sur la qualité nombrante des nombres (leurs valeurs). Comme lorsqu'il s'agit de vérifier par calcul que : $4 \times (5+7) = 4 \times 5 + 4 \times 7$. Le second concerne les tâches dont les

énoncés encouragent l'utilisation d'une technique arithmétique, ou si la technique algébrique est hors de portée de l'élève. C'est le cas par exemple pour la tâche : Justifier que : $4 \times (5+7) = 4 \times 5 + 4 \times 7$. Ici l'énoncé n'oriente pas les élèves vers une technique arithmétique mais ne la défavorise pas au profit d'une technique sans calcul. [...] Le potentiel algébrique est fort lorsque les tâches proposées encouragent l'utilisation d'une technique algébrique, ou si celle-ci est à la portée des élèves. C'est le cas de la tâche : Justifier, sans aucun calcul, que $4 \times (5+7) = 4 \times 5 + 4 \times 7$. L'analyse que nous réalisons se base ainsi sur une analyse a priori des tâches proposées dans les manuels officiels tunisiens de 6^{ème} et 7^{ème} année de base convoquant une généralisation afin d'identifier leur PDPA (potentiel de développement de la pensée algébrique) selon les techniques permettant de les accomplir. Ce potentiel peut varier selon le statut des activités proposées (découverte, application, exercices), c'est pourquoi, nous analysons les situations d'apprentissage dans leur globalité pour en tirer les conclusions sans se limiter aux activités de découverte.

Analyse des problèmes de généralisation à la fin de l'enseignement primaire

En 6^{ème} année, l'analyse révèle le faible pourcentage des problèmes de généralisation comparé aux problèmes de modélisation dominants dans les programmes de mathématiques (Khalloufi-Mouha, Ben Nejma et al 2023). En fait, nous avons distingué 30,38% de problèmes autour de la PMR « Calcul », 64,24% autour de la PMR « Modélisation » et 5,38% qui concernent la PMR « Généralisation ». Dans notre travail, en se centrant sur la praxéologie de généralisation, nous avons choisi d'analyser la répartition de ces activités selon les deux PML, G1 et G2. Parmi les 17 activités de généralisation, repérées dans le manuel, 11,76% (2 activités parmi les 17) font référence à la PML G1. L'objet de ces activités consiste à repérer ou à justifier une régularité dans une suite numérique en se basant sur un registre numérique. Les activités relatives à la PML G2 constituent 88,24% avec 15 activités parmi les 17 activités de généralisation. Ces activités visent à repérer une règle ou une loi et sont essentiellement proposées aux élèves lors de la phase de découverte d'une nouvelle connaissance mathématique. L'analyse en termes de registres fait apparaître l'importance du registre numérique qui est utilisé dans 10 problèmes parmi les 17 donc avec une proportion de 58,82%. Les sept problèmes restants se répartissent entre le registre intermédiaire (registre graphique) et le registre numérique.

Dans l'objectif d'étudier la façon dont l'enseignement tunisien à la fin du primaire prépare les élèves à la transition arithmétique-algèbre à travers des activités de généralisation, nous proposons dans ce qui suit, quatre exemples d'activités relatives à la PMR généralisation, proposées dans le manuel scolaire. Nous analysons les potentialités de ces problèmes à permettre aux élèves la mobilisation de la pensée algébrique à travers l'approfondissement des notions de régularité (Généralisation de règles et identification de régularités).

Exemple1 : G1. Repérer une régularité dans une suite.

- Je construis une suite de nombres rationnels égaux à $\frac{1}{2}$ dont les dénominateurs sont compris entre 2 et 20.
 - Je construis une suite de nombres rationnels égaux à $\frac{1}{3}$ dont les dénominateurs sont compris entre 3 et 20.
- Je note mes remarques à propos des dénominateurs des deux suites.

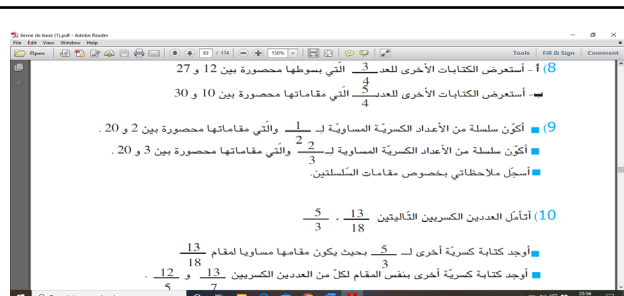


Figure 1 – Activité 9 p 83 du manuel de 6^{ème} année primaire de l'enseignement tunisien

