

DES RAISONS D'ÊTRE DES MATHÉMATIQUES DANS L'ENSEIGNEMENT PROFESSIONNEL

ERIC LAGUERRE

Équipe DIDIREM, Laboratoire André Revuz, Paris
eric.laguerre@versailles.iufm.fr

Résumé. Nous mettons en évidence des raisons d'être des mathématiques en tenant compte d'une alternative possible de leur sens perçu, d'une part, de façon intrinsèque à un objet mathématique et, d'autre part, au sein de son enseignement. Notre construction ne se fonde pas exclusivement sur ces deux composantes mais prend appui également sur les rapports qui peuvent être établis entre les mathématiques à enseigner et la réalité. Nous donnons un exemple d'élaboration d'une situation dans le cadre du BEP Techniques du géomètre et de la topographie qui illustre nos options par le biais d'une articulation établie entre le monde réel, le monde physique et le monde mathématique.

Mots-clés. Modélisation mathématique, Didactique des Domaines d'Expériences, assistant topographe géomètre, méso espace, micro espace, sens intra et extra mathématique.

Introduction

En premier lieu, notre travail consiste à communiquer une réponse à la question du sens qu'un théorème peut prendre pour des élèves de l'enseignement professionnel. Cette réponse a pour caractéristique de posséder une composante à la fois intérieure aux mathématiques élaborée à partir de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1997), des champs conceptuels (Vergnaud, 1991), de la théorie des situations (Brousseau, 1983) et du concept d'obstacle (Artigue, 1991), et à la fois extérieure aux mathématiques fondée sur les liens qui peuvent être établis entre le méso-espace et le micro-espace¹ et sur diverses problématiques liées à la géométrie.

En second lieu, nous donnons un exemple de construction d'une situation introduisant et justifiant le théorème de Thalès dans le cadre de l'enseignement des mathématiques en seconde professionnelle du BEP² Techniques du géomètre et de la topographie. Les titulaires de ce diplôme peuvent travailler en tant qu'opérateurs géomètres. A cet effet, ils réalisent à l'aide d'appareils optiques des mesures de distances, de dénivellations et ils étudient la nature du sol. Ils produisent des plans à l'aide de la DAO³ en entrant manuellement des données ou en les transférant directement de topomètres. Ils délimitent aussi les terrains.

Nous n'envisageons pas d'étudier précisément des gestes professionnels du point de vue des connaissances mathématiques qu'ils sous tendent, comme cela a été fait dans une étude sur l'articulation des modalités pragmatiques et des modalités épistémiques (Bessot & Laborde, 2005), ni de dégager des invariants de structures conceptuelles en utilisant des savoirs mathématiques de référence et des savoirs d'un métier du bâtiment (Bessot & Laborde, 2004) mais plutôt de profiter du cadre de l'enseignement professionnel pour illustrer ce que nous

¹ Le méso-espace fera référence dans le texte à l'espace associé à une cour d'établissement scolaire ou à un périmètre situé autour d'un monument historique et le micro-espace à un feuillet ou un ouvrage.

² Brevet d'Enseignement Professionnel

³ Dessin Assisté par Ordinateur

entendons par modélisation de la réalité en géométrie. Nous proposons de partir d'un sens général de la « modélisation du réel » en tant que pratique d'enseignement en ayant pour objectif final de l'affiner à la lumière de notre situation d'apprentissage.

La recherche d'un sens lié aux mathématiques dans l'enseignement

Les raisons d'être des mathématiques pourraient être perçues chez les élèves, d'une part, de façon intrinsèque à un objet et au fonctionnement même de cette discipline et, d'autre part, au sein de son enseignement du point de vue de l'activité de l'élève et de l'apprêt du savoir. Elles peuvent aussi se fonder sur les rapports qui peuvent être établis entre les mathématiques à enseigner et la réalité, ces liaisons paraissant *a priori* d'autant plus importante dans l'enseignement professionnel qui est très souvent contextualisé.

Dans son ouvrage (1999), Thirion cite C. Rosset qui conçoit la réalité comme un certain niveau de notre rapport au monde en tant qu'il est envisagé sous les catégories de *l'événement* et de la *situation*. Afin qu'il n'y ait pas de confusion possible entre le terme de situation tel qu'il est entendu par le philosophe et son acception en didactique nous le remplaçons par le mot contexte. A la lumière de ces éléments, nous abordons la question du *sens* en mathématiques dans l'enseignement en termes de situation d'apprentissage, de contexte, d'événement et de structuration du savoir. Nous entendons par événement la donnée d'un espace, d'un temps et d'une interprétation de faits. Un « contexte » est caractérisé par un environnement, du matériel et des actions.

La double approche intérieure et extérieure de l'enseignement des mathématiques semble légitime dans le cadre que nous avons choisi. En effet, Laborde et Pastré (2005) ont montré que l'apprentissage professionnel se produit par l'activation et la combinaison de deux formes distinctes de connaissances pour lesquelles nous supposons que la modélisation de situations réelles pourrait jouer un rôle important. D'une part, une forme pragmatique qui se développe grâce à l'exercice de l'activité et à la mise en œuvre de l'expérience ayant pour enjeu l'efficacité dans la pratique. « *Cette modalité comporte une dimension de conceptualisation, qui est orientée vers l'action : elle s'accompagne de la construction d'un modèle opératif, qui permet aux acteurs d'opérer un diagnostic de situation, à partir de quelques concepts qui constituent la structure de cette situation et qui sont évalués grâce à des indicateurs qui prennent leur sens en référence à ces concepts.* ». Et d'autre part, une forme épistémique qui est composée de savoirs scientifiques, techniques et de métiers relatifs au domaine. Ces savoirs répondent à un enjeu de vérité et pas seulement d'efficacité pratique.

