



TITRE: LE DÉVELOPPEMENT DE LA PENSÉE ALGÈBRIQUE COMME FONDAMENT D'UN CADRE D'ANALYSE DE LA TRANSITION ARITHMÉTIQUE ALGÈBRE

AUTEURS: SQUALLI HASSANE, NAJAR RIDHA ET ADIHOU ADOLPHE

PUBLICATION: ACTES DU HUITIÈME COLLOQUE DE L'ESPACE MATHÉMATIQUE FRANCOPHONE – EMF 2022

DIRECTEUR: ADOLPHE COSSI ADIHOU, UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE (CANADA/BÉNIN) AVEC L'APPUI DES MEMBRES DU COMITÉ SCIENTIFIQUE ET DES RESPONSABLES DES GROUPES DE TRAVAIL ET PROJETS SPÉCIAUX

ÉDITEUR: LES ÉDITIONS DE L'UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

ANNÉE: 2023

PAGES: 349 - 361

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Le développement de la pensée algébrique comme fondement d'un cadre d'analyse de la transition arithmétique algèbre

SQUALLI¹ Hassane – NAJAR² Ridha – ADIHOU³ Adolphe

Résumé – Ce texte propose un cadre pour analyser la transition arithmétique-algèbre. L'élaboration de ce cadre articule le cadre du développement de la pensée algébrique, développé dans la perspective Early Algebra, avec le cadre d'analyse praxéologique de la TAD. Le cadre élaboré est ensuite utilisé pour étudier le potentiel de développement de la pensée algébrique que permet un programme d'étude ou des ressources d'enseignement lors du passage du primaire au collège.

Mots-clefs : Pensée Algébrique, Early Algebra, modèle praxéologique de référence, potentiel de développement de la pensée algébrique.

Abstract – This text proposes a framework for analyzing the arithmetic-algebra transition. The elaboration of this framework articulates the framework for the development of algebraic thinking, developed in the Early Algebra perspective, with the praxeological analysis framework of TAD. The developed framework is then used to study the potential for the development of algebraic thinking that a study program or teaching resources allows during the transition from primary to secondary school.

Keywords: Algebraic thinking, Early Algebra, reference praxeological model, development potential of algebraic thinking.

1. Université de Sherbrooke, Québec, Canada, hassane.squalli@usherbrooke.ca

2. Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue, Québec, Canada, ridha.najar@uqat.ca

3. Université de Sherbrooke, Québec, Canada, adolphe.adihou@usherbrooke.ca

Introduction

Cette recherche s'inscrit dans le cadre d'un projet du programme APPRENDRE mis en œuvre par l'Agence Universitaire de la Francophonie (AUF) répondant à l'Appel à projet d'avril 2019. Le projet vise à dresser un état de la situation de la transition entre l'enseignement de l'arithmétique au primaire et l'enseignement de l'algèbre au collège au Maroc, au Bénin et en Tunisie en vue de faire le point sur la manière dont le système d'enseignement de chacun des trois pays prépare ses élèves à l'entrée à l'algèbre. Le projet poursuit trois objectifs : (1) Faire une analyse du savoir à enseigner relativement au développement de la pensée algébrique dans les programmes et les manuels scolaires de chaque pays. (2) Documenter les raisonnements mobilisés par les élèves de la dernière année du primaire et de la première année du collège dans la résolution des problèmes de comparaison et de généralisation. (3) Documenter les pratiques déclarées des enseignants du primaire et du collège en regard d'activités de résolution des problèmes de comparaison et de généralisation.

L'objet de ce texte est de présenter le cadre et les outils théoriques sur lesquels nous nous sommes appuyés pour atteindre nos objectifs de recherche. Nous décrivons également la méthodologie adoptée pour atteindre notre premier objectif⁴. Nous appuyons notre travail par des exemples et résultats obtenus dans les analyses effectuées dans le cadre du projet de recherche. Des analyses plus fines et des résultats plus détaillés, concernant les études effectuées au Maroc, au Bénin et en Tunisie feront l'objet d'autres communications qui seront présentées dans ce colloque.

