# Quelle formation mathématique pour les futurs enseignants du secondaire ?
# Un éclairage fondé sur une analyse des recherches

**Jérôme Proulx et Nadine Bednarz,** *Université du Québec à Montréal, Canada*

**Résumé :** À quelles expériences mathématiques devraient être confrontés les enseignants du secondaire pour pouvoir enseigner les mathématiques? La tentative de réponse que nous apportons à cette question est basée sur une analyse de travaux de recherche portant sur la formation des enseignants en mathématiques mettant en évidence les incidences possibles de celle-ci sur leur pratique future. Cette réflexion nous conduit à mettre en évidence deux dimensions à considérer dans la formation : l'exploration des « mathématiques scolaires » et l'engagement des futurs enseignants dans une certaine culture mathématique.

## Introduction

Il n'est pas rare aujourd'hui d'être confronté à des commentaires jugeant les connaissances mathématiques des futurs enseignants et enseignants du secondaire insuffisants pour faire face à leur tâche d'enseignement. Ainsi dès qu'il est question de la faible performance des élèves en mathématiques aux tests nationaux ou internationaux, un parallèle est plus souvent qu'autrement établi avec les connaissances que les enseignants ont des mathématiques[1].

Ces constats peuvent conduire à vouloir mettre de l'avant une solution au problème identifié, sans véritable analyse de la situation, allant dans le sens d'un accroissement de la formation mathématique des enseignants. Mais s'est-on déjà demandé quelles mathématiques sont nécessaires pour cet enseignement? Et quel est le bien fondé de cette formation, son véritable apport pour la formation des enseignants? Quel est son réel impact sur l'apprentissage des élèves en mathématiques? Peut-on véritablement établir un lien entre ces deux composantes aussi aisément qu'on semble vouloir le faire a priori? Ce que nous voulons montrer par les commentaires qui précèdent est que la contribution de cette préparation mathématique semble plutôt être prise comme un allant de soi, sans véritable interrogation sur le bien fondé de celle-ci et de son contenu.

Dans la communauté des formateurs, un débat est présent entre ceux qui voudraient offrir une formation mathématique universitaire « solide et approfondie », la même que celle qu'on offre aux futurs mathématiciens, ceux qui privilégient une formation intégrée dans laquelle les connaissances mathématiques sont revisitées à travers notamment la formation didactique et la réflexion sur la pratique, ou encore ceux qui affirment le besoin d'un « juste équilibre », les enseignants devant en savoir un peu plus en mathématiques que ce qu'ils enseignent aux élèves (pour en avoir une vue d'ensemble et pouvoir notamment faire des liens entre les différents concepts et voir les extensions possibles du travail abordé…).

Ces débats ne datent pas d'aujourd'hui. Nous les retrouvons par exemple dans les tous premiers documents de la conférence internationale en enseignement des mathématiques (ICME), entre autres dans les propos tenus lors du premier groupe de travail portant sur la formation des enseignants, tenu à la rencontre

[1] Ainsi les très bons résultats des élèves aux tests internationaux en Chine ou dans les pays nordiques ont tendance à être mis en parallèle avec une connaissance approfondie des mathématiques de leurs enseignants, et à l'opposé de faibles performances avec une connaissance pauvre des mathématiques de leurs enseignants.

ICME-3 en 1976 à Karlsruhe (voir Otte, 1976). L'extrait suivant, référant à ce groupe de travail, traduit ainsi des préoccupations que l'on pourrait retrouver aujourd'hui :

> The question of what mathematical training a future mathematics teacher should receive produced divergent views. There were those who advocated 'mathematics for teachers' with emphasis on those aspects of mathematics which featured in school courses; others pointed to the position of mathematics teachers as members of the mathematical community and felt that two different types of mathematics do not exist. This is likely to remain an unresolved question, but one that required continuous examination. (pp. 200-201)

Ce qui frappe dans ces constats et débats relatifs à la préparation mathématique des enseignants du secondaire (et à ce qu'elle devrait être) est le manque flagrant de recherches qui puisse venir éclairer et appuyer ces diverses prises de positions. Chaque groupe a ses propres anecdotes pour illustrer ses insatisfactions en regard de la préparation mathématique des enseignants, ses croyances et points de vue quant à ce que devrait être cette formation. On se retrouve ainsi confronté à ce qu'au Québec nous nommons une guerre de clochers, chaque groupe affirmant avoir raison, sur la base, malheureusement plus souvent qu'autrement, de croyances, d'opinions…

Or si nous voulons véritablement avancer sur cette question de la formation mathématique des futurs enseignants, un travail préalable selon nous s'impose, qui puisse permette d'appuyer, de fonder sur des bases solides, des orientations et expériences à faire vivre aux futurs enseignants. C'est avec cette idée en tête que nous avons cherché, en nous appuyant sur une analyse des recherches actuelles et passées dans le domaine de la formation des enseignants, à éclairer d'un jour nouveau cette question de la préparation mathématique des enseignants de mathématiques du secondaire. Notre réflexion théorique ne prétend pas au « statut de vérité », nous ne voulons en effet nullement retomber dans le travers que nous venons de décrier. Nous voulons avant tout mieux comprendre cette formation et les défis qu'elle pose pour l'enseignement, en l'enracinant davantage dans les recherches et écrits théoriques que notre champ a produits au fil des années[2]. Ces analyses préalables nous conduiront à préciser les axes et orientations d'un programme de recherche en cours, inspiré de ces recherches en formation des enseignants[3].

