# Des compétences terminales en mathématiques

G. Noël, P. Tilleuil, J.-P. Cazzaro et F. Pourbaix

Grenoble, Juillet 2000

## 1 Introduction

Dans plusieurs pays européens, les objectifs de l'enseignement en général, de l'enseignement des mathématiques en particulier, sont repensés et reformulés en termes de **compétences**. Le vocabulaire utilisé peut varier d'un pays à l'autre. Le même contenu est ainsi recouvert par des expressions telles que **compétences clés**, **niveaux de référence** ou d'autres encore.

En Belgique (francophone), on distingue les **socles de compétences** qui constituent des objectifs à atteindre pour les élèves de 14 ans et les **compétences terminales**, à atteindre à la fin de l'enseignement secondaire (18 ans).

Ce courant mettant l'accent sur les compétences prend en quelque sorte la relève d'une tendance qui eut son heure de gloire dans les années septante[1] et qu'on appelait la **pédagogie par objectifs**. Il s'agissait à l'époque essentiellement d'**opérationnaliser** des objectifs à atteindre de façon à faciliter l'**évaluation** des acquis des élèves. Partant du principe que les connaissances sont mises en œuvre à travers des **comportements**, et que seuls ceux-ci sont observables, on entreprit d'élaborer des taxonomies d'objectifs cognitifs adaptées aux disciplines enseignées, [7], et de les assortir d'exemples opérationnels et de moyens d'évaluation.

Très vite il apparut alors que l'opérationnalisation d'un objectif assez général était une entreprise difficile, sinon impossible. A titre d'exemple, comment opérationnaliser un objectif tel que « **être capable d'élaborer une démonstration** » ? Cet objectif ne peut être pris en considération que si des précisions y sont apportées : quels sont les acquis des élèves concernés ? de quel type de démonstration s'agit-il ? quel niveau de complexité désire-t-on atteindre ? s'agit-il de **reproduire des démonstrations** ou d'en **inventer** ? Etc.

Cette réflexion — combinée avec un autre courant pédagogique de l'époque, à savoir l'enseignement dit **programmé** — ne pouvait que déboucher sur le découpage de la matière à enseigner en **micro-objectifs**, incomparablement plus faciles à opérationnaliser. Mais le mouvement finit par s'arrêter lorsqu'on constata que le fait de maîtriser les différents micro-objectifs intervenant dans un raisonnement ou une démarche ne permettait pas nécessairement aux élèves de reconstituer ce raisonnement ou cette démarche. Tout mathématicien sait que le passage du local au global n'est une opération aisée que dans des cas très particuliers !

[1] soixante-dix

Si la pédagogie par objectifs des années septante n'a pas débouché sur des résultats très concrets, elle a cependant contribué à faire progresser nos conceptions didactiques de façon non négligeable. La mise au point de taxonomies d'opérations cognitives en reste un apport fondamental, que l'on n'a pas fini d'exploiter. L'attention, plus grande qu'auparavant, accordée aux comportements et aux savoir-faire doit être également considérée comme positive.

Depuis quelques années, ce sont les responsables de la politique éducative des pays européens qui incitent les enseignants à faire porter leur réflexion sur les moyens de rendre objective l'évaluation des acquis scolaires.

C'est dans ce contexte qu'en 1997, le Parlement de la Communauté française de Belgique a adopté un décret, [1], définissant les missions prioritaires de l'enseignement fondamental et de l'enseignement secondaire (en Belgique francophone) dans lequel, une **compétence** est définie comme étant **l'aptitude à mettre en œuvre un ensemble organisé de savoirs, de savoir-faire et d'attitudes permettant d'accomplir un certain nombre de tâches**.

Le Ministère de l'Éducation a ensuite confié à divers services universitaires la mission de réaliser des recherches portant sur l'élaboration de compétences terminales dans des domaines particuliers. C'est ainsi qu'une équipe de l'Université de Mons-Hainaut a tenté de relever le défi de traiter le cas des compétences terminales en mathématique.

Cet article résume quelques-uns des résultats obtenus. Ceux-ci n'épuisent certainement pas la question et ne doivent être considérés que comme une contribution à une œuvre de longue haleine.

Le rapport final de la recherche consiste en un gros volume de 650 pages qui devrait paraître prochainement aux éditions De Boeck. Il est dès à présent disponible sur Internet à l'adresse http ://www.agers.cfwb.be/pedag/index.asp.

# 2 La spécificité des mathématiques

Dans le cas particulier des mathématiques, il est assez clair que les compétences terminales sont les **connaissances** et les **comportements** que les élèves doivent être capables de mobiliser dans l'étude de **situations mathématiques significatives**, lorsqu'ils quittent l'enseignement secondaire. Une telle caractérisation soulève tout de suite des questions fondamentales.

1. En quoi consiste l'**activité mathématique**, quelles sont sa spécificité et sa raison d'être ?
2. De quelles **démarches** essentielles les élèves doivent-ils être capables dans l'étude de situations mathématiques significatives ?
3. Quels **contenus** retenir pour l'exercice de ces démarches ? Y a-t-il des contenus incontournables, et pourquoi le sont-ils ?
4. Comment **organiser le cours** de mathématique de façon que les élèves acquièrent de façon intégrée les démarches essentielles et les contenus incontournables ?
5. Comment **évaluer** l'acquisition des compétences retenues ?

# 3 L'activité mathématique

Il est d'abord nécessaire de mettre au clair ce qui caractérise les mathématiques dans l'ensemble des connaissances.

**L'activité principale en mathématiques consiste à poser et résoudre des problèmes.** Par problème, nous entendons **une question dont ni la solution, ni une méthode de résolution ne sont, *a priori*, évidentes pour la personne qui doit y répondre.** La grande majorité des mathématiciens approuvent ce constat fondamental. Et les mathématiciens « formalistes », tels D. Hilbert, P. Halmos, J. Dieudonné, N. Bourbaki, ... ne sont pas les moins convaincus de cet état de chose ! (Voir par exemple [8] et [9].) D'autant plus que toute l'évolution des mathématiques, y compris dans la période contemporaine, en confirme la réalité.

Mais il s'agit bien de « résoudre un problème », c'est-à-dire de mettre de l'ordre, de la structure, là ou il n'y a **a priori** que du mystère et du désordre.

Il faut donc garder bien présent à l'esprit que tout n'est pas achevé lorsqu'on connaît la réponse à un problème. Il reste en effet à expliquer d'où sort cette réponse, et à montrer comment et pourquoi elle convient au problème. C'est cette **méthode**, au sens le plus complet du terme, qui fait à la fois l'économie et l'efficacité des mathématiques. En ce sens, vraiment résoudre un problème, c'est le tuer : les autopsies de quelques uns de ces meurtres les plus célèbres sont ce qu'on appelle des **théories mathématiques** !

Sans risquer de se tromper, on peut donc affirmer que les mathématiques sont constituées de tout un ensemble de **méthodes**, conçues, structurées et utilisées dans le but de **résoudre des problèmes** (très) nombreux et (très) variés.

Il n'y a pas que dans les mathématiques pratiquées pour elles-mêmes que la résolution de problèmes est valorisée. Dans un nombre important de secteurs de **la vie économique et sociale**, l'aptitude à résoudre des problèmes (très divers) est elle aussi essentielle, et appréciée. C'est d'ailleurs là un des débouchés essentiels des études mathématiques, quand ce n'est pas une de leurs raisons d'être.

Le rappel de ces quelques caractéristiques fondamentales des mathématiques permet de mettre en avant une des hypothèses à la base de toute notre recherche : **l'essentiel des compétences que le cours de mathématiques a pour vocation de développer peut résulter de ce que la résolution de problèmes soit considérée comme une compétence terminale en mathématiques.**

Si, quant au fond, on voit mal comment il pourrait en être autrement, il n'en reste pas moins vrai que, dans la vie quotidienne des classes, une telle hypothèse de travail n'a rien de confortable ...

- Comment aider un élève à résoudre un problème sans lui donner des indications qui reviennent à lui souffler la solution ?
- Compte tenu du temps que peut nécessiter une activité de résolution de problème, comment organiser l'enseignement de façon à — néanmoins — couvrir le programme ?
- Comment évaluer la performance d'un élève lors d'une résolution de problème, en tenant compte de l'intérêt et de la pertinence de ses démarches, indépendamment du fait qu'il ait

ou non découvert une solution ?

Ces questions n'ont pas de réponse évidente. Cela explique, au moins en partie, pourquoi si peu de problèmes sont posés aux élèves alors qu'un large consensus existe sur l'importance de cette activité.

On trouvera ci-dessous des tentatives de clarification sur ces points.

# 4 Résoudre des problèmes

Il nous apparaît que la démarche de résolution d'un problème mathématique peut être envisagée sous au moins trois points de vue :

- Le point de vue mathématique.
- Le point de vue didactique.
- Le point de vue psychologique.

Pour pouvoir aider un élève à résoudre un problème, l'enseignant doit essayer de déterminer la source des difficultés rencontrées par l'élève. Les trois points que nous allons décrire peuvent intervenir, simultanément ou non.

## 4.1 Le point de vue mathématique

Du point de vue mathématique, nous ne cherchons pas à décrire **l'activité** du chercheur. Nous ne tenons pas compte des **stratégies** (fructueuses ou non) qu'il met en œuvre pas plus que des aspects psychologiques de son travail. Nous nous intéressons au contenu mathématique réellement utile de son travail.[2]

De ce point de vue, la méthode de résolution, appelée **méthode axiomatique** dans [2], comporte les phases caractéristiques de toute méthode scientifique :

- *modélisation de la situation étudiée, par un processus d'abstraction qui élimine toute donnée ou toute information non pertinente, construction de représentations symboliques ou graphiques adéquates,*
- *mise en fonctionnement du modèle, obtention de résultats,*
- *validation du modèle par comparaison des résultats obtenus avec la situation de départ, éventuellement retour à la première phase, mise en question du modèle utilisé, affinement de ce modèle ou construction d'un nouveau modèle, puis reprise de la deuxième phase.*

Les diverses phases ainsi décrites mettent en œuvre des compétences différentes. La construction du modèle est sans nul doute la plus difficile et la plus délicate. Elle utilise des méthodes heuristiques, elle nécessite de pouvoir analyser une situation informelle et synthétiser un modèle. Elle provoque parfois la recherche de documentation. Elle peut aussi nécessiter de **changer de cadre** au sens donné à ce terme par R. Douady dans [3] et [4]. Elle fait intervenir beaucoup d'imagination et de connaissances. Dans le cas d'un problème issu d'une source extérieure à la

[2] C'est généralement ce contenu qui, après que le problème soit résolu, c'est-à-dire **mort**, fait l'objet d'un compte-rendu écrit, lequel dissimule l'importance réelle du travail effectué par l'auteur.

mathématique, ce sont des connaissances dans au moins deux disciplines différentes qui doivent être coordonnées.

La seconde phase est plus formelle, elle utilise les méthodes mathématiques classiques. Le raisonnement déductif joue un rôle plus important.

La troisième nécessite à la fois un bon esprit critique et beaucoup de soin. Elle ne consiste pas seulement en la validation des résultats obtenus. En effet, une fois le problème résolu, tout n'est pas terminé : la solution doit être rédigée, communiquée. Ce sont également des qualités de synthèse et d'expression qui sont mises en œuvre. Elles permettent à la classe d'**institutionnaliser** éventuellement de nouveaux résultats en les intégrant à son corpus de connaissances. Il s'agit alors de rendre claire, intuitive, la raison fondamentale pour laquelle la solution est ce qu'elle est, de coordonner les résultats de la recherche aux connaissances mathématiques déjà acquises, de dégager une synthèse, de progresser dans la conceptualisation. Sans quoi, l'activité aura certes permis de résoudre un problème particulier, mais n'aura guère contribué à mettre en place des outils ou des méthodes susceptibles d'être réinvesties à d'autres occasions.

Bien entendu, les trois phases qui viennent d'être rappelées ne se succèdent pas nécessairement de façon linéaire. Des aller-retours sont possibles entre elles.