Problématique et contexte. Évolution de la stratégie d'introduction de l'algèbre dans les approches transitionnelles

Historiquement, l'algèbre, comme discipline mathématique, est venue après l'arithmétique. Aussi, l'idée que l'apprentissage de l'algèbre doit venir après celui de l'arithmétique a longtemps prévalu dans la communauté des éducateurs en mathématiques. Et, la stratégie d'introduction de l'algèbre encore dominante aujourd'hui, est basée sur une approche transitionnelle, considérant l'algèbre comme une arithmétique généralisée, ou, comme le rappelle Chevallard (1989), est basée sur une distinction fondamentale entre l'arithmétique et l'algèbre. Cette dernière étant considérée comme un outil de résolution de problèmes que l'arithmétique ne peut traiter.

Mais, pour les élèves, le passage d'un mode de Pensée Arithmétique (PAr) à un mode de Pensée Algébrique (PA) est loin d'être facile à réaliser et pose problème. Plusieurs auteurs n'hésitent pas à parler de rupture épistémologique entre l'arithmétique et l'algèbre. Vergnaud (1986) évoque une double rupture : opposition des caractéristiques de la résolution arithmétique à celles de la résolution algébrique et opposition des modes d'appréhension des écritures algébriques et numériques (statut

4. Vu les limites qu'imposent les normes éditoriales, nous nous sommes limités dans ce texte au premier objectif dans la description de la méthodologie de recherche.

du signe d'égalité, des lettres, ...), et des modes de contrôle dans la transformation des écritures. Pour sa part, Kieran (1992, 1994, cité dans Grugeon, 1997) adopte un point de vue proche de celui de Vergnaud et voit qu'entre l'arithmétique et l'algèbre résident à la fois de fausses continuités et des discontinuités. Selon elle, les fausses continuités résident dans l'utilisation des mêmes symboles et signes pour représenter le signe d'égalité et les opérations, mais avec des interprétations différentes. Quant aux discontinuités, elles sont reliées à la mise en œuvre de démarches de résolution distinctes, à l'utilisation de nouveaux objets, voire à la mise en jeu de conceptions structurales et non plus procédurales des objets (*Ibid.*).

L'insatisfaction face à l'état de l'enseignement de l'algèbre à l'école va alors conduire des chercheurs en didactique des mathématiques, depuis la fin des années 1980, à réfléchir à la réforme de l'enseignement de l'algèbre à l'école, ce qui a donné lieu au courant Early Algebra (EA). Ce courant met majoritairement l'accent sur le développement de la PA dès le primaire sans usage du langage littéral de l'algèbre. Selon certains chercheurs de ce mouvement (Kaput 1998, Squalli, Mary & Marchand 2011), l'hypothèse actuelle concernant le courant EA est qu'il ne doit pas être perçu comme une version précoce de l'algèbre actuellement enseignée au secondaire, une pré-algèbre. Il est plutôt une stratégie pour enrichir les contenus mathématiques enseignés au primaire, en offrant aux élèves des opportunités pour développer la PA et approfondir davantage certaines notions et concepts mathématiques (comme les concepts d'opération, d'égalité, d'équation, de régularité, de variable, ...). L'idée d'initier les élèves à la PA dès le primaire est une opportunité pour atténuer les difficultés des élèves résultantes de la transition entre l'arithmétique du primaire et l'algèbre du collège en apportant plus de profondeur et de cohérence aux programmes, sans ajouter de nouveaux contenus aux thèmes d'étude (Kaput 1998).