## 1. Modèle usuel de formation mathématique des enseignants du secondaire : limites mises en évidence par les recherches

Au Canada, comme dans bien d'autres pays à travers le monde, les enseignants du secondaire doivent suivre un nombre important de cours dans

[2] Les auteurs des recherches et écrits théoriques auxquels nous puisons proviennent de différentes disciplines : mathématiques (Bass dans Ball et Bass, 2003 ; Jones, 1977 ; Schoenfeld, 1985 ; Luk, 2005), didactique des mathématiques (par exemple, Bednarz, Gattuso et Mary, 1995 ; Ball, 1990 ; Cooney et Wiegel, 2003 ; Burton, 2004 ; Bartolini Bussi, 1998 ; Bauersfeld, 1994 : Brousseau, 1998) et d'autres sont situés aux confins des mathématiques et de la didactique (voir, par exemple, l'ouvrage collectif du NRC, 2001 ; les actes du groupe de travail sur la formation des enseignants de ICME-3, dans Otte, 1976 ; l'étude internationale ICME-15 portant sur la formation des enseignants, 2008)

[3] Notre position est influencée, nous nous devons de le dire, par notre contexte canadien et devra donc être perçue sous cet angle, même si nous croyons nos propos assez larges pour initier une réflexion d'ordre général.

leur discipline, dans notre cas les mathématiques, pour obtenir le droit d'enseigner les mathématiques dans les écoles secondaires[4]. L'analyse du contexte actuel nous montre par ailleurs que ce contenu disciplinaire en mathématiques, en tant que composante fondamentale des programmes de formation des enseignants, est de plus souvent associé, sauf exception, aux mathématiques dites « académiques » (les futurs enseignants devant suivre essentiellement les cours universitaires de mathématiques, le plus souvent donnés par des mathématiciens, et offerts également aux étudiants en mathématiques)[5].

À travers les années, cette orientation donnée à la préparation mathématique des futurs enseignants, qui prend la forme de cours universitaires de mathématiques s'adressant aux futurs mathématiciens (algèbre, algèbre linéaire, calcul différentiel et intégral, analyse, etc.), a été fortement remise en question (implicitement ou explicitement), en regard notamment du fossé entre cette expérience mathématique que vit le futur enseignant dans les cours de mathématiques académiques et les expériences mathématiques auquel il sera confronté dans sa pratique scolaire. Nous examinons ici certaines dimensions de ces critiques.

Alors qu'on peut présumer que les cours de mathématiques académiques sont sans aucun doute importants pour la formation des futurs mathématiciens, plusieurs travaux questionnent la pertinence de ceux-ci pour la formation des futurs enseignants de mathématiques du secondaire. Les éléments repris par les chercheurs dépassent ici le simple constat d'une absence de lien significatif entre cette formation académique en mathématiques des futurs enseignants et la performance des élèves[6], ils insistent sur la présence possible d'effets néfastes de cette formation sur les pratiques futures des enseignants au secondaire et sur les compréhensions mathématiques qu'ils développent. C'est le cas entres autres de Bauersfeld (1994), qui, à travers une analyse des cultures mathématiques académiques et scolaires, affirme que les modèles de formation des enseignants surestiment souvent les effets positifs d'une formation académique en mathématiques, prenant peu en compte les habitus développés chez les futurs enseignants dans cette formation. Les cours universitaires de mathématiques font en effet, par les contenus abordés et leur manière d'approcher les mathématiques, implicitement la promotion de valeurs, techniques, méthodes, conceptions et façons de penser propres aux mathématiques académiques, et pas nécessairement appropriées aux pratiques d'enseignement des mathématiques dans les écoles (voir aussi Luk, 2005, pour une discussion de cette rupture importante entre mathématiques académiques et mathématiques scolaires). En un mot, les enseignants de mathématiques du secondaire sont intégrés dans une culture mathématique très différente, voire contradictoire, nous le verrons dans ce qui suit, à celle qu'ils auront à mettre en place avec leurs élèves en classe. Cette expérience mathématique vécue dans les cours de

[4] Voir notamment à ce sujet l'analyse des programmes de formation initiale menée par les chercheurs dans différents pays, précisant la composante formation en mathématiques dans cette formation : Bednarz et Perrin-Glorian (2003) pour le Québec et la France ; Smida, Rouan, Ould Sidaty et Abdelli (2007) pour les pays du Maghreb ; étude ICMI-15 (Even & Ball, 2008) pour différents pays à travers le monde.

[5] C'est le cas par exemple de la formation des enseignants offerte à l'UQÀM ou à l'université Laval au Québec où des cours spécifiques destinés aux futurs enseignants uniquement ont été mis sur pied (voir Bednarz et Perrin-Glorian, 2003).

[6] Nous ne développerons pas cet aspect ici. Pour plus de détails à ce sujet, voir les études de Begle (1979) et Monk (1994).

mathématiques académiques peut en ce sens avoir des implications significatives pour le développement de façons de connaître et de pratiquer les mathématiques par les enseignants. Regardons ici plus spécifiquement certaines d'entre elles.

