L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés

Actes du colloque emf 2006

Thème 6 – Bilan du groupe de travail Transition secondaire/postsecondaire et enseignement des mathématiques dans le postsecondaire

Responsables

Isabelle Bloch, *IUFM d'Aquitaine, DAEST Université Bordeaux 2, France*
Gérard Kientega, *Université de Ouagadougou, Burkina Faso*
Denis Tanguay, *Université du Québec à Montréal, Canada*

Les participants

Le groupe du thème 6 comptait dix-huit personnes, dont seize ont assisté aux travaux de façon permanente. Nous les remercions pour leur participation active et leurs apports aux échanges, qui ont été riches, dans une ambiance excellente : Nadia Azrou, Analía Bergé, Marie-Octobre Blanchard, Isabelle Bloch, Geneviève Bretenoux, Stéphanie Bridoux, Claudia Corriveau, Patrick Frétigné, Jean-Yves Gantois, Imène Ghedamsi, Denise Grenier, Gérard Kientega, Gwenola Madec, Josée Morissette, Hikma Smida, Denis Tanguay, Fernanda Viola, Carl Winsløw. Faïza Chellougui n'ayant pu se déplacer, Viviane Durand-Guerrier s'est jointe au groupe pour une présentation : nous l'en remercions vivement.

Les participants au Thème 6 sont professeurs de niveau universitaire, ou (le « ou » mathématique, bien entendu) chercheurs ou étudiants en didactique des mathématiques, à la maîtrise ou au doctorat.

Le travail des participants s'est réparti de façon équilibrée entre les questions macro-didactiques – questions curriculaires, questions sur l'impréparation des élèves du secondaire aux études scientifiques et plus particulièrement, au formalisme mathématique – et les questions micro-didactiques, qui ont essentiellement porté sur les nouvelles exigences formelles à l'entrée à l'Université : comment faire travailler les étudiants sur la démonstration, sur le symbolisme, sur la logique propositionnelle… ? De façon isolée ou en lien avec des contenus ? Un travail d'analyse d'erreurs des étudiants peut-il aider les enseignants des premières années d'université à mieux ajuster leurs exigences et leur enseignement ? Comment les enseignants conçoivent-ils l'enseignement universitaire et la nécessité, ou non, d'introduire les outils informatiques et la résolution de problèmes dans le travail des étudiants ? Quelles modifications des curriculums et des évaluations sont souhaitables ou possibles ?

Les contributions

On peut repérer, dans le travail du groupe, trois moments :

- Un premier moment d'interrogation sur la transition vers les mathématiques formelles de l'enseignement supérieur, sur l'efficacité de l'apprentissage suscité selon le degré de formalisme exigé, selon les modes d'arrimage d'un tel formalisme aux contenus et au sens.

- Un deuxième moment, où sont examinées des propositions alternatives à la présentation formelle du savoir et à l'organisation (traditionnelle ou non) des curriculums sous ce rapport.
- Un moment enfin où l'on essaie de penser et d'organiser les éléments apportés par les différents participants, afin d'éclairer ce que pourrait être la construction d'un rapport satisfaisant à la rationalité mathématique et à l'usage du formalisme ; ce dernier moment est aussi celui où l'on examine les théories qu'apporte la didactique des mathématiques pour analyser la transition.

Premier moment

Stéphanie BRIDOUX a montré ce que pouvait avoir d'irréaliste un enseignement de première année d'université axé sur la maîtrise des contenus d'Analyse par le seul formalisme : en Belgique, où un entraînement intensif au formel est imposé, les tests montrent que les étudiants de deuxième ou troisième année utilisent certes le langage ainsi introduit, mais sans en contrôler adéquatement ni la syntaxe, ni surtout la sémantique. L'auteure présente ici les analyses d'un exercice consistant à faire fonctionner les définitions de topologie sur des objets comme les intervalles de IR, qui sont supposés être familiers aux étudiants. Elle montre que les activités engendrées pour le résoudre nécessitent en réalité de nombreuses adaptations. Ce type de tâches donne une vision essentiellement formelle des notions topologiques et ne semble pas constituer, a priori, une aide à la compréhension de celles-ci pas plus qu'il n'éclaire sur leurs apports spécifiques, notamment comme notions généralisatrices et unificatrices. L'illusion du contrôle par le « tout formel » montre une fois de plus ici sa vanité.