La perspective du développement précoce de la PA est devenue une préoccupation importante dans la communauté de recherche en didactique des mathématiques depuis la fin des années 1990. Depuis les années 2000, nous assistons, dans différents pays, à l'émergence de programmes de mathématiques qui visent, de manière explicite, le développement précoce de la PA depuis le début du primaire. C'est le cas par exemple du programme cadre de l'Ontario (Squalli, Mary & Marchand, 2011), mis en œuvre au début des années 2000, ainsi que le tout récent programme du Brésil (Oliveira, 2018). Plusieurs autres pays adoptent toujours une approche transitionnelle dans le passage de l'arithmétique à l'algèbre. C'est le cas par exemple du Bénin, du Maroc et de la Tunisie. L'objectif de cette recherche est d'étudier le potentiel du développement de la pensée algébrique (PDPA) que pourrait renfermer les programmes et les manuels scolaires des trois pays, afin de rendre compte de la manière dont chacun de ces pays prépare ses élèves du primaire à l'algèbre du collège.

Assises conceptuelles et théoriques du cadre d'analyse

Le développement de *la pensée mathématique* à l'école vise une façon de penser selon les domaines (arithmétique, algèbre, géométrie, probabilité, ...). Il permet aussi l'établissement de liens

entre les domaines et, qui plus est, la cohabitation et l'articulation des différentes pensées relatives aux domaines. Le développement de la PA repose aussi sur l'articulation *des dimensions arithmétique, algébrique, géométrique, probabiliste, et statistique* dans la perspective d'un développement et d'approfondissement des concepts mathématiques en algèbre. Il repose aussi sur divers registres, outils et objets. Ainsi,

[...] les interactions entre les contenus classiquement dénommés de type algébrique ou de type arithmétique cohabitent dans un espace ouvert. (Adihou et al. 2015; p.218).

La recherche que nous envisageons repose sur deux piliers conceptuels de la didactique des mathématiques :

Algèbre. Pensée algébrique

En considérant les mathématiques comme une activité humaine, l'algèbre peut être vue comme un ensemble d'activités mathématiques où interviennent des opérations (lois de composition, internes ou externes, binaires ou n-aires), pouvant être de nature quelconque (addition, multiplication, composition, etc.), mais répétées un nombre fini de fois (Squalli 2000). Ces activités sont marquées par une manière de penser, la PA. Sur le plan opératoire, cette pensée se déploie au moyen de :

1. Un ensemble de raisonnements particuliers (généraliser, raisonner de manière analytique, symboliser et opérer sur des symboles, raisonner sur des relations fonctionnelles, raisonner en termes de structures, etc.) ;
2. Des manières d'approcher des concepts en jeu dans les activités algébriques (voir l'égalité comme une relation d'équivalence, voir les opérations dans une expression numérique comme des objets en soi et non uniquement comme des instructions pour réaliser un calcul, etc.) ;
3. Des modes de représentation et des manières d'opérer sur ces représentations.

L'algèbre, ainsi renouvelée, fournit un cadre interprétatif d'une classe importante d'activités mathématiques des élèves de l'école primaire. De multiples occasions s'offrent à l'enseignant, qui possède une *lentille algébrique*, pour amener ses élèves à développer la PA dans la perspective de EA, et cela en enrichissant leur rapport à certains concepts mathématiques (comme par exemple, les notions d'opération, d'égalité, d'équation, de variable et l'idée de variation, de fonction), et en les initiant à raisonner de manière analytique⁵.

5. Dans le contexte de la résolution de problèmes, raisonner analytiquement consiste à opérer sur l'inconnue comme si c'était un nombre connu, procédant ainsi de l'inconnu vers le connu. En revanche, la pensée arithmétique est de nature non analytique. (Radford 2010, Squalli 2000)

TAD. Modèle praxéologique de référence de la pensée algébrique

Pour mettre au jour le potentiel des curriculums et des ressources d'enseignement du Bénin, du Maroc et de la Tunisie à développer la PA, nous utilisons la modélisation de l'activité mathématique en termes de praxéologies que propose la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) (Chevallard, 1998). Selon ce modèle, les pratiques et ressources institutionnelles, relatives à l'enseignement d'un savoir donné, peuvent être analysées par un découpage en un système de tâches (t), appartenant à des types de tâches (T), des techniques τ , décrivant des manières de réaliser les tâches t , des technologies θ , justifiant les techniques et des théories Θ , qui donnent les fondements sur lesquels reposent les technologies. Pour le besoin de certaines analyses, les types de tâches sont regroupés en des genres de tâches.

