L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés

Actes du colloque emf 2006

Mise en équation différentielle et mesure des grandeurs par une intégrale, en terminale scientifique : un point de vue mathématique sur la collaboration avec la physique

Marc Rogalski, *Université des Sciences et Technologies de Lille, Laboratoire Paul Painlevé, Université de Lille et CNRS, France*

Résumé

Les programmes de la terminale scientifique française mettent désormais l'accent sur la collaboration entre mathématiques et physique, pour la mise en équation différentielle de phénomènes physiques et, plus marginalement, pour la mesure des grandeurs par une intégrale. Nous comparons d'abord la pratique des physiciens et un point de vue de mathématiciens. Nous analysons les concepts qui sous-tendent la possibilité d'une intervention spécifique des enseignants de mathématiques dans les classes sur des questions de physique. Nous dégageons ainsi une procédure générale de l'accroissement différentiel, dans ses versions physique et mathématique, susceptible de donner du sens aux pratiques des physiciens et à certaines notions d'analyse : la négligeabilité, des procédures de majoration et d'encadrement. Cette notion est centrale dans le concept de dérivée, mais les programmes de la terminale la sous-estiment fortement, et en évitent une pratique opérationnelle. Nous proposons quelques situations de travail pour les élèves, qui permettent d'aborder un large éventail des questions qui se posent. Ces situations pourraient s'insérer dans une ingénierie destinée à l'apprentissage de la procédure de l'accroissement différentiel et à l'amélioration de l'enseignement de l'analyse.

Introduction

Le programme mathématique des terminales scientifiques françaises met depuis 2001 l'accent sur les liens entre les mathématiques et la physique. Ce lien est développé de façon très explicite autour des procédures de mise en équation différentielle de phénomènes physiques (étude des variations d'une grandeur à taux de variation instantané proportionnel à la grandeur, équations différentielles $y' = ky$).

Par ailleurs un changement important est intervenu dans la présentation de l'intégrale définie : jadis application de l'existence, admise, des primitives, elle est maintenant définie comme l'aire du sous-graphe (quand $f \geq 0$) de la fonction f. Le fait que l'aire entre les verticales d'abscisses a et x soit une primitive de la fonction f est démontré (au moins pour les fonctions monotones). De plus, le lien avec les sommes de Riemann de la fonction f est fait, même si le théorème de convergence n'est pas du programme. On voit là clairement une procédure (implicite) de définition et calcul de mesures de la grandeur « aire », que l'on retrouve pour d'autres grandeurs.

Sous le vocabulaire très général de modélisations, de nombreux exemples de mises en équation ont été proposés. Nous présentons ici une approche spécifique des mathématiques dans l'analyse de telles activités interdisciplinaires, et étudions le bénéfice qui pourrait en être tiré dans l'apprentissage de certaines notions mathématiques, et l'infléchissement de pratiques mathématiques qui rendrait viable le but de « faire de la physique dans la classe de mathématiques ». Ce travail prolonge les analyses de [1], [3].

1. Étude de quelques situations prototypiques

Dans cette partie, à propos de la mise en équation différentielle (MED) d'abord, puis ensuite sur la mesure des grandeurs par intégrale (MGI), nous présentons des situations prototypiques que nous analysons ensuite.

1.1. Situations de mise en équation différentielle

$\boxed{1}$ Évaporation d'une goutte d'eau ([3], [9])

Une goutte d'eau de forme sphérique de 2 mm de rayon, en suspension dans l'air, s'évapore peu à peu. Sa vitesse d'évaporation, en grammes par seconde, est proportionnelle à sa surface, avec un coefficient de proportionnalité égal à 10^{-6} g/s pour 1 mm^2 de surface. Au bout de combien de temps la goutte d'eau sera-t-elle complètement évaporée ?

$\boxed{2}$ Chute avec résistance proportionnelle à la vitesse

Un point matériel de masse m tombe verticalement sous l'effet de la pesanteur ; il est soumis à une résistance de l'air dont l'intensité est proportionnelle à la vitesse, avec un coefficient k. Décrire son mouvement.

