L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés

Actes du colloque emf 2006

La modélisation dans les classes du 2e cycle du primaire

Renée Caron, *professeure invitée, Université de Montréal, Canada*

Résumé

L'utilisation du concept de modélisation pour jeter un regard critique sur quelques activités produites dans un cadre interdisciplinaire d'enseignement et d'apprentissage nous amène à nous demander dans quelle mesure et dans quelles conditions la modélisation peut être accessible à des élèves du primaire comme semble le prescrire le Programme de formation de l'école québécoise. Elle nous amène aussi à nous poser des questions sur le sens de la discipline qui est véhiculé auprès des élèves par les biais des situations que nous leur proposons de traiter mathématiquement.

Au cours des dernières décennies, on a observé dans les programmes de formation, une tendance de plus en plus explicite à proposer un enseignement, ou plutôt, un apprentissage de la mathématique faisant appel à une activité de l'élève qui se rapproche progressivement de celle du mathématicien. La résolution de problème a d'abord été vue comme une manière, plus ou moins globale, d'y arriver sans qu'on en perçoive clairement « les tenants et les aboutissants ». Mais on s'est bien vite rendu compte que pour les enseignantes et les enseignants la résolution de problème renvoyait généralement à une activité qu'ils croyaient déjà faire et qu'on leur demandait de faire avec plus d'intensité, les problèmes d'application.

Le programme de formation de l'école québécoise

De nouvelles versions des programmes d'études ont donc succédé les unes aux autres tentant de préciser davantage le sens de l'activité mathématique et l'importance de rendre l'apprentissage de cette discipline pertinent pour les futurs citoyens. On retrouve donc ces deux préoccupations dans les pages du *Programme de formation de l'école québécoise*.

Ce programme qui propose de regrouper les apprentissages mathématiques sous trois compétences, rattache à la 1re compétence « Résoudre une situation-problème », la composante « Modéliser la situation-problème ». On y rattache aussi la composante « Décoder les éléments de la situation-problème » qui devrait être associée de près à la modélisation. Mais ces deux composantes semblent plutôt cohabiter ensemble et avec les trois autres qui portent sur l'application de stratégies, la validation et la communication, sans être reliées par un autre lien que la progression vers une solution et son explicitation.

On retrouve cette même cohabitation dans la section qui porte sur le « Cheminement de l'élève » :

> *Au deuxième cycle, l'élève réussit à dégager des données implicites de situations-problèmes et il accroît son aptitude à modéliser et à appliquer des stratégies variées. Il sait décrire sa*

démarche, expliquer les moyens qu'il a employés et peut s'intéresser à des façons de faire qui diffèrent des siennes (2001, p. 126).

Cela suppose donc que dès le premier cycle, l'enfant est initié à la modélisation, ce que propose le Programme dans des termes qui ne sont guère plus explicites pour le premier cycle que pour le deuxième cycle.

Au premier cycle, l'élève apprend à reconnaître les données pertinentes d'une situation-problème. Il établit un lien entre les données de la situation-problème et la tâche à réaliser. Il apprend également à modéliser une situation-problème, à appliquer différentes stratégies et à rectifier sa solution selon des résultats obtenus et ses échanges avec ses pairs (*Ibid*., p. 126).

Sens et limites de la modélisation au primaire

Jusqu'à récemment, quand on parlait de l'aspect mathématique de la modélisation au primaire, on le faisait généralement avec les enseignants des classes du 3^e^ cycle et on l'associait, le plus souvent, à la représentation du problème par une équation ou une suite d'équations alors que ce qui est intéressant dans un modèle c'est de dépasser la simple représentation pour le faire fonctionner « en vue de prévoir un comportement » (Serres et Farouki, 1997, p. 601) non seulement pour la situation qui a servi de point de départ à son élaboration mais pour plusieurs autres situations similaires dont on peut, jusqu'à un certain point, préciser les caractéristiques.

Mais dans quelle mesure peut-on parler de complexité dans la modélisation avec des élèves de 8-9 ans ? Cette démarche ne suppose-t-elle pas un minimum de connaissances et d'expériences mathématiques pour être reconnue comme utile et pertinente ? Autrement, ne risque-t-on pas de réduire la modélisation à une simple représentation qui ne peut déboucher sur aucune généralisation assez productive pour permettre à l'élève d'en entrevoir l'intérêt et la pertinence.