## 4.2 Le point de vue didactique

Nous qualifions ici de **didactique** le point de vue consistant en l'observation des comportements d'un élève ou d'une classe occupés à résoudre un problème.

S'inspirant des travaux de Polya, [10], plusieurs auteurs considèrent que cette résolution comporte quatre phases principales :

1. l'analyse du problème,
2. l'élaboration d'une stratégie,
3. la vérification et la validation de la stratégie,
4. la communication du résultat.

Ces phases ne s'opposent pas et ne recouvrent pas exactement celles qui sont intervenues dans la description du point de vue mathématique. Il est clair que l'analyse du problème relève plutôt de la modélisation, l'élaboration d'une stratégie peut relever à la fois de la modélisation et de la mise en fonctionnement du modèle cependant que la vérification et la validation de la stratégie interviennent lors de la mise en fonctionnement du modèle et de la comparaison des résultats obtenus avec la situation de départ.

Souvent évoquées, les stratégies de résolution restent assez imprécises. Il s'agit plus de conseils qu'il faut savoir appliquer au moment opportun, mais qu'il faut aussi savoir NE PAS appliquer. Il n'existe évidemment aucune méthode universelle permettant de résoudre n'importe quel problème. L'imagination et le flair sont souvent le facteur déterminant. Toutefois quelques stratégies connues peuvent aider considérablement à la découverte de la solution d'un problème en évitant de s'engager dans une voie sans issue et en contribuant à faire mûrir la situation jusqu'au point où le chercheur perçoit — souvent de façon intuitive — la démarche qui l'amènera au résultat escompté.

On peut ainsi citer les stratégies suivantes :

- Distinguer les données, les opérations et les buts.
- Travailler à reculons.
- Se rapprocher le plus près possible de l'objectif.
- Étudier des cas particuliers.
- Rechercher des exemples et des contre-exemples.
- Changer de registre.
- Effectuer des représentations graphiques.
- Raisonner par analogie.
- Effectuer des raisonnements heuristiques.
- Raisonner déductivement.
- Tenir compte des symétries des données.
- Éliminer tout présupposé quant au résultat à obtenir.
- Communiquer à d'autres, oralement ou par écrit, le résultat, même partiel et provisoire, de ses cogitations.

Les travaux de A.H. Schoenfeld (voir notamment [13]) proposent un découpage plus fin, en **épisodes** qui peuvent se répéter au cours de la résolution. Nous discernerons les épisodes suivants :

- Lecture
- Planification : C'est un type d'épisode dans lequel on tente de structurer la résolution, de la découper en sous-problèmes, de choisir une stratégie.
  Ce type d'épisode peut être *global* (il porte alors sur l'ensemble de la résolution et vient assez tôt) ou *local* (plan d'attaque d'un problème secondaire, qui peut se faire à tout moment).
- Analyse : Ce sont des séquences de quête de propriétés découlant *directement* des données.
  A défaut d'une analyse suffisante, des méthodes alternatives (et souvent incorrectes) peuvent apparaître. Certains élèves cherchent des structures dans ce qui leur est proposé mais se basent plus sur les apparences que sur le sens. Des lacunes dans l'explication sont alors comblées de façon inadéquate. L'interprétation personnelle peut ainsi se substituer à la compréhension et empêcher le véritable apprentissage.
- Exploration : Dans ce type d'épisode, l'élève tente de dégager des résultats en utilisant ses connaissances et les résultats des éventuels épisodes d'analyse.
  La différence entre ces deux derniers types d'épisode est principalement qualitative puisque les épisodes d'analyse apportent souvent des résultats importants, qu'un peu d'exploration bien menée permet de transformer en la (les) réponse(s) souhaitée(s). La différence devient également quantitative quand on voit à quel point le temps consacré à des épisodes d'analyse peut être court par rapport aux épisodes d'exploration.
- Nouvelles informations : Dans ce type d'épisode, généralement très bref et pouvant intervenir à tout moment, une nouvelle information importante apparaît. Ce peut être l'un des résultats obtenus au terme d'un épisode d'exploration ou d'analyse, ou encore *au cours*

de l'un de ces épisodes. Dans ce dernier cas l'information apparaît un peu par surprise, et son utilité ne sautera généralement pas immédiatement aux yeux de l'élève. Elle ne sera éventuellement utilisée que dans un épisode ultérieur.

– VÉRIFICATION : Il s'agit d'épisodes dans lesquels, avant d'aller plus loin dans son analyse ou son exploration, l'élève tente de vérifier si une information, ou une idée, est correcte (ou efficace).

Notons qu'à ces types d'épisodes viennent s'ajouter des moments de transition, des joints entre les épisodes. Des décisions de *contrôle* se prennent à ces moments. Elle peuvent casser ou mener à bien une résolution.

L'observation d'élèves montre que les plus performants d'entre eux ne se lancent pas trop vite dans des épisodes d'exploration, mais consacrent suffisamment de temps à la lecture et à l'analyse. De plus, des épisodes de vérification entrecoupent l'exploration.

## 4.3 Le point de vue psychologique

Du point de vue de la psychologie cognitive, il nous est apparu que la résolution d'un problème présente de nombreuses analogies avec la conceptualisation d'une notion. Nous nous sommes donc inspirés de l'étude comparée des travaux d'un certain nombre de didacticiens des mathématiques, notamment E. Dubinsky [5], D. Tall [17], et A. Sfard [16] pour distinguer trois phases caractéristiques dans la résolution d'un problème.

1. La phase d'**intériorisation** est celle de l'appropriation de l'énoncé, de la signification du problème. Elle se concrétise dans les dessins, représentations graphiques, exemples numériques élémentaires, ... que l'élève est capable de réaliser à la fin de cette phase pour témoigner, dans des registres différents, de son degré de compréhension de la question.
2. La phase de **condensation** vient ensuite. C'est une longue phase de maturation, d'éclaircissements successifs. C'est une conjonction d'analyses, d'explorations et de vérifications où peuvent intervenir de façon chaotique des calculs, des constructions, la formulation de conjectures, des simulations, des critiques, des preuves partielles, ....
3. Enfin, la phase de **réification** est la phase de résolution du problème, la phase de clarté. Le mystère qui s'incarnait dans le problème n'en est plus un : tout est clair ! C'est aussi le moment de l'analyse finale, de la mise au net de la succession des arguments. C'est en particulier le moment de la communication écrite de la solution, de la mise au point d'un texte définitif.

   Au cours de cette phase, il peut se faire que des progrès conceptuels se réalisent et que l'élève-chercheur en profite pour remplacer des raisonnements complexes, voire pénibles, par d'autres plus élégants qui mettent mieux en évidence les ressorts fondamentaux de la situation étudiée expliquant ainsi comment et pourquoi la solution du problème est ce qu'elle est.

On peut visualiser ces trois phases dans un tableau synoptique (voir page suivante) où le déplacement, tant de haut en bas que de gauche à droite suit la chronologie des phases.

**Intériorisation**
**Phase d'appropriation**

Dessins/exemples numériques élémentaires ...

**Condensation**
**Phase d'éclaircissements, de maturation**

Calculs, preuves, constructions, simulations, analogies, associations, conjectures, confrontations, critiques, ...

**Réification**
**Phase de clarté**

Dissection, analyse, reconstruction, ...
Communication définitive, déductive

Ce schéma d'analyse **n**'est **pas du tout** un schéma linéaire : les comportements des élèves occupés à résoudre un problème s'y reproduisent en boucles, en spirales, avec des marche-arrières ou des itérations, ...

On peut se demander ce qui contribue à créer ce dynamisme ?

– Il est certain que les connaissances mathématiques disponibles sont un moteur indispensable à la progression : il faut connaître beaucoup de mathématiques pour résoudre complètement un problème.
– Mais la **représentation** de ces connaissances est au moins aussi importante. Il semble en effet essentiel que l'élève soit à même d'opérer facilement des **changements de cadre ou de registre** dans la manière dont il fait intervenir ses connaissances à l'intérieur d'une résolution de problème.

Un **choix approprié** de problèmes contribue certainement au développement de ce dynamisme.

Certaines **interventions** de l'enseignant peuvent induire chez l'élève des **comportements** efficaces, démultiplicateurs :

– conseiller de faire un « petit dessin », un dessin précis, un dessin différent du dessin précédent, ...
– conseiller de faire un « petit calcul », de travailler d'abord avec des chiffres (simples), **ensuite** avec des symboles, des lettres, des variables, ...
– faire relever les analogies, les faire écrire, ...
– faire relever les blocages, les faire préciser, éventuellement par écrit, ...

– faire circuler les rédactions de solution au sein d'un petit groupe, faire comparer les points communs, les points de divergence, ...

Et nous retrouvons là les **stratégies** mentionnées au point précédent.

# 5 La problématisation du cours de mathématiques

Si les mathématiques sont constituées de **méthodes** développées dans le but de résoudre des problèmes, il faut alors s'interroger sur la manière dont l'enseignant peut intégrer efficacement la résolution de problèmes à l'**ensemble** de son enseignement, et en particulier à ce cours de méthodes qu'est le cours de théorie. D'autant plus que c'est peut-être à travers ce ≪ cours de théorie ≫ que des modèles dynamiques des matières et de leurs représentations deviennent accessibles à l'élève.

## 5.1 L'hypothèse de problématisation

Faire du cours de théorie une source de modèles dynamiques, disponibles lors de la résolution de problèmes, est l'objectif visé dans ce que nous appelons l'**hypothèse de problématisation du cours de mathématiques**.

Cette hypothèse s'explicite par la formule : ≪ **l'aspect local d'un cours** (la résolution d'un problème) **peut servir de modèle pour son aspect global** (l'organisation d'une séquence d'apprentissage, d'un cours de théorie, ...), **et réciproquement** ≫.

Cette hypothèse débouche naturellement sur une **modélisation de séquence d'apprentissage**, que nous avons essayé de rendre simple, souple et réaliste, et en accord avec les aspects mathématiques, didactiques et psychologiques de l'apprentissage. A nouveau, cette modélisation peut servir d'outil de **décodage**, ou d'**organisation** d'une telle séquence.

## 5.2 La modélisation d'une séquence d'apprentissage

Cette modélisation prolonge donc celle déjà décrite dans la section précédente. On appelle ici **intériorisation** la phase de découverte d'un **processus**. Elle se matérialise dans les représentations graphiques, exemples numériques élémentaires, ... associés à ce processus que l'élève est capable de réaliser à la fin de cette phase.

La **condensation** est encore une longue phase de maturation et d'éclaircissements successifs. Elle se met en place à partir d'un ensemble de problèmes qui cernent le processus étudié, et qui permettent de faire évoluer (lentement) le **modèle mental** sous-jacent chez l'élève. C'est une alternance de calculs, de constructions, de conjectures, de simulations, de critiques, de preuves partielles, ... dont la chronologie reste variable, même si l'enseignant doit rester maître de certains paramètres à cet égard.

Enfin, la **réification** est toujours la phase de clarté. Son objectif est de faire naître dans l'esprit de l'élève un **concept**, c'est-à-dire un nouvel objet mathématique, susceptible d'être évoqué librement, pour lui-même, indépendamment des multiples problèmes et questionnements qui ont contribué à sa naissance. C'est le moment de l'institutionnalisation, de la mise au net de la succession des arguments, et de la rédaction d'une synthèse qui expliquera comment et pourquoi le concept est ce qu'il est.

On peut visualiser ces trois phases dans un (nouveau ?) tableau synoptique.

**Intériorisation**
**Phase d'appropriation**

Découverte élémentaire — ou paradoxale — d'un **processus** ...

**Condensation**
**Phase d'éclaircissements, de maturation**

Problématique, qui explore l'environnement du processus, fait évoluer le **modèle mental** sous-jacent
Alternance d'utilisations/représentations, et donc de calculs, preuves, constructions, simulations, analogies, associations, conjectures, confrontations, critiques, ...

