Du lycée à l'université :

Evolution des praxéologies mathématiques

Imène Ghedamsi
I.S.T.M. Faculté de médecine de Tunis

Résumé: Les professeurs universitaires s'accordent généralement à dire que les entrants à l'université ont des difficultés d'adaptation en mathématiques. Cette situation qui n'est pas propre à la Tunisie, si l'on en juge par la multitude de travaux concernant les transitions institutionnelles en France et ailleurs, semble inhérente à une évolution incohérente des pratiques mathématiques du lycée à l'université.
Dans ce travail, nous avons choisi de modéliser les pratiques attendues, dans l'environnement du concept de limite, en praxéologies mathématiques. Ceci, afin d'analyser leurs évolutions, et d'être en mesure d'identifier des ruptures générées par des variations qualitativement et quantitativement significatives.

1. Constats et problématisation

Notre travail qui, au début était issu d'une réflexion personnelle à propos de situations de crises de néo-bacheliers face à des pratiques universitaires nouvelles, s'affine par un constat dans le corps des enseignants universitaires lesquels s'accordent à dire que les entrants à l'université ne maîtrisent pas bien les "notions de base", n'ont pas la capacité à véhiculer correctement des raisonnements mathématiques, en résumé, ont des difficultés d'adaptation en mathématiques. Dans tous les cas le champ de l'Analyse est particulièrement visé. Se pose alors la question suivante : serait-il possible d'envisager, qu'à deux niveaux successifs d'enseignement d'un même savoir mathématique, puisse exister des pratiques non corrélées ?

Dans ce travail, nous avons fait le choix de modéliser les pratiques attendues dans les deux dernières années du lycée et en première année université, dans l'environnement d'un concept fondamental en Analyse : celui de la limite, en praxéologies mathématiques. Puis, en analysant l'évolution de ces praxéologies, nous serons en mesure de caractériser, en partie, cette transition institutionnelle, en particulier en identifiant des ruptures générées par :

- La sollicitation , dans les deux institutions, d'un ou de plusieurs types de tâches particuliers,
- l'utilisation, à l'entrée à l'université, de certaines techniques inexistantes ou à faibles occurrences au lycée et inversement,
- le statut institutionnel accordé aux technologies véhiculées.

2. Etude institutionnelle comparée

A travers l'analyse des exercices répertoriés dans l'environnement du concept de limite, dans les deux dernières années du lycée et en première année université option maths-informatique, nous avons pu classifier les types de tâches en trois catégories :

- Tâches de type algorithmique

Dans ce cas, il s'agit de considérer les tâches utilisant des techniques calculatoires *simples* ou *complexes* pour trouver la limite d'une suite ou d'une fonction.

- Tâches de type graphique

Il s'agit dans ce cas de tâches qui étudient graphiquement, le comportement asymptotique d'une fonction, la position de tangentes en des points particuliers, le comportement d'une suite, etc., pour conjecturer sur des limites éventuelles. Dans un autre sens, on se propose également de considérer les tâches dont le résultat d'un calcul de limite est à interpréter graphiquement.

- Tâches de type heuristique

Afin d'être en mesure de véhiculer les techniques qui répondent à ce type de tâches, l'apprenant est dans la nécessité de mobiliser des compétences de raisonnement indépendantes du contenu en question, telle que l'élaboration d'une stratégie de résolution.

Nous avons ensuite, entrepris une analyse des différents types de tâches visant à identifier les techniques et éventuellement les technologies qui lui sont associées, en faisant le choix de distinguer limite d'une suite et celle d'une fonction. Les résultats que nous avons pu établir sont récapitulés dans les tableaux suivants :