Nadia AZROU pose quelques questions sur la compréhension des mathématiques enseignées. Le professeur devrait être capable de faire le tri, pour les étudiants, entre ce qui est important et ce qui l'est moins, entre les définitions des notions et leur usage, entre les conceptions pragmatiques et les outils de démonstration. Le rôle de l'erreur est également à réévaluer, afin que les étudiants apprennent à en tirer les enseignements, dans la mesure où l'enseignant en aura lui-même analysé les potentialités comme instrument d'apprentissage plutôt que de sanction. L'auteure attire également l'attention sur les difficultés de codage et décodage des mathématiques et sur la nécessité pour l'enseignant de les prendre en compte. Elle donne l'exemple de l'enseignant qui, en cours, utilise toujours les mêmes symboles (x pour une variable libre et y pour une variable liée…), ce qui pourra se constituer en obstacle quand ces symboles reviendront dans des contextes différents (x est l'inconnue et y est donné…). Parmi d'autres considérations, l'auteure relève l'influence des examens sur l'enseignement, qu'elle estime généralement sous-évaluée. En témoignent d'ailleurs les travaux de C. Winsløw sur l'évaluation par projets en licence.

Faïza CHELLOUGUI met en évidence que le formalisme opératoire, qui devrait en principe contribuer à la clarification conceptuelle et à une meilleure compréhension des énoncés mathématiques, apparaît souvent en fait comme un obstacle à l'appropriation de ces concepts. Elle montre les difficultés engendrées par le formalisme dans la gestion et la manipulation des quantificateurs lors de l'introduction d'une nouvelle notion. Les résultats obtenus au cours d'une observation de binômes d'étudiants de première année en situation de résolution d'exercices confirment que la complexité de la structure logique d'un énoncé peut agir comme révélateur des phénomènes didactiques liés à l’usage du formalisme : faute de maîtrise au niveau sémantique, les étudiants manquent également le contrôle syntaxique, ce qui confirme bien que le second ne peut se passer du premier.

Hikma SMIDA et Imène GHEDAMSI se sont fixées comme objectif l’étude des pratiques enseignantes à l’université. Dans la majorité des projets d’enseignement, les pratiques relèvent d’une organisation classique où l’enseignant assume la direction du travail de construction théorique et laisse à la charge de l’étudiant le soin de développer des habiletés calculatoires et algorithmiques. Pour d’autres projets, la variété des méthodes et angles d’attaque que les enseignants cherchent à promouvoir pour démontrer, illustrer, appliquer ou approfondir les résultats mathématiques visés, révèle de leur part un réel souci de s’inscrire dans un cadre plus « constructiviste ». Les auteures ont proposé aux enseignants de l’université de Tunis un questionnaire sur leurs pratiques d’enseignement. Même s’il est difficile, sans une étude en classe, de repérer l’impact réel de ce résultat, l’étude montre une prise en compte par une majorité d’enseignants de nouveaux moyens d’apprentissage.

Par son intervention, Fernanda VIOLA a mis en évidence que les problèmes de transition vécus par les étudiants en première année d’Analyse – ce sur quoi les participants précédents s’étaient principalement penchés – ont leur pendant chez les étudiants universitaires dont la préparation en Algèbre linéaire est réduite au cours de Calcul matriciel de Première, section Économie et Sciences sociales, en France. S’il est précédemment apparu que la transition est difficile quand les exigences de formalisme se font brusquement trop grandes, sont mal arrimées à l’heuristique et à la construction du sens, il est symétriquement ressorti ici qu’on ne peut espérer une transition sans heurt quand le travail préparatoire minimal est systématiquement esquivé : dans le cours de Calcul matriciel de Première ES, par exemple, il y a peu ou pas de recours aux registres symboliques pour représenter les matrices, peu ou pas de doubles-indices, de sommations doubles, de propriétés « démontrées » autrement que pour les matrices 2 2 ou 3 3 ; la mise en fonctionnement des connaissances se fait essentiellement au niveau technique (selon la terminologie de A. Robert), etc. Bref, le cours sur les matrices au secondaire ne prépare en rien les étudiants à affronter les difficultés des cours d’Algèbre linéaire standards à l’université.