**Réification**
**Phase de clarté**

Naissance d'un **concept**
Dissection, analyse, reconstruction, ...
Institutionnalisation, rédaction d'une synthèse déductive

Il faut ajouter que ce schéma vise plus spécifiquement des **matières riches** sur le plan conceptuel, telles que :

- les processus infinis : limites, dérivées, intégrales, ...
- la linéarité : vecteurs, produit scalaire, représentation matricielle, ...
- la modélisation probabiliste, ...

Cette spécificité est d'autant plus fondée que la richesse d'un concept est toujours en correspondance avec la richesse des **applications** qui y sont associées.

Évidemment, ce schéma — comme dans le cas de la résolution d'un problème — reste **dynamique** ! Il convient en particulier de signaler que l'étape de réification n'est pas toujours atteinte pour certains sujets à la fin du secondaire !

# 6 Un premier essai sur le terrain

L'ensemble des idées évoquées ci-dessus a été expérimenté dans les classes. L'expérience a porté sur **la mise au point d'une séquence d'enseignement** concernant l'intégrale et le théorème fondamental de l'analyse[3], en accord avec les schémas de modélisation précédents. Pour les étapes d'intériorisation et de condensation, des problèmes ont été élaborés et soumis aux élèves. Des synthèses intermédiaires ont porté sur la matière nouvellement introduite à l'occasion de la résolution des problèmes.

## 6.1 Les étapes d'une mise au point

Cette mise au point s'est effectuée en quatre étapes.

- La **première étape** a eu pour objet la construction d'un **scénario**, au départ de situations-problèmes pertinentes. Quelques choix caractéristiques valent la peine d'être signalés à ce propos :
  - la place accordée aux **encadrements de grandeurs** a mené naturellement à choisir la définition de l'intégrale à partir des sommes de Darboux (inférieures et supérieures),
  - on a veillé à ne pas associer trop étroitement l'intégrale à la mesure d'aire,
  - les hypothèses techniques (classe de fonction à intégrer, ...) n'ont été introduites bien souvent qu'*a posteriori*.
- La **deuxième étape** a consisté à rédiger un texte complet et autonome, adaptable à la fois aux besoins des élèves et aux désirs des enseignants, et en accord avec le scénario.
  Il s'est avéré particulièrement difficile de définir un **style** de texte qui prenne en compte ces contraintes.
- La **troisième étape** a concerné l'expérimentation proprement dite dans des classes :
  - une classe de 10 élèves de sixième[4], ayant 6 heures de mathématique par semaine, pour un total de 13 heures de cours (enseignante : C. Terryn),
  - une classe de 22 élèves de sixième générale ayant également 6 heures de mathématique par semaine, pour un total de 20 heures de cours (enseignant : L. Terryn),
  - une classe de 7 élèves de sixième technique de qualification (chimie) ayant 4 heures de mathématique par semaine, pour un total de 10 heures de cours (enseignant : Y. Hanssens).
- Enfin, la **quatrième étape** a eu pour objet une révision du texte à la lumière des résultats de l'expérience.

## 6.2 Les compétences à atteindre

La séquence d'enseignement proposée visait à rendre chaque élève capable :

- d'encadrer par des sommes de Darboux certaines quantités dont l'**expression élémentaire** est un **produit** d'un type particulier (telles qu'une énergie électrique, un travail, une

[3]Le calcul des primitives était déjà disponible dans les classes où s'est déroulée l'expérience.
[4]Rappelons que la sixième année du secondaire belge correspond à la terminale française.

distance parcourue, un volume, une aire, ...),
- d'écrire l'intégrale donnant la valeur exacte d'une quantité encadrée par des sommes de Darboux,
- de se servir d'une calculatrice, ou d'un logiciel pour calculer la valeur d'une somme de Darboux,
- de déterminer une borne supérieure de l'erreur commise en encadrant une intégrale par des sommes de Darboux,
- d'identifier les aspects linéaires (par rapport aux fonctions à intégrer et aux bornes d'intégration) de l'intégrale,
- de justifier et utiliser à bon escient le théorème fondamental de l'analyse qui relie l'évaluation d'une intégrale au calcul d'une primitive.

## 6.3 Quelques extraits de la séquence réalisée

La séquence se décompose (évidemment) en trois parties. Elle comporte 7 sections, réparties comme suit.

- **L'étape d'intériorisation**
  - Section 1. Une situation initiale.
  - Section 2. Comment discrétiser un phénomène continu ?
- **L'étape de condensation**
  - Section 3. Le contrôle de l'approximation.
  - Section 4. Une définition procédurale de l'intégrale.
  - Section 5. Un résultat miraculeux ou naturel ?
  - Section 6. Réinvestissements.
- **L'étape de réification**
  - Section 7. Une synthèse théorique.

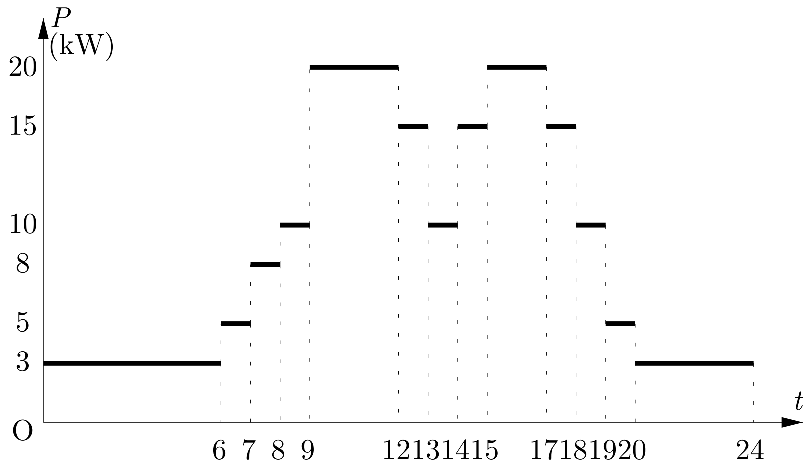
La suite ne propose que quelques **extraits** de cette séquence expérimentale.

**L'étape d'intériorisation**

**Section 1. Une situation initiale**

**Problème 1 : L'énergie électrique consommée dans un atelier**

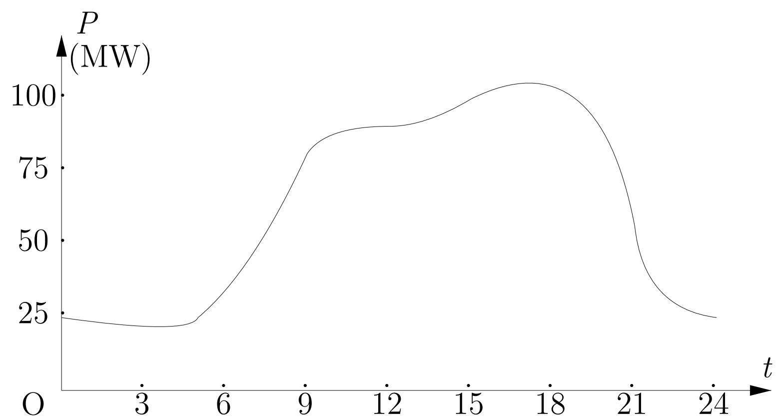
Dans l'atelier d'un travailleur indépendant, la puissance électrique nécessaire à faire fonctionner les différentes machines est décrite dans le graphique ci-dessous en fonction du moment de la journée.




On demande de représenter heure par heure, dans un tableau ainsi que graphiquement, l'énergie électrique consommée dans cet atelier depuis le début de la journée.

**Problème 2 : La consommation d'énergie électrique d'une ville**

La puissance électrique nécessaire dans une ville de taille moyenne est décrite en fonction du moment de la journée dans le graphique ci-dessous (1 MW (megawatt) vaut $10^6$ watts).




On demande

- d'abord, de surestimer l'énergie consommée par cette ville pendant une journée,
- ensuite, de sous-estimer l'énergie consommée par cette même ville pendant une journée,
- enfin, de raffiner ce processus de telle sorte qu'on puisse en déduire un encadrement raisonnable du coût de l'énergie consommée par cette ville pendant une journée (pour mémoire, le kilowattheure est facturé à 4,80 F, hors T.V.A.).

## Section 2. Comment discrétiser un phénomène continu ?

### La définition de sommes de Darboux

On appelle **somme de Darboux inférieure** pour la fonction $f(x)$ et la subdivision $D : a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{i-1} < a_i < \ldots < a_{n-1} < a_n = b$ de l'intervalle $[a; b]$, le nombre $s(f(x); D)$ défini par

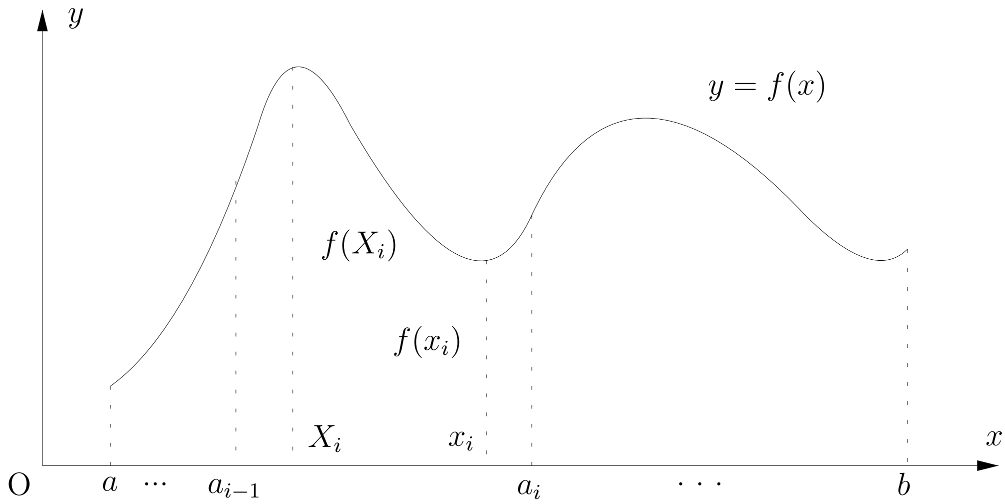
$$s(f(x); D) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot (a_i - a_{i-1})$$

où, quel que soit $1 \leqslant i \leqslant n$, $x_i$ est un nombre dont l'image $f(x_i)$ est minimum parmi les valeurs de la fonction sur le sous-intervalle $[a_{i-1}; a_i]$.

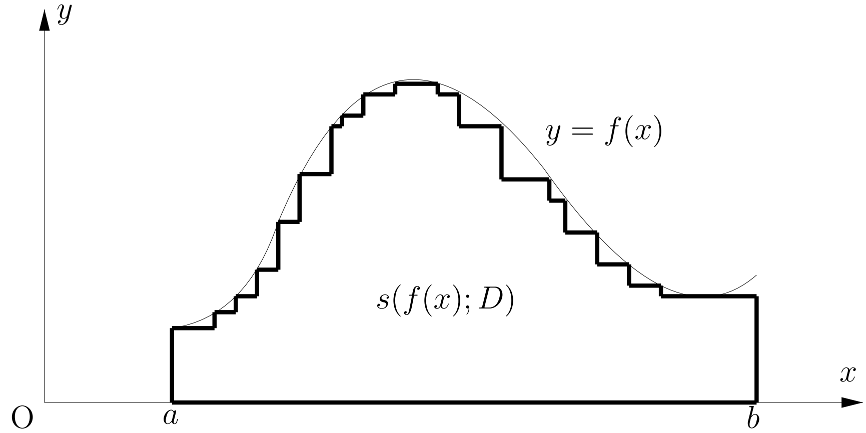
Pareillement, on appelle **somme de Darboux supérieure** pour la fonction $f(x)$ et la subdivision $D$ le nombre $S(f(x); D)$ défini par

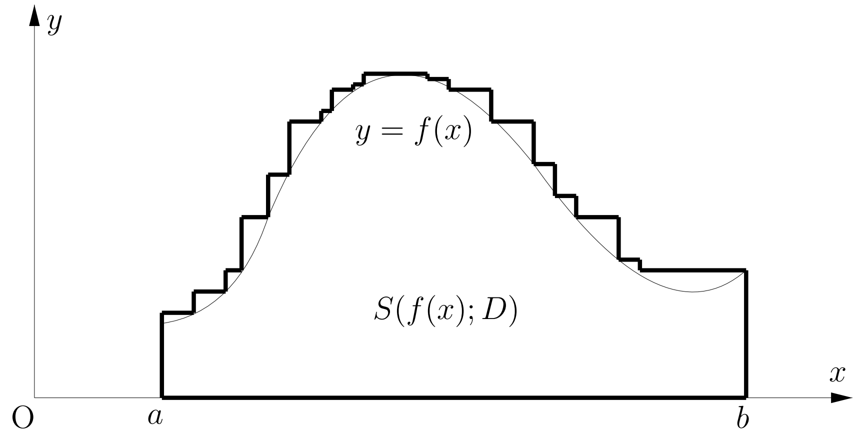
$$S(f(x); D) = \sum_{i=1}^{n} f(X_i) \cdot (a_i - a_{i-1})$$

où, quel que soit $1 \leqslant i \leqslant n$, $X_i$ est un nombre dont l'image $f(X_i)$ est maximum parmi les valeurs de la fonction sur le sous-intervalle $[a_{i-1}; a_i]$.



