Transpositions

Georges GLAESER

I DEUX FACONS DE S'INSTRUIRE

L'acquisition des connaissances et des habitudes s'obtint pendant longtemps grâce à un *apprentissage sans enseignement*. La formation professionnelle se dispensait en famille. Peu de personnes fréquentaient les rares "Boutiques" où l'on enseignait à lire ou à écrire. Monsieur Jourdain apprit à s'exprimer en prose, sans qu'on le lui ait enseigné !

La situation a radicalement changé au cours des deux derniers siècles. Néanmoins, ce n'est pas à l'école que nous avons appris presque tout ce que nous savons faire ... D'ailleurs on ne fréquente l'institution scolaire que pendant une faible fraction de la vie... Et les heures d'attention effective constituent peu de temps par rapport à la présence en classe.

C'est à côté ou autour de l'école que se font la plupart des apprentissages.

* Exemple :

Evoquons ces adultes contraints d'émigrer dans un pays dont ils ignorent la langue. Souvent ils finissent par savoir s'exprimer sous l'effet du flot verbal intensif qu'ils subissent de la part de leur entourage. ,

Cet *apprentissage sans enseignement* présente les caractères suivants : le bain linguistique auquel ils se soumettent n'a pas été aménagé à des fins pédagogiques. Il n'est pas adapté au niveau de *l'apprenant*. Les difficultés se présentent d'une façon aléatoire, comme cela se produit dans la vie.

L'autre méthode consiste à se soumettre à un *enseignement*. On s'expose à un flot linguistique *artificiel* préparé par un personnel spécialisé (professeurs, auteurs de manuels...). L'élocution est ralentie à dessein, la prononciation spécialement aménagée, le mouvement de la bouche est analysé, décomposé, schématisé... Des générations de philologues ont élaboré la *grammaire*, ajout théorique à une réalité linguistique.

Enfin, à côté de la matière enseignée, on a composé des *exercices* destinés à entraîner *l'apprenant*, souvent en l'absence du maître, ou hors de l'école. L'équilibre entre le *cours* magistral et les *activités* de l'élève est devenu (assez tardivement dans l'histoire) un trait caractéristique de l'enseignement (III.6)

I 1

On appelle **TRANSPOSITION** une modification volontaire apportée au domaine d'étude; pour en faciliter l'apprentissage. Un **enseignement** est un dispositif d'apprentissage qui exploite systématiquement des transpositions.

L'intensité de ces transformations des savoirs au cours de l'enseignement augmente considérablement depuis un siècle.

Pendant longtemps, les transposition ont été pratiquées sous une forme si rudimentaire qu'on a peine à reconnaître le phénomène. Il en est ainsi pour des pédagogies qui sont encore largement utilisées de nos jours à des fins d'endoctrinement.

La matière est alors figée dans des textes dont on exige la restitution mot à mot (mais pas nécessairement la compréhension). Il en est ainsi pour des manuels d'instruction militaire ou religieuse et autres "petits livres rouges" qui s'enseignent par un système choral d'antienne et répons ou encore de chœurs parlés.

C'est aussi sous une forme moins rudimentaire, mais autour d'un texte vénérable qu'on enseignait jadis Aristote, Hippocrate ou Euclide.

Mais ce schéma - si grossier fut-il - subissait des transpositions nombreuses, notamment par l'adjonction de commentaires, d'abord facultatifs. Ces gloses finissaient par être adjointes au texte même.

I 2

LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE
du savoir savant au savoir enseigné

C'est le titre d'un livre d'Yves Chevallard, publié en 1985. On le notera (Y.C) dans la suite.Voir Freudenthal 1986. Il connaît un grand succès chez certains didacticiens rassemblés autour de notre revue "Recherches en didactique des mathématiques" désignée par (R.D.M.) : j'ai fait de nombreuses lectures attentives de (Y.C) m'efforçant de ne pas me laisser distraire par des détails sans importance. Le moins qu'on puisse dire est que je ne partage guère l'enthousiasme que l'ouvrage a provoqué.

Mon désaccord se manifeste sous trois aspects :

a) Dés le début (Y.C) glisse imperceptiblement dans son texte quelques *postulats implicites*. Ce sont des affirmations qu'on ne met même pas provisoirement en doute. Pourtant, ils conditionnent le reste de l'ouvrage.

b) Le désaccord s'accroît presque chaque fois que Chevallard prétend apporter des *faits* à l'appui de ses thèses. Il les rapporte d'une façon critiquable ; il les interprète d'une façon autre que je le ferais...

Nous en donnerons quelques exemples patents dans la suite. En fin de compte, je ne retiens, dans tout l'ouvrage, que quelques remarques pertinentes, notamment aux pages 14 - 35 - 51 - 72 – 73.

c) L'ouvrage *ferme à l'avance toutes les possibilités de débat*. Il raille par avance (sans arguments suffisants) toutes les objections qui me viennent naturellement à l'esprit. Que le lecteur de (Y.C) ne se laisse pas intimider par ce "terrorisme intellectuel'. (Un exemple typique se trouve aussi chez Alain Mercier. - Voir la fin de IV.3).

Le présent article essaie de reprendre l'analyse des transpositions dans une perspective moins dogmatique. Il constitue une mise en garde contre une lecture naïve et bienveillante de (Y.C).

Pour éviter tout amalgame, je n'accompagne pas le mot transposition d'un qualificatif lorsqu'il s'agit de ma conception (même si dans bien des cas l'adjectif didactique puisse s'imposer).

Le présent document n'est que la première partie d'un travail : il est consacré à l'exposé de mon point de vue et à la critique des conceptions d'Yves Chevallard.

Un autre texte (Glaeser 1987) viendra compléter celui-ci. Il s'agit d'une *esquisse de l'**histoire** des transpositions dans l'enseignement mathématique*. (Non ! Les transpositions ne constituent pas un *thème neuf*... contrairement à ce qu'écrit, (Y.C.) page 9). L'histoire nous apprend que ce concept n'a cessé de se produire, depuis le début de l'enseignement.

Voir en annexe "Elaboration du stock d'énoncé qui prouve l'historicité de la transposition" (4 pages).

Tout ce que Chevallard ignore est un thème neuf ! Le danger de ce chevallardisme, apparaît lorsque des gens prennent au sérieux ses affirmations gratuites. Par exemple dans "Artigue RDM Vol 10/23 page 245" Michèle Artigue écrit : "Yves Chevallard a importé, en didactique des mathématiques, la notion de transposition didactique initialement due à Verret (1975)".

Il s'agit là d'un anachronisme de plus de 2000 ans. Mais (Y.C) a découvert ce texte récent au hasard de ses lectures et en a conclu que c'était la première apparition.

II LE NOEUD DU DEBAT

Les didacticiens expérimentaux semblent s'accorder pour situer les phénomènes d'apprentissage de courte durée, quelques heures par jour, au plus, au sein de ce qu'on appelle : des SITUATIONS DIDACTIQUES.

SD

Celles-ci font intervenir trois types d'actants :

a) **Des** *étudiants* (d'âge scolaire ou non).

b) **Des** *domaines d'études* (connaissances ou habitudes).

c) **Des** *agents éducatifs* (enseignants, condisciples, livres, matériels pédagogiques, ces derniers constituent ce qu'on appelle l'INGENERIE dans le langage des didacticiens,...).

Chaque actant intervient avec ses *finalités* propres. Il résulte des conflits, plus ou moins régulés par des *contrats didactiques* (Brousseau) ou *pédagogiques* (J. Filloux).

Les tensions ainsi provoquées se résolvent quelque fois par des franchissements irréversibles de seuils.

(G. Glaeser 1984)

(Y.C) et quelques autres croient pouvoir décrire le même modèle sous une forme simplifiée. Peu importe qu'on parle ici de *système* (*et non de situations*) ; mes objections restent valables dans les deux cas.

SDbis

"Le didacticien des mathématiques s'intéresse au jeu qui se mène, tel qu'il peut l'observer puis le *en nos classes concrètes* - entre **un** enseignant, **des** élèves et **un** savoir mathématique.

Trois places donc : c'est **le** système didactique.

Une relation **ternaire** : c'est **la** relation didactique"

(Y. Chevallard p. 12)

Certains n'aperçoivent que des nuances anodines et pédantes entre (SD) et (SDbis) : cette dernière ne serait après tout qu'un raccourci rhétorique renvoyant à un modèle plus nuancé.

