L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés

Actes du colloque emf 2006

Les problèmes de transition dans l'enseignement de l'analyse : quelques apports des approches diverses de la didactique

Carl Winsløw, *Centre de didactique des sciences, Université de Copenhague, Danemark*

Résumé

Pendant les premières années d'université, les étudiants de mathématiques vivent plusieurs transitions radicales par rapport aux tâches mathématiques avec lesquelles ils travaillent. Nous allons analyser ces transitions sous plusieurs angles, en ayant recours à l'approche anthropologique (organisations locales et globales), à la théorie des situations (en particulier au contrat didactique). Nous reviendrons à cette occasion sur certains obstacles rencontrés dans l'enseignement des mathématiques au niveau universitaire.

1. Introduction

L'étudiant de mathématiques doit vivre, en quelques années, plusieurs transitions par rapport à l'activité mathématique dans laquelle il doit s'engager. Pour des raisons institutionnelles on s'intéresse surtout aux difficultés liées au passage du secondaire vers les filières scientifiques de l'université, notamment dans les grands cours d'entrée (DEUG en France). Dans les deux contextes, l'analyse (l'étude des propriétés de fonctions réelles liées grosso modo aux processus de limite) semble porteuse de bien des obstacles par sa technicité, sa complexité et le fait qu'elle reste, en tant que corpus de savoir, sur la quasi-totalité du savoir scolaire. Parmi les enseignants universitaires, il y a un « sentiment répandu » (voir Burn *et al*., p. 123) que l'étudiant doit, effectivement, accomplir des « sauts cognitifs » dans le parcours à partir de l'analyse telle qu'elle se présente au lycée vers l'analyse abstraite étudiée à l'université (notamment dans les cours plus avancés). Mais au fait – et au-delà de la transition institutionnelle lycée/université – en quoi consiste ce « saut », ces obstacles difficiles à franchir ? Et peut-on fournir quelques principes pour aider l'étudiant par le moyen qui devrait servir de telles fins, à savoir l'enseignement ?

2. Trois problèmes simples pour illustrer la problématique

Pour illustrer notre discussion sur la première question, nous allons utiliser trois tâches simples mais typiques du travail en analyse que l'étudiant doit entreprendre au lycée, au début de l'université, et dans sa deuxième ou troisième année. Les voici :

1. Montrer que la fonction définie par
$$f(t) = \frac{t}{1+t}\ ,\ t \neq -1$$
est croissante sur $[0, \infty)$.
2. Montrer que si f est définie comme ci-dessus, on a toujours $f(s+t) \leq f(s) + f(t) \quad s, t \geq 0$.

3. Montrer que
$$d(a,b)=\frac{|a-b|}{1+|a-b|}$$
définit une distance sur **R**. [Voir Carothers (2000, p. 37) pour la définition de distance.]

Le troisième problème est tiré de (Carothers, 2000, p. 38) et les deux premiers sont proposés là comme indices (étapes possibles pour s'acquitter de 3.). Évidemment 1. est une tâche qu'un élève de lycée accomplira en observant que $f'(t)=(1+t)^{-2}>0$ pour tout $t\neq -1$. En se servant d'une calculatrice graphique on peut d'ailleurs « voir » directement que f est croissante sur ces deux intervalles de définition. Pour 2., il suffit d'observer que
$$\frac{s+t}{1+s+t}=\frac{s}{1+s+t}+\frac{t}{1+s+t}\leq\frac{s}{1+s}+\frac{t}{1+t}$$
pour $s,t\geq 0$.

Finalement pour 3., il faut vérifier les axiomes pour une distance (*Ibid*., p. 37), dont seulement l'inégalité $d(a,b)\leq d(a,c)+d(c,b)$ n'est pas immédiate dans le cas donné ; pourtant comme $d(a,b)=f(|a-b|)$, et comme $|a-b|\leq|a-c|+|c-b|$ par le même axiome pour la distance euclidienne sur **R**, l'inégalité pour d s'ensuit directement des résultats de 1. et 2.

