L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés

Actes du colloque emf 2006

Les paradoxes de la formalisation dans l'élaboration d'un concept clef dans la transition lycée/université

Faïza Chellougui, *Faculté des Sciences de Bizerte, Tunisie*

Résumé

De nombreux travaux de recherche en didactique des mathématiques ont mis en évidence que le formalisme opératoire, qui devrait contribuer à la clarification conceptuelle et à une meilleure appropriation des énoncés mathématiques, apparaît souvent comme un obstacle à l'appropriation des concepts en jeu. Une étude des manuels universitaires montre, d'une part, que le passage des énoncés en langue vernaculaire aux énoncés formalisés est peu explicité et d'autre part, que l'usage de ce formalisme ne respecte pas toujours les normes de la logique standard, générant des ambiguïtés et/ou des implicites dans les textes proposés (Selden et Selden, 1995 ; Bloch, 2000 ; Dubinsky et Yparaki, 2000 ; Durand-Guerrier et Arsac, 2003 ; Chellougui, 2004 ; Durand-Guerrier, 2005). Nous proposons dans notre communication de montrer les difficultés engendrées par le formalisme mathématique, dans la gestion et la manipulation des quantificateurs, chez les nouveaux venus à l'université lors de l'introduction d'une nouvelle notion mathématique clef. Nous avons choisi pour cela la notion de borne supérieure en raison de sa pertinence pour étudier les questions de transition ; c'est une des premières notions rencontrée en analyse et elle s'appuie sur les notions de minorant et majorant étudiées au lycée. Dans un premier temps, nous mettrons en évidence la complexité de cette notion du point de vue de sa structure logique. Dans un second temps, nous présenterons les résultats obtenus au cours d'une observation de binômes d'étudiants[1] de première année d'université en situation de résolution d'exercices. Ces résultats confirment que la complexité de la structure logique d'un énoncé mathématique fait apparaître des phénomènes didactiques liés à des problèmes dans l'usage du formalisme logique.

L'enrégimentement des énoncés dans le calcul des prédicats
est la pierre de touche de la clarté conceptuelle.

Quine (1970)

Introduction

Dans l'enseignement secondaire tunisien, conformément aux instructions officielles, les symboles logiques (connecteurs logiques : $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, et quantificateurs : $\forall$, $\exists$) ne sont pas introduits d'une part, et les énoncés mathématiques (théorèmes, définitions) sont généralement exprimés en langue vernaculaire (Chellougui, 2000). Cependant, dès le début de la première année d'université scientifique, des énoncés entièrement formalisés sont introduits sans qu'un travail spécifique sur les règles de fonctionnement du symbolisme ne soit conduit d'une part et sans que le passage des énoncés en langue vernaculaire aux énoncés formalisés ne soit travaillé d'autre part. Cette introduction est

1 Il s'agit d'étudiants de première année scientifique, section Mathématiques Informatique, arrivant à l'université ou qui refont l'année, d'âge variant entre 19 et 21ans.

motivée par la supériorité supposée du point de vue opératoire des énoncés entièrement ou partiellement formalisés. Or, comme l'ont montré de nombreux travaux et comme l'ont constaté des enseignants de premier cycle universitaire, ceci ne va pas de soi, ce qui est montré par le fait que pour de nombreux étudiants, ce formalisme semble être un obstacle au travail mathématique et, par conséquent, aux acquisitions dans la conceptualisation (Quine, 1970).

Ainsi, dans l'activité mathématique en première année d'université, on repère des difficultés d'interprétation du vocabulaire logico-mathématique ou des lacunes d'ordre opératoire chez les étudiants, plus précisément des difficultés dans la manipulation des énoncés complexes à quantifications multiples.

D'une manière générale, ces questions sont peu travaillées dans les manuels utilisés. Nous faisons l'hypothèse que ceux-ci reflètent la pratique mathématique ordinaire des enseignants de mathématiques (Durand-Guerrier, 2005).

Dans notre communication, nous nous proposons dans un premier temps d'illustrer les apports de la clarification conceptuelle de l'analyse logique d'une notion selon le calcul des prédicats. Dans un deuxième temps, nous montrerons les difficultés engendrées par le formalisme mathématique dans la gestion et la manipulation des quantificateurs, chez les nouveaux venus à l'université pour cette même notion.

