



Le rôle des calculatrices symboliques dans l'émergence de la pensée algébrique : le cas des expressions équivalentes¹

Carolyn Kieran, Université du Québec à Montréal, Département de mathématiques, Canada
André Boileau, Université du Québec à Montréal, Département de mathématiques, Canada
Luis Saldanha, Portland State University, Mathematics Department, États-Unis
Fernando Hitt, Université du Québec à Montréal, Département de mathématiques, Canada
Denis Tanguay, Université du Québec à Montréal, Département de mathématiques, Canada
José Guzmán, CINVESTAV del IPN, Matemática educativa, Mexico City, Mexique

Résumé

L'équivalence d'expressions algébriques est au cœur du travail transformationnel en algèbre. Cependant, nous savons très peu sur la compréhension de l'équivalence par les élèves. Cette étude est une partie d'un projet plus large qui explore l'utilisation de la calculatrice symbolique en tant qu'outil didactique pour promouvoir le développement à la fois technique et conceptuel de l'algèbre de niveau secondaire, à l'aide de tâches créées spécialement par l'équipe de recherche. Nous rendons compte de l'expérience d'une classe de 4^e secondaire (élèves de 14 ou 15 ans) aux prises avec les idées théoriques liées à l'équivalence algébrique, et du rôle joué par la calculatrice symbolique dans l'appréhension de ces nouvelles notions. Nous avons été témoins de l'émergence de deux notions distinctes pour l'équivalence d'expressions : l'une purement numérique impliquait un raisonnement sur des expressions pour lesquelles certaines substitutions numériques, mais pas nécessairement toutes, produisent des valeurs égales ; l'autre mettait en œuvre un raisonnement portant à la fois sur le numérique et sur des formes algébriques communes. L'interprétation des affichages de la calculatrice symbolique (en particulier lors des tests d'égalité) a suscité des discussions qui ne se produisent généralement pas dans des classes d'algèbre, et a mené plusieurs élèves à des distinctions clarificatrices sur l'équivalence.

Les recherches antérieures dans le domaine

Alors qu'on considère comme globalement appropriée l'utilisation, par les étudiants, d'ordinateurs ou de calculatrices dotées de systèmes de calcul formel² dans les cours de niveau postsecondaire (voir Heid, 1988 ; Shaw, Jean et Peck, 1997), tel n'est pas le cas au niveau secondaire. À ce jour, les enseignants de ce niveau ont en effet eu tendance à tenir à l'écart une telle technologie, préférant d'abord développer chez leurs élèves des habiletés « papier-crayon » en algèbre (NCTM, 1999). À l'inverse, l'utilisation des calculatrices graphiques est largement répandue, encouragée qu'elle est par ces nombreuses études qui mettent de l'avant le rôle des représentations graphiques dans la

- 1 Les auteurs désirent exprimer leur reconnaissance au Conseil de Recherche en Sciences Humaines du Canada, qui a subventionné cette recherche, à Michèle Artigue qui a agi comme consultante pour ce projet, et aux enseignants participants, qui nous ont transmis leurs commentaires tout au long des cycles successifs d'élaboration des tâches.
- 2 Dans le présent article, nous utiliserons l'acronyme SCF pour désigner les Systèmes de Calcul Formel, tels la calculatrice TI-92 Plus ou les logiciels Derive, Mathematica ou Maple.

compréhension des élèves en algèbre (Kieran et Yerushalmy, 2004). Cet état de faits a incité certains chercheurs à investiguer les contributions possibles de la technologie SCF à l'apprentissage de l'algèbre chez les élèves du secondaire.

Récemment, des chercheurs (comme, par ex., Artigue *et al.*, 1998; Guin et Trouche, 1999; Artigue, 2002a, 2002b; Lagrange, 2003) ont avancé que ces nouveaux outils technologiques peuvent favoriser une meilleure maîtrise mathématique, tant conceptuelle que technique, à condition de ne pas négliger les aspects techniques. Adaptant un cadre théorique développé par Chevallard (1999), Lagrange (2000) a plus spécifiquement fait valoir que les techniques servent de pont entre les tâches et la théorie. Autrement dit, les élèves édifient progressivement la théorie à mesure qu'ils développent des techniques en réponse à certaines tâches. Les outils techniques alors mis en œuvre par les élèves deviennent ainsi des instruments de leur pensée mathématique (Vérillon et Rabardel, 1995), qui permettent à leur tour une amplification et réorganisation conceptuelles (Pea, 1987). Les techniques instrumentées ont donc une valeur épistémique. La théorie de l'instrumentation, qui articule la relation entre outils et développement conceptuel (voir Trouche, 2000), s'est vue appliquée à l'apprentissage non seulement du calcul, mais également de l'algèbre de niveau secondaire. Drijvers (2003) – qui s'est penché sur le rôle des techniques instrumentées en environnement SCF dans l'apprentissage de la notion de paramètre – relève que les difficultés des élèves à réconcilier l'affichage SCF avec les résultats anticipés par eux, lorsqu'elles sont exposées et discutées par toute la classe, peuvent servir de tremplin à l'apprentissage.