En voyant la simplicité de cette solution, on se demande comment un étudiant mis devant 3. – comme un des premiers exercices pratiques sur les distances métriques – peut se trouver en difficulté (même si 1. et 2. ne lui posent pas de difficultés). Dans une classe observée à la deuxième année en maths pures de l'Université de Copenhague, un étudiant a montré, au tableau et sans hésitation, sa réponse à 1. Puis, pour 2., il a proposé de définir $g(s,t)=f(s+t)-f(s)+f(t)$. Aussi, il est parvenu à démontrer, par des calculs assez longs – passant par les dérivés partielles – que g est non positive sur $\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}_+$. Il était pourtant incapable de dire en quoi cela pouvait servir pour 3., et c'était pareil pour les autres étudiants dans cette classe. Et comme l'enseignant a fini par montrer une solution du type de celle qui vient d'être exposée, les étudiants – après une demi-heure de calculs pour les étapes précédentes – paraissaient perplexes et convaincus que cet exercice était difficile et, en effet, hors de leur portée.

Au moins pour un regard extérieur, ces trois tâches sont assez semblables par leurs énoncés ; pour une expression donnée, il faut montrer une propriété. Comment donc expliquer cette différence « en pratique » pour les étudiants, qui disposent en principe de tous les éléments nécessaires pour les trois tâches ? Même si l'exemple est sans doute d'une grande simplicité, il nous servira pour cerner certains obstacles liés aux transitions dont nous avons parlé dans l'introduction.

3. La transition par rapport aux représentations sémiotiques

Comme noté par Tall (1996) et de nombreux autres auteurs, l'apprentissage de l'analyse concrète (« calculus » en anglais) dépend de façon cruciale de l'usage d'une multitude de types de représentations : symboliques, géométriques, graphiques, numériques et même « visuo-spatiales » tels des gestes ou des objets en mouvement. Plus précisément (Duval, 1995, 2000), la coordination de représentations dans ces différents registres sémiotiques est certes une condition pour l'activité mathématique en général, mais cette condition apparaît avec une force particulière en analyse, qui réunit tous les registres que l'élève s'est appropriés auparavant. De plus l'analyse est basée sur des notions (limite, dérivée,...) qui sont difficiles à saisir sans un discours plus formel (définition, preuves) que ce qu'il est normal de voir et qui est nécessaire dans l'enseignement des éléments de géométrie et d'arithmétique. Cependant pour les objets de base, les fonctions réelles concrètes, on peut trouver un support efficace justement dans la multitude de représentations disponibles, à condition évidemment que ces dernières soient disponibles pour les élèves (cf. Winsløw, 2003 et à paraître). Ce n'est que dans l'analyse dite « moderne » ou « abstraite » que ce support disparaît plus ou moins complètement. Les fonctions deviennent des points ou des vecteurs dans les espaces métriques, hilbertiens… On ne retient en général que des représentations dans les registres discursifs (langue naturelle, symbolismes) ; les représentations non discursives (dans le sens de Duval, 2000, p. 66) étant au plus « heuristiques ». Ainsi, la flexibilité nouvellement découverte et acquise disparaît en grande partie. On peut parler d'une « expansion suivie de réduction » par rapport aux représentations.

Pour ceux qui arrivent à l'université en vue d'étudier les mathématiques, on peut supposer la coordination de représentations pertinentes pour les fonctions concrètes, ainsi que certaines routines de traitement et de conversion, liées à des situations spécifiques. Ainsi, pour étudier la monotonie d'une fonction donnée, l'étudiant passera à la production de graphes (conversion) et au calcul de dérivées (traitement), de nos jours, d'ailleurs, en se servant d'une calculatrice. Par exemple l'exercice 1 (voir §2) demande la vérification, par une méthode bien travaillée au lycée (différentiation, étude du signe de la fonction dérivée), de ce qui est déjà visible par la représentation graphique de f (figure 1).