Nous avons choisi, pour cette représentation, une des toutes premières notions rencontrées en analyse, il s'agit de la notion de borne supérieure[2] qui s'appuie sur les notions de minorant et de majorant. Ce choix est basé sur le fait que la complexité de la structure logique de cette notion – nombre de quantificateurs, alternance des quantificateurs universel et existentiel – fait émerger des difficultés dans la structuration des énoncés d'une part, dans les démonstrations des théorèmes utilisant ce concept d'autre part, en lien avec les questions de quantification.

Dans ses travaux, Bloch (1999) a montré qu'il est difficile d'échapper au jeu sur les quantificateurs existentiel et universel lorsqu'on veut explicitement faire émerger un objet majorant permettant de prouver qu'une fonction bornée est majorée. Ainsi, la notion de borne supérieure rencontrée au début de l'année, délicate à manipuler, met en jeu les concepts fondamentaux en analyse.

Dans une première partie, nous présenterons une analyse logique des formalisations dans le calcul des prédicats des objets et des structures qui entrent en jeu dans la définition de la borne supérieure. Ceci nous permettra d'anticiper les difficultés que peuvent rencontrer les étudiants dans la résolution des problèmes portant sur cette notion.

Dans une deuxième partie, nous présenterons quelques résultats obtenus au cours d'une observation d'un binôme d'étudiants de première année (section : mathématiques et informatique) en situation de résolution d'exercices portant sur le concept de borne supérieure, suivie d'un entretien.

Nous présenterons à la fin la conclusion générale et les perspectives de ce travail.

2 Dans l'enseignement tunisien, français et d'autres pays francophones, on propose les définitions suivantes. Sont donnés un ensemble E muni d'une relation d'ordre générique « $\leq$ » et une partie non vide A de E. Soit y un élément de E, y est appelé majorant de A si et seulement si y est supérieur à tous les éléments de A. La borne supérieure de A est le plus petit élément, s'il existe, de l'ensemble des majorants de A.

1- Analyse logique de la notion de borne supérieure selon le calcul des prédicats

Préliminaire

Dans ce qui suit, nous désignons par (E, ≤) un ensemble E muni d'une relation d'ordre ≤ et par A une partie de E. Nous proposons une formalisation des objets et des structures mathématiques qui entrent en jeu dans la constitution du concept de borne supérieure. Nous parlons de propriété d'objet lorsqu'elle s'applique à un élément de E, par exemple : être un majorant d'une partie donnée A de E, et de propriété de structure lorsqu'elle s'applique à une partie de E, par exemple : être une partie majorée de E. Nous proposons de formaliser selon le calcul des prédicats, d'une part les propriétés des objets : être un majorant (resp. minorant) de A ; être un plus petit élément (resp. plus grand élément) de A ; être la borne supérieure d'une partie majorée de E ; et d'autre part, les propriétés des structures : admettre un plus grand élément ; être une partie majorée de E.

Cette modélisation en termes de structure et d'objets est bien entendu dépendante du niveau théorique où l'on se situe : ce qui est vu comme une structure dans la topologie de la droite réelle serait sans doute un objet dans un cours de logique. Pour des précisions sur objets et structures, on peut se reporter à Chellougui (2004).

Avant d'aborder cette formalisation, nous commençons par présenter un cheminement vers une définition de la notion de borne supérieure, en adoptant comme définition de référence celle de Schwartz (1991).