Il nous a semblé généralement plus facile d'aborder la modélisation dans un contexte purement mathématique à partir de l'exploration de régularités dans des suites de nombres ou des résultats obtenus en performant une suite d'opérations sur un nombre quelconque. Mais dans ces cas se pose quand même le problème de la symbolisation nécessaire à l'expression du modèle. Je prendrai un exemple assez simple pour illustrer cette difficulté des élèves de cet âge. Ceux-ci semblent pouvoir assez facilement dégager les régularités reliées à la parité ou non-parité des résultats de l'addition de nombres pairs ou impairs ou, à tout le moins, à y adhérer. Ils peuvent même expliquer dans leurs termes pourquoi l'addition d'un nombre impair à un autre nombre impair aura un résultat pair. Mais c'est une tout autre histoire quand il s'agit de donner un sens à des expressions telles que 2n + 1 même s'ils peuvent nous dire que pour un nombre impair, il reste une unité après qu'on ait fait des groupements de 2. Une représentation faisant appel à un symbole comme la case vide (2 ! + 1) ne semble pas faire plus image.

Tout au plus les élèves peuvent-ils se sentir à l'aise avec une représentation de leurs découvertes sous la forme d'un tableau comme celui qui suit.

+	P	I
P	P	I
I	I	P

Étrangement cependant, ils peuvent utiliser intuitivement le modèle pour faire des prédictions sur des résultats d'additions de plusieurs nombres mais toutes les étapes qui les amèneront à leur résultat se feront par un raisonnement sur chacun des couples de nombre mis en présence. La prédiction d'un résultat par des calculs sur les représentations formelles des nombres pairs (2n) et impairs (2n +1) relève de la pure mystification pour la presque totalité d'entre eux, même s'ils font référence aux concepts représentés par cette symbolisation. Il semble donc que la modélisation requiert une familiarité avec les symboles mathématiques et le sens de ces derniers.

La production de manuels scolaires

C'est dans le contexte de l'application du *Programme de formation de l'école québécois* que ma collègue Anne Roberge et moi avons été invitées à concevoir une collection de manuels s'adressant à des élèves du 2e cycle du primaire (8-9 ans). Cette collection fait partie d'un ensemble plus étendue à l'intérieur duquel se retrouvent des manuels pour l'apprentissage du français qui proposent de nombreuses activités reliées aux autres disciplines du programme, particulièrement l'étude de l'univers social, des sciences et de la technologie. Les domaines généraux de formation (vivre-ensemble et citoyenneté, santé et bien-être, orientation et entrepreneuriat, environnement et consommation, ainsi que médias) font aussi l'objet d'activités d'exploration et de réflexion dans ces manuels. Les manuels de mathématiques ont été élaborés en parallèle avec ceux du français et des autres disciplines, ce qui signifie qu'à la même période de l'année, nous devions aborder le contenu mathématique du programme à partir des thèmes déjà planifiés et auxquels nous avions adhéré au point de départ.

Nous avions convenu d'éviter le plus possible les situations où les mathématiques étaient utilisées de façon artificielle. Les situations-problèmes proposées aux élèves devaient donc faire la preuve que les mathématiques sont des outils utiles pour les représenter et contribuent à la production d'une solution et au développement des connaissances dans la discipline concernée. C'est généralement dans l'exploration du domaine de l'univers social (géographie, histoire et éducation à la citoyenneté) que nous avons trouvé les situations se prêtant le mieux à une représentation mathématique et la plupart du temps ces situations faisaient appel aux connaissances et habiletés de l'élève en statistique.

Les données sont généralement présentées sous forme de tableaux : l'élève doit alors les interpréter ou en tirer une information qui n'y est pas présente de façon explicite. Dans d'autres cas, l'élève peut être appelé à compléter un tableau à partir de données qu'il a recueillies ou qu'on lui a fournie ou, encore, à concevoir la structure du tableau qui va permettre de représenter ces données. Le fait d'avoir interprété des tableaux, ou peut-être simplement d'avoir développé une certaine familiarité avec ceux-ci, avant d'en construire semble favoriser une compréhension suffisante de ceux-ci pour lui permettre de résoudre les problèmes inhérents à leur construction.