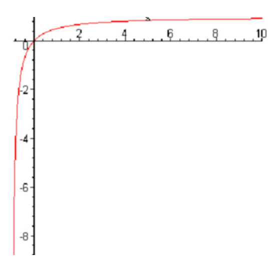

Figure 1 – Graphe de $f(s) = s/(1+s)$

Par contre, pour l'exercice 2., le traitement requis n'est pas routinier et le résultat n'est pas « visible » dans la représentation graphique de f. Mais l'étudiant peut se ramener, avec un peu plus d'effort, dans une situation à des stratégies routinières, en considérant la fonction g à deux variables. Dans ce cas, il dispose de traitements semblables (quoique plus récemment automatisés) pour étudier la variation de la fonction, et d'une représentation graphique qui fait « voir » la propriété à vérifier. La production du graphe (figure 2) nécessite, pour la plupart des étudiants, le recours à un logiciel tel que Maple.

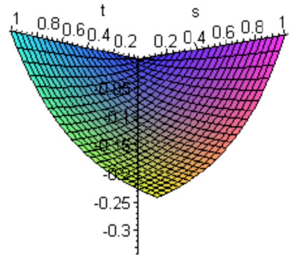

Figure 2 – Graphe de *g(s,t) = f(s+t) – f(s) – f(t)*

Même si la représentation graphique de g n'apparaît pas dans le travail de l'étudiant, elle fait partie de sa conception d'une fonction à deux variables ; en étudiant la variation il s'agit, ici, de montrer que « tout le graphe est au-dessous du plan z = 0 ». Après une légère modification (traitement) de l'inégalité, la preuve se réduit ainsi à des routines familières de traitements (de la définition de la fonction, en registre symbolique), quoique nettement plus compliquée que l'approche suggérée en §2. De plus, la propriété à prouver se laisse exprimer dans un registre non discursif.

Malgré toute la similitude apparente des tâches, aucune de ces deux possibilités n'est disponible pour 3. La distance supposée d(a, b) peut, en principe, être conçue comme une fonction à deux variables, mais la propriété « être une distance métrique » ne s'exprime pas dans le registre non discursif du graphe cartésien ; et sa vérification ne se réduit pas à des routines de traitement familier. En fait, il faut vérifier la propriété morceau par morceau (comme pour toute définition par axiomes) et en plus utiliser la propriété pour une métrique connue. Ce n'est pas un processus de traitements successifs qui doit être automatisé comme un algorithme. Mais l'exécution de ces traitements suppose une reconnaissance du problème et une « feuille de route » pour l'exécution, y compris un point de départ et un point d'arrivée. Sinon, les traitements requis paraissent dans l'ensemble complexes et sans cohérence discursive, même s'ils sont localement familiers pour les étudiants.

De ce point de vue, nous avons donc deux nouveaux obstacles pour 3. (et en partie pour 2.), qui marquent une vraie transition par rapport à 1. :

- l'absence de stratégies routinières pour organiser les traitements qui fournissent la vérification (ou plus généralement, le résultat recherché) ;
- l'absence de représentations non discursives pour la propriété à vérifier.

Ces deux phénomènes se retrouvent régulièrement dans le passage de l'analyse concrète à l'analyse moderne : les objets et leurs propriétés n'ont plus qu'une seule forme fiable de représentation, et leur étude n'admet que peu de routines de type « algorithmique ». Et ce sont là, en fait, deux ruptures profondes avec toute l'expérience précédente des étudiants avec les mathématiques et, en particulier, avec l'analyse.

