REFLEXION SUR LE RAISONNEMENT MATHEMATIQUE POUR L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE

DORIS JEANNOTTE
Université du Québec à Montréal
Doris_Jeannotte@USherbrooke.ca

Résumé. Qu'entend-t-on par raisonnement mathématique pour l'enseignement secondaire? Le programme du Québec offre une certaine vision qui apporte des besoins chez les enseignants. Le raisonnement mathématique est traité par plusieurs écrits sans qu'il y ait nécessairement cohérence entre les différentes définitions. Ce texte est une réflexion sur l'importance de définir ce qu'est le raisonnement mathématique pour l'enseignement secondaire et pour la formation des maîtres ainsi qu'un aperçu des manques et indices trouvés dans la littérature qui pourraient aider à mieux le définir.

Mots-clés. Didactique des mathématiques, Nouveaux programmes, Québec, Formation des enseignants, Raisonnement mathématique.

Introduction

Avec l'apparition des nouveaux programmes d'enseignement des mathématiques au Québec, le développement du raisonnement mathématique est maintenant au premier plan. Ces nouveaux programmes insistent sur le fait que le raisonnement mathématique inclut autant des raisonnements de types généraux que des raisonnements spécifiques aux différents champs de la mathématique scolaire. Dans les différentes définitions, il semble exister des liens étroits entre les différents types de raisonnement cités, mais aussi des différences majeures. Dans les programmes du Québec, ces différentes relations ne sont pas explicitées pour que les enseignants puissent en faire usage afin de prendre des décisions importantes pour leur enseignement. Le type d'activités, les idées traitées et la nature du discours tenu en classe peuvent et doivent varier d'un champ mathématique à l'autre. Les décisions prises par les enseignants doivent favoriser un développement diversifié, mais non morcelé du raisonnement mathématique. Il s'avère alors nécessaire pour bien former les enseignantes et les enseignants de développer un modèle des différents raisonnements mathématiques afin d'améliorer la formation des maîtres et d'aider les enseignants à favoriser le développement du raisonnement mathématique de leurs élèves. Dans les prochaines lignes, nous tenterons de vous convaincre de la nécessité d'un tel modèle pour la didactique des mathématiques et la formation des maîtres dans le contexte québécois et nous amènerons quelques éléments théoriques pour arriver à la construction d'un tel modèle.

1. Le raisonnement mathématique dans le programme de formation de l'école québécoise

Les différents programmes de formation à travers le monde subissent de grands changements depuis l'apparition des programmes de formation par compétences. Plus particulièrement, le Québec implante, depuis le début des années 2000, des programmes de mathématiques qui demandent aux enseignantes et aux enseignants du primaire et du secondaire de développer trois compétences chez leurs élèves : résoudre des situations problèmes, déployer un raisonnement mathématique et communiquer à l'aide du langage mathématique. Ces nouvelles orientations apportent des changements importants dans les pratiques d'enseignement et d'évaluation. Entre autres, le raisonnement mathématique est maintenant au premier plan puisqu'une compétence y est associée. Le Ministère de l'éducation du loisir et du sport [MELS] anciennement le Ministère de l'éducation du Québec [MEQ] (MELS, 2007; MEQ, 2000) mentionne aussi que cette compétence « est la pierre angulaire de toute activité mathématique (p.2) ». Les enseignants doivent alors favoriser et évaluer son développement chez leurs élèves et ce, dès le primaire.

Ces changements de programmes ont nécessairement des répercussions sur la formation des maîtres et la formation continue. La communauté universitaire doit s'assurer que les formations offertes aux enseignants leur permettent de favoriser et de juger le développement du raisonnement mathématique chez leurs élèves. Mais qu'entend-on par raisonnement mathématique dans les programmes du Québec ?

Le Programme de formation de l'école québécoise [PFEQ] du primaire comporte une compétence nommée *raisonner à l'aide de concepts et de processus mathématiques*. Le MELS définit alors le raisonnement comme suit : « Raisonner en mathématique consiste à établir des relations, à les combiner entre elles et à les soumettre à diverses opérations pour créer de nouveaux concepts et pousser plus loin l'exercice de la pensée mathématique » (MEQ, 2000, p. 124). Le MELS ajoute que le raisonnement peut être déductif, inductif et créatif. Une question se pose déjà quant au raisonnement créatif. Sans vouloir dire que la créativité n'a pas sa place en mathématique, est-ce que l'imagination relève de la raison ? D'ailleurs, le MELS lui-même, dans son programme de deuxième cycle, sépare créativité et raisonnement.