En fait, c'est sur les différences profondes qui séparent les deux formulations (et certains mots que j'y ai soulignés) que portera essentiellement ma critique.

C'est l'emploi du *singulier* (qui exprime implicitement l'unicité de la transposition) qui me choque le plus.

Faut-il rappeler que des obstacles épistémologiques particulièrement tenaces se sont appuyés jadis sur de tels postulats ? On a longtemps cru à l'existence d'**une** géométrie, science de l'espace ! Ce n'est qu'un demi-siècle après l'apparition des géométries non-euclidiennes que l'on commença à étudier de nombreux espaces porteurs de structures diverses...

(SD) s'efforce de couvrir la plupart des situations didactiques usuelles (par exemple : toutes celles qui interviennent dans les travaux publiés dans R.D.M : Perret-Clermont 1979 ; Brousseau (Cas de Gaël) ; Régine Douady).

II. 1 Par contre (SDbis) est triplement *inconsistante*

1° On trouve dans (SDbis) la présence **des** élèves entre **un** maître et **un** savoir.
A moins de considérer que **les** élèves sont des pions interchangeables qui entrent en classe avec le même niveau et en sortent avec le même acquis - à moins de négliger toutes les interactions entre ceux qui apprennent - la relation didactique n'est *pas ternaire* !

2° Le schéma (SDbis) ne rend pas compte de la plupart des travaux publiés.
On n'y prend pas en compte les activités en petits groupes, en leçon particulière, en binômes, en situation de lecture, en situatiqn d'examen. Ni des débats, des confrontations d'un élève avec un texte ou un ordinateur, en l'absence d'un maître.

- (SDbis) ignore les *dialectiques de Brousseau* ! (Par exemple : les situations d'action où le conflit décisif surgit entre un élève et un matériel manipulé, le maître restant quelquefois à l'arrière plan).
- Il ignore les *jeux de cadres de Régine Douady*, où l'interaction se fait entre **plusieurs** variantes du savoir, en présence d'au moins **deux** animateurs : Régine et Marie-Jeanne Perrin. Idem pour les *interactions sociales* dont l'étude est poursuivie par des didacticiens suisses (Perret-Clermont 1979).
- Enfin il néglige complètement tous les apprentissages qui se font (entièrement ou partiellement) hors de *nos classes concrètes*.

3° Le plus drôle est que (SDbis) contredit les théories de Chevallard ! Le thème traité dans (Y.C) est l'étude des interactions entre **des** savoirs. J'ai bien compris que l'un des principaux intervenants - le fameux *savoir savant* (III.3) - est fort éloigné de *nos classes concrètes*.
Mais (Y.C) fait aussi allusion (en particulier à la page 51) à d'autres savoirs auxiliaires. Voilà donc une nouvelle entorse au dogme de la Trinité.

Dans beaucoup d'enseignements les dialectiques entre diverses connaissances sont fondamentales.

* Exemple :

Peut-on rendre compte d'une initiation aux *probabilités* si l'on ne signale pas les interactions de ce nouvel objet d'étude avec *l'analyse combinatoire*, *le calcul des fractions* qui sont des domaines d'étude distincts de la stochastique, *la logique du tiers exclus*, qui s'oppose à celle des modalités intermédiaires : certitude absolue, vraisemblance, imprévisibilité etc., et surtout, peut-on négliger face à des savoirs scientifiques tous les *préjugés* sur la "malchance", la "déveine", le manque de pot" et les "lois des séries".

Les "fans" de la loterie nationale savent que tous les billets sont égaux en probalité mais sont convaincus que les billets achetés un vendredi 13 sont plus égaux que d'autres et que ceux tel 777777 (dont tous les chiffres sont les mêmes) sont moins égaux que les nombres "quelconques".

Ce sont là des pollutions que nos élèves apportent de l'extérieur et qui vont faire obstacle à l'apprentissage d'une science des probabilités.

On ne conteste pas que le progrès scientifique exige des efforts de théorisation. Cela ne veut pas dire que *n'importe* quelle lubie qui vient à l'esprit puisse être érigée en théorie. L'histoire des sciences nous présente de nombreux obstacles que des *théories fausses* ont opposé au progrès.

Un modèle *inconsistant* (comme l'est (SDbis)) doit être rejeté sans regrets : il incite à ne pas se poser les bonnes questions.

II 2

Je ne connais pas de meilleurs critères pour juger une théorie que ceux que nous suggère la méthode expérimentale. On observe une situation **préparée** à cet effet et l'on regarde si les faits observés sont compatibles avec les anticipations que l'on peut déduire de la théorie. S'il n'en est pas ainsi, il faut changer le cadre théorique.

Les exemples évoqués dans (Y.C) relèvent souvent de l'anecdote et de la didactique-fiction Ce n'est pas chez Chevallard que l'on trouvera des observations méticuleuses qui contrôlent les variables mises en jeu.

La seule remarque fortuite, observée sur deux élèves seulement, à savoir la "factorisation" : $2a-2x=(\sqrt{2a}-\sqrt{2x})(\sqrt{2a}-\sqrt{2x})$ lui sert de "fait universel" invoqué dans la plupart de ses œuvres. C'est cette fantaisie qui fit l'objet de la "Thèse" de Tounelle dont Y.C. fut le directeur de recherche (Cf GLAESER Petit *x*).

Pire encore ! L'auteur raille par avance (notamment page 16 ou 46) toute tentative de confrontation de son discours idéologique avec des faits :

EXPL

> Pour notre usage, nous nous en tiendrons aux ébauches proposées : l'intention **d'expliquer** un phénomène, non d'accumuler des traits descriptifs pour faire vrai (sic !).
>
> L'explication scientifique ne vise pas un hyperréalisme phénoméniste : la science est un ajout au réel, non un fac-similé du monde - et *ce qui est négligeable doit être négligé*.

(Y.C) p. 24

Chevallard s'est fait une spécialité d'encenser *l'explication en soi*, sans même chercher à savoir si l'explication est bonne ou mauvaise !!

A cette enseigne, la "théorie" des tourbillons de Descartes ou la "théorie" des couleurs de Goethe expliquent tout. Mais elles ont constitué des obstacles à l'élaboration de la mécanique et de l'optique. L'alchimie, la "théorie" (sic) du PHLOGISTIQUE, ne sont pas de "bonnes explications". Elles furent réfutées par la chimie de Lavoisier.

Pour une critique cruelle du système explicatif EXPL, nous renvoyons à une lecture attentive du chapitre III de "*la formation de l'esprit scientifique*" (1938). Gaston Bachelard y fustige des auteurs préscientifiques qui *"expliquaient"* la fermentation du lait par la coagulation du sang, avec refus obstiné d'observer ces substances au microscope et la réfraction de la lumière à l'aspiration de celle-ci, par le verre assimilé à une éponge. Leurs explications constituant des "**obstacles**" au progrès scientifique.

Non ! La science n'est pas n'importe quel ajout au réel, jailli par hasard sous une plume. Elle se donne des critères précis pour déterminer ce qui est fondamental et pour décider de ce qui est provisoirement négligeable.

III LE MEPRIS DES NUANCES

L'approche de (Y.C) abuse de *concepts globalisants* qui fourrent dans un même sac des objets ne présentant que des analogies superficielles.
Voici des exemples typiques de ces amalgames.

III 1 LES MANUELS

On lit dans (Chevallard et Johsua 1982) (noté RDM 1982, dans la suite) :

Le savoir enseigné apparaît comme un savoir sans producteur, sans origine, sans lieu,,,
Les manuels sont le triomphe de l'achronie et de l'atopie.
Les auteurs de manuels sont de *faux auteurs*.
(R.D.M, 1982 p. 207)

Pour se permettre des jugements aussi tranchés, un chercheur sérieux devrait au moins remonter quelques pistes et vérifier qu'**aucune** innovation datée et localisée ne vient contredire l'affirmation précédente.

Faute de consulter tous les manuels, il serait déjà utile de regarder les plus importants..., les plus répandus à une époque donnée.

En ce qui concerne les exemples cités dans (Y.C) et (R.D.M, 1982) il m'a été facile de retrouver leur origine dans Clairaut, dans la "Géométrie de Legendre (1794), parfois chez Euclide. Certaines transpositions sont antérieures à l'Encyclopédie de Diderot-d'Alembert : Chevallard les remarque seulement dans d'obscurs manuels des années 20 destinés aux écoles de filles de l'Enseignement Primaire Supérieur ! En d'autres occasions, il s'appuie sur le Littré, "*Le Roman de la Rose*"(sic), *Corneille*, *Racine* etc.