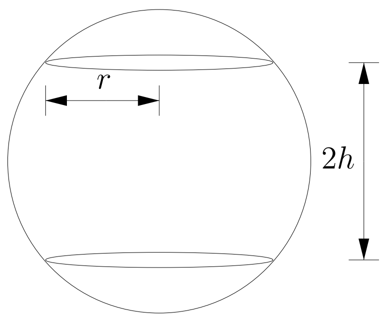

**La représentation graphique des sommes de Darboux** $s\,(f(x); D)$ **et** $S\,(f(x); D)$






**Problème 3 : Le volume d'un tonneau**

On considère un tonneau sphérique, c'est-à-dire une sphère coupée par deux plans parallèles équidistants du centre de la sphère. On connaît la hauteur $2h$ du tonneau ainsi que le rayon $r$ de son couvercle.




On demande de décrire des encadrements de plus en plus précis du volume de ce tonneau si $2h = 1$ m et $r = 0,75$ m.

Y a-t-il moyen d'obtenir un tel encadrement sans que les valeurs numériques de $2h$ et $r$ soient fournies ?

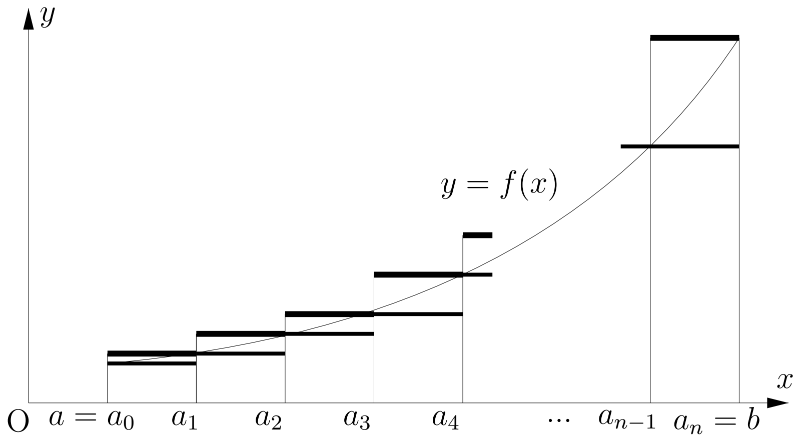
**L'étape de condensation**

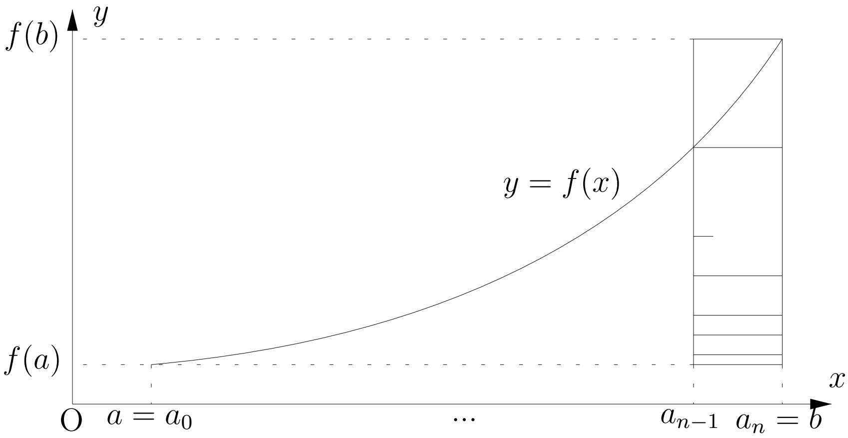
**Section 3. Le contrôle de l'approximation**

**La mesure de la précision de l'approximation**

Si $f(x)$ est une fonction **monotone** sur l'intervalle $[a; b]$ muni d'une subdivision **régulière** $D_n$ définie par $a_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n}$ , on a

$$0 \leqslant S(f(x); D_n) - s(f(x); D_n) = \frac{b-a}{n} \cdot |f(b) - f(a)|$$




**Section 4. Une définition procédurale de l'intégrale**

On considère une fonction $f(x)$ **monotone** sur un intervalle $[a;b]$, muni des **subdivisions régulières** $D_n$ définies par

$$a_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n}$$

où $i$ peut prendre toutes les valeurs entières comprises entre 0 et $n$.

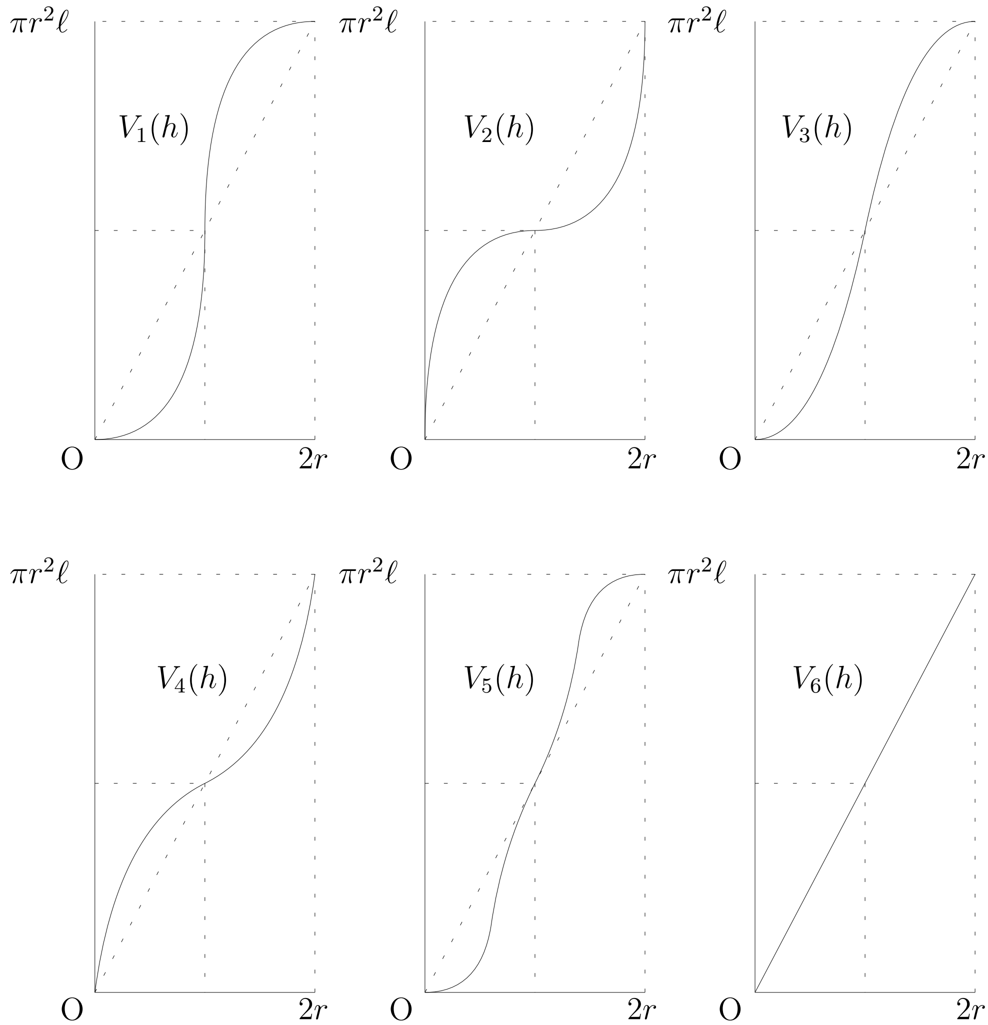
On appelle alors **intégrale de** $f(x)$ **de** $a$ **à** $b$, le nombre réel noté $\int_a^b f(x)dx$, et défini par

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} s(f(x);D_n) = \lim_{n\to\infty} S(f(x);D_n)$$

**Section 5. Un résultat miraculeux ou naturel ?**

**Problème 4 : Comment jauger une citerne ?**

Une citerne est constituée d'un cylindre de longueur $\ell$ et de rayon $r$, dont l'axe est horizontal. Parmi les graphes suivants, quel est celui qui représente le volume $V = V(h)$ du contenu de la citerne (porté en ordonnée) en fonction de la hauteur $h$ du liquide (portée en abscisse), et pourquoi ?




**Section 6. Réinvestissements**

Cette section est consacrée à un retour sur des problèmes abordés précédemment à l'occasion de calculs d'encadrements de grandeurs, et qui peuvent être maintenant résolus d'une toute autre manière grâce au théorème fondamental découvert dans la section précédente.

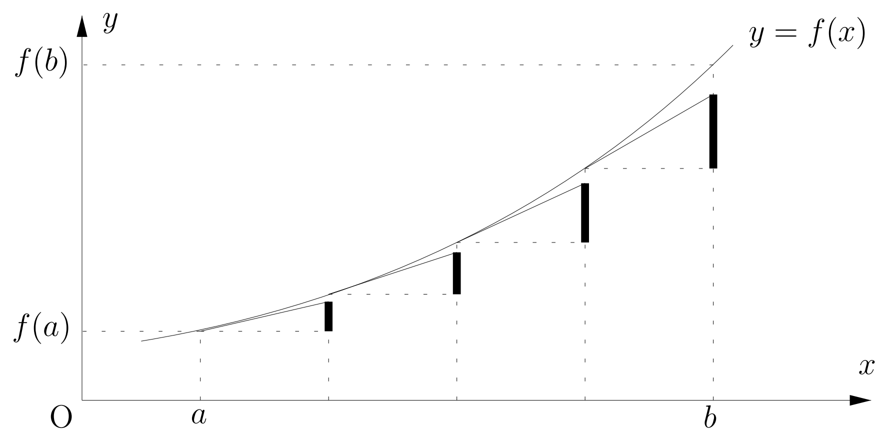
L'étape de réification

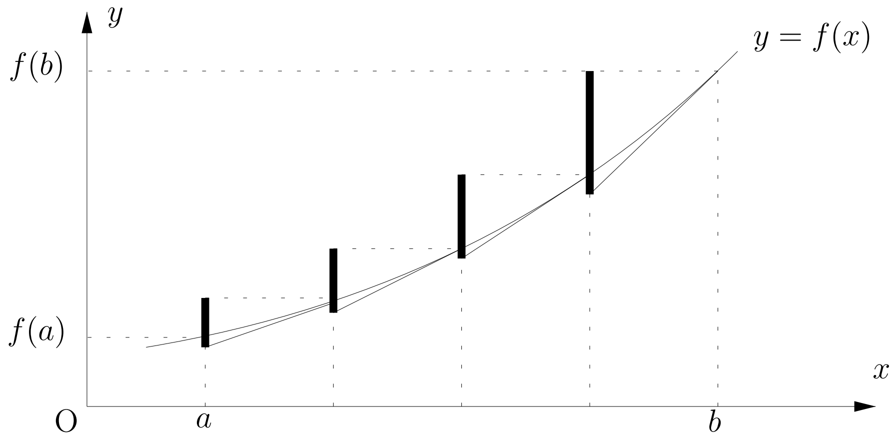
## Section 7. Une synthèse théorique

### Une version « faible » du théorème fondamental du calcul différentiel et intégral

Sous des hypothèses convenables, on a la formule

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$




**Démonstration.**

On considère la décomposition régulière $D_n$ de l'intervalle $[a;b]$ : $a_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n}$.

