

Etude de quelques choix d'enseignement du théorème de Thalès

Slim Mrabet

Institut Supérieur de l'Education et de la Formation Continue

Le théorème de Thalès a résisté à toutes les réformes qui se sont succédées dans l'enseignement. Il a montré que c'est un passage obligé, et il a toujours été, aux termes de Duperret (1995), un moment **redoutable** d'enseignement.

Dans cette intervention, nous étudions quelques points liés à l'enseignement du théorème de Thalès en se référant à quelques travaux antérieurs de didactique des mathématiques sur ce sujet. Nous rappellerons brièvement les conditions d'apparition de cette notion dans le savoir savant. Ensuite, nous préciserons les différentes approches avec lesquelles ce théorème est représenté dans l'enseignement. Après, nous préciserons les liens de cette notion avec d'autres concepts mathématiques. Enfin, nous présenterons quelques propositions visant à améliorer son enseignement.

1. Le théorème de Thalès dans le savoir savant:

Appelé dans l'histoire : théorème des lignes proportionnelles, le théorème de Thalès est apparu pour la première fois dans les Eléments d'Euclide (IV^{ème} siècle avant J.C) sous l'énoncé suivant (Livre II, proposition 6) :

" Si l'on conduit une droite qui soit parallèle à un des côtés d'un triangle, cette droite coupera proportionnellement les côtés de ce triangle ; et si deux côtés d'un triangle sont coupés proportionnellement, la droite qui joindra les sections sera parallèle au côté restant du triangle ".

Euclide traite également ce problème dans l'espace, dans la propriété 17 du livre XI :

"Si deux droites sont coupées par des plans parallèles, elles seront coupées proportionnellement".

Par la suite, d'autres formes de ce théorème apparaissent, citons l'énoncé de Hadamard (1898) : " Deux sécantes sont coupées en parties proportionnelles par des droites parallèles".

Nous remarquons que dès son apparition, le théorème de Thalès a été présenté sous plusieurs formes, ce critère persiste encore dans l'enseignement.

2. Le théorème de Thalès dans l'enseignement français

Brousseau (1995) précise que les travaux d'une enquête de l'APMEP (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public) ont repéré trois formes de représentation du théorème de Thalès dans les manuels français de la deuxième moitié du 20^{ème} siècle:

2.1 La conservation des abscisses (sur les sécantes)

Cette approche exprime que le rapport des mesures algébriques (ou des distances) des segments portés par une sécante est égal au rapport des mesures algébriques (ou des distances) des segments correspondants portés par l'autre sécante.

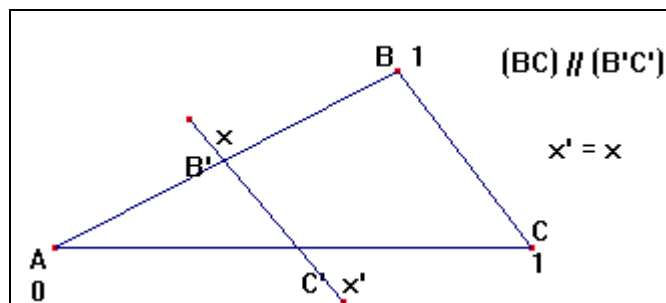


fig 1

Nous avons $\frac{\overline{AB}}{\overline{AB'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AC'}}$

“ Conservation des abscisses”

Cette représentation peut se traduire par la relation vectorielle:

si $\overline{AB} = \alpha \overline{AB'}$ alors $\overline{AC} = \alpha \overline{AC'}$ où α est un réel.

2.2. La conservation du rapport de projection

Elle se distingue de la première approche par la correspondance choisie. Dans cette approche, l'égalité des rapports porte sur les segments correspondants considérés sur les deux sécantes.

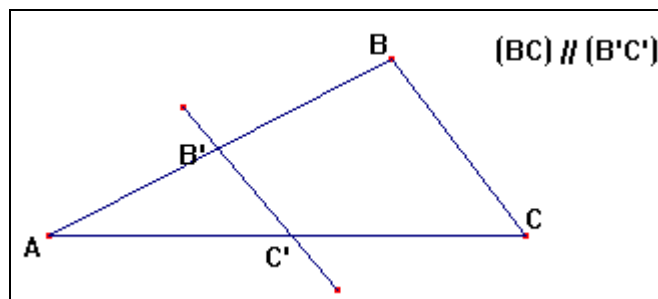


fig 2

Nous avons $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB'}}{\overline{AC'}}$

“Conservation du rapport de projection”

2.3 La dilatation :

Elle se distingue des deux premières approches en faisant appel au troisième côté du triangle, en considérant une homothétie ayant pour centre le point d'intersection des sécantes.

