L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés

Actes du colloque emf 2006

Dualité de la notion de probabilité et enseignement de la statistique au Lycée en France

Pablo Carranza et Alain Kuzniak, *Equipe Didirem, Université Paris VII, France*

Résumé

Dans cet article, nous nous intéressons à la présence cachée de la dualité de la notion de probabilité dans les manuels scolaires français de la dernière décennie. Dans un premier temps nous présentons rapidement les deux paradigmes autour desquels sont construites les deux interprétations classiques de la notion de probabilité, l'approche « fréquentiste », et l'approche bayésienne prenant en compte le « degré de certitude ». Nous envisageons ensuite la présence éventuelle de cette dualité dans les manuels français. Nous indiquons pour finir quelles pistes de travail sont les nôtres actuellement.

I. Introduction

À cause de son rôle dans la modélisation de l'incertain, la notion de probabilité occupe une place centrale en statistique. Des études épistémologiques montrent que dès ses origines, la notion de probabilité s'est développée d'une manière duale : d'une part, en effet, elle représente la tendance des apparitions d'un événement sur le long terme, et de l'autre, elle modélise le degré de certitude qu'un individu accorde à une hypothèse donnée en fonction des résultats déjà obtenus. Ces interprétations entraînent deux grandes approches relevant de deux paradigmes distincts. La probabilité associée à la stabilisation des fréquences détermine ce que nous dénommerons le « Modèle fréquentiste », tandis que la notion de degré de crédibilité constitue le « Modèle Bayésien ».

Des auteurs comme Hacking [2002] ou Shafer [1990, 1992] affirment que cette dualité est intrinsèque à la notion même de probabilité, et que c'est le contexte des applications qui détermine le sens utilisé. Néanmoins, la conscience de cette dualité devient fondamentale lorsque l'on réalise une inférence, son absence conduit à interprétation erronée des tests d'hypothèses avec les intervalles de confiance « classiques » (Batanero et Godino, 2001 ; Jaynes, 1984 ; Lecoutre, 2005 ; Régnier et Oriol, 2001).

Dans le système éducatif secondaire français, l'introduction voulue par les programmes de la probabilité a évolué. Dans les années 80 et 90, le sujet était abordé à partir de l'axiomatique de Kolmogorov sur un univers fini en associant l'équiprobabilité aux événements élémentaires. Actuellement, la probabilité est plutôt introduite à partir de la stabilisation des fréquences, l'équiprobabilité sert généralement à fixer la valeur attendue pour cette limite. La référence au degré de certitude est inexistante dans l'enseignement secondaire et semble réservée à l'enseignement supérieur.

Cette façon de fractionner l'enseignement de la notion de probabilité pose selon nous de nombreuses questions en didactique de la statistique. Dans cette communication, nous allons aborder plus particulièrement l'hypothèse suivante :

La conception de l'enseignement des statistiques en France est basée sur une approche qui ignore la dualité de la notion de probabilité. Mais, cette séparation est illusoire : la notion de degré de certitude existe potentiellement dans les activités proposées aux élèves mais elle est étouffée par l'approche didactique choisie.

Pour déterminer la place cachée du modèle Bayésien dans l'institution, nous avons entrepris une étude de la transposition didactique effectuée dans les manuels des lycées français des quinze dernières années en nous focalisant sur deux axes : le premier porte sur la présence, implicite ou explicite, de la dualité de la probabilité et le second étudie le traitement donné à quelques outils liés à la logique inductive dans les cas où la notion Bayésienne de la probabilité est présente.

L'étude de notre hypothèse passe aussi par l'observation des pratiques enseignantes autour de la statistique et des conceptions des élèves sur le sujet de façon à mieux connaître les espaces de travail personnels des professeurs et des élèves.

Dans cette communication, après avoir précisé la notion de dualité que nous utilisons, nous regardons les notions de probabilité mises en jeu dans les activités proposées dans des manuels des années 1998 jusqu'à 2005 pour les classes de l'enseignement secondaire dont le programme comprend l'introduction de la probabilité. Les manuels correspondent aux sections S et ES[1] pour des classes de Première et Terminale[2]. Lors de notre présentation orale, nous espérons pouvoir apporter des éléments complémentaires sur la pratique effective de cet enseignement en classe.