Les deux thèmes retenus pour les besoins de cette présentation portent l'un sur la représentation de la population montagnaise dans les neuf communautés de cette nation amérindienne au Québec et l'autre sur la planification des jeux de groupe pour les périodes de récréations d'une semaine ou d'un mois dans le cadre de l'éducation à la citoyenneté.

La représentation des membres des communautés montagnaises

La première situation dont on peut trouver la présentation aux annexes 1A et 1B s'adresse à des élèves de 8 ans (1re année du 2e cycle). Les élèves disposent d'un certain nombre de données qu'ils doivent d'abord compléter avant de déterminer la structure du tableau dans lesquels ils les présenteront. Ici, la situation est complexifiée par le fait que les membres de la population montagnaise, comme ceux des autres nations amérindiennes, peuvent avoir un statut de résidants ou de non-résidants de la communauté à laquelle ils appartiennent. Les fiches présentées dans l'activité font, à peu de choses près, état de données telles que nous les avons nous-mêmes retrouvées dans les différentes sources d'informations dont nous avons pu disposer, à savoir que tantôt on pouvait trouver le nombre de résidants de la communauté et la population totale et tantôt, on pouvait trouver le nombre des résidants et de non-résidants sans avoir la population totale.

Bien que cette situation puisse sembler étrange, elle n'en est pas moins réelle[1] et nous avons décidé de l'utiliser pour proposer aux élèves une tâche qui devrait les amener à faire appel aux connaissances qu'ils ont acquises sur les tableaux de données pour élargir ce concept et en arriver à représenter à l'intérieur du tableau l'ensemble de l'information consignée sur les fiches.

Certains contesteront sans doute l'idée que le tableau soit en soi un modèle. Certes, le caractère de mobilité qu'il présente est différent de ce qu'on voit habituellement et on ne peut pas vraiment l'utiliser pour prévoir un résultat. En fait, la construction qui devrait résulter du travail et de la réflexion des élèves les amènera vraisemblablement à départager les données et à préciser celles qui donneront sa forme au tableau et permettront de rendre claire et facilement accessible l'information dont ils disposent. Ici la modélisation porte davantage sur la structuration de l'ensemble des données que sur la possibilité de faire fonctionner le modèle à des fins de prédiction. Toutefois, le concept de tableau, ou le modèle que les élèves ont en tête de celui-ci, est appelé à évoluer au cours de cette activité au fur et à mesure que les élèves prendront conscience des éléments qui déterminent la structure que doit prendre un tableau pour être un outil efficace de communication.

Pour arriver à réaliser la tâche, les élèves devront passer du niveau où ils devaient compiler les données selon un seul critère, ci-après[2], la saison au cours de laquelle ils sont nés.

1 En conservant aux données, leur caractère incomplet, nous avons voulu refléter, pour les élèves, des situations auxquelles nous avons souvent été confrontées dans notre travail, situations qui nous obligeaient à combiner l'information provenant de plusieurs sources pour dégager un portrait global des divers sujets sur lesquels portait notre recherche.

2 Caron, R. et Roberge, A. (2002). *Mes ateliers de mathématique – manuel A*. Bouchereville Qc : Graficor.

Saison au cours de laquelle les élèves sont nés			
Printemps	Été	Automne	Hiver
10	7	4	7

À une situation où le critère portant sur le nombre de membres de chaque communauté est subdivisée pour tenir compte du fait qu'un membre de la communauté peut être résidant ou non-résidant comme dans les représentations des tableaux qui suivent[3].

Population montagnaise du Québec en 2002			
Communauté	Résidants	Non-résidants	Population totale
La Romaine			
Mingan			
...			
...			

	Communauté		
	La Romaine	Mingan	...
Résidants			
Non-résidants			
Population totale			

Il est fort vraisemblable cependant que plusieurs élèves, sinon la majorité passeront par une étape intermédiaire au cours de laquelle ils vont d'abord regrouper ensemble et dans le même ordre le nombre des résidants, celui des non-résidants et celui de la population totale comme dans le tableau présenté à la page suivante, restant ainsi très assez du modèle qui leur est familier.

Nom de la communauté	Nombre de personnes
Mingan	449 – 14 – 463
La Romaine	861 – 52 – 913
………….	………………..