Deuxième moment

Selon Denise GRENIER, même du point de vue de la seule transition, la recherche des causes de difficultés des étudiants en début d’université ne peut se faire sans poser des questions d’ordre général comme : qu’est-ce que « faire des maths », pourquoi et comment les enseigner, quelles mathématiques enseigner ; sans se demander également quand et sous quelles conditions les étudiants sont en réelle position de construction des savoirs. L’auteure fait l’hypothèse que pour redonner à l’activité mathématique en classe le véritable sens qu’elle a chez les mathématiciens, il faut soumettre les étudiants à des « situations recherche », où ceux-ci sont confrontés à des problèmes ouverts, non mathématiquement résolus ou proches de questions actuelles de la recherche, où leur position de « chercheur » commande tout autant des amorces de résolution que l’élaboration et la réévaluation des questions, des définitions, des cadres et règles de résolution. De telles situations recherche permettent un travail sur des savoirs que l’auteure qualifie de « transversaux », tels l’expérimentation, la modélisation, la structuration, la formulation de conjectures, l’induction, la démonstration, etc., savoirs qui ne sont pas sans lien avec les savoirs d’ordres II et III dont il sera question chez J.-P. Drouhard. Les étudiants abordent alors ces savoirs selon une optique où il y a véritable dévolution, où le sens de l'activité retrouve sa place centrale, et l'auteure émet l'hypothèse que certaines difficultés – par exemple avec la démonstration – repérables lors de la transition secondaire-université, s'en trouvent réduites.

Patrick FRÉTIGNÉ a présenté les travaux du groupe Commission Inter IREM Université en remplacement de Fabrice VANDEBROUCK, occupé par un autre thème. Il a principalement été question ici de ce que A. Robert (1998) décrit comme « le lieu problématique du travail personnel », un des éléments parmi ceux qu'elle retient pour analyser les spécificité et complexité des mathématiques du lycée et de l'université (15 à 19 ans) :

> *Le travail personnel, « à la maison », nous semble devenir de plus en plus important pendant ces années* […]. *Il n'est pas question, ou de moins en moins, de se contenter d'écouter et de travailler en classe. Il y a trop d'éléments à retenir, il y a une quantité minimale de mise en fonctionnement des notions qui n'est pas atteinte en classe.* (*Ibid*., p. 153)

L'équipe de la Commission Inter IREM présente des exemples d'innovations actuellement pratiquées dans certaines universités françaises, et qui toutes utilisent les ressources des TICE (technologies de l'information et de la communication dans l'enseignement). Il s'agit à chaque fois, dans des formats (interactifs ou non) et selon des scénarios variables, de donner à l'étudiant la possibilité de travailler sur des exercices et des problèmes variés, accessibles via support informatique donnant également accès à des indices, des pistes de solution, des validations interactives, ou même des solutions complètes. L'étudiant apprend à organiser son travail personnel – qui incidemment ne se fait plus nécessairement « à la maison » – à son rythme, de façon autonome, selon un cheminement que permet d'individualiser la variété des ressources disponibles « en ligne ». Les auteurs font par ailleurs bien valoir qu'en un tel processus de mise en fonctionnement des notions, pour que l'étudiant prenne une part active, pour éviter par exemple qu'il ne consulte trop rapidement les aides sans consacrer suffisamment de temps et d'efforts aux phases de recherche, il faut aménager des scénarios précis, cohérents, où s'articulent séances machines et séances « traditionnelles », pendant lesquels l'enseignant peut notamment dresser les bilans et discuter avec les étudiants de certains aspects plus pointus des problèmes travaillés en séances machines. Et les auteurs de conclure : « Il ne s'agit donc pas de remplacer l'enseignant dans son rôle de formateur et de médiateur de la connaissance mais au contraire, de lui permettre un recentrage sur les aspects fondamentaux du métier d'enseignant-formateur, sur ceux où il est irremplaçable. »