Pour ce qui est du secondaire, le MELS définit la compétence *déployer un raisonnement mathématique* comme étant « une activité intellectuelle […] qui consiste à émettre des conjectures, à critiquer, justifier ou à infirmer une proposition en faisant appel à un ensemble organisé de savoirs mathématiques […] »(MELS, 2007, p. 28). Au deuxième cycle du secondaire, « cette compétence sollicite en outre les raisonnements propres à chacun des champs mathématiques ainsi que différents types de raisonnements plus généraux…» (MELS, 2007, p.28). Par raisonnements généraux, le MELS entend : raisonnement inductif, raisonnement déductif, raisonnement par analogie et par réfutation. Ici, le raisonnement créatif n'est pas mentionné. Par raisonnements propres à chacun des champs, le MELS entend : raisonnement algébrique, arithmétique, géométrique, statistique et probabiliste.

Contrairement aux programmes précédents, la définition de raisonnement utilisée par le MELS implique différents types de raisonnements spécifiques propres à des champs mathématiques, éléments importants quant à la nature des raisonnements utilisés en classe de mathématique. Par exemple, les programmes des années 90 n'associaient au raisonnement que les raisonnements inductifs et déductifs.

La description un peu brève du raisonnement en mathématique dans les nouveaux programmes ne va pas assez loin. En effet, ni les raisonnements spécifiques des différents champs de savoirs ni les liens entre eux ne sont clairement définis. Par exemple, le passage suivant fait référence à des exemples d'utilisation du raisonnement algébrique (MELS, 2007):

Pour déployer un raisonnement algébrique, l'élève explore et compare différentes possibilités, puis justifie ses choix. Il repère diverses relations et exploite, selon les buts visés, des processus d'interpolation, d'extrapolation ou d'optimisation en s'appuyant sur la compréhension qu'il a des liens de dépendance et des concepts de fonction et de réciproque. Il exploite des procédés algébriques afin de dégager des lois, des règles et des propriétés qui, à leur tour, servent à valider des conjectures, par exemple en démontrant par déduction l'équivalence de deux expressions. (p.29)

Dans cet extrait, à part l'utilisation du terme « raisonnement algébrique » et la référence à quelques concepts liés à l'algèbre, la particularité du raisonnement algébrique n'apparaît pas. Les termes « relations », « lois », « règles », « valider », « conjectures » et « déduction » s'appliquent au raisonnement mathématique en général, indépendamment du domaine. D'ailleurs, le raisonnement mathématique lui-même est défini de façon plutôt vague. Que doit-on entendre par « activité intellectuelle », « ensemble organisé de savoir mathématique », ou « opération sur des relations »? On remarque alors que le programme reconnaît au moins l'existence des différences entre les caractéristiques du raisonnement mathématique en général et celles du raisonnement spécifique d'un domaine particulier des mathématiques. Une étude de différents écrits scientifiques permettra de nous éclairer sur ces différences, mais avant d'en parler, nous soulevons la question de ce qui pourrait être utile aux enseignants du Québec pour favoriser le raisonnement mathématique des élèves.

3. Les connaissances requises à l'enseignement du raisonnement mathématique

Selon Fennema et Franke (1992), « [t]eachers' beliefs, knowledge, judgments, and thoughts have a profound effect on the decisions they make, which in turn determine to a large extent what students learn in their classrooms[1] » (p.156). On peut donc penser que l'enseignement du raisonnement mathématique nécessite une bonne compréhension de ce qu'est le raisonnement mathématique de la part des enseignantes et des enseignants. Ball et Bass (2003) mentionnent que l'acte d'enseigner demande à l'enseignant d'être en mesure de faire des liens entre les différents domaines de la mathématique pour les contenus d'une même année et de plusieurs niveaux scolaires. De ce fait, les enseignants seront

[1] « Les convictions et les connaissances des enseignants, ainsi que leur jugement et ce qu'ils pensent ont une influence profonde sur leurs décisions qui, à leur tour, déterminent en grande partie ce que leurs élèves apprennent en classe. » (traduction libre)

aptes à aider leurs élèves à donner un sens à leurs connaissances mathématiques. Dans le cas particulier de l'algèbre, Schmidt et Bednarz (1997) mentionnent que « le futur enseignant au niveau secondaire […] devra pouvoir être à l'affût des raisonnements et difficultés des élèves survenant en résolution de problèmes, qui à ce moment crucial de leur apprentissage qu'est l'introduction à l'algèbre, vont s'appuyer sur les connaissances développées antérieurement » (p. 128).