### *1.1 Forme des contenus travaillés dans les cours de mathématiques académiques : impact possible sur les pratiques d'enseignement*

Certains chercheurs ont souligné le fait que la nature avancée et formelle des mathématiques travaillées à l'intérieur des cours de mathématiques académiques pourrait avoir l'effet néfaste de renforcer le côté abstrait et formel dans la compréhension mathématique des concepts par les enseignants ainsi que dans leur enseignement auprès des élèves (Ball, Lubienski et Mewborn, 2001; Cooney & Wiegel, 2003; Gattuso, 2000 ; NRC, 2001). Les analyses menées par ces chercheurs montrent que les enseignants peuvent vivre des difficultés importantes à approcher l'enseignement de concepts en mathématiques de manière à les rendre accessibles et compréhensibles par les élèves. L'étude de cas conduite par Thompson et Thompson (1994, 1996) sur l'enseignant Bill est une illustration éloquente des ces difficultés. Bill possède une compréhension formelle de la vitesse, enchâssée dans la formule (liant vitesse, temps et distance), associée pour lui à des calculs, des opérations (multiplication, division) et une présentation procédurale des concepts en jeu. Pour Bill, la relation entre vitesse, temps et distance s'explique par un lien multiplicatif exprimé par des opérations. Cette compréhension formalisée du concept de vitesse le rend incapable d'aider son élève, Ann, qui perçoit, pour sa part, la vitesse non pas comme quelque chose associé à une opération (distance/temps), mais comme un intervalle (si j'ai 100m à parcourir et que je vais à 40m/sec., je sais que 40 entre deux fois et une demie dans 100m) et qui éprouve d'énormes difficultés à expliquer où la personne se trouve en cours de parcours. Reconnaissant dans l'opération d'Ann une compréhension de la vitesse comme taux (ce qui n'en est rien), Bill insiste sur les opérations et les calculs pour l'aider à déterminer les distances et temps nécessaires, amenant à une plus grande incompréhension de la part d'Ann. La compréhension formelle du concept de vitesse de Bill, encapsulée dans des opérations, procédures et calculs, qui *pour lui* font ressortir clairement le sens et les liens possibles entre les données, les laisse totalement opaques pour Ann, créant ainsi une rupture importante entre les deux, dans laquelle l'incompréhension d'Ann grandit. Cet exemple illustre l'incapacité de Bill de sortir de son langage formalisé, comme le soulignent Thompson et Thompson, ainsi que sa difficulté à bien saisir les difficultés vécues par son élève.

Une autre des dimensions témoignant du fossé qui sépare les expériences mathématiques vécues par les enseignants dans les cours académiques et leurs pratiques mathématiques futures a trait cette fois-ci à la nature même des concepts travaillés dans les cours.

### *1.2. Nature des concepts travaillés dans les cours de mathématiques académiques et dans les pratiques mathématiques en classe.*

En dehors de l'impact possible de cette forme abstraite et formelle des contenus mathématiques abordés dans les cours universitaires, la nature même des concepts travaillés dans ces cours semble aussi problématique. Une des caractéristiques et forces des mathématiques académiques est en effet de travailler à rendre les concepts et idées mathématiques « compactes », « compressées » pour les rendre plus efficaces, puissantes et faciles à utiliser

(Adler & Davis, 2006; Ball & Bass, 2003; Moreira & David, 2005). Toutefois, ceci les rend aussi opaques pour l'œil externe (Moreira & David, 2008), et apparaît en ce sens contradictoire avec ce que l'enseignant sera appelé à faire dans ses pratiques, son mandat étant en effet davantage de « décompresser », défaire et décortiquer les concepts mathématiques pour les rendre accessibles aux élèves. Comme Bednarz (2001) et Brousseau (1998) le soulignent, l'enseignement des mathématiques requière un retour aux concepts élémentaires et aux raisonnements sous-jacents pour arriver à promouvoir des compréhensions mathématiques robustes chez les élèves. Le travail mené dans ces cours académiques pourrait dès lors creuser encore davantage le fossé avec leurs pratiques futures d'enseignement des mathématiques aux élèves.

Ces différences sont bien illustrées par une analyse de concepts mathématiques enseignés au niveau scolaire et académique). Moreira et David (2005) reprennent pour illustrer cette importante différence l'exemple du travail sur les nombres rationnels. Ainsi, dans les cours de mathématiques auxquels le futur enseignant est confronté dans sa formation (mathématiques académiques), un nombre rationnel sera vu comme une classe d'équivalence de couples ordonnés d'entiers, définis par la relation "(a,b)~(c,d) si et seulement si ad=bc". Au niveau scolaire, il en est tout autrement, cette introduction passe par l'extension des nombres naturels aux nombres rationnels, qui constitue un passage clé et difficile pour les élèves comme le montrent les nombreuses recherches dans le domaine (Brousseau, 1981 ; Vergnaud, 1988). De plus, pour aider les élèves à développer le concept de nombre rationnel et d'opération sur les rationnels, l'enseignant aura à s'appuyer sur différents sens de la fraction (partie d'un tout, mesure, rapport, ...) et à en démonter la signification. On perçoit bien à travers cet exemple la nature distincte des concepts abordés dans les deux cas, et le fossé qui sépare les expériences mathématiques qui y sont travaillées.

Un autre exemple est celui du travail de l'algèbre au niveau académique et scolaire. Dans les cours de mathématiques académiques, le futur enseignant, à travers les cours d'algèbre et d'algèbre linéaire notamment, est confronté aux structures algébriques et à l'introduction d'une algèbre abstraite, puissante et efficace, en rupture avec les pratiques futures d'enseignement de l'algèbre au secondaire (voir aussi Corriveau et Tanguay, 2007, sur cette introduction à une algèbre et un formalisme différents au niveau post-secondaire en algèbre linéaire et aux ruptures qu'il provoque pour les étudiants). À l'opposé, l'enseignement de l'algèbre à l'école exige de l'enseignant qu'il revienne aux significations de base du symbolisme de manière à travailler à en faire voir la pertinence pour les élèves, à lui construire un sens, à percevoir la complexité de cette notation symbolique. Elle demande ainsi de déconstruire cette notation, de revenir aux diverses significations sous-jacentes de la lettre sur le plan conceptuel (inconnue, variable, paramètre, etc.), de comprendre ce que veut dire résoudre une équation, de voir les raisonnements susceptibles d'être mis en œuvre dans la résolution de problèmes, etc. (voir Bednarz, Kieran et Lee, 1996).