Troisième moment

Carl WINSLØW tente de mieux cerner les « sauts » cognitifs et sémiotiques auxquels les étudiants vont avoir à faire face, dans la transition de l'analyse « concrète » – celle relative aux fonctions spécifiées – à l'analyse « abstraite », où les espaces de fonctions (métriques, hilbertiens, de Banach…) sont à l'étude. Des étudiants qui arrivent à l'université en vue d'étudier les mathématiques, on peut présumer qu'ils coordonnent les représentations pertinentes pour les fonctions concrètes et qu'ils maîtrisent certaines routines de traitement et de conversion dans des situations spécifiques. Dans le passage à l'analyse abstraite, deux nouveaux obstacles marquent une vraie transition :

- L'absence de stratégies routinières pour organiser les traitements qui fournissent le résultat recherché.
- L'absence de représentations non discursives (graphiques, équations, etc.) pour la propriété à vérifier.

L'étude des propriétés admet ainsi peu de procédures « algorithmiques ». Ce sont là, en fait, deux ruptures profondes avec toute l'expérience des étudiants en mathématiques.

La recherche en didactique des mathématiques dispose de plusieurs théories pour analyser ces phénomènes : la TAD (Théorie anthropologique du didactique), la TSD (théorie des situations didactiques) et des théories comme celles de Tall, qui prennent en compte les représentations sémiotiques, celles issues du langage formel, certes, mais aussi celles qui s'appuient sur l'usage des TICE. Peut-être faudrait-il ajouter la TCC (théorie des champs conceptuels), par laquelle on pourrait intégrer les schèmes d'utilisation des concepts mathématiques, y compris dans des contextes d'enseignement plus « techniques ».

Jean-Philippe DROUHARD propose enfin de revenir sur quelques questions : qu'entend-on exactement par « enseignement formaliste » ? Un type de discours ? Une manière de faire les mathématiques ? Une manière de les exposer ? Ou encore, une manière dont les professeurs exigent que leurs étudiants les exposent ? Ou tout cela à la fois ? Dans tous les cas, pour étudier scientifiquement la question de l'effet de ce formalisme sur la réussite des étudiants, il faut savoir de quoi on parle et surtout, quels sont les composants et les caractéristiques dudit formalisme. En résumé, pour faire des mathématiques, il faut pouvoir opérer (dans un certain but) sur des objets mathématiques, accessibles au travers de représentations sémiotiques, avec des instruments (matériels ou sémiotiques), en suivant des règles. L'auteur propose donc une typologie des savoirs nécessaires pour mener une activité mathématique, répartis en trois ordres :

Savoirs d'ordre I

- Savoirs conceptuels (des objets et de leurs relations).
- Savoirs sémiotiques-linguistiques (des systèmes sémiotiques de représentation).
- Savoirs instrumentaux (soit ceux qui sont orientés vers la réalisation d'un but dans l'activité mathématique).

Savoirs d'ordre II

- Les principes du jeu mathématique.

Ex. 1 : une définition ne sert pas seulement à définir mais aussi à calculer ou à démontrer.

E.x 2 : on doit changer le nom de la variable quand une propriété s'applique à deux fonctions différentes, par exemple, dans la démonstration de la règle de De L'Hospital.

Savoirs d'ordre III

- Savoirs permettant l'identification du caractère mathématique de l'activité, ou du domaine des mathématiques concerné.

Drouhard présente une analyse du passage d'un mode d'appréhension des savoirs plutôt « empirique » au secondaire (avec connaissance de fonctions de références et de leurs propriétés) à une approche essentiellement hypothético-déductive à l'université. Les instruments changent, donc les objets (les fonctions, leurs définitions et leurs propriétés) changent également. Les raisonnements ne sont plus les mêmes, parce que les principes du jeu ont subtilement changé (tant au niveau du statut épistémique des parties du raisonnement qu'au niveau du discours démonstratif). Les systèmes sémiotiques, quoique superficiellement semblables, sont en fait différents (dans la mesure où les systèmes d'écritures symboliques doivent maintenant permettre le discours hypothético-déductif) ; parallèlement, les tracés de courbes glissent vers un statut de schémas illustratifs et partant, les distinctions pertinentes entre tracés relèvent plus du discret et moins du continu… Cette analyse rejoint sur de nombreux points les changements notés par C. Winsløw.