4. L'approche anthropologique

Comme je l'ai expliqué ailleurs (Winsløw, à paraître, a et b), la théorie anthropologique du didactique (TAD) est utile pour expliquer plus globalement la nature de la transition à deux étapes entre les mathématique scolaires et les mathématiques universitaires. Cette explication comprend deux éléments :

- la particularité du contexte institutionnel pour la transposition, grosso modo la coexistence à l'université de pratiques de recherche et d'enseignement ;
- la nature des organisations mathématiques (OM), qui sont enseignées dans ce contexte, par rapport à celles qui sont enseignées dans le contexte scolaire.

Le premier élément est en partie cause du second : les organisations didactiques (OD) universitaires sont développées par des constructeurs d'OM, et donc l'OM du chercheur est un idéal important (quoique non forcément proche, voir aussi §6) pour l'OM travaillé par l'étudiant. Pour l'enseignement pré-universitaire, la transposition est beaucoup plus complexe, avec d'autres rationalités et contraintes.

En fait, les praxéologies exercées par les élèves à l'école et même au lycée sont concentrées sur des blocs pratiques (type de tâches, techniques) qui sont censés être utiles dans d'autres contextes aussi (et qui en fait font partie de praxéologies en dehors des seules mathématiques). Un exemple en est la différentiation comme technique qui permet d'étudier les propriétés d'une fonction, illustrée par la tâche 1 (§2). Par contre à l'université, dans un cours de mathématiques pour futurs mathématiciens, la maîtrise de techniques routinières ne suffit plus. L'étudiant doit participer (plutôt que simplement assister) à des praxéologies plus complètes. En particulier l'étudiant est censé maîtriser – souvent dans un délai assez court – un discours technologique et théorique qui permet l'explication et la justification cohérente des blocs pratiques liés à l'analyse concrète. Par exemple, le lien entre la croissance d'une fonction et sa fonction dérivée doit se comprendre par rapport à une théorie de calcul infinitésimal qui inclut une notion précise de limite et, en principe, de distance sur **R**. Nous disons « en principe » car en analyse concrète n'apparaît que la distance euclidienne, et donc la notion n'est pas forcément explicite. Toutefois, la première transition se caractérise par le passage à des praxéologies complètes, avec blocs théoriques situés dans des OM plus larges et plus cohérentes que dans les OM enseignées au lycée (pour une étude approfondie dans ce contexte, voir Barbé *et al*., 2005). Le raisonnement impliquant les inégalités y joue un rôle important, et la stratégie de l'étudiant pour la tâche 2 – décrit en §2 – suggère que plutôt que de s'y livrer, l'étudiant cherche à se ramener à un bloc pratique semblable à celui qui a servi pour la tâche 1 (étude de la fonction par ses dérivées). Les difficultés de l'étudiant peuvent donc être lues comme un signe que cette première transition n'est peut-être pas tout à fait accomplie.

Le lien entre convergence (et plus généralement, topologie métrisable) et distance métrique est d'ailleurs essentiel pour l'analyse moderne, où la distinction entre distances dites équivalentes (donnant lieu à la même topologie) est beaucoup moins importante qu'en géométrie. Tandis que la distance euclidienne est la distance « naturelle » pour l'analyse concrète, elle fait partie de son discours théorique, les distances métriques deviennent elles-mêmes des objets dans les tâches en analyse moderne, comme c'est le cas dans la tâche 3. Dans l'optique des praxéologies, la deuxième transition consiste donc à développer de nouvelles praxéologies par rapport à des tâches qui ont pour objets les éléments des blocs théoriques antérieurs. En effet, avec l'exercice qui suit, dans le manuel (Carothers, 2000, p. 38), la tâche 3 de §2, y est déjà :

> *Soit d une distance sur un espace métrique M, et soit* $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ *une fonction qui remplit les conditions établies dans 1. et 2., et aussi* $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$. *Montrer que la fonction* $f \circ d$ *est une distance sur M.*

Pour construire une foule de distances sur *M*, il suffit donc de construire des fonctions du type indiqué dans cet exercice. On peut ensuite poser la question de leur équivalence, etc. Finalement cette notion (cette fois-ci théorique) présuppose de regarder la distance métrique comme un « point » qui peut être, ou ne pas être, en relation d'équivalence avec d'autres, et dont la classe d'équivalence, plutôt que la métrique individuelle, correspond à une topologie métrisable.

