Pluralités culturelles et universalité des mathématiques :
enjeux et perspectives pour leur enseignement
et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

MATHS A MODELER,
DES JEUX POUR APPRENDRE A CHERCHER EN MATHEMATIQUES

Karine GODOT[*]

Résumé- Né de la collaboration entre chercheurs en mathématiques et didacticiens, le projet Maths à modeler vise à développer des situations particulières présentées sous forme de jeu, les situations recherche, amenant le participant, élève, enfant ou grand public à rentrer dans une démarche de recherche en mathématiques. À partir de l'exemple de la situation La roue aux couleurs, nous présenterons les caractéristiques de ces situations, leurs conditions de gestion dans un cadre scolaire et extrascolaire, ainsi que le rôle du support ludique dans leur dévolution, les apprentissages qu'elles mettent en jeu et leurs apports vis-à-vis de l'image des mathématiques.

Mots-clefs mathématiques- didactique- recherche- heuristique- jeu- médiation

Abstract: Maths à modeler is a project developped by discrete mathematics researchers and didacticians. The aim is to propose particular situations, the research situations, that permit to the public, pupils or not, to discover what means researching in mathematics. From the example of the situation called The wheel of colors, we present what are the characteristics of these situations, the role of the game, the learnings associated, how they can be used in the classroom or somewhere else (organization conditions) and hox they can change the feeling about mathematics.

Keywords: mathematics, didactik, research, heuristik, game, vulgarisation.

I. LE PROJET MATHS À MODELER

1. *Une équipe pluridisciplinaire*

Le projet Maths à modeler est né de la collaboration entre des chercheurs en mathématiques discrètes, des didacticiens, rejoints par des chercheurs en sciences de l'information et de la communication, en sciences de l'éducation ou encore en psycho-clinique. Il étudie depuis plusieurs années comment amener l'élève, du primaire à l'université, ou le grand public[1] à devenir apprenti chercheur en mathématiques, à entrer dans une démarche de recherche en mathématiques, c'est-à-dire essayer, observer, élaborer des stratégies de recherche, conjecturer, fournir des contre-exemples, prouver, mais aussi avoir du plaisir, persévérer, imaginer, …

[*] CNRS/UJF – France - sciencesetmalice@no-log.org

[1] Par exemple lors de la Fête de la science

Godot K. (2015) Maths à modeler, des jeux pour apprendre à chercher en mathématiques. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – Spé2, pp. 918-925.

2. Les situations recherche

Les recherches menées dans le cadre du projet Maths à modeler s'articulent autour de situations que nous appelons situations recherche[2]. Au fil des années, nous avons expérimenté la recherche de plusieurs de ces situations recherche dans l'institution scolaire (du primaire à l'université) mais aussi dans un cadre de vulgarisation (atelier stand lors de la Fête de la science, atelier au sein du CCSTI[3] de Grenoble pendant les vacances, ateliers périscolaires, …)

Ces situations didactiques particulières peuvent être considérées comme la transposition pour la classe, ou ailleurs, de l'activité du chercheur en mathématiques. Nous les caractérisons ainsi (Grenier & Payan 2002 ; Godot 2005) :

- Le problème abordé est le plus souvent issu de problèmes de recherche actuels. Il peut donc comporter une, plusieurs ou aucune solution et être encore ouvert dans la recherche mathématique actuelle[4] .
- Le point de départ est une question facilement compréhensible pour celui à qui elle est posée. Elle n'est pas formalisée en termes mathématiques. C'est la situation qui amène l'élève à l'intérieur des mathématiques.
- Les méthodes de résolution ne sont pas désignées. Plusieurs pistes peuvent être suivies.
- Les connaissances scolaires nécessaires sont les plus élémentaires et réduites possibles
- Le domaine conceptuel dans lequel se trouve le problème, même s'il n'est pas familier, est d'un accès facile pour que l'on puisse prendre facilement possession de la situation, s'engager dans des essais, des conjectures, des projets de résolution.
- Une question résolue peut amener à se poser de nouvelles questions. Il n'y a que des critères de fin locaux. Il n'y a pas un résultat défini à obtenir, à démontrer mais une question ouverte qui amène à chercher à résoudre des sous-problèmes pour, petit à petit, répondre à la question générale.

