LA TOUR DE HANOÏ

RITTAUD* Benoit et Groupe AlPaGe

Résumé – Nous explorons comment le jeu classique de la tour de Hanoï peut être utilisé dans un contexte de vulgarisation des mathématiques ou d'une séance de réflexion sur des mathématiques qui sortent du cadre de l'enseignement ordinaire.

Mots-clefs : tour de Hanoï, récursivité, algorithme optimal, notation.

Abstract – We investigate how the classical game of the Tower of Hanoi can be used in a context of popularization of mathematics or during a brainstorming about mathematics out of the classical framework of teaching.

Keywords: Tower of Hanoi, recursivity, optimal algorithm, notation.

Le jeu de la tour de Hanoï se joue sur trois piquets verticaux fixes A, B et C sur lesquels peuvent glisser n disques dont les diamètres vont de 1 à n. Dans la situation initiale du jeu, les disques sont disposés sur le piquet A, dans l'ordre des diamètres décroissants, pour constituer une « tour ». Le but du jeu consiste à déplacer les disques pour reconstituer cette tour sur un autre piquet : soit impérativement le piquet C (ce qui constituera notre « variante C »), soit indifféremment sur l'un des deux piquets B ou C (ce qui sera notre « variante BC »). Les deux variantes se jouent avec les règles suivantes :

- On ne déplace qu'un seul disque à la fois.
- Il est interdit de déposer un disque sur un disque de diamètre inférieur.

Il est en général implicitement admis que l'on recherche une solution optimale au jeu, c'est-à-dire qui utilise le moins de déplacements possibles.

I. ASPECT THEORIQUE

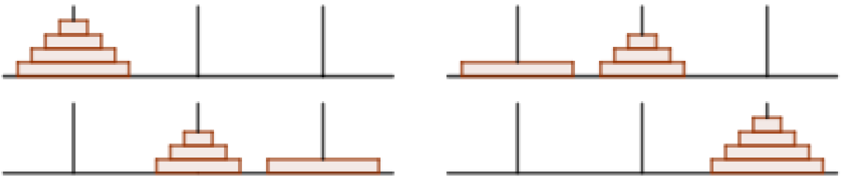
On appelle *solution* toute séquence de déplacements conduisant à une solution au jeu. Les disques étant désignés de 1 à n selon leur diamètre, une remarque fondamentale est que le déplacement du disque n ne peut se faire qu'à un moment où les n–1 autres disques se trouvent rassemblés sur un seul et même autre piquet. Une seconde remarque est qu'atteindre une telle configuration revient très exactement à résoudre le jeu avec n–1 disques.[1]

Notons s_n le nombre minimal d'étapes nécessaires à la résolution du jeu avec n disques. Il vient aisément la relation $s_n = s_{n-1}+1+s_{n-1}$: le premier s_{n-1} pour le déplacement des disques de 1 à n–1 sur un même piquet (distinct de celui de n), le 1 pour le déplacement du disque n sur son piquet final, et enfin le second s_{n-1} pour la nouvelle résolution du jeu à n–1 disques, cette fois destinée à remettre les disques de 1 à n–1 sur le disque n.

* alpage@unige.ch

Benoît Rittaud ‐ Université Paris-13, Sorbonne Paris Cité, LAGA, CNRS, UMR 7539 ‐ France

[1] Ainsi formulée, cette seconde remarque est légèrement abusive : plus précisément, il s'agit en fait de résoudre le jeu à n–1 disques dans sa « variante B » dans laquelle la tour est amenée du piquet A au piquet B. En pratique, cet abus n'est jamais source de confusion, et nous n'en tiendrons pas compte dans la suite.



Pour une tour à un seul disque, il va de soi qu'un seul déplacement suffit. La suite $(s_n)_n$ est donc entièrement définie par les relations $s_1 = 1$ et $s_{n+1} = 2s_n+1$ pour $n \geq 1$. Il s'agit d'une suite arithmético-géométrique, dont on sait donc obtenir une forme explicite qui, après calculs, se trouve être $s_n = 2n - 1$.