L'OM « ponctuelle », dont le type de tâche est de vérifier si une fonction donnée est bien une distance, a donc pour fonction principale d'établir les distances comme objets dans une OM régionale liée aux propriétés topologiques (convergence, continuité, compacité, etc.) dans un espace métrique. Quoique cette perspective soit apparente pour le spécialiste enseignant, elle ne l'est évidemment pas pour l'étudiant qui rencontre l'OM locale dans une tâche comme 3. Pourtant le choix de commencer par l'OM en question est enraciné dans l'OD « traditionnelle » (ou, en fait, « moderne » dans le sens de Bourbaki…) dont le cours de Carothers est une illustration, d'ailleurs assez modérée, parmi beaucoup d'autres. Historiquement la définition axiomatique d'une distance métrique (Fréchet, 1906) a suivi des recherches laborieuses sur les notions de convergence dans divers contextes, et constitue ainsi une réponse générale à un questionnement qui n'apparaît que de façon implicite dans le cours. D'introduire tout de suite la réponse à ce questionnement est sans doute liée à une économie d'exposition, mais implique aussi des problèmes en fonction de l'absence, chez les étudiants, de maîtrise des blocs théoriques qui fournissent les objets des toutes premières tâches à confronter.

Les quelques éléments d'analyse du problème de transition que nous avons proposés ici et en §3 ont pour point commun de suggérer une transition en deux étapes. Tandis que l'analyse sémiotique ne vise que certains aspects des démarches nécessitées par les exercices, qui d'ailleurs sont cruciaux pour comprendre les obstacles cognitifs chez les étudiants, l'analyse des OM travaillés par l'étudiant permet une vision plus globale de l'enjeu épistémologique pour l'apprentissage et pour l'enseignement. Toutefois, pour l'enseignement nous avons seulement cerné le problème, c'est en effet une caractéristique plus générale de l'usage de ces deux cadres d'être surtout descriptifs. C'est pourquoi nous nous tournons, en vue de la deuxième question posée dans l'introduction, vers une troisième approche permettant d'éclairer les problèmes de transitions, celle de la théorie des situations didactiques.

5. L'apport de la théorie des situations didactiques

La méthodologie d'ingénierie didactique est présentée, par M. Artigue (1988), comme un processus d'expérimentation didactique contrôlé où l'analyse des variables didactiques tient un rôle central. Parmi les « classiques incontournables dans ce domaine » (*Ibid*., p. 287), on retrouve bien sûr les recherches menées par Brousseau et son équipe, mais il est intéressant de noter que l'exemple qui est traité dans cet article provient d'un projet mené dans le contexte de l'enseignement des équations différentielles en première année du DEUG. Dans un sens plus large sur un plan méthodologique, les ingénieries liées à l'usage de logiciels dans le contexte de l'analyse concrète sont devenues un thème important de recherche internationale. D'autres travaux sur l'enseignement menés aux débuts de l'université ont également une perspective d'intervention contrôlée et sont basés sur la théorie des situations, notamment la modification du contrat nécessitée pour le débat scientifique en cours magistral (Legrand, 2001, 1993) ou la conception de milieux « exploratoires » pour faciliter la transition vers l'analyse concrète (par ex., Bloch, 2003 ; Bloch et Schneider, 2004).