On voit donc ici encore que pour un même contenu mathématique, l'algèbre, des aspects très différents, et même contradictoires, vont être abordés par le futur enseignant (dans les cours académiques et dans ce que va exiger sa pratique en classe) Ainsi, par leur insistance sur le formalisme et l'abstraction, par la nature « compacte et compressée » des concepts qui y sont abordés, les mathématiques académiques contribuent peu pour les enseignants au développement de connaissances appropriées à leurs futures pratiques professionnelles, voire même nous l'avons vu y nuisent. Finalement, un autre élément semble important à considérer, cette fois au niveau des manières d'approcher les mathématiques dans les cours.

### *1.3. Une immersion dans certaines manières de faire: analyse de leur impact*

Une autre critique importante en lien avec les cours de mathématiques académiques et leur influence concerne la manière dont ces cours sont enseignés. Tel que l'expliquent Bauersfeld (1994) et Burton (2004), la façon usuelle dont les cours universitaires en mathématiques sont donnés se caractérise par un style magistral et une exposition de savoirs mathématiques (concepts, axiomes, théorèmes,...). Les façons de faire et les habitudes mathématiques développées dans ces cours renvoient donc davantage à un corpus de « savoirs standardisés » qu'à une participation à un *processus de mathématisation* qui puisse en retour inspirer des pratiques mathématiques riches en classe. On assiste dès lors un important choc de cultures[7] – ou au renforcement d'une culture de classe, éloignée des approches contemporaines préconisées pour l'enseignement des mathématiques. Pour Bauersfeld, les enseignants ont besoin d'être immergés dans une certaine culture mathématique, dans une pratique à l'intérieur de laquelle les mathématiques sont produites et sont vivantes, plutôt que d'être introduits à un corps de connaissances objectives où les mathématiques sont vues comme des absolus épistémologiques.

L'étude que Burton (2004) a conduite avec des mathématiciens est très parlante à cet effet. Elle met en évidence (dans l'analyse du discours des mathématiciens) des différences entre les cultures d'enseignement et leur travail de production mathématique. Plusieurs des mathématiciens interviewés font ainsi ressortir le caractère incohérent existant entre leurs pratiques professionnelles de mathématiciens lorsqu'ils *font* les mathématiques et leurs pratiques d'enseignement, qui donnent une vision des mathématiques comme étant statiques et préexistantes, alors qu'eux-mêmes voient les mathématiques comme étant en constante évolution et nécessitant une construction personnelle continuelle chez le mathématicien. Ainsi, on le voit, les mathématiciens eux-mêmes affirment que les pratiques mises en place dans leurs cours universitaires n'ont rien à voir avec la façon dont les mathématiques sont produites. Cette analyse renforce le fait que l'enseignement donné dans ces cours académiques prépare peu (voire nuit) au développement de pratiques mathématiques riches des enseignants en salle de classe[8].

Les divers aspects présentés ci-dessus (caractère formel et nature compacte des contenus, manières de faire) questionnent le bien fondé des mathématiques académiques pour la formation des enseignants du secondaire. De plus, les travaux de Cooney (voir, par exemple, 1999) montrent qu'en dépit d'études avancées et de réussites importantes en mathématiques académiques, de nombreux futurs enseignants ont d'importantes lacunes conceptuelles au niveau

---

[7] L'analyse de Luk (2005) fait aussi ressortir la présence de ruptures importantes entre les deux cultures mathématiques (scolaire et académique), ruptures difficilement conciliables au niveau des façons de faire et qui amènent les étudiants à vivre des difficultés importantes dans le passage de l'une à l'autre dans leur parcours académique.

[8] Une nuance toutefois s'impose, car il existe des exceptions et il serait faux de dire que « tous » les cours universitaires en mathématiques sont enseignés ainsi (par exemple, voir Jones, 1977, et Schoenfeld, 1985).

des mathématiques scolaires, les mêmes qu'ils vont enseigner. Ce type de résultat fort significatif permet aussi de diriger les regards vers les mathématiques scolaires elles-mêmes, en tant que connaissances mathématiques à considérer pour la formation des enseignants (Cooney, *ibid*. ; Cooney et Wiegel, 2003). Regardons ce que les travaux de recherche nous disent sur les enseignants et leurs connaissances des contenus mathématiques scolaires à enseigner.

## 2. Connaissances des enseignants à l'égard des mathématiques scolaires

> Often the more mathematics courses a teacher takes, the wider the gap between the mathematics the teacher studies and the mathematics the teacher teaches. The result of the mismatch is that teachers are often no better prepared in the content they will teach than when they were students taking that content. A beginning teacher may know little more about logarithms or factoring trinomials or congruent triangles or volumes of cones than is found in a good high school text (Usiskin, 2001, p.2)

Cette citation d'Usiskin, qui peut paraître évidente à prime abord, énonce bien le fossé qui se creuse, plus les futurs enseignants avancent dans leur formation mathématique universitaire, avec les mathématiques qu'ils auront à enseigner. Les futurs enseignants ont abordé pour la dernière fois les mathématiques scolaires[9] alors qu'ils étaient élèves au secondaire et adolescents – avec toute l'immaturité que ceci amène (Cooney, 1999).