Dans une institution donnée I , si tous les éléments du quadruplet (*type de tâches, technique, technologie, théorie*) sont spécifiques à un unique type de tâche, la praxéologie correspondante est qualifiée de *ponctuelle*. Mais généralement, une théorie Θ répond de plusieurs technologies, dont chacune à son tour justifie plusieurs techniques correspondant à autant de types de tâches. Les praxéologies ponctuelles vont ainsi s'associer et s'intégrer, d'abord en *praxéologies locales*, centrées chacune sur une technologie θ déterminée. Ensuite, les praxéologies locales s'associent et s'intègrent en *praxéologies régionales*, formées autour d'une théorie Θ . Les praxéologies régionales s'intègrent à leur tour pour former une *praxéologie globale*.

L'analyse du savoir à enseigner, ou du savoir enseigné, suppose de s'appuyer sur un modèle de référence issue des recherches réalisées dans le domaine de ce savoir (Larguier & Bronner, 2015). Il s'agit, dans notre cas, de construire, en s'appuyant sur les résultats de la recherche, un modèle épistémologique, ou praxéologique, de référence de la préparation à l'entrée dans l'algèbre dès l'école primaire. Ce modèle, que nous désignons par *modèle praxéologique de référence de la PA* (MPRPA), s'appuie sur différents travaux de recherche de la PA (Lins & Kaput 2004 ; Carraher & Schliemann 2007, Radford 2010 et 2015, Squalli 2000 et 2015). Il nous servira comme une référence pour analyser le savoir à enseigner en lien avec le développement de la PA. Le modèle que nous décrivons ici était élaboré initialement par Jeannotte, Squalli et Robert (2020). Il a été affiné ensuite, par les chercheurs du présent projet, de manière à répondre aux objectifs des analyses envisagées. Ce modèle est structuré autour de trois praxéologies mathématiques régionales (PMR) : 1) Généralisation. 2) Modélisation et 3) Calcul. Chacune de ces PMR se décline en praxéologies mathématiques locales (PML). Le tableau 1 suivant résume l'architecture du MPRPA, que nous considérons également comme une praxéologie mathématique globale de la PA.

Tâches potentiellement algébriques. Tâches purement arithmétiques

Le cadre d'analyse repose sur le postulat suivant : Le passage d'un mode de PAR à un mode de PA se réalise en activité, lorsque l'élève tente de résoudre une tâche. Les caractéristiques de la tâche sont donc importantes. Il s'agit donc de distinguer les tâches potentiellement algébriques des tâches qui ne le sont pas (purement arithmétique).

Une tâche est **purement arithmétique** si les nombres qu'elle implique sont tous déterminés (comme 12 ou 234). Le raisonnement porte toujours sur la qualité nombrante des nombres (leurs valeurs). Le calcul et les opérations arithmétiques à exécuter reposent uniquement sur des nombres déterminés.

Exemple 1 : Vérifier par calcul que $4(5+7)$. Ici, la tâche se limite à un calcul arithmétique portant sur les valeurs des nombres donnés. Elle est purement arithmétique.

Une tâche est **potentiellement algébrique** si elle peut être résolue par une technique algébrique ne nécessitant pas un calcul arithmétique sur les valeurs des nombres en jeu.

Exemple 2 : Justifier que $4(5+7) = 4 \times 5 + 4 \times 7$

Cette tâche est potentiellement algébrique, car elle peut être résolue par une technique algébrique ne nécessitant pas le calcul des valeurs des deux membres de l'égalité (technologie basée sur la propriété de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition ou par une égalité des aires). Elle relève du genre de tâche C1.1.