L'intervention est dans ce cas conduite par rapport à une analyse plus ou moins explicite des obstacles épistémologiques. Ainsi, Bloch (2005) propose 10 variables macro-didactiques pour caractériser la rupture secondaire/supérieur par rapport aux propriétés des milieux didactiques usuels pour l'apprentissage de l'analyse dans ces deux contextes institutionnels. Certaines de ces variables indiquent, d'ailleurs, des phénomènes de transition semblables à ceux que nous avons exposés ici. Pour la construction d'interventions, l'idée qui nous semble la plus intéressante est celle de retournement de situation qui vise à familiariser l'étudiant à une problématique (situation initiale) avant de procéder à son traitement plus formel (situation retournée), avec des consignes plus précises. Normalement une telle approche suppose que la situation initiale offre un accès plus « intuitif » au problème dont le savoir visé peut se concevoir comme une « réponse » au problème. Ainsi, pour l'exemple de §2, la possibilité de plusieurs métriques sur un même espace (comme **R**) devrait d'une certaine manière être rendue sensible sinon « naturelle » par une situation initiale, qui devrait aussi fournir un milieu pour poser la question de conditions permettant de conclure que les propriétés de convergence sont les mêmes dans les deux métriques données. Peut-être le cas de métriques sur $\mathbf{R}^2$ sera plus illustratif. Là, la distance euclidienne dE ainsi que, par exemple, la métrique discrète d_D et la métrique « coin » :

$$d_C((x, y), (x', y')) = |x - x'| + |y - y'|$$

peuvent être présentées dans un registre non-discursif (figure 3), et également moyennant des modèles plus ou moins « connus ». Par exemple, d_D se réalise comme le prix à payer pour un déplacement entre deux points dans une même zone tarifaire, et d_C comme la distance (dans le sens ordinaire !) à parcourir entre deux points avec un véhicule qui ne peut changer de direction qu'en ayant recours à des angles droits (ou dans une ville dont les rues se croisent sous des angles droits). Il est aisé de « voir » que les mêmes suites de points convergent vers un point donné pour les métriques d_E et d_C, mais non pour celles-ci et d_D. Sans doute, l'imagination de certains lecteurs ira plus loin.

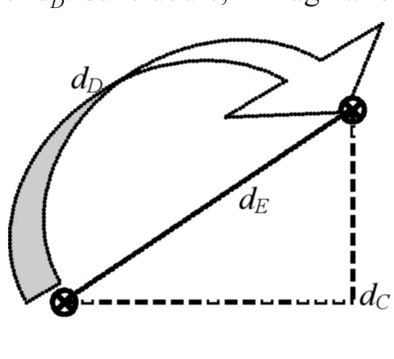

Figure 3 – Trois distances différentes dans le plan

Toujours est-il que la question du contrat didactique se pose de façon spécifique et sensible dans le contexte universitaire, et qu'il faut peut-être s'y prendre de façon plus explicite dans ce contexte, tel que cela est souligné par Legrand pour la réalisation du débat scientifique. Les attentes des étudiants sont fortes et liées à ce qu'ils perçoivent comme la rationalité de l'enseignement : leur fournir des savoirs reconnus, nécessaires et suffisants pour réussir au jeu académique proposé par le cours. Et cela à plusieurs niveaux : globalement, il existe déjà un « macro-contrat » bien établi depuis le lycée, et renforcé par les pratiques de l'enseignement universitaire, stipulant qu'une consigne ne peut être donnée aux étudiants que dans un contexte déjà présenté et exemplifié par le professeur (Grønbæk *et al*., à paraître). Plus localement, le savoir des étudiants par rapport aux objets en question est normalement enraciné dans des expériences variées. Pour la notion de distance dans le plan, la distance euclidienne est naturelle depuis l'école primaire et même dans la vie ordinaire. Il faut s'attendre dès lors au conflit naturel qui peut être causé par la mention soudaine que toute fonction sur $\mathbf{R}^2$ qui satisfait à certains axiomes soit reconnue comme étant également une « distance ». En général le pas décisif est de faire accepter aux étudiants les conditions pour s'engager dans un questionnement rationnel qui n'a pas, a priori, de technique toute faite et fournie à l'avance, et qui nécessite par moments l'abandon de repères considérés auparavant comme « naturels » et « sûrs ». Le problème de transition par rapport au contrat doit donc être considéré à (au moins) deux niveaux interdépendants : celui, local, du savoir spécifique en jeu (lié directement au milieu didactique), et celui des formes de travail proposées aux étudiants (y compris les dispositifs).