La recherche d'une situation recherche, contrairement aux pratiques de classe et aux manuels (qui représentent pour la majorité de la population la voie d'accès aux mathématiques), comporte ces trois aspects fondamentaux de l'heuristique mathématique (Grenier & Payan 2002):

- « L'enjeu de vérité ». La plupart du temps, en classe, l'élève sait que ce qu'il a à prouver est vrai (« démontrer que »). « Il n'y a plus d'« enjeu de vérité. (…) L'enjeu est alors pour lui d'apprendre, non de produire une connaissance. » Dans les situations recherche, il peut être amené par exemple à rencontrer l'impossibilité sans que rien dans la situation ne le lui précise. Dès lors, il devra trancher : est-ce difficile ou impossible ? Comment être sûr ?
- « L'aspect social de l'activité ». Dans un cours de mathématiques, l'élève est habituellement seul à chercher. Dans une situation recherche, « il peut y avoir un vrai enjeu social de production mathématique », la classe ou le groupe d'enfants se transformant en communauté de jeunes chercheurs.

---

[2] vous en aurez plusieurs exemples sur le site: http://mathsamodeler.ujf-grenoble.fr/LAVALISE/debutval.php
[3] Centre de Culture Scientifique et Technique, sorte de petit musée des sciences.
[4] la plupart des situations recherche sont issues du domaine des mathématiques discrètes, un champ des mathématiques comportant de nombreux problèmes compréhensibles et encore ouverts dans la recherche.

- « L'aspect recherche». En classe, la recherche se réduit souvent à celle de la connaissance mathématique à utiliser, « du bon outil ». Dans le cas d'une situation recherche, l'élève est acteur de la recherche, comme le chercheur, il ne sait pas à quoi vont aboutir ses recherches et « utilise des résultats locaux (trouvés en cours de la recherche) ou même des propriétés encore à l'état de conjectures (qui devront être prouvées ou infirmées ensuite), parce qu'elles permettent d'avancer ».

La recherche se fait généralement en groupes de 3 ou 4, afin de favoriser le débat, l'argumentation et éviter les découragements. Elle est accompagnée, selon le cadre, soit par un enseignant, soit par un chercheur soit par un animateur scientifique. Ils ne sont pas là pour répondre aux questions des enfants mais pour les guider dans leurs recherches, les questionner, les inciter à des comparaisons mais en aucun cas pour leur fournir des résultats… Les apprentis chercheurs disposent d'une feuille de recherche pour noter ce qu'ils jugent important, garder des traces, parallèlement cela favorise les phases de formulation et incite la mise en place d'un codage, le besoin de chercher peu à peu comment modéliser... Après plusieurs séances de recherche, des mises en commun sont organisées pour que les groupes communiquent leurs résultats, débattent et ainsi créer une unité dans la « petite communauté mathématique » tout au long des séances. Les recherches sont enfin finalisées par une communication publique (présentation par affiche, séminaire Maths à modeler junior (Pastori, 2011)) afin d'amener les enfants à formaliser leurs résultats, les argumenter, prouver…

3. Jeu et situation recherche

Dans le cadre de mes recherches, je m'intéresse plus particulièrement aux situations recherche qui sont présentées sous forme ludique dans le sens où:

• On peut jouer à un, deux ou plusieurs joueurs.

• Les actions possibles sont organisées par des règles du jeu (les consignes).

• Le déroulement d'une partie s'appuie sur l'utilisation d'un support matériel.

• Le jeu permet de traiter tous ou certains aspects de la situation recherche dans le sens où il peut présenter le problème dans des cas particuliers (choix de valeurs).

Contrairement à la majorité des jeux mathématiques et autres casse-têtes disponibles dans le commerce, le modèle mathématique sous-jacent à une situation recherche est accessible, au moins en partie, au joueur, ce qui lui permet après un temps de recherche, de mettre en œuvre des arguments mathématiques et de se détacher d'une recherche hasardeuse.

II. EXEMPLE DU JEU DE LA ROUE AUX COULEURS

1. Règle du jeu

Ce jeu est constitué de deux disques de tailles différentes, disposés de façon concentrique. Sur le plus grand disque, on pose un certain nombre de pions, tous de couleurs différentes.

Figure 1-*Jeu de la roue aux couleurs*

Le joueur doit placer sur le petit disque le même nombre de pions, de une, deux, trois ou plus couleurs choisies parmi celles qui sont disposées à l'extérieur. On fait ensuite tourner le petit disque, cran par cran. Le joueur gagne si, dans chaque position du petit disque, un et un seul de ses pions est de la même couleur que celui qui lui correspond sur le grand disque. Quelles sont toutes les façons que le joueur a de choisir et disposer ses pions pour gagner ?

