

Les implications sur le développement de curriculums mathématiques d' une recherche sur l' enseignement du signe = à des enfants de première année du primaire

Laurent Theis¹

De nombreux enfants du début du primaire ne comprennent pas le signe =, ce qui a des répercussions importantes sur leur apprentissage des opérations de base. Nous allons montrer, à l'aide de deux exemples, que l'enseignement du signe = est largement absent des curriculums scolaires et des manuels de mathématiques. Nous présentons les implications d'une expérimentation didactique menée auprès d'enfants de première année d'études et ses conséquences sur le développement de curriculums mathématiques : est-ce que les enfants sont en mesure de comprendre le signe = dès la première année du primaire et quelles activités favorisent cette compréhension ?

Introduction

Dans le cadre des premiers apprentissages des mathématiques, les relations d'équivalence et d'égalité sont des éléments clés autour desquels les élèves articulent différentes constructions à propos des premiers apprentissages numériques. En apprenant les concepts numériques de base² en première année de l'école primaire, les élèves sont rapidement confrontés à des comparaisons de collections et d'équipotence de collections, donc intuitivement à des notions d'égalité et d'équivalence. Un peu plus tard, en découvrant les premières opérations arithmétiques³, l'équivalence et l'égalité jouent de nouveau un rôle important, notamment dans l'écriture formelle de ces opérations. Ainsi, les équations qui représentent ces opérations s'articulent autour de la relation d'égalité, car, pour qu'elles soient valables, il faut que la même quantité soit représentée des deux côtés du signe =. Ce principe est d'une importance primordiale, puisqu'il

¹ Chargé de cours et assistant de recherche - Université de Sherbrooke (Québec)
23, chemin de la Loutre
Orford (Québec)
Canada J1X 6T6
laurent.theis@hermes.usherb.ca

² Il s'agit ici de concepts comme la conservation quantitative, la conservation qualitative ou encore la sériation.

³ Habituellement, les premières opérations sont découvertes à travers les premières structures additives. Celles-ci nécessitent la maîtrise, notamment de l'équivalence quantitative et des opérations ensemblistes telle la réunion d'ensembles disjoints.

s'applique à tous les domaines mathématiques, que ce soit en arithmétique ou en algèbre. L'élève y sera donc confronté tout au long de sa carrière scolaire et ce, même jusqu'à l'université.

Or, de nombreux élèves ont des difficultés à comprendre le signe =. Une grande majorité de ces enfants considère ce symbole, non pas comme un indicateur d'une relation d'égalité et d'équivalence, mais comme un opérateur après lequel il faut écrire une réponse à l'opération qui le précède. Notre communication sera divisée en quatre sections, qui seront explicitées par la suite :

- 1) La description de la nature de l'erreur des enfants et ses implications,
- 2) L'absence de l'enseignement du signe = dans les curriculums,
- 3) La description des résultats de notre recherche doctorale concernant l'enseignement du signe = à des enfants de première année du primaire,
- 4) Les implications découlant de notre recherche sur le développement de curriculums mathématiques.

1) Une compréhension déficiente du signe =

Différentes recherches récentes (entre autres, Saenz-Ludlow et Walgamuth, 1998 ; Vance, 1992 ; Carpenter et Levi, 2000) ont réussi à démontrer que de nombreux enfants du primaire considèrent le signe =, non pas comme un indicateur d'une relation d'égalité, mais comme une incitation à fournir une réponse. Dans le cadre de notre recherche doctorale, nous avons pu corroborer ce résultat : tous les enfants de première année du primaire avec lesquels nous avons travaillé prétendaient au départ que le signe = sert à «séparer les chiffres» ou à indiquer «qu'il faut écrire une réponse à un calcul». Ces conceptions erronées du signe = ont des répercussions importantes, dès que les enfants sont amenés à travailler sur les opérations de base. Si ces enfants n'ont pas de difficultés à évaluer des égalités de type " $a + b = c$ " ou de compléter des équations de type " $a + b = \underline{\quad}$ ", ils ne sont généralement pas en mesure de travailler sur des égalités et des équations de structure différente. Dans notre recherche doctorale, nous avons pu constater que les enfants qui entretiennent une conception comme opérateur du signe = ont de la difficulté en particulier à évaluer des égalités de type " $a = b + c$ ". Deux types de réactions ont pu être

observés. Un certain nombre d'enfants ont refusé ces égalités en se basant sur le fait que, selon eux, le signe = «ne se trouve pas à la bonne place », tandis que d'autres ont inversé leur sens de lecture, pour lire l'égalité de droite à gauche.