Le calcul de cette forme explicite de s_n passe par l'introduction de la suite $(e_n)_n$ définie par $e_n = s_n+1$. Davantage qu'un simple intermédiaire de calcul, cette seconde suite dispose aussi d'une interprétation naturelle : e_n est le nombre d'*états* successifs rencontrés au fil de la résolution. On a $e_n = 2^n$ pour tout n. L'étude plus approfondie du jeu réserve une large place à la suite des états. Le fait que leur nombre soit une puissance de deux laisse entrevoir que le jeu entretient des liens avec la numération binaire — il en a aussi avec la variante que constitue le codage de Gray, ce qui peut conduire à rechercher d'autres variantes susceptibles d'étendre ce lien à d'autres systèmes de numération, comme il est étudié par exemple dans (Rittaud, 2017).

Le raisonnement précédent, complété d'une simple récurrence, indique aussi qu'il n'existe qu'une seule solution optimale au jeu (ou deux, symétriques l'une de l'autre, dans la variante BC).

Outre ce type de considérations théoriques, ce qui suit s'est nourri d'observations faites sur différents publics à qui le jeu a été proposé. Les cadres de ces observations ont été de plusieurs types : des ateliers librement ouverts au public dans le cadre de manifestations scientifiques en plein air (notamment la Nuit de la Science de Genève en 2016), un cours d'option mathématique donné à de futurs professeurs des écoles (master « métiers de l'enseignement de l'éducation et de la formation », Université Paris-Est), et des ateliers MATh.en.JEANS où des élèves du secondaires étudient, par petits groupes au fil de l'année scolaire et sous la supervision de leur enseignant, un problème posé par un chercheur sous la forme de questions ouvertes (offrant aux élèves la possibilité de choisir leur angle d'étude et leurs perspectives de recherches).

Nous désignerons sous le terme de « participant », de façon indifférenciée, tous ceux, étudiants, élèves ou simples curieux, que nous avons pu faire travailler sur la tour de Hanoï dans l'un ou l'autre de ces cadres.

II. INTERETS SPECIFIQUES

La tour de Hanoï constitue un cas assez rare de jeu que l'on peut aborder à tous les niveaux, du plus élémentaire au plus élaboré. Les écoliers, ou les personnes éloignées des mathématiques et peu volontaires pour se lancer dans une étude fine, peuvent se satisfaire de résoudre le jeu avec 3 ou 4 disques, tandis que les étudiants plus avancés peuvent explorer des questions sur la structure fractale du jeu, ses liens avec les systèmes de numération, voire l'une ou l'autre des nombreuses questions ouvertes qui se posent (variantes à 4 piquets ou plus, modifications des règles…) et qui sont aujourd'hui encore l'objet de recherches (voir (Hinz, Klavžar, Milutinović, & Petr, 2013) pour un état de l'art). Entre ces deux extrêmes, une multitude de questions intermédiaires offrent à chacun l'occasion d'apprécier à sa manière les ressorts du jeu : aspects algorithmiques, codes de Gray, structures de données, etc. Le problème étant relativement isolé sur la scène mathématique, il offre de réelles possibilités résiduelles de découvertes originales, même par des amateurs. Pour une fois, donc, il n'est pas hypocrite de dire au novice que s'il cherche, alors peut-être fera-t-il une découverte vraiment nouvelle. En l'occurrence, le cas s'est effectivement produit lors d'un atelier MATh.en.JEANS en 2017, où l'un des élèves a proposé un embryon d'étude d'une variante jusque-là inédite à ce qu'il semble. (Dans celle-ci, ce sont les trajectoires des disques qui doivent impérativement suivre le schéma unique : A – C – B – C – A.)

Malgré sa célébrité dans les milieux spécialisés (en informatique davantage qu'en mathématiques, d'ailleurs), la tour de Hanoï reste un jeu qui n'est pas trop connu hormis de quelques cercles spécialisés. Bien que, cela va de soi, les différents participants à un atelier n'avancent pas tous à la même allure, du moins est-il assez rare de devoir faire face à un public dont les membres ne partent pas du même point quant à la connaissance du jeu lui-même.