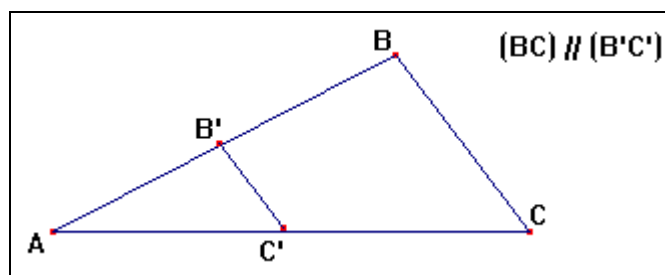


fig 3

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$$

“Dilatation”

Cette approche se traduit par la relation vectorielle : si $\overrightarrow{B'C'} = \alpha \overrightarrow{BC}$ alors $\overrightarrow{AB'} = \alpha \overrightarrow{AB}$ où α est un réel.

3. Relations entre le théorème de Thalès et d'autres concepts mathématiques :

3.1 La genèse scolaire du théorème de Thalès

Tout au long de la scolarité, plusieurs savoirs interviennent dans la genèse scolaire du théorème de Thalès. D'après Brousseau (1995), c'est le phénomène de représentation, notamment celle d'un objet grand par un petit objet qui est la base de cette genèse.

Pour l'enfant, les phénomènes de symbolisation et d'analogie lui permettent de faire des représentations à l'échelle et des similitudes modulo la taille. Il doit souvent représenter sur son cahier ce que le professeur écrit au tableau. La similitude se réduit souvent à des calculs à l'aide de la proportionnalité et l'application linéaire. Cette dernière notion est rencontrée par l'enfant dès le primaire, où la multiplication par un nombre (naturel) s'explique par le phénomène d'agrandissement et permet l'introduction de la notion de "rapport géométrique". La notion de similitude permet à son tour l'introduction du théorème de Thalès par l'approche "dilatation" ce qui prépare l'homothétie. La "dilatation" permet d'associer la similitude et l'homothétie au théorème de Thalès puisque dans la majorité des problèmes, le point d'intersection des sécantes est présent.

Brousseau (1995) recommande d'adopter la "dilatation" comme l'énoncé principal du théorème de Thalès. Les deux autres approches, peu utilisées, peuvent être déduites de la "dilatation" puisque dans \mathcal{R}^2 elles lui sont équivalentes.

3.2 Le théorème de Thalès et la trigonométrie

Duperret (1995) indique que de la figure suivante caractéristique de l'approche "dilatation" découlent deux rapports:

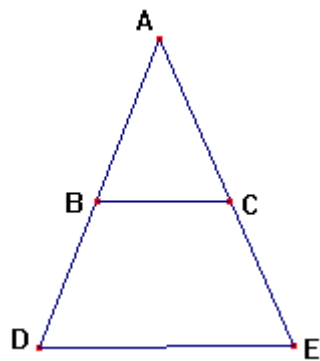


fig 4

k_p : rapport de projection de (AB) sur (AC)

$$k_p = \frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AD} = \frac{CE}{BD}, \text{ ce qui permet d'introduire la notion de cosinus.}$$

k_h : rapport d'homothétie de (ABC) à (ADE)

$$k_h = \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}, \text{ ce qui permet d'introduire les notions de sinus et de}$$

tangente.