Si la tâche est purement arithmétique, nous dirons que son degré d'analyticité est nul. Une tâche potentiellement algébrique peut être résolue par une technique arithmétique et une technique algébrique. Si l'énoncé de la tâche ne défavorise pas l'utilisation d'une technique arithmétique, ou si la technique algébrique est hors de portée de l'élève, nous dirons que *le degré du potentiel algébrique (D°PA) de la tâche est faible*. Dans le cas opposé, si l'énoncé de la tâche encourage l'utilisation d'une technique algébrique, ou si la technique algébrique est accessible à l'élève, nous dirons que *le D°PA de la tâche est fort*. Nous avons ainsi une échelle à trois degrés : **nul** (tâche purement arithmétique), **faible et fort**.

L'exemple 2 est celui d'une tâche dont le D°PA est faible, car l'énoncé de la tâche ne la défavorise pas l'utilisation d'une technique arithmétique au profit d'une technique sans calcul (utilisation de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition).

La tâche suivante a un D°PA faible, car la technique algébrique est hors de portée des élèves de 6^e année du primaire.

Chaque année, les parents de Said fêtent son anniversaire, ils préparent un gâteau avec autant de bougies que son âge. Ainsi à sa première année de naissance, ils ont soufflé une bougie,

puis deux à sa deuxième année, trois à sa troisième année et ainsi de suite. À la fin de la fête de cette année, la maman de Said lui dit : « depuis ta naissance, nous avons utilisé en tout 78 bougies ». Quel est l'âge de Said ? (Aljaid Fi Arriyadhiat, p.13).

Pour la résolution de cette tâche, une technique algébrique consiste à trouver la formule de la somme des entiers consécutifs de 1 à n (n étant l'âge de Said), soit . Puis résoudre l'équation : . Cette technique est considérée hors de portée des élèves de 6^e année du primaire. Il s'ensuit que le D^oPA de cette tâche sera considéré comme *faible*.

Le DoPA de la tâche est fort, si l'énoncé de la tâche encourage l'utilisation d'une technique algébrique, ou si la technique algébrique est accessible à l'élève.

Les problèmes de type déconnecté (Bednaz et Janvier, 1994, Squalli *et al.*, 2020) sont des exemples types des tâches dont le D^oPA est fort. Il en est ainsi de la tâche suivante.

Exemple 3 : Sans aucun calcul, justifier que $4(5+7) = 4 \cdot 5 + 4 \cdot 7$.

En effet, l'énoncé de cette tâche défavorise le recours à une technique arithmétique, encourageant ainsi une technique algébrique.

Quelques résultats

En vue de montrer comment les éléments théoriques que nous venons de décrire permettent d'analyser et de comprendre la manière dont se fait la transition primaire-collège en termes de développement de la pensée algébrique, nous présentons ici les résultats de l'étude réalisée à ce propos relatif au système d'enseignement marocain⁷.

Les analyses ont concerné le manuel Aljaid Fi Arriyadhiat (2020) pour la classe de 6^e année du primaire, et le manuel Al Moufid (2020) pour la classe de 1^{ère} année du collège. Elles ont porté sur toutes les tâches proposées dans les deux manuels dont la réalisation fait intervenir une ou plusieurs opérations de l'arithmétique ().