1-1- Cheminement vers une définition de borne supérieure

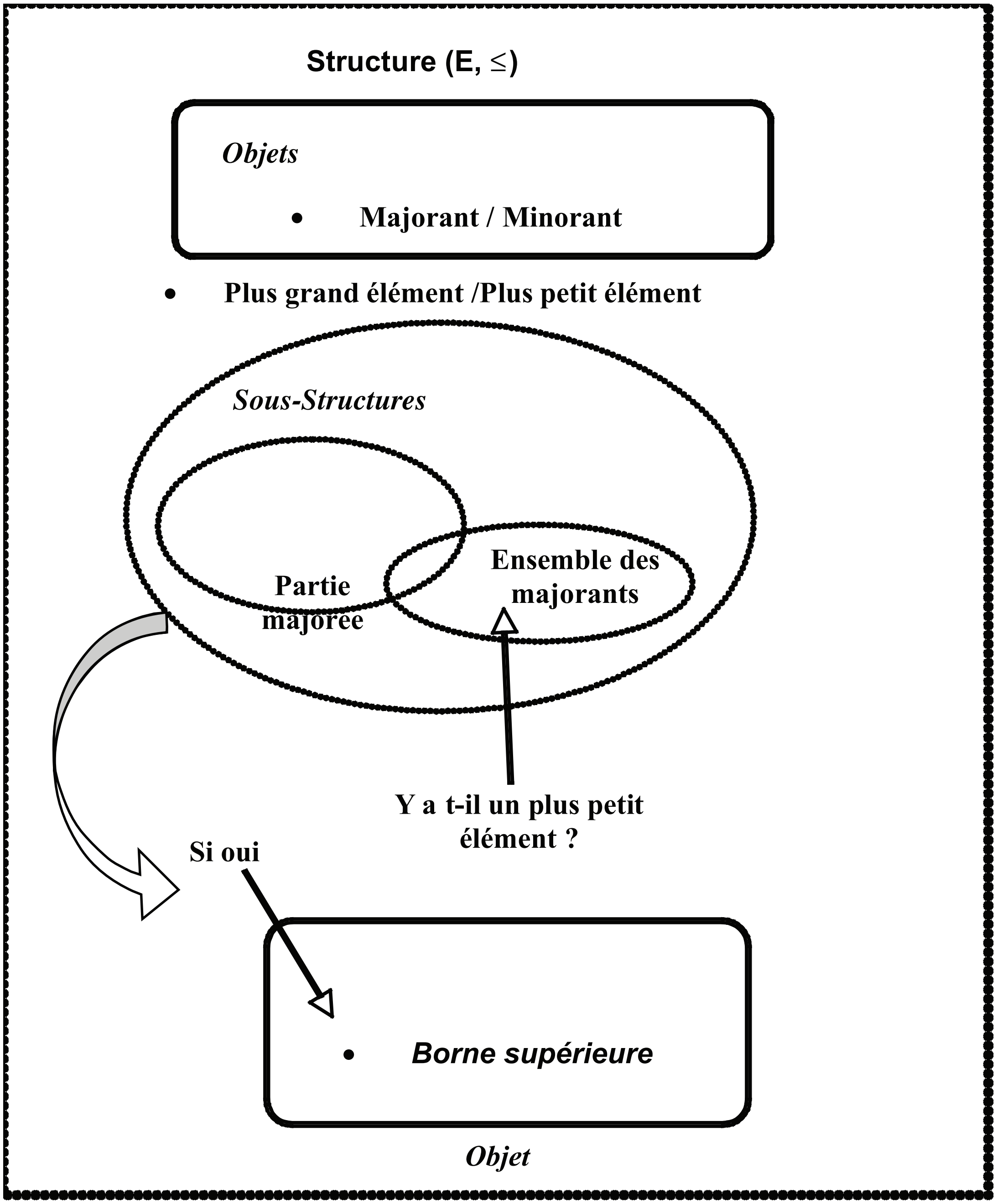
Schwartz (1991) propose la définition[3] suivante, où E désigne un ensemble ordonné :

« On dit qu'une partie A de E admet une borne supérieure si l'ensemble de ses majorants admet un minimum, et ce minimum est appelé borne supérieure de la partie considérée. La borne supérieure est donc le plus petit majorant ; tout élément qui majore A majore aussi sa borne supérieure. » (p. 83)

Dans cette définition de la structure admet une borne supérieure interviennent les définitions de la structure admet un minimum et des deux objets majorant et plus petit élément, ainsi qu'une nouvelle structure ensemble des majorants. Nous faisons l'hypothèse que la présence de ces différents éléments est une marque de la complexité de cette notion, qui se traduira en particulier par des difficultés prévisibles de l'interprétation entre objets et structures.

Nous nous proposons de mettre en évidence cette complexité par le schéma suivant.

3 Définition extraite du manuel Analyse I du Cours d'Analyse de Laurent Schwartz, publié pour la première fois en 1967 et souvent réédité. Ce manuel a été entièrement refondu et mis à jour par son auteur.



Ce schéma révèle une complexité de la structuration logique du fait que la définition imbrique des propriétés d'objets et de structures. Cette complexité fait émerger la nécessité d'un formalisme opératoire indiquant clairement à quoi s'appliquent les énoncés et à quel niveau on se situe : c'est ce que nous allons essayer de faire dans la suite.