Si l'on reconnaît des caractéristiques propres aux raisonnements spécifiques, c'est que l'activité mathématique produite par les élèves diffère d'un domaine mathématique à l'autre. Cette distinction implique un enseignement adapté et donc des connaissances chez les enseignants qui permettent de reconnaître ces différents raisonnements. Les enseignants ont besoin de posséder une connaissance approfondie et didactique du raisonnement mathématique et cette connaissance implique qu'ils soient en mesure de faire des liens entre les différents types de raisonnements utilisés en mathématiques. Les questions suivantes se posent alors : Qu'est-ce que le raisonnement mathématique ? Quels sont les liens qui existent entre les différents types de raisonnement utilisés en mathématique? Trouver les réponses à ces questions est essentiel pour la communauté de didactique des mathématiques et ce, autant pour la contribution aux savoirs scientifiques que pour l'amélioration de la formation des maîtres et de l'apprentissage des élèves. En effet, « [t]he aim of developing mathematical reasoning in classrooms calls on the research community to clarify what is mathematical reasoning and what it looks like in school contexts[2]. » (Reid, 2002, p. 7).

4. Le raisonnement mathématique dans la littérature

Plusieurs difficultés d'apprentissage ont donc été repérées. L'importance du raisonnement dans l'enseignement des mathématiques n'est pas à démontrer, mais sa définition reste à expliciter. Le raisonnement déductif a été discuté par les mathématiciens depuis plusieurs centaines d'années (voir Lakatos, 1977). Polyá (1958) a réfléchi sur la nature et les fonctions des raisonnements démonstratifs et plausibles en mathématique. Remarquons que les réflexions de ces mathématiciens se sont arrêtées à quelques raisonnements généraux (tel que définis par le MELS, 2003; 2007) et portaient essentiellement sur les raisonnements utilisés dans des contextes d'enseignement avancé (collégial et universitaire).

Pour ce qui est des raisonnements spécifiques aux différents champs mathématiques spécifiés dans les programmes (MELS, 2007), il s'agit, contrairement aux raisonnements mathématiques généraux, d'un vocabulaire relativement récent et qui émerge de la didactique des mathématiques. À l'exception des raisonnements algébriques et arithmétiques souvent mis en opposition, les raisonnements spécifiques sont souvent étudiés isolément en didactique et peu de liens semblent explicités entre tous les types de raisonnements en mathématique.

[2] « le but de développer le raisonnement mathématique dans les classes lance un appel à la communauté de recherche de clarifier le sens de ce terme et ce qu'il veut dire dans les contextes scolaires ». (traduction libre)

Une difficulté est de bien définir ce qu'on entend par raisonner en mathématique. Comme il sera démontré dans les prochains paragraphes, les informations retrouvées dans le PFEQ sont un symptôme de ce qui se retrouve dans la littérature. Dans celle-ci, force est de constater qu'il n'existe encore aucun modèle permettant de clarifier ce qu'est le raisonnement en mathématique qui permettrait aux enseignantes et enseignants de mathématiques de mieux comprendre comment s'articulent les différents raisonnements en mathématique.

4.1. Raisonnement mathématique : définitions

Les définitions présentées ci-dessous montrent les ambiguïtés et les différences entre les auteurs. Certains auteurs étudient le raisonnement en mathématique à partir d'une définition qui ne se restreint pas au domaine des mathématiques. C'est le cas de Brousseau et Gibel (2005) qui se basent sur la définition d'Oléron pour spécifier ce qu'ils entendent par raisonnement : « le raisonnement se présente comme un enchaînement, une combinaison ou une confrontation d'énoncés ou de représentations, respectant des contraintes internes susceptibles d'être explicitées, conduit en fonction d'un but » (Oléron, 1977 p.9). En se limitant ensuite à l'étude d'implications, Brousseau et Gibel (2005) définissent le raisonnement par une relation entre un fait ou une condition et une conséquence, une décision ou une prédiction utilisée par un agent (élève ou enseignant) pour réaliser un projet (déterminé par la situation didactique). Cette définition ne définit pas différents types de raisonnements généraux ou spécifiques utilisés en classe de mathématique.

Arsac (1992), dans son étude du raisonnement déductif, se base aussi sur une définition plus générale du raisonnement mais se restreint par la suite au raisonnement déductif. Il mentionne que « le but du raisonnement est de découvrir par l'examen de ce que l'on sait déjà quelque autre chose que l'on ne sait pas encore… il [le raisonnement] présente une ambiguïté (qui est aussi une commodité): il est à la fois l'activité intellectuelle qui aboutit au but visé et le résultat écrit ou oral de cette activité » (p.9-10). Une première constatation est la présence d'éléments de la première et de la troisième compétence du programme de formation, résoudre une situation-problème et communiquer à l'aide du langage mathématique. Arsac (1992) ajoute que : « le raisonnement mathématique emploie d'autres outils que la logique formelle : le raisonnement par récurrence, mais aussi le calcul algébrique sont des moyens typiques pour arriver en mathématiques au but défini par Pierce [raisonner] » (p.10).

