
**COMPRENDRE LES DIFFICULTES DES ELEVES A PASSER
DE LA « GEOMETRIE DE L'ECOLE PRIMAIRE »
A LA « GEOMETRIE DU COLLEGE »**

Marie-Hélène Salin
DAEST (Université Victor Segalen Bordeaux 2)

L'articulation entre la maîtrise de l'espace sensible, objectif de l'école élémentaire et l'entrée dans la démarche de maîtrise de l'espace géométrique, objectif du collège, constitue depuis toujours l'un des points d'achoppement de l'enseignement de la géométrie dans la scolarité obligatoire.

Une analyse approfondie des enjeux et des modalités de cet enseignement, dans le cadre de la théorie des situations, permet de mieux comprendre la persistance des difficultés et de proposer de nouvelles approches, encore à confirmer, qui se situent en rupture avec la conception actuelle des programmes qui présentent comme naturel le passage entre la « géométrie du constat » et la géométrie déductive.

I. Différents types d'objectifs et différents types de problèmes pour l'enseignement de la géométrie dans l'enseignement obligatoire français (annexe 1)

En primaire, les concepts géométriques sont (ou devraient être) présentés comme des outils pour contrôler des situations spatiales (décrire, construire, représenter), dans ce que nous avons proposé d'appeler une « problématique de modélisation » (Berthelot-Salin 1992).

Nous avons introduit le terme : « spatio-géométrie » pour désigner les connaissances issues du savoir géométrique et mises en jeu dans la résolution de certains problèmes de l'espace. L'introduction de ces connaissances se fait dès l'école primaire, en particulier celles concernant les formes des objets et leurs propriétés. C'est souvent cela qu'on appelle la « géométrie du constat »

Cet apprentissage se réalise dans la durée, les compétences développées par les élèves ont un très large domaine de pertinence, y compris dans l'enseignement ultérieur de la géométrie.

Au collège, cet objectif est poursuivi mais de plus la géométrie « mathématique » doit être introduite en plusieurs étapes :

- en 6^{ème} (11-12 ans) : « les travaux géométriques permettront aussi **la mise en place de courtes séquences déductives** »

- c'est en 5^{ème} qu'apparaît comme objectif : « **l'apprentissage progressif de la démonstration** », c'est-à-dire l'entrée dans une problématique proprement géométrique.

II. Le passage de la « géométrie du constat » à la « géométrie déductive » : Un passage « naturel » ?

C'est ce que laissent penser les commentaires des programmes depuis les années 85. La rupture notée dans les programmes antérieurs entre la géométrie enseignée avant et après la classe de quatrième n'est plus explicite, ni dans les programmes, ni dans les instructions ; au contraire, la continuité de tout l'enseignement au collège est affirmée dans les introductions propres à chaque classe.

A. Comment faciliter ce passage ? Des solutions successives proposées dans les instructions ou les documents pour les professeurs

Nous identifions quatre solutions différentes, proposées successivement depuis une quarantaine d'années, pour faciliter ce passage du constat à la déduction.

1. Démontrer permet de généraliser (1957)

Au cours des travaux pratiques, « de nombreux exercices de dessin accompagneront l'étude des divers chapitres de la géométrie; ils comporteront notamment des constructions de figure, des comparaisons, des vérifications expérimentales, des mesures dont on ne manquera pas de faire ressortir le caractère limité et restreint afin **de faire peu à peu saisir la différence entre la constatation, même répétée, d'un fait particulier et une démonstration générale.** »

2. Clarifier le statut épistémologique (1968-71)

La géométrie est considérée comme « premier exemple de mathématisation d'une réalité physique ». Le point de départ est constitué de l'étude expérimentale d'un certain nombre de propriétés de la réalité physique, qui devront apparaître « à la fois comme **naturelles** et **simples** à des débutants...Le point de départ ainsi une fois choisi, nous définissons des êtres mathématiques comme des ensembles d'éléments ayant les propriétés précédentes que nous énonçons sous forme d'**axiomes**. De l'ensemble des axiomes choisis seront alors déduites d'autres relations entre les êtres mathématiques ainsi définis et entre leurs combinaisons; ces relations **démontrées** sont énoncées sous forme de **théorèmes.** »