$\boxed{3}$ Écoulement dans une canalisation poreuse ([3], [9])

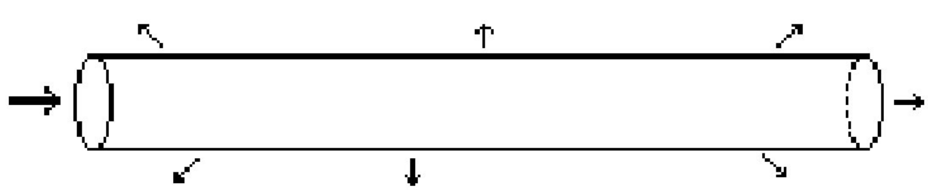
On étudie les pertes d'eau le long d'une canalisation poreuse cylindrique de rayon 10 cm. On suppose que le débit d'entrée est de 1 800 litres à la minute. On envisage 2 hypothèses :

1° hypothèse : les fuites sont de 0,1 litres/mn par mètre carré de surface de la canalisation ;

2° hypothèse : sur un petit segment de la canalisation, la fuite (en litres/mn) est à peu près proportionnelle à la surface (en mètres carrés) du segment et au débit (en litres/mn) à travers ce petit segment, le coefficient de proportionnalité étant égal à 10^{-2}.

Pour chacune de ces deux hypothèses, on demande quelle longueur maximum peut avoir la canalisation pour que le débit d'eau à sa sortie soit au moins de 1 000 litres/mn.

Comparer les méthodes utilisées dans chacune des deux hypothèses.



$\boxed{4}$ La loi de désintégration radioactive ([4])

À l'issue d'une expérimentation sur le radon contenu dans le sol, le texte suivant est proposé (extrait du document d'accompagnement des programmes) :

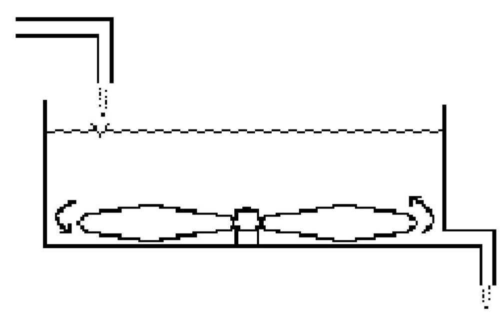
« L'expérience suggère que, si l'on considère une population macroscopique de noyaux radioactifs (c'est-à-dire dont le nombre est de l'ordre du nombre d'Avogadro, soit $6x10^{23}$), le nombre moyen de noyaux qui se désintègrent pendant un intervalle de temps Δt à partir d'un instant t, rapporté au nombre total de noyaux N(t) présents à l'instant t et au temps d'observation Δt, est une constante λ caractéristique du noyau en question. On peut donc écrire

$$(*) \quad \frac{\Delta N(t)}{N(t)} = -\lambda \Delta t$$

A priori, la constante λ pourrait dépendre du temps. Ce serait le cas si un processus de vieillissement était en cause, comme, par exemple, si l'on s'intéresse au nombre de décès dans une population donnée. Le fait que λ ne dépende pas du temps s'interprète comme un processus de « mort sans vieillissement ».

Déterminer la loi de la radioactivité (c'est-à-dire la fonction $t \rightarrow N(t)$).

$\boxed{5}$ Dilution d'une solution saline

Un bassin contient 100 litres d'eau, dans lesquels sont dissous 10 kg de sel. Une arrivée d'eau pure, avec un débit de 10 litres/mn, démarre à l'instant 0. En même temps que l'arrivée d'eau pure, une évacuation du mélange contenu dans le bassin est assurée avec un débit de 10 litres/mn. L'homogénéisation du contenu du bassin est assurée de façon permanente et instantanée par un mélangeur. Au bout d'une heure, quelle quantité de sel reste-t-il dans le bassin ?	