6. La nécessité d'alignement

Un intérêt particulier de la théorie anthropologique du didactique est de reconnaître le contexte institutionnel non pas seulement comme source de contraintes pour la réalisation didactique, mais comme écologie pour les organisations mathématiques et didactiques, comprenant des mécanismes de régulation qui déterminent en grande partie leur vie (Chevallard, 2001). La prise en compte de ces conditions écologiques sont indispensables pour le didacticien qui s'intéresse à la viabilité hors laboratoire de ses ingénieries Nous n'en mentionnons ici que deux qui nous paraissent particulièrement importantes pour la deuxième question présentée dans l'introduction.

Premièrement, il nous semble indispensable, dans les contextes universitaires où nous travaillons, d'articuler toute initiative menée par rapport à l'enseignement avec le système d'évaluation de l'apprentissage des étudiants – en particulier avec les examens qui sont sinon le but, au moins des marques d'étapes importantes pour le travail des étudiants. Aussi, la modification du système et du contenu de cette évaluation est parfois souhaitable sinon nécessaire pour la réalisation d'une ingénierie substantielle. Il faut donc élargir la perspective didactique pour y inclure non pas seulement les conditions (cognitives, épistémologiques, institutionnelles...) pour l'apprentissage mais aussi celles de son évaluation formelle. Les transitions par rapport au contrat didactique dépendent de ce que les étudiants reconnaissent comme visée de cet enseignement : que l'effort (peut-être considérable) demandé pour résoudre les tâches qui leur sont assignées dans les situations d'enseignement contribue de façon évidente à leur apprentissage et à leur réussite dans l'évaluation. Notons qu'il y a là deux étapes a priori indépendantes ; les objectifs d'apprentissage et la mesure attribuée par l'évaluation. La « manière évidente » dont on les relie n'est donc en rien automatique. La description explicite des objectifs (Winsløw, 2005) ainsi que l'usage de formes d'évaluation qui correspondent mieux au travail adidactique des étudiants (Grønbæk *et al*., à paraître) sont donc deux thèmes qui nous paraissent importants pour une approche proactive des problèmes de transition. Grønbæk *et al*. (à paraître) présentent un projet complet d'ingénierie (pour un cours d'analyse semi-avancé) basé sur ces deux pistes de travail.

Deuxièmement, la co-habitation, dans l'université, de la recherche et de l'enseignement (supérieur) est lourd de potentiels mais aussi source de problèmes. Les transitions que nous avons décrites sont en partie liées aux difficultés pour l'étudiant de s'engager dans des activités qui sont, pour le chercheur, des pas indispensables vers l'analyse contemporaine. D'autre part, pour l'enseignant-chercheur le décalage perçu entre ses deux activités principales – enseigner et faire de la recherche – est souvent important. Les conditions et les modalités d'une relation plus fructueuse entre ces deux activités du professeur – et les potentialités pour le travail des étudiants d'une telle articulation recherche-enseignement – représentent un thème de recherche assez vif en sciences de l'éducation (voir Elton, 2001, pour une introduction). Les spécificités de ce thème pour le cas de l'enseignement supérieur des mathématiques devraient le devenir en didactique – notamment en lien avec les problèmes de transition.

Références

Artigue, M. (1988). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *9*(3), 281-308.

Bloch, I. (2003). Teaching functions in a graphic milieu : what forms of knowledge enable students to conjecture and prove ? *Educational Studies in Mathematics*, *52*(2003), 3-28.