On trouvera dans (Glaeser 1987) une esquisse d'historique des transpositions que de *véritables auteurs* ont réalisés dans des manuels au cours de l'histoire. Cette quête contredit la plupart des affirmations contenues dans les deux articles cités de Chevallard.

III 2 LA NOOSPHERE

La méthode mise en œuvre dans (Y.C) consiste à utiliser des expressions imprécises ou bizarres pour se dispenser de s'assurer qu'elles ont une signification.

Ainsi, on y invoque **LES** parents d'élèves. Le fait d'avoir des enfants d'âge scolaire (en régime d'enseignement obligatoire) ne confère aucun statut culturel ou social à des adultes : il y a des parents illettrés ou instruits. Ceux qui, comme l'écrit Chevallard (Y.C) - p. 25 "tiennent le haut du pavé en matière d'éducation" n'ont aucun champ commun de compétences.

Qu'est-ce donc le *savoir des parents* ? Qu'est-ce que le savoir des abonnés du gaz ?

Pour donner une apparence de cohérence à des mythes de cet acabit, on va dénicher par exemple le mot "noosphère" chez TEILHARD DE CHARDIN (non sans en avoir au préalable changé le sens !), pour désigner un ramassis de sous-populations floues... Des théories bâties sur des généralités aussi vagues sont immunisées par avance contre toute velléité de réfutation.

Si les besoins de l'argumentation l'exigent, on pourra toujours inclure tel ou tel individu dans la noosphère (ou l'en exclure).

III 3 LE SAVOIR SAVANT est une autre invention clé de voute de l'épistémologie-fiction présentée dans (Y.C). (Freudenthal 1986 est une réfutation magistrale de ce "concept")

Pour en parler efficacement, il faudrait fréquenter systématiquement la communauté scientifique et enquêter sur *la formation et la transmission des connaissances* dans ce milieu.

Voici comment j'ai vécu ces phénomènes pendant les vingt années que j'ai consacrées exclusivement à la recherche mathématique (1951-1971). La population des chercheurs productifs se répartissait en ***"clubs"*** *cloisonnés travaillant sur un domaine étroit. Dans ma spécialité, il y avait dans le monde une dizaine d'Universités où un leader animait une "école" de spécialistes. C'était le réseau de correspondants qui échangeaient leurs pré-publications et s'informaient des dernières péripéties de leurs recherches. On se rencontrait parfois dans des colloque spécialisés et l'on s'adressait des invitations pour pouvoir travailler ensemble. Chaque membre de ce réseau pouvait se rattacher aussi à d'autres clubs assurant ainsi une faible communication avec des domaines de recherches voisins. Les membres de cette équipe mondiale ne parlaient pas les mêmes langues. Les terminologies mathématiques étaient en voie de constitution et les problématiques pouvaient varier d'un chercheur à l'autre.*

Il fallait donc constamment décrypter les publications des confrères, ce qui (dans les cas extrêmes) pouvait exiger des mois d'efforts. C'était cependant beaucoup plus facile que s'il s'était agit de lire un article issu d'un autre club de spécialistes fort éloignés.

Chaque école faisait beaucoup d'efforts pour réexposer en synthèse ces publications disparates. On aboutissait ainsi à des comptes rendus de séminaires polycopiés et, de temps en temps à la publication d'une monographie imprimée.

Ce travail constant est la *tranposition scientifique* : modification des nombreux "savoirs" circulant dans le même club, en vue d'une compréhension plus unifiée... ou encore réexposition de résultats trouvés ailleurs, recentrés dans une toute autre perspective. (Cette acception du mot *transposition* n'est pas exactement celle de I. 1).

Entre chercheurs travaillant dans des spécialités éloignées, la communication empruntait d'autres voies.

On ne cherchait plus à tout comprendre en profondeur, mais plutôt à se *tenir au courant, d'avoir entendu parlé* de ce qui se faisait ailleurs... On apprenait ainsi à qui il fallait s'adresser pour obtenir des renseignements extérieurs à son propre domaine de compétence.

Les "Maths Reviews" et le "Zentralblatt" fournissait avec cinq années de retard (sur les préprints) un résumé de quelques lignes relevant davantage du *renseignement* que de l'information.

On assista pourtant à un évènement exceptionnel et de courte durée : la tentative de *Bourbaki* d'unifier les savoirs savants.

Il en fut de cet essai, unique dans l'histoire, comme pour l'Eglise Catholique qui espérait convertir toute l'humanité et qui n'a jamais touché qu'une minorité agissante.

Le savoir savant unique, commun à tous les chercheurs productifs n'existe pas.

Mais la plupart des chercheurs mathématiciens sont aussi des enseignants. Il dominent un tronc commun de connaissances, avec suffisamment de recul pour pouvoir lui consacrer un cours.

D'où leur viennent ces connaissances ? Où ont-ils appris l'algèbre linéaire, la logique, la théorie élémentaire des groupes, la théorie des fonctions d'une variable complexe ?

Généralement sur les bancs de l'Université de la bouche de *plusieurs* maîtres qui ne leur enseignaient pas nécessairement les choses de la même façon, et qui eux-mêmes avaient suivi un itinéraire tortueux pour constituer ces connaissances.

Ils ont pu lire des traités, mais aussi des ouvrages de vulgarisation : *Horresco referens* ! Ils ont pu commencer par lire des "Que sais-je ?" bien faits.

De plus, beaucoup de professeurs ont aussi été *assistants*. A ce titre ils ont dû composer des exercices pour les adapter - non seulement aux niveaux des étudiants dont ils avaient la charge - mais aussi aux exigences du professeur qui faisait le cours principal.

Ayant exercé les fonctions de Chef de Travaux - seul "assistant" pour tout un département de mathématiques de 1950 à 1957 - je puis témoigner du difficile travail de transposition que cela représente.

Il s'agissait par exemple d'emprunter une certaine équation différentielle à un recueil d'énoncés de mécanique pour l'adapter à des enseignements destinés à des classes propédeutiques, des classes d'ingénieurs ou d'analyse avancée ; y injecter des valeurs numériques pour en faire un exercice de calcul, le généraliser pour le transformer en problème théorique ; rédiger un "problème" d'examen qui permette vraiment d'apprécier la valeur d'un candidat et de la noter sans trop d'injustice.

Tout ce travail était à recommencer lorsque le professeur principal était remplacé par un autre, appliquant une toute autre pédagogie.

C'est de cette pratique continuelle (que j'exerce depuis l'âge de 15 ans) que sont issues les idées développées dans (LP).

Ainsi se dessine un tableau très complexe *d'une cascade de transpositions* mettant en scène des milliers d'intervenants de tous niveaux : des "clubs" de chercheurs, les professeurs et assistants d'université, les auteurs de traités et de recueils d'énoncés, leurs lecteurs de tous niveaux, les collègues avec lesquels on discute, les élèves-professeurs et autres étudiants, les enseignants et élèves du secondaire, les auteurs de manuels.,etc.., etc... jusqu'aux enfants de la maternelle... Ouf !! Et tous ces intervenants inventent en plagiant, et plagient en imaginant des prolongements.

Dans chaque situation didactique élémentaire, le domaine d'étude se modifie par bonds successifs. Il se modifie, se dégrade ou s'enrichit, se vulgarise ou s'approfondit.

Voilà ce qu'est en réalité l'achronie et l'atopie des productions des "faux auteurs",

III 4 TRANSPOSITIONS A LONG OU A COURT TERME

Chevallard n'apprécie guère le travail de taupe qui consiste à regarder de près les phases du processus qui amène au savoir enseigné. Il insiste pour qu'on s'intéresse exclusivement au saut global du "savoir savant au savoir enseigné".

C'est là une démarche antiscientifique typique critiquée dans ~Bachelard 1938) Je suis néanmoins d'accord avec Chevallard pour constater que la mathématique enseignée (tant dans les classes préparatoires aux grandes écoles, qu'à l'école maternelle) n'a que de lointains rapports avec celles des chercheurs de pointe !

Ce décalage est d'ailleurs de *notoriété historique* !

Vers 1900, la notion de fonction et les rudiment du calcul infinitésimal faisait (sous l'influence de E. Borel et de F. Klein) une timide entrée dans l'enseignement secondaire (avec deux siècles de retard sur Fermat, Newton et Leibnitz, et avec plus de deux millénaires de retard sur Archiméde).

