Exponentielle au-delà du baccalauréat, exponentielle en deçà

Catherine Sackur - Maryse Maurel

Résumé: Nous présentons un dispositif d'enseignement développé dans le cadre d'une Unité de Méthodologie sous le nom de Raisonnement Scientifique. Nous montrons comment, en jouant sur les contraintes de la situation d'enseignement, nous obtenons de la majorité des étudiants une activité mathématique et une posture se rapprochant par certains points de celles d'un mathématicien. Nous insistons en particulier sur le travail du professeur et sur la rigidité du cadre de travail qui offre aux étudiants un espace de liberté.

I. Introduction, problématique

Depuis quelques années, notre travail de recherche est centré sur une interrogation : sous quelles conditions pouvons-nous qualifier de mathématique l'activité des élèves et étudiants en classe ? Cette problématique est dans la droite ligne de nos travaux antérieurs sur les trois orientations de l'activité de l'élève (Léonard & Sackur 1991), même si ceux-ci étaient centrés davantage sur le sujet isolé, plutôt que le sujet dans le groupe classe. Notre préoccupation principale est toujours d'étudier les conditions qui permettent à un sujet de construire ses connaissances mathématiques personnelles en accord avec les mathématiques de la communauté des mathématiciens. Le travail que nous présentons ici a une double origine : d'une part une observation d'un travail réalisé en DEUG MASS[1] dans le cadre de l'unité de méthodologie " raisonnement scientifique " (RS), sur les fonctions exponentielles, d'autre part des réflexions menées tout au long de l'année scolaire 2002-2003 sur l'introduction de la fonction exponentielle à partir de son équation différentielle. Ces réflexions servent de ligne directrice à l'analyse des productions des étudiants de DEUG qui constitue l'essentiel de cette présentation.

En ce qui concerne l'enseignement décrit ici, les documents mathématiques ont été entièrement conçus par F. Pham, professeur de mathématiques à l'Université de Nice ; l'organisation concrète des séances a été pilotée par M. Maurel selon un dispositif que nous avons mis au point et expérimenté en 1998 et que nous reproduisons depuis, quand nous en avons la possibilité. Une description de ce dispositif se trouve dans Sackur & Maurel 2000 et Maurel 2001.

I. 1. Problématique du programme de Terminale Scientifique (TS)

Dans le nouveau programme de TS, la fonction exponentielle est introduite comme réponse au problème suivant : existe-t-il une fonction mathématique qui rende compte d'une évolution telle que la croissance d'une population ou les phénomènes de radioactivité ? L'intérêt de cette question est évident dans l'optique d'un enseignement des mathématiques en liaison avec les autres sciences (physique, biologie économie…)

[1] Le DEUG "Mathématiques Appliquées aux sciences Sociales" comprend des enseignements de mathématiques, économie et informatique.

I. 2. Problème didactique et quelques remarques *a priori*

I. 2. 1. La réponse institutionnelle, à travers la lecture des programmes de TS

Le libellé du programme est le suivant :

> Étude de la fonction exponentielle : Étude de l'équation différentielle $f'=kf$.
>
> Théorème : Il existe une unique fonction f, dérivable sur R telle que $f'=f$ et $f(0)=1$.
>
> Relation fonctionnelle caractéristique, etc…

Le paragraphe "modalités de mise en œuvre" précise :

> L'étude de ce problème pourra être motivée par un ou deux exemples, dont celui de la radioactivité traité en physique…
>
> On construit avec la méthode d'Euler des représentations approchées de f dans le cas k=1 ;…
>
> L'unicité sera démontrée, l'existence sera admise dans un premier temps. Elle sera établie ultérieurement à l'occasion de la quadrature de l'hyperbole.

Les "commentaires" ajoutent :

> Ce travail sera fait très tôt dans l'année … Il fournit un premier contact avec la notion d'équation différentielle et montre comment étudier une fonction dont on ne connaît pas une formule explicite.…

Nous pouvons faire, à la lecture du programme, quelques remarques *a priori* qui guideront notre lecture du travail des étudiants de DEUG.