La classification des tâches selon les trois PMR et selon le D^oPA est résumée dans les tableaux 3 et 4 suivants :

PMR	Généralisation	Modélisation	Calcul	Total
Fréquences	2,14% (24)	24,02% (269)	73,84% (872)	100% (1120)
Potentiel nul	8,33 % (2)	67,66 % (182)	57,32 % (474)	58,75%

7. L'équipe marocaine qui a réalisé cette étude est composé de : Said Abouhanifa (coordonnateur), Sabah Haddad, Belkasssem Seddoug, Saadia Annassay, Hajar Mesouaki et Brahim Ennassiri

Potentiel faible	45,83 % (11)	12,64 % (34)	13,30 % (110)	13,84%
Potentiel fort	45,83 % (11)	19,70 % (53)	29,38 % (243)	27,41%

Tableau 3 – Répartition des tâches pour le manuel de 6^e année du primaire

PMR	Généralisation	Modélisation	Calcul	Total
Fréquences	13,65% (83)	44,90% (273)	41,45% (252)	100,00% (608)
Potentiel nul	53,01% (44)	57,14% (156)	75,40% (190)	64,14% (390)
Potentiel faible	27,71% (23)	27,11% (74)	18,65% (47)	23,68% (144)
Potentiel fort	19,28% (16)	15,75% (43)	5,95% (15)	12,17% (74)

Tableau 4 – Répartition des tâches pour le manuel de 1^e année du collège

Le tableau 3, montre que pour le manuel du primaire, ce sont les PMR *Calculer* et *Modéliser* qui recouvrent la quasi-totalité (97,86%) des tâches proposées, avec une proportion de 72,59% des tâches dont le potentiel est nul ou faible. Le tableau 4, donne des résultats presque similaires pour le collège, avec 86,35% des tâches pour les PMR *Calculer* et *Modéliser* et 87,82% des tâches dont le potentiel est nul ou faible. Ces résultats, et particulièrement l'importance de la PMR *Calculer* et la faible représentation de la PMR *Généraliser* dans les deux institutions, pourraient s'expliquer par le rapport de l'institution marocaine vis-à-vis l'introduction et l'entrée à l'algèbre au collège. Ce rapport considère l'algèbre comme une arithmétique généralisée, et donc, son introduction doit être fondée sur l'extension des systèmes de nombres $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ et l'établissement du calcul algébrique sur ces domaines. Toutefois, les analyses effectuées montrent en même temps la présence d'une certaine potentialité de développement de la PA dans les activités proposées dans les deux manuels (41,25% au primaire et 35,85% au collège entre D°PA faible et fort). De telles activités pourraient mieux accommoder la transition primaire-collège en matière d'entrée à l'algèbre, si elles sont accompagnées d'une pratique enseignante appropriée, s'inscrivant dans une approche de développement de la PA.

Conclusion

Cette étude présente un cadre pour analyser la transition arithmétique-algèbre lors du passage du primaire au collège. Une certaine originalité marque l'approche adoptée dans cette étude. Il s'agit précisément d'articuler le cadre de développement de la PA avec l'analyse praxéologique de la TAD pour étudier la manière dont un programme d'étude ou des ressources d'enseignement assurent la transition arithmétique-algèbre, et ce, même dans des contextes qui ne prévoient pas le recours à EA pour l'entrée à l'algèbre. Cette articulation s'est particulièrement exprimée dans l'élaboration d'un MPRPA pour analyser des programmes et des ressources d'enseignement-apprentissage. Utilisé dans le cas du système scolaire marocain, qui adopte une approche transitionnelle dans le passage de l'arithmétique à l'algèbre, le cadre d'analyse élaboré a permis d'identifier certaines insuffisances qui caractérisent le curriculum et les ressources étudiées, pour la préparation des élèves du primaire à l'entrée à l'algèbre. L'étude a également permis de mettre en évidence le PDPA qui caractérise certaines situations d'apprentissage contenues dans les manuels scolaires analysés. Cette richesse du PDPA pourrait donner des occasions pour renforcer le développement de la PA chez les élèves et assurer une certaine continuité entre le primaire et le collège. Toutefois, cela reste tributaire aux pratiques enseignantes et au rapport institutionnel vis-à-vis la mise à profit du PDPA que renferment les différentes activités proposées dans les manuels. En guise de conclusion, ce travail montre que pour l'algèbre, ce ne sont pas tant les outils méthodologiques pour travailler l'algèbre qui posent souvent des problèmes, mais c'est surtout le rapport institutionnel et le rapport personnel des enseignants de ce qu'est l'algèbre.