Les chercheurs d'une autre étude SCF (Ball, Pierce et Stacey, 2003; voir aussi Hoch et Dreyfus, 2004, qui s'y rapporte), portant celle-ci sur l'équivalence des expressions algébriques, ont montré que les élèves n'arrivaient pas à repérer des expressions équivalentes. Ball, Pierce et Stacey y développent un instrument conçu pour évaluer l'aptitude des élèves à reconnaître rapidement des formes algébriques équivalentes: le «Algebraic Expectation Quiz». Ce test a été soumis à un échantillon de cinquante élèves (âgés de 17-18 ans) avant et après leur cheminement, période pendant laquelle ceux-ci recevaient un enseignement impliquant l'utilisation de SCF. Sur la base de l'analyse des performances à ce test, les chercheurs concluent que «reconnaître l'équivalence, même dans les cas simples, est un obstacle significatif pour les élèves» (p. 4), et que «l'aptitude à reconnaître des formes équivalentes d'expressions algébriques est centrale quand on travaille avec SCF, et prendra vraisemblablement une importance nouvelle dans les curriculums à venir» (p. 16; notre traduction).

De la même façon, à partir d'exemples de travaux d'élèves impliquant le passage d'une forme à l'autre pour une même expression algébrique, Artigue (2002b, sur la base d'une recherche de Guin et Delgoulet) relève comment l'équipe de recherche a accordé une attention spécifique au fait que «des problèmes d'équivalence se posent, qui vont bien au-delà de ce qui est usuel en classe» et comment cela a pu être utilisé comme «levier pour promouvoir un travail sur la syntaxe des expressions algébriques, ce qui est très difficile à motiver dans un environnement standard» (p. 265; notre traduction). Artigue ajoute que l'utilisation du SCF oblige les étudiants à affronter des problèmes d'équivalence et de simplification.

Cerulli et Mariotti (2001) ont décrit l'expérimentation d'un enseignement sur l'équivalence en classe de 3^e secondaire (élèves de 13 ou 14 ans) mettant en œuvre l'Algebrista, un micro-monde

algébrique créé par Cerulli (2004). Ces chercheurs avaient pour but de développer chez les élèves une perspective théorique sur les manipulations algébriques, en centrant l'activité sur le concept d'équivalence, et en y distinguant preuve et vérification. On enseignait aux élèves que le seul moyen de prouver l'équivalence de deux expressions littérales est de recourir aux axiomes pour transformer l'une et obtenir l'autre, alors que la vérification numérique, par substitution des nombres aux lettres, est la façon décisive de montrer que deux expressions ne sont pas équivalentes. Les élèves ont travaillé à changer la forme d'expressions numériques et littérales données, en sélectionnant des « touches d'axiomes » de l'outil informatique ou en créant eux-mêmes leurs propres « touches théorèmes/transformations ».

De l'analyse de Cerulli et Mariotti (2001) ressortent trois points cruciaux. Premièrement, le transfert des touches-icônes dans le travail papier-crayon des élèves. On peut relever de semblables traces iconiques de l'environnement informatique (avec des tableurs) dans la production algébrique écrite d'un des participants de l'étude de Sutherland (1993). Selon Cerulli et Mariotti, de tels signes guident l'évolution du sens dans la pensée algébrique des élèves. Le deuxième point porte sur l'utilisation efficace d'artefacts comme instruments de médiation sémiotique. Pour construire et faire évoluer la signification de l'équivalence algébrique, le cadre expérimental exploite autant les différences que les similarités entre les deux mondes de l'artefact et des mathématiques. Le troisième point se rapporte à l'aspect théorique de l'activité des élèves. Cerulli et Mariotti mettent leur dessein de l'avant, à savoir éloigner les élèves d'une interprétation purement procédurale des manipulations algébriques pour les engager dans une perspective théorique, en insistant sur les axiomes et théorèmes. Les justifications des transformations équivalentes, telles que données à l'écrit par les élèves, et les dessins des touches-icônes accompagnant leurs textes écrits, suggèrent que l'approche de l'équivalence par la preuve, telle que vécue dans cet environnement, donne des résultats favorables. D'autres chercheurs comme Balacheff (2001) ou Dettori, Garuti et Lemut (2001) ont relevé l'importance du contrôle théorique sur l'activité transformationnelle en algèbre. Toutefois, comme le note Demby (1997), les élèves ont beaucoup de difficultés à identifier les propriétés qu'ils utilisent quand ils transforment des expressions algébriques.

Selon Nicaud, Bouhineau et Chaachoua (2004), « raisonner par équivalence est un des principaux modes de raisonnement de l'algèbre ; cela consiste à rechercher la solution d'un problème en remplaçant l'expression algébrique issue du problème par des expressions équivalentes, [... à l'aide] d'identités qui permettent la transformation des expressions tout en sauvegardant l'équivalence » (p. 171-172 ; notre traduction).