Or, un bon nombre de recherches soulignent les difficultés que rencontrent les enseignants de mathématiques vis-à-vis les concepts qu'ils auront à enseigner. Par exemple, les études de Ball (1990) et Bryan (1999) montrent toute l'aisance des enseignants dans l'utilisation des procédures et algorithmes usuels en mathématiques, mais aussi leurs difficultés importantes à expliquer le sens derrière ces mêmes procédures (le pourquoi). Les études de Schmidt et Bednarz (1997) et de Van Dooren, Verschaffel et Onghena (2003) font état de l'aisance des enseignants du secondaire avec l'utilisation de l'algèbre pour résoudre les problèmes, mais de leurs difficultés à faire du sens et à apprécier l'utilisation de procédures arithmétiques comme solutions valides à ces mêmes problèmes, de sorte qu'ils pourront difficilement assumer cette transition entre arithmétique et algèbre dans leur enseignement futur. Dans un autre domaine, les études de Even (1993) et Hitt-Espinoza (1998) sur les fonctions montrent que les enseignants interrogés possèdent une « vieille » définition de fonction, restreinte à un tracé continu et fluide, qui les amène à ne pas reconnaître ou accepter des tracés différents pour représenter des fonctions en plus de les amener à transformer et traiter les fonctions discrètes comme des fonctions continues.

Ces difficultés importantes vécues par un nombre important d'enseignants de mathématiques face aux contenus qu'ils auront à enseigner, et l'absence d'un travail en profondeur sur ces concepts mathématiques durant leur parcours scolaire comme élève, vient renforcer le constat d'échec de la formation universitaire en mathématiques qui contribue elle-même à creuser ce fossé avec les mathématiques scolaires, sans arriver à les enrichir.

[9] Dans les cours de didactique des mathématiques, les futurs enseignants seront bien sûr amenés à revisiter la compréhension des concepts à travers une réflexion avant tout didactique (voir Bednarz, Gattuso et Mary, 1995), mais l'angle d'entrée n'est pas ici une exploration ou un approfondissement des mathématiques comme telles.

Les propos mis en évidence dans le texte (cf. deux dernières sections) soulignent des points importants que la recherche nous permet de comprendre, et qui questionnent fortement la pertinence des mathématiques académiques comme modèle de préparation des futurs enseignants dans la discipline qu'ils auront à enseigner. La nature des contenus véhiculés, leur forme, la manière de les approcher, s'avèrent déconnectés et même opposés à celles qu'exigent la pratique d'enseignement des mathématiques dans leurs classes. Ils appellent à un recadrage de la formation disciplinaire ou plus précisément de la nature des expériences mathématiques à privilégier durant cette formation.

## 3. Quelles expériences mathématiques pertinentes pour la formation ?

Les études présentées ci-dessus font ressortir l'importance de placer les enseignants dans des environnements à l'intérieur desquels ils pourront travailler des contenus, processus et approches qui soient pertinentes aux pratiques mathématiques qu'ils mettront en place dans leur enseignement. On ne parle donc pas ici de faire plus, moins ou un peu plus de mathématiques, ni d'avoir un juste équilibre entre formation mathématique, didactique et pratique, etc., mais de travailler à des mathématiques qui soient signifiantes vis-à-vis les exigences que requièrent les pratiques d'enseignement des mathématiques dans les classes du secondaire. Dans une telle perspective, nous voyons ici deux thèmes majeurs émerger des analyses précédentes quant aux expériences *mathématiques* à offrir aux enseignants : le travail sur les mathématiques scolaires et l'immersion à l'intérieur d'une culture mathématique.

### *3.1. Le travail sur les mathématiques scolaires*

Une piste intéressante à explorer consiste ici non pas à travailler les mathématiques académiques, mais plutôt les mathématiques scolaires, c'est-à-dire le contenu même que les enseignants auront à enseigner dans leurs pratiques quotidiennes (l'algèbre, les fractions, les nombres décimaux, la géométrie analytique, les fonctions, le volume des solides, etc.). Il s'agit ici d'offrir un contexte d'apprentissage mathématique riche à l'intérieur duquel les enseignants pourront élargir et approfondir leurs connaissances des mathématiques scolaires – des connaissances directement reliées à leurs pratiques professionnelles. Ceci dit, il importe toutefois de regarder de plus près ce qu'on entend par mathématiques scolaires.

Ce que nous entendons par « mathématiques scolaires » renvoie à beaucoup plus pour nous que les contenus prescrits par le curriculum. Notre caractérisation s'inspire des travaux de Moreira et David (2005) qui opèrent une distinction importante entre les mathématiques académiques et les mathématiques scolaires comme champs de connaissances. Le terme « mathématiques académiques » fait ainsi référence pour eux au « scientific body of knowledge produced by the community of professional mathematicians », alors que les « mathématiques scolaires » sont définies comme « the set of validated knowledge, specifically associated with the development of school education in mathematics […] includ[ing] knowledge produced by mathematics teachers in their school practices […] as well as knowledge produced by research on teaching and learning of mathematical concepts and processes at school » (pp. 1-2). Les mathématiques scolaires ne représentent donc pas uniquement les concepts présents dans les documents curriculaires qui établissent ce qui doit être enseigné, mais aussi les éléments et événements mathématiques qui entourent et émergent de l'apprentissage et de l'enseignement des mathématiques en classe, incluant les mathématiques produites par l'enseignant dans sa pratique même. Par exemple, lors de l'enseignement et de l'apprentissage de concepts spécifiques, plusieurs éléments mathématiques émergent : des raisonnements clés, des approches et façons spécifiques (souvent non-standard) de faire du sens des concepts, des stratégies et représentations diverses, des conceptions erronées, erreurs et difficultés mathématiques sont au cœur du travail, voire des éléments historiques de l'évolution d'un concept sont en jeu, etc. Ces éléments mathématiques représentent eux-mêmes un corps de connaissances qui semble pertinent pour la formation des enseignants de mathématiques.

