

LA LECTURE D'UN TEXTE EST UNE OPERATION COGNITIVE !

NAIM EL ROUADI

Université de Balamand, Liban

naim.rouadi@balamand.edu.lib

Résumé. Le but de cette recherche est de démontrer le rôle de la cognition et de la modélisation lors de la lecture d'un problème complexe où l'inconnue n'est pas explicite. Le public visé est formé des apprenants (15-16ans). Le problème réside à analyser logiquement l'énoncé d'une situation qui nécessite le recours aux domaines : mathématiques, analyse logique et analyse langagière. Le résultat de la recherche a montré que cette conjugaison n'a pas été menée à un bon issu pour la majorité des apprenants par manque de passage à la modélisation algébrique à travers l'analyse logique et langagière.

Mots-clés. Didactique des mathématiques, Modélisation, Résolution de problèmes, Problème complexe, Analyse logique, Analyse langagière.

Introduction

L'un des objectifs de l'apprentissage des mathématiques est de stimuler à l'initiation au raisonnement qui doit par la suite déboucher sur la capacité démonstrative. Ceci doit permettre à tout un chacun ou à l'apprenant qui termine (on vient de terminer) les années de la scolarité obligatoire (15 – 16 ans) de développer un esprit de rigueur et de méthode et en même temps des facultés d'imagination et d'adaptation. La maîtrise des outils mathématiques doit favoriser l'éveil du sens critique et cela en plaçant l'apprenant dans une situation qui lui permettrait l'exercice efficace. Comme la démarche mathématique ne peut être enseignée en tant que démarche en soi indépendante d'un contenu, c'est pourquoi elle doit nécessairement s'inscrire dans la connaissance intime et solidement acquise, d'outils simples, tels que les nombres, l'opération, les figures, le calcul algébrique et la résolution d'équations.

Cet apprentissage d'outils simples mais abstraits doit être précédé par d'un l'éveil chez l'apprenant, à la fin de sa scolarité obligatoire, d'un sens aigu du concret qu'il doit continuer de voir sous l'abstrait, afin d'être associé à la résolution de petits problèmes de la vie courante, et d'être ouvert à une culture scientifique pratique.

L'acquisition des savoirs mathématiques doit être en permanence contrôlée par des exercices variés et par un retour régulier sur les savoirs précédemment acquis dans une stratégie d'approfondissement progressif, laquelle assure à l'apprenant la construction des connaissances et leur maîtrise en parfaite synergie avec une langue écrite et parlée, cohérente dotée d'une riche terminologie et d'une structure adéquate et cohérente.

L'outil essentiel en arithmétique est le langage ordinaire augmenté du calcul sur les nombres. « L'arithmétique demeure essentiellement un savoir oral. Le papier ne conserve que quelques phrases et des opérations sur les nombres qui donnent les solutions des problèmes proposés. Le calcul joue le rôle d'une mécanique du service d'un raisonnement exprimé par ailleurs.

L'algèbre permet d'établir des relations entre des quantités connues ou inconnues qui emploient des paramètres et des variables. Les énoncés du langage ordinaire se traduisent par des expressions littérales sur lesquelles opère le calcul algébrique. En

d'autres termes, les énoncés du langage ordinaire cèdent la place à des expressions littérales auxquelles on applique le calcul algébrique ». Or, le résultat des expériences des enseignants des mathématiques dans les collèges ont démontré que l'apprenant libanais (la tranche d'âge de 15-16ans) n'arrive pas à résoudre des problèmes de la vie courante, ni en ayant recours à l'algèbre ni à l'arithmétique. L'objectif de cette recherche est de prouver cette supposition et de déceler les difficultés envisagées par les apprenants (libanais) en les confrontant à une situation-problème choisie. Ces derniers sont soumis au problème test et choisis sans distinction de sexe dans des classes ordinaires des Collèges et Lycées du secteur privé, les livres scolaires utilisés ne tiennent compte ni des approches différentes, ni des caractères des enseignants, ni de leurs formations et ni de la langue véhiculant l'apprentissage.

1. Problématique et hypothèse

Du point de vue théorique l'orientation déjà citée sur l'enseignement/ apprentissage des mathématiques (arithmétique – algèbre) étalé sur les neuf années de la scolarité obligatoire (15-16ans), permet à l'apprenant de structurer ses connaissances mathématiques et de consolider ses acquis langagiers.

Mais la réalité ne confirme pas toujours cette affirmation. Le recours à l'algèbre est toujours possible même dans le cas où la situation-problème est simple. Dans la plupart de cas, où la situation-problème indique l'inconnue à calculer, la traduction algébrique de l'énoncé du problème, en une équation de premier degré à une inconnue et dont la résolution est à la portée de l'apprenant, donne un bon résultat.