D'un point de vue théorique, la tour de Hanoï est un cas d'école pour illustrer la puissance de la notion d'algorithme récursif. L'efficacité de ce type d'algorithme pour le jeu qui nous occupe est impressionnante (à peine quelques lignes de code), et donne un exemple bien plus spectaculaire que celui, classique et fort peu ludique, du calcul de factorielle n. C'est d'autant plus vrai que, contrairement à ce dernier problème, un algorithme itératif de résolution de la tour de Hanoï est en général beaucoup moins facilement trouvé — alors même qu'il en existe un extraordinairement simple, comme nous le verrons en section VIII.

III. CERNER LES POSSIBLES

Sans surprise, le moyen le plus courant de faire étudier la tour de Hanoï consiste à distribuer un ou plusieurs exemplaires matériels sur lesquels les participants mènent leurs essais. Souvent, un temps est nécessaire au participant pour s'approprier les règles pour de bon. Malgré leur simplicité, énoncer celles-ci de façon purement théorique se révèle parfois insuffisant, et peut avoir pour effet que le participant

- soit néglige l'une ou l'autre des deux règles, et donc s'autorise à disposer un disque sur un disque plus petit et/ou à se saisir de plusieurs disques simultanément (voire tous les disques, non sans tout de même une hésitation devant ce qui apparaît comme une résolution un peu trop facile) ;
- soit, au contraire, ne s'autorise pas à utiliser tout ce que les règles lui permettent : hésitation sur l'équivalence des piquets, sur la légitimité de poser un disque sur un piquet vide (une éventualité favorisée si la règle est énoncée sous la forme incorrecte : « un disque doit être posé sur un disque plus grand »), ou encore la possibilité, non manifeste dans l'état initial du jeu tel qu'il apparaît au participant, que le disque k soit posé sur un autre disque que k–1.

Une façon d'éviter ces problèmes consiste à donner les règles tout en présentant un exemple explicite de leur usage, sous une forme qui peut ressembler à celle-ci :

> « On déplace un seul disque à la fois d'un piquet à l'autre [saisie puis déplacement du disque 1 du piquet A au piquet B, sans lâcher], sur n'importe quel piquet [déplacement du disque 1 déjà saisi, du piquet B au piquet C (cette fois en lâchant, après éventuellement un ou deux allers-retours), puis déplacement du disque 2 sur le piquet B]. Les déplacements sont libres [déplacement du disque 1 du piquet C au piquet

A], mais il est interdit de placer un disque sur un disque plus petit. Ce déplacement, par exemple, est interdit [déplacement du disque 2 sur le piquet A sans le lâcher, puis replacement de ce disque sur le piquet B.]. Le but du jeu consiste à faire en sorte de reconstituer la tour initiale sur le piquet C [ou « au choix sur le piquet B ou le piquet C », selon la variante]. »

IV. LA CONTRAINTE D'OPTIMALITE

Il semble préférable, au moins dans un premier temps, de ne pas demander d'emblée au participant de trouver une solution optimale, pour plusieurs raisons :

1) Une telle contrainte est susceptible de créer des inhibitions. Parce qu'il autorise les retours en arrière, le caractère réversible de chaque mouvement (tout disque légitimement déplacé du piquet X au piquet Y peut être tout aussi légitimement déplacé du piquet Y au piquet X, annulant le premier déplacement) facilite une appropriation du jeu plus sereine, dans la mesure où il n'y a pas à « tricher » pour revenir en arrière. Compter un aller-retour comme 0 mouvement au lieu de 2, bien que raisonnable s'agissant d'un décompte en vue d'une solution optimale, ressemble en revanche davantage à un abus. Cet aspect « légal » doit sans doute être considéré comme un élément important de démarcation pour distinguer entre l'approche ludique et l'approche mathématique. Si l'esprit qui domine est celui du jeu, alors un aller-retour doit compter pour 2 mouvements, car « il faut payer ses erreurs ». Si en revanche la tour de Hanoï est perçue comme un objet mathématique à étudier, alors un aller-retour compte bien entendu pour 0.