- Limite d'une fonction

Type de tâches	Technique	Technologies
Algorithmiques	Utiliser la calculatrice	
	Fonction continue en x_0	Définition de la continuité d'une fonction en un point
	Factoriser par le terme prépondérant	Arithmétique des expressions algébriques. Théorèmes des opérations sur les limites. Théorèmes de limites des expressions particulières.
	Multiplier par l'expression conjuguée	
	Effectuer un changement de variable	Théorèmes de composition de limites
Graphiques	Interpréter graphiquement un calcul de limite	Théorèmes et/ou définition de cours relatifs aux équations de tangentes, d'asymptotes, de branches infinis. Arithmétique des expressions algébriques.
	Conjecturer graphiquement	
Heuristique	Identifier un nombre dérivé	Définition de la dérivabilité d'une fonction en un point.
	Encadrer - comparer	Théorèmes des limites et ordre. Théorèmes des accroissement fini. Inégalité de Taylor-Lagrange. Formule de Taylor avec reste intégral. Comparaisons locales de fonctions (de référence ou autres).
	Discuter suivant un paramètre	
	Utiliser la définition formelle	Définition formelle de Cauchy -Weierstrass

	Effectuer un développement limité	Formule de Taylor-Young. Règles concernant les DL de +,., /, fonctions composées et primitives.
	Utiliser un contre exemple	Critère par les suites.
	Raisonner par l'absurde	Règles de logique.

- <u>Limite d'une suite</u>

Type de Tâches	**Technique**	**Technologies**
Algorithmiques	Factoriser par le terme prépondérant	L'arithmétique des expressions algébriques. Théorèmes des opérations sur les limites de suites. Théorèmes de limites de suites particulières.
	Multiplier par l'expression conjuguée	
	Effectuer un calcul simple en utilisant des résultats du cours	
	Ecrire v_n sous la forme $f(u_n)$	Limite de suite de la forme $(f(u_n))_n$
Graphiques	Conjecturer graphiquement	Théorème du point fixe
Heuristiques	Encadrer- comparer	Théorèmes des limites et ordre. Comparaison des suites (de références et autres).
	Utiliser la caractéristique d'une suite récurrente convergente	Propriété des suites monotones. Théorème du point fixe.
	Calcul infinitésimal (valeur approchée, etc.)	
	Utiliser la définition formelle d'une limite de suite	Définition formelle de Cauchy -Weierstrass
	Montrer que la suite est ou non de Cauchy	Critère de Cauchy
	Identifier des suite(s) adjacente(s)	Définition et théorèmes relatifs aux suites adjacentes
	Utiliser des suite(s) extraite(s)	Définition et théorèmes relatifs aux suites extraites (valeur d'adhérence, etc.).
	Utiliser des contre exemples	
	Raisonner par l'absurde	Règles de logique

Enfin, dans la dernière phase de ce travail, nous avons dénombrer l'ensemble des couples (type de tâche, technique véhiculée), que nous avons couplé par une analyse qualitative appropriée, concernant notamment le statut des technologies dans chaque niveau d'étude, afin de détecter des variations génératrices de ruptures globales entre le lycée et l'université[1].

2.1. Etude du manuel de 3ème année option maths[2]

L'approche de la notion de limite en troisième année section mathématique, se fait à partir d'exemples illustrés graphiquement sous la recommandation du programme officiel :

" On évitera toute formalisation des définitions relatives à la limite d'une fonction"

Selon les objectifs des programmes, l'élève sera capable à ce stade d'étude de calculer des limites de fonctions à partir des théorèmes d'opérations sur les limites et les limites de fonctions de références à savoir :

$\boxed{x \to x,\ x \to a \text{ et } x \to 1/x}$

Dans ce manuel, nous avons répertorié des exercices faisant appel au concept de limite[3] dans onze des quatorze chapitres présents (un total de 169 exercices). La partie *exercices* recense un ensemble de tâches à exécuter, qui se regroupent suivant des standards bien identifiés et dont les contenus sont en adéquation chronologique avec l'apparition des notions visées du cours.

Cela donne en pourcentages le résultat détaillé suivant :

[1] Nous restreignons le présent travail à la limite d'une fonction.
[2] Ce niveau d'étude concerne l'année précédant celle du baccalauréat.
[3] l'introduction effective de la notion de limite en tant que notion d'étude se fait à partir de cette année du cursus scolaire.