1.2. Analyse des problèmes de mise en équation différentielle

1.2.1. En amont de la MED

Un premier constat est que sous l'apparence d'une simple demande numérique (temps d'évaporation, longueur de la canalisation,…), c'est en fait une fonction qu'il faut déterminer (débit à la distance x, quantité de sel à l'instant t,…). C'est normalement en physique que ce constat devrait être fait, mais il est clair que le concept mathématique de fonction, et en particulier de fonction dérivable (nous y reviendrons), va être central.

Un corollaire de ce constat est qu'il faudra choisir une grandeur qui va avoir le rôle de variable (le temps, la distance x à l'origine de la canalisation,…) et une ou plusieurs autres qui vont tenir le rôle de fonctions inconnues. En fait, il faut, à ce niveau de terminale, choisir une fonction inconnue, et voir comment les autres en dépendent (dans le cas de la goutte d'eau, il faut se dépêtrer entre la masse, la surface, le volume, le rayon…).

Il s'agit d'entrer dans la problématique d'une équation fonctionnelle, où l'inconnue est une fonction, et non plus un ou plusieurs nombres. Il y a là un saut épistémologique que les enseignants de mathématiques doivent accompagner… Et qui va déboucher sur la notion d'équations différentielles (linéaires à coefficients constants en terminale).

De plus, à ce premier niveau de l'analyse, on se rend compte qu'il va falloir introduire des notations variées concernant les diverses grandeurs en présence, et dans certains cas, si on veut saisir la généralité du processus de résolution mis en œuvre, introduire des paramètres qui peuvent être nombreux (une masse volumique, un coefficient de proportionalité, des dimensions,…). Cela présente ainsi une rupture avec un leitmotiv des programmes depuis de nombreuses années : pas de paramètres, tout doit être numérique !

1.2.2. Procédure physique et procédure mathématique de l'accroissement différentiel

On constate que les problèmes proposés ne se situent pas du tout sur le même plan du point de vue de l'épistémologie de la MED.

Dans les problèmes 1 et 2, la MED est déjà faite, puisque, soit le mot vitesse (ce pourrait être débit, taux de variation instantané,…) est donné dans l'énoncé (dans 1 : « la vitesse d'évaporation est… »), soit l'application immédiate d'une loi physique d'emblée différentielle donne directement une équation différentielle (ainsi, dans 2, $m\Gamma = mg - kv$, soit $mv' = - kv + mg$, équation différentielle portant sur la fonction v).

Dans le problème 3.1° (première hypothèse), il n'y a pas non plus de MED à faire ! En effet, la fuite est directement proportionnelle à la longueur de la canalisation, on est devant un simple problème de mise en équation algébrique (proportionnalité).

Par contre, le cas de la deuxième hypothèse de 3 est très différent, puisqu'il apparaît que le taux de fuite (par unité de longueur) va être différent selon l'abscisse x, car dépendant du débit d(x) en ce point. Et ce constat de non proportionnalité est l'indice décisif du fait qu'il y a une modélisation à faire, menant à une MED.

Dans l'énoncé 3.2°, une modélisation locale est proposée, qui présente ce que nous appellerons la procédure physique de l'accroissement différentiel (en abrégé PPAD) : on regarde un accroissement Δx de la variable, à partir de sa valeur x, et on dit quelque chose sur l'accroissement Δf de la fonction f cherchée.

Mais que dit-on précisément ? Le texte de l'énoncé 4 est assez typique de ce que disent parfois (souvent ?) les physiciens : ils énoncent une proportionnalité exacte (relation (*)) entre les deux accroissements de la fonction et de la variable, sous la réserve que Δx soit « assez petit ». La relation (*) de 4 a entraîné de nombreuses protestations d'enseignants de mathématiques, pour qui une telle proportionnalité locale exacte implique que le phénomène étudié est globalement proportionnel (voir [2]).

L'énoncé 3.2° est plus nuancé : on y énonce une proportionnalité approximative de Δf à Δx, qu'on écrit souvent $\Delta f \approx K\Delta x$, le coefficient K dépendant explicitement de x et de f(x). Dans 3.2°, on a, si d(x) est le débit à l'abscisse x de la canalisation : $\Delta d \approx -k2\pi r\, d(x)\, \Delta x$; dans 4 on pourrait écrire (*) sous la forme $\Delta N \approx -\lambda N(t)\Delta t$.