Dans le but d'offrir une illustration de ce à quoi ce type de travail sur l'exploration des mathématiques scolaires peut ressembler, nous offrons ici deux exemples de situations.

À son retour de Chine, un de mes collègues m'a fait part d'une procédure particulière utilisée par une élève de 11 ans pour diviser les fractions suivantes:

$$\frac{26}{20} \div \frac{2}{5} = \frac{26 \div 2}{20 \div 5} = \frac{13}{4}$$

Est-ce que cette procédure est adéquate ?
Fonctionne-t-elle toujours ? Comment ?

(Tiré de Proulx, 2007)

Vous êtes enseignant de 7$^{ème}$ année. Vous proposez l'exercice suivant à vos élèves:

Écrire les nombres suivants en ordre croissant :
2,46 2,254 2,3 2,052 2,32
Plusieurs élèves donnent comme réponse :
2,052 2,3 2,32 2,46 2,254
D'autres écrivent :
2,052 2,254 2,32 2,46 2,3

Effectuez les tâches suivantes :
- Répondez d'abord vous-mêmes à la question ;
- Décrivez ensuite l'erreur ou les erreurs des élèves ;
- Composez un problème semblable où le raisonnement occasionnerait la même erreur ;
- Composez un problème semblable où le raisonnement produirait une bonne réponse ;
- Comment intervenir sur-le-champ?

(Tiré de Bednarz, Gattuso et Mary, 1995)

### *3.2. L'immersion dans une culture mathématique*

Nous avons vu précédemment que la manière dont le contenu mathématique est approché semble aussi très importante pour le développement de pratiques d'enseignement des mathématiques en classe par le futur enseignant. En ce sens, l'environnement d'apprentissage à l'intérieur duquel les futurs enseignants devraient être plongés doit se centrer non pas sur l'enseignement de concepts (au sens des cours académiques), mais sur la participation de ces futurs enseignants à une certaine pratique mathématique(en lien avec le travail sur ces concepts).

Cette orientation requière un changement de perspective significatif, comme l'explique Burton (2004), des mathématiques statiques aux mathématiques vivantes, ou pour reprendre les propos de Janvier d'une mathématique toute faite à « une mathématique qui se fait » (Bednarz, Golding & Lefevre, 1997, p. vi). Dans cette participation à une culture mathématique (qu'ils contribuent à développer), où les concepts et les idées sont explorées et approfondies, les enseignants sont vus comme des auteurs/producteurs de connaissances, de compréhensions, de raisonnements mathématiques. Ils sont encouragés à générer des idées, des questions, des problèmes, à rendre explicites et à partager leurs compréhensions, à négocier les sens construits, à développer des explications et des arguments à l'appui des solutions avancées, à partager et explorer des avenues différentes pour comprendre des problèmes, des concepts, des notations et symbolisations, à partager des représentations variées, des solutions et des stratégies, à valider les solutions et explications mises de l'avant etc. (Bartolini Bussi, 1998; Bednarz, 1998; Cobb & Yackel, 1998; Krummheuer, 1995; Voigt, 1985, 1994).

Cette immersion des enseignants dans une culture de production de mathématiques nous apparaît intéressante à considérer en lien avec leurs futures pratiques professionnelles. En effet d'une part, ce travail permet aux enseignants de se familiariser avec le processus même de construction de connaissances en mathématiques, de se sensibiliser de l'intérieur même d'une telle démarche à la manière dont les mathématiques s'établissent, se développent : comment le corps de connaissances en mathématiques, incluant les notations, le symbolisme, est devenu ce qu'il est, comment les connaissances sont produites, quels sont les processus centraux intervenant dans cette construction de connaissances en mathématiques (par exemple argumentation, validation, modélisation, symbolisation, etc.). Ceci peut apparaître central pour un enseignant de mathématiques pour comprendre toute la richesse de ce processus de construction de connaissances, ce qu'il recouvre, les difficultés qu'il suscite. D'autre part, cette participation à une culture de mathématisation permet aux enseignants de produire eux-mêmes des connaissances mathématiques, dans un contexte suffisamment près de leur situation professionnelle pour permettre d'y trouver un certain ancrage. Avoir la capacité de produire des mathématiques, d'en faire, représente une dimension importante d'un savoir professionnel, ce travail de production par les enseignants permettant d'approfondir les connaissances et processus mathématiques liés à leur enseignement.

Dans le but d'offrir une illustration de ce à quoi ce type de travail d'immersion dans une culture mathématique peut ressembler (en lien avec l'exploration des mathématiques scolaires), nous offrons ici un exemple de situation exploitée en formation des enseignants (tiré de Bednarz, 2001). Cette situation, avec d'autres, encourage les futurs enseignants à investiguer des patterns numériques et géométriques en contexte comme point de départ à un processus de généralisation et de construction de notations symboliques signifiantes.