2) Même si la notion de solution optimale est, dans le cadre de la tour de Hanoï, assez simple à saisir (c'est la simple minimisation d'un entier naturel), la nécessité de démontrer qu'on l'a bien trouvée est, elle, beaucoup moins évidente. Pourquoi faudrait-il démontrer qu'on ne peut pas faire mieux qu'en 7 coups pour $n = 3$, alors que « j'ai fait de mon mieux » et que « je vois bien » que ce n'est pas possible en seulement 6 coups ? Présenté trop tôt, ce type de considérations peut apparaître comme inutile pour les petites valeurs de n (et trop difficile pour les plus grandes). Il présente donc le risque d'éloigner le participant du plaisir du jeu, et par conséquent d'entamer sa motivation autant que la confiance qu'il peut avoir en lui-même quant à ses capacités de compréhension.

3) Il n'est pas anormal, du point de vue logique, de s'intéresser d'abord à la question, non triviale, de l'existence d'une solution au jeu à n disques pour tout n avant de s'attaquer à celle d'une solution optimale. Or le caractère optimal de la solution déduite des considérations théoriques de la section 1 découle assez facilement de sa structure « $s_n = s_{n-1}+1+s_{n-1}$ », l'essentiel tenant au caractère crucial de la situation pivot dans laquelle le disque n est seul sur le piquet A tandis que les n–1 autres sont rassemblés sur l'un des deux autres.

V. LE PIQUET FINAL

Malgré les apparences, d'un point de vue théorique la variante C n'est pas significativement plus exigeante que la variante BC. Dans les deux cas en effet, la résolution récursive par « $s_n = s_{n-1}+1+s_{n-1}$ » impose de toute façon de savoir déplacer une tour (de taille n–1) d'un piquet à un autre imposé (de A à B pour le premier s_{n-1}, de B à C pour le second). La « liberté » offerte dans la version BC a donc quelque chose de fictif. En pratique, il est pourtant un moment où elle s'exerce de façon cruciale : lors du déplacement du tout premier disque. Dans la version BC, le choix de poser le disque 1 sur B ou sur C est indifférent. Dans la version C en revanche, un raisonnement par récurrence montre que le bon choix pour le premier mouvement du disque 1 consiste à le déplacer sur B si n est pair, sur C si n est impair.

Du point de vue de la progression du participant dans la compréhension du jeu, les différences sont importantes entre les deux variantes, sans qu'un meilleur choix apparaisse clairement entre les deux, du moins dans le cadre mi-ludique mi-pédagogique qui a été le nôtre.

Du côté des inconvénients de la version C, il y a bien sûr que l'anticipation du rôle joué par la parité de n est difficile à attendre d'un participant ordinaire (même s'il se trouve quelques plaisantes exceptions). En pratique, le déplacement du premier disque est souvent effectué un peu au hasard. Le participant a donc une chance sur deux d'empiler la tour sur le mauvais piquet. En cas de malchance, une fois les n disques sur le piquet B, les participants ne prennent pas toujours conscience que, d'une certaine manière, ils ont tout de même résolu le jeu, même s'il leur était demandé de mettre la tour en C. Comprendre qu'ils pourraient recommencer la partie et empiler à coup sûr la tour sur le piquet C en utilisant une simple « symétrisation » des mouvements qui ont amené la tour sur B (et, par un effort de réflexion supplémentaire, comprendre finalement que le mouvement du premier disque est la véritable question cruciale) dépasse fréquemment les capacités d'abstraction de bien des participants, au moins à ce moment-là de leur recherche qui demeure souvent encore très empirique : le défi de résoudre le jeu à 4 ou 5 disques se relève « à la main », sans que l'idée ou le besoin apparaisse d'une perspective générale. C'est ainsi que bien des participants, une fois la tour amenée en B, ne marquent pas de trouble, probablement habités qu'ils sont par le sentiment d'être sur le chemin de la résolution. (N'ont-ils pas rapproché la tour du bon piquet ?) D'autres tout de même, plus avancés, s'esclaffent en réalisant qu'ils ont tourné en rond.