3. Convaincre les élèves de l'insuffisances de leurs pratiques « spontanées » ou apprises antérieurement (depuis 1985)

Cette démarche n'est pas explicite dans les instructions officielles mais, proposée dans le suivi scientifique IREM de 5^{ème} (annexe 2), reprise dans la brochure INTER-IREM : « Des mathématiques au cycle central » (annexe 3), elle est présente dans la plupart des manuels et se décline ainsi :

- observer est trompeur
- mesurer est imprécis

4. Apprentissage systématique du codage et de règles de prélèvement d'informations sur une figure.

Nous mettons sous ce titre un ensemble de réalisations récentes proposées par différentes équipes IREM et par des auteurs de manuels. Voici un exemple de formulation (IREM de Montpellier 1998) :

« Ne serait-il pas opportun, dès la première année de collège, de faire du codage un outil privilégié pour amener l'élève à modifier son rapport au dessin géométrique et le faire accéder au concept de figure géométrique ? ... Dans le rapport à la figure engendré par le codage, c'est seulement ce qui est codé qui doit être tenu pour vrai : ainsi une propriété qu'un dessin très précis fait apparaître mais qui n'est pas codée ne peut pas être considérée comme vraie : elle pourra seulement donner lieu à une conjecture ». L'annexe 3 illustre cette dernière proposition pour la classe de 6^{ème}, de manière conforme à l'usage mathématique puisque c'est l'élève qui doit construire la figure à partir d'informations prises dans le texte. Mais dans de nombreux manuels, cette règle doit s'appliquer à toute figure fournie à l'élève, même non définie par des propriétés, comme dans l'annexe 4, tirée du manuel « Mathématiques et clic 6^{ème} » (Bordas)

B. Analyse critique de ces propositions

1. Démontrer permet de généraliser

On sait combien il est difficile pour les élèves de comprendre ce qu'apporte une démonstration par rapport à une vérification sur un grand nombre de cas. Aussi la proposition énoncée dans les instructions de 57 n'est pas la panacée. Mais essayer de la mettre en œuvre devrait permettre de faire apparaître les théorèmes comme des phénomènes curieux, en rupture avec ce qui se passe habituellement, et conduire à des questionnements à partir desquels le professeur peut introduire le raisonnement géométrique. Cette démarche est utilisée dans certains travaux (Brousseau 1983). Elle ne peut avoir de sens pour les élèves que si certaines conditions sur les connaissances spatiales sont réalisées. Elle n'a pas de sens dans un enseignement où les résultats des démonstrations sont enseignés avant même que les élèves se soient aperçus de la faible probabilité des propriétés étudiées.

2. Clarifier le statut épistémologique : axiomes et théorèmes.

L'expérience tentée dans les années 70 a montré que l'enseignement d'un savoir formel sans lien avec ce que connaissent les élèves conduit à l'échec. Comment raisonner sur des objets totalement étrangers à son expérience ?

3. Convaincre les élèves de l'insuffisance de leurs pratiques « spontanées » ou antérieures.

Selon nous, la démarche proposée s'appuie sur une identification insuffisante des types de rapports différents que l'on peut avoir avec l'objet matériel, appelé « figure », suivant le type de problèmes que l'on résout, en dehors et au sein même de l'enseignement de la géométrie.

Dans la résolution des problèmes spatiaux, le recours aux instruments et à la mesure est absolument nécessaire, ceux-ci se substituent à la perception, en réponse aux contraintes de la situation. Bien sûr, le rapport au réel est source d'ambiguïtés : même exécutée par un adulte, la reproduction d'une « figure-dessin » ne se superpose pas exactement au modèle, des erreurs interviennent, liées, non à la conceptualisation, mais à l'imprécision des mesures ou des

instruments. Ce phénomène fondamental est constitutif des rapports entre la géométrie et la réalité qu'elle permet de décrire.

Pour la résolution d'un problème géométrique, introduire la nécessité de la démonstration en disqualifiant la mesure conduit à nier l'essentiel, qui devrait justement être l'objet de l'apprentissage : les deux méthodes (mesure et logique) pour vérifier la vérité d'une assertion, ne s'opposent pas puisqu'elles s'appliquent à des objets de nature complètement différente.