Reste à savoir ce que signifie précisément le signe $\approx$ ainsi utilisé. Les physiciens mettent en avant l'idée d'approximation, mais, dans ce type de modélisation, ils restent dans le flou quant au type d'approximation dont il s'agit, c'est-à-dire quant à la nature de l'erreur commise. Ce point est très délicat pour les élèves, et encore pour les étudiants à l'université (voir [1], [3]).

Il s'agit certes de dire que l'erreur commise en remplaçant Δf par $K\Delta x$ tend vers 0 avec Δx, mais pas n'importe quelle erreur : il s'agit de l' erreur relative par rapport à Δx : l'erreur absolue $\Delta f - K\Delta x$ doit être négligeable devant Δx. En effet, clairement Δf et $K\Delta x$ tendent tous deux vers 0 avec Δx, donc dire que leur différence (l'erreur absolue) tend aussi vers 0 n'apporte aucune information !

La négligeabilité de l'erreur absolue devant Δx est l'information supplémentaire qui va permettre de dire que la forme d'une loi locale $\Delta f = K(x, f(x))\Delta x + o(\Delta x)$ signifie très précisément que la fonction f est dérivable en x et que sa dérivée a pour valeur K(x,f(x)). Et par conséquent que la fonction f inconnue doit vérifier l'équation différentielle $y' = K(x, y)$.

La PPAD consiste donc à essayer d'évaluer Δf quand on accroît x de Δx, en admettant en fait que le terme du premier ordre en Δx donné par un raisonnement physique est correct. Ce raisonnement consiste en général à utiliser ou supposer une loi physique dans une version locale. Implicitement, la relation approchée obtenue est supposée « exacte au second ordre près », alors qu'un tel fait est difficile à prouver directement sans utiliser le résultat qu'on cherche.

Le problème de l'évaluation de l'erreur dans la PPAD est encore plus compliqué lorsque la relation locale est obtenue à partir d'une expérimentation physique. C'est particulièrement le cas dans l'énoncé 4 : outre qu'on ne dit rien de la précision des mesures, il s'y ajoute la difficulte du passage d'une situation microscopique et probabiliste à une situation macroscopique et déterministe : les intervalles de temps sur lesquels on fait des mesures doivent être assez grands pour qu'on obtienne des moyennes, mais assez petits pour que le mot « local » ou « différentiel » ait un sens. Il est clair que les enseignants de mathématiques n'ont aucun moyen d'évaluer les erreurs commises dans ce contexte.

La PPAD demande l'apprentissage d'un « métier de physicien modélisateur » qui semble dépasser le niveau de terminale, et s'appuie sur une bonne technique du calcul différentiel. Elle permet alors de « découvrir facilement » des lois physiques par MED. Mais la PPAD s'apprend en général, en physique, en deuxième année d'université ou de classes préparatoires, et peu d'étudiants le dominent à ce niveau. Pour plus de détails concernant la comparaison des points de vue physique et mathématique, voir [8].

Il paraît donc plus raisonnable, en ce qui concerne la contribution de l'enseignement des mathématiques à cette question de la MED, de n'aborder que des problèmes ne nécessitant pas d'expérimentation physique. Il faut alors préciser les conditions sous lesquelles les relations locales obtenues vont bien signifier une dérivabilité de la fonction f cherchée.

Il s'agit donc d'institutionaliser une procédure mathématique de l'accroissement différentiel (PMAD) où l'accent sera mis sur les moyens de mettre en évidence le caractère négligeable devant

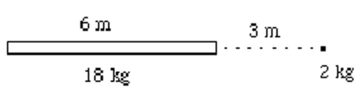
Δx de l'erreur absolue commise, ou au moins de prouver que le rapport $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ a bien la limite espérée quand Δx tend vers 0.