La situation se détériore et nous envisageons des cas d'échecs dès que la résolution du problème cité demande une analyse logique de l'énoncé où l'inconnue est souvent camouflée par une sémantique appropriée, ce qui nécessite le recours à une conjugaison étroite entre les domaines : mathématiques (algèbre), analyse logique de l'énoncé et le langage écrit (syntaxe - sémantique) où le recours à l'usage de l'esprit critique devient primordial. La rupture possible entre ces trois domaines influe négativement sur le contrôle de l'acquisition mathématique de l'apprenant (15 –16 ans) même dans le cas où la situation-problème est choisie du vécu.

1.1. Interprétation de la problématique et de l'hypothèse

B. Grugeons (Grugeons, 2000) affirme que « la compétence algébrique s'évalue à travers la capacité à modéliser des problèmes extra et intra mathématiques. En effet, l'algèbre est un outil adapté pour construire un modèle mathématique d'un système, c'est-à-dire établir un découpage de la réalité par un ensemble de variables pertinentes ».

Douady R, (Douady.1994) considère « la modélisation algébrique comme un moyen pour les élèves de donner du sens aux objets de l'algèbre et à leurs interprétations ». Il s'agit ainsi d'une démarche de résolution algébrique qui consiste à représenter formellement le problème, en déterminant les relations entre les inconnues et les données, puis à faire du calcul formel pour trouver la solution à l'aide d'expressions littérales. Ainsi l'articulation entre des écritures algébriques et les différents registres sémiotiques, en particulier, le registre du langage naturel, doit être flexible. Il me semble alors légitime de poser la question suivante : comment peut-on comprendre la pensée des apprenants (en ce qui concerne le domaine arithmético – algébrique) à la fin de leur scolarité obligatoire sans analyser « cette pensée comme une activité qui

se déroule et se développe dans le temps » comme l'a souligné G. Vergnaud, (Vergnaud 1998). Vergnaud ajoute, de plus, que l'activité possède « cette double caractéristique d'être à la fois répétition et variation : on ne répète pas sans système et sans règle (structure), on ne s'adapte pas à la contingence, à la variété et à la nouveauté sans catégories de pensée pour prendre et traiter l'information pertinente ». Pour étudier le mode de pensée adopté par l'apprenant, on le confronte à une situation – problème non classique, c'est-à-dire la résolution du problème qui nécessite le recours seulement à l'arithmétique ou à l'algèbre (avec un « ou » inclusif).

Le traitement d'une situation-problème située dans la zone délimitant le champ de l'arithmétique et le champ conceptuel de l'algèbre pose à l'apprenant difficultés qu'il cherche de surmonter malgré la rupture épistémologique entre l'arithmétique et l'algèbre. Cela nécessite, de sa part, le recours à de multiples de processus mentaux allant de la mémorisation au raisonnement, tout en analysant l'énoncé, afin de le modéliser en utilisant les informations pertinentes. La résolution formelle de l'équation algébrique montre la dimension outil de l'algèbre (au sens de Douady) de même le retour à l'énoncé mène l'apprenant, au domaine de l'arithmétique. La perception analytique et l'interprétation de la stratégie suivie par l'apprenant lui permettent l'aboutissement à la bonne solution du problème cité. L'enjeu de cette recherche réside dans la construction d'un outil, pour déterminer le fonctionnement des apprenants et leurs capacités arithmético-algébriques en passant d'un registre à un autre lors de la perception analytique (registre logique), de la modélisation (registre algébrique), et de l'usage d'un langage écrit et oral (registre sémiotique).

Il me semble que l'approche d'apprentissage /enseignement suivi au Liban ne va pas avec les principes donnés par J. Bruner.

Bruner (Kaersley, 1999) cite les trois principes de l'apprentissage constructiviste :

- l'instruction doit être liée à l'expérience et à un contexte bien défini pour que l'apprenant soit capable de la retenir. (où l'apprenant sera prêt à apprendre).
- l'instruction doit être structurée de façon qu'elle soit à la portée de l'apprenant (organisation spirale).
- l'instruction doit être un élément facilitateur à l'extrapolation et aux remédiations les erreurs (passer au-delà de l'information donnée).

Dans le cadre scolaire, tout dépend de l'approche adoptée dans le processus d'enseignement/apprentissage. Dans le curriculum libanais, on se focalise seulement sur les buts et sur les objectifs, et plus précisément sur les objectifs spécifiques des savoirs. « On court ainsi le risque de développer des connaissances et des habiletés qui n'ont pas de sens par rapport à l'apprenant, et il a la possibilité de les rejeter facilement dans un temps réel ». On a ainsi à avoir un nombre limité d'apprenants « qui montrent un progrès », mais ils ne sont pas préparés de façon adéquate. Les apprenants peuvent développer certains modes de pensée et certaines habiletés, mais ils peuvent avoir des « manques » dans leurs connaissances et leurs habiletés. En d'autres termes, morceler les connaissances de l'apprenant a pour effet de le priver de la formation de compétences complexes, laquelle sous-tend la cognition qui regroupe les divers processus mentaux allant de l'analyse perceptive de l'environnement à la connaissance motrice (en passant par la mémorisation, le raisonnement, les émotions, le langage et les autres registres sémiotiques,...), ce qui va dans le même sens que cette recherche opte à démontrer. Duval (Duval 1995) montre « la nécessité de prendre en compte la dimension sémiotique du travail algébrique pour caractériser la

compétence et analyser les difficultés des élèves. Cette approche permet d'étudier la flexibilité des élèves à articuler le registre des écritures algébriques et les différents registres sémiotiques, plus particulièrement, le registre du langage naturel ».