2. La dualité de la notion de probabilité

2.1 Le modèle « fréquentiste »

Dans cette approche, la notion de probabilité est associée à la stabilisation des fréquences de l'occurrence d'un certain événement lorsque le nombre d'essais augmente et tend vers l'infini : le théorème de Bernoulli formalise cette convergence et la probabilité de l'événement est assimilée à la limite de la proportion d'occurrences de cet événement. Dans cette conception, les expériences étudiées sont supposées reproductibles sous les mêmes conditions et cela même un nombre infini de fois. Il s'agit là de deux affirmations fortes qui fondent le modèle et sont en partie contradictoires avec le sens commun des élèves.

D'autre part, la probabilité acquière ici une valeur indépendante de l'observateur et elle est associée à l'événement, cette valeur est, implicitement ou explicitement, unique et invariante. On ne peut que l'estimer par approximation à partir des fréquences réelles obtenues après la réalisation de n épreuves réalisées dans les mêmes conditions (Rényi, 1970).

Pour des auteurs comme Von Mises, la probabilité est considérée comme une caractéristique d'un ensemble déterminé et l'expression « class probability » est utilisée pour décrire une classe statique. Pour eux, la probabilité n'a de sens que relative à un « collectif » (v Mises 1928-1966) qu'on peut voir comme une suite d'événements pouvant éventuellement se produire une infinité de fois.

1 Scientifique et économie et Sciences Sociales

2 Élèves âgées de 16 à 17 ans

We know or assume to know, with regard to the problem concerned, everything about the behaviour of a whole class of events or phenomena ; but about the actual singular events or phenomena we know nothing but that they are elements of this class. We know, for instance, that there are ninety tickets in a lottery and that five of them will be drawn. Thus we know all about the behaviour of the whole class of tickets. But with regard to the singular tickets we do not know anything but that they are elements of this class of tickets. (page 108)

Von Mises propose cet exemple pour faire bien comprendre son interprétation :

We have a complete table of mortality for a definite period of the past in a definite area. If we assume that with regard to mortality no changes will occur, we may say that we know everything about the mortality of the whole population in question. […] *They do not lead to results that would tell us anything about the actual singular events. And, of course, they do not add anything to our knowledge concerning the behaviour of the whole class, as this knowledge was already perfect – or was considered perfect – at the very outset of our consideration of the matter.*

Dans ce cas, la probabilité d'un événement individuel, comme la probabilité de décès d'une personne, ne peut avoir de sens « has no meaning at all for us ».

Dans le modèle fréquentiste, toute notion d'incertitude autre que celle qui joue sur l'arrivée d'un événement indéfiniment reproductible et qui peut être vérifiée empiriquement, n'est pas considérée comme relevant du calcul des probabilités (Courgeau, 2004) :

En particulier parler de la probabilité pour qu'une proposition donnée soit vraie n'a aucun sens pour un « objectiviste », car on ne peut parler de la probabilité d'un événement par nature unique […].

Ce modèle radical a subi de nombreuses critiques portant notamment sur son aspect trop théorique pour rendre compte des expériences réelles dans le domaine empirique. Certains, comme Popper [1935-1959] restent fidèles à cette approche tout en introduisant une dimension métaphysique, la probabilité apparaît comme une tendance ou une propension du système, indépendante de l'observateur, que l'accumulation des moyennes des fréquences à un moment donné suffit à déterminer.

2.2 La notion « degré de certitude » et le modèle bayésien

La notion de probabilité s'est également développée avec un autre sens que celui du modèle fréquentiste pour à la fois mieux s'appliquer au domaine empirique et tenir compte du point de vue de l'observateur. Dans ce cas, la probabilité correspond au degré de crédibilité attribuable à une hypothèse ou à une proposition dont on ne peut établir fermement la vérité ou la fausseté. Cet événement est alors considéré comme possible ou probable. La probabilité est alors une mesure du degré de certitude ou de croyance d'un événement ou d'une proposition (D'Agostini, 1995).

Ce qui est pour les fréquentistes une variable aléatoire devient pour les bayesiens une variable incertaine. Le « degré de certitude » ou de « croyance rationnelle » dépend du niveau de la connaissance sur l'événement. Ce niveau est lié à la quantité d'informations disponibles couramment représentée sous la forme d'une probabilité conditionnelle (P(H/D)).

La probabilité n'est donc pas une caractéristique intrinsèque d'un certain événement E (ou d'un objet), elle peut évoluer avec le temps et avec la suite des expériences.