Les recherches moins récentes sur l'équivalence, bien que très peu nombreuses, attestent du manque d'idées conscientes des élèves de ce qu'est l'équivalence. En comparant les performances d'élèves novices et d'étudiants plus avancés dans des tâches mettant en jeu l'équivalence d'équations linéaires, Kieran (1984) relève que ces derniers se sont montrés peu conscients que les processus de résolution d'équations – par eux mis en œuvre en toute compétence – préservaient les solutions. Dans une étude utilisant des tâches semblables à celles de Kieran et où l'échantillon, passablement plus grand, était constitué d'élèves de 2^e et 3^e secondaires (élèves de 12 à 14 ans), Steinberg, Sleeman et Ktorza (1990) relèvent que, bien que la plupart des élèves savaient comment utiliser les transformations pour résoudre des équations linéaires simples, beaucoup ne mettaient pas spontanément ce savoir en relation avec la production d'expressions équivalentes. Les travaux

de Pomerantsev et Korosteleva (2003) attestent que les difficultés reliées à la compréhension de l'équivalence algébrique peuvent s'étendre au-delà du niveau postsecondaire. Leur étude fait appel à un test diagnostique, soumis à un important échantillon ($n = 416$) d'étudiants, à différents stades du programme suivi par eux, en formation des maîtres pour le primaire (K-8), dans une grande université américaine. Les items du test étaient conçus pour évaluer les habiletés des étudiants à discerner et utiliser les aspects structuraux des expressions algébriques. Les résultats de la recherche révèlent les sérieuses difficultés rencontrées à cet égard, et ce quel que soit le sous-groupe de l'échantillon considéré.

L'importance à accorder à l'équivalence des expressions algébriques, autant que les difficultés des élèves et étudiants rapportées en ce domaine, font ressentir le besoin de mieux comprendre comment les apprentis algébristes pensent et conçoivent l'équivalence des expressions. Dans notre désir de bâtir sur les travaux de recherche afférents récemment initiés, nous avons conçu une étude qui utilise le SCF comme levier pour soutenir le travail et la réflexion de l'élève sur l'équivalence des expressions.

L'étude

L'étude dont il est ici question s'insère dans un projet de recherche encore en cours, impliquant cinq classes de 4^e secondaire (élèves de 14 ou 15 ans). Ces élèves ont suivi un programme intégré de mathématiques depuis la 1^{re} secondaire (élèves de 11 ou 12 ans), ce qui signifie que des éléments d'algèbre y sont à l'étude chaque année. Une de ces cinq classes fera l'objet de notre attention dans le présent article. L'année précédant l'expérimentation, les élèves de cette classe avaient appris les techniques de factorisation de base, de résolution des équations linéaires et des équations quadratiques « factorisables » (dans les rationnels). Ils utilisaient la calculatrice graphique sur une base régulière. Toutefois, ils n'avaient l'expérience ni du SCF, ni de la notion d'équivalence. On notera que ces élèves étaient plutôt habiles avec les manipulations algébriques, comme le révéleront les résultats d'un prétest administré par nous au début de l'étude. C'est dans le cours de leur étude de l'algèbre en 4^e secondaire (élèves de 14 ou 15 ans), de septembre 2004 à la fin de janvier 2005, que l'enseignant de mathématiques attiré a intégré au programme régulier et piloté lui-même les activités conçues par notre équipe de recherche, faisant appel à la technologie SCF (calculatrices TI-92 Plus³).

La conception des activités

Des huit activités conçues par l'équipe de recherche, chacune prévue pour la durée d'environ deux périodes (chaque période dure 65 minutes en classe), trois portaient sur l'équivalence des expressions. Les activités étaient organisées en parties, chaque partie incluant des productions écrites de l'élève et une discussion sur les points saillants. Les tâches étaient de trois types : travail avec SCF, travail papier-crayon ou travail de réflexion. Chaque activité était également présentée en une version pour l'enseignant-pilote, où étaient suggérées des discussions de classe possibles. En concevant ces tâches, nous avons cherché à prendre en compte à la fois les connaissances antérieures des élèves et le curriculum établi dans lequel ces tâches devaient s'insérer ; mais nous

3 Nous remercions Texas Instruments qui a gracieusement fourni les calculatrices utilisées dans cette étude.

avons également fait tout notre possible pour nous assurer qu'elles seraient mises en œuvre dans une culture de classe particulière, où serait donnée une certaine priorité à la discussion sur des questions mathématiques pointues.

Activité 1 : Expressions équivalentes

Partie I (avec SCF) : comparer des expressions par évaluations numériques.

Partie II (papier-crayon) : comparer des expressions par manipulations algébriques.

Partie III (avec SCF) : tester l'équivalence des expressions en les transformant, à l'aide de la commande EXPAND.

Partie IV (avec SCF) : tester l'équivalence des expressions sans les transformer, en utilisant le test d'égalité.

Partie V (avec SCF) : tester l'équivalence des expressions avec l'une ou l'autre des méthodes SCF.

Activité 2 : Expressions équivalentes, la suite

Partie I : explorer et interpréter les effets de la touche ENTER et des commandes EXPAND et FACTOR.

Partie II : montrer l'équivalence des expressions par différentes approches SCF.

Activité 3 : Transition des expressions aux équations

Partie I (avec SCF) : introduction de la commande SOLVE.

Partie II (avec SCF) : les expressions reconsidérées, à la lumière de leur intégration aux équations.

Partie III (papier-crayon) : construire des équations et des identités.

Partie IV (avec SCF) : synthèse des différents types d'équations.