Et vers 1950, on s'avise du profond fossé qui se creuse entre l'enseignement et la recherche : un agrégé qui veut devenir chercheur doit commencer par apprendre des mathématiques ! Ce fut la cause principale du mouvement de modernisation.

Je suis d'accord pour qu'on se pose la question : "Quelles sont les origines des connaissances enseignées dans le système scolaire ?"

Mais il y a plusieurs façons de la poser :

a) On peut le faire à la manière des métaphysiciens qui s'interrogent depuis des millénaires : "D'où venons-nous ? Qui sommes-nous ?
Quelle est l'origine de la vie ? " Vastes questions à propos desquelles la spéculation philosophique a fait réaliser à la connaissance les progrès que l'on sait ! Interrogeons-nous une bonne fois pour toute et restons-en là. .

b) On peut aussi étudier les processus à courts termes, qui sont des phènomènes élémentaires observables dans des situations didactiques.
De plus, ces processus concernent directement les enseignements, et on s'astreindra alors aux exigences de la méthode expérimentale si décriée par Chevallard.

Pour élucider les origines de la vie, les dissertations des théologiens de toute religion n'ont été que d'un faible secours. C'est en résolvant des questions ponctuelles et ridicules (en réalité cruciales) comme la synthèse de l'urée ~par Wôhler en 1826) ou la génétique des petits pois (Mendel 1866) que nous avons acquis quelques lueurs sur la question.

III 5 LES DIALECTIQUES DU SAVOIR

Dans tous les cas où j'ai essayé de reconstituer la filiation des connaissances avec un souci d'exactitude historique, j'ai constaté des itinéraires tortueux, avec *des interruptions massives de transmission* de la compréhension.

On trouve une fine analyse des interactions entre les "savoirs" dans le remarquable article (F.Halbwachs 1975) antérieur à (Y.C) !!

Le fait qu'il s'agisse de didactique de la physique n'est guère gênant car certaines idées se laissent transcrire aisément dans l'enseignement mathématique.

Halbwachs distingue quatre grandes catégories de Physiques :

1° **Les** *physiques fondamentales* qui se présentent pour chaque branche sous forme de *théories emboîtées* : chacun de ces modèles a son domaine d'efficacité .: c'est ainsi que l'optique géométrique, légèrement complétée pour rendre compte de la décomposition de la lumière est mieux adaptée à la construction des instruments optiques que la physique du photon.

En fait, le corps enseignant (du cycle secondaire) n'est pas vraiment informé des pièces ultimes de l'emboîtement.

2° **Les** *physiques des objets de consommations usuelles*. Chacun a besoin de comprendre le fonctionnement d'un moteur, d'un appareil de photo, d'un compteur d'électricité... L'usage ne réclame que des explications partielles : la grande masse des consommateurs n'a que faire des exposés "ab ovo" depuis les *équations de Maxwell* jusqu'au poste de télévision ! Il faut partir des objets familiers pour aboutir à des systèmes explicatifs vulgarisés.

3° **Les** *physiques spontanées des élèves* L'assimilation d'un modèle physico-mathématique n'est pas accessible à tout âge. Dans la voie ouverte par Piaget, on commence a avoir des idées sur les stades d'acquisitions des notions fondamentales de la physique. On ne peut négliger, dans l'analyse des situations didactiques, les idées a priori que la société inculque à la plupart des étudiants (L. Viennot 1979). Rares sont les physiciens capables d'expliquer rationnellement ce qu'est *le feu* ! Mais tout écolier est capable de gérer un feu... Et cette connaissance spontanée peut servir d'appui à d'autres compréhensions.

4° **Les** *physiques des enseignants* dépendent en premier lieu des niveaux de formation des maîtres. Rares sont les enseignants qui ont accès à la physique des derniers lauréats du Prix Nobel !

Mais en bas de l'échelle, rappelons que le Ministre Haby avait hâtivement recruté des maîtres pour initier les jeunes collégiens à l'observation des phénomènes naturels. : or moins de 20 % de ces recrues avaient eu l'occasion d'assister à un cours de physique pendant leurs études secondaires !

Evidemment, dans ce contexte, il n'y a aucune transposition efficace qui soit possible.

Ajoutons que l'élaboration de la physique enseignée est soumise par ailleurs aux dialectiques suivantes :

des cours magistraux	×	aux manipulations exécutées ex cathedra par le maître
des manipulations du maître	×	au bricolage des élèves
de la compréhension des phénomènes physiques	×	à la réussite au baccalauréat

On sait que pour réussir à l'examen il n'est pas nécessaire de réfléchir. Il suffit d'appliquer la bonne formule, même si on n'y comprend rien !

III 6 INSTRUIRE ET EDUQUER

Jadis, les transpositions n'étaient que des *modifications du texte et du discours magistral*.

De nos jours, il s'agit surtout de jouer sur la dialectique : *Instruction-Education*. Autrement dit, de doubler l'exposé informatif d'un stock d'activités conçues pour **développer des pratiques**.

> **Instruire**, c'est transmettre des *connaissances*
> **Eduquer**, c'est former des *habitudes*

— Cette distinction est généralement masquée en anglais : *Mathematical education* se traduit en français par *enseignement mathématique*.
Cependant, on peut exprimer cette nuance en opposant *to teach* à *to train*. En allemand, on oppose *lehren* à *üben*.

— *L'instruction* mathématique se réduit à l'explication et à la mémorisation de définitions, propositions, formules, règles, démonstrations...

Il s'agit, en outre, de familiariser "l'étudiant" à la pratique des mathématiques ; ce qui se fait par éducation.

— *Savoir s'exprimer*, oralement ou par écrit en langue ordinaire, en utilisant les *langages* mathématiques et métamathématiques, des *dessins*, des *schémas*. Apprendre à *lire*, à *rédiger*, à *reformuler* un texte mathématique.

— Savoir *calculer* efficacement, sans erreurs, à une vitesse raisonnable, détecter des fautes éventuelles ; concevoir puis appliquer un algorithme. Utiliser les principaux auxiliaires du calcul (Table, calculette, formulaire, ordinateur).

— Apprendre à *raisonner*, en respectant des règles *logiques*. Concevoir et rédiger des démonstrations.

— S'habituer à *chercher*, *conjecturer*, *deviner* puis *confirmer* (ou infirmer une conjecture). Développer l'intuition. Découvrir et imaginer.

— Développer le sens *esthétique* en mathématique.

Pour désigner les activités éducatives les plus répandues et les ingénieries correspondantes, on utilise souvent les mots "exercices" et "problèmes ".
C'est là un abus qui comporte les inconvénients suivants :

1° Comme tous les termes globalisants, il incite à confondre des situations didactiques forts différentes, dont les ressorts ne se ressemblent guère. Le fascicule (LP1 1973) s'emploie à les décrire et à les distinguer. Les objectifs et les déroulements d'une épreuve d'examen (donnant lieu à une note), et une séance de recherche heuristique, (sans délimitation de durée, et sans sanction finale) n'ont pratiquement rien de commun. Et c'est une grave faute pour un didacticien de confondre des situations didactiques dissemblables.

2° Un énoncé traité **ex cathedra** lors d'un cours magistral ou proposé dans un livre suivi immédiatement de la solution relève de *l'instruction*.
Mais le même énoncé proposé à la sagacité entière de l'élève est *éducatf*.

Beaucoup de didacticiens n'ont pas suffisamment compris la nature et l'importance de l'éducation.

Il semblerait qu'on ne puisse adresser ce reproche à Chevallard qui distingue les *notions mathématiques et paramathématiques* qu'il caractérise grâce aux critères suivants :

N. Math.

Les premières se laissent formuler en termes scientifiques précis : elles donnent lieu à l'instruction (éventuellement renforcée par des exercices d'application). Ce sont des objets d'études : leur apprentissage donne lieu à une évaluation directe.

N. Para. Math.

Les secondes se rencontrent dans l'environnement du travail pour y jouer le rôle d'outils de travail ... Ce ne sont pas des objets d'étude.

Leur apprentissage n'est pas institutionnellement évalué d'une façon directe,

(R.D.M, 1982 p, 187)

Il me semble que Chevallard rangerait dans cette seconde catégorie la pratique des auxiliaires de calcul. (Tables, calculettes, papier millimétré, ordinateur...) Ces activités ne se rencontrent-elles pas dans l'environnement du travail à titre d'outil ?