Sur chaque intervalle $[a_{i-1}; a_i]$, le théorème de Lagrange donne :

$$f'(x_i) \leqslant \frac{f(a_i) - f(a_{i-1})}{a_i - a_{i-1}} \leqslant f'(X_i)$$

ou

$$f'(x_i) \cdot (a_i - a_{i-1}) \leqslant f(a_i) - f(a_{i-1}) \leqslant f'(X_i) \cdot (a_i - a_{i-1})$$

Dès lors

$$\sum_{i=1}^{n} f'(x_i) \cdot (a_i - a_{i-1}) \leqslant \sum_{i=1}^{n} f(a_i) - f(a_{i-1}) \leqslant \sum_{i=1}^{n} f'(X_i) \cdot (a_i - a_{i-1})$$

c'est-à-dire

$$s(f'(x); D_n) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant S(f'(x); D_n)$$

On achève en passant à la limite pour $n \to \infty$. C.Q.F.D.

**Remarque :** Cette démonstration fait voir la relation entre l'interprétation d'une dérivée comme (limite d'un) **quotient de différences** et l'interprétation d'une intégrale comme (limite d'une) **somme de produits**.

## 6.4 Des conclusions de l'expérimentation

L'expérimentation dans les classes a fourni un ensemble assez diversifié d'observations, tant sur le plan disciplinaire que méthodologique. Relevons d'abord quelques réactions globales des élèves et des enseignants, ainsi que de préciser quelques unes de nos premières conclusions.

1. Un débat/bilan animé par l'un d'entre nous dans une classe a permis aux élèves de celle-ci d'exprimer leurs impressions générales sur l'expérience. Les remarques suivantes ont figuré parmi les plus fréquentes :
   – le manque de préparation à ce genre d'activités dans les années antérieures a été fortement souligné,
   – des difficultés rencontrées lors du travail numérique sur les problèmes ont été relevées,
   – un très grand nombre d'interventions ont été associées à la difficulté de lecture d'un texte scientifique, mais en des termes souvent contradictoires ; par exemple, le texte fourni a été considéré comme trop long et l'on a par ailleurs souhaité qu'il contienne plus d'exemples, de commentaires et de paraphrases,
   – la lecture dirigée, à partir de la projection de transparents a été bien appréciée.
2. Les enseignants déplorent que les limitations en termes de temps disponible aient eu des effets négatifs sur l'expérience :
   – certains aspects caractéristiques de la séquence ont parfois été sacrifiés (le retour explicite sur quelques problèmes significatifs, la reconstruction théorique, ...),
   – la récriture dans l'urgence des sections 4 et 5, pour répondre aux difficultés — mal cernées — des élèves n'a pas permis a certains enseignants de faire une lecture critique préalable des nouvelles notes, et les a handicapés dans l'organisation de la suite du cours.

Par ailleurs, à travers leurs réponses aux examens oraux, les élèves semblent avoir maîtrisé — mais *après* le cours — un certain nombre de notions fondamentales (sommes de Darboux, mailles et raffinements d'une subdivision, processus de convergence, ...). Au dire des enseignants, les exercices de fixation réalisés après l'expérience y auraient contribué de manière importante.

L'observation des élèves en classe a éclairé notre réflexion sur quelques points cruciaux :

- la problématisation, en tant que méthode d'enseignement, est un révélateur pertinent des difficultés de certains élèves quant à l'acquisition ou au développement de compétences nouvelles,
- cette problématisation multiplie aussi les paramètres que l'enseignant doit prendre en compte, et contribue ainsi à complexifier son travail.

La problématisation semble d'autant plus aisée que les élèves ont une « culture scolaire » qui soit en accord avec ce mode d'enseignement. En ce sens, des activités du type *laboratoire de mathématiques* ou de simulation à l'aide de moyens informatiques, permettraient peut-être à des élèves de l'enseignement général d'acquérir une culture qui soit comparable — dans les domaines qui nous importent — à celle des élèves de l'enseignement technique.

Dans ce contexte, il semble assez clair qu'il faut proposer aux enseignants des méthodologies à la fois simples et précises d'accompagnement des élèves, et que ces méthodologies prennent en compte les nécessaires changements dans les rythmes d'apprentissage associés à la problématisation, ainsi que l'équilibre à réaliser entre ces rythmes.

Au niveau des élèves, les obstacles associés aux activités de lecture semblent majeurs et incontournables. Ils posent des questions qui parfois dépassent l'enseignement des mathématiques.

# 7 L'évaluation de la résolution de problèmes

De nombreux livres ont déjà été consacrés au problème général de l'évaluation. Diverses tentatives ont été réalisées en vue d'implanter dans la pratique un système d'évaluation nouveau. Beaucoup de ces tentatives ont fait long feu. C'est dire que le problème est loin d'être simple.

Dans le cadre relativement restreint de notre travail, nous ne pouvions prétendre en réaliser une étude générale. Nous nous contenterons d'énumérer quelques principes qui nous semblent avoir parfois été négligés et de tracer une piste relative à l'évaluation **de la résolution de problèmes**.

Nous sommes conscients de ce que les idées émises sont lourdes à mettre en œuvre et demandent un investissement important de la part de l'enseignant. Il est vraisemblable qu'il en sera ainsi de toute méthode d'évaluation qui tentera de corriger les défauts connus de la « notation chiffrée » actuellement utilisée. C'est là un fait dont il convient de tenir compte lorsqu'on organise le travail des enseignants.

## 7.1 Quelques principes

**Premier principe :** Ce ne sont pas les élèves que l'on évalue mais l'efficacité des compétences qu'ils ont acquises.

Un élève est en perpétuelle évolution. Il serait hasardeux de le classer définitivement dans une catégorie donnée en fonction de résultats obtenus au cours d'une période de temps limitée.

**Deuxième principe :** On ne peut évaluer directement que des comportements observables.

A travers ces comportements, il est parfois difficile de déterminer le degré de compréhension véritable de l'élève. L'observation de l'utilisation correcte de procédures ne permet pas de conclure automatiquement à l'acquisition des concepts sous-jacents. Un modèle mental incomplet peut suffire à résoudre certains problèmes.

**Troisième principe :** Les comportements observés ne sont pas toujours stables.

Les réponses d'un élève à un questionnaire peuvent être influencées par de nombreuses circonstances : la place relative des questions, les indications données par les enseignants, la prise de conscience d'une contradiction avec un résultat connu, les dernières activités réalisées en classe, etc.

Un comportement, un concept ne peuvent être considérés comme vraiment acquis que si une stabilité « suffisante » apparaît.

**Quatrième principe :** En même temps que les élèves, il convient d'évaluer l'examen (le questionnaire).

La correction des copies peut amener l'enseignant à prendre conscience de phénomènes auxquels il n'avait pas songé. Dans certains cas, il pourrait conclure que certaines questions étaient mal adaptées, voire inadaptées, à l'enseignement dispensé.

**Cinquième principe :** L'évaluation formative n'a que faire d'une notation chiffrée.

L'évaluation formative a pour but d'aider l'élève à progresser. Elle doit être constructive, lui expliquer ses erreurs, lui montrer comment les corriger. Une note chiffrée est inutile dans ce cas, et peut-être même nuisible.

**Sixième principe :** L'évaluation certificative devrait être « vectorielle ».

La pratique de la notation chiffrée a été analysée — et condamnée — de façon magistrale par G. Glaeser, [6]. Celui-ci remarque en particulier que additionner ou moyenner deux notes obtenues lors de deux activités différentes n'a de sens que si les compétences mises en œuvre dans ces deux activités sont fortement corrélées.

Ainsi, une note unique ne fournit pas vraiment une indication globale relativement à un élève : la perte d'information est trop grande. Des « profils » de comportements pourraient fournir plus d'informations mais ils doivent rester réalisables et utilisables.

La mise en œuvre de ces quelques principes ne peut se faire sans une réflexion approfondie. Envisageons à présent le problème de l'évaluation de la résolution de problèmes.

## 7.2 Évaluer la résolution d'un problème ?

Évaluer la résolution d'un problème en notant « bon » ou « mauvais » selon que le problème a effectivement été résolu ou non, ou en attribuant une note chiffrée selon les méthodes utilisées pour les « exercices didactiques », conduirait immanquablement à une majorité d'échecs. Un problème étant par nature une question difficile, il doit être considéré comme normal que la plupart des élèves n'arrivent pas au bout. L'important est alors de savoir jusqu'où ils ont progressé.

**Il s'agit donc d'évaluer les démarches plutôt que les réponses.**

Ainsi, l'évaluation devrait porter sur la démarche de recherche telle qu'elle a été décrite précédemment et en particulier sur la progression dans la suite des trois phases d'intériorisation, condensation et réification. On pourra évaluer aussi les démarches de démonstration, en tant qu'apprentissage de la méthode critique et en tant qu'indicateurs de la phase de réification.

L'évaluation doit également tenir compte de ce qu'un problème n'a que rarement une seule bonne solution. Les stratégies utilisées, l'utilisation des ressources, la communication ont ainsi un côté relatif à ne pas oublier.

Dans la pratique, l'évaluation pourrait débuter par une première lecture des copies en vue de repérer les principales démarches mises en œuvre. Sur cette base, il est alors possible d'élaborer un « corrigé relatif » ainsi qu'une grille de (re)-lecture des copies.

Si le problème n'a été traité que de manière très incomplète, et par une petite minorité d'élèves, un corrigé relatif serait difficile à construire. Cela signifie simplement que le problème traité était inadapté à la situation réelle de la classe. La seule chose intéressante qui reste à faire est alors de déterminer les raisons de cette inadaptation...

Les démarches relevées au cours de la première lecture, et reprises dans le corrigé relatif, doivent aussi être associées aux phases énumérées dans la modélisation d'une résolution de problèmes. En explicitant cette association, la grille de lecture doit permettre d'apprécier la « profondeur » que l'élève a atteinte dans chacune des trois phases d'intériorisation, condensation et réification.

Plus concrètement, la profondeur atteinte dans la phase d'intériorisation peut se mesurer à partir de la quantité d'« *unités de sens* » extraites de l'énoncé et de son contexte : données, éléments formels immédiatement présents (formule, règles de calcul, théorèmes, ...), représentations graphiques associées.

La profondeur atteinte dans la phase de condensation peut s'apprécier par la « *richesse combinatoire* » de ces unités de sens, par la présence d'îlots déductifs, de changements de cadre ou de registre, par la construction d'éléments nouveaux, par l'émission de conjectures, ...

Enfin, la profondeur atteinte dans la phase de réification dépend de la qualité scientifique de la production de l'élève, et plus précisément de la richesse dans l'interprétation des notions et des résultats, de la précision algébrique, graphique, numérique, logique de la production, des vérifications effectuées, de la qualité de la rédaction, ...

La grille de lecture permettrait alors d'attribuer à chaque copie une note vectorielle comportant trois composantes (une pour chacune des phases décrites).

A partir de là, il serait encore possible d'imaginer une grille plus fine, discriminant mieux les compétences utilisées et les niveaux atteints dans leur maîtrise.

# 8 Un exemple d'évaluation

Le problème ci-dessous, relatif à la fonction exponentielle, a été proposé aux élèves d'une classe de sixième où se retrouvaient des élèves d'options à 2 et 4 périodes/semaine en mathématiques.