Notons bien que nous n'avons rien indiqué pour l'intersection entre une partie majorée et l'ensemble des majorants ; on prouve aisément qu'elle est soit vide, soit réduite à un seul élément, appelé alors le « plus grand élément de la partie majorée » considérée.

1-2- *Objet majorant/minorant*

Étant donnés un élément y de E et une partie A de E, dire que « y est un majorant de A » (resp. « y est un minorant de A ») ou encore « y majore A » (resp. « y minore A ») revient à définir une relation entre un objet mathématique et une structure. On définit ainsi une famille de propriétés d'objets lorsque A parcourt l'ensemble des parties de E. Nous désignons par M(y,A) (resp. m(y,A)) cette relation qui s'exprime dans le calcul des prédicats par l'énoncé :

« $\forall x \in A\ x \leq y$ » (1) (resp. « $\forall x \in A\ x \geq y$ » (1'))

On peut associer à la structure A un prédicat dans la logique du premier ordre défini par :

« $\mathcal{A}(x) \Leftrightarrow x \in A$ », ce qui permet d'éliminer la quantification bornée[4] dans (1). On obtient ainsi :

« $\forall x\ (\mathcal{A}(x) \Rightarrow x \leq y)$ » (2) (resp. « $\forall x\ (\mathcal{A}(x) \Rightarrow x \geq y)$ » (2'))

Il s'agit d'une phrase ouverte en y et close en x ; en effet, la variable x est quantifiée ce qui n'est pas le cas pour la variable y.

La négation de l'énoncé (2) est donnée par l'expression suivante :

« $\exists x\ (\mathcal{A}(x) \wedge y<x)$ » (3)

ce qui signifie que « y n'est pas un majorant de A », d'où la formalisation de la propriété ne pas être un majorant de A qui correspond donc à $\neg$M(y,A).

1-3- *Objet plus grand élément/plus petit élément*

La propriété d'objet « y est un plus grand élément pour A » (resp. « y est un plus petit élément pour A ») s'exprime dans le calcul des prédicats par l'énoncé :

$\mathcal{A}(y) \wedge M(y,A)$ (4) (resp. $\mathcal{A}(y) \wedge m(y,A)$ (4'))

Ou encore par l'énoncé :

$\mathcal{A}(y) \wedge \forall x\ (\mathcal{A}(x) \Rightarrow x\leq y)$ (5) (resp. $\mathcal{A}(y) \wedge \forall x\ (\mathcal{A}(x) \Rightarrow x\geq y)$ (5'))

Dans le vocabulaire équivalent, cet objet est aussi désigné par l'expression « y est un maximum de A » (resp. « y est un minimum de A »)

1-4- *Structure être une partie majorée*

La propriété de l'objet élément majorant nous permet de passer à la propriété de la structure être une partie majorée par l'affirmation de l'existence d'un majorant, au moins.

On désigne par $\mathcal{M}$(A) l'expression « A est majoré » qui s'exprime dans le calcul des prédicats par l'énoncé :

« $\exists y\ \forall x\ (\mathcal{A}(x) \Rightarrow x \leq y\ )$ » (6)

4 La quantification bornée cache l'implication, elle permet de restreindre le domaine de référence (Durand-Guerrier, 2003 ; Chellougui 2004).

Il s'agit ici d'une phrase close en y et en x, qui permet de définir une propriété de A au moyen d'un prédicat $\mathcal{M}$ sur l'ensemble des parties de E.

1-5- Structure admettre un plus grand élément/un plus petit élément

Cette propriété permet de définir, dans le calcul des prédicats, la propriété de structure : « A admet un plus grand élément » (resp. « A admet un plus petit élément ») :

« $\exists y\ [\mathcal{A}(y) \wedge \forall x(\mathcal{A}(x) \Rightarrow x \leq y)\ ]$ » (7) (resp. « $\exists y\ [\mathcal{A}(y) \wedge \forall x(\mathcal{A}(x) \Rightarrow x \geq y)\ ]$ » (7'))

Cela signifie qu'on peut trouver un élément y qui remplit les conditions suivantes, y élément de A et y élément majorant de A (resp. « élément minorant de A »).