L'énoncé 5 est à cet égard instructif : il ne fait appel à aucune loi physique, ce qui fait qu'un raisonnement mathématique est nécessaire pour la MED. L'idée est de partir de l'hypothèse de la décroissance de la fonction cherchée S(t), quantité de sel à l'instant t (physique du bon sens !). On peut alors en déduire que S est continue, l'encadrer entre S(t) + ε et S(t) – ε sur un petit intervalle Δt, et en déduire une majoration de l'erreur : $|\Delta S - S(t)\,(v/V)\,\Delta t\,| \leq \varepsilon\,(v/V)|\Delta t\,|$, ce qui prouve bien la négligeabilité de l'erreur absolue devant Δt. Une autre solution est d'encadrer S(u), pour u variant dans [t, t+Δt], entre S(t) et S(t+Δt). La continuité de S permet alors de montrer, par encadrement, que le rapport $\Delta S/\Delta t$ tend, quand Δx tend vers 0, vers - (v/V)S(t) (on a noté V le volume du bassin et v le débit de l'arrivée et de l'écoulement du mélange).

Cette méthode est générale dans la PMAD : on utilise un argument de monotonie et/ou de continuité, permettant d'écrire des encadrements ou des majorations, qui seront parfois explicites, et parfois, soit avec un ε non précisé (mais arbitraire), soit en utilisant le maximum M et le minimum m d'une fonction sur l'intervalle [x, x+Δx] (la continuité de cette fonction impliquant que M-m tend vers 0 avec Δx).

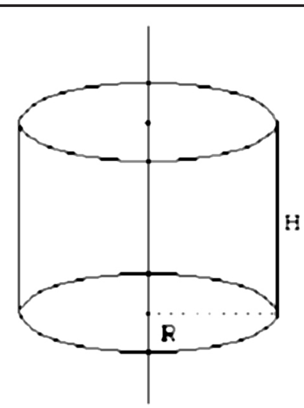
I.3. Situations de mesure d'une grandeur par une intégrale

$\boxed{6}$ Force d'attraction gravitationnelle d'un barreau ([7])

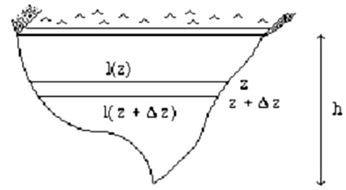
	On rappelle que la force d'attraction gravitationnelle exercée par une masse ponctuelle m' sur une masse ponctuelle m située à une distance r de la première est dirigée de m vers m' et a pour intensité $F = G\,\dfrac{mm'}{r^2}$.

On considère un fin barreau de longueur 6 m, homogène, de masse 18 kg, et, située dans son prolongement à 3 m, une masse ponctuelle de 2 kg. Quelle est la force d'attraction gravitationnelle exercée par le barreau sur la masse ponctuelle ?

$\boxed{7}$ Moment d'inertie d'un cylindre de révolution homogène par rapport à son axe.

Un cylindre de révolution de rayon R et hauteur H a une masse volumique r. Calculer son moment d'inertie par rapport à son axe de révolution. On rappelle qu'une masse ponctuelle m située à une distance d d'un axe a pour moment d'inertie par rapport à cet axe md^2. On pourra étudier la fonction r$\rightarrow$I(r), moment d'inertie de la portion du cylindre formée des points à une distance de l'axe au plus r.	

$\boxed{8}$ Force exercée par la pression de l'eau sur un barrage plan.

Un barrage vertical plan a la forme dessinée ci-contre, où la fonction $z \to l(z)$ est supposée continue sur $[0, h]$. On rappelle que la pression p à la profondeur z est $\rho g z$, où ρ est la masse volumique de l'eau et g l'accélération de la pesanteur. Déterminer la force totale exercée par la pression de l'eau sur le barrage.	

1.4 Analyse des problèmes de mesure d'une grandeur par intégrale

Il y a deux manières d'approcher le problème de la mesure d'une grandeur. La plus intéressante pour la constitution du sens de l'intégrale est la procédure intégrale, telle qu'on peut la trouver exposée dans [9] par Marc Legrand : si on veut attacher un nombre $I(\Omega,f)$ qui mesure une grandeur attachée à la donnée d'une fonction f sur un domaine Ω, il s'agit de découper, encadrer, sommer, passer à la limite. C'est la problématique de l'approche par l'intégrale des fonctions étagées. Mais cela nous semble dépasser le niveau de terminale, mis à part quelques utilisations de sommes de Darboux dans des cas simples de calculs d'aires à la manière d'Archimède ou de Cavalieri, ou en vue d'évaluations numériques (voir [5] et [6]).