Cette activité est extraite du sujet d'étude intitulé « J'écris un nombre rationnel de plusieurs manières ». L'activité est classée dans la catégorie « je m'entraîne » et elle a pour objectif de donner plusieurs écritures pour un même nombre rationnel. L'activité relève de l'organisation « Généraliser » et appartient à l'organisation praxéologique locale (OPL) : Repérer une régularité dans une suite et au type de tâche : Repérer une régularité dans une suite numérique. En fait, l'objet de l'activité est de repérer une régularité au niveau des dénominateurs des différentes écritures d'un nombre rationnel à travers l'étude des deux exemples et . Bien qu'elle soit essentiellement basée sur l'utilisation d'une stratégie arithmétique qui consiste à multiplier le numérateur et le dénominateur par le même entier non nul afin d'obtenir des nombres entre 2 et 20 ou 3 et 20, cette activité permet aux élèves de repérer des régularités et d'identifier la forme des différentes écritures des deux nombres rationnels donnés. Pour cela, nous avons classé cette activité comme ayant un potentiel algébrique faible Ce classement est appuyé par le fait que cette activité est une activité d'application. Donc, les élèves sont supposés avoir déjà rencontré les procédures nécessaires pour la résolution de l'activité.

Exemple 2 : G1. Justifier/prouver une régularité. Activité 5 page 36

- 5) Je cherche les cinq premiers multiples d'un nombre que je choisis.
- a. Prouver que la somme de deux de ces multiples est un multiple du nombre choisi.
- b. Prouver que la différence entre deux de ces multiples est un multiple du nombre choisi.