3 Caron, R. et Roberge, A. (2003). *Mes ateliers de mathématique – manuel B*. Boucherevillle : Graficor

C'est en l'analysant à la lumière des critères de lisibilité qu'ils pourront voir comment ils peuvent l'améliorer pour le rendre plus explicite. Cette démarche n'est certainement pas étrangère à celle qu'on utilise pour analyser le niveau d'efficacité des modèles.

La planification des jeux de groupe pour les périodes de récréation

Cette situation s'adresse à des élèves au début de la 4e année de leurs études primaires. On en trouvera une présentation à l'annexe 2 du présent document. Elle demande aux élèves de tenir compte de la répartition d'un certain nombre de choix à l'intérieur de leur groupe-classe, le choix du jeu de groupe préféré de chacun, pour produire une autre répartition, celle du nombre de périodes de récréation qui seront allouées à chacun de ces jeux. Comme les élèves ont une connaissance assez élémentaire des fractions et qu'il est peu probable que l'on puisse faire cette répartition par un simple jeu de fractions équivalentes, la mise au point d'un modèle de répartition à partir d'un nombre réduit de critères pourra possiblement être envisagée.

Supposons, par exemple, que les choix des élèves se répartissent comme suit dans une classe de 23 élèves :

Drapeau	Ballon-poire	Cachette
14	6	3

et qu'il y ait 15 périodes de jeux de groupe pendant une semaine. Les élèves pourront faire appel à certains rapports entre les nombres pour se guider comme le fait qu'il y a un peu plus de la moitié des élèves qui ont choisi le jeu de drapeau et qu'il y a deux fois plus d'élèves qui ont choisi le ballon-poire qu'il y en a qui ont choisi la cachette. Ces deux rapports pourront les guider pour élaborer une répartition satisfaisante même si les nombres en présence ne permettent qu'une utilisation approximative de ceux-ci. Les élèves qui présenteront des propositions devront les défendre en faisant appel à des critères d'éthique tout en ne s'éloignant pas trop des proportions des choix exprimés par chacun.

Il sera sans doute assez normal de proposer que la majorité des périodes de récréation soient consacrées au jeu de drapeau étant donné que c'est le choix du plus grand nombre d'élèves. Avant de déterminer le nombre de périodes de récréation consacrée à ce jeu, on pourra cependant vérifier si ce nombre permet de respecter la proportion des deux autres choix avec les périodes restantes. Si on choisit de planifier 8 périodes de jeu de drapeau, il en restera 7 pour les deux autres jeux, ce qui rendra impossible la répartition du simple au double pour ces jeux. Par contre, si on choisit de planifier 9 périodes de jeu de drapeau, il sera possible de répartir les 6 périodes qui restent de telle façon que les périodes de jeu de ballon-poire puisse être deux fois plus nombreuses que les périodes de jeu de cachette. Comme dans beaucoup de situations de modélisation, une fois les solutions possibles trouvées, il faut faire le choix de celle qui convient le mieux.

Pour proposer des solutions à cette deuxième activité, les élèves se référeront au concept de fraction mais il est peu probable qu'ils aient recours à une représentation formelle de ce celui-ci à moins que le nombre de périodes soit égal au nombre d'élèves ou soit un multiple de ce nombre. Comme dans le cas de la parité des nombres, mentionné au début de ce texte, c'est par une compréhension intuitive du concept en jeu, à laquelle s'ajoute ici une application approximative de celui-ci, que l'élève sera guidé vers la production d'une solution acceptable. Les élèves auront en tête une idée claire des rapports en jeu mais la solution ne sera pas encore élaborée par une simple application de calculs à partir de ces rapports.

Conclusion

Comme on vient de le voir, l'activité de modélisation avec de jeunes élèves présente quelques difficultés. Elle s'élabore souvent par l'utilisation intuitive de certains concepts qui les guident vers l'élaboration d'une démarche dont les étapes sont liées par un raisonnement qui, bien qu'il puisse être explicité verbalement, ne peut être représenté formellement par l'élève. Il ne retrouvera généralement pas, dans un modèle formel qu'on lui propose, l'expression de la démarche qu'il a lui-même suivie.