Mais pourquoi ne serait-il pas un objet d'étude ? Un enseignant sort-il de son rôle s'il consacre quelques heures pleines au maniement de quelques techniques, sans discourir, sans formuler, mais en se contentant de *guider*, de *rectflier quelques maladresses* et en *commentant* devant la classe certains comportements typiques.

Que l'on revienne donc au sens originel des *"travaux pratiques"*, trop souvent transformés, hélas, en cours magistral supplémentaire avec des corrigés infligés ex cathedra !

Un interrogateur a-t-il le droit de demander au candidat .d'exécuter un calcul ou de tracer la courbe représentative d'une fonction encore inconnue de l'interrogé ? Il ne peut lui reprocher de respecter certains rites que tous les enseignants n'ont pas adoptés. Mais il peut lui infliger une mauvaise note s'il se montre maladroit, lent ou peu fiable.

Ajoutons que l'emploi d'un néologisme et de critères aussi précis que (N. Para. Math) ne garantissent pas l'aptitude à manier le concept défini !

* Exemple Pour illustrer sa "conception", Y. C. utilise l'histoire de la notion de distance (en distinghant "le plus court chemin" et la mesure de ce chemin).

Il semble bien que l'argument central de (R.D.M1982) soit le suivant :
"Avant Frechet (1905), la *distance* fonctionnait comme une notion paramathématique". Plus de 30 pages de l'article cité sont consacrés à justifier et exploiter cette remarque !

Chevallard s'appuie sur des références littéraires (III-1). A partir de sources plus pertinentes, et en utilisant les critères mêmes de (R.D.M. 1982) (à savoir N. Para Math, ci-dessus) j'aboutis à la conclusion opposée !

Pour comprendre mon objection, il faut savoir que jusqu'au milieu du XIXe siècle, une *"ligne droite"* désigne ce que nous nommons aujourd'hui un *segment de droite*.

Dans tous les ouvrages que j'ai consultés la dessus, et en particulier dans le "Dictionnaire mathématique" d'ozanam (1691), on trouve la définition *précise* suivante de la distance :

L'Encyclopédie (1754) supervisée par Diderot et d'Alembert

> DISTANCE, f,f. (Géom.& Physiq.) ce mot signifie proprement le plus court chemin qu'il y a entre deux points, deux objets, etc.
> Donc la *distance* d'un point à un point est toujours une ligne droite tirée entre ces deux points, puisque la ligne droite est la plus courte qu'on puisse mener d'un point à un autre. Par la même raison, la *distance* d'un point à une ligne est une perpendiculaire menée de ce point à cette ligne.
> On mesure les *distances* en Géométrie par le moyen de la chaîne, de la toise, etc. V. Chaine, etc.

Elle est utilisée à titre de notion mathématique (répondant aux critères (N. Math.)) dans les manuels anciens que j'ai consultés ; et elle persiste hélas dans l'un des manuels, cités par Chevallard et Johsua, à titre de survivance archaïque. Si l'on se range à mon argument, il semble bien que l'article (R.D.M. 1982) devient singulièrement boîteux.

Pendant tous le XIXe siècle se prépare et s'accomplit une *transposition scientifique importante* : le passage de la *distance-plus court chemin* à la *distance-nombre* (d'ailleurs signalée dans l'encyclopédie ci-dessus, mais non retenue comme notion première).

De plus, la distance emprunte alors deux voies distinctes : elle continue à désigner des notions complexes empruntées à la géométrie euclidienne, à la géométrie riemannienne des variétés (l'ouvrage de référence sur tout cela est le classique Blumenthal 1953), et suit en outre la voie de Frechet : *distance appauvrie* caractérisée essentiellement par l'inégalité du triangle.

IV QUELQUES TRANSPOSITIONS USUELLES

Examinons des modalités de transformation du savoir, observables dans la manière d'enseigner.

IV 1 LA VULGARISATION

C'est un cas extrême : on présente sommairement une question difficile à un public peu disposé à investir beaucoup de temps et d'efforts pour approfondir. La vulgarisation répond à une demande sociale.

Peu de gens auront l'occasion d'effectuer une opération chirurgicale, mais le grand public veut entendre parler des demiers progrès de la médecine.

Un professeur de mathématique, en charge d'une classe littéraire sait que les questions de techniques de calcul indispensables à des scientifiques ne peuvent passionner sa classe. Il doit leur "expliquer" des questions passionnantes (en sautant toutes les difficultés techniques).

Il faut distinguer la vulgarisation s'adressant à tous et la vulgarisation ciblée. Les émissions scientifiques à la télévision et les musées des sciences sont des situations didactiques sans espoir si le public est trop hétérogène.

On aborde généralement ces tâches impossibles en recourant aux expédients suivants ;

1° On emploie systématiquement des *analogies* et des *métaphores* approximatives.

2° On masque *les véritables difficultés* en évitant de "soulever des lièvres" (voir la préface de (Danjon 1948) à propos d'Arago)).

3° On se contente d'exposer correctement un "petit quelque chose" sans traiter toute la question (Exemple dans Glaeser 1971 ; le § 2-IV au début).

4° On détourne systématiquement l'objectif pédagogique grâce à des variantes de *l'effet Topaze*.

La vulgarisation a acquis ses lettres de noblesses. Des savants authentiques s'y sont adonnés (cela ne veut pas dire qu'il communiquaient du savoir savant) Tout didacticien aura intérêt à étudier dans le détail les procédés de vulgarisation mis en oeuvre dans (Bessiére 1929). Un chef d'œuvre à mon avis.

Pour illustrer les difficultés du *ciblage* de la vulgarisation, je prendrai l'exemple du travail de transposition auquel je me suis livré en écrivant l'article "Calcul infinitésimal : plusieurs variables" dans l'Encyclopaedia Universalis (1968)

Quel public fallait-il viser ? J'ai donc décidé d'écrire une première page à l'usage des bons élèves de Terminale Scientifique et de m'adresser dans la page suivante aux étudiants de mathématiques et physique qui ont deux ou trois années d'études après le baccalauréat. La fin de l'article est écrit sur un ton de journaliste spécialisé qui prétend renseigner des chercheurs mathématiciens qui appartiennent à d'autres "clubs" (III.3) que le mien et qui voudraient bien avoir "entendu parler" des progrès des dernières decennies dans mon domaine.

Les spécialistes n'ont que faire d'un tel exposé de seconde main.

S'ils sont aussi enseignants, il le liront parfois, s'intéressant moins au contenu qu'à la manière de l'exposer. Et ils pourront réfléchir à ce propos aux limitations qu'impose la vulgarisation.

Nombreux sont les auteurs d'articles mathématiques de l'Encyclopaedia qui ne se sont pas posés tant de questions : ils écrivent des textes corrects et "laissent au lecteur le soin de le comprendre"

IV 2 LE PROFESSEUR DEBUTANT

Après un succès à,un concours de recrutement consécutif à une demidouzaine d'années d'études universitaires, un professeur prend enfin contact avec de véritables élèves !

S'il est perspicace, il s'apercevra très vite qu'il ne peut se contenter de restituer les connaissances acquises à l'Université !

C'est alors qu'il aborde son véritable métier : il consiste à

passer par transposition des connaissances du maître à celles de chaque élève.

La solution de paresse consiste à se procurer sur le marché pédagogique du matériel "prêt à enseigner" : manuels, certains livres du maître, recueils d'énoncés d'exercices, *solutionnaires* (recueils de "problèmes tout résolus" (ce ne sont donc plus des problèmes !)), bulletins d'associations pédagogiques fournissent des leçons "clés en mains" etc.., etc...

Il pourra aussi méditer sur des ouvrages classiques, conçus comme *auxiliaires de transposition* : ils examinent la matière de l'enseignement supérieur à la lumière des possibilités d'utilisation dans l'enseignement plus élémentaire.

Le pionnier en ce domaine est le célèbre (Klein 1926). Beaucoup de savants qui s'intéressaient à la formation des maîtres ont aussi apporté leur contribution : Lebesque, Choquet, Dieudonné etc...

Tous ces auteurs se placent dans le cadre de la pédagogie sans élèves et laissent à l'enseignant le soin d'effectuer des transpositions.

Avec (Freudenthal 1970) et aussi, je l'espère, avec (Glaeser 1971), des élèves, des professeurs et des classes font leur apparition à côté des mathématiques prises à divers niveaux.