1. Utiliser la calculatrice
2. *Fonction continue en x_0*
3. Factoriser par le terme prépondérant
4. Multiplier par l'expression conjuguée
5. Effectuer un changement de variable
6. Interpréter graphiquement un calcul de limite
7. Conjecturer graphiquement
8. Identifier un nombre dérivé
9. Encadrer, comparer
10. Discuter suivant un paramètre

La technique de changement de variables, qui n'est autre qu'une forme opérationnelle du théorème de composition des limites, est utilisée, certes à un taux très faibles, sans que la technologie la légitimant ne soit dans le programme de 3ème année. Un des exercices qui en relève explicite dans ses énoncés, le besoin de passer par un changement de variable en ces termes : " *on pourra poser $x = \pi/2 + h$, $h \in IR$*", Comment le professeur gérera t-il cette situation en l'absence de technologie de référence ?

Par ailleurs, lorsqu'il s'agit d'interpréter des courbes afin d'en conjecturer un nombre limite éventuel, l'élève n'est généralement pas confronté à une tâche de production complexe. On lui demande, ici d'utiliser la représentation graphique d'une fonction f (fournie par les énoncés ou explicitement sollicitée) afin de conjecturer de l'existence d'une limite éventuelle de f en x_0 (en l'occurrence de percevoir un nombre dérivé) ou encore de représenter les courbes par exemples de -f, |f|, f+k (k étant un réel donné. Ces tâches graphiques supposent de plus que la courbe ne recèle aucun implicite non visible, donc elles induisent une utilisation du graphique peu réaliste.

Enfin, en aucun cas, l'élève face à une tâche de nature graphique, n'a à prendre lui même la décision d'effectuer une représentation graphique qui ne lui sera pas demandée ou fournie, alors qu'elle se révèle indispensable à la compréhension ou à la résolution d'une question donnée engageant le concept de limite. C'est pourtant à ce type de démarche qu'il faudrait initier l'apprenant…

Une majorité des tâches heuristiques nécessitent l'utilisation de la technique relative à la discussion suivant un paramètre, et ceci dans un environnement de questions qui tournent autour des formulations que voici : "trouver m pour que f soit", ou encore "déterminer suivant les valeurs de m". Donc la démonstration n'occupe véritablement pas cet espace, elle se réduit à la mise en œuvre d'un algorithme de résolution d'équations paramétriques.

2.2. Etude du manuel de 4ème année

Un complément de savoirs sur les limites apparaît dans le contenu du programme de la terminale mathématique, lequel concerne les limites et ordre et la composition des limites de fonctions, et ceci en respectant la règle instituée par le commentaire suivant :

" L'étude des limites n'est pas une fin en soi. Les différents théorèmes serviront surtout dans l'étude du comportement d'une fonction aux bornes des intervalles où elle est définie (dérivabilité à droite ou à gauche, branches infinies…). Il n'y a pas lieu de multiplier les exemples posés à priori. Les théorèmes relatifs à : la limite et l'ordre ; la limite d'une fonction composée, seront admis."

Nous répertorions au sein des onze chapitres d'Analyse du manuel, 289 exercices dans l'environnement de la limite. Les résultats statistiques demeurent dans l'ensemble assez proches, au niveau des proportions respectives, de ceux obtenus pour le manuel de 3ème année, même si on peut repérer quelques évolutions sensibles :

1. Utiliser la calculatrice
2. Fonction continue en x_0
3. Factoriser par le terme prépondérant
4. Multiplier par l'expression conjuguée
5. Effectuer un changement de variable
6. Interpréter graphiquement un calcul de limite
7. Conjecturer graphiquement
8. Identifier un nombre dérivé
9. Encadrer, comparer
10. Discuter suivant un paramètre

Ce que nous pouvons signaler, c'est une certaine carence de tâches graphiques susceptibles de prendre le relais par rapport à ce qui a déjà été abordé en 3ème année, donc moins élémentaires, correspondant à un degré de familiarisation plus élevé avec les notions liées à la limite et à l'aspect heuristique du graphique. Cependant, la systématisation des études globales de fonctions, l'apprentissage des nouvelles fonctions (logarithme, exponentielle et puissances), favorisent la mise en œuvre de la technique d'interprétation graphique d'un nombre limite du type tracé de la tangente en un point de la courbe, tracé des branches infinis, tracé des asymptotes obliques, verticales ou horizontales. En outre, nous notons l'apparition de tâches induisant la prise en compte par l'élève de l'utilité de représentations graphiques. C'est le cas, par exemple, des questions relatives à la représentation graphique de la réciproque d'une fonction.