L'approche bayesienne est parfois expliquée en termes de pari. Il s'agit de préciser, mathématiquement, l'idée banale que le degré de probabilité attribué par un individu à une proposition donnée est en relation avec ses dispositions à parier sur l'éventualité de cet événement. Dans cette approche subjectiviste, la probabilité devient alors, une mesure du degré d'intensité de la croyance d'un individu. Elle peut ainsi dépendre de cet individu ce qui montre encore une fois que la propriété n'est plus une propriété intrinsèque d'un événement comme c'était le cas chez les fréquentistes.

Ce modèle probabiliste doit pouvoir s'appuyer sur une mesure mathématique du degré de certitude qui permette une mise à jour de cette mesure lors de l'arrivée de nouvelles informations. La formule de Bayes joue alors un rôle essentiel, c'est elle qui permet de réévaluer la crédibilité de chacune des hypothèses possibles en s'appuyant sur les données déjà obtenues. Cox [1946] et Jaynes [1995], ont formalisé une démonstration de la formule de Bayes pour qu'elle devienne un théorème d'appui dans le raisonnement plausible contournant ainsi le débat sur le raisonnement inductif.

3. La place de la dualité de la probabilité dans les manuels français

3.1 Un exemple d'approche « fréquentiste »

Curieusement et en contradiction avec les injonctions institutionnelles, les exercices qui proposent une approche de type fréquentiste sont plutôt rares dans le corpus que nous avons regardé. Celui que nous proposons établit un lien entre la stabilisation de fréquences et des probabilités a priori basées sur l'hypothèse d'équipossibilité.

> *On lance deux dés identiques à six faces. Arthur propose le modèle suivant pour cette épreuve* :
>
> > *Il y a 21 issues, chacune d'elles a une probabilité de 1/21.*
>
> *Aglaé propose le modèle suivant pour cette épreuve :*
>
> > *Il y a 36 issues, chacune d'elles a une probabilité de 1/36.*
>
> Ces deux modélisations v*ous semblent-elles valides ? Quelles en sont les hypothèses implicites ? Par quelle procédure peut-on éventuellement valider l'une d'entre elles ?* (exercice 16 page 100 de Première S., Cheymol *et al*., 2001)

En général, les exercices proposent des tâches techniques (Robert, 1998) et ils se restreignent à la détermination par calcul d'une probabilité. Celle-ci étant vue comme une application de l'ensemble des événements possibles dans l'intervalle [0,1]. La probabilité est alors le résultat du dénombrement de l'ensemble de cas possibles et favorables. La construction du sens fréquentiste de la probabilité à partir de ces exercices semble fortement improbable tant le contexte reste purement ensembliste.

3.2 Un exemple sur la notion « degré de certitude »

Paradoxalement, trouver dans les manuels des exemples relevant de l'interprétation Bayésienne de la probabilité, s'est avéré plus aisé[3]. En classe de Terminale, les probabilités conditionnelles et la formule de Bayes font partie du programme, créant ainsi des situations naturellement proches de la notion de degré de certitude.

L'exercice suivant (Ferachoglou et Terracher, 1998) classiquement basé sur un test de dépistage de maladie nous semble caractéristique de la place implicite du modèle Bayésien à la fois dans l'approche de la mesure du degré d'incertitude et aussi dans sa dimension subjectiviste particulièrement sensible ici avec l'attribution de prénoms aux malades potentiels.

> *On considère une maladie extrêmement rare qui touche en France une personne sur un million. Un test de dépistage a été mis au point pour diagnostiquer cette maladie et on a établi que :*
>
> · *Quand une personne est malade, le test est positif dans 99 % des cas.*
>
> · *Quand une personne n'est pas malade, le test est négatif dans 99,5 % des cas.*
>
> *1. Bruno, choisi au hasard dans la population française, vient de faire le test relatif à cette maladie et celui-ci s'est avéré positif. Quelle est la probabilité que Bruno soit atteint par la maladie ? Êtes-vous surpris par ce résultat ?* (exercice 1, page 186)

L'exercice pose une question sur la maladie de Bruno, un individu précis et bien déterminé. Il serait sans intérêt de réaliser une expérience aléatoire semblable à un schéma de Bernoulli (Malade ou non) sur Bruno : Bruno a ou n'a pas la maladie. Une possible répétition de tests ne changerait en rien son état de santé. Dans cet exemple, ce que l'on modélise avec la probabilité, c'est le degré de certitude que l'on a sur une propriété du seul Bruno. Suivant Hacking (Hacking et Dufour, 2004) et Shafer (1990) cette probabilité portant sur un patient en particulier est toujours du genre « bayesien ».