Les élèves, au nombre de vingt et un, ont été regroupés par deux (un élève d'option 2 périodes/semaine avec un élève d'option 4 périodes/semaine) ; un élève de l'option à 4 périodes par semaine a travaillé seul. La résolution du problème devait se concrétiser dans un petit rapport rédigé aussi soigneusement que possible, et remis à la fin des deux périodes consacrées à l'activité.

Le contexte mathématique du problème était celui de l'approximation affine d'une fonction exponentielle décroissante. Les élèves avaient abordé une première fois quelques modèles de croissance exponentielle dans les cours du mois de septembre et octobre, mais n'avaient pas rencontré de cas correspondants de décroissance, ni donc de situations du genre de la décroissance radioactive. Par ailleurs, la notion de fonction décroissante étant connue, le problème proposé était donc un exercice de transposition relativement élémentaire.

Les élèves pouvaient disposer de leurs cours et de leurs calculatrices[5]. A quelques occasions, le professeur a rappelé ou précisé aux élèves ce qu'il attendait d'eux, en particulier en termes de qualité de rédaction, mais il n'a jamais fourni le moindre élément de réponse dans ses interventions.

Dans l'ensemble, le test s'est déroulé dans une ambiance de travail satisfaisante, eu égard aux motivations assez variables des élèves vis-à-vis des mathématiques.

Sur les deux périodes de cours dont disposaient les élèves, on peut estimer que les trois quarts ont été occupés à la résolution proprement dite du problème, et qu'un quart a été consacré à la rédaction du rapport.

## 8.1 L'énoncé du problème

*James Fauxbond est agent de sécurité dans une firme qui fabrique des détecteurs de radiations nucléaires. Un soir, son supérieur le convoque dans son bureau.*

*— James, j'ai l'impression qu'une espèce de réseau d'espionnage industriel s'apprête à faire sortir de l'usine les caractéristiques de notre nouveau détecteur à scintillations.*

*En vidant l'armoire d'un technicien qui vient de nous quitter précipitamment, nous sommes tombés par hasard sur trois feuilles de résultats d'expériences. Ces trois feuilles pourraient bien être extraites des résultats d'une* ***même*** *expérience menée avec notre tout nouveau détecteur top secret ETAT 52 AP 53. Si c'était vrai, c'est qu'il y a probablement des fuites parmi le personnel spécialisé et il faudrait agir vite.*

*Vous devez régler ce problème :* ***est-il possible que ces trois feuilles de résultats proviennent de la même expérience, et si oui, quelles en sont les caractéristiques ?***

[5] Il s'agissait généralement de calculatrices scientifiques usuelles (CASIO, TI, ...) et, dans quelques cas de calculatrices graphiques du type HP 48.

| *Temps (jours)* | *Activité (impulsions/min)* |
|---|---|
| *138.2* | *502* |
| *138.6* | *501* |
| *139* | *500* |
| *139.4* | *499* |
| *139.8* | *498* |
| *140.2* | *497* |
| *140.6* | *496* |

| *Temps (jours)* | *Activité (impulsions/min)* |
|---|---|
| *0* | *1000* |
| *30* | *861* |
| *60* | *741* |
| *90* | *638* |
| *120* | *550* |
| *150* | *473* |
| *180* | *407* |
| *210* | *351* |
| *240* | *302* |
| *270* | *260* |

| *Temps (jours)* | *Activité (impulsions/min)* |
|---|---|
| *0.2* | *999* |
| *0.4* | *998* |
| *0.6* | *997* |
| *0.8* | *996* |
| *1* | *995* |

*— Et rappelez-vous, James, il me faut des certitudes, des preuves, des chiffres ! Pas d'à peu près ! La situation est trop grave !*

## 8.2 Un corrigé relatif

*Pour faciliter le renvoi aux feuilles de données du problème, nous avons ordonné les tableaux de manière chronologique, c'est-à-dire :*

*Tableau 1 :*

| *Temps (jours)* | *Activité (imp./min)* |
|---|---|
| *0.2* | *999* |
| *0.4* | *998* |
| *etc.* | ... |

*Tableau 2 :*

| *Temps (jours)* | *Activité (imp./min)* |
|---|---|
| *0* | *1000* |
| *30* | *861* |
| *60* | *741* |
| *etc.* | ... |

*Tableau 3 :*

| *Temps (jours)* | *Activité (imp./min)* |
|---|---|
| *138.2* | *502* |
| *138.6* | *501* |
| *etc.* | ... |

*Au cours du processus de résolution, les élèves effectuent des observations que nous pouvons répartir entre les trois phases d'intériorisation, condensation et réification. Pour ce qui concerne les deux premières phases, l'ordre dans lequel les observations sont rapportées n'est en général pas significatif. Il n'en est plus de même pour la phase de réification.*

### La phase d'intériorisation

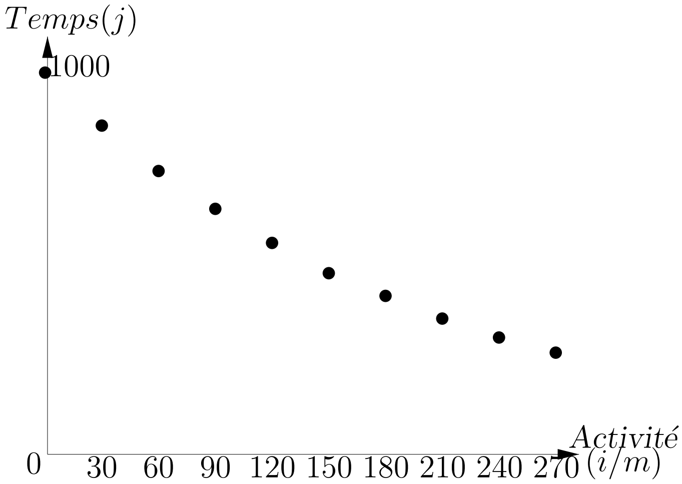
**L'observation de linéarité : les tableaux 1 et 3 sont associés à des phénomènes linéaires.** *Plus précisément, sur des intervalles de temps identiques à l'intérieur de chaque tableau :*

- *0,2 jours pour le tableau 1,*
- *0,4 jours pour le tableau 2,*

*on observe des variations d'activité qui sont constantes, et valent à chaque fois* $-1$ *impulsion/minute.*

### La construction des graphiques correspondant à chaque tableau

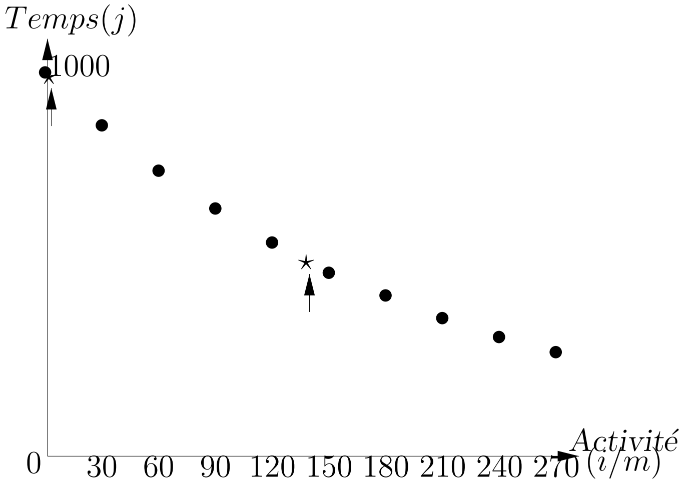
*Les tableaux 1 et 3 donnent lieu à des représentations graphiques qui sont des droites, ce qui n'est pas le cas du tableau 2.*
*Pour le tableau 2, on obtient en effet le graphique ci-contre :*




## La phase de condensation

### L'observation d'insertion des graphiques

*On peut insérer les positions moyennes correspondant aux tableaux 1 et 3 dans le graphique associé au tableau 2.*




*En particulier, on n'observe aucun « saut » dans les valeurs de l'activité lors de cette insertion.*

### L'observation d'approximation en termes de pentes moyennes

*L'insertion graphique a un correspondant numérique en termes de pentes moyennes.*

*Plus précisément, le tableau 1 admet une représentation graphique sous la forme d'une droite de pente égale à* $-5$*, tandis que la pente moyenne du graphe correspondant au tableau 2, sur l'intervalle de temps* $[0\ ;\ 30]$*, vaut* $-4,6333\ldots$*. Ces deux valeurs de pente moyenne sont relativement proches.*

*Pareillement, le tableau 3 admet une représentation graphique sous la forme d'une droite de pente ou coefficient angulaire égal à* $-2,5$*, tandis que la pente moyenne du graphe correspondant au tableau 2, sur l'intervalle de temps* $[120\ ;\ 150]$*, vaut* $-2,5666\ldots$*. Ces deux valeurs de pente moyenne sont encore une fois relativement proches.*

### L'observation de distinction de linéarité

*Les tableaux 1 et 3 ne peuvent pas être associés au même phénomène linéaire. La raison en est simple : la variation d'activité est la même dans chacun de ces tableaux, alors que l'intervalle de temps sur lequel on la mesure n'est pas le même.*

### L'observation de non-linéarité

*Le tableau 2 ne peut pas être associé à un phénomène linéaire. En effet, sur des intervalles de temps identiques de 30 jours, la variation d'activité n'est pas constante.*

| *Temps (jours)* | $\Delta t$ *(jours)* | *Activité (imp./m)* | $\Delta$ *Act. (imp./m)* |
|---|---|---|---|
| 0 | | 1000 | |
| 30 | 30 | 861 | -139 |
| 60 | 30 | 741 | -120 |
| 90 | 30 | 638 | -103 |
| 120 | 30 | 550 | -88 |
| 150 | 30 | 473 | -77 |
| 180 | 30 | 407 | -66 |
| 210 | 30 | 351 | -56 |
| 240 | 30 | 302 | -49 |
| 270 | 30 | 260 | -42 |

*On peut ajouter que la variation d'activité elle-même n'est pas linéaire et, plus généralement, qu'aucune variation d'ordre quelconque de cette activité n'est linéaire.*

| $t$ *(j.)* | $\Delta t$ *(j.)* | $A$ *(i./m)* | $\Delta A$ *(i./m)* | $\Delta^2 A$ ... | $\Delta^3 A$ | $\Delta^4 A$ | $\Delta^5 A$ | $\Delta^6 A$ | $\Delta^7 A$ | $\Delta^8 A$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | 1000 | | | | | | | | |
| 30 | 30 | 861 | -139 | | | | | | | |
| 60 | 30 | 741 | -120 | 19 | | | | | | |
| 90 | 30 | 638 | -103 | 17 | -2 | | | | | |
| 120 | 30 | 550 | -88 | 15 | -2 | 0 | | | | |
| 150 | 30 | 473 | -77 | 11 | -4 | -2 | -2 | | | |
| 180 | 30 | 407 | -66 | 11 | 0 | 4 | 6 | 8 | | |
| 210 | 30 | 351 | -56 | 10 | -1 | -1 | -5 | -11 | -19 | |
| 240 | 30 | 302 | -49 | 7 | -3 | -2 | -1 | 4 | 15 | 34 |
| 270 | 30 | 260 | -42 | 7 | 0 | 3 | 5 | 6 | 2 | -13 |

### L'observation des rapports constants

*Dans le tableau 2, le rapport entre deux résultats d'activité successifs est approximativement constant.* On convient désormais de noter $A(t)$ l'activité mesurée, en impulsions/minute, à l'instant $t$ mesuré en jours.

| $t$ | $A(t)$ | rapport $\frac{A(t+30)}{A(t)}$ | valeur arrondie du rapport |
|---|---|---|---|
| 0 | 1000 | | |
| 30 | 861 | 0,861 | 0,861 |
| 60 | 741 | 0,8606271777 ... | 0,861 |
| 90 | 638 | 0,8609986505 ... | 0,861 |
| 120 | 550 | 0,8620689655 ... | 0,862 |
| 150 | 473 | 0,86 | 0,86 |
| 180 | 407 | 0,8604651163 ... | 0,86 |
| 210 | 351 | 0,8624078624 ... | 0,862 |
| 240 | 302 | 0,8603988604 ... | 0,86 |
| 270 | 260 | 0,8609271523 ... | 0,861 |

Dans la suite, on note $c = 0,861$ la valeur retenue de ce rapport constant entre deux valeurs successives de l'activité.