La projection orthogonale permet de réaliser ce passage d'une figure caractéristique du théorème de Thalès à des notions trigonométriques. Le cosinus apparaît donc comme un opérateur-lien du tableau de proportionnalité ainsi obtenu (fig 5), (Jaffrot, 1995)

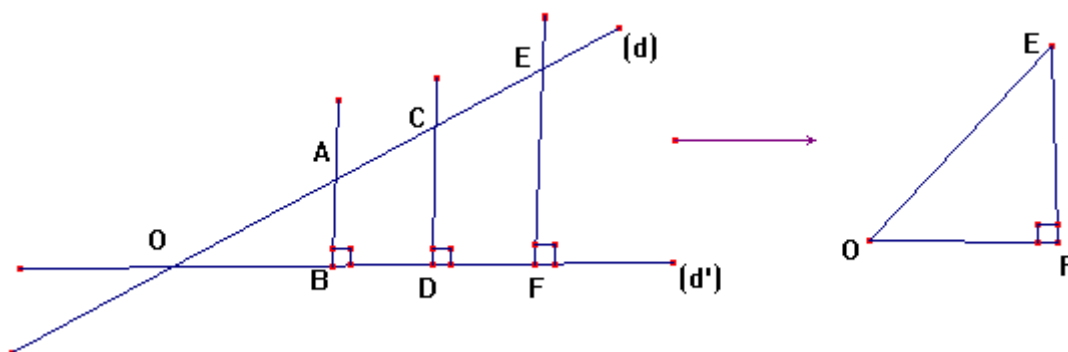


fig 5

Longueurs	sur	O	A	O	O
(d)		A	C	C	E
Longueurs	sur	O	B	O	O
(d')		B	D	D	F

On définit dans chacun de ces triangles emboîtés le cosinus de l'angle commun Θ avant de généraliser et définir le cosinus d'un angle Θ dans un triangle rectangle isolé.

3.3 Le théorème de Thalès et les équations

Dans ce paragraphe, nous montrons la contribution du théorème de Thalès à l'approfondissement des règles de calcul algébrique et à montrer le vrai sens de l'algèbre, ce qui permet à l'élève d'éviter les révisions systématiques des propriétés établies dans les classes précédentes.

Dans les deux exemples suivants, caractéristiques de l'approche "dilatation", proposés par BACH et MAROT (1995), il s'agit d'appliquer le théorème de Thalès pour résoudre des équations, une fois en appliquant une simple distributivité de type $x(x + a)$ et une fois où on fait appel à une double distributivité de type

$$(x + a)(x + b)$$

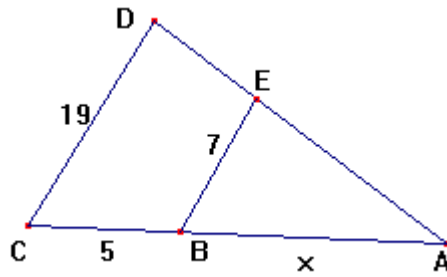


fig 6

Calculer x sachant que : $(CD) \parallel (BE)$; $BC = 5$; $CD = 19$; $BE = 7$

D'après le théorème de Thalès on $\frac{x+5}{x} = \frac{19}{7}$ ce qui est équivalent à $x + 5 = \frac{19}{7}x$. La dernière équation peut se résoudre de plusieurs manières, en voici deux: dans la première, on part de $ab + ac$ pour l'écrire $a(b + c)$, dans la seconde, on suit le sens contraire.

Première manière :

$$x + 5 = \frac{19}{7}x \Rightarrow x + 5 - x = \frac{19}{7}x - x \Rightarrow 5 = x \left(\frac{19}{7} - 1 \right) \Rightarrow 5 = x \frac{12}{7} \Rightarrow x = 5.$$

$$\frac{7}{12} = \frac{35}{12}$$

Deuxième manière :

$$x + 5 = \frac{19}{7}x \Rightarrow 7(x + 5) = 19x \Rightarrow 7x + 35 = 19x \Rightarrow 35 = 12x \Rightarrow x = \frac{35}{12}$$

Exemple 2

L'unité étant le centimètre. Sur le dessin ci-dessous EFG est un triangle tel que $FG = 7$ et $[EG]$ mesure 5 cm de plus que $[EF]$, on pose $EF = x$. Lorsqu'on prolonge $[EF]$ de 1cm, on obtient M ; lorsqu'on prolonge $[EG]$ de 3 cm on obtient N et les droites (FG) et (MN) sont parallèles.

Construire la figure en vraie grandeur après avoir justifié toutes les étapes.