1-6- Objet borne supérieure

En nous référant à Schwartz (1991), nous reformulons la définition de borne supérieure de la manière suivante :

« Pour tout élément α de E, α est appelé borne supérieure de A, noté supA, si et seulement si α est un majorant de A et α est le plus petit des majorants. »

ou encore :

« Pour tout élément α de E, α est appelé borne supérieure de A, noté supA, si et seulement si α est un majorant de A et pour tout élément y de E inférieur à α, y n'est pas un majorant de A. »

Dans le calcul des prédicats la relation « α=supA » s'exprime par l'énoncé suivant :

« $[\forall x(\mathcal{A}(x) \Rightarrow x \leq \alpha\ )] \wedge \forall y[(\ y<\alpha \Rightarrow \exists x(\mathcal{A}(x) \wedge y<x\ )]$ » (8)

Selon l'usage en mathématique, on le donnera sous la forme de deux énoncés coordonnés :

« 1) $\forall x\ (\mathcal{A}(x) \Rightarrow x \leq \alpha)$

et

2) $\forall y\ [(y<\alpha \Rightarrow \exists x\ (\mathcal{A}(x) \wedge y<x)]$ » (9)

Nous pouvons distinguer ici, que le premier énoncé 1) exprime : « α est un majorant de A » et le deuxième énoncé 2) : « Pour tout élément y de E inférieur à α, y n'est pas un majorant de A ».

La caractérisation de la borne supérieure, dans l'ensemble IR des nombres réels, est fréquemment formulée de la manière suivante :

« Pour toute partie A de IR, si A est majorée et si l'ensemble des majorants de A admet un minimum, alors il existe un élément unique α de E vérifiant les deux propriétés suivantes :

1) $\forall x\ (A(x) \Rightarrow x \leq \alpha)$

et

2) $\forall \varepsilon>0\ \ \exists x\ (A(x) \wedge \alpha-\varepsilon<x)$ » (10)

Cette caractérisation est une reformulation de l'énoncé (9) en utilisant l'équivalence « $\alpha > y \Leftrightarrow \alpha - y > 0$ » et en remplaçant « $\alpha - y$ » par « ε ». Cette formulation anticipe sur le fait que la notion de borne supérieure est liée à la notion de limite au sens où, par exemple pour une suite croissante bornée, la limite est la borne supérieure de l'ensemble des valeurs de la suite. Dans les manuels de l'enseignement supérieur, on trouve le plus souvent des exercices du type :

« Dans IR, l'ensemble $\{1-\frac{1}{n}, n\in \mathrm{IN}^*\}$ a t-il une borne supérieure ? Un plus grand élément ? »

2- Quelques résultats d'une expérimentation auprès d'un binôme d'étudiants

Préliminaire

L'analyse logique présentée auparavant pourra nous servir de référence pour analyser les réponses des binômes dans une situation de résolution d'exercices. Nous avons mis en place une expérimentation, avec six binômes d'étudiants de première année d'université, dont la question centrale concerne la manière dont les étudiants s'approprient la notion de borne supérieure. Cette expérimentation s'est déroulée suivant deux étapes.

– Une première étape consiste à présenter à chaque binôme d'étudiants deux exercices à résoudre successivement. Cette étape est destinée à faire expliciter par l'étudiant les différentes étapes de sa démarche et notamment les prises d'indices intermédiaires qui déterminent son action. Ceci nous permettra de dégager d'une part les types d'explicitations utilisées par le binôme et d'autre part les difficultés rencontrées. Nous pouvons préalablement intervenir, en proposant des indications, dans le cas où les étudiants trouvent des difficultés.
– La deuxième étape se décompose en deux temps : entretien semi-directif suivant le déroulement à partir de la première étape, et questionnement général sur l'enseignement de la notion de borne supérieure au lycée et à l'université.

L'entretien a fait apparaître plusieurs phénomènes dont nous présentons les plus importants en illustrant avec des séquences d'une transcription[5] d'un entretien relatif à un seul et même binôme.

2-1- « Étrange définition » d'un objet majorant

Il s'agit d'un phénomène saillant commun à tous les binômes.

À la question « quelle est la définition d'un majorant ? », l'élève J a donné par écrit la réponse formalisée suivante :

« $\forall x \in A\ \exists M \in \mathrm{IR}\ x \leq M$ » (1) (AE)[6]

On peut relever des indices d'une telle formalisation dans les réponses de chacun des autres binômes. Il nous faut dire que la première apparition de cette définition nous a surprise. De ce fait, nous

5 Dans la transcription, nous désignons les deux étudiants du binôme par les initiales de leurs prénoms ; J et T. Pour nous-mêmes, nous avons choisi l'abréviation Int, pour désigner interviewer et intervenant.