- (4) أبحث عن خصائص كل من الأعداد التالية :
 4 و 6 و 8 و 10 و 12 و 14 و 16 و 18 و 20 و 22 و 24 و 26 و 28 و 30 و 32 و 34 و 36 و 38 و 40 و 42 و 44 و 46 و 48 و 50 و 52 و 54 و 56 و 58 و 60 و 62 و 64 و 66 و 68 و 70 و 72 و 74 و 76 و 78 و 80 و 82 و 84 و 86 و 88 و 90 و 92 و 94 و 96 و 98 و 100 و 102 و 104 و 106 و 108 و 110 و 112 و 114 و 116 و 118 و 120 و 122 و 124 و 126 و 128 و 130 و 132 و 134 و 136 و 138 و 140 و 142 و 144 و 146 و 148 و 150 و 152 و 154 و 156 و 158 و 160 و 162 و 164 و 166 و 168 و 170 و 172 و 174 و 176 و 178 و 180 و 182 و 184 و 186 و 188 و 190 و 192 و 194 و 196 و 198 و 200 و 202 و 204 و 206 و 208 و 210 و 212 و 214 و 216 و 218 و 220 و 222 و 224 و 226 و 228 و 230 و 232 و 234 و 236 و 238 و 240 و 242 و 244 و 246 و 248 و 250 و 252 و 254 و 256 و 258 و 260 و 262 و 264 و 266 و 268 و 270 و 272 و 274 و 276 و 278 و 280 و 282 و 284 و 286 و 288 و 290 و 292 و 294 و 296 و 298 و 300 و 302 و 304 و 306 و 308 و 310 و 312 و 314 و 316 و 318 و 320 و 322 و 324 و 326 و 328 و 330 و 332 و 334 و 336 و 338 و 340 و 342 و 344 و 346 و 348 و 350 و 352 و 354 و 356 و 358 و 360 و 362 و 364 و 366 و 368 و 370 و 372 و 374 و 376 و 378 و 380 و 382 و 384 و 386 و 388 و 390 و 392 و 394 و 396 و 398 و 400 و 402 و 404 و 406 و 408 و 410 و 412 و 414 و 416 و 418 و 420 و 422 و 424 و 426 و 428 و 430 و 432 و 434 و 436 و 438 و 440 و 442 و 444 و 446 و 448 و 450 و 452 و 454 و 456 و 458 و 460 و 462 و 464 و 466 و 468 و 470 و 472 و 474 و 476 و 478 و 480 و 482 و 484 و 486 و 488 و 490 و 492 و 494 و 496 و 498 و 500 و 502 و 504 و 506 و 508 و 510 و 512 و 514 و 516 و 518 و 520 و 522 و 524 و 526 و 528 و 530 و 532 و 534 و 536 و 538 و 540 و 542 و 544 و 546 و 548 و 550 و 552 و 554 و 556 و 558 و 560 و 562 و 564 و 566 و 568 و 570 و 572 و 574 و 576 و 578 و 580 و 582 و 584 و 586 و 588 و 590 و 592 و 594 و 596 و 598 و 600 و 602 و 604 و 606 و 608 و 610 و 612 و 614 و 616 و 618 و 620 و 622 و 624 و 626 و 628 و 630 و 632 و 634 و 636 و 638 و 640 و 642 و 644 و 646 و 648 و 650 و 652 و 654 و 656 و 658 و 660 و 662 و 664 و 666 و 668 و 670 و 672 و 674 و 676 و 678 و 680 و 682 و 684 و 686 و 688 و 690 و 692 و 694 و 696 و 698 و 700 و 702 و 704 و 706 و 708 و 710 و 712 و 714 و 716 و 718 و 720 و 722 و 724 و 726 و 728 و 730 و 732 و 734 و 736 و 738 و 740 و 742 و 744 و 746 و 748 و 750 و 752 و 754 و 756 و 758 و 760 و 762 و 764 و 766 و 768 و 770 و 772 و 774 و 776 و 778 و 780 و 782 و 784 و 786 و 788 و 790 و 792 و 794 و 796 و 798 و 800 و 802 و 804 و 806 و 808 و 810 و 812 و 814 و 816 و 818 و 820 و 822 و 824 و 826 و 828 و 830 و 832 و 834 و 836 و 838 و 840 و 842 و 844 و 846 و 848 و 850 و 852 و 854 و 856 و 858 و 860 و 862 و 864 و 866 و 868 و 870 و 872 و 874 و 876 و 878 و 880 و 882 و 884 و 886 و 888 و 890 و 892 و 894 و 896 و 898 و 900 و 902 و 904 و 906 و 908 و 910 و 912 و 914 و 916 و 918 و 920 و 922 و 924 و 926 و 928 و 930 و 932 و 934 و 936 و 938 و 940 و 942 و 944 و 946 و 948 و 950 و 952 و 954 و 956 و 958 و 960 و 962 و 964 و 966 و 968 و 970 و 972 و 974 و 976 و 978 و 980 و 982 و 984 و 986 و 988 و 990 و 992 و 994 و 996 و 998 و 1000 و 1002 و 1004 و 1006 و 1008 و 1010 و 1012 و 1014 و 1016 و 1018 و 1020 و 1022 و 1024 و 1026 و 1028 و 1030 و 1032 و 1034 و 1036 و 1038 و 1040 و 1042 و 1044 و 1046 و 1048 و 1050 و 1052 و 1054 و 1056 و 1058 و 1060 و 1062 و 1064 و 1066 و 1068 و 1070 و 1072 و 1074 و 1076 و 1078 و 1080 و 1082 و 1084 و 1086 و 1088 و 1090 و 1092 و 1094 و 1096 و 1098 و 1100 و 1102 و 1104 و 1106 و 1108 و 1110 و 1112 و 1114 و 1116 و 1118 و 1120 و 1122 و 1124 و 1126 و 1128 و 1130 و 1132 و 1134 و 1136 و 1138 و 1140 و 1142 و 1144 و 1146 و 1148 و 1150 و 1152 و 1154 و 1156 و 1158 و 1160 و 1162 و 1164 و 1166 