2. La population : répartition et caractéristiques

La population est formée de 402 élèves repartis sur six collèges-lycées du secteur privé dont trois sont des collèges-lycées urbains et les trois autres ruraux.

Notre but est la recherche du « jaillissement » d'esprit et la « créativité » des apprenants, qui sont toujours guidés par le contexte du problème à résoudre, en suivant à la lettre la parole de J. Bruner (Bruner, 1983). En d'autres termes, notre but est d'étudier la stratégie adoptée par les apprenants, en ce qui concerne l'analyse cognitive et sa conjugaison avec les registres sémiotiques : algèbre élémentaire et langue d'enseignement.

Collèges-Lycées	Lang	Local	Gender	EB8	EB9	SEC1
Tripoli Evangelical school (TES)	En	Urbaine	Mixte	-	16	83
Notre-Dame de Balamand (NDB-Fr)	Fr	Rurale	Mixte	25	26	24
Notre-Dame de Balamand (NDB-En)	En	Rurale	Mixte	-	18	13
Rawdat Al Faiha'a (ESRF)	En	Urbaine	Mixte	48	-	-
Ecole nationale grecque Orthodoxe des Jeunes Filles -Tripoli (ENGO)	Fr	Urbaine	Mixte	23	19	-
Universal School of Lebanon (USL)	En	Rurale	Mixte	17	9	13
Modern School (MS)	En	Rurale	Mixte	28	25	15
Total				141	113	148
Nombre total des apprenants	402					

2.1 La situation-problème

La situation –problème choisie représente un exemple

du vécu quotidien dont la solution peut être obtenue, soit en se réfugiant vers l'arithmétique, soit en recourant à l'algèbre élémentaire. La situation-problème est intitulée : Partage.

Partage

Carole et Chantal décident de célébrer une fête à l'école. Carole achète 2 sacs de bonbons et Chantal achète 3 sacs de bonbons. Georges a oublié d'apporter les siens. Chaque sac contient le même nombre de bonbons de même qualité.

Les trois élèves se partagent les bonbons d'une manière égale entre eux. Georges a payé pour Carole et Chantal une somme de \$ 2,5 pour les bonbons qu'ils se sont partagés.

Quelle somme d'argent Carole et Chantal doivent-elles recevoir ?

2.1.1 Analyse logique de la situation-problème

L'énoncé indique implicitement quelques indices : l'inégalité lors de l'achat des sacs de bonbons, le même nombre de bonbons dans chaque sac et enfin pour être équitable entre amies, chacun a reçu la même somme de bonbons. En payant \$2.5, aux deux autres amis et pour régler le partage du paiement qui est inégal, alors chacune des deux autres amies doivent recevoir la part de \$2.5 en correspondance avec son achat. « Ce qui a acheté le moins de sacs doit recevoir le moins de cette somme (\$2,5) et inversement ». Cette dimension d'analyse cognitive s'articule avec une autre : la dimension «outil» de l'algèbre. Il apparaît que l'inconnue du problème est le prix d'un sac de bonbons. D'autre part, chacun des trois amis doit payer la même somme de \$2,5 en se basant sur la proposition : « consommation égale équivaut à paiement égal ».

2.2 La résolution de la situation –problème

Cette rationalité mathématique mène à deux modèles de solution : arithmétique et algébrique.

Solution Arithmétique	Solution algébrique								
- si le paiement est à égalité alors il faut que chacun paye \$2,5 - d'où le tableau suivant de proportionnalité : <table style="margin-left: 40px; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-bottom: 1px solid black; padding: 2px 10px;">Sacs de bonbons</td> <td style="border-bottom: 1px solid black; padding: 2px 10px;">prix (en \$)</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 10px;">5</td> <td style="padding: 2px 10px;">→ 3 · 2,5</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 10px;">2</td> <td style="padding: 2px 10px;">→ ? (3)</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 10px;">3</td> <td style="padding: 2px 10px;">? (4.5)</td> </tr> </table> -Le prix de 2 sacs → \$3 -Le prix de 3 sacs → \$4,5 - La part de 1 ^{er} ami : 3 - 2.5 = \$ 0.5 - La part de 2 ^e ami : 4.5 - 2.5 = \$2	Sacs de bonbons	prix (en \$)	5	→ 3 · 2,5	2	→ ? (3)	3	? (4.5)	3 -soit x le prix d'un sac de bonbon - le prix de 5 sacs sera (5x) - chacun de trois amis doit payer le tiers de cette somme qui est \$2,5 - d'où l'équation : $5x / 3 = 2,5$ $x = 7,5 / 5$ $x = 1,5$ - Le prix de 2 sacs → \$3 - Le prix de 3 sacs → \$4,5 - La part de 1 ^{er} ami : 3-2,5= \$ 0.5 - La part de 2 ^e ami : 4.5 - 2.5 = \$2
Sacs de bonbons	prix (en \$)								
5	→ 3 · 2,5								
2	→ ? (3)								
3	? (4.5)								