4. Développer un apprentissage systématique du codage des figures, dès la 6ème.

Cette proposition nous semble être la conséquence de la précédente : puisqu'en géométrie, on ne peut se fier ni à la vue ni au mesurage, enseignons aux élèves le plus tôt possible les « bonnes pratiques » mathématiques. Les auteurs de la brochure de l'IREM de Montpellier sont conscients que leur démarche demande à être justifiée. Ils affirment : « le codage, en intégrant au dessin les propriétés mathématiques de la figure modifie la vision que l'élève a du dessin : il perçoit la figure mathématique à travers le dessin. », mais sans en apporter la preuve. Ils nous paraissent occulter le fait que l'usage d'un code ne peut être séparé de celui de la signification de ce code. Pour l'élève qui n'a pas bénéficié de situations articulantes, sur le plan cognitif, le nouveau rapport visé aux dessins avec l'ancien rapport, il n'est possible de concevoir le codage que comme moyen de coder le dessin.

C. L'hypothèse d'un passage « naturel » de la géométrie du constat à la géométrie déductive ne prend pas compte « l'univers mental » des élèves, façonné par leurs expériences « pratiques ».

L'idée que le professeur puisse « naturellement » faire passer l'élève d'un rapport « spatial » à un rapport « géométrique » aux figures-dessins ne nous paraît pas réaliste : dès sa naissance, toute personne développe des rapports de type « pratique » aux objets avec lesquels il interagit et un changement de rapport ne peut se réaliser sans rupture.

Nous avons désigné par *problématique pratique* le type de rapport caractéristique des problèmes spatiaux de la vie de tous les jours, dans lesquels l'individu contrôle ses rapports spatiaux de manière empirique. La *vérification* du résultat obtenu se fait sous le mode de *l'évidence et de l'instant*. Si la solution n'est pas satisfaisante, le sujet va l'ajuster au résultat attendu sans se soucier de porter un regard réflexif sur la méthode utilisée pour l'obtenir.

- Une première étape pour aider les élèves à aller au delà de cette problématique est mise en place à l'école primaire. L'enseignement de la géométrie, dans une problématique de modélisation favorisant la conceptualisation, confronte les élèves à des problèmes, dans des conditions telles qu'ils ne puissent constamment recourir à leurs connaissances pratiques pour les résoudre.

- Mais cela ne suffit pas : il faut reconnaître qu'il y a une rupture radicale entre la problématique de modélisation, qui porte sur des problèmes spatiaux et la problématique géométrique, ce qui se traduit pour les élèves par un obstacle cognitif majeur. Commencer de plus en plus tôt à exiger d'eux un rapport aux figures-dessins qui ne prend du sens que dans le cadre des mathématiques, sans que ce sens ait pu être construit dans des activités signifiantes est risqué : c'est au nom d'un savoir qu'il est seul à posséder que le professeur démolit les connaissances que l'élève de 6ème a mis du temps à acquérir et qui lui permettent d'avoir prise sur le réel. Comment ce dernier pourrait-il s'y retrouver ?

L'enseignement de la géométrie doit donc prendre en compte l'existence des trois problématiques mentionnées ci-dessus.

III. Des propositions alternatives en cours d'étude :

A. Différencier nettement auprès des élèves les différentes problématiques en mettant en valeur ce qui fait la spécificité de chacune d'entre elles.

Cette proposition exprime la nécessité d'assumer les différences et les ruptures inhérentes aux différentes étapes de l'enseignement de la géométrie.

B. Introduire dès l'école primaire les savoirs géométriques de base comme outils pour résoudre effectivement des problèmes spatiaux

C'est sur cette proposition que portent nos travaux dans les classes (voir aussi Gobert 2001).

Que peut apporter pour le collège la mise en œuvre de cette proposition?

Nous avons pu remarquer que la figure à main levée, par exemple, a du sens pour les élèves quand elle est un moyen pour communiquer des informations sur une figure-dessin, ou même qu'elle est spontanément réinvestie par certains dans des situations plus proches du collège : recherche des informations minimales à communiquer à quelqu'un pour qu'il puisse construire une figure superposable à une figure donnée. C'est dans ce cadre de la communication, que l'utilité et l'économie du codage peuvent être éprouvées par les élèves.

Mais l'expérience que nous avons menée ces dernières années avec des élèves de cours moyen nous conduit à penser que, dans un milieu de petites dimensions, il est difficile de faire vivre de façon durable une modélisation géométrique ; un tel objectif est trop coûteux en conceptualisation, et peut trop difficilement être justifié sur le long terme, alors que des procédures relevant de la problématique pratique permettent de résoudre la plupart des problèmes d'action. Aussi, nous étudions maintenant des situations plus complexes qui offrent des possibilités d'inventions de procédures et d'argumentation riches et variées, en prenant au sérieux la fonction de la géométrie comme modèle de l'espace : le raisonnement géométrique peut aussi servir à résoudre des problèmes spatiaux !