Quant aux « chanceux » envers qui le hasard se montre bienveillant au moment du déplacement du premier disque[2], leurs efforts victorieux ne les empêchent certes pas toujours de subodorer que leur succès est peut-être partiellement l'effet du hasard, en revanche il leur est difficile de concevoir à quel moment celui-ci s'est manifesté de la façon la plus décisive. Au sens premier, donc, *ils ne connaissent pas leur chance*, même s'ils se doutent souvent qu'ils en ont eu.

Ces inconvénients de la version C peuvent justifier qu'on lui préfère la version BC, au moins pour un temps d'exploration du jeu. Mais c'est aussi là reculer pour mieux sauter, car lorsqu'il s'agit d'approfondir pour traiter le jeu pour d'autres valeurs de n, l'algorithme récursif est plus rétif à se mettre en place : l'un et l'autre des s_{n-1} de la solution « $s_n = s_{n-1}+1+s_{n-1}$ » requièrent de savoir déplacer une tour à n–1 disques sur un piquet prédéterminé, et non sur un piquet quelconque.

VI. L'EXPLORATION DU JEU ET LE DECOMPTE

Une façon d'amener le participant à approfondir sa compréhension du jeu consiste à lui faire compter le nombre de coups qui lui ont été nécessaires pour le résoudre. En pratique, cela impose de recommencer le jeu, un inconvénient auquel il semble difficile de remédier : demander un décompte dès la première tentative complique les efforts du participant et

[2] un hasard bienveillant auquel peut se substituer l'animateur qui, percevant l'hésitation initiale d'un joueur, peut déclarer : « pour le premier déplacement, et pour celui-là seulement, je vais vous aider : placez le disque sur ce piquet. »

brouille la vocation exploratoire des essais initiaux en introduisant trop vite, fût-ce de manière implicite, la contrainte de rechercher une solution optimale.

En revanche, une fois que le participant s'est raisonnablement bien approprié le jeu pour quelques valeurs de *n*, le décompte prend tout son sens, et la recherche d'une solution optimale devient un nouveau défi qui évite, au moins pour un temps, de devoir considérer des valeurs de *n* trop grandes, c'est-à-dire pour lesquelles il est difficile de ne pas perdre le fil de la résolution et donc d'induire un découragement ou, à tout le moins, le sentiment d'une perte de temps.[3]

À tout point de vue, le jeu à 2 disques est unanimement perçu comme trivial, que ce soit dans la recherche d'une solution, dans le décompte des coups nécessaires ou dans le caractère optimal de la solution à 3 coups. Avec un seul disque il en va de même, bien que certains participants en viennent parfois à redouter un piège devant une situation visiblement si simple qu'elle en devient suspecte. Quant au cas de la tour de Hanoï sans disque ($n = 0$), il est intéressant pour illustrer la cohérence de la convention $2^0 = 1$, mais le caractère très particulier de ce cas est parfois un peu déroutant, et n'est en général d'aucune aide réelle, et peut même mettre le participant un peu mal à l'aise.