و 1168 و 1170 و 1172 و 1174 و 1176 و 1178 و 1180 و 1182 و 1184 و 1186 و 1188 و 1190 و 1192 و 1194 و 1196 و 1198 و 1200 و 1202 و 1204 و 1206 و 1208 و 1210 و 1212 و 1214 و 1216 و 1218 و 1220 و 1222 و 1224 و 1226 و 1228 و 1230 و 1232 و 1234 و 1236 و 1238 و 1240 و 1242 و 1244 و 1246 و 1248 و 1250 و 1252 و 1254 و 1256 و 1258 و 1260 و 1262 و 1264 و 1266 و 1268 و 1270 و 1272 و 1274 و 1276 و 1278 و 1280 و 1282 و 1284 و 1286 و 1288 و 1290 و 1292 و 1294 و 1296 و 1298 و 1300 و 1302 و 1304 و 1306 و 1308 و 1310 و 1312 و 1314 و 1316 و 1318 و 1320 و 1322 و 1324 و 1326 و 1328 و 1330 و 1332 و 1334 و 1336 و 1338 و 1340 و 1342 و 1344 و 1346 و 1348 و 1350 و 1352 و 1354 و 1356 و 1358 و 1360 و 1362 و 1364 و 1366 و 1368 و 1370 و 1372 و 1374 و 1376 و 1378 و 1380 و 1382 و 1384 و 1386 و 1388 و 1390 و 1392 و 1394 و 1396 و 1398 و 1400 و 1402 و 1404 و 1406 و 1408 و 1410 و 1412 و 1414 و 1416 و 1418 و 1420 و 1422 و 1424 و 1426 و 1428 و 1430 و 1432 و 1434 و 1436 و 1438 و 1440 و 1442 و 1444 و 1446 و 1448 و 1450 و 1452 و 1454 و 1456 و 1458 و 1460 و 1462 و 1464 و 1466 و 1468 و 1470 و 1472 و 1474 و 1476 و 1478 و 1480 و 1482 و 1484 و 1486 و 1488 و 1490 و 1492 و 1494 و 1496 و 1498 و 1500 و 1502 و 1504 و 1506 و 1508 و 1510 و 1512 و 1514 و 1516 و 1518 و 1520 و 1522 و 1524 و 1526 و 1528 و 1530 و 1532 و 1534 و 1536 و 1538 و 1540 و 1542 و 1544 و 1546 و 1548 و 1550 و 1552 و 1554 و 1556 و 1558 و 1560 و 1562 و 1564 و 1566 و 1568 و 1570 و 1572 و 1574 و 1576 و 1578 و 1580 و 1582 و 1584 و 1586 و 1588 و 1590 و 1592 و 1594 و 1596 و 1598 و 1600 و 1602 و 1604 و 1606 و 1608 و 1610 و 1612 و 1614 و 1616 و 1618 و 1620 و 1622 و 1624 و 1626 و 1628 و 1630 و 1632 و 1634 و 1636 و 1638 و 1640 و 1642 و 1644 و 1646 و 1648 و 1650 و 1652 و 1654 و 1656 و 1658 و 1660 و 1662 و 1664 و 1666 و 1668 و 1670 و 1672 و 1674 و 1676 و 1678 و 1680 و 1682 و 1684 و 1686 و 1688 و 1690 و 1692 و 1694 و 1696 و 1698 و 1700 و 1702 و 1704 و 1706 و 1708 و 1710 و 1712 و 1714 و 1716 و 1718 و 1720 و 1722 و 1724 و 1726 و 1728 و 1730 و 1732 و 1734 و 1736 و 1738 و 1740 و 1742 و 1744 و 1746 و 1748 و 1750 و 1752 و 1754 و 1756 و 1758 و 1760 و 1762 و 1764 و 1766 و 1768 و 1770 و 1772 و 1774 و 1776 و 1778 و 1780 و 1782 و 1784 و 1786 و 1788 و 1790 و 1792 و 1794 و 1796 و 1798 و 1800 و 1802 و 1804 و 1806 و 1808 و 1810 و 1812 و 1814 و 1816 و 1818 و 1820 و 1822 و 1824 و 1826 و 1828 و 1830 و 1832 و 1834 و 1836 و 1838 و 1840 و 1842 و 1844 و 1846 و 1848 و 1850 و 1852 و 1854 و 1856 و 1858 و 1860 و 1862 و 1864 و 1866 و 1868 و 1870 و 1872 و 1874 و 1876 و 1878 و 1880 و 1882 و 1884 و 1886 و 1888 و 1890 و 1892 و 1894 و 1896 و 1898 و 1900 و 1902 و 1904 و 1906 و 1908 و 1910 و 1912 و 1914 و 1916 و 1918 و 1920 و 1922 و 1924 و 1926 و 1928 و 1930 و 1932 و 1934 و 1936 و 1938 و 1940 و 1942 و 1944 و 1946 و 1948 و 1950 و 1952 و 1954 و 1956 و 1958 و 1960 و 1962 و 1964 و 1966 و 1968 و 1970 و 1972 و 1974 و 1976 و 1978 و 1980 و 1982 و 1984 و 1986 و 1988 و 1990 و 1992 و 1994 و 1996 و 1998 و 2000 و 2002 و 2004 و 2006 و 2008 و 2010 و 2012 و 2014 و 2016 و 2018 و 2020 و 2022 و 2024 و 2026 و 2028 و 2030 و 2032 و 2034 و 2036 و 2038 و 2040 و 2042 و 2044 و 2046 و 2048 و 2050 و 2052 و 2054 و 2056 و 2058 و 2060 و 2062 و 2064 و 2066 و 2068 و 2070 و 2072 و 2074 و 2076 و 2078 و 2080 و 2082 و 2084 و 2086 و 2088 و 2090 و 2092 و 2094 و 2096 و 2098 و 2100 و 2102 و 2104 و 2106 و 2108 و 2110 و 2112 و 2114 و 2116 و 2118 و 2120 و 2122 و 2124 و 2126 و 2128 و 2130 و 2132 و 2134 و 2136 و 2138 و 2140 و 2142 و 2144 و 2146 و 2148 و 2150 و 2152 و 2154 و 2156 و 2158 و 2160 و 2162 و 2164 و 2166 و 2168 و 2170 و 2172 و 2174 و 2176 و 2178 و 2180 و 2182 و 2184