3 La dimension didactique de la recherche

L'un des objectifs de la didactique des mathématiques est de prévoir l'origine des erreurs commises par les apprenants lors de la résolution d'une situation- problème donnée, afin de trouver un ou plusieurs moyen afin d'y remédier. Il me semble que la détermination des erreurs possibles des apprenants facilitera le dépouillement de leurs copies en illustrant l'évolution souhaitée durant trois années successives d'étude et les pourcentages de chaque erreur dans une même classe.

La détermination des erreurs possibles à commettre par les apprenants soumis au test se basent sur l'analyse logique de la situation-problème. La détermination de l'inconnue pourra être plus difficile si l'apprenant choisit la solution arithmétique. Dans ce cas il n'apparaît sur la copie de l'apprenant, que des traces de l'opération mentale effectuée. En revanche, le choix de la solution algébrique devra débiter par la reconnaissance de l'inconnue à rechercher, qui est le prix d'un sac de bonbon : d'où la première source d'erreur, la reconnaissance du nombre de bonbons dans chaque sac n'étant pas nécessaire. C'est la première déviation possible. Or, le problème-test

n'affiche pas explicitement la nature de l'inconnue qui est la clé de la solution, c'est la deuxième source d'erreur.

Le même nombre de bonbons dans chaque sac et le partage égal des bonbons entre les trois amis aura comme conséquence logique que le paiement de la même somme d'argent par chacun d'eux. En d'autres termes, le prix total de cinq sacs de bonbons doit être (3-2.5) et chacun des trois amis doit payer le tiers du prix total de bonbons. La modalisation algébrique (écriture de l'équation algébrique) ou le dressage du tableau de la proportionnalité représentent la troisième source d'erreur. La détermination de la somme payée par chacun des amis qui a apporté les sacs de bonbons et le calcul de la part de chacun d'eux de \$2.5, représentent la quatrième source d'erreur possible.

Ces quatre difficultés se résument comme suit :

- Une des erreurs possibles est la reconnaissance de l'inconnue dans la situation-problème donnée c'est-à-dire le point de départ de la solution algébrique ou arithmétique.
- Un manque dans le registre de l'analyse logique mène l'apprenant explicitement ou implicitement à ne conclure que le paiement équitable de chacun des trois amis qui doit être le même \$2,5.
- Une erreur réside dans le registre algébrique : chacun doit payer le tiers de la totalité de la somme versée lors de l'achat de bonbons, d'où la modélisation algébrique du problème.
- Le calcul du prix d'un sac de bonbon ne donne pas la réponse au problème posé qui doit être la part de chacune des deux autres amies de la somme \$2.5 à distribuer.
-

3. Passation du test : conditions et environnement

L'administration du test a été effectuée suivant la disponibilité du Collège-Lycée concerné. La durée accordée aux apprenants était de 20 minutes. Le problème-test a été administré dans les différents collèges-lycées durant la première semaine du mois de Février 2008 par les étudiantes du Département des Sciences de l'éducation de l'Université de Balamand-Liban.

4. Résultat du dépouillement du test

La correction du test a été abordée en tenant compte des quatre erreurs prévues :

- E1 représente le choix de l'inconnue,
- E2 représente la déduction faite en ce qui concerne la proposition : « chacun de trois amis doit payer la même somme » c'est-à-dire \$2.5,
- E3 représente la modélisation algébrique ou le tableau de la proportionnalité arithmétique,
- E4 représente le calcul arithmétique de la somme d'argent payée pour les deux amies qui ont apporté les bonbons et la part inégale de chacune d'elle dans la somme \$2.5.

4.1 Résultat des classes EB8

L'échec total des apprenants dans les différents collèges -lycées de ces classes EB8 apparaît remarquable face à cette situation problème comme, si le niveau du raisonnement demandé était très haut vis-à-vis de ce qui a été traité dans cette

classe, ou comme si l'apprenant de cette classe n'avait pas été habitué à recourir à l'analyse logique avant de se lancer dans le traitement algébrique ou arithmétique d'un problème. Les erreurs sont de deux types, illustrés par les exemples suivants :

4.1.1 Solution arithmétique

Dans le cas du traitement arithmétique du problème, on remarque deux modes de raisonnement :

- a) la présence du tableau de proportionnalité

5 sacs \rightarrow \$2.5

1 sac \rightarrow ? (\$ 0.5) C'est-à-dire $2.5 / 5 = 0.5$.

\$0.5 est le prix d'un sac de bonbons.