- <u>L'origine du problème mathématique</u> : on peut obtenir l'équation différentielle $N'=kN$ à partir des propriétés des corps radioactifs (le taux de variation du nombre de noyaux radioactifs pendant le temps Δt, $\Delta N(t)/N(t)$, est proportionnel à Δt et indépendant de t). Ceci est fait par un calcul formel présenté aux élèves par le professeur.
- <u>L'existence et l'unicité</u> : démontrer l'unicité signifie que l'équation différentielle avec la condition initiale "caractérise" la fonction exponentielle. La nécessité de cette condition initiale reste implicite d'autant qu'il n'a jamais été démontré que les fonctions constantes sont les seules fonctions dont la dérivée est nulle. Cette dernière propriété est, pour les élèves, une réciproque "naturelle" (un théorème en acte) de la propriété : "la dérivée d'une fonction constante est nulle".
- <u>Le premier contact avec la notion d'équation différentielle</u> : on travaille sans définition de l'objet "équation différentielle" et l'on a, dans le même temps, à la fois une première approche de cette notion et son utilisation pour construire la fonction clef de tout le programme d'analyse de terminale. Il est permis de penser que cela fait beaucoup d'intuitif à gérer pour des élèves auxquels on doit néanmoins demander de s'intéresser à la <u>démonstration</u> de l'unicité et des propriétés de la fonction.

I. 2. 2. Une réponse singulière : l'enseignement de DEUG MASS $1^{ère}$ année à Nice

L'enseignement de l'unité Raisonnement Scientifique a été conçu pour donner l'occasion aux étudiants de revisiter des connaissances acquises en terminale, sans leur en apporter de nouvelles. La description de cet enseignement est faite dans la communication de Maryse Maurel. Les étudiants dont nous présentons le travail provenaient essentiellement de terminale scientifique et pour certains de terminale à dominante économie. Pour la très grande majorité d'entre eux, l'apprentissage de la fonction exponentielle s'était déroulé selon le schéma suivant : étude de la fonction logarithme népérien définie comme primitive de la fonction inverse. Fonction exponentielle comme bijection réciproque de la fonction logarithme. Extension de la notion de fonction puissance x^n (n entier, x réel) par la formule $x^\alpha = \exp(\alpha \ln x)$ (α réel, x réel positif).

II. Analyse de l'enseignement du DEUG MASS

II. 1. Les documents de travail des étudiants

Les étudiants disposent de deux types de polycopiés, des feuilles d'exercices et des feuilles correspondant aux cours. Les feuilles d'exercices présentent différentes courbes et les étudiants doivent effectuer des tracés qui leur permettent de découvrir les propriétés des sous tangentes et les propriétés d'invariance par changement d'échelles ou/et d'origine. C'est un travail de type "expérimental" très inhabituel pour eux. Ces critères leur servent ensuite à faire le tri entre les courbes de fonctions exponentielles et les autres. C'est un des points sur lesquels ils travaillent les notions de réciproques.

II. 2. Présentation du travail des élèves tel qu'ils en parlent dans leurs mémoires

Nous présentons ici le travail de Gaëlle, d'abord sur les fonctions exponentielles, puis sur les fonctions puissances, tel qu'il est décrit dans son mémoire partiel et repris pour l'essentiel dans le mémoire final. Cet exposé, l'un des plus complets, montre le point auquel sont parvenus les élèves qui ont fourni le travail le plus soutenu sur le plan mathématique. Cette étudiante expose de façon détaillée les difficultés qu'elle a rencontrées à propos des réciproques puis résume le travail des cinq semaines. Les implications signalées dans le texte par "⇒" sont de Gaëlle.

Fonctions exponentielles :

- Travail graphique
- Traduction algébrique si $t_2 - t_1 = t'_2 - t'_1$, u est exponentielle $\Leftrightarrow u(t_2)/u(t_1) = u(t'_2)/u(t'_1)$ (C1)

⇒ une méthode graphique pour déterminer si une courbe peut représenter une fonction exponentielle.