donc on peut s'attendre à ce que les élève vérifient la règle sur la base d'exemples. Nous considérons que cette activité a un potentiel algébrique fort dans la mesure où elle permet d'initier les élèves à la généralisation en travaillant avec un nombre générique qui peut prendre n'importe quelle valeur dans l'ensemble des entiers naturels non nuls.

Exemple 3 : G2. Repérer une règle, une loi, un algorithme

On considère le produit suivant : (3) ألاحظ الجداء التالي : $10,9 \times 15,08$ — أحد الأعداد التالية يمثل النتيجة المناسبة للجداء المكتوب داخل الإطار : 150 - 164,372 - 1643,72 ■ أختد العدد المناسب دون إجراء العملية. ■ أعرض التمثلي الذي اعتمدته في تحديد هذا العدد. Un des entiers suivants est le résultat du produit encadré : 1643,72 - 164,372 - 150 • Déterminer le résultat sans faire le calcul. • Expliquer la procédure adoptée pour la détermination de ce nombre	(3) ألاحظ الجداء التالي : $10,9 \times 15,08$ — أحد الأعداد التالية يمثل النتيجة المناسبة للجداء المكتوب داخل الإطار : 150 - 164,372 - 1643,72 ■ أختد العدد المناسب دون إجراء العملية. ■ أعرض التمثلي الذي اعتمدته في تحديد هذا العدد.
---	---

Figure 3 –. Activité 3p 10 du manuel de 6ème année primaire de l'enseignement tunisien

L'activité proposée dans cet exemple renvoie à la PML G2 : Généralisation de règles, de formules, de lois, d'algorithmes et le type de tâche « Repérer une règle, une loi, un algorithme. » En fait, il s'agit d'identifier une règle relative à la multiplication de deux nombres décimaux et plus précisément l'identification du nombre de chiffres après la virgule du produit à partir du nombre de chiffres des deux facteurs. Cette activité mobilise le registre numérique, dans laquelle la description de la technique est convoquée en tant qu'indicateur pour repérer la règle en jeu. Cependant, bien que l'objectif de l'activité soit d'identifier une règle susceptible d'être généralisée à tous les nombres décimaux, nous considérons que les nombres proposés dans cette activité peuvent conduire les élèves à mobiliser un raisonnement de nature arithmétique en procédant par élimination jusqu'à obtenir la réponse correcte. C'est pourquoi nous considérons le degré du potentiel algébrique de ce problème comme faible en raison de la nature des variables didactiques proposées.

Exemple4 : G2. Justifier/prouver une règle, une loi, un algorithme

(2) في الرسم التالي المستقيمان (س ص) و (ع ن) متوازيان

قالت أمل : « يبدو لي أن قيس مساحة المثلث أ ب ج أكبر من قيس مساحة المثلث ب ج د » فقال نادر : « يبدو لي عكس ذلك تماما ». وقال أيمن : « يبدو لي أن المثلثين لهما نفس قيس المساحة ».

أحدّد الإجابة الصحيحة وأعلّل إجابتني.

Dans le dessin ci-dessus les droites sont parallèles.

Amal a dit « il me semble que l'aire du triangle ABC (bleu et mauve) est plus grand que l'aire du triangle BCD (mauve) »

Nader a dit « au contraire, pour moi c'est le contraire »

Aymen a dit « pour moi, les deux triangles ont la même aire »

Précisez la réponse correcte et justifiez votre réponse.

Figure 4 –. Activité 2 p 132 du manuel de 6^{ème} année primaire de l'enseignement tunisien

L'activité renvoie à la PML G2 : Généralisation de règles, de formules, de lois, d'algorithmes et de type de tâche : Justifier/prouver une règle, une loi, un algorithme. Il s'agit en fait de justifier l'égalité de l'aire des triangles ayant une base commune et la même longueur de la hauteur et cela en utilisant des connaissances et des formules déjà étudiées comme la mesure de l'aire d'un triangle et la distance entre deux droites parallèles. La justification ne se base pas nécessairement sur une preuve intellectuelle mais peut être exploitée dans le but d'initier les élèves à une généralisation par des arguments mathématiques (propriétés déjà rencontrées). Cette activité présente, selon nous, un potentiel algébrique fort justifié par le fait que l'absence de mesure exacte peut conduire les élèves à la mobilisation de stratégies de nature algébrique à travers une initiation au concept d'équation. En effet, en se référant aux trois composantes de la pensée algébrique introduites par (Radford, 2014), l'activité évoquée fait appel à deux indéterminés, la base et la hauteur de chacun des deux triangles. Ces deux indéterminés peuvent être dénotés à partir des points B et C pour la base et par une autre représentation sémiotique pour la hauteur, même dans le registre du langage naturel. Cette activité fait apparaître le rôle que peut jouer le registre intermédiaire dans le développement du processus de généralisation.

Analyse des problèmes de généralisation au début du collège (septième année de l'enseignement de base)

D'après le programme de la septième année de base, l'algèbre est explicitement introduite à travers le calcul de la valeur numérique d'une expression littérale ou algébrique. Après avoir fait une analyse des PMR autour des situations d'apprentissage du manuel scolaire nous avons d'abord distingué 40,2 % de problèmes autour de la PMR « C », 53 % autour de la PMR « M » et 6,8 % qui concernent la PMR « G ». Parmi celles-ci, nous identifions les activités comportant des tâches de généralisation de régularité « G1 » ou de généralisation de règles, de formules, de lois, d'algorithmes « G2 ». Nos analyses nous ont

permis de noter que parmi les 33 activités de généralisation du manuel, 60,6 % appartiennent aux trois PMP : repérer, étendre ou justifier une régularité. Les activités restantes (39,4 %) font partie des trois PMP : repérer, étendre ou justifier une formule.