- Mise en situation : Des patterns numériques ou géométriques sont présentés en contexte, avec le support d'une illustration, encourageant différentes visualisations. [Par exemple, la situation suivante a été exploitée : chez un restaurateur, on place côte à côte des tables simples pour pouvoir obtenir des tables de différentes grandeurs. On place celles-ci toujours de la même façon. Le dessin est fourni en appui] ;

- Formulation d'un message en mots par les étudiants [destiné à une autre personne, ici le propriétaire du restaurant] qui puisse être utilisé par celui-ci pour trouver rapidement le nombre [dans ce cas de personnes qu'on peut asseoir autour d'une table, et ce peu importe la grandeur de la table] ;

- Retour collectif sur les différents messages produits et validation de ces messages par les étudiants ;

- Exploitation de l'équivalence des différents messages en mots produits : sont-ils équivalents? comment peut-on justifier leur équivalence? Comment se distinguent-ils?

- Construction de messages symboliques [pour être plus efficace dans le traitement de ces derniers]

- Retour collectif et discussion des messages symboliques produits : signification de ces messages, différentes symbolisations utilisées, validation, équivalences, … ;

- Extension à la résolution de problèmes utilisant les messages construits et validés.

## Conclusion

Les travaux de recherche dans le domaine de la formation des enseignants et des connaissances mathématiques des enseignants nous ont amenés à questionner fortement le modèle usuel de formation mathématique des enseignants, encore aujourd'hui présent à travers le monde. En documentant le fossé entre les mathématiques académiques et les mathématiques scolaires, au sens où nous les avons précisées dans le texte sur un plan conceptuel, l'analyse met en évidence des composantes centrales de cette formation touchant à la forme et à la nature des contenus mathématiques abordés ainsi qu'aux manières d'approcher ces contenus. Ces éléments conduisent à repenser la façon dont nous orchestrons la formation disciplinaire des enseignants de mathématiques du secondaire. De telles orientations peuvent sembler a priori provocatrices ou contre-intuitives, puisqu'elles questionnent des structures de formation et des positions historiquement établies qui placent les mathématiques académiques au cœur de la formation mathématique des enseignants. Mais nous croyons ce questionnement essentiel pour avancer sur de nouvelles manières d'envisager celle-ci.

Les pistes que nous avons nous-mêmes avancées, parmi un ensemble d'autres possibles, restent à cette étape théoriques. Des recherches doivent ainsi selon nous être menées pour expliciter davantage ce que peuvent recouvrir de telles expériences de formation et l'impact que ce type de travail peut avoir pour les enseignants : Quelle signification les enseignants donnent-ils à ces expériences pour eux-mêmes, en lien avec leurs pratiques d'enseignement ? Quelles connaissances et pratiques mathématiques y développent-ils? Comment ces expériences de formation sont-elles réinvesties dans leurs pratiques d'enseignement ? Comment les réponses à ces questions informent-elles en retour les pratiques de formation mises en place ? C'est à ces questions que nous tenterons de répondre dans un projet de recherche, en cours, centré sur l'élaboration et l'analyse d'une expérience de formation des enseignants mettant de l'avant une exploration des mathématiques scolaires et l'immersion dans une culture mathématique.

**Références**


Adler, J., & Davis, Z. (2006). Opening another black box: Researching mathematics for teaching in mathematics teacher education. *Journal for Research in Mathematics Education*, *37*(4), 270-296.

Ball, D. L. (1990). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *21*(2), 132-144.

Ball, D. L., & Bass, H. (2003). Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. In E. Simmt & B. Davis (Eds.), *Proceedings of the 2002 annual meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group* (pp. 3-14). Edmonton, AB: CMESG.

Ball, D. L., Lubienski, S. T., & Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. In V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (4th ed.) (pp. 433-456). New York: Macmillan.

Bartolini Bussi, M. G. (1998). *Joint activity in mathematics classrooms: A Vygotskian analysis*. In F. Seeger, J. Voigt and U. Waschescio (Eds), *The Culture of the mathematics classroom* (pp. 13-49). Cambridge: Cambridge University Press.

Bauersfeld, H. (1994). Réflexions sur la formation des maîtres et sur l'enseignement des mathématiques au primaire. *Revue des Sciences de l'Éducation*, *20*(1), 175-198.

Bednarz, N. (1998). Evolution of classroom culture in mathematics, teacher education and reflection on action. In F. Seeger, J. Voigt and U. Waschescio (Eds), *The Culture of the mathematics classroom* (pp 50-75). Cambridge: Cambridge University Press.

Bednarz, N. (2001). Didactique des mathématiques et formation des enseignants : le cas de l'Université du Québec à Montréal. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, *1*(1), 61-80.

Bednarz, N., Gattuso, L., & Mary, C. (1995). Formation à l'intervention d'un futur enseignant en mathématiques au secondaire. *Bulletin de l'Association Mathématique du Québec*, *35*(1), 17-30.

Bednarz, N., Golding, G. A., & Lefevre, J. (1997). In Memoriam – Claude Janvier. *Journal of Mathematical Behavior*, *17*(2), v-vii.