Bloch, I. (2005) *Quelques apports de la théorie des situations à la didactique des mathématiques dans l'enseignement secondaire et supérieur*. Note de synthèse (HDR), Université Paris 7.

Bloch, I. et Schneider, M. (2004). *A various milieu for the concept of limit : from determination of magnitudes to graphic milieu allowing proof*. Texte présenté à ICME 10, Copenhague.

Barbé, J., Bosch, M., Espinoza, L. et Gascón, J. (2005) : Didactic restrictions on teachers practice – the case of limits of functions at spanish high schools. *Educational Studies in Mathematics*, *59*(1-3), 235-268.

Burn, B. *et al*. (Eds) (1998). *Teaching undergraduate mathematics*. Imperial College Press.

Carothers, N. L. (2000). *Real Analysis*. Cambridge : Cambridge U. Press.

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude : écologie et régulation. *In* : Dorier, J.-L. *et al*. (Eds), *Actes de la 11e école d'été de Didactique des Mathématiques*. Grenoble : La pensée sauvage.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Bern : Peter Lang.

Duval, R. (2000). Basic issues for research in mathematics education. *In* : T. Nakahara *et al*. (eds.), *Proceedings of PME 24*, vol. 1, 55-69. Hiroshima : Hiroshima U.

Elton, L. (2001) Research and teaching : conditions for a positive link. *Teaching in Higher Education*, *6*(1), 43-56.

Fréchet, M. (1906) Sur quelques points du calcul fonctionnel. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, *22*, 1-74.

Grønbæk, N. et Winsløw, C. (À paraître). *Developing and assessing specific competencies in a first course on analysis*. Research in Collegiate Mathematics Education.

Grønbæk, N., Misfeldt, M. et Winsløw, C. (en lecture). Assessment and contract-like relationships in undergraduate mathematics education. Pour O. Skovsmose *et al*. (eds), *University science and Mathematics Education*. Challenges and possibilities.

Legrand, M. (1993) Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificités de l'analyse. *Repères IREM*, *10*(123-159). Topics Éditions.

Legrand, M. (2001). Scientific debate in mathematics courses. *In* D. Holton (Ed.), *Teaching and learning of mathematics at university level. An ICMI study* (p. 127-135). Dordrecht : Kluwer. 2001.

Rump, C. et Winsløw, C. (en lecture). The role and means for tertiary didactics in a faculty of science. Pour O. Skovsmose *et al*. (eds), *University science and Mathematics Education. Challenges and possibilities*.

Tall, D. (1996) Functions and calculus. *In* A. Bishop *et al*. (eds) *International Handbook of mathematics education* (p. 289-325). Dordrecht : Kluwer.

Winsløw, C. (2003). Semiotic and discursive variables in CAS-based didactical engineering. *Educational Studies in Mathematics*, *52*, 271-288.

Winsløw, C. (2005) Définir les objectifs de l'enseignement mathématique : La dialectique matières-compétences. *Annales de didactique et des sciences cognitives*, *10*, 131-156.

Winsløw, C. (À paraître, a). *Research and development of university level teaching : the interaction of didactical and mathematical organisations*. Actes de CERME 4, Espagne, Février 2005.

Winsløw, C. (À paraître, b). *Transformer la théorie en tâches : la transition du concret à l'abstrait en analyse réelle*. TD proposés à la 13ème école d'été de didactique des mathématiques, Sainte Livrade, France, Août 2005. Résumé en préparation pour les actes.

Winsløw, C. (À paraître, c). L'usage des logiciels dans l'enseignement supérieur des mathématiques : un panorama des questions du point de vue de la sémiotique. Pour F. Conne et R. Floris (éds), *Environnements informatiques, enjeux pour l'enseignement des mathématiques*.

Pour joindre l'auteur

Carl Winsløw
Centre de didactique des sciences, Université de Copenhague
Universitetsparken 5, 2100 København Ø, DANEMARK
Courriel : winslow@cnd.ku.dk