Nous identifions, à travers trois exemples d'activités de généralisation dans le manuel, le potentiel de la pensée algébrique que ces tâches permettent de mobiliser chez les élèves de 7^{ème} année de base. Ce choix est fait parmi les PMP les plus représentées dans le manuel.

Exemple 1 : G1. Repérer une régularité dans une suite

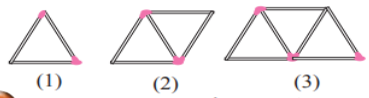
Traduction de l'énoncé : Tu as arrangé des allumettes pour obtenir les formes ci-contre : (Dans l'énoncé initial) Si la construction des formes se poursuit de la même façon, combien faut-il d'allumettes pour former la dixième figure. (Encercler la réponse correspondante) 27 24 21 18 15	نظمت أعواد الثقاب لتكوين الأشكال التالية :  (1) (2) (3) إذا استمرّ تكوين الأشكال على المنوال نفسه فكم عود ثقاب يلزم لتكوين الشكل العاشر ؟ (أحط بدائرة الجواب المناسب) 27 24 21 18 15
--	--

Figure 5 –. Activité 2 p 62 du manuel de 7^{ème} année de l'enseignement tunisien

Cette activité est extraite de la rubrique « exercices » du premier chapitre intitulé « les opérations sur les nombres entiers naturels ». Elle fait appel au registre géométrique et au registre numérique. Elle met l'accent sur les caractéristiques d'un triangle (nombre de cotés) et non aux propriétés géométriques. Elle fait appel à l'OML « généraliser une régularité » et dont la résolution nécessite d'abord de correspondre le numéro de la figure au nombre de triangles constituant cette figure, puis de repérer une régularité dans la liaison entre le nombre d'allumettes et le nombre de triangles et la prolonger à la figure numéro 10. Certaines techniques de résolution peuvent être mobilisées. Une technique possible est générée par un raisonnement récursif qui se base sur la structure du triangle, c'est-à-dire qu'après le premier triangle qui correspond à trois allumettes, chaque nouveau triangle est formé à partir de deux allumettes. Une fois la régularité repérée, l'élève peut trouver les termes consécutifs de sa suite jusqu'à la figure (10) qui correspond à 10 triangles. Les figures (2) et (3) permettent de valider ses choix. Une deuxième technique se base sur l'analyse de la structure de la chaîne pour trouver la relation entre le nombre de triangles et le nombre d'allumettes et prend les figures (2) ou (3) comme exemple générique. Il est possible d'exprimer cette régularité dans un registre intermédiaire en considérant que le nombre d'allumettes pour 10 triangles est celui correspondant au premier triangle auquel on ajoute deux fois le reste des triangles. Ou bien aussi que le nombre d'allumettes correspond à $2x$ (nombre de triangles) + 1. Dans tous les cas, le registre algébrique n'est encore pas accessible aux élèves à ce moment de l'étude à moins que l'enseignant ait anticipé sur le programme d'étude. De plus, le choix du nombre (10 allumettes) dans l'exercice ne favorise pas la deuxième stratégie mais plutôt une stratégie de comptage : cette stratégie passe par la construction du dessin numéro (10). Les régularités à repérer entre le nombre de triangles et le nombre d'allumettes confèrent à cette PMP

un potentiel algébrique faible en raison des variables didactiques proposées (nombre d'allumettes et valeurs prises pour les distracteurs).

Exemple 2 : G2. Repérer/ étendre une règle, formule.

On a construit des escaliers à l'aide de cubes (dans la figure à droite). 1) Compter les cubes de chaque escalier et écrire le résultat sous forme d'un carré. 2) On a construit les formes (fig. à gauche) à l'aide des cubes de chaque escalier. a) Combien de cubes contient un escalier à quatre niveaux ? écrire le résultat sous forme d'un carré. Que remarque-t-on ? b) Quel serait le nombre de cubes d'un escalier à cinq niveaux ? à neuf niveaux ?	(2) أعدنا تنظيم المكعبات المكونة لكل كوداً مدارج باستعمال مكعبات كما هو مدرج تحصيلنا على ما يلي : مبيّن في الشكلين التاليين. أ) كم يكون عدد المكعبات بمدرج له أربع درجات ؟ اكتب النتيجة في صيغة مربع عدد صحيح طبيعي. ماذا تلاحظ ؟ ب) كم يكون عدد المكعبات : - بمدرج ذي خمس درجات ؟ - بمدرج ذي تسع درجات ؟ (1) احسب عدد المكعبات في كل مدرج ثم اكتب كل عدد في صيغة مربع عدد صحيح طبيعي.
---	---

Figure 6 –. Activité 11 p 66 du manuel de 7^{ème} année de base de l'enseignement tunisien