Références

- Adihou A., Squalli H., Saboya M., Tremblay M., Lapointe A. (2015) *Analyse des raisonnements d'élèves à travers des résolutions de problèmes de comparaison*. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage – Actes du colloque EMF2015 – GT3*, pp. 206-219.
- Aljaïd Fi Arriyadiat (2020). *Manuel scolaire de mathématiques du 6e primaire*. Ed. Librairie nationale, Maroc.
- AL Moufid (2020). *Manuel scolaire de mathématiques du 1er collège*, Edition Dar Attakafa
- Chevallard, Y. (1989). *Arithmétique, algèbre, modélisation*. Etapes d'une recherche, Publications de l'IREM d'Aix-Marseille, n° 16.
- Chevallard Y. (1998) Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : L'approche anthropologique. Actes de l'université d'été de la rochelle, juillet 1998 (p. 1-29).
- Grugeon B. (1997) Conception et exploitation d'une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, RDM, Vol.17.2. Grenoble, La pensée sauvage.
- Jeannotte D., Squalli H., & Robert V. (2020) *Highlighting the potential for developing early algebraic thinking: a praxeological framework of reference*. Texte de communication au 14th International Congress of Mathematical Education. July 12-19, 2020, Shanghai, China.
- Kaput J. J. (1998) Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by «algebrafying» the K-12 curriculum. In *Proceedings of a National Symposium*, may 27 and 28, 1997. The Nature and Role of Algebra in the K-14 Curriculum (pp. 25-26). Washington, D.C. National Academy Press.
- Kieran C. (1992) The learning and teaching of school algebra. In A. D. Grouws (dir.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (p. 390-419). New York. National Council of Teachers of Mathematics.
- Kieran C. (1994) A functional approach to the introduction of algebra - Some pro and cons. In J. Ponte et J. F. Matos (dir.), *Proceedings of The 18th International Conference for the Psychology of Mathematical Education*. Vol. 1 (p. 157-175). Lisbonne : University of Lisbon.
- Larguier M., & Bronner A. (2015) Première rencontre avec l'algèbre. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage – Actes du colloque EMF2015 – GT3*.
- Lins R. C., & Kaput J. (2004) The early development of algebraic reasoning : The current state of the field. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra. Proceedings of the 12th ICMI Study Conference* (Vol. 1, pp. 47-70). The University of Melbourne, Australia.

- Oliveira, I. (2018). Programme d'études du Brésil : comment est organisé l'arrimage entre l'avant et l'après lors de l'introduction de la lettre en termes de développement de la pensée algébrique? Communication présentée au Colloque de l'OIPA 3. Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire et au début du secondaire. Recherches et perspectives curriculaires, Sherbrooke, Québec.
- Radford L., (2010) Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education*, 12(1), 1-19.
- Squalli H. (2000) Une reconceptualisation du curriculum d'algèbre dans l'éducation de base. Thèse de doctorat inédite. Université Laval.
- Squalli H. (2015) La généralisation algébrique comme abstraction d'invariants essentiels. In *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone 2015-Groupe travail 3*.
- Squalli H., Mary C., & Marchand P. (2011) Orientations curriculaires dans l'introduction de l'algèbre: cas du Québec et de l'Ontario. In *Recherches et expertises pour l'enseignement scientifique*. Vol. 1 (pp. 65-78). De Boeck Supérieur.
- Squalli, H., Languier, M., Bronner, A. & Adihou, A. (2020). Cadre d'analyse des raisonnements dans la résolution de problèmes algébriques de type partage inéquitable. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, 22(1), 36–62. <https://doi.org/10.7202/1070024ar>
- Vergnaud G. (1986) Long terme et court terme dans l'apprentissage de l'algèbre. In, *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique* (p. 189-199). Grenoble : La pensée sauvage.