Notre problématique au sujet du sens des mathématiques consiste, pour partie, à nous interroger sur la mathématisation du réel dans l'enseignement. Nous émettons l'hypothèse que ce processus se met en place à l'extérieur et à l'intérieur des mathématiques.

1. Composante extérieure du sens

Du point de vue de la composante extérieure, si nous supposons que ce *sens* peut être approché grâce à l'épreuve des faits extérieurs observables et de leur « modélisation » de la part des apprenants, toute la question est alors de savoir, d'une part, de quels types de faits parlons-nous et, d'autre part, ce que nous entendons par « *modélisation* » dans le cadre de l'enseignement de la géométrie ?

Au premier abord, nous appelons *modélisation* la dialectique établie entre un contexte et les événements observés et leurs représentations respectives à

travers diverses étapes qui correspondent à autant de modèles. Nous pensons qu'une partie de cet acte de modélisation est extérieur aux mathématiques. A partir d'un contexte tiré de la réalité et d'événements liés à ce dernier, un déplacement s'effectue de modèle à modèle pour créer une nouvelle interprétation de la réalité initiale ou une nouvelle réalité. Il y a modélisation lorsque nous passons d'un cadre interprétatif strictement verbal d'un fait « concret » détaché de toute autre référence que le langage commun « Je vise cet objet du même endroit que toi », à un autre cadre interprétatif par l'entremise d'artefacts qui servent de médiateurs sémiotiques (Bartolini Bussi, 2008) dans le but de faire émerger une nouvelle compréhension de l'événement ou l'apparition de nouveaux événements. Les modèles sont construits en utilisant des artefacts matériels (matériaux, objets, signes, ordinateur...), nous nous trouvons alors au niveau des modèles informels, et des artefacts formels liés aux mathématiques (parallèles, rationnels...) qui font émerger des modèles formels.

Nous précisons que les titulaires du BEP Techniques du géomètre et de la topographie étudient un terrain sous tous ses aspects (dimensions, pente, relief, obstacles naturels, constructions existantes) en ayant pour objectif de réaliser des plans topographiques. Ils réalisent également des plans de masse (plans qui situent au sol une construction ou un aménagement par rapport aux limites d'un terrain) et les plans de propriétés en conformité avec les règles de l'urbanisme et avec le cadastre. De même, un travail associant le méso-espace et le micro-espace par le biais de la matérialisation sur le terrain, à partir de projets sur plans, des emplacements des travaux à effectuer et l'implantation des piquets servant de repère à la construction sont accomplis par l'assistant géomètre. Nous rappelons également que la problématique de mesure de distances sur le terrain est au cœur de l'enseignement des pratiques que doivent acquérir les élèves de ce BEP.

Dans le cadre d'une liaison possible entre les mathématiques et l'enseignement technologique et professionnel de relevés topométriques à l'aide d'instruments que nous présentons plus loin, nous proposons de débiter l'étude du théorème de Thalès par le problème pratique de mesure de distances inaccessibles dans le méso-espace. Outre qu'il permet d'illustrer le thème de notre article, ce problème correspond également à l'esprit des programmes en vigueur : « *Des activités expérimentales permettant de dégager le théorème de Thalès relatif au triangle et sa réciproque seront proposées [...]* ». Cette problématique n'est certes pas nouvelle à ce détail près qu'au cours de l'histoire, les situations proposées, en particulier par Clairaut (1741), étaient et sont encore de nos jours représentées directement dans l'espace le plus familier, c'est-à-dire celui d'une feuille de format A4. Notre hypothèse de travail est qu'une modélisation qui assurerait le passage du méso-espace au micro-espace grâce à une double approche de la question liée à une problématique à la fois pratique et géométrique⁴, contribuerait à la construction du sens d'une notion mathématique plus particulièrement pour les élèves du BEP Techniques du géomètre et de la topographie.

Une légitimation théorique à cette fonctionnalité extérieure vient étayer son intérêt. Berthelot et Salin (1992) ont montré que la problématique pratique est indispensable à la construction d'une situation en géométrie car elle met en

⁴ Par exemple, dans le but de montrer que deux triangles ont la même aire, la problématique pratique est en rapport avec l'utilisation d'un gabarit par superposition avec les triangles en question. La problématique de modélisation consiste à prendre les mesures d'une hauteur et du côté correspondant sur les deux dessins et à appliquer la formule de l'aire du triangle. La problématique géométrique revient à raisonner sur les aires par découpage et recomposition sans prendre d'informations directement sur les représentations comme précédemment.

évidence la nécessité et l'économie d'une modélisation ultérieure. Cette modélisation aboutit à l'anticipation des effets d'une action des élèves et leur permet de justifier des conjectures.

En aval de son étude, un autre élément de la composante extérieure aux mathématiques du sens pris par un théorème est incarné par les relations que ce dernier entretient avec les autres disciplines générales et professionnelles. Ainsi, dans le cadre du BEP topographe, le théorème de Thalès est mis en œuvre en Sciences Physiques et plus particulièrement en optique pour calculer la distance entre le centre optique et le foyer d'une lentille appelée distance focale f ou le grandissement γ d'une lentille ou pour établir la formule de Newton reliant la focale aux distances foyer objet / objet et foyer image / image. Il est utilisé à la fin de notre étude pour légitimer l'emploi d'un télémètre en bois donnant la mesure d'une distance inaccessible. D'une façon indirecte, grâce à la trigonométrie dont l'introduction est assurée par le théorème de Thalès, il intervient aussi au sein de l'enseignement professionnel au cours de l'emploi d'appareils optiques mais dont le principe repose sur celui du télémètre précédent plus rudimentaire.