En outre, les difficultés de ces enfants s'accroissent face à d'autres types d'égalités. Ainsi, ils étaient généralement incapables d'évaluer des égalités de type " $a + b = c + d$ " ou de compléter des équations de structure similaire. Ces difficultés sont d'autant plus inquiétantes qu'une conception comme opérateur du signe = ne caractérise pas uniquement les enfants du début du primaire, mais que cette conception erronée est souvent maintenue jusqu'à la fin du primaire, voire le début du secondaire (Bodin et Capponi, 1996 ; Mevarech et Yitschak, 1983) et constitue notamment un des principaux obstacles lors de l'apprentissage de l'algèbre.

2) Absence de l'enseignement du signe = des curriculums et des manuels

Même si la compréhension du signe = est d'une importance primordiale pour les premiers apprentissages mathématiques au primaire, ce même signe n'est souvent pas enseigné explicitement au primaire. Dans le cadre de nos recherches doctorales, nous avons analysé deux curriculums scolaires, celui du Québec et celui du Luxembourg et les manuels de mathématiques correspondants. Il ressort clairement de ces analyses que ce qui y est consacré au signe = n'est pas à la hauteur de son importance. Ainsi, tant au Québec qu'au Luxembourg, les programmes d'études mentionnent l'enseignement du signe = uniquement dans le contexte de comparaisons de collections, dans des activités où les enfants doivent décider si deux ensembles sont équivalents ou non.

En analysant les manuels de première et deuxième année en vigueur actuellement au Luxembourg et au Québec, on peut constater qu'une plus grande importance est accordée à l'enseignement du signe = dans certains ouvrages, mais qu'en général, cet enseignement est encore très lacunaire. Dans les manuels luxembourgeois par exemple, on traite la signification du signe = uniquement dans le contexte de comparaisons de collections, et conjointement avec les signes > et <. De même, la grande majorité des équations que les enfants ont à travailler

correspondent à une structure " $a + b = _$ ". Dans les manuels québécois analysés, on retrouve une plus grande diversité d'équations dans la plupart des manuels. Cependant, pour certains auteurs, l'explication du signe $=$ est escamotée. Pour d'autres, elle est carrément fautive. Citons à titre d'exemple le manuel *Intersection*, dans lequel c'est une conception du signe $=$ comme opérateur qui est transmise : Lebel (2001) explique ce symbole de la manière suivante aux enfants du premier cycle : « Le signe égal ($=$) ne sert pas toujours à effectuer un algorithme ou à donner une réponse mathématique. Il peut aussi servir à donner une information » (p. 92).

3) Description de nos résultats de recherche

Dans la présente recherche, dont l'objectif principal était de décrire le processus de compréhension du signe $=$ auprès d'élèves de première année du primaire, nous avons développé une séquence d'enseignement de ce symbole qui a été expérimentée auprès de trois enfants de niveaux différents dans le cadre d'une expérimentation didactique. Au début de la collecte de données, 11 enfants d'une classe de première année de la ville de Luxembourg ont été soumis à un prétest, afin d'évaluer leur compréhension du signe $=$ et de sélectionner trois participants ayant des difficultés à comprendre le signe $=$. Par la suite, un enseignement individuel du signe $=$ a été dispensé à ces trois enfants et un post-test a permis d'évaluer la compréhension des enfants quelques jours après la fin de l'expérimentation.

Plusieurs principes ont servi à l'élaboration des activités d'enseignement. Tout d'abord, les activités s'appuient sur une analyse conceptuelle des relations d'équivalence et d'égalité à l'aide du modèle de Bergeron et Herscovics (1988) déjà utilisé dans de nombreuses recherches semblables. Ensuite, lors de l'élaboration des activités d'enseignement, nous avons essayé d'établir un lien entre l'écriture mathématique et la représentation concrète. Finalement, nous avons travaillé avec les enfants à la fois l'évaluation d'égalités et la détermination d'une inconnue dans une équation. Un post-test, proposant des tâches de nature similaire à celles du prétest, nous a permis de vérifier l'étendue des apprentissages réalisés par les trois participants.

À la fin de notre séquence d'enseignement, les trois enfants ont progressé dans leur compréhension du signe $=$, dont deux enfants de manière significative. Malgré ces progrès,

l'apprentissage du signe = constitue un puissant obstacle cognitif : nous avons pu constater chez tous les enfants, à des degrés différents, des tendances à revenir vers une conception du signe = comme opérateur, principalement dans des situations nouvelles. De même, deux des trois enfants n'ont déjà plus obtenu les mêmes performances dans le post-test que vers la fin de la séquence d'enseignement et ce, quelques jours seulement après la fin de l'enseignement du signe =.