Figure 1 – Les grandes lignes des trois activités portant sur les expressions équivalentes

Dans ces activités, nous avons défini expressions équivalentes comme suit : «Ayant spécifié un ensemble de nombres admissibles pour x (duquel serait par exemple exclues les valeurs de x pour lesquelles une des expressions n'est pas définie), on dira que les expressions sont équivalentes sur cet ensemble de nombres admissibles si, en remplaçant x par l'un quelconque des nombres admissibles, les deux expressions donnent la même valeur». Comme le confirme l'organisation des activités présentée à la figure 1, on aura constaté que l'évaluation numérique servait de point d'entrée aux discussions sur l'équivalence. L'impossibilité de tester toutes les substitutions numériques possibles pour montrer l'équivalence a motivé le recours aux manipulations algébriques pour trouver des formes communes. Dans les discussions, une attention particulière était portée aux restrictions à l'équivalence. On explorait ensuite la relation entre expressions équivalentes/non-équivalentes et solutions d'équation, à travers des tâches SCF et papier-crayon.

Organisation de la classe et collecte des données

Deux caméras vidéo étaient installées dans la classe, l'une fixe à l'avant, l'autre à l'arrière, dont on pouvait obtenir des rotations et des zooms. Le son provenait de deux microphones suspendus en permanence au plafond. Un ou deux chercheurs prenaient des notes pendant les séances de classe.

Deux élèves étaient interviewés et filmés après chaque séance de classe, de façon à mieux cerner leur pensée. Une fois complétées les trois activités, nous avons soumis un post-test faisant appel au SCF. Ainsi, les données se rapportant à la portion de l'étude analysée dans le présent article incluent : la numérisation sur DVD des vidéos des séances de classe portant sur les trois activités, les interviews individuelles de neuf élèves, les transcriptions d'une sélection de segments vidéo, les feuilles d'activité de tous les élèves (contenant non seulement leurs réponses papier-crayon mais aussi leur retranscription de certains affichages SCF et leur interprétation de ces affichages), les réponses écrites au prétest et au post-test, les notes des chercheurs.

Résultats et discussions

Les réponses à une question du post-test en particulier, la Question 5(iii) (voir Figure 2), suggèrent qu'une certaine confusion a pu s'immiscer entre les idées émergentes des élèves sur l'équivalence et les notions d'égalité. Alors que pour la partie (i), les réponses de 93 % des élèves ont été évaluées comme correctes et que tous les élèves ont utilisé une méthode SCF valable pour la partie (ii), seulement 60 % d'entre eux ont répondu à la partie (iii) sans confondre les deux notions. Donnons deux exemples de telles réponses à la question Q5(iii) :

- « Elles ne sont pas équivalentes parce que quand x reste x et qu'on factorise chaque côté, ils ne donnent pas des expressions identiques. Ces expressions peuvent être égales quand x est remplacé par 2 ou $2/3$, parce que les deux côtés seraient alors identiques. »
- « Elles ne sont pas équivalentes parce que c'est seulement avec 2 et $2/3$ comme valeurs de x que les expressions sont égales. On ne peut pas les mettre dans une forme commune. »

Parmi les réponses dénotant une certaine confusion entre les deux notions, on trouve :

- « Elles sont équivalentes quand les nombres substitués sont $x = 2$ ou $x = 2/3$. Et pas d'autres nombres. »
- « Les expressions sont équivalentes puisqu'elles ont toutes deux les mêmes solutions. »

On pourrait argumenter que les réponses insatisfaisantes relèvent simplement d'incorrections terminologiques (par exemple, utiliser «équivalent» pour «égal»). Nous sommes portés à penser que le problème est plus profond, et pourrait refléter une interprétation de l'équivalence en termes purement numériques, et l'absence d'une prise de conscience de l'importance de la forme algébrique en tant qu'outil de la pensée algébrique. De plus, nous nous sommes demandés si la façon dont les élèves ont utilisé le SCF, ou la façon dont les sorties SCF sont affichées, ne renforçaient pas les interprétations numériques au détriment de celles liées à la forme.

L'équation suivante a $x = 2$ et $x = 2/3$ comme solutions : $x(2x-4) + (-x+2)^2 = -3x^2+8x-4$	
(i) Que veut-on dire par « les valeurs 2 et 2/3 sont solutions de cette équation ». Explique clairement ta réponse.	
(ii) Utilise ta calculatrice pour montrer :	
a) que les deux valeurs sont bien des solutions, <u>et</u>	
b) qu'il n'y a pas d'autres solutions	
Ce que j'entre dans ma calculatrice	Résultat affiché par ma calculatrice et mon interprétation
a)	
b)	
(iii) Est-ce que les expressions du membre de gauche $[x(2x-4) + (-x+2)^2]$ et du membre de droite $[-3x^2+8x-4]$ de cette équation sont équivalentes ? STP explique.	

Figure 2 – Une question du post-test (voir iii) comme révélateur de l'interprétation des élèves de l'équivalence

Alors qu'une réponse sans confusion à Q5(iii) incorporait généralement deux composantes – le fait que des expressions équivalentes : peuvent se représenter sous une forme commune ; donnent la même valeur numérique lorsqu'évaluées en n'importe quel nombre d'un ensemble infini de valeurs admissibles – les réponses dénotant une certaine confusion ne faisaient généralement pas référence aux formes communes, comme on peut le constater à la lecture du tableau ci-dessous.