C. Articuler la problématique de modélisation avec la problématique géométrique

Des recherches approfondies portant sur des aspects tant mathématiques que d'ingénierie sont nécessaires pour étudier le développement de cette démarche. Le groupe « Didactique des mathématiques au collège » de l'IREM de Bordeaux y contribue depuis quelques années ainsi que d'autres recherches en cours.

Références

BERTHELOT R. & SALIN M.H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*. Thèse Université Bordeaux 1. LADIST.

BERTHELOT R. & SALIN M.H.(2001) L'enseignement de la géométrie au début du collège. Comment concevoir le passage de la géométrie du constat à la géométrie déductive ? *Petit x* n° 56 IREM de Grenoble

BROUSSEAU G. (1983) : Etudes de questions d'enseignement. Un exemple : la géométrie", *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique*, LSD IMAG, Université J. Fourier, Grenoble (1982-1983)

BROUSSEAU G. (1998) *La théorie des situations didactiques*, La Pensée Sauvage

GAUD et COLL. (1987) : Apprentissage de la démonstration, *Suivi scientifique cinquième, bulletin inter-IREM premier cycle*, IREM de LYON

GOBERT S. (2001) *Questions de didactique liées au rapport entre la géométrie et l'espace sensible dans le cadre de l'enseignement à l'école élémentaire*. Thèse Université Paris 7

GROUPE DIDACTIQUE (1998) *Le codage : quand, comment, pourquoi ?* IREM de Montpellier

GROUPE DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES AU COLLEGE (2000) *Géométrie au cycle central 5^{ème} et 4^{ème} : un enchaînement d'activités* IREM de Bordeaux

JAFFROT et COLL : Lire et écrire en mathématiques *Des mathématiques au cycle central*, Editions IREM de Nantes

Annexe 1

Extrait des programmes de mathématiques (2001) du cycle 3

L'objectif principal est de permettre aux élèves d'améliorer leur "vision de l'espace" (repérage, orientation), de se familiariser avec quelques figures planes et quelques solides et de **passer progressivement d'une géométrie où les objets et leurs propriétés sont contrôlés par la perception à une géométrie où ils le sont par explicitation de propriétés et recours à des instruments**. Les activités du domaine géométrique ne visent pas des connaissances formelles (définitions), mais **des connaissances fonctionnelles, utiles pour résoudre des problèmes dans l'espace** ordinaire, dans celui de la feuille de papier ou sur l'écran d'ordinateur, en particulier des problèmes de comparaison, de reproduction, de construction, de description, de représentation d'objets géométriques ou de configurations spatiales (C3)

Extrait de la présentation du programme de mathématiques au collège (1996)

Travaux géométriques

- * Placer de l'identification perceptive (la reconnaissance par la vue) de figures et de configurations à leur caractérisation par des propriétés ;
- * être familiarisé avec les représentations de l'espace, de l'application des conventions usuelles (lignes cachées, perspective) aux traitements permis par les représentations
- * « prendre contact » avec des théorèmes et apprendre à les utiliser

Annexe 2

Extrait de [Gaud & al (1987) Apprentissage de la démonstration Bulletin Interirem premier cycle]

Comment répondre à la question « pourquoi ? (sous-entendu : pourquoi la propriété conjecturée est-elle vraie ?)

Moyens	Avantages	Inconvénients
En observant la figure, ça se voit (la vue)	Permet de se faire une idée	Pas totalement sûr (illusions, les tracés ne peuvent être exacts)
En faisant des mesures (la mesure)	Permet de vérifier son idée	Pas totalement sûr (imprécision des mesures)
En donnant des raisons : je l'ai prouvé, démontré (la logique)	Permet d'être sûr de ce que l'on dit	Il faut connaître les règles et être sûr du point de départ

En sixième, le statut de la figure commence à évoluer. L'élève découvre qu'il faut "s'en méfier" comme dans le problème ci-dessous où ABED semble être un rectangle mais les données ne permettent pas de conclure...



11 Avec l'équerre, certaines droites de cette figure semblent perpendiculaires. Indiquer lesquelles. Peut-on en être sûr(e) ?