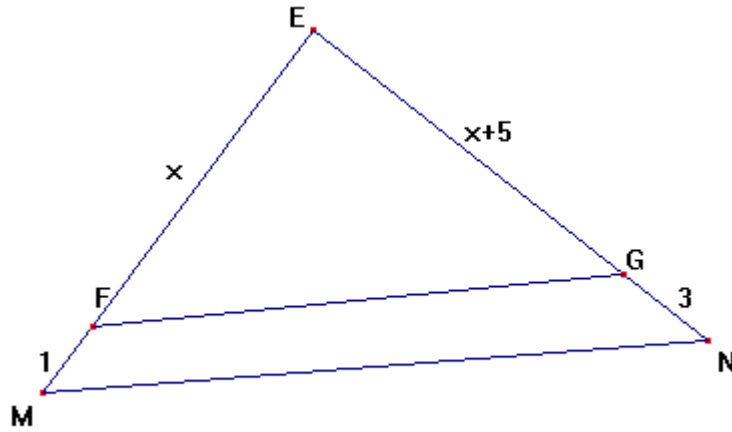


fig 7

L'équation déduite du théorème de Thalès est : $\frac{x+1}{x} = \frac{x+8}{x+5}$. Pour sa résolution, l'élève applique aussi bien la distributivité simple que double. L'équation du second degré ainsi obtenue se ramène à une équation du premier degré.

Dans beaucoup de cas, les deux approches "conservation des abscisses" et "conservation du rapport de projection" sont également efficaces pour résoudre des équations. Leur contribution spécifique apparaît dans les problèmes des "petits bouts" évoqués par Duperret (1995) où on peut avoir une équation simplifiée par rapport à celle déterminée à partir de la "dilatation". La figure suivant illustre bien cette idée :

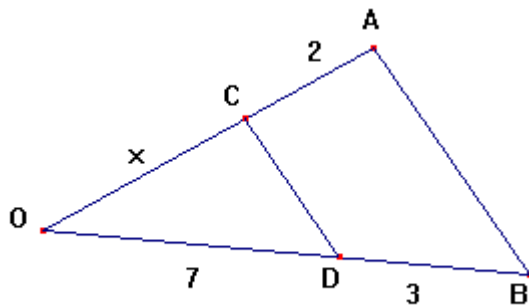


fig 8

3.4 Le théorème de Thalès, les vecteurs et le barycentre

La notion de barycentre peut constituer une occasion d'utilisation indirecte du théorème de Thalès, faisant appel à un nouveau concept : le vecteur, et profitant du " produit d'un vecteur par un réel ".

Duperret (1995) considère le calcul vectoriel comme un outil permettant d'introduire " Thalès sans risque " et propose le problème suivant qui confirme cette idée :

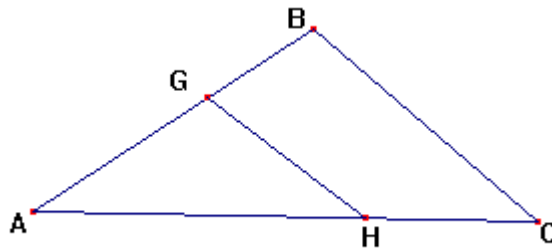


fig 9

Si G est le barycentre de A(a), B(b) alors H est le barycentre de A(a), C(b).

Ce problème peut se traduire par la relation vectorielle : si $\overrightarrow{AG} = \lambda \overrightarrow{AB}$ alors $\overrightarrow{AH} = \lambda \overrightarrow{AC}$ et met en évidence l'approche " conservation des abscisses ".

Il s'agit donc d'une ouverture sur les vecteurs, et la classique relation: $\lambda (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \vec{u} + \lambda \vec{v}$ ne devient qu'une simple conséquence du théorème de Thalès. Mais y a-t-il des précautions dans l'introduction des vecteurs?

Duperret (1995) déconseille de présenter le théorème de Thalès uniquement avec les vecteurs, puisque ceci lui fait " perdre son sens". En effet, la puissance du calcul vectoriel pourrait cacher le rôle de la figure et de ses propriétés.

4. Propositions d'enseignement du théorème de Thalès

Duperret (1995) donne deux propositions visant à améliorer l'enseignement du théorème de Thalès: l'enseigner d'une façon dynamique et suivant une certaine progression.