Dans les préfaces des 6 fascicules de (LP), on essaye d'expliquer leur mode d'emploi comme auxiliaire de transposition. Ce ne sont pas des recueils d'énoncés tout préparés., mais des thèmes d'exercices ou problèmes. On invite le lecteur à les réaliser en classe sous des formes différentes, adaptés à des élèves d'âge divers, et selon les catégories présentées dans (LP 1). C'est le fascicule 3, consacré à la parité, qui illustre le mieux, à mon avis, comment une même idée mathématique peut être exploitée dans des contextes didactiques différents.

Les fascicules 2, 4 et surtout 6 (géométrie affine, convexité, géométrie d'incidence) montraient essentiellement quel genre d'effort aurait dû être consenti avant que ne soit lancé la réforme dite "de modemisation".

Les programmes n'ont aucune importance tant qu'on n'a pas fabriqué le matériel d'instruction et sunout d'éducation, susceptible de les mettre en œuvre en classe. ..

Notre débutant pourra aussi puiser dans ces souvenirs personnels, évoquant les réussites et les maladresses pédagogiques de ses propres maîtres.

Il prendra contact avec des collègues plus expérimentés qui le mettront en garde contre "les enseignements qui semblent ne présenter aucune difficulté!". Ils lui dresseront une liste de fautes classiques qu'il sera très étonné de rencontrer dans ses classes et qu'il n'écartera plus d'un haussement d'épaule : "Ces élèves sont bêtes"

Finalement, lorsque le professeur débutant commencera à se poser des questions sur la construction de la compréhension des mathématiques, il sentira le besoin d'acquérir à côté d'une culture scientifique, une culture didactique nécessaire pour dominer ses interventions.

Quiconque a enseigné la même année dans des classes parallèles sait bien qu'il a été obligé de s'adapter à des auditoires de niveaux variés.

L'enseignement est désormais l'exercice **de la transposition permanente**

Il faut savoir changer brusquement de dialectique au cours d'une leçon menée à la Brousseau, ou de cadre comme l'indique Régine Douady. Après une séance d'instruction, on passe à des exercices éducatifs et vice versa.

Il y a des difficultés qui se surmontent grâce à une courte explication, et d'autres qui exigent que l'élève se rende compte par lui-même, de ce qui est en jeu.

J'ai gardé un très mauvais souvenir d'un de mes professeur de mathématiques qui passait pour prestigieux ! Modèle de ponctualité, il pénétrait dans sa classe silencieuse à la manière de Philéas Fogg entrant au Reform Club (Allusions au début et à la fin du roman de Jules Vernes : Le tour du monde en 80 jours)! Et aussitôt, il commençait à dicter. Il dictait son cours, puis il dictait un énoncé d'exercice, et aussitôt il enchaînait sur la dictée de la solution ! Puis il interrogeait trois élèves, au tableau, sur la leçon précédente, distribuait des colles à ceux qui n'avaient pas obtenu la moyenne. Et il reprenait le même scenario au cours suivant. Il était bien noté car il obtenait de bons résultats au baccalauréat, et au concours d'entrée à Saint-Cyr. Son plus grand mérite, à mes yeux, est de ne pas avoir réussi à me dégoûter des mathématiques !

Il faut savoir rompre la monotonie des cours répétitifs en imaginant sans cesse des situations nouvelles, adaptées chaque fois à l'objectif visé. Savoir provoquer à bon escient l'effet de surprise qui restera gravé dans toutes les mémoires,

IV 3 L'ACCIDENT DE PARCOURS : LES ANNEES NOIRES de la réforme HABY

La réforme de modernisation fut un évènement traumatisant mais de courte durée... Il coïncida en France avec une intense campagne de *déqualification* des maîtres aux effets plus persistants. On procéda à un recrutement massif selon l'absurde formule BAC + n.

Pour enseigner la rigueur mathématique et la géométrie déductive en 4e il suffisait d'avoir **un** baccalauréat (non nécessairement scientifique) et n années d'enseignement universitaire (dans n'importe quelle spécialité).

La majorité des nouvelles recrues n'avaient guère fait de mathématiques au lycée. La plupart avait pris cette matière en horreur pendant l'adolescence et se faisait une idée complètement fausse de la mathématique, connotée d'une façon répressive et figée, où toute imagination était exclue. Les nouveaux programmes (aussi mauvais que les précédents) déroutèrent pendant deux années d'adaptation la minorité des maîtres compétents qui surent inventer l'environnement éducatif satisfaisant, avec l'aide des IREM.

La déqualification des maîtres fut la cause principale du fiasco qui s'en suivit. En effet :

La réforme coïncida avec une *régression massive* des pratiques des *transpositions* dans les classes.

Les maîtres nouveaux venus n'avaient d'autres ressources que de s'accrocher coûte que coûte à un manuel unique et d'en débiter les *recettes* sans y modifier une virgule, terrorisés à l'idée d'avoir à y corriger un lapsus ! La transposition la plus rudimentaire leur restait interdite : celle qui consiste à préparer son enseignement en s'aidant de *plusieurs manuels* pour choisir selon la situation de la classe et ses propres goûts, ici une explication, là un exemple ou un exercice.

Par malheur pour ces enseignants, les différents manuels n'utilisaient pas exactement la même terminologie et les mêmes symboles.

Tout passage d'un livre à l'autre posait donc de redoutables problèmes de transposition qui sortaient de la compétence d'un bachelier es-lettre, lisant pour la première fois de sa vie un manuel de mathématique !

Ces années noires n'eurent guère l'occasion de passer du savoir savant au savoir enseigné : et ce sont précisément celles où (Y.C.) puise ses exemples !!

En fait, il ne s'agissait que du passage

de l'ignorance et de l'inexpérience du maître au désarroi de l'élève

J'ai pu observer, en tant que directeur d'un IREM, des milliers de cas de ce genre... J'ai également constaté que dans la minorité des classes dotées d'un enseignant ayant une formation mathématique convenable, tout rentrait dans l'ordre après une année d'adaptation.

J'ai visité beaucoup de classes affligeantes où l'enseignant n'avait aucun contrôle de son action.

Il faut affirmer par contre, que chez une petite minorité de maîtres se produisit un phénomène inouï jusqu'en 1962 ...

Des classes *entières* dont les élèves déclaraient "Les Maths, c'est chouette !" Rien de tel avant la 2e guerre mondiale, où il n'y avait guère qu'un ou deux élèves enthousiastes; la moitié de l'effectif apprenait docilement ses leçons ; et le reste, prostré dans l'attente d'une sonnerie libératrice, prenait la géométrie en haine. Tous les témoignages littéraires de l'époque confirment ces situations.

Il existe des cas où , en dépit des effort de quelques IREM qui se cantonnaient dans une activité de recyclage , l'héritage des années sombres est persistant. Un exemple typique se trouve dans (Mercier1986) p. 28 et suivantes.

Il s'agit de l'observation d'un réunion d'entente préalable entre correcteurs d'une épreuve de Brevet des Collèges.

Les enseignants n'ont pas acquis avec le recul que fournit une longue pratique éducative les *habitudes* efficaces qui leur permettraient de factoriser un trinôme du second degré.
Les yeux rivés sur les programmes, ils obligent leurs élèves de 3e à appliquer automatiquement les identités remarquables, et ceux de 2e à calculer un discriminant !

Il suffit qu'on leur propose une situation où il est habile de commencer par une simple mise en facteur pour qu'ils crient qu'il s'agit d'une question-piège ! Il est vrai que le facteur 2x - 1 à mettre en facteur n'était pas indiqué dans l'énoncé. Mais il semble normal qu'un enseignant sache reconnaître ces situations. Ces enseignants n'ont jamais été entraînés à faire face à l'imprévu, à regarder, à réfléchir, et à n'envisager l'utilisation d'une recette que lorsqu'il n'y a rien de mieux à faire (Glaeser 1950).

Comment veut-on qu'un enseignant qui n'a jamais pris de telles habitudes puisse les inculquer dans ses classes ?

Là dessus, Alain Mercier *nous interdit* , en tant que mathématicien, d'interpréter l'incident en termes de *formation insuffisante des maîtres*.

Je prends la liberté, en tant que didacticien, de passer outre à pareil ukase !

IV 4 PROBLEMES ET TRANSPOSITION

Parmi les pionniers de la transposition permanente, Guy Brousseau occupe assurément une place de choix.