La part de la 1^{ère} amie est : $2 \cdot 0.5 = \$1$

La part de la 2^{ème} amie est : $3 \cdot 0.5 = \$1.5$

- b) ce mode contient seulement la 1^{ère} phase du raisonnement précédent :

5 sacs \rightarrow \$2.5

1 sac \rightarrow ?(\$ 0.5)

Sans retour au calcul arithmétique des sommes d'argent à payer pour chacune des deux amies.

Les modèles de résolution du problème indiquent que les apprenants ont reconnu l'inconnue (le prix de sacs de bonbons mais ils ont échoué à reconnaître que le prix de 5 sacs de bonbon est $3 \cdot \$ 2.5$). Ce qui a confirmé leurs solutions (à leurs yeux) le partage inégal de \$2.5 on \$ 1 et \$1.5. Ceci n'a pas poussé ces apprenants à penser à l'erreur commise sachant le contexte de la question posée par le texte.

4.1.2 Solution algébrique

Dans le cas du traitement algébrique du problème – test, on remarque que le raisonnement a suivi l'un de deux modes suivants :

- a) Soit x le nombre de bonbons dans un sac,

5 x le nombre de bonbons dans 5 sacs D'où $5x = 2.5 \Leftrightarrow x = 2.5 \Leftrightarrow x = 0.5$

Et nous revenons au calcul effectué dans le traitement arithmétique précédent avec ou sans calcul du partage de \$2.5 entre les deux amies.

L'erreur commise dans ce type est double. Si on met à côté l'erreur commise dans le choix de l'inconnue (le nombre de bonbons dans chaque sac), alors on remarque clairement l'autre erreur concernant le calcul dimensionnel (le nombre de bonbons est égal à une somme d'argent) ce qui se traduit par ($5x = 2.5$).

- b) Un autre type de solution banale a été proposé par certains apprenants où le calcul effectué a été ($\$2.5/2=1.25$) c'est-à-dire que chacune de deux amies doit recevoir \$1.25. Certains apprenants de cette classe EB8 n'ont pas pris en considération l'hypothèse donnée, que les trois amis on reparti également les bonbons entre eux, mais ils ont payé au début inégalement le prix des sacs de bonbons.

4.2 Synthèse du résultat des classes EB8

Les modèles de solution proposés par les apprenants des classes EB8 dans les différents collèges – lycées permettent de conclure que l'échec total observé peut être expliqué en recourant à plusieurs considérations déjà prévues :

- La compréhension de l'énoncé de la situation problème (lecture et contexte) a été médiocre. Le manque de perception a conduit l'apprenant à une analyse logique très superficielle sachant qu'on ne trouve pas une réponse à la question posée. La simple confusion entre la somme d'argent payée, pour acheter les bonbons, par les deux filles et par hasard \$2.5, et la somme payée par leur ami Georges \$2.5 a été

suffisante pour ne pas déceler l'erreur commise. Le calcul dimensionnel est passé invisible sous les yeux de certains apprenants à cause de « la règle de trois ».

- Le recours au traitement arithmétique par un grand nombre d'apprenants de cette classe EB8 n'a pas été normal. Les livres scolaires d'origine française ou américaine semblent suivre la même démarche que les livres libanais en tant que contenu mais avec des approches différentes.
- Une autre erreur provient des différents curriculums dont les textes indiquent « résolution des problèmes simples de la vie courante ». Les manuels scolaires reflètent cette orientation en illustrant dans les exercices et les problèmes « l'inconnue ». Ce qui a été un obstacle pour les élèves testés car l'inconnue a été invisible dans la situation problème visée.

4.2.1 Remarque

Malgré l'échec global des élèves des classes EB8, il semble important de mettre en relief cette analyse logique présentée par une élève de la classe EB8 qui s'appelle Fadilé mais malheureusement sans aboutir à ses dernières étapes.

« - Carole a acheté 2 sacs de bonbons

Chantal a acheté 3 sacs de bonbons

Carole et Chantal ont ensemble 2 sacs + 3 sacs = 5 sacs de bonbons.

Georges a oublié d'apporter des bonbons c'est-à-dire il n'a rien acheté.

Chaque sac contient le même nombre de bonbons alors (5x) est le nombre total de bonbons

Le nombre de bonbons est divisé par les 3 élèves Carole, Chantal et Georges $7 / 3$

Georges a payé \$2.5 pour Carole et Chantal qui lui ont donné la somme de bonbons.

Puisqu'on sait que chacun des 3 élèves a la même somme de bonbons Georges a payé \$2.5 alors que Carole et Chantal ont payé \$2.5 donc Carole et Chantal ont payé ensemble $2.5 \cdot 3 = \$7.5$

Et comme on sait que Carole a acheté 2 sacs, alors elle a payé une somme d'argent moins que Chantal.

Et comme on sait que Chantal a acheté 3 sacs, alors Chantal a payé plus d'argent que Carole. »

On remarque que l'apprenante Fadilé a bien analysé la première partie de la situation-problème en calculant la somme totale versée \$7.5 (la part de chacun en bonbons, le tiers, correspondant à un égal paiement). De même que les parts des deux amies étaient inégales. Mais elle n'est pas arrivée à passer à la déduction finale.