4.1 Les deux dynamiques de Thalès:

D'après Duperret, une figure caractéristique du théorème de Thalès, qui semble être statique, cache deux dynamiques qui ont pu le faire naître:

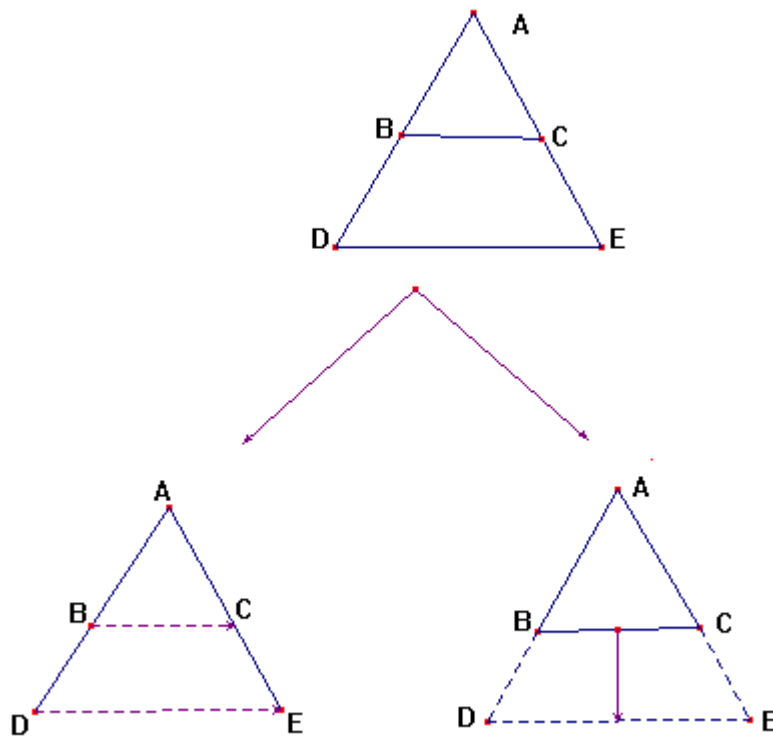


fig 10

L'aspect "projection" met en évidence le passage de la droite (AB) à la droite (AC) alors que l'aspect "homothétie" met en évidence le passage du triangle ABC au triangle ADE (fig 10).

Pour aboutir à une expertise des deux dynamiques du théorème de Thalès, Duperret (1995) recommande d'extraire de la situation-mère suivante, deux situations filles engendrées par modification d'une variable (fig 11):

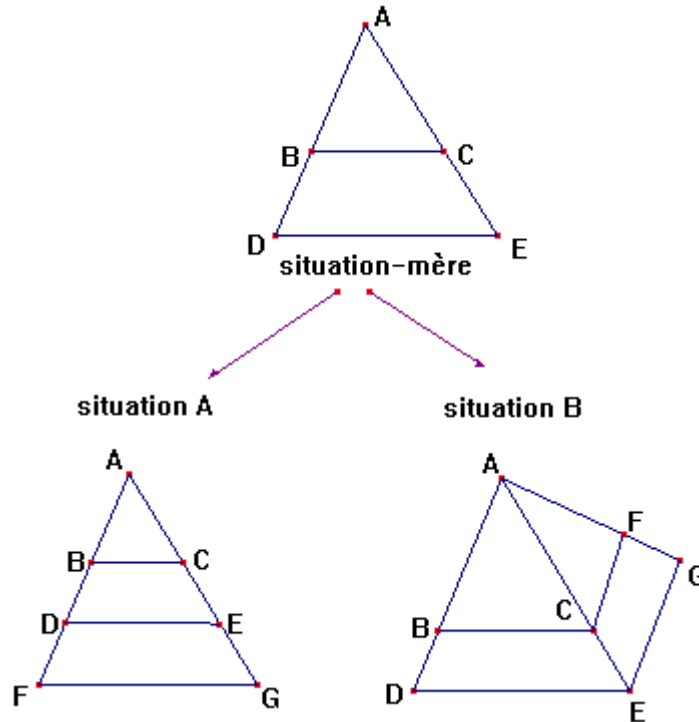


fig 11

Dans la situation A, l'invariant est l'aspect "projection", le variant est l'aspect "homothétie".

Dans la situation B, l'invariant est l'aspect "homothétie", le variant est l'aspect "projection".