Depuis le début de sa carrière, il a rejoint ceux qui rompaient avec le scénario répétitif basé sur le Verbe Magistral. Il a imaginé à propos de l'apprentissage des principales notions enseignées à l'école primaire , des dispositifs très variés.

Ce sont des ingénieries basées sur des situations dépendant de variables didactiques où l'élève construit lui-même ses connaissances grâce à des activités conflictuelles bien choisies (Brousseau 1986).

Ses *situations problèmes* sont concues avec un *objectif d'instruction* hautement proclamé. Il s'agit essentiellement de transmettre des connaissances ; mais le maître manœuvre, à bon escient, des variables de commande et fait intervenir des dialectiques diverses, selon les besoins.

Ainsi, donne-t-il l'initiative à ses écoliers. Il est alors inévitable que cette instruction ait beaucoup de *retombées éducatives*, d'autant plus que le choix des stratégies est laissé à l'élève, non imposé par le maître (qui cependant les guide parfois en commandant les évènements).

J'ai longuement comparé ces *situations-problèmes* (Glaeser 1985) avec les situations heuristiques que je pratique depuis longtemps. Les *problèmes* (L.P.l - Chap 2) sont des situations didactiques dont les *objectifs* proclamés sont *éducatifs* : **apprendre à chercher**.... Mais il est fréquent que la séance comporte des *retombées cognitives* sans que cela soit particulièrement visé.

D'autres situations comparables, mais essentiellement différentes sont celles qui résultent d'un *enseignement exemplaire* selon Martin Wagenschein Il ne s'agit nullement de donner une préférence exclusive à l'une de ces approches. L'important est d'équilibrer une formation mathématique qui devrait componer tous ces ingrédients (y compris des cours traditionnels et exceptionnellement une séance de vulgarisation pour étancher provisoirement des curiosités prématurées).

Je souhaiterais que dans certaines classes de l'enseigment secondaire et supérieur, une heure et demie ou deux heures pas mois soient consacrée à des activité éducatives : recherche d'un problème (au sens de (LP1)) ou d'activités liées à une situation-problème ou un jeu de cadre ; exécution d'une tâche technique (programmation sur ordinateur, long calcul - avec auxiliaires de calcul variés), dessin géométrique (par exemple en perspective ou sous forme d'épure) manipulation, opération d'arpentage sur le terrain, observation astronomique, lecture d'un texte historique, avec commentaires etc., pour ne citer que des activités que j'ai fait pratiquer moi-même ou que j'ai vu réalisées par des collègues.

N'oublions pas que selon le célèbre alexandrin de Houdar de la Motte :

"L'ennui naquit un jour de l'uniformité"

Si nous voulons que nos élèves déclarent que "Les Maths c'est chouette !" faisons-les faire travailler intensément en leur proposant des activités variées qui les incitent à s'investir.

BIBLIOGRAPHIE

BACHELARD G. (1938)
La formation de l'esprit scientifique - Vrin 1975.
BESSIERE G. (1929)
Le calcul diférentiel et intégral facile et attrayant - Dunod 1963
BLUMENTHAL L. (1953)
Distance geometry - Oxford University Press
BROUSSEAU G. (1986)
Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques Thèse Bordeaux
(Les références nombreuses aux travaux de Brousseau, éparpillées en de nombreuses publications sont rassemblées dans cette tlièse)
(Y.C) CHEVALLARD Y.
La transposition didactique - La pensée sauvage Grenoble
(R.D.M.1982) CHEVALLARD Y; et JOHSUA M.A (1982)
Un exemple d'analyse de la transposition didactique -la notion de distance-
Recherches en didactiques des mathématiques
DANJON (1948)
Cosmographie - Hatier
FREUDENTHAL H. (1970)
Mathematics as an educational task - D. Reidel
FREUDENTHAL H. (1986) Revue de (Y.C)
Educational Studies in math. Educ.
GLAESER G. (1950)
L'entraînement méthodique au calcul algébrique - Hatier
GLAESER G. (1971)
Mathématique pour l'élève professeur - Hermann
GLAESER G.(1985)
La didactique expérimentale des mathématiques : processus de coune durée
Cours de 3ème Cycle - Université Louis Pasteur
GLAESER G. (1986)
La didactique expérimentale des Mathématiques - La conception génétique-
Cours de 3ème Cycle - Université Louis Pasteur
GLAESER G. (1987)
Esquisse d'une histoire des transpositions dans l'enseignement mathématique.
HALBWACHS F. (1975)
La Physique du maître entre la physique du physicien et la physique de l'élève
Revue Française de Pédagogie n °33
L P désigne *Le Livre du Problème*
Publication de l'IREM de Strasbourg - Edition Cedic
L P1 Fasc 1 Pédagogie de l'exercice et du problème (1973)
L P2 Fasc 2 Exercices élémentaires de géométrie affine (1973)
L P3 Fasc 3 A propos d'un thème mathématique : La parité (1973)
L P4 Fasc 4 La convexité (1974)

L P5 Fasc 5 Calcul barycentrique (1975)
L P6 Fasc 6 Géométrie d'incidence (1976)
KLEIN F. (1926)
Elementar mathematik vom höheren Standpunke auss - Springer
MERCIER A. (1986)
Un point de vue introductif à la didactique des mathématiques
IVe école d'été de didactique des mathématiques IREM Paris 7
PERRET-CLERMONT A.N. (1979)
La construction de l'intelligence dans l'interaction sociale - P. Lang
VIENNOT L. (1976)
Le raisonnement spontané en dynamique élémentaire - Hermann

TRANSPOSITIONS
Annexe

Ce qui suit correspond aux pages 94, 95, 96 et 97 de Esquisse d'une histoire des transpositions didactiques dans l'enseignement mathémathique GLAESER G. (1987).

VII ÉLABORATION DU STOCK D'ÉNONCÉS

La tradition nous a légué peu de matériels pédagogiques utilisables en classe.

Voici quelques exceptions :

1° On dispose d'une vaste anthologie de mathématique récréative d'origine extrême orientale, perse, grecque, arabe etc. L'ouvrage le plus célèbre sous ce rapport fut assurément le livre de Bachet de Mezidac "Problesmes playsants et délectables qui se font par les nombres" (1613) Ce trésor s'est notablement enrichi, grâce à Edouard Lucas, Samuel Loyd, Martin Gardner etc. Bien qu'il ne s'agisse là que d'une *mathématique,de divertissement*, cette veine fut souvent exploitée en pédagogie scolaire. [*après la scolarisation universelle*]

2° Les aventures sumériennes et florentines mentionnées en (III) ont laissé des corpus d'énoncés d'exercices. Mais ce trésor ne fut exhumé qu'au XXe siècle : iJ n'influença guère l'enseignement scolaire.

3° Beaucoup d'ouvrages de mathématiques contiennent dans le corps de l'exposé quelques exercices entièrement résolus par l'auteur. (Ceux de Clairaut, d'Euler, du marquis de L'Hospital sont typiques). Dans la mesure où la réponse apparaît au lecteur, avant qu'il ait eu le temps, le loisir ou *l'obligation* de s'exercer, ce ne sont pas des exercices !

4° Les écoles d'ingénieurs du XVIIIe siècle proposaient systématiquement à leurs rares élèves des tâches techniques de dessin ou de calcul. Il resterait au didacticien-épistémologue à collecter et à dépouiller les productions d'élèves conservées en archives, pour découvrir la part d'autonomie qui était laissée aux apprenants (il s'agit d'exercices d'arpentage, de géométrie descriptive, de stéréotomie, de projets mécaniques).

Mais à l'origine, la principale source d'énoncés relève de l'engouement pour la *bachomanie* : l'institution de nombreux examens et concours provoque une demande de préparation à ces épreuves. Le marché de l'édition exploite cette clientèle.

Ainsi paraissent au début du XIXe siècle des recueils de sujets d'examens tels ceux de Reynaud et Duhamel (1823), de Georges Ritt (1836) ... En Allemagne,
E. Bardey compile des énoncés, et ses recueils sont traduits en diverses langues (en français de 1870 à 1920).