2. Composante intérieure du sens

Les objets mathématiques peuvent se caractériser par quatre principaux aspects (Vergnaud, 1991) qui participent à la construction de leurs raisons d'être par le biais, d'une part, du champ de problèmes qui leur donnent sens, et d'autre part, des signifiants et des signifiés :

- l'ensemble des savoir-faire relevant de procédures et de techniques associées à l'objet en question.

- l'ensemble des formes langagières comme le vocabulaire, les expressions et les symboles qui permettent d'évoquer et d'explicitier les propriétés et les procédures en rapport avec l'objet mathématique étudié. Même s'il ne s'agit pas d'un objectif spécifique à atteindre en BEP, nous pensons que les mises en fonctionnement logiques liées à la contraposée du théorème de Thalès, pour démontrer que trois points ne sont pas alignés ou que deux droites ne sont pas parallèles, à sa réciproque pour démontrer que deux droites sont parallèles, et aux connecteurs positionnels « et » / « ou » font partie de cet aspect du sens que peut prendre cet objet.

- l'ensemble des propriétés et des définitions qui le caractérisent ;

- l'ensemble des problèmes que l'objet permet de résoudre efficacement. Pour le théorème de Thalès, les programmes mettent en évidence le calcul de mesure de longueurs, l'étude du parallélisme de droites et l'application à des constructions géométriques du type « agrandissement réduction » dans la plan et dans l'espace ou la construction des $7/5$ (ou $2/3$) d'un segment.

Brousseau considère que la constitution du sens implique une interaction constante avec la situation en termes de conception et d'obstacle. Ainsi, les problèmes introductifs qui paraissent les plus intéressants pour les élèves sont ceux qui permettent de franchir un obstacle ou de modifier leurs conceptions. Ces problèmes posés en amont peuvent être strictement mathématiques. Ainsi, l'introduction du théorème de Thalès est légitimée chez Descartes (1628) par des questions de géométrie (construire un segment dont la mesure de longueur est l'inverse de la mesure d'une autre longueur) non encore résolues au stade de l'étude auquel l'auteur se place. Ces problèmes peuvent aussi avoir un autre cadre que celui des mathématiques, que ce soit en amont ou en aval de l'introduction de ce théorème, mais nous nous situons alors au sein de la composante extérieure du sens dont nous avons déjà parlé.

Cette réflexion sur le sens est confirmée et complétée par les travaux de Chevallard (1997) pour qui deux types d'activités mathématiques sont attendus de la part des apprenants :

- établir une technique relative à un type de tâches ce qui relève du savoir pratico-technique,
- et légitimer cette technique par une technologie voire une théorie grâce à des démonstrations ce qui est en rapport avec le savoir technologico-théorique.

A ces activités, nous rajoutons celle de modélisation d'un problème amorcée initialement à l'extérieur des mathématiques mais qui se poursuit dans le cadre des mathématiques. Dans notre ingénierie, il s'agit pour les élèves de traduire dans le micro-espace, l'espace de la feuille, une situation d'apprentissage du méso-espace, l'espace de la cour.

Cette modélisation consiste à prendre en compte les liens étroits qui existent entre les quatre paradigmes géométriques : G_0 , G_1 , G_2 et G_3 (Parzysz, 2005). Au sein de la géométrie concrète G_0 propre en particulier à la petite enfance, les objets sont physiques et les validations sont perceptives sensibles visuelles ou par le touché. Dans le cadre de la géométrie naturelle ou spatio-graphique G_1 , les objets sont encore physiques mais les validations sont perceptives visuelles ou perceptives instrumentées. La géométrie et la réalité sont encore confondues. En ce qui concerne la géométrie proto-axiomatique G_2 , la réalité est schématisée par des objets théoriques et les validations sont de type hypothético-déductives. La géométrie axiomatique G_3 est un complément à G_2 . Les objets sont strictement théoriques et les validations sont également hypothético-déductives.

Enfin, nous nous sommes placés jusqu'ici du côté de l'élève mais nous abordons aussi la question du sens d'un savoir par le biais de sa structuration. Nous considérons que l'organisation praxéologique (Chevallard, 1999) qu'un objet mathématique permet de mettre en place participe de la lente élaboration des raisons d'être de l'enseignement des mathématiques. En effet, l'apport qu'un tel objet engendre dans la structuration d'un cours, en particulier la variété des notions et des propriétés dont il favorise l'introduction et les interconnexions qu'il entretient avec elles contribuent à la construction du sens que prennent les mathématiques pour des élèves. Ainsi, même si rien n'est imposé dans les programmes du BEP Techniques du géomètre qui laissent le libre choix pédagogique aux enseignants quant à l'organisation de leur cours, le théorème de Thalès joue un rôle central dans le sens où, d'une part, il permet de résoudre de nombreuses tâches mathématiques que nous avons déjà citées et, d'autre part, il facilite la légitimation d'autres connaissances. Ainsi, l'écriture algébrique des équations de droites, l'introduction de la trigonométrie dans le triangle voire même le théorème de Pythagore s'appuient sur ce théorème. Nous pouvons constater que la trigonométrie occupe aussi une place importante dans les programmes de ce BEP tant en mathématiques que dans certaines pratiques professionnelles auxquelles elle est associée. Dans notre étude, notre choix s'est malgré tout porté sur le théorème de Thalès car ce dernier semble mieux répondre à nos attentes au sujet de la composante intérieure du sens en mathématiques. En particulier, les tâches mathématiques qu'il permet de résoudre, les mises en fonctionnement logique qu'il génère et les propriétés qui en découlent sont plus variées.

De l'ingénierie didactique que nous avons conçue (2005) pour tenir compte des axes précédents, nous extrayons la composante extérieure qui est en rapport avec

le réel. Plus précisément, pour donner du sens à des connaissances spatio-géométriques, comme celle de visée de face, nous prenons en compte :

- la possibilité de mesurer de façon effective des distances inaccessibles dans le méso-espace,

- un moyen d'évoquer cette action à partir de la représentation des situations de ce domaine dans le micro-espace.