La part prise par les techniques sollicitées dans les tâches heuristiques subit une augmentation de l'ordre de 11%, ce qui est d'ailleurs prévisible en dernière année du cursus scolaire : les tâches de type raisonnement sont les moins stéréotypées. L'apprentissage des inégalités des accroissement finis et celles des intégrales a contribué à enrichir le répertoire des apprenants et à faire évoluer les exercices mettant en œuvre la technique d'encadrement -

comparaison. L'institutionnalisation du théorème de composition des limites a contribué à l'augmentation de la sollicitation de la technique de changement de variables.

2.3 Etude des séries de travaux dirigés à l'université

Les technologies véhiculées dans le cours s'inscrivent dans un cadre strictement Bourbakiste, couplant le formalise et la validation spécifique à l'Analyse.

Nous recensons, au sein de ces feuilles d'exercices, 14 occurrences des couples (algorithmique, technique véhiculée) (soit à un taux de 36,85%), 0 occurrence des couples (graphique, technique véhiculée) et 24 apparitions des couples (heuristique, technique véhiculée) (63,15%), dans l'environnement de la limite. Nous donnons dans ce qui suit la répartition statistique détaillée qui en découle :

1. Utiliser la calculatrice
2. Fonction continue en x_0
3. Factoriser par le terme prépondérant
4. Multiplier par l'expression conjuguée
5. Effectuer un changement de variable
6. Interpréter graphiquement un calcul de limite
7. Conjecturer graphiquement
8. Identifier un nombre dérivé
9. Encadrer, comparer
10. Discuter suivant un paramètre
11. Utiliser la définition formelle d'une limite de fonction
12. Effectuer un développement limité
13. Utiliser un contre exemple
14. Raisonner par l'absurde

Les techniques véhiculées dans "algorithmique" sont en recul (52% en terminale), mais sans doute moins que l'on aurait pu le penser. Ce qui est surtout flagrant c'est l'effondrement complet de la part occupée par les techniques relatives aux tâches de nature graphique. L'institutionnalisation du développement limité en première année de l'enseignement supérieur ainsi que le recours à des formes de raisonnements non sollicités au lycée, en l'occurrence le raisonnement par l'absurde sont des facteurs qui contribuent à favoriser la substitution des tâches de type calculus, à la limite algorithmiques, par celles véhiculant des raisonnements formels.

Les techniques, de raisonnement par l'absurde nécessitant dans la plus part des cas un travail de formalisation, et de la recherche de contre-exemples, qui sont aussi inexistants au lycée, prennent place dans le secteur ci-dessus.

Par ailleurs, la part des techniques de factorisation par le terme adéquat est en nette baisse, ce phénomène est intimement lié au fait que les études de fonctions voient leur importance diminuer.

Enfin, l'ampleur de la baisse, jusqu'à disparition complète du taux des techniques véhiculées dans les tâches graphiques peut nous surprendre. En effet, nous aurions pu éventuellement concevoir un taux d'apparition assez réduit lié au fait que les études de fonctions ne constituent plus à l'université une fin en soi, comme c'était le cas au lycée, mais pas au point d'être carrément occultées. Nous avions imaginer que l'institutionnalisation de l'objet mathématique, prolongement par continuité pourrait déboucher sur le tracé de représentations graphiques même locales, ou encore qu'un développement limité pouvait aboutir à un développement asymptotique visualisé. Néanmoins, il peut arriver que l'étudiant soit amené par lui même à effectuer des tracés qualitatifs afin de contrôler le résultat d'un calcul de limite ou d'un développement limité asymptotique. C'est le cas par exemple de l'exercice suivant :