Bednarz, N., Kieran, C., & Lee, L. (Eds.) (1996). *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching*. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Bednarz, N., & Perrin-Glorian, M.J. (2003). Formation à l'enseignement des mathématiques et développement de compétences professionnelles:

Articulation entre formation mathématique, didactique et pratique. *Actes du colloque EMF 2003*. Tunis: Éditions CNP.
Begle, E. G. (1979). *Critical variables in mathematics education: Finding from a survey of the empirical literature*. Washington, DC: MAA et NCTM.
Brousseau, G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux. *Recherches en didactique des mathématiques*, *2*(1), 37-127.
Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. La Pensée Sauvage: Grenoble.
Bryan, T. J. (1999). The conceptual knowledge of preservice secondary mathematics teachers: How well do they know the subject matter they will teach? *Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers: The Journal. Volume 1: Content Knowledge*. http://www.k-12prep.math.ttu.edu/journal/journal.shtml
Burton, L. (2004). *Mathematicians as enquirers*. Dordrecht: Kluwer.
Cobb, P. & Yackel, E. (1998). A constructivist perspective on the culture of the mathematics classroom. In F. Seeger, J. Voigt & U. Waschescio (Eds.), *The Culture of the Mathematics Classroom* (pp. 158-190). Cambridge: Cambridge University Press.
Cooney, T. J. (1999). Conceptualizing teachers' ways of knowing. *Educational Studies in Mathematics*, *38*(1-3), 163-187.
Cooney, T. J., & Wiegel, H. G. (2003). Examining the mathematics in mathematics teacher education. In A.J. Bishop et al (Eds.), *Second international handbook of mathematics education* (Vol. 2, pp. 795-828). Great Britain: Kluwer.
Corriveau, C., & Tanguay, D. (2007). Formalisme accru du secondaire au collégial : les cours d'Algèbre linéaire comme indicateurs. *Bulletin de l'Association Mathématique du Québec*, *48*(1), 6-25.
Even, R. (1993). Subject-matter knowledge and pedagogical content knowledge: Prospective secondary teachers and the function concept. *Journal for Research in Mathematics Education*, *24*(2), 94-116.
Even, R., & Ball, D. L. (Eds.) (2008) *The professional education and development of teachers of* mathematics (The 15 ICMI study). Springer.
Gattuso, L. (2000). Quel est le rôle du didacticien? In P. Blouin & L. Gattuso (Eds.), *Didactique des mathématiques et formation des enseignants* (pp. 14-18). Montreal, QC: Éditions Modulo.
Hitt-Espinosa, F. (1998). Systèmes sémiotiques de représentation liés au concept de fonction. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *6*(1), 7-26.
Jones, F. B. (1977). The Moore method. *American Mathematical Monthly*, *84*, 273-278.
Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. In P. Cobb and H. Bauersfeld (Eds), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 229-269). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
Luk, H. S. (2005). The gap between secondary school and university mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *36*(2-3), 161-174.
Monk, D. H. (1994). Subject area preparation of secondary mathematics and science teachers and student achievement. *Economics of Education Review*, *13*(2), 125-145.
Moreira, P. C., & David, M. M. (2005). Mathematics in teacher education versus mathematics in teaching practice: A revealing confrontation. *The 15th ICMI*

*Study – The professional education and development of teachers of mathematics*. Sao Paolo, Brazil. CD-ROM.
Moreira., P. C., & David., M. M. (2008). Academic mathematics and mathematical knowledge needed in school teaching practice: Some conflicting elements. *Journal for Mathematics Teacher Education*, *11*(1), 23-40.
Nathan, M. J., & Koedinger, K. R. (2000). Teachers' and researchers' beliefs about the development of algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(2), 168-190.
National Research Council [NRC]. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. J. Kilpatrick, J. Swafford, & B. Findell (Eds.). Washington, DC: National Academy Press.
Otte, M. (1976). A6 : The training and professional life of mathematics teachers. In H. Athen & H. Kunle (Eds.), *Proceedings of the Third International Congress on Mathematics Education* (pp. 194-201). Karlsruhe, Germany: ICME-3.
Proulx, J. (2007). La division de fractions vue sous l'angle des multiplications : Quelques réflexions sur le sens derrière ces procédures. *Envol : Revue du groupe des responsables en mathématiques du Québec, 138*, 9-11.
Schmidt, S., & Bednarz, N. (1997). Raisonnements arithmétiques et algébriques dans un contexte de résolution de problèmes: Difficultés rencontrées par les futurs enseignants. *Educational Studies in Mathematics*, *32*(2), 127-155.
Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving.* New York: Academic Press.
Smida, H., Rouan, O., Ould Sidaty, M.A., Abdelli, M. (2007). Les dispositifs de formation des enseignants en mathématiques des pays du Maghreb face aux défis de l'école. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, *7*(2-3), 209-229.
Thompson, A. G., & Thompson, P. W. (1996). Talking about rates conceptually, Part 2: Mathematical knowledge for teaching. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(1), 2-24.
Thompson, P. W., & Thompson A. G. (1994). Talking about rates conceptually, Part 1: A teacher's struggle. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(3), 279-303.
Usiskin, Z. (2001). *Teachers' mathematics: A collection of content deserving to be a field*. Présentation au National Summit on the Mathematical Education of Teachers.
http://www.cbmsweb.org/NationalSummit/WG_Speakers/usiskin.pdf
Van Dooren, W., Verschaffel, L., & Onghena, P. (2003). Pre-service teachers' preferred strategies for solving arithmetic and algebra word problems. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *6*(1), 27-52.
Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. In J. Hiebert and B. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades*. Reston, VA: NCTM.
Voigt, J. (1985). Patterns and routines in classrooms interaction. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, *6*(1), 69-118.
Voigt, J. (1994). Negotiation of mathematical meaning and learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *26*(2-3), 275-298.