4.3 Résultat des classes EB9

Le résultat des élèves des classes EB9 présente un certain progrès par rapport aux des apprenants des classes EB8 mais cette amélioration n'a pas été spectaculaire. On remarque les mêmes modes de stratégies adoptées lors des résolutions des problèmes. Il semble que le choix de la stratégie algébrique est presque la dominante. De plus, il est à signaler que les apprenants ont utilisé dans leur solution une, deux ou trois variables et que les mêmes erreurs ont été observées dans les classes EB8. L'absence des symboles logiques (l'implication logique par exemple) illustre le rôle de l'oral durant l'acte de l'enseignement/ apprentissage dans ces classes. De même, l'impact du mode de raisonnement arithmétique sur le mode de raisonnement algébrique est très visible sachant que le manque d'explication et de référence écrite correspondant au contexte du problème, est presque absente.

Les trois exemples suivants vont mettre en relief les interprétations précédentes.

4.3.1 Premiers modes raisonnement

« Soit x le nombre d'argent des bonbons dans un sac.

$$[x(3+2)] : 3 = 2.5$$

$$x = (2.5 \cdot 3) : 5 \text{ d'ou } x = 1.5$$

Carole a acheté deux sacs alors elle a payé

$$2 \cdot 1.5 = 3$$

Chantal a acheté trois sacs alors elle a payé

$$3 \cdot 1.5 = 4.5$$

Georges doit payer à Carole : $(3 : 3) = \$ 1$

Georges doit payer à Chantal : $(4.5 : 3) = \$ 1.5$ »

Interprétation de cette solution

- la définition donnée à x est « soit x le prix d'un sac de bonbons » est correcte.
- Comme il y a trois personnes, Georges doit payer à Carole et à Chantal le tiers de leur paiement ; pour cela, l'apprenant a décidé de diviser par trois la somme payée par Carole et par Chantal pour obtenir \$1 et \$1.5 (c'est la somme \$2.5 versée par Georges).
- Ce mode d'analyse a mis en valeur une donnée importante : les trois amis ont réparti également les bonbons c'est-à-dire « consommation égale correspond à un paiement égal ».

43.2 Deuxième mode raisonnement

« Soit x le prix d'un sac de bonbons acheté par Carole

Soit y le prix d'un sac de bonbons acheté par Chantal

Soit m le prix des bonbons de Georges

Carole = $2x$, Chantal = $3y$, Georges = m , D'où $2x + 3y = m$ et $2x + 3y = \$2.5$

$$2x = 2.5 - 3y, \quad 2x = -0.5y, \quad x = 0.5y : 2, \quad x = 0.25y \text{ »}$$

Interprétation de ce mode de raisonnement

- la distinction entre les deux prix d'un sac de bonbons acheté soit par Carole soit par Chantal est correcte.
- Ce qui est curieux, c'est que l'apprenant a effectué une soustraction de deux termes qui ne sont pas semblables ($2.5 - 3y = -0.5y$). Puis, il s'est aperçu que le prix à payer ne peut pas être négatif, alors il a éliminé le signe (-) pour établir une relation entre x et y .

4.3.3 Troisième mode de raisonnement

« Soit x le nombre de bonbons un sac :

$$5x/3 = 2.5, \quad \text{Alors } x = (2.5 \cdot 3/5), \quad x = 1.5, \quad \text{D'où } 2x + 3x = 2.5 \cdot 3$$

$$5x = 7.5, \quad x = (7.5/5), \quad \text{et } x = 1.5, \quad \text{D'où } (5 \cdot 1.5) : 3 = 7.5/3 = 2.5$$

Avant le partage : Carole $2 \cdot 1.5 = 3$, Chantal $3 \cdot 1.5 = 4.5$ »

Interprétation de ce mode de raisonnement

- On remarque que l'erreur commise par la majorité consiste dans le choix de « l'inconnue » : le prix d'un sac de bonbons.
- On remarque aussi l'erreur commise en écrivant ($5x/3 = 2.5$) c'est-à-dire le nombre de bonbons consommés par Georges est égal à une somme d'argent (calcul dimensionnel).
- C'est la première fois qu'on observe une vérification d'une réponse donnée
- $(5 \cdot 1.5) : 3 = 2.5$.
- Les sommes payées par chacune des deux amies sont correctes mais l'élève n'a pas pris en considération le fait, que chacun des trois amis a payé la même somme

\$2.5 et par suite il n'a pas abouti à la réponse demandée. On peut souligner de même, que l'erreur précédente commise dans l'équation est deux fois répétée.

4.3.4 Synthèse du résultat des classes EB9

Il est à signaler que les solutions proposées par les élèves des classes EB9 présentent une amélioration par rapport à celles des élèves des classes EB8 et ceci au niveau de l'articulation entre le registre des écritures algébriques et d'autres registres :

- écriture pas à pas, enchaînée en succession d'opérations
- appel au registre sémantique
- recours à l'algèbre pour modéliser la situation-problème
- recours à l'algèbre-fonction (à travers l'usage de la proportionnalité comme fonction linéaire).