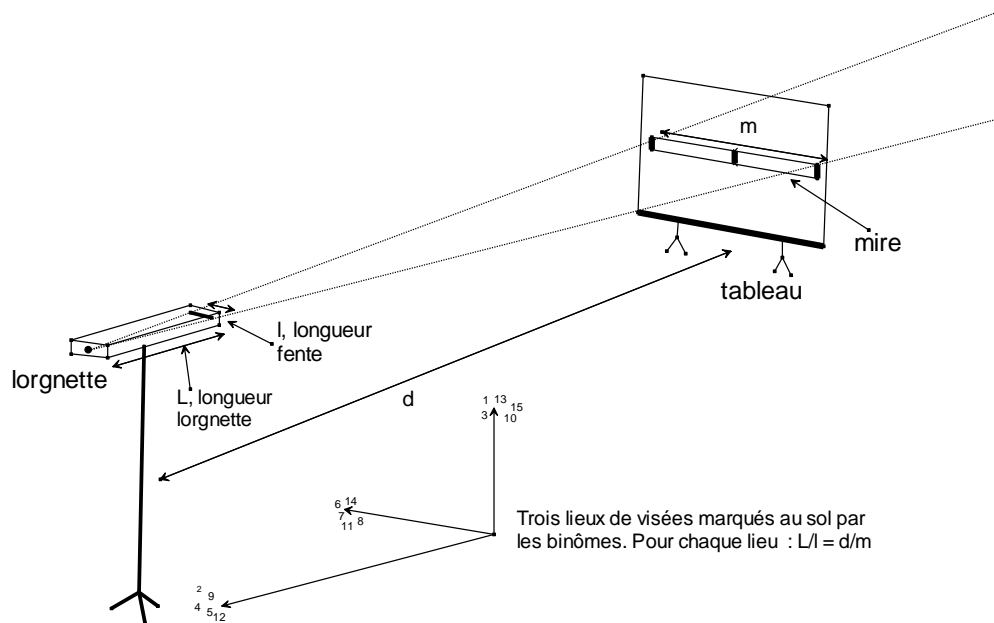
Au vu de ce que nous avons rappelé ci-dessus, nous pouvons considérer que ces deux éléments constituent des objectifs d'apprentissage fondamentaux pour les élèves des classes du BEP Techniques du géomètre et de la topographie tant du point de vue de la formation professionnelle que de la formation générale en mathématiques.

Illustration par un exemple de situation introductrice

1. Situations de visée dans le méso-espace

Au cours de cette première séance, certaines règles de construction sont rappelées aux élèves. En France, les bâtiments doivent respecter des règlements édictés en particulier par les Plans Locaux d'Urbanisme. L'une de ces règles exige qu'une personne doit pouvoir apercevoir un édifice classé Monument Historique de tout lieu situé sur un cercle de rayon 500 mètres et dont le centre est à l'intérieur du bâtiment. Autrement dit, aucun immeuble ne doit obstruer totalement la vue dans un rayon de 500 mètres. Les élèves sont ensuite confrontés à la situation suivante. Un immeuble de 9 mètres de hauteur doit s'implanter à moins de 500 mètres d'un édifice classé Bâtiment de France dont on ne connaît pas la hauteur. Les élèves doivent représenter à l'échelle la zone interdite d'implantation de la construction. Ils sont amenés à comprendre qu'ils doivent avant tout trouver une méthode pour mesurer sur le terrain la hauteur de l'édifice classé.

Un travail, que nous ne détaillons pas ici, préalable à l'activité qui suit, favorise l'émergence chez eux des conditions correctes de visée avec une lorgnette. Quinze de ces instruments sont construits à partir de boîtes parallélépipédiques différentes. Chacun est percé d'un trou de visée et d'une fente qui sont centrés. En binômes et dans la cour, les élèves visent avec ces lorgnettes une mire composée d'une bande de papier de 1,50 mètre de long et de 15 centimètres de large fixée horizontalement sur un tableau. Pour cela, ils font coïncider les milieux de la fente et de la mire ainsi que leurs extrémités. Afin de faciliter cette visée, le milieu et les extrémités de la mire sont représentés par trois traits et le milieu de la fente d'une lorgnette est matérialisé par un morceau de ficelle. Chaque binôme marque le lieu de visée de sa lorgnette sur le sol à l'aide de cartons d'identification numérotés de 1 à 15. Pour ces derniers, les choix de leur taille et leur rassemblement in fine dans trois espaces relativement restreints entraînent leur superposition au moins partielle.



2. Situation de modélisation de la visée et anticipation dans le micro-espace

Le but final de la deuxième séance est de savoir, grâce à une première démarche et sans se rendre dans la cour, si une mire pourrait être vue à l'aide d'une lorgnette.

Pour faire face à cette contrainte plus forte, une représentation de la situation est nécessaire. Matérialiser des lorgnettes utilisées dans l'espace à trois dimensions par un dessin plan constitue une première modélisation qui est loin d'être évidente. Plus précisément, l'objectif pour les élèves est d'aboutir, en premier lieu, à une représentation à l'échelle des lorgnettes par des rectangles en papier calque sur lesquels sont indiquées la fente et le trou de visée puis, en second lieu, à une représentation de la situation de visée. Cette dernière permet, d'une part, la mise en évidence de l'équivalence des lorgnettes à partir de la superposition de leur calque et de la matérialisation des champs de visée et, d'autre part, d'obtenir une première procédure d'anticipation d'une visée dans le micro-espace. Une deuxième difficulté est liée au fait que des trajets visuels immatériels doivent être tracés.