Il semble aussi que les apprentissages de certaines disciplines se prêtent mieux que d'autres à la représentation mathématique et à la modélisation. Si tel est le cas pour le domaine de l'univers social, par exemple, est-ce que cela ne présente pas le risque que le choix de ce champ de connaissances devienne la solution facile quand nous avons à introduire un nouveau concept et cherchons un moyen d'en présenter une utilisation pertinente. Est-ce qu'on ne risquerait pas de l'« hyper-mathématiser » dans certains cas ? Est-ce qu'on ne risquerait pas de transformer cette discipline en un champ d'application des mathématiques tout simplement ? Est-ce qu'on ne risquerait pas d'exagérer le traitement mathématique des connaissances de cette discipline au détriment d'autres traitements qui pourraient être plus pertinents ?

Dans le cadre de notre projet, qui concernait les deux années du 2e cycle du cours primaire, nous remarquons que nous avons fait appel aux statistiques sur les populations à deux reprises pour deux époques distinctes de l'histoire du Québec. La représentation et l'étude statistique des populations sont-elles des éléments vraiment importants du domaine de l'univers social que les élèves doivent explorer à cet âge et, dans quelle mesure ? Bien que nous ayons exploré mathématiquement d'autres éléments historiques avec les élèves comme le troc et le système monétaire en vigueur en Nouvelle-France de même qu'une comparaison entre ce système monétaire et celui que nous utilisons actuellement, le fait que nous ayons eu recours à deux reprises aux statistiques sur les populations pour proposer des situations d'utilisation de la mathématique à l'intérieur d'un même cycle de deux ans incite à réfléchir.

Pour prévenir certains glissements dans l'utilisation des données provenant de d'autres disciplines scolaires, il nous semble important de maintenir des liens étroits avec les représentants de ces disciplines et de bien connaître les orientations reliées à l'apprentissage de celles-ci.

Références

Caron, R. et Roberge, A. (2002). *Mes ateliers de mathématiques*. Boucherville : Graficor.

Ministère de l'Éducation du Québec (2001). *Programme de formation de l'école québécoise – Éducation préscolaire – Enseignement primaire*. Québec : Gouvernement du Québec.

Serres, M. et Farouki, N. (1997). *Le trésor – Dictionnaire des sciences*. Paris : Flammarion.

Pour joindre l'autrice

Renée Caron
Université de Montréal
Adresse postale : 1325, Boisbriand, St-Bruno-de-Montarville, Québec, Canada, J3V 4K6
Courriel : renee.caron@umontreal.ca

Annexe 1A

atelier 1

SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE
L'analyse de données numériques, chapitre 6

J'explore et je résous...

Quelles nations amérindiennes vivent au Québec ? Où vivent-elles ?

Quelques statistiques

Quel tableau statistique peux-tu faire pour représenter la population montagnaise du Québec ?

Voici des données sur la population des communautés montagnaises du Québec en 2002.

Mingan
Résidants : 449
Non-résidants : 14
Population totale : ?

La Romaine
Résidants : 861
Non-résidants : ?
Population totale : 913

Matimekosh
Résidants : ?
Non-résidants : 71
Population totale : 771

Essipit
Résidants : 182
Non-résidants : 200
Population totale : ?

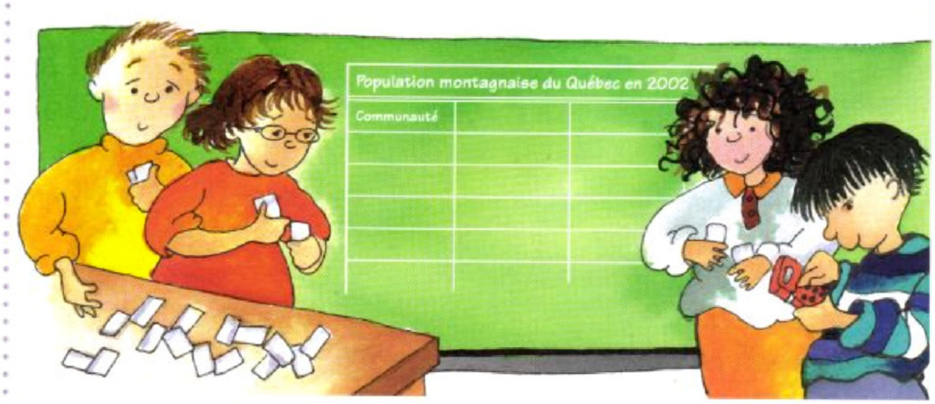
Pakuashipi
Résidants : 257
Non-résidants : 2
Population totale : 259

Natashquan
Résidants : ?
Non-résidants : 60
Population totale : 819

Betsiamites
Résidants : 2521
Non-résidants : 626
Population totale : ?