Cette activité relève du chapitre consacré aux entiers naturels et convoque des puissances d'entiers naturels à travers le repérage de l'égalité du nombre de cube dans un escalier et dans le parallélepède correspondant, c'est-à-dire $1+3=2^2$ et $1+3+5=3^2$. Il s'agit d'étendre cette formule aux cas d'escaliers à cinq puis neuf niveaux : $1+3+5+7+9=5^2$ puis $1+3+5+7+9+11+13+15+17=9^2$. Cependant, il n'est pas demandé de généraliser le résultat pour un niveau n quelconque. Le fait de se limiter à la valeur 9 (assez petite) peut freiner le processus de généralisation chez les élèves en se limitant au registre numérique, même si les élèves ne rencontrent le formalisme algébrique conventionnel que dans les chapitres qui suivent. Il est pourtant possible d'exprimer le résultat sollicité dans le registre intermédiaire (du langage naturel, par exemple) de la manière suivante : le nombre de cubes dans un escalier est le carré du nombre de niveaux dans cet escalier. Par ailleurs, l'utilisation du contexte géométrique permet d'initier les élèves au processus de généralisation de règles ou de propriétés algébriques. Cela nous amène à considérer que le potentiel algébrique de ce problème est faible à moins que l'enseignant par son apprêtage didactique des items proposées lui confère un potentiel fort en dépassant le simple repérage de la relation numérique vers un prolongement de cette régularité.

Exemple 3 : G2. Repérer, étendre le domaine de validité d'une règle, d'un algorithme.

Ziad possède des pièces sous forme de triangles équilatéraux de côté chacun 1 cm. a) Il a collé quatre pièces pour obtenir le triangle de la figure ci-contre. Quelle est la nature de ce triangle et quelles sont ses dimensions ? b) Combien a-t-il besoin de pièces pour construire un triangle équilatéral de côté 4 cm ? c) Combien faut-il de pièces pour construire un triangle équilatéral de côté 8 cm ? 32 cm ?	لزياد قطع في شكل مثلثات متقايسة الأضلاع أطوال أضلاعها 1 cm أ- ألصق أربع قطع كما هو مبين في الرسم المقابل فتحصّل على مثلث ما هي طبيعته؟ ما هو طول ضلعه؟ ب- يريد زياد الحصول على مثلث متقايس الأضلاع طول ضلعه 4 cm كم قطعة يحتاج لذلك؟ ج- ما هو عدد القطع التي تمكّنه من الحصول على : - مثلث متقايس الأضلاع طول ضلعه 8 cm ؟ - مثلث متقايس الأضلاع طول ضلعه 32 cm ؟ 
---	---

Figure 7 – Activité 2 p 172 du manuel de 7^{ème} année de base de l'enseignement tunisien

L'activité en question relève du chapitre du manuel scolaire intitulé « triangles » et vise le renforcement des propriétés d'un triangle équilatéral. Pour accomplir les tâches demandées l'élève peut faire appel à un raisonnement récursif sur la base de propriétés pour obtenir un triangle équilatéral quatre fois plus grand par l'assemblage de quatre triangles équilatéraux isométriques. De ce fait, si on utilise quatre triangles de côté 2 cm, on obtient un grand triangle de côté 4 cm qui contient $4 \times 4 = 16$ triangles de côté 1. De même pour construire un triangle de côté 8 cm, on utilise quatre triangles de côté 4 cm c'est-à-dire $16 \times 4 = 64$ petits triangles. Ainsi de suite pour construire un triangle de côté 32 cm = 2^5 cm, on a besoin de quatre triangles de côté 16 cm, c'est-à-dire de 16 triangles de côté 8 cm, c'est-à-dire encore $64 \times 16 = 1024$ petits triangles. Une autre technique possible pourrait faire appel à la somme des nombres impairs de l'exemple 1 (exercice 2 p.62). Cependant, le choix des nombres 2, 4, 8 et 32 qui sont tous des puissances de 2, favorise davantage la première technique. Cette praxéologie ponctuelle permet de faire implicitement le lien entre deux variables qui sont des grandeurs de natures différentes : le nombre de triangles et la longueur du côté du grand triangle et de trouver l'une connaissant l'autre. La mobilisation des formules et des propriétés des triangles (triangles équilatéraux) dans le registre géométrique est une façon d'initier les élèves à des conjectures qui renvoient au processus de généralisation sans faire appel au registre algébrique conventionnel d'où le potentiel algébrique fort de ce type d'activité.