Par ailleurs, la probabilité a priori, estimée ici 1/1 000 000, trouve son origine dans la proportion de la population qui a la maladie. L'approche bayesienne n'établit pas des critères précisant comment déterminer cette probabilité a priori (P(M)), mais elle fixe par contre une méthode objective, utilisant la formule de Bayes, pour recalculer les probabilités a posteriori (P(M/T+)) en fonction des résultats du test.

Notons que l'exercice fait interagir les deux notions de probabilité : la « fréquentiste » se manifeste dans les probabilités P(T+/M) et P(T-/non M) et la « bayesienne » par les probabilités a priori P(M) et a posteriori P(M/T+). De nouveaux examens sur Bruno permettraient de voir l'évolution de la certitude que l'on a sur son état de santé et de savoir comment cette évolution est modélisée sur la forme de probabilités. Malheureusement, nous n'avons pas observé ce processus d'itération qui pourrait contribuer à mieux comprendre l'évolution des probabilités.

Cet exercice, sur un cas relativement simple, donne un exemple d'inférence qui suit le type de raisonnement mis en place en statistique, Jaynes (1995), et qui est en marge des pratiques mathématiques usuelles : « Si A est vrai, alors B devient plus probable est vrai. Comme B est vrai alors,

3 Ce genre d'exercices est aussi présente dans plusieurs sujets de Baccalauréat (i.e. Bac S 2000, Bac S 1997).

A devient plus probable ». Cette voie n'est pas exploitée dans les manuels, et les programmes n'y font aucune référence, privilégiant l'inférence « classique » basée sur une approche fréquentiste.

Conclusion

Les observations réalisées nous ont permis de constater que l'aspect Bayésien se manifestait bien dans certaines situations proposées par les manuels. Cependant, le modèle Bayesien n'apparaît pas explicitement et lorsqu'il y est fait allusion, il semble se réduire à la formule de Bayes sans les notions qui donnent un contexte et un sens à cet algorithme : probabilité a priori, a posteriori, probabilité en tant que degré de crédibilité, etc. Dans des exercices souvent très techniques, les questions visent à donner une série d'indices qui permettent à l'élève de faire les calculs demandés. D'autre part, et plus généralement, faute d'une gestion dans la classe d'expériences réelles, on peut même s'interroger sur la place réelle du modèle fréquentiste dans l'enseignement français : les expériences ne sont souvent qu'évoquées et l'ensemble repose de fait sur un modèle probabiliste qui semble se substituer à la réalité au moins dans l'esprit des professeurs. L'attente semblant différente chez les élèves qui ne paraissent pas convaincus par l'usage de calculatrices et de la simulation à la place par exemple de dés réels. Ce point fait l'objet de nos études en cours car il reste à savoir comment la dualité de la probabilité apparaît en classe et le cas échéant comment elle est gérée par le professeur et les élèves.

Un autre point que nous souhaitons étudier dans le cadre de cette gestion en classe de l'enseignement des statistiques concerne la place des raisonnements de type inductif que formalise le modèle Bayésien. Dans ce modèle, la notion de crédibilité couvre un espace non abordé par la logique déductive où seules deux valeurs possibles sont envisageables. La méthode de Bayes introduit un modèle logique qui, comme nous l'avons vu, peut être schématisé comme suit : « Si A est vrai, alors B devient plus probable. Et le fait que B soit vrai entraîne que A devient plus probable ». Une introduction réelle à la pensée statistique doit, selon nous, nécessairement passer par une sensibilisation à ce type de raisonnement. De ce fait, et c'est un autre volet de notre projet, nous envisageons de bâtir en classe de Première une ingénierie statistique qui s'appuiera sur une approche Bayésienne. Mais comme le montrent nos études de manuels et nos premières études des situations de classe, cette approche est loin d'être naturelle dans le système français. Cette introduction d'un mode de raisonnement nouveau se heurte aussi à la pratique usuelle du professeur de mathématiques. Ce dernier s'efforce généralement de développer chez ses élèves une approche logique, dont les critères de validation et de preuve appartiennent à la seule logique hypothético-déductive. Ceci est particulièrement vrai dans la fin de la scolarité secondaire et aux débuts de l'université. Il y a là un possible obstacle didactique à la mise en place de la notion de probabilité propre au modèle Bayésien qui se différencie du raisonnement hypothético-déductif classique mis en œuvre dans le modèle fréquentiel.