Un dernier écueil est en rapport avec le statut de ces représentations qui diffère du statut du dessin en géométrie. « *La production de tracés géométriques en classe de mathématiques et celle de tracés pour le bâtiment diffèrent de par la finalité même des tracés. En classe de mathématiques, ce n'est pas tant l'obtention du dessin en tant qu'objet spatio-graphique qui est visée par l'enseignement que le procédé géométrique qui conduit au dessin. La finalité de tracé de réservations⁵ est en revanche celle de production d'un objet spatio-graphique. [...] Du coup, la matérialité des instruments est un élément susceptible de modifier le produit à obtenir.* » (Bessot & Laborde, 2005). Bien que notre situation ne soit pas en rapport direct avec un procédé professionnel comme peut l'être le tracé de réservations, il s'agit, dans le cadre de la modélisation proposée,

⁵ La réservation dans les métiers du bâtiment consiste à tracer les éléments effectifs d'un chantier, un mur ou un plancher par exemple, tout en anticipant l'implantation ultérieure d'autres éléments, les fenêtres et les portes ou les canalisations et le réseau électrique.

de produire dans un premier temps un objet spatio-graphique de G_1 pour lequel la prise en compte des imperfections de tracé sont fondamentales.

Une phase collective est tout d'abord mise en place en ce qui concerne la schématisation qui doit permettre aux élèves d'imaginer une façon de représenter la lorgnette et la visée ainsi que les longueurs qui sont retenues pour la modélisation ultérieure. Nous attendons une matérialisation plane par des rectangles faisant apparaître la fente et le trou de visée ce qui va à l'encontre des schémas qu'un certain nombre d'entre eux produit spontanément. En effet, quelques uns sont tentés de schématiser la visée dans l'espace à trois dimensions, d'autres produisent des schémas hybrides relevant à la fois du plan et de l'espace. Après échanges mutuels, un schéma est alors retenu par la classe pour ensuite passer à la phase de modélisation. S'en suit un travail en binôme pour la mise au point définitive de la représentation des lorgnettes à l'échelle, dont le rapport $3/8$ est imposé à l'ensemble des groupes, tenant compte du centrage de la fente et du trou de visée. Chaque binôme reproduit sa lorgnette en trois exemplaires.

Une fois ce travail effectué, neuf groupes sont constitués. Chacun reçoit tous les calques d'un des trois ensembles de lorgnettes équivalentes afin de percevoir les champs de visées identiques par superposition et d'anticiper une visée du micro-espace.

La problématique pratique intervient lorsque les élèves manipulent les lorgnettes pour en retenir des informations et lorsqu'ils exécutent effectivement les représentations. Mais la problématique de modélisation prend déjà le relais lorsqu'il s'agit d'anticiper sur les réponses qui pourraient être encore obtenues par la visée, mais dont l'enseignant exige qu'elles soient trouvées dans le système symbolique du modèle. Nous sommes au niveau du type de géométrie spatio-géométrique où les objets relèvent de réalités spatio-graphiques. Les objets sont représentés dans l'espace physique à l'aide d'instruments et sont manipulés de façon pratique.

Les calques sont correctement positionnés les uns sur les autres pour signifier, après avoir tracé leur champ de visée, que les lorgnettes d'un même tas sont équivalentes. L'anticipation d'une visée est évoquée et exécutée par les élèves. Ils ont globalement bien assimilé le fait que, pour qu'une mire soit perçue à l'aide d'une lorgnette dans le micro-espace, il faut d'une part, que les milieux de la mire, de la fente et le trou de visée soient alignés et que, d'autre part, cette mire entre exactement dans le champ de visée de la lorgnette.

3. Situations expliquant l'équivalence des lorgnettes et anticipant une visée par une nouvelle méthode : le calcul

L'objectif de cette séance est d'émettre une conjecture pour expliquer l'équivalence des lorgnettes qui ont le même champ de visée en mettant en évidence la proportionnalité de leur longueur et de leur fente. Pour cela, sont consignées au tableau de la classe et pour chaque lorgnette, les mesures des longueurs de la fente, de la longueur et de la largeur de la lorgnette et de la mire ainsi que les distances dans le méso-espace des trois lieux de visée à la mire.

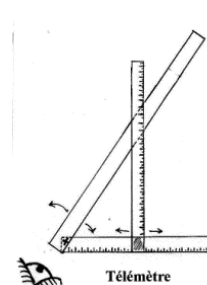
Les contraintes liées à cette situation sont fortes en particulier celle de faire émerger une propriété de proportionnalité à partir de mesures prises dans la réalité car ces dernières sont alors entachées d'approximations. C'est pour cette raison que les caractéristiques des lorgnettes d'un des trois tas sont telles que le rapport peut être facilement identifié (largeur fente/longueur lorgnette = $1/10$), ce que les élèves font. Ils déduisent une partie de la généralisation attendue : le rapport longueur fente/longueur lorgnette est à peu près le même pour les

lorgnettes d'un même tas. Par contre, ils sont guidés pour trouver qu'à chaque fois ce rapport est également celui de la longueur de la mire sur distance lorgnette-mire. Ce constat permet d'anticiper, par le calcul, une visée du méso-espace. Même si une phase calculatoire prend place, les validations sont perceptives. Mais un discours fondé sur des formulations discursives apparaît. La problématique géométrique prend place lors de la phase de démonstration qui valide les conjectures. Nous nous trouvons alors au niveau de la géométrie proto-axiomatique au sein de laquelle les objets sont définis par une formulation discursive.

4. Retour dans le méso-espace

La situation de réinvestissement a pour but d'apporter une solution pratique au problème de mesure de la hauteur du Bâtiment de France dont il est question au début, grâce à l'utilisation d'un télémètre en bois présenté par Errard de Bar-le-Duc (1594). Il se compose de deux règles graduées en centimètres l'une verticale qui peut glisser le long d'une autre horizontale.