Il est préférable de se centrer sur la procédure dérivée-primitive, qui va relever aussi de la PMAD (voir [6], ch. 7). Il s'agit de mesure de grandeurs dans des cas où on va pouvoir décrire la situation au moyen d'une seule variable. C'est le cas des trois problèmes proposés.

Le problème 6, qui a donné lieu à une excellente situation fondamentale pour la procédure intégrale (voir [6], [9]), est adapté aussi à la mise en évidence de la procédure dérivée-primitive avec utilisation de la PMAD. Si on note x l'abscisse d'un point de la barre comptée à partir de la masse ponctuelle, on désigne par F(x) la force exercée sur celle-ci par la portion de la barre située entre les points d'abscisses 3 et x. On peut facilement encadrer ΔF, contribution des points de la barre dans l'intervalle $[x, x+\Delta x]$: $G \times 2\ (18/6)\ \Delta x/(x+\Delta x)^2 \leq \Delta F \leq G \times 2\ (18/6)\ (\Delta x/x^2)$. En passant à la limite quand Δx tend vers 0 on obtient la dérivée de F : $F'(x) = 6G/x^2$). Par suite la force totale est la primitive de cette fonction prise entre $x = 3$ et $x = 9$.

La symétrie de révolution des données de l'énoncé 7 permet de proposer directement la fonction I(r) à laquelle appliquer la PMAD, en évaluant $I(r+\Delta r) - I(r)$. Là encore, un argument de monotonie en fonction de r permet un encadrement qui va donner la dérivée I'(r).

L'énoncé 8 est plus intéressant : le caractère général, non explicite, de la fonction l(z) oblige à utiliser un argument abstrait de continuité. On peut, soit encadrer les valeurs de l(u) entre $l(z)+\varepsilon$ et $l(z)-\varepsilon$ pour u dans $[z, z+\Delta z]$, soit utiliser les maximum et minimum de la fonction l sur cet intervalle. Le même type de situation serait fourni par la mesure du volume d'un solide de révolution à méridienne r(z) continue (voir [6]).

En définitive, on voit que c'est bien la PMAD qui s'applique pour la MGI dans le cas de la procédure dérivée-primitive, avec les mêmes méthodes, selon les cas, de négligeabilité, encadrement, continuité, passage à la limite, que pour la MED.

2. Quelques propositions didactiques

Nous pensons que les situations brièvement analysées ci-dessus peuvent s'agencer en une ingénierie dont l'objectif serait double. Il s'agirait, d'une part, de faire comprendre et assimiler la PMAD et les manières variées de la mettre en œuvre, de façon à effectivement coordonner les points de vue physique et mathématique sur la MED et la MGI. Ce serait là l'objectif interdisciplinaire appelé par les programmes, mais réalisé du point de vue mathématique.

Il s'agirait, de l'autre, de valoriser certains aspects de l'analyse complètement minorés dans la pratique des programmes : la notion de négligeabilité et son lien avec le concept de dérivée (en rapport avec la notion d'erreur relative dans la MED), la pratique des encadrements et majorations, une meilleure conception de la notion de continuité (y compris l'usage d'un e arbitrairement petit), l'usage de paramètres permettant de faire varier les objets soumis à l'étude.

Il est clair que ce deuxième objectif ne peut être atteint uniquement par le biais de situations de MED ou MGI. Il y faudra un travail spécifiquement mathématique (sans doute à démarrer dès la classe de première). Mais le travail sur des problèmes de physique tels ceux proposés ici peut aider à donner du sens, voire des motivations, à ces aspects techniques mais essentiels de l'analyse.