6 (AE) désigne les énoncés du type : « Pour tout…il existe… » et (EA) désigne les énoncés du type : « Il existe… pour tout… ».

avons donné à cette question une importance qui n'était pas prévue. Voyons dans quelle séquence s'inscrit la réponse formalisée de J :

1.T : Un majorant : quel que soit M appartenant à IR, quel que soit x appartenant à A donc M est supérieur ou égal à x, M est un majorant de A.

2.J : Soit M un majorant de A, quel que soit x appartenant à l'ensemble A, il existe M appartenant à IR, tel que x est inférieur ou égal à M.

M est un majorant, puisque M appartient à IR, tout élément appartenant à IR et supérieur à M est un majorant.

(J écrit : « $\forall x \in A, \exists\ M \in IR / x \leq M$ » que nous avons noté (1))

3.Int : Alors T, est ce que vous êtes d'accord avec J ?

(T lit ce que J venait d'écrire.)

4.T : C'est la définition d'un majorant.

1. Nous pensons que la réponse de J entremêle les définitions d'élément majorant et de partie majorée. Cette réponse relèverait alors d'une confusion entre propriété d'objet et propriété de structure et confirmerait l'hypothèse avancée par nous en section I-1.
2. Si c'est le cas, J utilise alors un énoncé du type (AE) alors que c'est un énoncé de type (EA) qu'il a en tête. L'interchangeabilité pour certains étudiants des énoncés de type (AE) et de type (EA) a d'ailleurs été relevée dans Dubinsky et Yiparaki (2000). Il pourrait s'agir d'une difficulté liée à l'arrimage langage symbolique – langage naturel : nous y reviendrons à la section II-3.
3. Dans la définition formalisée du majorant M, l'étudiant J utilise un énoncé clos, alors qu'une telle définition nécessite un énoncé ouvert ; en effet, la variable M ne devrait être soumise à aucune quantification.
4. Pour affirmer l'élément majorant M, l'étudiant introduit son existence qui n'est pas, ici, nécessairement un majorant.

2-2- Difficultés dans la mobilisation de la définition

Le deuxième phénomène important concerne l'apparition des difficultés dans la mobilisation de la définition.

Après la proposition de l'énoncé (AE) par les étudiants, nous sommes intervenus en proposant l'énoncé (EA) correspondant :

$\exists M \in IR\ \forall x \in A\ x \leq M$ (2)

Nous illustrons par une séquence de la transcription du binôme choisi :

5.J : Dans (1), quel que soit x appartenant à A.

6.T : Oui, on peut utiliser (1).

7.J : Non, non, quel que soit x appartenant à A, il existe M appartenant à IR.

8.T : Oui, les deux sont justes.

Il existe M appartenant à IR, quel que soit x appartenant à A, x inférieur à M.

L'écriture mathématique est différente.

Il y a une différence d'interprétation des définitions pour caractériser un majorant :

- Pour l'étudiant J, il y a un rejet de l'énoncé (EA) et un choix de l'énoncé (AE).
- Pour l'étudiant T, les deux énoncés (AE) et (EA) gardent le même sens bien qu'il y ait une certaine différence dans l'ordre de l'écriture des deux quantificateurs.

À la suite de cette séquence, nous sommes intervenus en proposant de décrire graphiquement[7] la situation sur une droite réelle, et également de déterminer un contre-exemple qui contredit le fait que M soit un majorant de A. En utilisant cette représentation graphique, nous avons voulu montrer au binôme, d'une part, la dépendance entre M et x dans un tel énoncé (AE) et, d'autre part, le fait que cet énoncé ne traduit pas que A est une partie majorée.

Les étudiants ont répondu à cette intervention de la manière suivante :

9.J : Il existe M, on a dit il existe… Il existe ici.

(J indique un point extérieur à A qui est effectivement un majorant.)

10.T : On peut dire que M n'appartient pas à A.

L'étudiant J veut introduire l'objet élément M à l'extérieur de A : « …il existe ici… », puisque M existe, donc il est introduit.