Nous avons également pu dégager l'importance d'une compréhension procédurale bien développée pour pouvoir cheminer de manière significative et durable dans l'apprentissage du signe =. Les enfants en question disposaient donc d'une grande diversité de stratégies pour établir leur constat d'équivalence ou d'égalité. Deux indices nous amènent à ce constat. D'abord, l'enfant dont la compréhension procédurale de l'équivalence et de l'égalité était faible n'a pas réussi à construire une compréhension solide du signe = comme indicateur de relation. Ensuite, c'est la diversité des stratégies additives employées par les autres enfants qui leur a permis de progresser dans leur compréhension du signe =.

4) Implications de notre recherche sur le développement de curriculums mathématiques

Notre recherche doctorale a plusieurs implications sur le développement de curriculums mathématiques. Tout d'abord, un premier constat s'impose : L'enseignement que les enfants, avec lesquels nous avons travaillé ont reçu en classe sur les nombres et les structures additives, ne leur a pas permis de développer une compréhension du signe = comme indicateur d'une relation d'équivalence. En effet, tous les enfants, avec lesquels nous avons effectué le prétest, c'est-à-dire l'ensemble des 11 enfants de la classe, considèrent le signe = comme opérateur. Malgré de légères nuances, nous pouvons affirmer que l'erreur est généralisée. En l'absence d'un enseignement explicite, les enfants ne sont donc pas en mesure de comprendre le signe =.

Deuxièmement, cette conviction que le signe = doit être suivi d'une réponse à une question qui le précède reste très fortement ancrée chez les enfants avec lesquels nous avons travaillé. Trois éléments nous ont amené à établir ce constat. D'abord, ces enfants ont beaucoup de difficultés à accepter une autre signification du signe = au début de la séquence

d'apprentissage. Ensuite, les enfants ont tendance à retourner vers leur ancienne conception du signe = tout au long de la séquence d'enseignement. Cette tendance est présente, à divers degrés, chez tous les participants, et ne s'estompe que graduellement chez les deux plus forts, tandis qu'elle persiste chez l'élève la plus faible. Finalement, les apprentissages réalisés à propos du signe = sont très fragiles. Ainsi, nous avons constaté lors du post-test, une dizaine de jours à peine après la fin de la séquence d'enseignement, que deux des trois enfants avec lesquels nous avons travaillé, le plus fort et la plus faible, ont déjà commencé à régresser vers leur ancienne conception du signe =.

5) Conclusion

Suite à notre recherche, nous nous questionnons sur le report de l'introduction du signe =. Actuellement, le signe = est introduit en première année et au cours des premiers mois de l'école primaire au Luxembourg, dans le cadre de deux types d'égalités. Il est fréquemment utilisé dans des égalités de structure " $a + b = c$ ", et, plus rarement, présenté dans le contexte d'égalités de structure " $a = a$ ". Or, pour nous, la question essentielle est de savoir si la compréhension procédurale du nombre, de l'addition et des relations d'équivalence et d'égalité des enfants est suffisamment développée au moment de l'introduction du signe =. Question d'autant plus justifiée qu'il s'est dégagé de notre recherche que c'est une compréhension procédurale adéquate qui distingue les enfants qui sont arrivés à modifier leur conception du signe = de ceux qui n'ont pas réussi. S'il se confirme que la compréhension procédurale est prérequis, la plupart des enfants ne seraient pas encore en mesure, au début de la première année, de développer une compréhension adéquate du signe =. Ne serait-il donc pas plus logique de reporter l'introduction du signe = dans le temps, afin de donner aux enfants la chance de développer davantage leur compréhension procédurale avant d'être confrontés à une formalisation avancée ?

Bibliographie

Bergeron, J. et Herscovics, N. (1988). La compréhension de la quantité discrète chez les enfants de maternelle. *Actes de la Douzième Rencontre du International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Veszprém, Hongrie.

Bodin, A. et Capponi, B. (1996). Junior Secondary School Practices. In A.J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick et C. Laborde (dir.), *International Handbook of Mathematics Education* (p.565-614). Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

Carpenter, T., et Levi, L. (2000). *Developing Conceptions of Algebraic Reasoning in the Primary Grades*. (Research Report 00-2). Madison, WI : National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Lebel, C. et Pagé, L. (2001). *Intersection. Mathématique 1^{er} cycle, Manuel de l'élève C*. Montréal: Lidec.

Mevarech, Z. et Yitschak, D. (1983). Student's Misconceptions of the Equivalence Relationship. In Hershkowitz, R. (dir.), *Proceedings of the Seventh International Conference of the Psychology of Mathematics Education* (p. 313-318). Rehovot, Israel : Weizmann Institute of Science.

Saenz-Ludlow, A. et Walgamuth, C. (1998). Third Graders' Interpretation of Equality and the Equal Symbol. *Educational Studies in Mathematics*, 35(2), 153-187.

Vance, J. (1992). Understanding Equivalence : A Number by Any Other Name. *School Science and Mathematics*, 18(4), 263-266.