	Sans confusion	Avec confusion	Total
Référence à une forme commune	6	2	8
Pas de référence à une forme commune	3	4	7
Total	9	6	15

Figure 3 – Distribution des réponses d'élèves à la question Q5(iii), en relation avec la référence à une forme commune

Ces résultats suggèrent que l'idée d'expressions ayant une forme commune a aidé les élèves à reconnaître l'équivalence d'expressions. En effet, il appert que le recours aux formes communes a prédisposé les élèves à reconnaître si deux expressions sont équivalentes ou non (pour une analyse complémentaire du raisonnement des élèves portant à la fois sur le numérique et sur les formes algébriques communes, voir Kieran *et al.*, sous-presse).

Cependant, les méthodes SCF utilisées dans les réponses pour la partie (ii) ne différaient pas chez les élèves ayant répondu sans confusion à la partie (iii) et chez les élèves dont les réponses pour cette même partie dénotaient une certaine confusion. Ces deux groupes d'élèves ont utilisé dans les mêmes proportions les trois approches de substitution (n=6), de résolution (n=12) et de test d'égalité (n=2). En plus du faible nombre de ceux utilisant le test d'égalité, nous avons également remarqué que personne n'a utilisé FACTOR ou EXPAND pour tester explicitement si les deux expressions données peuvent être ré-exprimées sous une forme commune. Nous avons ensuite analysé les feuilles d'activité des élèves pour les trois activités précédant le post-test, ainsi que

toutes les données des interviews, pour déterminer si l'interprétation des élèves de certains affichages SCF pouvait être problématique (voir Pierce et Stacy, 2004, pour plus de détails sur le rôle de l'interprétation des affichages SCF). Nous avons trouvé que l'utilisation du test d'égalité intriguait les élèves.

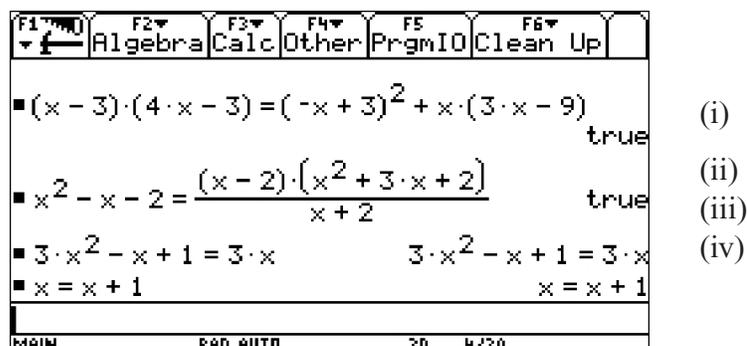


Figure 4 – Affichage de la TI-92 Plus relativement le test d'égalité, appliqué à quatre cas d'expressions équivalentes ou non-équivalentes

La figure 4 montre l'affichage de la TI-92 Plus lorsqu'on utilise le test d'égalité pour: (i) deux expressions équivalentes sans restrictions, (ii) deux expressions équivalentes avec une restriction, (iii) deux expressions non-équivalentes égales seulement quand $x = 1$ ou $x = 1/3$, et (iv) deux expressions non-équivalentes qui ne sont jamais égales. Comme on peut le voir, ce test produit true quand une équation entre deux expressions équivalentes est entrée (notez, cependant, qu'aucune restriction à l'équivalence n'est indiquée). Par contre, le SCF réaffiche simplement l'équation originale quand les expressions à gauche et à droite du signe égal ne sont pas équivalentes. Ainsi, avec ses deux sorties distinctes – soit true ou l'équation originale – le test d'égalité peut servir à vérifier l'équivalence d'expressions.

Mais les élèves ont eu de la difficulté à interpréter ce dernier type de réponse, comme l'illustre l'extrait suivant (voir la figure 5, notre traduction), tiré d'une entrevue avec un élève réalisée immédiatement après le travail en classe sur l'Activité 1.

Bien que cet élève semblait clairement croire que, quand une expression avec un signe égal est retournée, un tel affichage indique encore l'équivalence des deux expressions, d'autres élèves ne savaient pas comment interpréter un tel affichage. Ils pensaient que le SCF afficherait false si les deux expressions formant l'égalité n'étaient pas équivalentes, spécialement dans les cas tels $x = x+1$ qui, disaient-ils, «ne pouvaient jamais être vrai».

- É: Quand je vois «true», je pense qu'il n'y a pas d'exceptions [ayant entré: $(3x-1)(x^2-x-2)(x+5)=(x^2+3x-10)(3x-1)(x^2+3x+2)/(x+2)$]. Je pense que si ça dit «true» tout le temps, ça devrait toujours, peu importe la valeur de x , être équivalent.
- I: Ok. Bien. On passe à la partie suivante [en tournant la page]. D'accord, (Q IV.B), te souviens-tu de celle-ci?