L'étude de cet éventuel obstacle didactique passe par l'analyse des conceptions des enseignants et aussi des élèves mais elle peut aussi passer par l'étude de la mise en place effective du modèle Bayésien. C'est l'hypothèse que nous faisons et que nous envisageons d'étudier dans l'avenir.

Références

Barros, J.-M., Bénizeau, P., Bouquet, J., Burgaud, J. et Le Guédart, G. (2002), *Mathématiques-Terminale S* (Transmath) : Nathan.

Batanero, C. et Godino, J. D. (2001). *Analisis de datos y su didactica*. Universidad de Granada.

Brousseau, G. (1998), *Théorie des situations didactiques*, Grenoble : La Pensée Sauvage.

Cheymol, M., Combrade, M., Delors, F., Bonneval, L.-M., Gaud, D., Jussiaume, L., Parneaudeau, J.-M., Terrochaire, R. et Thienard, J.-C. (2001), *Mathématiques Première ES*, Paris : Bréal.

Courgeau. (2004), Probabilité, démographie et sciences sociales. *Mathématiques et sciences humaines*, *167*(3), 27-50.

Cox, R. T. (1946), Probability, Frequency, and Reasonable Expectation. *American Journal of Physics*, *14*, 1-13.

D'Agostini, G. (1995). Probability and measurement uncertainly in physics. In *A bayesian primer notes*. Universitya « La Sapienza » and INFN, Roma Italy.

D'Agostini, G. (2004). From observations to Hypotheses : probabilistic reasoning versus falsificationism and its statistical variations. In *Frontier Objects*, Vulcano, Italie.

de Finetti, b. (1937). La prévision : ses lois logiques, ses sources subjectives. In *Annales de l'I.H.P.*, vol. 7, p. 1-68. Numdam.

Droesbeke, J.-J., Fine, J. et Saporta, G. (2002), *Méthodes bayésiennes en statistique*, Paris : Sfds.

Hacking, I. (1990), *The taming of chance*, Cambridge : Cambridge University Press.

Hacking, I. (2002), *L'émergence de la probabilité* : Seuil.

Hacking, I. et Dufour, M. (2004), *L'ouverture au probable*, Paris : Armand Colin.

Hume, D. (1748), *Enquête sur l'entendement humain* (1993) : Flammarion.

Jaynes, E. (1976), Confidence intervals vs. bayesian intervals. *Fondations of probability theory, statistical inference, and statistical theories of science*, *2*, 175-257.

Jaynes, E. (1984), The intuitive inadequacy of classical statistics. *Epistemologia*, *7*(43), 43-74.

Jaynes, E. (1995), *Probability Theory : The Logic of Science* (2003), St. Louis, U. S. A. : Washington University.

Lecoutre, B. (2005), Et si vous étiez un bayésien qui s'ignore ? *Modulad*, *1*(32), 92-105.

Mises, L. v. (1966), *Human Action : A Treatise on Economics* (3° édition), Chicago : Contemporary Books.

Poincaré, H. (1905), *Sciences et hypothèses* (1952) : Dover.

Popper, K. R. (1959), *The logic of Scientific Discovery* Traduit dans La logique de la découverte scientifique (1982) Payot Paris.

Régnier, J.-C. et Oriol, J.-C. (2001). Fonctionnement didactique de la simulation en statistique. In *Journées de Statistique Lyon 2003* (ed. S. F. d. Statistique). Sfds, Lyon, France.

Rényi, A. (1970), *Foundations of Probability*, San Francisco : Holden-Day.

Robert, A. (1998), Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherche en didactiques des mathématiques*, *18*(2), 139-190.

Schield, M. (1998). Using bayesian strength of bilief to teach classical statistics. In *ICOTS 5*. IASE, Singapore.

Shafer, G. (1990), The unity and diversity of probability. *Statistical Science*, *5*, 435-462.

Shafer, G. (1992), What is probability. *Perspectives on Contemporary Statistics*, *21*, 93-105.

Shafer, G. (1994), The subjective aspects of probability. In (dir.) *Subjective Probability* (p. 53-73). Wiley : George Wright and Peter Ayton.

Tiercelin, C. (1999), *Dictionnaire d'histoire et de philosophie des sciences* (sous la direction de Dominque Lecourt). In P. U. d. France (dir.) (p. 506-511).

Pour joindre les auteurs

Pablo Carranza et Alain Kuzniak
Équipe DIDIREM
Université Paris 7
carranza@math.jussieu.fr
alain.kuzniak@orleans-tours.iufm.fr