Une troisième branche est articulée avec cette dernière. L'utilisateur doit viser perpendiculairement le bâtiment classé avec la règle horizontale et faire coïncider le sommet de l'édifice avec l'extrémité de la troisième branche articulée. Pour déterminer la distance inconnue, il mesure la distance qui le sépare de l'édifice, par exemple 20 mètres, et il place la règle verticale sur la graduation 20 de la règle horizontale. Le nombre de centimètres qui apparaît à l'intersection de la règle verticale et de la partie articulée donne la hauteur réelle cherchée moyennant une conversion et la prise en compte de la taille de l'utilisateur.



Pour résoudre complètement le problème initial, les élèves calculent la distance maximale qui sépare l'édifice classé du projet de construction grâce au théorème de Thalès. La solution consiste alors à tracer à l'échelle un anneau plan défini par l'intersection d'un disque de rayon 500 m et du disque de même centre et de rayon la longueur précédente.

De nos jours, les techniciens n'utilisent plus de télémètre en bois. Nous nous trouvons à la transition entre le domaine de la légitimation de l'utilisation d'un instrument rudimentaire qui répond de façon pratique au problème de mesure de distances inaccessibles et l'emploi d'instruments de topographies électroniques contemporains. Les élèves du BEP Techniques du géomètre et de la topographie doivent savoir utiliser le goniomètre qui sert à mesurer des angles « horizontaux », l'éclimètre qui mesure les angles « verticaux », le théodolite qui permet la mesure des angles « horizontaux » et « verticaux », le niveau automatique qui calcule des dénivellations et le tachéomètre ou station totale qui, en plus de calculer des angles mesure des distances. Le cadre de cet article ne permet pas de détailler le fonctionnement de ces instruments en rapport avec notre thème.

La modélisation du réel

Nous proposons de peaufiner notre définition de la modélisation du réel par une approche sémiotique de ce concept afin de mieux repérer les différentes étapes du passage de la « réalité » vers le monde des mathématiques tel qu'il a été organisé dans l'ingénierie didactique. En établissant un lien entre la composante extérieure et la composante intérieure du sens, nous construisons une première acception de cette « modélisation » qui est plutôt informelle au cours de laquelle, dans chaque

étape qui la compose, le contexte et l'événement initiaux sont apparents de façon évidente ou latente. Ce niveau de modélisation génère des modèles se référant au contexte initial permettant, d'une part, l'émergence de nouvelles interprétations de ce contexte et des événements qui lui sont rattachés et, d'autre part, la naissance de nouveaux événements dans lesquels les mathématiques peuvent intervenir.

1. Avant le début de la modélisation

Contexte initial : dans la cour de l'établissement (environnement), les binômes visent (action) à l'aide de lorgnettes une mire fixée sur un tableau (matériel) en faisant coïncider les extrémités et le milieu de la mire avec les extrémités et le milieu de la fente de la lorgnette.

Événement « perceptible » initial : dans la cour (le lieu), après que tous les binômes ont procédé à la visée en ayant marqué l'emplacement de cette dernière (l'instant), certains élèves remarquent que les cartons identificateurs sont regroupés en trois tas (1^{ère} interprétation « perceptive » du fait : équivalence des lorgnettes) et d'autres rajoutent que des lorgnettes différentes, sans préciser en quoi elles le sont, peuvent avoir le même lieu de visée (2^{ème} interprétation « perceptive » du fait précédent).

2. Les différentes étapes de la modélisation :

La modélisation du *contexte initial* (matériel et actions).

Modèle perceptible du *contexte initial* (matériel) : dans la salle organisée en ateliers, les élèves représentent les lorgnettes par des rectangles à l'échelle sur papier calque avec la fente et le trou de visée centrés. Il s'agit d'une modélisation perceptible du matériel lié au contexte initial car ils modélisent une chose effectivement visible dans le monde palpable. En effet, des rectangles de même type percés d'un point de visée et fendus d'un segment représentant les lorgnettes dans le plan peuvent apparaître dans le contexte initial si nous procédons à une découpe en long des lorgnettes en suivant le plan défini par le trou et la fente.

Modèle imaginable du *contexte initial* (matériel) : pour pouvoir matérialiser la visée dans le plan, les élèves tracent le champ de visée de leur lorgnette. Ce modèle du matériel est imaginable car les champs sont impalpables dans le contexte initial.

Modèle imaginable du *contexte initial* (action) : après avoir modélisé une lorgnette et son champ de visée, l'action de visée d'une mire est modélisée. Dans le plan, les milieux de la mire et de la fente sont placés sur la bissectrice de l'angle de visée et leurs extrémités respectives sont situées sur les côtés de cet angle. C'est un premier exemple qui illustre le fait que la modélisation constitue une interface entre deux interprétations de la réalité. Ce rôle de médiation est apparent grâce au lien établi entre, d'une part, le fait qu'il fallait, pour viser correctement dans la cour, être de face et que les extrémités et les milieux des deux objets devaient coïncider et, d'autre part, l'idée que dans le modèle, les extrémités et les milieux en question se situent respectivement sur la bissectrice et les côtés de l'angle de visée. Ces modèles imaginables et perceptibles représentent une nouvelle réalité.

Événement « perceptible » dans la nouvelle réalité : le modèle imaginable du contexte initial correspond à une nouvelle réalité et donne lieu à l'apparition d'un nouvel événement perceptible : dans la salle de classe (lieu), après avoir représenté les lorgnettes à l'échelle sur du papier calque (instant), les élèves

constatent par superposition des calques la coïncidence de cinq angles.

Modélisation de l'événement initial.