Conclusions

La discussion met l'accent sur l'intérêt des cadres d'analyse pour étudier les sauts induits par le passage aux mathématiques de l'université, pour prévoir des situations adaptées ou des interventions au niveau adéquat. Il est donc ressorti des communications :

- Un constat général de difficultés des étudiants avec le formalisme.
- L'impuissance de l'institution et des enseignants à donner aux étudiants les outils pour surmonter ces difficultés.
- La nécessité de prévoir au secondaire des situations qui travaillent la rationalité mathématique et vont donc être préparatoires au raisonnement dans des registres plus formels, bien que ce formalisme ne fasse pas l'objet du travail spécifique au secondaire.

De l'ensemble des discussions s'est dégagé un consensus à l'effet que :

- L'écriture formelle n'est pas en elle-même porteuse de la signification des lois qu'elle énonce et des objets qu'elle met en jeu.
- Les connaissances logico-déductives doivent être mises en œuvre en articulation avec la construction des concepts mathématiques sur lesquels elles permettent d'opérer.
- L'enseignement collégial et supérieur doit remettre en question la disqualification systématique d'une construction des concepts qui ne soit pas totalement contrôlée par le formel, et doit notamment accepter le recours à l'heuristique et à l'empirisme. Les participants ont également reconnu que les composantes de l'activité mathématique se manifestent bien à des ordres différents : pour l'enseignement, il est pertinent de considérer au moins l'ordre I des objets mathématiques (concepts, théorèmes, définitions…) et leurs représentations, et l'ordre II des règles du jeu mathématique. La construction d'un rapport satisfaisant à la rationalité mathématique nécessite que les enseignants distinguent les deux ordres et organisent le travail des étudiants à ces deux niveaux.

Des pistes sont à considérer :

- Ne pas se limiter dans l'enseignement de niveau secondaire à des exercices d'ostension des objets, mais voir à implanter des situations travaillant la rationalité mathématique (le groupe AHA, Bloch, Tanguay,…).
- Considérer au niveau de l'université des pratiques intégrant l'existence des savoirs d'ordre II : le débat scientifique (Legrand), les situations de recherche (équipe Maths à modeler), les situations sur la rationalité mathématique (groupe CESAME), le travail sur les énoncés ouverts (Chellougui, Durand-Guerrier).
- Construire des séquences d'enseignement où l'apprentissage des concepts puisse permettre la visibilité des savoirs d'ordre II impliqués (TSD et situations retournées, cf. Bloch, 2005).
- Prendre en compte le pilotage de l'enseignement par les examens, et intégrer les savoirs d'ordre II dans ces derniers (Winsløw).

Bibliographie partielle et indicative

AHA (Groupe Approche Heuristique de l'Analyse) : 1996, Une approche heuristique de l'analyse. *Repères IREM*, n° 25. Metz : Topiques éditions.

BLOCH, I. : 2005, 'Dimension a-didactique et connaissance nécessaire : un exemple de 'retournement»d'une *situation»Sur la théorie des situations didactiques : Questions, réponses, hommage à Guy Brousseau*, P. Clanché et A. Rouchier (dir.) Grenoble : La Pensée Sauvage.

CORRIVEAU, C. et TANGUAY, D. : 2006, 'Arrimage secondaire-collégial, formalisme et démonstration', à paraître dans les *Actes du 49e Congrès de l'Association mathématique du Québec (AMQ)*, Université de Sherbrooke.

DORIER, J.-L. et al. : 1997, '*L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*'. Grenoble : La Pensée Sauvage.

DREYFUS, T. : 1999, 'Why Johnny can't prove', *Educational Studies in Mathematics*, *38* : p. 85-109.

DUBINSKY, E. : 1996, 'Reflective Abstraction in Advanced Mathematical thinking', in Tall (dir.), *Advanced Mathematical Thinking*, p. 95-126. Dordrecht, Pays-Bas : Kluwer.

DURAND-GUERRIER, V. : 2003, 'Which notion of implication is the right one ? From a logical considerations to didactical perspective» *Educational Studies in Mathematics*, *53* : p. 5-34.