Lithner (2000), pour sa part, mentionne que la preuve est centrale au raisonnement mathématique. Il ajoute que d'autres aspects du raisonnement mathématique sont aussi importants : le raisonnement plausible et le raisonnement basé sur des expériences de l'environnement d'apprentissage. Il définit le raisonnement comme « the line of thought, the way of thinking, adopted to produce assertions and reach conclusions. *Argumentation* is the substantiation, the part of the reasoning that aims at convincing oneself, or someone else, that the reasoning is appropriate [3]» (p.166, souligné dans le texte). Contrairement à Arsac, Lithner ne tient compte que de raisonnements plus généraux dans sa définition du raisonnement mathématique et ne parle pas des raisonnements propres aux différents champs de la mathématique comme, par exemple, le raisonnement algébrique.

Reid (2002) définit le raisonnement mathématique comme étant un raisonnement déductif. Pour lui, un élève raisonne mathématiquement lorsque : 1) il examine des « patterns » et remarque des régularités; 2) tente d'appuyer ces conjectures; 3) tente d'expliquer de façon déductive. Il suggère que les deux premiers niveaux sont les fondements du raisonnement mathématique. Selon Reid (2002), seul l'élève qui a atteint le dernier niveau utilise un raisonnement propre aux mathématiques. Ainsi, seul l'élève qui raisonne déductivement est considéré comme un élève qui raisonne mathématiquement. Tout comme Lithner, il ne parle pas des raisonnements propres aux différents champs. Toutefois, contrairement à Arsac et à Lithner, il prend une position très tranchée concernant la nature du raisonnement en mathématique. En effet, seul le raisonnement déductif est ici considéré comme un raisonnement mathématique.

delMas (2004) argumente à partir des propos de Galotti (1989 ; dans delMas, 2004) que les expressions *pensée, résolution de problèmes, prise de décision, pensée critique* et *« brain storming »* sont souvent utilisées comme synonymes des termes *raisonner* ou *raisonnement*. Dans le domaine de la recherche en didactique des mathématiques, certains auteurs établissent une différence entre raisonnement et pensée, d'autre non. Par exemple, Peressini et Webb (1999) mentionnent que « mathematical reasoning can also be viewed as a dynamic activity that includes a variety of modes of thinking. We see mathematical reasoning […] as an integral component of mathematical thinking[4] » (p.157). Ici, Peressini et Webb utilisent le terme *mode de pensée* pour faire référence à différents modes de raisonnement tel le raisonnement inductif, déductif, graphique, spatial ou abstrait. Toutefois, ils considèrent le raisonnement mathématique comme un élément jouant un rôle central de la pensée mathématique et non comme son équivalent. Pour eux, la pensée mathématique comprend, entre autres, la compréhension d'idées, la découverte des relations entre ces idées et la résolution de problèmes impliquant ces idées à partir d'habiletés de pensée mathématique. Par ailleurs, le MELS (2001, 2007) fait une différence entre pensée mathématique et raisonnement mathématique. En effet, la pensée mathématique est, selon le MELS, le regroupement des trois compétences du programme (résoudre, raisonner et communiquer).

Remarquons ici que le vocabulaire utilisé dans les différentes définitions du raisonnement mathématique ressemble un peu à celui utilisé par le MELS (activité intellectuelle, conjecture, raisonnement déductif…) tout en étant non homogène. Remarquons aussi que, contrairement aux autres, la définition de

---

[3] « la ligne de pensée, ou la manière de pensée empruntée pour produire des constatations et arriver à des conclusions. L'argumentation est la validation, ou la partie du raisonnement dont le but est de se convaincre soi-même, ou quelqu'un d'autre que le raisonnement est bien choisi ou adéquat. » (traduction libre)

[4] « le raisonnement mathématique peut aussi être considéré comme une activité dynamique qui comprend une diversité de modes de pensée. Nous considérons le raisonnement mathématique comme une composante intégrale de la pensée mathématique. » (traduction libre)

Reid (2002), tout en étant très tranchée, a l'avantage d'être opérationnelle. Un vocabulaire homogène permettrait de mieux relier les différents résultats de recherche sur l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques dans le but d'améliorer la formation des maîtres.