Les premières fournées témoignent de la médiocrité de l'imagination pédagogique :
un énoncé d'exercice se griffonne sur un coin de table, sans qu'une réflexion pédagogique préalable dégage des objectifs et oriente la mise en forme. Voici par exemple une batterie typique d'exercices empruntés à un recueil de Georges Ritt :

Effectuer les multiplications suivantes.

$$3a \times 5b \quad 7a^2 \times 8ab \quad 12a^3b \times 7a^2bc^2$$
$$-5abc \times 8abd \quad 14a^2bcx \times (-8ab^3x)$$
$$7ab \times 8a^2 \times 7bc \quad (6a + 2b - 8c)7a$$

$$(-5a^2+3ab-8b2)(-9ab)$$
$$(a+b)(a+b) \qquad (a-b)(a-b)$$
$$(a+b)(c+d) \qquad (a+b-c)(d-e)$$
$$(2a-3b-8c-d+9e)(7f+2g-h)$$
$$(a+b)(a-b)$$

$$(5ab+3ac-4bc)(7ab-18ac+2bc+d)$$
$$(x^2-3x-7)(x-2)$$
$$(4a^2-16ax+3x^2)(5a^3-2a^2x)$$
$$(a^2+a^4+a^6)(a^2-1)$$
$$(a^4-2a^3b+4a^2b^2-8ab^3+16b^4)(a+2b)$$
$$(7a^3-5a^2b+6ab^2-2b^3)(3a^4-4a^2b+16a^2b^2)$$
$$(a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5)(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)$$
$$(5a^3b^3c^2-6a^4b^2c^5+7a^8b^5c^6)(2a^3b^3c^2+3a^4b^2c^6-6a^7b^4c^2)$$

Dans un premier temps, de tels exercices sont utilisés n'importe comment, pour faire n'importe quoi.

Par exemple, on choisit 20 questions de ces types au hasard, et l'on attribue un point par réponse correcte. Après quoi, on décide que l'épreuve est réussie si le candidat obtient la moyenne.

Ce n'est que vers 1920 qu'apparaît la docimologie. Le progrès décisif est dû à Charles-Edouard Spearman (1863-1945)(Spearman 1927). Il pose correctement la question d'une évaluation scientifique des aptitudes, et invente un outil statistique puissant : *l'analyse factorielle*.

Bientôt paraissent des s**olutionnaires** : ce sont des recueils d'énoncés accompagnés de leurs solutions ; puis des **méthodologies**, qui exposent des méthodes toutes standardisées pour résoudre des épreuves qui se donnent aux examens, où des problèmes d'un certain type (Petersen 1866).

L'usage des énoncés, insérés en fin de manuels (ou en fin de chapitre) semble plus récent. L'exemple le plus ancien que je connaisse est justement l'édition posthume Blanchet (1845) de la Géométrie de Legendre : on y trouve 10 pages d'énoncés de géométrie plane et autant de géométrie dans l'espace.

L'habitude ne s'en est pas imposée rapidement. Dans les "Applications de l'Algèbre à la Géométrie de M. Bourdon (1872), l'auteur éprouve le besoin de prévenir le lecteur :
"Nous croyons devoir terminer cette introduction, en proposant quelques exercices ... ". Suivent onze énoncés élémentaires et ternes ; ce sont les seuls qui figurent dans l'ouvrage.

A la fin du XIXe siècle, apparaissent des activités plus culturelles. Ce ne sont plus des problèmes d'examen ! (Bien qu'on continue parfois à les noter).

Voici quelques *beaux calculs* que Carlo Bourlet (1896) a exhumés des œuvres de quelques grands mathématiciens. Ici, deux solutions paramétriques de l'équation diophantienne :
$$x^3 + y^3 = z^3 + u^3$$

Comparer avec le triste ramassis du spécimen cité de Georges Ritt.

Démontrer que l'on a l'identité
$$x^3 + y^3 \equiv z^3 + u^3$$
lorsque l'on prend, soit :

$$
\begin{aligned}
x &= (f^2+3g^2)^2-(ff'+3gg'+3fg'-3f'g)(f'^2+3g'^2)\\
y &= -(f^2+3g^2)^2+(ff'+3gg'-3fg'+3f'g)(f'^2+3g'^2)\\
z &= -(f'^2+3g'^2)^2+(ff'+3gg'-3fg'+3f'g)(f^2+3g^2)\\
u &= (f'^2+3g'^2)^2-(ff'+3gg'+3fg'-3f'g)(f^2+3g^2)
\end{aligned}
$$

(Euler).

soit encore :

$$x = (a^2 + 3b^2)^2 - a + 3b,$$
$$y = -(a^2 + 3b^2)^2 + a + 3b,$$
$$z = (a^2 + 3b^2)(a + 3b) - 1,$$
$$u = -(a^2 + 3b^2)(a - 3b) + 1.$$

(Binet).

L'institution des Frères des Ecoles Chrétiennes compila systématiquement des thèmes d'exercices ; cette érudition est surtout orientée vers des questions ayant un intérêt par eux-mêmes. Les volumes les plus intéressants sont signés F. JM ou F. JG (Frére Jean-Marie(?) ou Frére Jean Gabriel(?))... ou portent la mention "par une réunion de professeurs".

Ainsi commence, surtout en France une nouvelle utilisation de l'exercice destiné à présenter des **compléments** ou même des questions **hors programme** qu'un bon élève devrait connaître.

* Exemples

1° Même si le tétraèdre régulier est explicitement cité dans les programmes, le professeur doit choisir, dans ce vaste sujet, ce qu'il dira dans le cours, et ce qu'il proposera aux élèves curieux ou studieux.
Ainsi proposera-t-on en fin de chapitre le calcul du volume, des rayons des sphères passant pas les sommets ou tangentes aux faces ... et aux arêtes !
On en demandera un dessin (par exemple une épure de géométrie descriptive) sous divers points de vue.

2° On peut alimenter la curiosité de quelques élèves en leur présentant les *suites de Fibonacci*, la *construction du pentagone régulier* à la règle et au compas, le *nombre d'or*, des *calculs d'éclipses* ou de *phases de la lune*, etc.

Dans ces cas, l'objectif visé n'est pas la préparation à des examens (sauf si l'on sait qu'il est bon de connaître quelques questions hors programmes - par exemple la droite de Simpson ou le cercle d'Euler qui inspirent souvent les interrogateurs). Il ne s'agit pas davantage à faire chercher longtemps. Le **but visé est l'information** . Et c'est ainsi que se développe la technique de l'**exercice d'exposition** qui fleurit surtout entre 1920 et 1960 (LP1 - Chapitre 1).

Ce style de *mise en exercice*, est destiné à informer rapidement un élève sans le faire trop sécher, en lui foumissant les principales idées qu'il risquerait de ne trouver lui-même qu'au prix d'une perte de temps. [*est-ce vraiment une perte ?*]

C'est sous cette forme que sont présentés dans Bourbaki les exemples et les contre-exemples, ainsi que les questions annexes. En voici un spécimen, tiré du premier chapitre § 7 de "l'Algèbre".

Le thème est la génération du Groupe $\mathbf{S_n}$ des permutations de n objets.

> 7) a) Montrer que toute permutation de $\mathbf{S_n}$ est un produit de transpositions (raisonner par récurrence sur le nombre d'éléments non invariants par la permutation considérée).
>
> b) En déduire que $\mathbf{S_n}$ est engendré par les n-1 transpositions (1 2), (1 3), ... (1 n), et aussi par les n -1 transpositions (1 2), (2 3), ..., (n-1 n) (utiliser la formule (1) de l'exercice 6).
>
> c) En déduire que $\mathbf{S_n}$ est engendré par les *deux* permutations (1 2) et (1 2 3...n) (même méthode).

On aurait pu poser la même question sous forme d'un **Problème de Recherche** formulé ainsi : "Quel est le nombre minimum de permutations qui peuvent engendrer le groupe $\mathbf{S_n}$?" Mais, même pour un mathématicien expérimenté qui ne connaitrait pas le résultat, la recherche serait hasardeuse et en moyenne de durée assez longue.

L'exercice d'exposition, au contraire, **découpe la question** en sous-questions posées dans un ordre efficace. Je conseille **d'attribuer un titre** à de tels énoncés : iJ ne faut pas que l'élève résolve la question sans prendre conscience de l'intérêt de l'information qu'il vient de recueillir.

La vogue des exercices d'exposition, en France, conduisit à bien des aberrations pédagogiques. On utilisa ce style de rédaction hors de propos. Ainsi on rédigea beaucoup de problèmes d'examen sous cette forme.

Ceci provoquait les effets pervers suivants :

a) Le travail étant complètement mâché, le candidat n'a aucun moyen de faire valoir ses qualités (à l'exception de quelques savoir-faire algorithmiques ou de quelques connaissances mémorisées ...)

****