Soit f :]-1,1[$\rightarrow$IR la fonction donnée par :
$f(x)= \log(1+x/1-x)-(2x+ax^2) /1+x$
a) Déterminer le développement limité de f en 0, à l'ordre 3.
b) Discuter suivant la valeur de a, la position de la courbe représentative de f, par rapport à la tangente à l'origine.
c) Préciser les asymptotes à l'infini et la position de la courbe par rapport à ses asymptotes pour la fonction :
$f(x)=(x+1)e^{1/x-1}$

Conclusion

Concernant la classe de 3ème année, les techniques rattachées aux tâches algorithmiques sont majoritaires, par ailleurs les techniques véhiculées dans les tâches de nature graphique restent très scolaires en raison du fait qu'il s'agit toujours de tâches explicitement sollicitées : le recours au graphique n'appelle pas un travail de production personnel. Notons aussi, que même la présence de paramètres dans certains exercices (très rares), n'induit pas un travail réel de démonstration, cette dernière se réduit à la mise en œuvre d'un algorithme de résolution d'équations paramétriques.

En classe de terminale, nous pointons une certaine carence de tâches graphiques moins élémentaires, correspondant à un degré de familiarisation plus élevé avec les notions liées à la limite et à l'aspect heuristique du graphique ; le recours au graphique en Analyse et son opérationnalisation au niveau universitaire relèveront du travail privé de l'étudiant.

Néanmoins, nous notons une légère évolution de la proportion des techniques de type heuristique, ce fait est profondément liée à l'apprentissage de nouvelles notions qui occasionne un travail d'organisation et de structuration de connaissances ; quoique les démonstrations n'occupent pas une place plus importante.

Ainsi, le champ d'application des techniques en terminale est-il essentiellement situé dans l'additif de celui élaboré dans le manuel de 3ème année. Il subit néanmoins une évolution en raison de l'apprentissage de nouvelles notions : les fonctions réciproques, logarithme, exponentielle et puissances.

L'entrée dans une Analyse démontrée, en première année université, met en scène des activités de raisonnement relatives à des objets généraux telles que la preuve de conjectures ou la recherche de contre-exemples, ainsi que des raisonnements de type par l'absurde ; nécessitant un travail de formalisation qui n'était pas de règle au lycée. Ces faits conjugués avec la nécessité de maîtriser des notions nouvelles, auxquelles, il est consacré un temps didactique, beaucoup plus restreint que ce qui est accordé au lycée, exigent de la part de l'étudiant, de développer un travail de réflexion critique sous-tendu par une capacité à véhiculer une démarche scientifique. D'un autre côté, le recours au graphique tient uniquement d'un choix personnel de l'étudiant et d'une prise d'initiative jusque-là absente, or, les étudiants ne sont pas suffisamment outillés en vue de recourir par eux mêmes aux graphiques pour contrôler, vérifier, découvrir. Il y aurait dans ce cas, des besoins spécifiques dépassant les seules compétences acquises dans l'enseignement secondaire…

Bibliographie

Bloch I. (2000), L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée/université. Thèse, Université Bordeaux I.

Bloch I. (1995), Approche didactique de l'enseignement des premiers concepts de l'analyse. DEA, Université de Bordeaux I.

Brousseau G. (1986), Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. Recherches en didactique des mathématiques, vol. 7/2, pp. 135-194, La Pensée Sauvage, Grenoble.

Chevallard Y. (1999), L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, Recherches en didactique des mathématiques, vol. 19/2, pp.221-265, La Pensée Sauvage, Grenoble.

Chevallard Y. (1992,) Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. Recherches en didactique des mathématiques, vol. 3/1, pp.73-112, La Pensée Sauvage, Grenoble.

Maschietto M. (2001), Fonctionnalités des représentations graphiques dans la résolution de problèmes d'analyse à l'Université, Recherches en didactique des mathématiques, vol. 21/1.2, pp. 123-156, La Pensée Sauvage, Grenoble.

Praslon F (2000), Continuités et ruptures dans la transition terminale S/DEUG Sciences en Analyse. Le cas de la notion de dérivée et son environnement, Thèse de doctorat en didactique des mathématiques, Université de Paris 7 - Denis Diderot.