4.4 Résultat des classes SEC1 (première classe secondaire au Lycée)

Le résultat des classes SEC1 diffère des deux précédentes par la présence de modes originaux de raisonnement sans mettre de côté les autres modes erronés déjà présentés dans les autres classes EB8 et EB9.

L'existence des modes erronés semble provenir de la persistance d'un manque dans le registre sémiotique (la sémantique dans le langage naturel) et l'intersection avec les autres registres. On remarque aussi des éléments d'une solution incomplète. A titre d'exemple on peut citer :

« Soit x le prix d'un sac de bonbons.

1^{ère} amie $\rightarrow 2x$, 2^{ème} amie $\rightarrow 3x$ d'où $5x : 3 = 2.5$, $x = 1.5$ »

L'autre solution va en profondeur en calculant de plus la somme payée par chacune de deux amies :

« 1^{ère} amie a payé $2 \cdot \$1.5 = \3 , 2^{ème} a payé $3 \cdot \$1.5 = \4.5 »

On remarque aussi que la majorité des apprenants des classes SEC1 ont recours à la solution algébrique. Cela ne veut pas dire que les solutions algébriques sont pourvues d'erreurs. A titre d'exemple, on cite ce qui suit :

La solution commence par, « Soit x le nombre de bonbons dans un sac et elle aboutit à $(5x/3 = 2.5)$ où le premier membre représente le nombre de bonbons et le second représente une somme d'argent. L'erreur concerne le calcul dimensionnel.

Nous citons ces deux modes de résolutions algébriques où le choix de l'inconnue est en défaut, mais l'originalité du raisonnement a permis aux apprenants de dépasser cet inconvénient.

4.4.1 Premier mode de solution

« x le nombre de bonbons dans un sac, somme $5x$, chacun possède $5x/3$. Carole a donné $2x - 5x/3 = x/3$, Chantal a donné $3x - 5x/3 = 4x/3$, D'où Georges reçoit $x/3 + 4x/3 = 5x/3$, $5x/3 \rightarrow 2.5$, d'où $x/3 = 2.5/3 = 0.5$. Carole reçoit 0.5 , et Chantal reçoit $4 \cdot 0.5 = 2$. »

Il paraît légitime de passer à des explications comme : $(2x - 5x/3 = x/3)$ où $2x$ représente le nombre de bonbons achetés par Carole, $5x/3$ la part égale de chacun des trois amis et la différence $x/3$ représente la partie consacrée à Georges. De même que la différence $4x/3$ de la deuxième relation représentent la part de Georges qui devient $5x/3$.

L'apprenant revient ensuite au registre arithmétique en faisant correspondre au nombre de bonbons reçu par Georges $5x/3$ son prix \$2.5. Puis on calcule le prix de la partie de bonbons donnée par Carole $x/3$ et le prix de la partie de bonbons donnée par Chantal $4 \cdot x/3$ c'est à dire $4 \cdot 0.5 = 2$

4.4.2 Deuxième mode de résolution

Ce mode de raisonnement utilise dans la résolution du problème- test trois inconnues : x , y , z où x est le nombre de bonbons dans un sac, y le nombre de bonbons que Chantal a donné, et z est le nombre de bonbons que Carole a donné.

« La part de chacun $5x/3$

Le prix de $5x/3 = 2.5$, Carole avait $2x$, D'où $2x - z = 5x/3$, $2x - 5x/3 = z$

Alors $z = x/3$, Chantal avait $3x$, $3x - y = 5x/3 \rightarrow 3x - 5x/3 = y$, $4x/3 = y$.

$5x/3 \rightarrow 2.5$

$x/3 \rightarrow ?$ D'où $\rightarrow x/3 = 0.5$. Alors Carole reçoit 0.5 et Chantal $2.5 - 0.5 = 2$ »

Ce qui est important dans ce mode de raisonnement est l'introduction de trois variables provenant du registre algébrique pour passer ultérieurement au registre arithmétique en conjuguant ces deux registres avec l'analyse logique. Ainsi on calcule les valeurs de y et de z en fonction de x . Puis on revient au registre arithmétique en introduisant le tableau de proportionnalité pour tirer ensuite le prix de la partie $x/3$ (avec une écriture fautive $x/3 = 0.5$ c'est-à-dire que « Nombre de bonbons=valeur en dollars »).

Ce qui est encore original, c'est que la solution indique que chacun des trois amis doit payer la même somme \$2.5 et comme la part de Carole est \$0.5 alors il reste à Chantal \$2.

4.4.3 Synthèse du résultat des classes SEC1 :

Le progrès observé dans les stratégies poursuivies par les apprenants des classes SEC1 a été le résultat du passage d'un registre à un autre où l'analyse logique du contexte présente la pierre de voûte de ce passage.