Mashteuiatsh
Résidants : 1960
Non-résidants : 2595
Population totale : ?

Uashat et Maliotenam
Résidants : 2600
Non-résidants : ?
Population totale : 3183



82 Premiers habitants

Annexe 1B

Trouve l'information manquante.

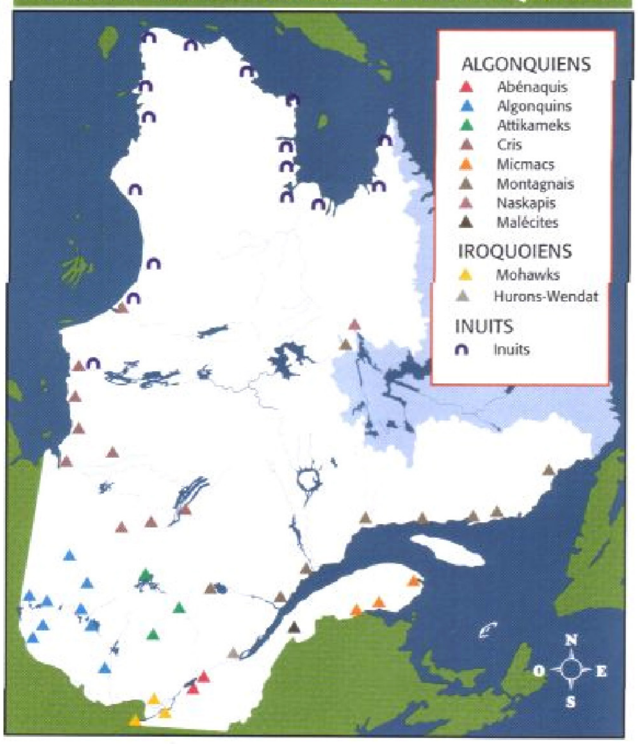
Avec des camarades, décide de la façon d'organiser les données dans un tableau.

Préparez un tableau de données.

En 2002, la population autochtone au Québec se répartit comme suit :

- Amérindiens : 63 315
- Inuits : 9329

COMMUNAUTÉS AUTOCHTONES AU QUÉBEC



Observe les liens entre les données. Classe l'information avant d'organiser ton tableau.

Il y a trois familles autochtones au Québec : les Algonquiens, les Iroquoiens et les Inuits. Les Algonquiens et les Iroquoiens sont des familles amérindiennes. La nation inuite représente une famille distincte.

Décris la démarche que tes camarades et toi avez suivie pour construire votre tableau statistique.

- En quoi les tableaux statistiques de la classe sont-ils semblables ? différents ?
- Quelles observations peux-tu faire à partir de la lecture de ton tableau ?

Dis ce que tu as appris au sujet des communautés montagnaises du Québec en faisant ce travail.

Premiers habitants 83

Annexe 2

atelier 3

SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE
Les fractions, section **1.3**
Statistique, chapitre **6**

J'explore et je résous...

Quels jeux de groupe préfèrent les élèves de ta classe?
Comment peux-tu utiliser la mathématique pour t'assurer que le choix des jeux respecte les goûts et les intérêts de chacun?

Une planification au goût de tous

Planifie des jeux de groupe pour les récréations d'une semaine ou d'un mois.

Même avec les fractions, ce n'est pas toujours facile d'être parfaitement précis.

Note le nom des jeux de groupe préférés des élèves de ta classe.
Indique le nombre d'élèves de la classe qui ont choisi chaque jeu.
Représente ce nombre par une fraction.

Propose une planification en tenant compte le plus possible des goûts de chacun de tes camarades.

Nomme les notions mathématiques qui t'ont été utiles pour faire cette activité.
Nomme d'autres activités de ta vie en classe et en famille où la mathématique peut permettre de tenir compte des goûts et des intérêts de chacun.

16 Vivre ensemble