Que l'animateur affirme la nécessité de produire une démonstration de l'affirmation « pour 2 (resp. 3) disques, le nombre minimal de coups est de 3 (resp. 7) » est facilement perçu par le participant comme une sorte de provocation, car pour ces deux valeurs de *n* il reste facile de saisir mentalement le déroulement de la solution optimale dans sa totalité, et « on voit bien » qu'il n'y a pas moyen de le raccourcir. Il faut parfois un certain temps avant qu'une structure soit dégagée de la suite 1, 3, 7, 15, 31. Le plus souvent, c'est la structure récurrente qui apparaît (« pour chaque nouveau nombre on multiplie par 2 et on ajoute 1 »). Le besoin de démonstration, lui, ne se manifeste guère, non plus que la recherche d'une formule explicite. Il semble étonnamment difficile de faire le lien avec la suite des puissances de 2, même lorsqu'un travail préparatoire sur cette suite et ses premiers termes a été mené (cas des étudiants de master MEEF). C'est d'autant plus curieux que la suite 1, 2, 4, 8, 16, 32… jouit d'une certaine notoriété, même si elle ne figure pas *stricto sensu* dans les programmes d'enseignement (en tout cas pas davantage que comme exemple, non exigible des élèves).

VII. LA QUESTION DE LA NOTATION

Lorsque la découverte du jeu s'accompagne d'un travail théorique (cas des étudiants du master MEEF), l'étude « *in situ* », c'est-à-dire sur un exemplaire matériel du jeu, montre vite ses limites, notamment parce qu'elle n'offre pas la possibilité de garder la trace des mouvements effectués. Rapidement, donc, les participants (qui sont alors de moins en moins « joueurs » et de plus en plus « chercheurs ») sont amenés à figer sur le papier l'évolution des positions des disques.

Une telle situation évoque, dans un tout autre contexte, la querelle médiévale des abacistes et des algoristes, les premiers ayant défendu l'usage de l'abaque pour faire des calculs tandis que les seconds promouvaient l'emploi des algorithmes écrits (que nous utilisons toujours) pour effectuer l'une ou l'autre des opérations arithmétiques courantes. À cette aune il pourrait

[3] Il arrive toutefois que ce soit l'inverse qui se produise : un jeune enfant, qui s'était fait une perception correcte de l'algorithme optimal de résolution dans le cas général, s'est ainsi mis en devoir de résoudre le jeu pour des valeurs de *n* de plus en plus grandes, non sans fierté à chaque nouveau succès.

être intéressant d'observer plus finement le comportement de participants qui, précisément au moment où ils se font plus authentiquement chercheurs, renoncent à la matérialité physique pour entrer dans un système symbolique. Sous la pression induite par les nécessités antagonistes de précision et de rapidité, on peut penser que certains tâcheront d'améliorer leurs notations, sans nécessairement d'ailleurs avoir clairement conscience de le faire, tant un tel travail est susceptible de s'effectuer de façon incidente, en parallèle aux recherches.

Du point de vue pédagogique, outre la possibilité offerte de relier cette problématique des notations à la querelle médiévale susmentionnée, nous avons là l'occasion d'une réflexion intéressante sur la question, rarement abordée dans l'enseignement, du choix d'une notation adaptée à un contexte. Lorsque les participants franchissent le pas qui consiste à *écrire* des états du jeu qui les intéressent, ils ont souvent tendance à employer des représentations qui donnent à voir un luxe de détails tout à fait inutiles pour l'étude mathématique du jeu. Rares sont ceux qui se donnent la peine de quelques instants de réflexion pour se doter d'une représentation efficace qui fasse ressortir, sous une forme aussi ramassée que possible, les seuls éléments véritablement pertinents pour l'analyse. Nombreux sont les participants qui, ne se posant pas la question de distinguer l'essentiel de l'accessoire, s'obstinent à dessiner (parfois à la règle !) les piquets et leur support. Les disques, eux, sont souvent représentés par des segments de longueurs variables, ou bien des rectangles plus ou moins oblongs, sans que leurs tailles relatives soient toujours clairement apparentes — si bien que, lorsque des dessins de ce type sont faits à main levée pour représenter une situation à 5 ou 6 disques, les confusions entre disques de tailles voisines deviennent vite monnaie courante.