- É: Hum, j'ai entré le problème $[(x^2 + x - 20)(3x^2 + 2x - 1)(3x - 1)(x^2 - x - 2)(x + 5)]$ et ça m'a retourné à peu près le même problème, mais réarrangé, c'est la même réponse. Quand on pense que l'autre a dit «true», c'est un peu intrigant... La réponse que ça m'a donnée, je pense que cet énoncé, comme la première expression égale la deuxième expression, est vrai... Quand je vois le signe égal, je pense qu'ils sont équivalents, le même.
- I: Que pourrais-tu faire pour vérifier que ton interprétation sur ce que ça veut dire est correcte en fait?
- É: Je le développerais. Alors, on verrait toutes les parties.
- I: As-tu effectivement fait ça par la suite?
- É: Moi je l'ai fait, mais je ne crois pas qu'on l'a fait en classe.
- I: Et est-ce que ça a confirmé ce que...
- É: Non parce que, quand on les développe, elles sont différentes.
- I: Changerais-tu ta réponse en voyant ça?
- É: Oui, mais je ne comprends toujours pas pourquoi ça me dit que c'est équivalent.
- I: Donc, si je te comprends bien, pour toi, ça reste mystérieux.
- É: C'est mélangeant.
- I: Mélangeant?
- É: Ouais.
- I: Parce que, en fait, ça t'a fait croire que c'était équivalent?
- É: Ouais.
- I: Donc c'est comme ça que tu interprétais au départ. Mais, à la lumière de ce que tu as fait avec papier-crayon et de la discussion que vous avez eue en classe – je ne sais pas si tu te rappelles des détails – comment interpréterais-tu la sortie quand tu entres deux expressions comme ça?
- É: Hum, que ça peut être correct quelques fois, mais pas toujours. Avec des nombres spécifiques, c'est correct.
- I: Alors, quand tu dis correct...
- É: Qu'à la fin, on obtiendrait le même nombre des deux côtés. Mais seulement quelques fois.
- I: Seulement pour quelques nombres.
- É: Ouais.
- I: Et comment te sens-tu face à ça?
- É: Je suis encore mêlé. Avec les «trues» et les «égals», pour moi, ça a à peu près le même sens. Je crois que je devrai juste changer ma façon de penser.

Figure 5 – Extrait illustrant la confusion d'un élève concernant l'interprétation de l'affichage SCF lors d'un test d'égalité

Ils avaient vu *false* affiché lors de substitutions de certaines valeurs dans des équations contenant des restrictions, et attendaient donc *false* lors de certaines applications du test d'égalité. Les élèves se sont retrouvés en terrain inconnu et le test d'égalité, avec ses deux types de sorties, a été considéré comme «trompeur». Il y a eu beaucoup de discussion en classe sur ce sujet lorsque ça s'est présenté pour la première fois durant l'Activité 1. Les élèves, mais aussi le professeur, ont évoqué leurs expériences préalables de substitutions numériques dans de telles expressions, soulignant que les équations formées par ces expressions étaient parfois vraies et parfois fausses, selon les valeurs

numériques substituées. Ils argumentaient que, si une équation formée par deux expressions n'était pas toujours vraie (le tout sujet, bien sûr, à quelques restrictions), alors les expressions formant l'équation n'étaient pas équivalentes et ne pourraient jamais l'être. Mais parce qu'il y avait parfois des exceptions à l'équivalence (dans le cas de valeurs inadmissibles, qui n'étaient pas toujours évidentes pour les élèves), quelques-uns ont pensé qu'il pouvait aussi y avoir des exceptions à la «non-équivalence d'expressions», qu'ils ne percevaient pas là aussi. Comme l'élève ci-dessus en a fait la remarque un peu plus tard durant l'entrevue (notre traduction): «Habituellement, on fait des choses beaucoup plus simples. Avec les exceptions et les restrictions, et tous ces égal, true et false, je trouve que c'est un peu trop.» Leur difficulté à interpréter certaines sorties du SCF révélait donc la fragilité de leur conception, en émergence, de l'équivalence.

L'Activité 3 introduisait la commande SOLVE et son utilisation pour interpréter l'équivalence d'expressions: on forme une équation et on se base sur la nature de la solution de l'équation. Les élèves y ont semblé plus à l'aise avec les divers affichages SCF: *true*, quelques solutions, ou *false*. Ils étaient en terrain mieux connu, et ce terrain était numérique (solutions incluant tous les nombres réels, seulement quelques nombres réels ou aucun nombre réel). Ainsi, ces équations que le test d'égalité avait retournées inchangées et qui étaient restées sans interprétation pour plusieurs, étaient maintenant vues plus clairement. Cependant, comme l'illustrent certaines réponses du post-test, certains élèves ont considéré que les expressions des deux côtés d'une équation pour laquelle il y avait quelques solutions étaient équivalentes, à savoir selon eux «équivalentes pour certaines valeurs de x ». Avec leur interprétation purement numérique de l'équivalence, ils ont eu tendance à regrouper comme équivalentes à la fois les paires d'expressions dont les équations étaient toujours vraies et celles avec seulement quelques solutions. D'autre part, les élèves dont les interprétations combinaient le numérisme et le recours aux formes communes (à savoir, seules les paires d'expressions formant des équations vraies pour tous les nombres peuvent être exprimées sous une forme commune) ont bien distingué les expressions équivalentes des non-équivalentes. On imagine sans peine les ramifications d'une interprétation purement numérique sur la compréhension du processus de résolution d'équations, au cours duquel des expressions sont remplacées par des expressions équivalentes.