4.2. Les liens entre les raisonnements dits généraux

En plus de ce vocabulaire non homogène, quelques ambiguïtés demeurent quant aux différents liens existants entre les raisonnements mathématiques dits généraux. Par exemple, le MELS (2007) semble considérer que le raisonnement inductif diffère du raisonnement par analogie alors que Bérubé (1990, dans IDRISS, 2004) et Christou et Papageorgiou (2007) définissent plutôt l'analogie comme un type de raisonnement inductif. Pour sa part, Polyá (1958) dit que le raisonnement par analogie peut mener à un raisonnement inductif. De même, le rôle attribué à la conjecture, à la généralisation, à la validation, etc. dans le raisonnement mathématique n'est pas toujours clair et peu de recherches permettent de définir les différentes relations existantes entre ces différents termes liés aux raisonnements généraux en mathématique. Par contre, un modèle qui permet d'éclairer ces différents liens a été construit par Stylianides (2005). Stylianides a élaboré une définition du raisonnement mathématique et de la preuve cohérente avec la nature du raisonnement et de la preuve en mathématique. Le Tableau 1 offre une représentation de son modèle.

Pour lui, le raisonnement-et-preuve couvre une vaste étendue d'activités mathématiques qu'il a séparées en quatre groupes : Identifier un pattern, conjecturer, fournir une preuve et fournir un argument (autre qu'une preuve). Chacun de ces types d'activités permet, selon Stylianides (2005), de favoriser le développement d'un type de raisonnement en particulier. Les activités qui amènent les élèves à identifier un pattern et conjecturer favorisent le développement du raisonnement inductif. Les activités qui demandent aux élèves de fournir une preuve développent principalement le raisonnement déductif. Par preuve, il est entendu un argument valide et effectué à partir de prémisses vraies pour ou contre un énoncé mathématique. Pour lui, il existe deux types de preuve : la preuve générique et la démonstration. Par preuve générique, Stylianides entend une activité où il est attendu que l'élève fournisse un argument général illustré par un cas particulier. Par démonstration, Stylianides entend les activités où il est attendu de l'élève qu'il fournisse une argumentation logique basée sur des propriétés ou sur la structure des relations en jeu qui relie les prémisses à la conclusion en ne s'appuyer sur aucun exemple particulier.

	Raisonnement-et-preuve			
	Faire des généralisations mathématiques		Appuyer des affirmations mathématiques	
Composantes et sous-composantes du raisonnement et de la preuve	Identifier un pattern	Établir des conjectures	Fournir une preuve	Fournir un argument (autre qu'une preuve)
	• Pattern plausible • Pattern défini		• Preuve générique • Démonstration	• Argument empirique • Argument rationnel
Visée du pattern, de la conjecture et de la preuve	• Précurseur de conjecture • Non-précurseur de conjecture	• Précurseur de preuve • Non-précurseur de preuve	• Explication • Vérification • Réfutation • Génération de nouveau savoir	
Contexte	• Extra-mathématique • Quasi-mathématique • Mathématique			

Tableau 1 : Traduction du modèle de raisonnement (Stylianides, 2005, p.21).

Il est possible de faire un lien entre le modèle de Stylianides (2005) et la définition de la compétence « déployer un raisonnement mathématique » du programme de formation de l'école québécoise (MELS, 2002). En effet, deux des quatre composantes proposées par Stylianides se retrouvent mot pour mot dans le PFEQ autant au premier qu'au deuxième cycle du secondaire (Établir des conjectures, Fournir une preuve). Il est ensuite possible de lier *Identifier un pattern* (Stylianides) et *former et appliquer des réseaux de concepts et de processus mathématiques* (MELS). Selon le MELS, l'élève construit de tels réseaux de concepts et de processus par l'étude de régularités, par l'établissement de lois, de règles et de propriétés qui régissent ces régularités, nous pouvons donc dire – en identifiant des patterns. Il peut s'avérer rassurant de ne pas retrouver la dernière composante (argument autre qu'une preuve) dans la définition du MELS puisque la sous-composante *Argument empirique* peut s'avérer problématique pour le développement du raisonnement déductif de plusieurs élèves. En effet, dans certain cas, les élèves s'arrêtent à quelques exemples pour conclure qu'une conjecture est vraie (Arsac, 1992), c'est ce que Stylianides appelle *argument empirique* (peut être lié à l'empirisme naïf de Balacheff (Balacheff, 1987 dans Arsac, 1992)).