L'étudiant T rejette le schéma, en ajoutant une condition sur l'objet M en disant « M n'appartient pas à A ». En formalisant ainsi toute l'expression, nous aurons : « $\forall x\ \exists M \in IR,\ M \notin A$ et $x \leq M$ »

À partir de ces deux répliques, nous pensons que les étudiants ne se sont focalisés ni sur l'objet M ni sur toute la structure de l'ensemble A. Il n'y a pas eu de réaction ni sur la dépendance de x et M ni sur la structure de A. Par contre, il y a une réfutation de l'objection introduite qui conduit à modifier la définition.

Plus loin, l'étudiant J affirme :

11.J : Dans (1) M peut être un majorant.

Cette affirmation est correcte ; par contre, l'énoncé (1) ne joue évidemment pas son rôle de définition. En effet, la formulation proposée dans l'énoncé (1) permet d'introduire un objet, qui peut être ou non un majorant de la partie considérée.

Il y a deux interprétations possibles : J veut dire que ce point M placé satisfait (1), ou bien, dans le cas où la partie est majorée, on peut choisir M de sorte qu'il vérifie (2). On voit ici les difficultés à manipuler les définitions et les propriétés : ceci renvoie à savoir ce qu'est une définition.

7 Dans l'illustration graphique, nous avons choisi A comme étant un intervalle de IR de la forme]a,b[, ou]a,+∞[.

2-3- *Instabilité sur le vocabulaire choisi*

Certaines ambiguïtés que nous avons relevées et explicitées précédemment correspondent au vocabulaire choisi par les étudiants. Ceci conduit à faire l'hypothèse qu'il y a un écart entre ce qui est dit par un étudiant et ce qu'il veut exprimer et expliciter. Certes, les ambiguïtés sur le vocabulaire sont inhérentes à l'activité mathématique. De plus les expressions contenant des quantificateurs multiples génèrent de l'ambiguïté en raison même de la grammaire de la langue française. Cependant, chez nos étudiants, les difficultés sont a priori renforcées par le fait que le français n'est pas leur langue maternelle et qu'en outre, la majorité d'entre eux ont étudié les mathématiques en arabe jusqu'à la fin de l'école de base (15-16 ans).

Dans la suite, nous proposons d'étudier les difficultés liées au vocabulaire choisi par les étudiants en analysant quelques phénomènes repérés dans le binôme choisi.

Par exemple, dans ces deux répliques :

12.J : Sup de A plus B est inférieur ou égal à sup de A plus sup de B, donc sup de A plus sup de B est un majorant de sup de A plus B.

13.T : Et sup de A plus B est un majorant de sup de A plus sup de B.

Nous pouvons avoir a priori ces trois hypothèses :

- Confusion entre l'objet borne supérieure d'un ensemble et la structure de ce même ensemble : sup(A+B) est considéré comme un ensemble A+B.
- Confusion entre un majorant et l'expression « supérieur ou égal » : traduction de « majorant » comme étant « plus grand que ».
- Effet de la notation qui renvoie à une structure plutôt qu'à un objet. En effet, la notation sup est complexe et non habituelle pour désigner des objets.

Ainsi, il devient possible de comprendre qu'un étudiant, tout en disant une chose, veuille aussi dire quelque chose d'autre non explicitement énoncé et que son interlocuteur puisse accepter cet énoncé du fait même que ce qui est dit n'est pas explicitement signifié.

Nous avons aussi repéré quelques difficultés liées au vocabulaire des oppositions, comme l'illustre ce bref échange :

14.Int : Bon d'accord, on va essayer de comprendre ensemble la démonstration.

Juste une petite remarque, si vous voulez montrer qu'une proposition est vraie et vous dites qu'on va démontrer par l'absurde, ça veut dire quoi ?…

15.T : Ça veut dire que c'est l'inverse.

16.J : Non, contraire.

17.T : On va trouver à la fin le contraire de ce qu'on veut démontrer.

18.Int : Bon, si vous voulez, on passe à la question suivante[8].

8 La question consiste à montrer que B est l'ensemble des majorants de A dans Q, avec $A = \{ x \in Q_+, x^2 < 2\}$ et : $B = \{ x \in Q_+, x^2 > 2\}$.

19.J : A et B sont la négation. A est la négation de B.

20.T : A est le contraire de B.

21.J : : Ils sont différents.

22.Int : Est-ce que vous pouvez déterminer l'intersection des deux ensembles A et B ?