Bien que le test d'égalité, avec ses sorties «mystérieuses», a mis les élèves en contact avec un phénomène auquel ils devaient réfléchir profondément et a ramené à la surface leurs difficultés conceptuelles, il est clair que celles-ci n'ont pas toutes été résolues. Tandis que les élèves continuent, pendant l'année, de travailler avec des procédures de résolution d'équations et qu'on insiste plus sur le rôle des formes communes lorsqu'on parle d'expressions équivalentes, il se peut que la notion d'équivalence se dégage peu à peu de l'égalité des expressions. Tandis que l'expérience des élèves avec le SCF s'accroît, en parallèle et en interaction avec leur notion, en émergence, de l'équivalence des expressions, toute la classe peut entre autres choses en venir à utiliser le test d'égalité avec confiance. Ball, Pierce et Stacy (2003) ont souligné que les élèves de leur étude sur les SCF avaient beaucoup de difficulté à reconnaître des expressions équivalentes. Pour pallier à cette difficulté, nous proposons de favoriser l'utilisation de plusieurs tests SCF pour déterminer l'équivalence d'expressions, mais aussi de développer une idée plus claire de ce que sont des expressions équivalentes. À travers le compte-rendu de cette portion de notre étude, nous avons

tenté de décrire nos efforts initiaux visant à comprendre comment les élèves réagissent dans ces deux situations.

Remarques finales

Dans cette étude, nous ne visions pas à remplacer les techniques papier-crayon par des techniques SCF. Le SCF ne devait pas non plus être un simple moyen de vérification du travail papier-crayon. Nous visions son utilisation comme outil didactique en vue d'étudier certaines idées théoriques relatives à l'algèbre. À cette fin, nous avons assorti certaines composantes de nos activités de questions qui faisaient intervenir le SCF pour provoquer des discussions, lesquelles n'apparaissent en général pas dans les classes de mathématiques. Certaines des tâches demandaient aux élèves de décrire comment ils interprètent autant leur travail que les sorties SCF reliées. Il appert que de telles activités, tout en rendant idées et distinctions plus claires, font ressortir des notions mathématiques d'une manière qui n'est pas toujours celle mise en œuvre quand on « fait tout simplement des mathématiques ». Si on souhaite que le SCF soit profitable au niveau secondaire, on doit selon nous envisager précisément ce type d'utilisation.

Nous voulons pour conclure insister sur un dernier point : il se dégage, de façon évidente de toutes nos observations de la classe, que le rôle de l'enseignant est primordial dans l'évolution de la pensée des élèves, en co-émergence avec la mise en œuvre de nouvelles tâches SCF. Il semble donc qu'il faille ajouter un quatrième élément, l'Enseignant, aux trois éléments essentiels mis de l'avant par Lagrange (2000), pour tout travail mathématiques faisant usage des outils technologiques : Tâches, Techniques et Théories. Sans l'enseignant pour ponctuer et orchestrer les discussions de classe, l'idée d'utiliser le SCF afin d'aider les élèves à développer une pensée théorique en algèbre, ne se serait jamais concrétisée. Une remarque, faite par l'étudiant dont nous avons rapporté une partie des propos ci-dessus, nous revient en mémoire : « Peu à peu, avec les commentaires et les questions du professeur, on est amené à une conclusion. »

Remerciements

Nos plus sincères remerciements aux élèves et au professeur de la classe décrite ici. Ils se sont très aimablement pliés à tous nos enregistrements vidéo, toutes nos observations et toutes nos entrevues, et ce sur une période de plusieurs mois.

Références

- Artigue, M. (2002a). L'intégration de calculatrices symboliques à l'enseignement secondaire : les leçons de quelques ingénieries didactiques. In D. Guin et L. Trouche (dir.), *Calculatrices symboliques – transformer un outil en un instrument du travail mathématique : un problème didactique* (p. 277-349). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Artigue, M. (2002b). Learning mathematics in a CAS environment : The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7, 245-274.

- Artigue, M., Defouad, B., Duperier, M., Juge, G. et Lagrange, J. B. (1998). *Intégration de calculatrices complexes dans l'enseignement des mathématiques au lycée*. Paris: Université Denis Diderot, Équipe DIDIREM.
- Balacheff, N. (2001). Symbolic arithmetic vs. algebra: The core of a didactical dilemma. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell et R. Lins (dir.), *Perspectives on school algebra* (p. 249-260). Dordrecht, Pays-Bas: Kluwer Academic.
- Ball, L., Pierce, R. et Stacey, K. (2003). Recognising equivalent algebraic expressions: An important component of algebraic expectation for working with CAS. In N.A. Pateman, B.J. Dougherty et J. Zilliox (dir.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, p. 15-22). Honolulu, USA: PME.
- Cerulli, M. (2004). *Introducing pupils to algebra as a theory: L'Algebrista as an instrument of semiotic mediation*. Doctoral dissertation, Università degli Studi di Pisa, Italy. <<http://www-studenti.dm.unipi.it/~cerulli/tesi/>>
- Cerulli, M. et Mariotti, M.A. (2001). L'Algebrista: A microworld for symbolic manipulation. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent et J. Vincent (dir.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference: The Future of the Teaching and Learning of Algebra* (p. 179-186). Melbourne, Australie: The University of Melbourne.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19, 221-266.
- Demby, A. (1997). Algebraic procedures used by 13- to 15-year-olds. *Educational Studies in Mathematics*, 33, 45-70.
- Dettoni, G., Garuti, R. et Lemut, E. (2001). From arithmetic to algebraic thinking by using a spreadsheet. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell et R. Lins (dir.), *Perspectives on school algebra* (p. 191-207). Dordrecht, Pays-Bas: Kluwer Academic.
- Drijvers, P.H.M. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment* (doctoral dissertation). Utrecht, Pays-Bas: Freudenthal Institute.
- Guin, D. et Trouche, L. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments: The case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 3, 195-227.
- Heid, M.K. (1988). Resequencing skills and concepts in applied calculus using the computer as tool. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19, 3-25.
- Hoch, M. et Dreyfus, T. (2004). Structure sense in high school algebra: The effect of brackets. In M.J. Høines et A.B. Fuglestad (dir.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, p. 49-56). Bergen, Norvège: PME.
- Kieran, C. (1984). A comparison between novice and more-expert algebra students on tasks dealing with the equivalence of equations. In J.M. Moser (dir.), *Proceedings of the Sixth Annual Meeting of PME-NA* (p. 83-91). Madison, WI: PME-NA.
- Kieran, C. et Drijvers, P., en collaboration avec A. Boileau, F. Hitt, D. Tanguay, L. Saldanha et J. Guzmán. (sous-presses). The co-emergence of machine techniques, paper-and-pencil techniques, and theoretical reflection: A study of CAS use in secondary school algebra. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*.