En sus de cette problématique de la notation, nous avons ici affaire à un cas particulier intéressant du contexte d'un travail au brouillon. Dans un texte finalisé tel que le présent article, la représentation d'un état du jeu se fait le plus souvent soit à l'aide de dessins explicites (ainsi ceux de l'aperçu théorique) pour rendre la lecture plus fluide, soit avec une notation abstraite qui évite l'encombrement des pages tout en demeurant claire pour le lecteur un peu aguerri.[4]

Le travail de recherche au brouillon, lui, relève d'impératifs différents : il doit pouvoir tirer profit d'une notation à la fois visuelle (pour appuyer la réflexion) et rapide (pour ne pas freiner l'élan de la recherche). Les dessins explicites aussi bien que les notations compactes ne répondent chacun qu'à une moitié de ce cahier des charges. Une autre notation est donc nécessaire, qui n'a pas vocation à être utilisée autrement qu'avec un stylo. Une possibilité raisonnablement fonctionnelle est la suivante. On assimile chaque disque à son rayon, c'est-à-dire à un entier entre 1 et n. Chaque état du jeu se représente alors comme trois colonnes de nombres, chaque colonne contenant les nombres associés aux disques qui se trouvent sur le piquet qui correspond à cette colonne. Pour matérialiser le fait qu'un piquet est vide, sa colonne est représentée par le signe \ . Pour rendre l'écriture plus compacte, on écrit au besoin Δ_k pour indiquer la superposition des disques de 1 à k. Enfin, des flèches permettent de figurer le passage d'un état à un autre : disons, si le besoin s'en fait sentir, une flèche simple pour un déplacement unique et une flèche double pour signaler des mouvements multiples (dont le

[4] Pour fixer une notation systématique, l'essentiel est de remarquer qu'un état de la tour de Hanoï à n disques est entièrement caractérisé par une partition ordonnée et à trois éléments de l'ensemble $\{1,\ldots, n\}$. Cette remarque illustre combien la simple question du choix d'une notation est susceptible de conduire à une réflexion sur la structure mathématique fondamentale du jeu. Un exercice complémentaire consiste à définir mathématiquement les déplacements de disques, ainsi que les règles, en envisageant effectivement un état de la tour de Hanoï comme une partition ordonnée à trois éléments de $\{1, \ldots, n\}$.

nombre exact peut figurer au-dessus de la flèche). L'état initial du jeu s'écrit ainsi $\Delta_n \backslash \backslash$, et les figures données dans l'aperçu théorique en début d'article deviennent :

$$\begin{array}{ccccccc} \Delta_4 & \backslash & \backslash & \qquad & \Delta_3 & 4 & \backslash \\ \\ \backslash & 4 & \Delta_3 & \qquad & \backslash & \backslash & \Delta_4 \end{array}$$

Pour donner une situation moins particulière que les précédentes, l'état du jeu pour $n = 5$ dans lequel les disques 1 et 3 se trouvent sur le piquet A, les disques 2 et 4 sur le piquet B et le disque 5 sur le piquet C se représente par :

$$\begin{array}{c} 1 \\ 3 \end{array} \quad \begin{array}{c} 2 \\ 4 \end{array} \quad 5$$

Pour une étude plus approfondie de certaines questions liées au jeu, on sera éventuellement amenés à introduire des notations complémentaires (par exemple Δ_i^j pour la superposition de tous les disques de rayon compris entre i et j).

VIII. ITÉRER POUR RÉGNER : RICHESSE VS. SIMPLICITE

Une fois la structure du jeu correctement comprise, le participant perçoit sans peine que, lorsque n devient grand, la gestion pratique de l'algorithme récursif est problématique. On peut aisément relier ce problème très concret de mémorisation à celui des algorithmes récursifs en général, dont une caractéristique fondamentale est d'être aussi économes en lignes de codes que gourmands en mémoire. Cela amène de manière très concrète à percevoir l'utilité d'un algorithme itératif. Dans le cadre d'un atelier récréatif, l'expérience montre qu'il est difficile de se lancer dans une étude complète de la question, qui implique des considérations assez théoriques. Quant à la situation d'enseignement pour des futurs enseignants, le thème dans lequel la séance s'inscrivait (différentes manières d'écrire les nombres, les systèmes de numération) a orienté cette recherche d'algorithme itératif vers la voie des codages des états en numération binaire. (Il se trouve, mais nous n'allons pas le détailler ici, que le disque à déplacer pour aller de l'état k à l'état k+1 dans la solution optimale se détermine en comparant l'écriture binaire de k à celle de k+1.) Cela laisse en pratique peu de temps pour la recherche d'un algorithme itératif facile à manier en pratique.