Modèle imaginable de l'événement initial : l'événement perceptible précédent peut aussi être interprété comme étant un événement « imaginable » dans le modèle lié à l'événement initial : dans la salle de classe (lieu), après avoir représenté les lorgnettes à l'échelle sur papier calque (instant), les élèves constatent que l'équivalence des lorgnettes correspond au fait qu'elles ont le même champ de visée. (1^{ère} interprétation « imaginable » dans le modèle du fait « équivalence des lorgnettes »). La modélisation est une interface entre un événement lié à un modèle qui représente une nouvelle réalité et un autre événement en rapport la réalité de départ à laquelle est rattaché le contexte initial. Par un premier aller-retour d'une réalité à une autre les diverses interprétations participent de la modélisation.

Événement « mathématique » dans ce modèle : un événement « mathématique » peut être rattaché à une interprétation mathématique d'un fait perceptible : dans la salle de classe (le lieu), après avoir énoncé que les champs de visée sont équivalents (l'instant), des élèves disent : « Les lorgnettes équivalentes ont des angles de visée égaux » (1^{ère} interprétation mathématique d'un fait perceptible). Ici aussi nous pouvons dire que la modélisation est une interface entre différents types d'interprétations de la réalité car un second aller-retour avec le contexte initial s'effectue si nous voulons que l'idée de l'équivalence de deux lorgnettes en termes de champ de visée soit dépassée. En quoi les lorgnettes équivalentes de par la visée de la mire sont-elles différentes malgré tout ? Elles n'ont pas les mêmes mesures de longueurs. Or, dans le modèle, nous avons constaté que par superposition des calques représentant des lorgnettes équivalentes que ces dernières avaient le même champ de visée. N'y aurait-il pas autre chose d'identique ?

D'où l'apparition d'un nouvel **événement « mathématique » dans ce modèle :** dans la salle de classe (le lieu), après avoir énoncé que les champs de visée sont équivalents (l'instant), des élèves disent : « Les lorgnettes équivalentes ont certaines mesures de longueurs proportionnelles » (2^{ème} interprétation mathématique d'un fait perceptible). Une fois cette étape franchie, nous poursuivons la modélisation mais dans le cadre strict des mathématiques puisqu'il s'agit alors de démontrer une conjecture. Cela relève de la seconde acception du terme « modélisation ».

Ce second sens est la **modélisation formelle** obtenue à l'aide de modèles ne se référant plus au contexte initial et pour laquelle les événements et les objets, détachés de toute référence à la situation de départ, sont strictement mathématiques. Nous sommes dans le cadre de la géométrie proto-axiomatique voire axiomatique qui coupent le lien avec la réalité. Les objets sont à présent théoriques et les validations de type hypothético-déductives. Dans notre situation, il s'agit de démontrer qu'une droite parallèle à un côté d'un triangle coupe les deux autres côtés en segments proportionnels pour ensuite démontrer le théorème de Thalès. Dans une étape de modélisation formelle, nous distinguons la réalité mathématique perceptible (on partage de façon effective le côté d'un triangle en douze parties égales etc.) de la réalité mathématique imaginée (dans le cas irrationnel, la démonstration peut être admise ou peut se poursuit par encadrements à l'infini donc en lien avec une réalité « imaginée »).

Ces deux types de modélisations formelles et informelles participent de la modélisation mathématique dans l'enseignement qui relève de la dialectique établie entre les différentes étapes de modélisation d'un contexte et

d'événements. Mais finalement quel est l'intérêt de proposer un tel enseignement des mathématiques ? A partir d'une situation tirée de la réalité, les différents modèles qui représentent autant de niveaux distincts d'interprétation de cette réalité peuvent favoriser la mise en place d'une double mathématisation du monde. Une mathématisation « verticale » qui part du monde « palpable » pour arriver dans le monde des modèles perceptibles ou imaginaires du réel puis dans celui des représentations symboliques. Une mathématisation « horizontale » qui naît et évolue principalement dans le monde des symboles, ces deux types de mathématisation étant liés à ce que nous avons appelé « composante interne » et « composante externe » du sens des mathématiques. La modélisation informelle permet d'interpréter autrement les événements de la réalité ou d'en faire émerger de nouveaux pour mieux l'appréhender. Elle favorise l'anticipation dans le modèle d'actions menées dans le monde réel. La modélisation formelle favorise l'émergence de conjectures mathématiques, de justifications de ces conjectures pour finalement aboutir à une anticipation de réponses à des questions liées au réel mais cette fois-ci ces réponses sont construites dans l'abstraction des mathématiques. Dans le cadre de notre situation, la géométrie apparaît comme un langage permettant, d'une part de décrire et d'interpréter la réalité, d'autre part de construire et de modéliser l'espace physique afin, dans un dernier temps, de répondre à des attentes professionnelles de mesure effective de distances inaccessibles.

Conclusion

La situation proposée de mesure de distances inaccessibles et de passage du méso-espace au micro-espace répond à des attentes à la fois professionnelles et mathématiques. Elle permet d'introduire l'étude du théorème de Thalès qui joue un rôle central dans le BEP Techniques du géomètre et de la topographie en particulier de par les nombreuses tâches qu'il permet de résoudre et les objets mathématiques qu'il génère.

Cette situation favorise aussi une procédure de modélisation d'un fait tiré de la réalité et met en évidence une méthode de calcul employant un instrument peu sophistiqué. Cette technique fondée sur le théorème de Thalès constitue aussi une introduction aux pratiques professionnelles plus contemporaines d'utilisations d'instruments optiques liées au théorème de Thalès.