- Kieran, C. et Yerushalmy, M. (2004). Research on the role of technological environments in algebra learning and teaching. In K. Stacey, H. Chick et M. Kendal (dir.), *The future of the teaching and learning of algebra : The 12th ICMI Study* (p. 99-152). Dordrecht, Pays-Bas : Kluwer Academic.
- Lagrange, J.-B. (2000). L'intégration d'instruments informatiques dans l'enseignement : une approche par les techniques. *Educational Studies in Mathematics*, 43, 1-30.
- Lagrange, J.-B. (2003). Learning techniques and concepts using CAS : A practical and theoretical reflection. In J. T. Fey (dir.), *Computer Algebra Systems in secondary school mathematics education* (p. 269-283). Reston, Virginie : National Council of Teachers of Mathematics.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1999). *Dialogues : Calculators – What is their place in mathematics classrooms ?* May/June, p. 1-16.
- Nicaud, J.-F., Bouhineau, D. et Chaachoua, H. (2004). Mixing microworld and CAS features in building computer systems that help students learn algebra. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 9, 169-211.
- Pea, R.D. (1987). Cognitive technologies for mathematics education. In A. H. Schoenfeld (Éd.), *Cognitive science and mathematics education* (p. 89-122). Mahwah, New-Jersey : Lawrence Erlbaum.
- Pierce, R. et Stacey, K. (2004). A framework for monitoring progress and planning teaching towards the effective use of computer algebra systems. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 9, 59-93.
- Pomerantsev, L. et Korosteleva, O. (2003, décembre). *Do prospective elementary and middle school teachers understand the structure of algebraic expressions ? Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers : The Journal*, Vol. 1 : Content Knowledge. <<http://www.k-12prep.math.ttu.edu/journal/journal.shtml>>
- Shaw, N., Jean, B. et Peck, R. (1997). A statistical analysis on the effectiveness of using a Computer Algebra System in a developmental algebra course. *Journal of Mathematical Behavior*, 16, 175-180.
- Steinberg, R.M., Sleeman, D.H. et Ktorza, D. (1990). Algebra students' knowledge of equivalence of equations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22, 112-121.
- Sutherland, R. (1993). Symbolising through spreadsheets. *Micromath*, 10(1), 20-22.
- Trouche, L. (2000). La parabole du gaucher et de la casserole à bec verseur : étude des processus d'apprentissage dans un environnement de calculatrices symboliques. *Educational Studies in Mathematics*, 41, 239-264.
- Vérillon, P. et Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts : A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology of Education*, 10, 77-101.

Pour joindre les auteurs

Carolyn Kieran
Dép. de mathématiques
Université du Québec à Montréal
C.P. 8888, succ. Centre-Ville
Montréal, QC H3C 3P8
kieran.carolyn@uqam.ca

André Boileau
Dép. de mathématiques
Université du Québec à Montréal
C.P. 8888, succ. Centre-Ville
Montréal, QC H3C 3P8
boileau.andre@uqam.ca

Luis Saldanha
Mathematics Department
Portland State University
Neuberger Hall, room 329
724 SW Harrison Street
Portland, OR 97201, USA
saldanha@pdx.edu

Fernando Hitt
Dép. de mathématiques
Université du Québec à Montréal
C.P. 8888, succ. Centre-Ville
Montréal, QC H3C 3P8
hitt.fernando@uqam.ca

Denis Tanguay
Dép. de mathématiques
Université du Québec à Montréal
C.P. 8888, succ. Centre-Ville
Montréal, QC H3C 3P8
tanguay.denis@uqam.ca

José Guzmán
CINVESTAV del IPN
Dep. de Matemática Educativa
Av. Instituto Politécnico Nacional 2508
Colonia San Pedro Zacatenco
C.P. 07360, Mexico, D.F.
Mexique
jguzman_mx@yahoo.com.mx