Le modèle de Stylianides (2005) permet de faire un lien entre le type d'activités demandés à l'élève et les raisonnements inductifs et déductifs et, selon les dires de l'auteur, pour tous les champs mathématiques et pour différents niveaux scolaires. Ce modèle peut alors être utilisé dans le contexte québécois pour s'assurer de fournir aux élèves une variété d'activités mathématiques en lien avec ces deux types de raisonnement. Le modèle peut aussi permettre de voir le lien entre raisonnement inductif et raisonnement déductif en ce sens que les activités liées au raisonnement inductif précèdent (ou peuvent précéder) les activités liées au raisonnement déductif. En effet, on peut amener un élève à conjecturer par un raisonnement inductif avant de lui demander de valider sa conjecture par un raisonnement déductif. De plus, le modèle fournit une conception intéressante de la preuve autre que la preuve en deux colonnes généralement véhiculée dans le milieu scolaire. Toutefois, le modèle ne permet pas d'analyser le raisonnement par analogie ni les raisonnements propres aux différents champs. Il ne permet donc pas de comprendre comment ces différents raisonnements s'articulent avec les raisonnements inductif et déductif. En ce qui a trait aux raisonnements généraux en mathématique, un modèle qui inclut les raisonnements par analogie, inductif et déductif reste à construire.

4.3. Les liens entre les raisonnements propres aux différents champs

Afin d'aider les enseignantes et les enseignants à favoriser le développement du raisonnement mathématique chez leurs élèves, il apparaît important de comprendre non seulement comment s'articulent les types de raisonnements mathématiques dits généraux, mais aussi comment s'articulent les types de raisonnements propres aux différents champs des mathématiques. Il est aussi important de comprendre comment s'articulent ces derniers et les raisonnements mathématiques généraux. Dans un premier temps, plusieurs études portent sur les raisonnements propres aux différents champs de la mathématique présents dans le PFEQ.

Par exemple, le raisonnement algébrique est caractérisé entre autres par la nécessité à opérer sur l'inconnue, à se détacher des grandeurs et du contexte, par l'utilisation d'outils sémiotiques (tels les graphiques ou les symboles algébriques) qui permettre la représentation et le calcul algébriques, par la formalisation de généralisation et par la modélisation de relations (Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001; Squalli, 2003). Bednarz et Janvier (1991) et Lins (1993) voient la pensée (ou le raisonnement) analytique comme étant une constituante importante du raisonnement algébrique. Par raisonnement analytique, Lins entend : « taking the unknown as if it were already known, and from this drawing necessary consequences until one reaches something which has already been proven to be true or something which has already proven to be false[5] » (p.1).

Le raisonnement statistique est défini par Ben-Zvi et Garfield (2004) comme étant la façon dont les gens raisonnent à partir des idées statistiques et donnent sens aux informations statistiques. Il implique l'interprétation basée sur un ensemble de données, sur la représentation de données ou sur des mesures statistiques ainsi que la combinaison de concepts ou d'idées. De

[5] « se servir de l'inconnue comme si elle était déjà connue pour en tirer des conclusions nécessaires jusqu'à en obtenir quelque chose qui soit a déjà été démontré vrai ou a déjà été démontré faux. » (traduction libre)

plus, contrairement à l'algèbre, Ben-Zvi et Garfield mentionnent que le raisonnement statistique est dépendant du contexte. Cette différence semble aussi importante dans la comparaison des raisonnements arithmétique et algébrique (Bednarz et Janvier, 1991). Ces différences entre les différents types de raisonnement peuvent être importantes pour les enseignantes et les enseignants à différents moments de leur pratique.

Pour ces raisonnements, le contexte et les concepts mathématiques sous-jacents semblent très importants pour les différencier. Mais est-ce tout ? Y a-t-il d'autres différences, la façon d'organiser sa pensée par exemple, ou encore la perspective adoptée lors de la résolution d'un problème selon le champ mathématique où se situe le raisonnement?

Mentionnons aussi que les termes *pensée* et *raisonnement* ne sont pas toujours utilisés de la même manière selon les domaines. Dans le domaine de la didactique de l'algèbre, les termes *pensée* et *raisonnement* semblent utilisés quelquefois comme synonymes. Par exemple, Lee (1997) traduit le terme *algebraic thinking* par *raisonnement algébrique*. Bednarz et Janvier (1991) utilisent tantôt l'expression pensée algébrique tantôt l'expression raisonnement algébrique sans faire de nuance explicite entre les deux. Dans le domaine de la didactique des statistiques, Ben-Zvi et Garfield (2004) et delMas (2004) différencient le raisonnement statistique de la pensée statistique, même s'ils disent que les deux sont liés. Pour eux, une personne qui peut expliquer le pourquoi d'un résultat et pourquoi une conclusion est justifiée démontre un raisonnement statistique. La personne qui sait quand et comment utiliser les concepts et procédures statistiques démontre une pensée statistique.