### L'observation troublante

Dans les tableaux 1 et 3, le rapport entre deux résultats d'activité successifs pourrait éventuellement être assimilé à une constante ...

Cette observation provient de la volonté de disposer pour tous les tableaux d'informations comparables, mais à ce stade-ci de l'investigation, elle n'est peut-être plus très naturelle. Néanmoins, les valeurs numériques obtenues sont — à première vue — troublantes, en ce qu'elles sont très proches l'une de l'autre ...

| $t$ | $A(t)$ | rapport $\frac{A(t+0,2)}{A(t)}$ |
|---|---|---|
| 0.2 | 999 | |
| 0.4 | 998 | 0,998998998... |
| 0.6 | 997 | 0,998997996... |
| 0.8 | 996 | 0,998996991... |
| 1 | 995 | 0,9989959839... |

| $t$ | $A(t)$ | rapport $\frac{A(t+0,4)}{A(t)}$ |
|---|---|---|
| 138.2 | 502 | |
| 138.6 | 501 | 0,9980079681... |
| 139 | 500 | 0,998003992... |
| 139.4 | 499 | 0,998 |
| 139.8 | 498 | 0,997995992... |
| 140.2 | 497 | 0,9979919679... |
| 140.6 | 496 | 0,9979879276... |

En fait, la comparaison des deux tableaux tels qu'ils sont repris ici, n'a pas beaucoup de sens, puisque les échelles de temps ne sont pas les mêmes. Une remarque analogue s'appliquerait à une comparaison avec le tableau reproduit plus haut, tiré de l'observation des rapports constants.

Mais on doit surtout remarquer que, la linéarité paraissant évidente pour chacun de deux tableaux précédents, le rapport entre deux résultats d'activité successifs ne saurait alors jamais être véritablement constant, puisque l'équation qui en résulterait : $\frac{A}{A-1} = \frac{A-1}{A-2}$ serait impossible.

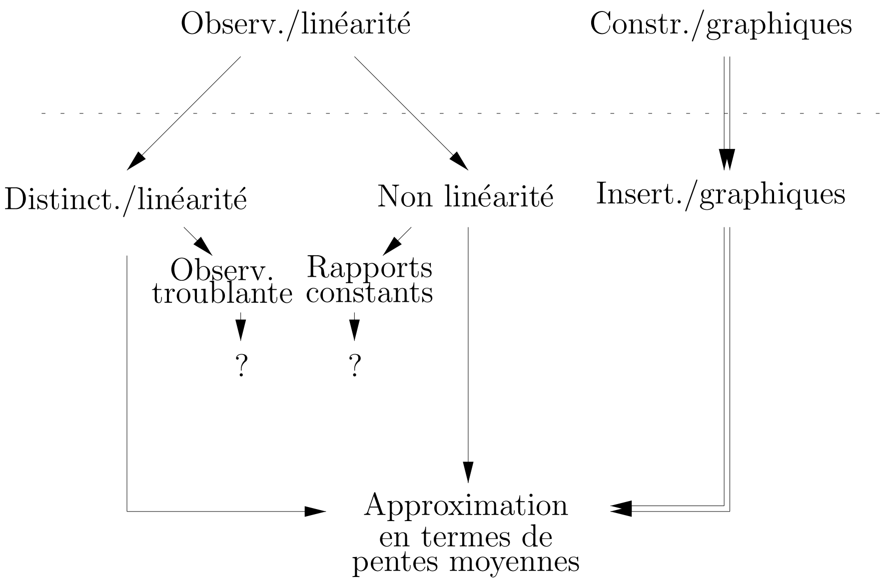
### Une première conclusion

De toutes les observations et constructions qui précèdent, on peut dégager une réponse qualitative à la première question, réponse fondée essentiellement sur la construction des graphiques correspondant à chaque tableau, l'observation d'insertion des graphiques et l'observation d'approximation en termes de pentes moyennes.

Cet ensemble d'observations plaide pour que les trois feuilles de résultats proviennent bien de la même expérience.

Il reste bien sûr à intégrer toutes les autres observations à cette proposition de réponse. C'est un travail plus spécifiquement calculatoire, qui va être réalisé dans la phase de réification ci-après.

Enfin, et en guise de résumé, le diagramme ci-dessous structure toutes les observations déjà relevées ; la ligne pointillée y sépare la phase d'intériorisation de la phase de condensation. La progression du haut vers le bas peut être interprétée en terme de complexité croissante dans la combinatoire des éléments qui fondent les observations.




## La phase de réification

### Une interprétation de l'observation des rapports constants

Cette observation permet d'obtenir une première expression analytique de la fonction qui décrit l'activité, en accord avec les résultats du tableau 2. Si $T$ est un multiple de 30, l'observation des rapports constants s'écrit : $\frac{A(T+30)}{A(T)} = 0,861$. On en déduit, si $n$ est un nombre entier quelconque : $A(T + 30 \cdot n) = 0,861^n \cdot A(T)$. En vue de s'accorder au tableau 2, cette expression devient $A(30 \cdot n) = 0,861^n \cdot A(0)$, c'est-à-dire

$$A(30 \cdot n) = 1000 \cdot 0,861^n$$

Une comparaison détaillée entre les valeurs fournies et celles que l'expression analytique permet de calculer, illustre le degré de précision de cette expression.

| $30 \cdot n$ (jours) | Activité (impulsions/minute) | $A(30 \cdot n)$ (impulsions/minutes) |
|---|---|---|
| 0 | 1000 | 1000 |
| 30 | 861 | 861 |
| 60 | 741 | 741,32 |
| 90 | 638 | 638,27 |
| 120 | 550 | 549,55 |
| 150 | 473 | 473,16 |
| 180 | 407 | 407,39 |
| 210 | 351 | 350,76 |
| 240 | 302 | 302,01 |
| 270 | 260 | 260,03 |

### L'accord de ce modèle avec les changements d'échelles

Un changement de variable permet de décrire les trois tableaux de résultats à partir d'une même expression analytique de la fonction $A(t)$. Si on pose $30 \cdot n = t$ dans l'expression analytique précédente, on obtient : $A(t) = 1000 \cdot 0,861^{\frac{t}{30}} = 1000 \cdot \left(0,861^{1/30}\right)^t$ En arrondissant $0,861^{1/30}$ à $0,995$, on obtient une formule qui permet de calculer l'activité $A(t)$ à un instant $t$ quelconque :

$$A(t) = 1000 \cdot 0,995^t$$

A nouveau, une comparaison détaillée entre les valeurs fournies dans les tableaux 1 et 3, et celles que l'expression analytique permet de calculer, illustre le degré de précision obtenu.

| $t$ (jours) | Activité (imp./m) | $A(t)$ (imp./m) |
|---|---|---|
| 0.2 | 999 | 999 |
| 0.4 | 998 | 998 |
| 0.6 | 997 | 997,01 |
| 0.8 | 996 | 996,01 |
| 1 | 995 | 995,02 |

| $t$ (jours) | Activité (imp./m) | $A(t)$ (imp./m) |
|---|---|---|
| 138.2 | 502 | 501,85 |
| 138.6 | 501 | 500,85 |
| 139 | 500 | 499,85 |
| 139.4 | 499 | 498,86 |
| 139.8 | 498 | 497,86 |
| 140.2 | 497 | 496,87 |
| 140.6 | 496 | 495,88 |

Mais une telle comparaison suggère aussi que la linéarité observée au départ dans ces tableaux devient maintenant relativement « idéale ». En fait, ce seraient les arrondis qui auraient créé la linéarité ...

### Une interprétation de l'observation troublante

L'expression analytique de la fonction $A(t)$ en fournit une explication raisonnable. En effet, on obtient

$$\frac{A(t+0,2)}{A(t)} = \frac{1000 \cdot 0,995^{t+0,2}}{1000 \cdot 0,995^t} = 0,995^{0,2} = 0,9990\ldots$$

Ce rapport est donc bel et bien constant, c'est-à-dire indépendant de $t$. Cette propriété compense en quelque sorte le défaut de linéarité qui résulte de l'adoption générale de la fonction $A(t)$ pour décrire l'activité.

On obtient pareillement, dans le cas du tableau 3 :

$$\frac{A(t+0,4)}{A(t)} = \frac{1000 \cdot 0,995^{t+0,4}}{1000 \cdot 0,995^{t}} = 0,995^{0,4} = 0,9980\ldots$$

La conclusion est complètement analogue.

Et l'observation — troublante au départ — devient maintenant tout à fait compréhensible !

**Conclusions générales**

A la lumière de cette longue discussion, on peut raisonnablement affirmer que les trois feuilles de résultats proviennent bien de la même expérience, et que les principales propriétés observées à cette occasion s'expliquent à partir de la seule expression analytique de l'activité $A(t)$ sous la forme $A(t) = 1000 \cdot 0,995^{t}$, où $t$ est exprimé en jours, et $A(t)$ en impulsions/minute.

Les réserves que l'on peut être tenté de maintenir dans cette conclusion justifient que le problème soit qualifié d'« ouvert ». On dispose en effet d'une solution qui tient compte de toutes les observations, y compris de celles qui paraissaient troublantes. Mais rien ne permet de savoir *a priori* si la réponse proposée est correcte. **Seule la cohérence de l'argumentation permet de se faire une opinion !**

Ce dernier critère permet souvent de détecter le caractère « ouvert » d'un problème.

## 8.3 La grille de lecture : son contenu particularisé au problème, et quelques exemples

**Une grille de lecture.** Le corrigé relatif suggère de construire une grille de lecture qui s'attache à relever les éléments suivants,

- pour la phase d'intériorisation :
  - les types de calculs (numériques, algébriques, ...) effectivement présents, ou évoqués,
  - les types de représentations graphiques effectivement présentes, ou évoquées ;
- pour la phase de condensation :
  - les observations réalisées, en essayant de les relier à celles énumérées dans le corrigé relatif ;
- pour la phase de réification :
  - les relations explicitées entre les observations réalisées,
  - la structuration logique de la conclusion.

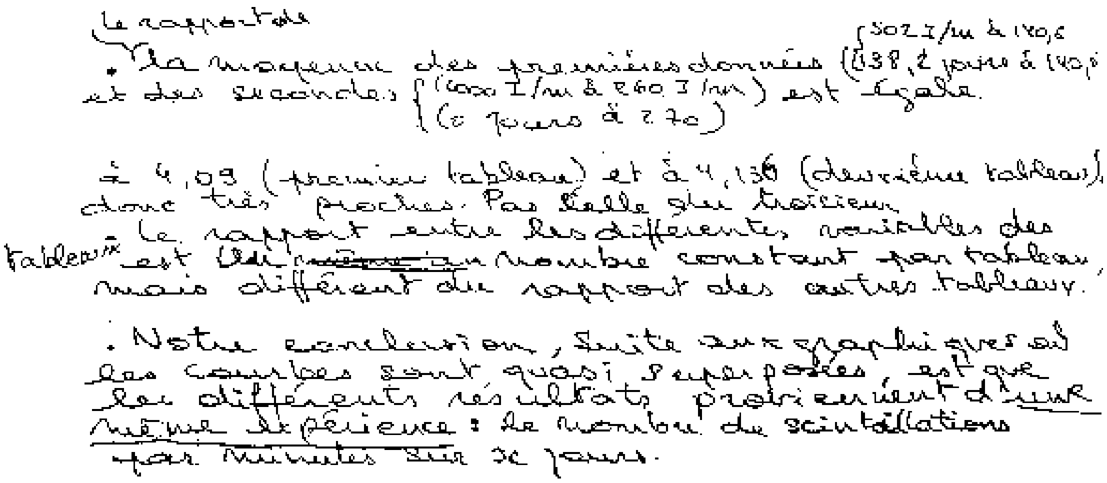
**Quelques exemples.**

Le déroulement de l'expérience a privilégié la recherche d'une solution au problème sur la production d'un rapport. Les commentaires sur les copies sélectionnées concernent donc aussi les brouillons préliminaires, souvent très intéressants et plus fouillés que ces rapports.