23.T : L'ensemble vide, A est l'opposé de B ou B est l'opposé de A.

24.J : A est différent de B.

Ainsi, nous pouvons dire qu'il y a une instabilité dans l'usage des expressions utilisées entre : négation, contraire, différent, opposé. D'autre part, vu que ces termes ne sont pas exclusivement des termes mathématiques, nous pensons que les étudiants les emploient ici de façon peu rigoureuse comme dans la langue vernaculaire.

3- Conclusion et perspectives

La formalisation logique complète, dans le calcul des prédicats, de la notion de borne supérieure a mis en évidence une complexité de la structure logique. Cette analyse a montré une imbrication entre les propriétés d'objets et les propriétés de structures que la pratique ordinaire concernant l'usage de la quantification en mathématiques tend à masquer (Chellougui, 2004).

Les résultats didactiques obtenus confirment que la complexité de la structure logique d'un énoncé mathématique fait apparaître des phénomènes didactiques qui sont liés non seulement à des problèmes dans l'articulation des quantificateurs avec l'argument mathématique, mais aussi à des problèmes langagiers et des difficultés à manipuler les définitions et les propriétés.

Ces résultats mettent en évidence des difficultés pour les étudiants à mobiliser de manière rigoureuse les énoncés quantifiés. Il s'agit principalement de la non prise en compte de l'ordre dans l'alternance des quantificateurs ; de la tendance à mobiliser prioritairement les énoncés sous la forme (AE) par rapport aux énoncés (EA) et de la pratique courante selon laquelle l'affirmation de l'existence introduit l'objet.

L'ensemble de ce travail illustre la nécessité de prendre davantage en compte les questions de quantification dans l'enseignement des mathématiques au niveau supérieur.

Une des pistes de recherche que nous souhaitons explorer concerne l'étude des pratiques effectives des enseignants dans l'enseignement supérieur concernant les questions de quantification, d'une part en confrontant nos analyses au regard porté par ces enseignants sur certaines productions d'étudiants, d'autre part en conduisant des observations en situation de classe – cours ou travaux dirigés – afin d'étudier comment sont gérées les questions relatives à la quantification dans l'activité mathématique.

Références

Bloch, I. (1999). L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'enseignement de l'analyse en Première scientifique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol.19, n° 2, p. 135-193.

Chellougui, F. (2000). *Approche didactique de la quantification dans la classe de mathématiques à la fin de l'enseignement secondaire et au début du supérieur scientifique*. Mémoire de DEA de didactique des mathématiques, Institut Supérieur de l'Education et de la Formation Continue, Université de Tunis.

Chellougui, F. (2004). *L'utilisation des quantificateurs universel et existentiel en première année universitaire, entre l'explicite et l'implicite*. Thèse de doctorat en co-tuelle entre l'Université Claude Bernard Lyon 1 et l'Université de Tunis.

Dubinsky, E., et Yiparaki, O. (2000). On student understanding of AE and EA quantification. Research in Collegiate Mathematics Education IV. *CBMS Issues in Mathematics Education*, *8*, p. 239-289. American Mathematical Society : Providence.

Durand-Guerrier, V. (2003). Which concept of implications is the right one ? From logical considerations to has didactic perspective. *Educational Studies in Mathematics*, n° *53*, p. 5-34, Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.

Durand-Guerrier, V., et Arsac, G. (2003). Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques : Spécificité de l'analyse. Quelles implications didactiques ? *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol.23, n° 3, p.295-342. La Pensée Sauvage Editions.

Durand-Guerrier, V. (2005). *Apports de la théorie élémentaire des modèles pour une analyse didactique du raisonnement mathématique*. Note de synthèse, Habilitation à diriger des recherches en didactique des mathématiques, Université Claude Bernard Lyon 1.

Quine, W.V.O. (1970). *Philosophy of logic*. Prentice-Hall, Traduction française Aunbier, 1975.

Schwartz, L. (1991). *Analyse I, Théorie des ensembles et topologie*. Hermann.

Selden, J., et Selden, A. (1995). Unpacking the logic of mathematical statements. in *Educational Studies in Mathematics*, *29*, p. 123-151.

Pour joindre l'auteur

Faïza Chelloughi
Faculté des sciences, Université de Bizerte
BP 102, Tunis 1006, Tunisie
chellouguifaiza@yahoo.fr