Dans cette optique, on peut détailler un mode de travail possible sur la situation de l'énoncé 5. Travaillé en petits groupes, il a été testé à plusieurs niveaux de la première année d'université à la thèse. Chaque fois, la première procédure qui apparaît est la discrétisation du problème : les étudiants raisonnent par étapes d'une minute, pendant laquelle ils supposent la quantité de sel constante, et obtiennent à la fin $10(0{,}9)^{60}$.

Les étudiants sont conscients du caractère approché du résultat, et lorsqu'on leur demande de tracer le graphe de la fonction S(t) qu'ils obtiennent, ils vont constater que l'hypothèse faite est auto-contradictoire : elle conduit à la fois à une fonction discontinue constante par morceaux et à une fonction continue affine par morceaux. L'idée de diminuer la durée des étapes pour diminuer les erreurs leur apparaît naturelle, mais elle n'est productive que si, « pour y voir plus clair «, on passe du cadre numérique (100 l, 10 l/mn,…) au cadre symbolique (volume V, débits v, sel initial S_0, durée t, n étapes). On obtient alors $S_0(1 - (v/V)t/n)^n$, où n devient de plus en plus grand. On voit ainsi apparaître une « méthode d'Euler physique », et l'idée de la fonction qui serait la limite, quand n tend vers l'infini, de l'expression obtenue. En terminale, ce passage à la limite n'est pas directement accessible.

Le recentrage de la situation sur la PMAD peut alors se motiver par la recherche explicite de l'ordre de grandeur de l'erreur commise dans chaque étape : c'est le raisonnement exposé en I.3.2. qui devrait alors apparaître et déboucher sur l'équation différentielle $S' = -(v/V)\,S$.

Pour plus de détails sur cette situation, voir [7].

L'approche que nous avons proposée suppose une certaine rupture avec le fonctionnement dominant des programmes actuels. Mais peut-on vraiment faire de façon profitable de la physique en classe de mathématiques sans s'en donner les moyens mathématiques ? Il y a là une insuffisance dans les objectifs actuels de l'enseignement de terminale scientifique, et à moins de la surmonter, il y a fort à parier que la volonté de liaison entre les disciplines restera un vœu pieux.

Références

[1] M. Artigue, *Procédures différentielles dans la mise en équation de problèmes*, Ann. de Didactique et de Sciences Cognitives, Strasbourg, vol 2, 1989, 173-190.

[2] R. Noirfalise, *Modélisation et équations différentielles en TS : utilisation d'un modèle praxéologique pour poser des questions didactiques*, Petit x 66, 6-17, 2004.

[3] *Procédures différentielles dans les enseignements de mathématiques et de physique au niveau du premier cycle universitaire*, Rapport du GRECO du CNRS : « Didactique et acquisition des connaissances scientifiques », groupe mathématiques et physique-enseignement supérieur ; document IREM Paris 7 et LDPES, 1989.

[4] *Radioactivité*, document interdisciplinaire d'accompagnement des programmes de terminale S.

[5]. Robert A. et Rogalski M., *Problèmes d'introduction et autres problèmes de recherche au lycée*, Repères-IREM, 54, janvier 2004, p. 77-103.

[6] Rogalski M. et all., *Carrefours entre analyse algèbre géométrie*, Ellipses, 2001.

[7] Rogalski M., *Mise en équation différentielle et mesure des grandeurs par une intégrale, en terminale scientifique : un point de vue mathématique sur la collaboration avec la physique*, Repères IREM n° 64, juillet 2006.

[8] Rogalski M., *Le rôle des mathématiques dans la mise en équation différentielle en physique*, atelier au congrès 2006 de l'AMQ à Sherbrooke, à paraître.

[9] *Un changement de point de vue sur l'enseignement de l'intégrale, L'interdisciplinarité, et Annexe*, dans « Enseigner autrement les mathématiques en Deug A première année », brochure de la Commission Inter-IREM université, 1990.

Pour joindre l'auteur

Marc Rogalski
Laboratoire Paul Painlevé, Université de Lille 1 et CNRS
Adresse postale : 38 rue Bezout 75014 Paris (France)
Courriel : mro@ccr.jussieu.fr