Les extraits de copies d'élèves présentés ci-après sont — une dernière fois — l'occasion de quelques commentaires relatifs à la grille de lecture et à sa pertinence.

**Une copie difficile.**

La copie n° 7 et les brouillons qui l'accompagnent renferment des calculs « incantatoires[6] » : moyennes (et les moyennes en jours sont transformées en minutes, ...), quotient de l'activité par le temps, activité transformée systématiquement en impulsions/jours, ... La conclusion du rapport est exprimée sous une forme d'apparence argumentée, mais en dehors de cela, le rapport est difficile à interpréter. Il ne nous semble pas évident que la phase d'intériorisation ait été atteinte, au sens où les données mêmes du problème ne paraissent pas bien comprises.


Le rapport de
. La moyenne des premières données (502 I/m à 140,6 ; 38,2 jours à 140,?) et des secondes (1000 I/m à 260 I/m) (0 jours à 270) est égale à 4,09 (premier tableau) et à 4,136 (deuxième tableau) donc très proches. Pas celle du troisième.
. Le rapport entre les différentes variables des tableaux est un nombre constant par tableau, mais différent du rapport des autres tableaux.
. Notre conclusion, suite aux graphiques où les courbes sont quasi superposées, est que les différents résultats proviennent d'une même expérience : le nombre de scintillations par minutes sur 30 jours.

Copie n° 7

**Une copie intéressante.**

On relève dans les brouillons associés à la copie n° 8 des calculs de différences finies poussés jusqu'au troisième ordre.

Tous les graphiques présents dans ces brouillons sont ceux du temps considéré comme fonction de l'activité. Les droites qui correspondent aux tableaux 1 et 3 sont correctement représentées, le graphique correspondant au tableau 2 est assimilé à une parabole.

La construction des graphiques correspondant à chacun des tableaux est présenté dans les brouillons. Les calculs de différences finies et les droites associées au tableaux 1 et 3 indiquent que les observations de linéarité, de distinction de linéarité et de non-linéarité ont été faites. Les phases d'intériorisation et de condensation semblent donc bien maîtrisées.

Quelques éléments propres à la phase de réification apparaissent : la conclusion est exprimée sous une forme argumentée, mais les liens entre les arguments sont peu explicités.

[6] Nous appelons ainsi les calculs qui ne semblent être présents que pour donner l'illusion d'un habillage mathématique, sans avoir aucune relation sensée avec le problème.

- La croissance de B et C est constante
- Plus le temps augmente, plus l'activité diminue.
- Si on trouve le rapport entre l'activité/Minute et le temps, il sera normalement possible de trouver la réponse.
- Sur les graphiques :

↳ le A forme une parabole

↳ le B et le C forment une droite

Il serait donc possible que le A ne fasse pas partie de la même expérience que le B et le C.

- Nous avons pensé calculer la pente de chaque graphique.

⚠ pas eu le temp de le faire

Copie n° 8

**Une copie qui va loin . . .**

On retrouve dans les brouillons de la copie n° 9 des calculs de pentes relatifs aux droites associées aux tableaux 1 et 3, ainsi que des calculs de différences finies relatifs au tableau 2 et ce, jusqu'au deuxième ordre.

Des graphes du genre droite et courbe sont esquissés dans ces brouillons, et associés aux tableaux correspondants ; ils sont fournis comme graphes de l'activité en fonction du temps. Un dessin assez soigné du temps considéré comme fonction de l'activité comporte aussi des tracés approximatifs de tangentes aux points utiles. Aucune équation de ces lignes n'est présente.

L'observation de linéarité, la construction des graphiques correspondants à chaque tableau, les observations d'insertion des graphiques, de distinction de linéarité, de non-linéarité sont présentes dans le rapport ou dans les brouillons, ainsi que l'assimilation d'une pente sur un intervalle de temps assez petit à une (pente de) tangente. Les phases d'intériorisation et de condensation sont donc quasiment achevées.

Quant à la phase de réification, des éléments encourageants sont présents : la conclusion repose sur une argumentation relativement valable, même si les justifications sont presque exclusivement qualitatives.

Il est tout à fait probable que ce 3 feuilles de résultats proviennent de la même expérience - EXPLICATIONS -
Dans le tableau (b), la ~~variation~~ diminution de l'activité n'est pas constante alors que dans le (a) et le (c) est l'est - Cela est dû au fait que dans le tableau (a) & (c) la variation de temps est trop courte que pour observer une irrégularité dans la diminution de l'activité
Pour prouver cela, nous avons d'abord tracé la courbe du tableau (b) et nous avons observé si les points du tableau (a) & (c) se trouvaient sur cette courbe - Comme il y avait 1 certain manque de précision, nous avons tracé la pente des droite (a) & (c) qui correspondaient bien ~~à la~~ aux tengeantes de la courbe (b)
Il y a sûrement moyen d'y arriver par calcule mais nous n'avons pas eu le temps

Copie n° 9

## 8.4 Quelques conclusions

Tant dans l'amorce d'une analyse théorique des questions d'évaluation qu'à travers les expériences réalisées, dont celle résumée ci-dessus, il semble bien que le découpage en trois phases de la résolution d'un problème peut présider à la mise au point d'un corrigé relatif, et fournir une grille de lecture des productions d'élèves.

En se limitant aux problèmes considérés, il est rare que la phase d'intériorisation ne soit pas atteinte. La phase de condensation est celle dont le niveau de développement est — assez naturellement — le plus variable. La phase de réification n'est quasiment jamais achevée, même si dans certains cas, des éléments déterminants sont présents.

Le schéma d'évaluation précédent, éventuellement modifié, a très probablement un sens en terme d'*évaluation formative.*

Mais il serait paradoxal que ce qui est considéré comme l'activité mathématique par excellence — la résolution de problèmes — et qui est présentée ici comme une compétence terminale importante, échappe à l'*évaluation certificative.*

La définition d'une évaluation certificative de la résolution de problèmes est un objectif incontournable, ... mais hérissé de difficultés multiples tant la résolution de problèmes est une activité globale et complexe.

**Sur quoi conviendrait-il donc de fonder une évaluation certificative de la résolution de problèmes ?**

Il semble d'abord assez clair que la résolution de problèmes est une activité relativement nouvelle dans les classes. Les données dont nous disposons quant à ses modalités d'évaluation ne sont pas encore décisives. Il est néanmoins permis de croire que cette évaluation ne sera pas de type « classique »Ėn particulier, il ne faut pas trop essayer de transposer à ce genre d'activité des épreuves telles que les examens à temps limité, . . .

Plus fondamentalement, l'évaluation certificative à définir doit être basée sur les spécificités de la résolution de problèmes. Or, cette activité est globale, complexe et éminemment dynamique. Il faut donc « mesurer » son caractère dynamique, évolutif. Cela suggère de ne pas se limiter à une seule épreuve, mais bien de prendre en compte un ensemble d'épreuves qui fourniraient des indices de progression.

En conséquence, parmi les trois fonctions que l'on reconnaît à l'évaluation (sommative, prédictive, formative), la fonction prédictive est probablement à privilégier dans le cadre qui nous occupe. Le principe d'évaluation pourrait être le suivant :

– un certain nombre d'épreuves de résolution de problèmes — de modalités appropriées — seraient organisées tout au long de l'année,
– chaque élève se verrait attribuer pour chaque épreuve un *vecteur de notation* suivant un schéma tel que celui décrit par exemple plus haut,
– pour chaque élève, certains indices de progrès seraient calculés à partir de ses vecteurs de notation, ces indices étant les rapports entre deux notes (vectorielles) attribuées à certaines épreuves dont les objectifs sont comparables[7].

Ces différents indices constitueraient le renseignement certificatif recherché. Par exemple, un certain nombre bien défini de tels facteurs seraient de nature à autoriser le passage d'une classe à la suivante, en conformité avec les exigences attachées à l'option suivie.

Il est bien clair que ces indices ne seraient pas le seul critère de certification à retenir. Les épreuves bien connues de restitution des acquis ou de reproductions ou transpositions d'activités de routines gardent leur pertinence, mais — du moins faut-il le souhaiter ! — dans leur seul champ de compétences propres.

La définition d'une forme d'évaluation certificative adaptée à la résolution de problèmes présenterait l'intérêt de consolider un enseignement organisé autour de ce type d'activité.

Il reste à insister encore sur la nécessité du caractère opérationnel de ce type d'évaluation : si on veut agir sur la vie quotidienne des classes, il importe que toute procédure d'évaluation de la résolution d'un problème soit fondamentale — c'est-à-dire englobe l'essentiel de l'activité — et reste néanmoins simple. Une notation vectorielle qui ne dépasse pas trois composantes semble réaliste dans ce contexte.

Enfin, il faut revenir sur la nécessité de promouvoir un enseignement de la résolution de problèmes, pour lui-même et dans la durée. La problématisation des enseignements de mathématique peut et doit y contribuer. Le développement d'activités du type « laboratoire de

[7]Par exemple, une suite de tests sur la démonstration en géométrie peuvent constituer des épreuves d'objectifs comparables.

mathématiques », où le caractère profondément expérimental de la résolution de problèmes serait à l'honneur, est une autre voie à explorer.

# Références


[1] *Décret du 24 juillet 1997 définissant les missions prioritaires de l'enseignement fondamental et de l'enseignement secondaire et organisant les structures propres à les atteindre*, Moniteur Belge du 23 septembre 1997, 24653–24674, 1997. 2

[2] *Quelle philosophie pour l'enseignement des mathématiques au Secondaire*, Commission Pédagogique de la SBPMef, Mathématique et Pédagogie, 102, 5–28, 1995. 4

[3] R. Douady, *Jeux de cadres et dialectique outil-objet*, Recherches en didactique des mathématiques, 7, n° 2, 5–31, 1986. 4

[4] R. Douady, *De la didactique des mathématiques à l'heure actuelle*, Cahiers de didactique des mathématiques n° 6, IREM de Paris VII, 4

[5] E. Dubinsky, *A theory and practice of learning college mathematics*, Mathematical thinking and problem solving, Lawrence Erlbaum Associates Publishers, USA, 1987. 7

[6] G. Glaeser, *Fondements de l'évaluation en mathématiques*, Brochure APMEP n° 96, Paris, 1995. 21

[7] R. Gras, *D'une classification d'objectifs opérationnalisables à des exercices divers du premier cycle*, in Activités Mathématiques en quatrième-troisième, Brochure n° 33 de l'APMEP, 101–108, 1979. 1

[8] P. Halmos, *The teaching of problem solving*, The American Mathematical Monthly, 82, 446–470, 1975. 3

[9] P. Halmos, *The heart of mathematics*, The American Mathematical Monthly, 87, 518–524, 1980. 3

[10] G. Polya, *Comment poser et résoudre un problème*, Ed. Dunod, Paris, 1989. 5

[11] G. Polya, *La découverte des mathématiques*, deux tomes, Ed. Dunod, Paris, 1967.

[12] A.H. Schoenfeld, *Reflections on doing and teaching mathematics*, Mathematical thinking and problem solving, Lawrence Erlbaum Associates Publishers, USA, 1987.

[13] A.H. Schoenfeld, *Mathematical problem solving*, Academic Press Inc., Orlando USA, 1985. 6

[14] A.H.Schoenfeld, *Learning to think mathematically*, Handbook of research on mathematics teaching and learning, NCTM, MacMillan Publishing Company, USA.

[15] A. Schoenfeld, *Explicit heuristic training as a variable in problem-solving performance*, Journal for Research in Mathematics Education, 10, n3, 173–187, 1979.

[16] A. Sfard, *On the dual nature of mathematical conceptions : reflections on processes and objects as different sides of the same coin*, Educational Studies in Mathematics, 22, 1–36, 1991. 7

[17] D. Tall, *Understanding the processes of advanced mathematical thinking*, L'enseignement mathématique, 42, 395–415, 1996. 7