DURAND-GUERRIER, V. et ARSAC, G. : 2003, 'Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. Spécificité de l'analyse.' *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 23 n°3, p. 295-342. Grenoble : La Pensée Sauvage.

GRENIER, D. et PAYAN, C. : 2003, 'Situation de recherche en classe : essai de caractérisation et proposition de modélisation', *Cahiers du séminaire national de recherche en didactique des mathématiques*, Paris.

GRENIER, D. et PAYAN, C. : 1998, 'Spécificités de la preuve et de la modélisation en Mathématiques Discrètes', *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 18, n° 1, p. 59-100. Grenoble : La Pensée Sauvage.

LEGRAND, M. : 1993, 'Débat scientifique en cours de mathématiques', *Repères IREM* n° 10 : p. 123-159.

LEGRAND, M. : 1991, ‘Groupe des situations fondamentales et métaphore fondamentale ; réflexions autour de la recherche d’une situation fondamentale du concept de limite : la situation du pétrolier’, *Séminaire Didactique et technologies cognitives en mathématiques*, p. 33-98. Grenoble : Université Joseph Fourier.

MAUREL, M : 2001, ‘Derrière la droite, l’hyperplan’, *Repères* n° 42, p. 83-114.

MAUREL, M et SACKUR, C. : 2002, La presqu’île – Une introduction aux fonctions de deux variables en DEUG. *Actes de la XIe École d’été de didactique des mathématiques*, p. 167-175, Dorier *et al*., éditeurs. Grenoble : La Pensée Sauvage.

MAUREL, M., SACKUR, C. et DROUHARD, J.-P. : 2001, ‘Le symbolisme de l’algèbre dans l’approche de l’analyse’, *Actes du XVIe Séminaire Franco-italien de Didactique de l’Algèbre*, Drouhard et Maurel, (dir.) Nice : Université de Nice.

ROBERT, A : 1998, ‘Outils d’analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l’université’, *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 18, n° 2, p. 139-190.

ROGALSKI, M., ROBERT A., POUYANNE, N. : 2001, ‘*Carrefours entre analyse, algèbre et géométrie*’. Paris : Ellipses.

ROGALSKI, M. : 1995, ‘Que faire quand on veut enseigner un type de connaissances tel, que la dialectique outil-objet ne semble pas marcher, et qu’il n’y ait apparemment pas de situation fondamentale ? L’exemple de l’algèbre linéaire’. *Séminaire Didatech 169*. Grenoble : Laboratoire Leibniz.

ROGALSKI, M. : 2006, ‘Mise en équation différentielle et mesure des grandeurs par une intégrale, en Terminale scientifique : un point de vue mathématique sur la collaboration avec la physique’, *Repères IREM*, n° 64.

SACKUR, C., ASSUDE, T., MAUREL, M., DROUHARD, J.-P. et PAQUELIER, Y : 2005, ‘L’expérience de la nécessité épistémique’, *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 25, n° 1, p. 57-90.

SLAVIT, D. : 1997, ‘An alternate route to the reification of function’, *Educational Studies in Mathematics*, 33-3, p. 259-281.

TALL, D. : 1996, ‘Function and calculus.’ *In* Bishop *et al*. (Eds), *International Handbook of Mathematics Education*, p. 289-325. Dordrecht, Pays-Bas : Kluwer.

TALL D. : 1996, ‘The psychology of Advanced Mathematical Thinking’, in *Advanced Mathematical Thinking*, p. 3-20. Dordrecht, Pays-Bas : Kluwer.

TANGUAY, D. : 2005, ‘Apprentissage de la démonstration et graphes orientés’, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, n° 10, p. 55-94. Strasbourg : Université Louis Pasteur.

TRIGUEROS, M. et OKTAÇ, A. : 2005, ‘La théorie APOS et l’enseignement de l’algèbre linéaire,’ *Annales de didactique et de sciences cognitives*, n° 10, p. 157-176. Strasbourg : Université Louis Pasteur.

VANDEBROUCK, F. et CAZES, C. : 2004, *Actes du colloque TICE* :

http://archive-edutice.ccsd.cnrs.fr/docs/00/02/75/92/PDF/Vandebrouck_Cazes.pdf