Enfin, peu de recherches portent sur les liens qui peuvent exister entre ces raisonnements puisque la majorité des recherches portent spécifiquement sur un seul type de raisonnement. Le plus grand travail a été effectué dans la comparaison du raisonnement algébrique et arithmétique puisque, entre autres, qu'une conception de l'algèbre est qu'elle est une arithmétique généralisée et, dans un second temps qu'il existe un saut conceptuel entre ces deux types de raisonnement (Bednarz & Janvier, 1991; Booth, 1984; Kilpatrick et al., 2001; Squalli, 2003). De plus, comme pour les raisonnements plus généraux, les termes *pensée* et *raisonnement* sont aussi problématiques et il reste à les définir clairement pour permettre une meilleure interprétation des écrits dans les différents domaines.

4.4. Les liens entre les raisonnements généraux et les raisonnements spécifiques

Certaines recherches rapportent quelques liens entre le raisonnement mathématique et les raisonnements spécifiques aux différents champs de la mathématique. Par exemple, plusieurs auteurs (Blanton & Kaput, 2005; Carraher & Shliemann, 2007; Lew, 2004; Schliemann & Carraher, 2002) placent l'idée de généralisation comme centrale dans le raisonnement algébrique. Par définition, le raisonnement inductif est relié au processus de généralisation. Il semble y avoir ici un lien important. Kieran (2007) argumente que « algebraic reasoning involves both general mathematical processes as well as ways of thinking about specific mathematical objects and operations that are quite distinct from, say, arithmetic thinking or geometric thinking or statistical thinking.[6] (p.7) ». On peut remarquer ici l'idée que les raisonnements n'impliquent pas uniquement des processus, mais aussi des objets mathématiques. Dans un même ordre d'idées, delMas (2004) fait la différence entre raisonnement mathématique et raisonnement statistique. Il argumente que le raisonnement statistique, contrairement au raisonnement mathématique, est dépendant des données et du contexte. Il y a ici naissance d'éléments importants qui peuvent influencer la façon d'enseigner ces différents types de raisonnement. Une compréhension plus approfondie s'avère nécessaire.

Conclusion

Ces différents écrits amènent certains éléments de réponses sur ce que pourrait être un modèle des composantes du raisonnement mathématique pour l'enseignement secondaire. Entre autres, les raisonnements spécifiques aux différents champs semblent avoir des caractéristiques propres, mais aussi des liens étroits avec les raisonnements dits généraux. Le contexte et les concepts semblent aussi des éléments importants. Les différents écrits amènent aussi beaucoup de questions sur le vocabulaire utilisé, sur les processus et les concepts impliqués dans les différents raisonnements utilisés en mathématique et sur les liens possibles entre ces raisonnements. En effet, les différentes définitions impliquent différents processus et concepts et sont quelquefois contradictoires. Le vocabulaire utilisé n'est pas uniforme, l'exemple des termes *pensée* et *raisonnement* est frappant.

À partir d'une analyse des écrits sur le raisonnement en mathématique, nous voulons mieux définir ce qui est entendu par raisonnement mathématique dans l'enseignement secondaire. L'objectif de ce projet est alors d'élaborer et de valider un modèle des composantes du raisonnement et de leurs relations en mathématique pour l'enseignement secondaire. Ce modèle permettra de préciser la nature du raisonnement mathématique et les relations entre les différents types de raisonnement utilisés en mathématiques dans l'enseignement secondaire. L'apport de ce modèle sera de mieux comprendre ce qu'est le raisonnement dans l'enseignement des mathématiques au secondaire dans le but d'en favoriser le développement. Ce modèle pourra favoriser la réflexion des didacticiens, des formateurs des maîtres et des enseignants sur ce qu'est le raisonnement en mathématique.

Bibliographie

ARSAC, G. (1992). *Initiation au raisonnement déductif au collège: une suite de situations permettant l'appropriation des règles du débat mathématique*. Lyon: Presses universitaires de Lyon.

BALL, D. L., et BASS, H. (2003). Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. Dans E. Simmt et B. Davis (Eds.),

[6] « Le raisonnement algébrique implique, en même temps, les processus mathématiques généraux et des manières de penser à propos d'objets et opérations mathématiques spécifiques qui sont tout à fait distinctes, par exemple, de la pensée arithmétique, de la pensée géométrique ou de la pensée statistique. » (traduction libre)

Proceedings of the 2002 annual meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group (p. 3-14). Edmonton, Alberta: CMESG.

BEDNARZ, N., et JANVIER, B. (1991). *Émergence des raisonnements algébriques: un essai de caractérisation des sauts conceptuels qui marquent le passage à un mode de pensée algébrique*. Papier présenté au Colloque du groupe de recherche sur l'algèbre.