- Fonction exponentielle est solution de $du/dt = \lambda u \quad \lambda \neq 0$ (Eλ)` (C2)
- Si u est solution de l'équation différentielle alors la sous-tangente est constante et égale à $1/\lambda$.
- Pour les courbes et les équations différentielles, invariance d'échelle en ordonnée et par transformation affine sur les abscisses.

$\Rightarrow$ l'inutilité des graduations.

$\Rightarrow$ le graphe d'une fonction exponentielle peut représenter n'importe quelle autre fonction exponentielle.

- Question personnelle : quelle est la place de la fonction e^x dans les fonctions exponentielles ?

Fonctions puissances :

- Question personnelle : les fonctions puissances ont-elles les mêmes propriétés que les fonctions exponentielles ?
- Caractéristique géométrique : la sous-tangente est inversement proportionnelle à α.

$\Rightarrow$ la détermination de α en l'absence de graduation et une caractérisation des fonctions puissances.

Question personnelle : quel est le lien entre tangente et courbe ?

Question personnelle : travail sur les réciproques des énoncés.

Lien entre exponentielles et puissances :

- Dans le mémoire partiel :
    - elles ont les mêmes caractéristiques (propriété inexacte).
    - elles peuvent s'écrire chacune sous la forme de l'autre (en utilisant la fonction logarithme népérien).
- Dans le mémoire final :
    - non, elles ne vérifient pas la même équation différentielle.
    - elles peuvent s'écrire chacune sous la forme de l'autre (en utilisant la fonction logarithme népérien).

Nicolas, dans son mémoire partiel, annonce d'abord qu'il a bien compris le problème des réciproques de propriétés et en donne un exemple. Ensuite il fait le point sur les liens entre fonction puissance et fonction exponentielle. Il répond alors, de façon parfois erronée, à quelques questions qu'il s'est lui même posées.

- Une fonction puissance est-elle une fonction exponentielle de base e ? Il utilise le critère (C1). La réponse est oui.

- Il en conclut à l'existence d'un "problème de taille" ! Il connaît le critère (C2) que ne remplit pas la fonction puissance. Il conclut : " Donc l'implication suivante est fausse : *si f vérifie la propriété fondamentale des exponentielles, alors f vérifie (Eλ).* (Il note la contradiction).
- Il tente une troisième méthode, la relation fonctionnelle et conclut : *" une fonction puissance n'est pas une fonction exponentielle de base e.* "
- Il pose alors une dernière question à laquelle il répond par la négative : " toute fonction dérivable est-elle une fonction exponentielle ? ". Il écrit $h(x)= \exp(\ln(h(x)))$ et s'intéresse au domaine de définition, ce qui le conduit à sa conclusion.

Dans son mémoire final, il reste une erreur. On constate que cet étudiant fait preuve d'une grande inventivité. Il explore les mathématiques dans des directions qui ne lui sont pas dictées mais qu'il a librement choisies. Il a bien compris le problème de la caractérisation de la fonction exponentielle par son équation différentielle.

Aurélie écrit[2] : " Une courbe représentant une fonction exponentielle doit <u>répondre à plusieurs critères</u>. Si cette courbe vérifie les tests, il y a, alors, une <u>grande présomption</u> pour que la courbe soit une fonction exponentielle. Si un seul des tests échoue, c'est que la courbe n'est **CERTAINEMENT PAS** une fonction exponentielle. " (Suivent les caractéristiques déjà vues).

III. Analyse avec les outils de la didactique

III. 1. Le temps didactique et le temps personnel

On a ici un exemple intéressant d'enseignement dans lequel l'avancement du temps didactique (Mercier 1995) est très souple. Il y a des cours, avec apport d'information, et des travaux dirigés, donc le temps didactique avance sous le contrôle des enseignants, mais le temps prévu pour ce travail est long. La lecture des comptes-rendus et des mémoires montre le décalage habituel entre les temps personnels des étudiants et le temps didactique. Cependant le dispositif, grâce aux retours en arrière qu'il permet, organise un espace dans lequel l'apprentissage peut continuer de façon explicite et dans une interaction avec l'enseignant. L'existence des temps personnels des étudiants est prise en compte et on en voit les effets.