Conclusions et Discussions

A la lumière des analyses conduites sur l'ensemble des activités et tâches convoquant un processus de généralisation dans les manuels tunisiens à la transition primaire/collège, il apparaît que du point de vue de cette praxéologie régionale, et en dépit du faible pourcentage des tâches de ce genre, les situations d'apprentissage proposées permettent sous certaines conditions de développer la pensée algébrique chez les élèves. Il nous semble que leur potentiel algébrique identifié à partir des analyses a priori, témoigne de l'intérêt accordé à cette approche dans le primaire malgré l'absence de certaines praxéologies ponctuelles du MPRPA. Cette volonté est davantage renforcée à l'entrée au collège via des situations convoquant le repérage de régularités, le prolongement de cette régularité et des rela-

tions de récurrence ou de dépendance, par exemple, de suites à motifs croissants et le prolongement de ces régularités à des termes plus grands de la suite. Cependant le choix des variables didactiques en jeu dans les problèmes proposés peut détourner cet objectif institutionnel et conduire les élèves à des stratégies de nature arithmétique. Souvent, le nombre des termes de la suite (ou motifs) n'est pas assez grand ou une conjecture n'est pas convoquée pour un nombre arbitraire, ce qui ne motive pas le processus de généralisation et limite la technique au seul traitement de la tâche dans un seul registre numérique ou géométrique. Par exemple, la reproduction du motif, le calcul des termes de la suite sur la base d'un raisonnement récursif ou encore l'exécution d'un programme de calcul sans qu'il y ait un processus de généralisation en jeu. De ce fait, même si la praxéologie généralisation est présente dans cette transition institutionnelle, sa place en tant que praxéologie régionale au même niveau que le calcul ou la modélisation reste encore à désirer. Il semble que la pratique enseignante joue un rôle déterminant dans l'appropriation didactique des praxéologies de généralisation développées dans ces manuels officiels par l'exploitation de leur potentiel à développer la pensée algébrique.

Références

- Ben Nejma, S., Abouhanifa, S., Oké, E., Najjar, R., Squalli, H. & Adihou, A. (2022). Transition primaire-collège au Bénin, Maroc et Tunisie : analyse du savoir à enseigner relatif au développement de la pensée algébrique dans les manuels de 6^{ème} année primaire. *Revue québécoise de didactique des mathématiques*, 2022, Numéro thématique 2 (Tome 1), p. 59-95.
- Bronner, A., & Squalli, H. (2021). *La généralisation dans la pensée algébrique*. *Revue Québécoise De Didactique Des Mathématiques*, 3, 3-38.
- Chevallard, Y. (1989). *Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège* - Deuxième partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x*, 19 43-75.
- Chevallard, Y. (1990). *Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège* - Troisième partie. Voies d'attaque et problèmes didactiques. *Petit x*, 23, 5-38.
- Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 12(1).
- Chevallard, Y. (1999). *L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique*. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(2), 221-266.
- Duval, R. (1993). *Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée*. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 5, 37-65.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. *Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne : Peter Lang SA.
- Hitt, F. & Passaro, V. (2007). *De la résolution de problèmes à la résolution de situations problèmes : le rôle des représentations spontanées*. Dans *Actes de la Commission internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques (CIEAEM-59)* (p. 117-123). Hongrie.
- Khalloufi-Mouha, F., Ben Nejma, S., Adel, F. & Najar, R. (à paraître 2023). *Analyse du rapport institutionnel relatif à l'activité de modélisation dans la transition primaire collège en Tunisie*. In Adima 3- Approche interdisciplinaire dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques : quel projet et quels enjeux pour l'Afrique ? GT4- Hammamet- 15-20 août 2022- Tunisie.
- Jeannotte, D, Squalli, H & Robert, V. (2019). *Mise à l'épreuve d'un modèle praxéologique de référence de la pensée algébrique par l'entremise d'une analyse du PFEQ au primaire*. *Actes du colloque GDM 2019 - À quoi ressemble aujourd'hui la recherche en didactique des mathématiques au Québec ? Université Laval, Québec, Canada*. 146-155
- Marchand, P. et Bednarz, N. (1999). *L'enseignement de l'algèbre au secondaire : une analyse des problèmes présentés aux élèves*. *Bulletin AMQ*, (4), 30-42.
- Najar, R. Squalli, H. Adihou, A. Abouhanifa, S. (2021). Transition primaire-collège au Bénin, Maroc et Tunisie : Pour un état des lieux, comparaison et perspectives de l'enseignement de l'arithmétique et de l'algèbre. *ITM Web of Conferences* 39, 01004 CIFEM 2020.

- Radford, L. (2014). *The progressive development of early embodied algebraic thinking*. Mathematics Education Research Journal, 26(2), 257-277.
- Squalli, H. (2015). *La généralisation algébrique comme abstraction d'invariants essentiels*. Actes du congrès Espace Mathématique Francophone (EMF). Alger, octobre 2015.
- Vlassis, I; Demonty, I, Squalli, H. (2017). *Développer la pensée algébrique à travers une activité de généralisation basée sur des motifs (patterns) figuratifs*. Nouveaux Cahiers de la Recherche en Éducation 20(3) :131