4.2 Progression possible

Les deux approches "conservation des abscisses" et "conservation du rapport de projection", ayant la même figure caractéristique, sont, dans certains travaux, groupés en un seul aspect. Par exemple, pour Duperret (1995), il n'existe que deux aspects du théorème de Thalès : l'aspect "projection" et l'aspect "homothétie". Mais concernant l'ordre de l'enseignement de ces deux dernières

approches, les idées divergent : Brousseau (1995) considère, comme nous l'avons précisé plus haut, que la "dilatation" est un énoncé principal du théorème de Thalès, puisqu'il permet de résoudre la majorité des problèmes faisant intervenir ce théorème et met en évidence la relation Thalès-homothétie, alors que Duperret (1995) recommande d'adopter l'ordre contraire. Duperret suggère une progression dans l'enseignement du théorème de Thalès (en France) qui consiste à n'enseigner en quatrième que l'aspect "projection" et de renvoyer l'aspect "homothétie" en troisième. Sur ce même sujet, Betton (1995) suggère d'introduire la "projection" **après** l'"homothétie". Dans sa proposition de l'enseignement de la géométrie au collège (en France), il considère qu'il est préférable d'enseigner les triangles semblables en cinquième. Le "Thalès-homothétie", qui leur constitue une bonne continuité, peut être l'unique aspect à enseigner en quatrième, et renvoie ainsi le "Thalès-projection" pour la classe de troisième.

Notre point de vue :

Nous pensons que les trois approches du théorème de Thalès doivent avoir la même importance dans le cours. Elles doivent trouver le temps de s'installer et de se réorganiser l'une par rapport aux autres. Ceci permet d'enrichir l'ensemble de problèmes à résoudre et d'apprendre à l'élève de prendre des décisions dans chaque situation. Quant au problème de l'ordre, nous pensons que choisir la "dilatation" comme un énoncé principal est plus cohérent avec le sens de la géométrie, dans la mesure où le passage des figures aux proportions est un point fondamental de l'enseignement de la géométrie élémentaire au collège. Nous considérons qu'attribuer à la notion de "même forme" des

relations mathématiques est un instrument intellectuel indispensable pour l'élève. Nous remarquons également que la "dilatation" est plus proche de l'environnement de l'enfant et du sens historique du théorème de Thalès. Dans ces conditions, nous pouvons éviter de démontrer le "théorème des milieux" qui ne devient qu'un simple cas particulier. Nous remarquons également, que dans la majorité des applications du théorème de Thalès, le point d'intersection est visible sur la figure, et on fait recours rapidement au triangle. Les problèmes où le point d'intersection est inexistant (ou caché), peu rencontrés, peuvent être traités avec la "conservation des abscisses" ou la "conservation du rapport de projection" qu'on déduit immédiatement de la "dilatation".

Conclusion

Dans cette communication, nous avons décrit brièvement les conditions d'apparition du théorème de Thalès dans le savoir savant. Dans l'enseignement français, cette notion est présentée avec trois approches: "conservation des abscisses", "conservation du rapport de projection" et "dilatation". Nous avons montré la richesse de ce que Chevallard appelle: sa "niche écologique", puis nous avons présenté quelques propositions, visant à améliorer son enseignement.

Bibliographie

Abdeljaouad M. (2002), Une démonstration de Thalès, *Miftah al-Hissab*, n°100, pages 2-12.

Bach M-J et Marot M., 1995; "Enoncé de Thalès: support pour le calcul algébrique", in "*Autour de Thalès*", *Bulletin Inter-IREM*, Commission premier cycle, p 161-167.

Betton S., 1995; "Agrandissement, Projections, Thalès,...Programme à revoir", in "*Autour de Thalès*", *Bulletin Inter-IREM*, Commission premier cycle, p 211-219.

Brousseau G., 1995; "Promenade avec Thalès, de la Maternelle à l'Université", in "*Autour de Thalès*", *Bulletin Inter-IREM*, Commission premier cycle, p 87-124.

Duperret J. C., 1995; "Pour un Thalès dynamique", in "*Autour de Thalès*", *Bulletin Inter-IREM*, Commission premier cycle, p 125-144

Hadamard J., 1988; "*Leçon de géométrie élémentaire*", livre III, Edition Arnauld Colin.

Jaffrot M., 1995; " De l'intérêt d'aborder le théorème de Thalès (de 3^{ème}) vu sous son aspect projection dans la continuité du programme de 4^{ème}, in "***Autour de Thalès***", *Bulletin Inter-IREM*, Commission premier cycle, p 191-200.