Dans ces conditions, la durée de la séance étant de toute façon limitée quelle que soit son cadre, il s'est en pratique toujours avéré impossible de disposer d'assez de temps pour permettre aux participants de réfléchir de façon un tant soit peu approfondie à un algorithme itératif. Or il se trouve qu'il en existe au moins deux, pour ainsi dire jamais trouvés. L'un se fonde sur la remarque que le disque 1 bouge exactement une fois sur deux et toujours dans le même sens (de A à B puis de B à C puis de C à A etc., ou l'inverse, selon la parité de n et le piquet final), les autres mouvements étant ainsi entièrement déterminés (lorsque le disque 1 ne doit pas bouger, un seul mouvement est possible). L'autre algorithme, tout aussi simple, opère un renversement spectaculaire. La présentation de cet algorithme ne prend que peu de temps et peut servir de conclusion à l'atelier, une conclusion en forme de friandise offerte aux participants pour leurs efforts. (On peut aussi, pourquoi pas, espérer que, piqué au vif d'être passé tout au long de la séance à côté d'une solution étonnamment simple, l'un ou l'autre des participants se posera de lui-même la question par la suite.)

Pour expliquer cet algorithme, considérons un état quelconque du jeu. Chaque piquet définit un mouvement et un seul dont le piquet n’est ni le départ ni l’arrivée, ce qui permet de désigner ce mouvement par le nom du piquet.[5] On peut alors démontrer par récurrence que la suite des mouvements ainsi codés par les piquets est périodique, et que la période est CBA pour *n* pair et BCA pour *n* impair.

C’est ainsi que, vu sous l’angle des piquets plutôt que des disques, le jeu de la tour de Hanoï se réduit de façon spectaculaire à un jeu *périodique*, donc *trivial*. Cette trivialité semble entrer en conflit avec la difficulté des travaux antérieurs des participants sur d’autres aspects du jeu (liens avec la numération binaire, avec les fractales…). Cette opposition, qui n’est bien sûr qu’apparente, peut être l’occasion d’une réflexion sur le fait que l’existence d’une solution simple à un problème n’interdit pas à ce problème d’être d’une grande richesse.

IX. CONCLUSION

La tour de Hanoï offre matière à explorations diverses, que ce soit à un niveau élémentaire ou avancé. Son utilisation pédagogique peut être souple, en laissant à chaque participant une grande latitude pour se poser ses propres questions, adaptées à son niveau et ses centres d’intérêt spontanés. Les recherches théoriques qui restent à mener sur le jeu (systèmes de numération, mais aussi systèmes dynamiques, liens entre le triangle de Sierpiński et l’ensemble de Cantor, etc.) autant que les possibilités de variantes ludiques et pédagogiques en font un outil de choix pour rendre vivant l’apprentissage des mathématiques.

RÉFÉRENCES

Hinz, A. M., Klavžar, S., Milutinović, U., & Petr, C. (2013). *The Tower of Hanoi - Myths and Maths.* Basel: Birkhäuser.

Rittaud, B. (2017). A Numeration System and a Gray Code Given by a Variant of the Tower of Hanoi. *Numeration,* pp. 61-66.

[5] Pour faire comprendre ce point, considérons le piquet C. Il y a deux mouvements envisageables qui n’impliquent C ni au départ ni à l’arrivée : celui où le disque *d* en haut de A est déplacé sur B, et celui où le disque *d’* en haut de B est placé sur A. Or, de *d* et *d’* il en est un plus petit que l’autre, ce qui ne rend licite que l’un de ces deux mouvements.