La modélisation du réel que nous venons de décrire constitue une interface entre plusieurs modes de représentations. Elle constitue aussi une interface entre ces diverses représentations relevant aussi des mathématiques et la mathématisation complète de la question initiale en rapport la problématique géométrique. Elle permet de comprendre l'articulation qui peut être instaurée entre le monde réel, le monde physique et le monde mathématique. Elle joue le rôle de jonctions entre, d'une part, les différentes représentations du monde « réel palpable » parfois mathématisée mais de façon informelle et, d'autre part, ces diverses représentations qui correspondent à de nouvelles réalités et les mathématiques formelles.

Le raccourci entre les deux types de modélisations informelles et formelles est incarné par la situation historique de l'utilisation du télémètre dans le méso-espace pour trouver directement la solution dans cet espace. Mais derrière cette simple manipulation existe une mathématisation qui la légitime.

Finalement, la question de l'enseignement des mathématiques à un niveau donné est peut être là. Faut-il entrer dans les détails de la modélisation mathématique de cette situation avec des élèves et si oui, jusqu'à quel degré

d'abstraction ?

L'un des écueils de la situation d'apprentissage que nous avons exposée est en rapport avec le fait que les modèles successifs qu'elle fait émerger ne sont pas totalement construits par une majorité d'élèves. Une question fondamentale est justement de savoir comment créer les conditions qui leur permettraient de faire évoluer leurs propres modèles sans qu'ils ne soient en partie imposés par l'enseignant ou par une minorité de leurs camarades comme c'est le cas dans notre travail en ce qui concerne les représentations planes des lorgnettes, des champs de visée et de leur équivalence par superposition.

Le cadre théorique du Domaine Didactique d'Expérience (Boero, 1998) peut constituer une piste de réflexion non négligeable. Ce cadre est relatif aux relations complexes qui se développent à l'école entre le contexte interne de l'élève – ses conceptions, l'ensemble de ses schèmes, représentations, émotions, analyse –, le contexte interne de l'enseignant – ses conceptions, ses objectifs d'apprentissage, représentation, émotion, attentes – et le contexte externe – portion de réalité objet de réflexion, signes, objets, contraintes physiques, discussion, analyse.

Pour une prise en compte de cet outil dans notre travail d'élaboration et de mise en place d'une situation d'apprentissage, nous devrions mettre en évidence le milieu interne des élèves au sujet des représentations qu'ils pourraient se faire de la situation. Il faudrait approfondir la piste à ce sujet qui montre que leur représentation est parfois en rapport avec une schématisation dans l'espace voire mixte (espace et plan). Cela relève d'un travail complémentaire que nous poursuivons.

Références

ARTIGUE M. (1991) Epistémologie et didactique. *Recherche en Didactique des Mathématiques*. Vol 10.2.3. La Pensée Sauvage. Grenoble.

BARTOLINI BUSSI, M. & BOERO, P. (1998) *Teaching and Learning Geometry in Contexts, Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century*. ICMI study. Ed. Kluwer (Dordrecht, NL).

BARTOLINI BUSSI, M. G. & MARIOTTI, M. A. (2008) Semiotic Mediation in the Mathematics Classroom : Artefacts and Signs after a Vygotskian Perspective, in L. English et al. (eds.), *Handbook of International Research on Mathematics Education* (2nd edition), Mahwah, N.J. : Lawrence Erlbaum Associates.

BERTHELOT R & SALIN M.-H. (1992) *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*. Thèse Université Bordeaux I. LADIST.

BESSOT A. & LABORDE C. (2005) Vers une modélisation d'une géométrie en acte dans les activités de lecture – tracé du bâtiment Castela et Houdement (éds) *Acte du séminaire national de didactique des mathématiques*, IREM Paris 7.

BESSOT A. & LABORDE C. (2004) Vers une modélisation d'une géométrie en actes dans les activités de lecture - tracé du bâtiment, *Cahiers du laboratoire Leibniz*, n°101, Grenoble Université Joseph Fourier.

BROUSSEAU G. (1983) Etude de questions d'enseignement. Un exemple : la géométrie. *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique*. LSD2 IMAG. Grenoble.

CLAIRAUT A.C. (1741). *Eléments de géométrie*. Hachette. Paris. (1861).

CHEVALLARD Y. (1997) Familiale et problématique, la figure du professeur. *Recherche en Didactique des Mathématiques*. Vol n°17.3, La Pensée Sauvage. Grenoble..

CHEVALLARD Y. (1999) Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. (Coordonné par Noirfalise). *Acte de l'Université de didactique des mathématiques de La Rochelle*, IREM de Clermont-Ferrand.

DESCARTES R. (1628) *Règles pour la direction de l'esprit. Œuvres philosophiques*. Tome I. Editions de F. Alquié. Ed Garnier. Paris (1963).

ERRARD I. (1594) *La géométrie et pratique d'icelle*. Michel Daniel. Paris. (1619).

LABORDE C. & PASTRE P. (2005) *Activités et formations professionnelles : simulations informatiques comme aide à la conceptualisation*. Grenoble : Laboratoire Leibniz, Université Joseph Fourier.

LAGUERRE E. (2005) *Une ingénierie didactique pour l'apprentissage du théorème de Thalès au collège*. Thèse Université Paris Diderot-Paris 7.

PARZYSZ B. (2005) Preuve perceptive ou démonstration : le rapport des PE1 à la géométrie à travers leur métadiscours. *Actes du XXXI ème colloque sur la formation des maîtres*.

THIRION M. (1999) *Les mathématiques et le réel*. IREM - Histoire des mathématiques. Ellipse. Paris.

VERGNAUD G. (1991) La théorie des champs conceptuels. *Recherche en Didactique des Mathématiques*. **10.2.3**. La Pensée Sauvage. Grenoble.

ERIC LAGUERRE
Équipe DIDIREM, Laboratoire André Revuz, Paris
eric.laguerre@versailles.iufm.fr