BEN-ZVI, D., et GARFIELD, J. (2004). *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* Netherland: Kluwer Academic Publishers.

BLANTON, M. L., et KAPUT, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 412-446.

BOOTH, L. R. (1984). *Algebra: children's strategies and errors*. Windsor, UK: NFER-Nelson.

BROUSSEAU, G., et GIBEL, P. (2005). Didactical handling of students' reasoning processes in problem solving situation. *Educational Studies in Mathematics 59(1-3),* 13-58.

CARRAHER, D. W., et SCHLIEMANN, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. Dans F. K. J. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (p. 669-705). Charlotte, N.C. : Information Age Publishing.

CHRISTOU, C., et PAPAGEORGIOU, E. (2007). A framework of mathematics inductive reasoning. *Learning and Instruction, 17*(1), 55-66.

DelMAS, R. C. (2004). A comparison of mathematical and statistical reasoning. Dans D. Ben-Zvi et J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (p. 79-96). Netherland: Kluwer Academic Publishers.

FENEMA, E., et FRANKE, M. L. (1992). Teachers' knowledge and its impact. Dans D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (p. 147-164). New York: Macmillan.

IDRISS. (2004). Index international et dictionnaire de la radaptation et de l'intégration sociale. Récupéré le 21 janvier 2008, de http://www.med.univ-rennes1.fr/iidris/cache/fr/44/4428

KIERAN, C. (2007). Developing of algebraic reasoning : The role of sequenced tasks and teacher questions from the primary to the early secondary school levels. *Quadrante, 16*(1), 5-26.

KILPATRICK, J., SWAFFORD, J., et FINDELL, B. (2001). *Adding it up: helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

LAKATOS, I. (1977). *Proofs and refutations*. Cambridge: Cambridge University Press.

LEE, L. F. (1997). *La compréhension algébrique: La recherche d'un modèle dans la communauté d'éducation mathématique.* Université du Québec à Montréal, Montréal.

LEW, H.-C. (2004). Developing algebraic thinking in early grades: Case study of Korean elementary school mathematics. *The Mathematics Educator, 8*(1), 88-106.

LINS, R. C. (1993). *Understanding what algebraic thinking is: analysis and synthesis.* Papier présenté à la 17e Conférence internationale for the Psychology of Mathematics Education (PME-XVII), Tsukuba, Japan.

LITHNER, J. (2000). Mathematical reasoning in task solving. *Educational Studies in Mathematics, 41*(2), 165-190.

MELS. (2003). *Programme de formation de l'école québécoise : enseignement secondaire, premier cycle* (Version approuvée. ed.). Québec: Ministère de l'Éducation.

MELS. (2007). *Programme de formation de l'école québécoise enseignement secondaire, deuxième cycle*. Québec: Ministère de l'Éducation.

MEQ. (2000). *Programme de formation de l'école québécoise éducation préscolaire, enseignement primaire (1er cycle), version approuvée - enseignement primaire (2e et 3e cycles), version provisoire*. Québec: Ministère de l'éducation.

OLERON, P. (1977). *Le raisonnement* (1e ed.). France: Presses Universitaires de France.

PERESSINI, D., et WEBB, N. (1999). Analyzing mathematical reasoning in students' responses across multiple performance assessment tasks. Dans L. V. Stiff et F. R. Curcio (Eds.). *Developing mathematical reasoning in Grades K-12*. Virginia: NCTM.

POLYA, G. (1958). *Les mathématiques et le raisonnement plausible*. Paris: Gauthier-Villars.

REID, D. A. (2002). Conjectures and refutations in grade 5 mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(1), 5-29.

SCHLIEMANN, A. D., et CARRAHER, D. W. (2002). The Evolution of Mathematical Reasoning: Everyday versus Idealized Understandings. *Developmental Review, 22*(2), 242-266.

SCHMIDT, S., et BEDNARZ, N. (1997). Raisonnements arithmétiques et algébriques dans un contexte de résolution de problèmes: difficultés rencontrées par les futurs enseignants. *Educational Studies in Mathematics, 32*(2), 127-155.

SQUALLI, H. (2003). *Tout, tout, tout, vous saurez tout sur l'algèbre*. Québec: Presses de l'Université du Québec à Trois-Rivières.

STYLIANIDES, G. J. (2005). *Investigating students' opportunities to develop proficiency in reasoning and proving: a curricular perspective,* Thèse de doctorat inédite, University of Michigan, Michigan.

DORIS JEANNOTTE
Université du Québec à Montréal
Doris_Jeannotte@USherbrooke.ca