III. 2. Les orientations du travail des élèves

De nombreux mémoires et comptes-rendus hebdomadaires montrent les étudiants aux prises avec des questions mathématiques qu'ils se sont eux-mêmes posées. Les formulations à la première personne ainsi que les

[2] Les variations de typographie sont d'Aurélie.

reformulations des propriétés que les étudiants font avec leurs propres mots montrent qu'ils ne se contentent pas de reproduire les énoncés du cours. Nous disons (Léonard & Sackur 1991) que le fait de se choisir soi-même comme référent pour son activité mathématique est caractéristique d'une orientation de travail que nous nommons compréhension. Nous en avons un exemple avec la caractérisation de la fonction exponentielle par son équation différentielle. D'après notre modèle, quand un étudiant dit que la solution d'une équation $f'=kf$ est $f=\exp(kx)$, il peut travailler soit en conformité (*je réponds ce que le professeur attend de moi*), soit en performance (*je réponds ce que je sais être le résultat qui permet de résoudre le problème*), soit en compréhension (*je donne la réponse qui s'inscrit en cohérence dans mes connaissances mathématiques*). Le contraste entre Elodie d'une part et Nicolas ou Aurélie est frappant. Elodie énonce les propriétés (C1) et (C2) mais elle ne semble pas avoir vu qu'il s'agit de propriétés caractéristiques et elle ne mentionne pas d'équivalence entre elles. Elle ne travaille sans doute pas en compréhension, mais en conformité. Pour nous, un mathématicien expert sait travailler dans les trois orientations, mais la compréhension est particulièrement importante au début d'un apprentissage pour que puissent se mettre ensuite en place des règles de conformité que l'étudiant sache contrôler.

III. 3. Une connaissance implicite

Nous mentionnons rapidement une connaissance dont on ne peut se passer pour faire des mathématiques (dont l'énoncé peut prêter à sourire) : "Une propriété caractéristique caractérise". C'est ce qui permet, par exemple, à Cécile d'écrire : " il m'a surtout été difficile de réaliser que e^{ax^2+b} n'était pas une exponentielle. Auparavant, j'ai toujours considéré que tout ce qui s'écrivait "*e*" de quelque chose était une exponentielle… ". Nicolas fait le même type de constatation.

Ce type de propriété reste le plus souvent implicite dans l'enseignement mais l'étude des travaux des étudiants de DEUG montre que son acquisition n'est pas simple (voir Elodie et elle n'est pas la seule). Dans l'enseignement de TS elle reste implicite : démonstration de l'existence et de l'unicité de la solution de l'équation différentielle..

Elle est explicitement travaillée dans l'enseignement de MASS.

IV. Conclusion

Nous avons souhaité présenter un enseignement qui permet d'harmoniser l'avancement du temps didactique et du temps personnel des étudiants. Une autre caractéristique en est qu'il laisse aux étudiants une grande latitude pour avoir une activité mathématique centrée sur leur compréhension des problèmes et leur donne une grande liberté pour explorer les connaissances mises en jeu. La lecture de leurs mémoires et comptes-rendus montre qu'ils usent de cette liberté inhabituelle pour eux.

Les résultats de cet enseignement nous font souhaiter qu'on s'en inspire pour permettre aux lycéens de terminale d'aborder dans des conditions optimales le nouveau programme de mathématiques. En particulier on peut se demander si cet enseignement ne fournirait pas une très bonne situation adidactique pour l'introduction de la fonction exponentielle. Une étude plus approfondie permettrait d'en décider.

Références

LEONARD F. & SACKUR C. (1991), Connaissances locales et triple approche, une méthodologie de recherche. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 10 (2/3), pp. 205-240.

MAUREL M. (2001), Derrière la droite, l'hyperplan. *Repères-IREM* 42, pp.83-114

MERCIER A. (1995), La biographie didactique d'un élève et les contraintes temporelles. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 15 (1), pp. 97-142.

SACKUR C. & MAUREL M. (2000), Les inéquations en classe de seconde. Une tentative pour enseigner la nécessité des énoncés mathématiques. *Petit x* 53, pp. 5-26.