- Ce qui est remarquable est le recours à la modélisation algébrique par la majorité des apprenants. Cette convergence vers l'algèbre (élémentaire) est l'une des formes de rupture avec le registre arithmétique.
- La trace du raisonnement effectué par l'apprenant a été présentée seulement par des écritures algébriques sans explication aucune. Il semble que cette façon implicite de traduction du raisonnement provient de l'explication orale mise en application dans les salles de classes.
- L'usage des symboles logiques n'a pas été conforme à leurs sens précis. On remarque une confusion entre le sens de la flèche de correspondance dans le tableau de proportionnalité et l'implication logique, qui est elle-même utilisable dans un sens presque naïf.
- Les solutions banales ont été présentes même à ce niveau où l'apprenant réparti légalement la somme \$2.5 aux deux amies. Il est important de signaler que ceux qui ont adopté ce mode de raisonnement ont été une simple minorité par comparaison avec les solutions proposées par les apprenants des classes précédentes.

Conclusion

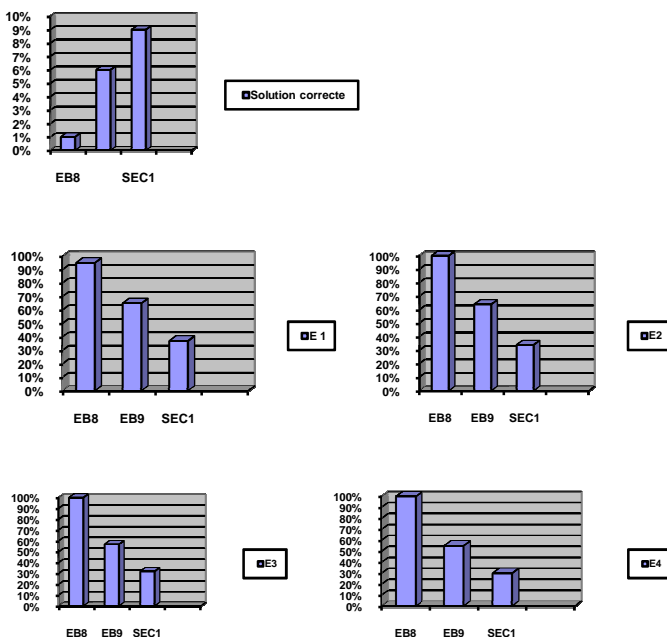
Les productions des apprenants, des classes EB8, EB9 et SEC1, relatives au problème-test, compte-tenu des types de solutions attendues, permettent d'analyser les démarches et les modalités incorrectes et de décrire les compétences mises en jeu :

- Recourir à des solutions arithmétiques

- Choisir « l'inconnue » : lettre à mettre en jeu pour la résolution du problème et par suite déceler les stratégies algébriques adoptées.
- Gérer des registres différents.
- Gérer une rationalité algébrique en se servant des règles formelles et du calcul numérique.

La situation-problème proposée ouvre la possibilité pour les apprenants d'exercer leurs compétences dans des registres variés sachant que la « solution de problèmes est la source et le critère du savoir » (Vergnaud 1981). Ce qui est implicite dans cette situation-problème proposée aux apprenants est que « l'inconnue II » du problème à calculer n'est pas un but en soi, mais elle facilite, une fois trouvée, la résolution du problème. Cette considération implicite du choix de l'inconnue s'ajoute à une autre difficulté représentée par l'usage de l'oral (registre sémiotique ; langue de l'enseignement) lors de résolution de problèmes mathématiques. Duval (Duval 2000) souligne que « dans le cas de l'expression en langue maternelle, l'écriture reste souvent à un stade de simple transcription de l'expression orale. Or, pour l'apprentissage des mathématiques, il est crucial de passer à une production écrite qui utilise les possibilités cognitives spécifiques d'organisation et de contrôle qu'offre la représentation visuelle du discours. Le passage de la parole à l'écriture conduit d'un discours commentaire en langue maternelle à un discours opératoire dans un registre symbolique ». La situation- problème testée semble être une situation dans le domaine de l'arithmétique. Il semble que les élèves qui ont opté pour la démarche arithmétique, ont été éloignés partiellement du discours opératoire symbolique

Tableaux représentatifs des pourcentages



Bibliographie

- BRUNER, J. (1983). Education en tant qu'invention sociale. *Journal d'Issues Sociales*, 39, 129-141.
- DOUADY, R.(1994). Ingénierie didactique et évolution du rapport au savoir. *Repères IREM*, 15.
- DUVAL, R. (2000). Ecriture, raisonnement et découverte de la démonstration en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 20 (2), 135-170.
- GRUGEON, B. (2000). Une structure multidimensionnelle en algèbre élémentaire : conception et perspectives. Equipe DIDIREM, Université de Paris VII, Texte Publié dans « L'algèbre au lycée et au collège », actes des journées de formation, Boisseron, 4-5 juin 1999, publication de L'IREM, Université de Montpellier II.

NAIM EL ROUADI

Université de Balamand, Liban

naim.rouadi@balamand.edu.lib