Par exemple,

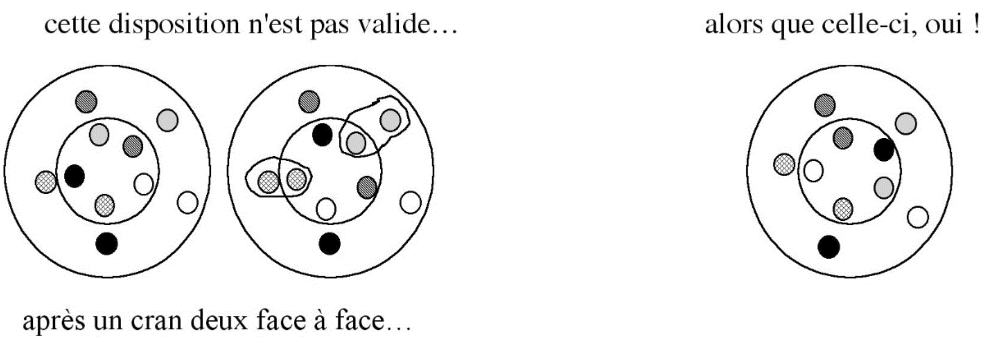


Figure 2*- Exemple de dispositions valide et invalide*

Maintenant, à vous de jouer !

2. *Éléments de résolution*

Nous noterons (n,k) les différents sous problèmes où n représente le nombre de couleurs placées sur le grand disque et k celui choisi par le joueur. Il apparaît au regard de la résolution que le couple (n,k) constitue une variable de la tâche «recherche», que nous appelons «variable de recherche » dont le choix est laissé à la charge du joueur.

On peut considérer que la résolution de ce problème, pour tout (n,k), se déroule en deux étapes:

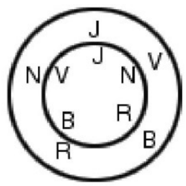
- Recherche d'une disposition des couleurs sur le disque central
- Validation de cette disposition par une rotation du disque central (réelle ou formelle)

Après quelques essais, plusieurs remarques générales peuvent s'imposer :

- Remarque « couleur»: la nature des couleurs n'a pas d'importance pour la résolution du problème, seule leur position et le fait qu'elles soient distinctes importent.

- Remarque « sens»: le sens de rotation de la roue n'a pas d'importance.

Enfin, coder les couleurs à l'aide de nombres de 0 à n-1 ou de 1 à n peut aider à la recherche.
Dans le cadre de cette communication, nous allons nous centrer sur le sous-problème (n,n).
Par expérimentation, on trouve facilement des solutions lorsque n = 3, 5, 7 ou encore 9.
Mais qu'en est-il des cas (2,2), (4,4) ou tout autre couple (2p,2p)? Cela semble plus difficile…
Pour avancer dans le problème, il faut oublier les couleurs et considérer la position relative des pions les uns par rapport aux autres, ce qui permet l'énoncé de méthodes de construction générales. On peut introduire une variable supplémentaire, le décalage entre la position sur le disque extérieur et la position sur le disque intérieur. On peut ainsi obtenir des arguments de preuve dans les cas où il n'y a pas de solution.



Disque extérieur	J V B N R
Disque intérieur	J N R B V
Décalages	0 2 4 3 1

Décalages, cas (n,n)

***Figure 3**- Notion de décalages, exemple pour (n,n)*

III. PRODUCTIONS DES PARTICIPANTS

Cette situation recherche a été expérimentée de l'école primaire à l'université (auprès de cycle 3 (8-10 ans, 4éme et 5éme année du primaire), de $6^{\text{ème}}$ (11 ans, 1ere année du collège) , de $1^{\text{ère}}$ STI (16 ans, $2^{\text{ème}}$ année du lycée) et de Deug 1 $^{\text{ère}}$ année). Chaque classe a cherché en groupes durant 4 ou 5 séances de 1 heure.

Nous l'avons également expérimentée dans un cadre extrascolaire lors d'un atelier de 2h proposé au CCSTI auprès d'enfants de 7 à 11 ans et sur le stand Maths à modeler pour la Fête de la science. Pour assurer la dévolution dès lors que le public chemine de stand en stand, la recherche était orientée vers les sous-problèmes (n,n) ou (n,2) dès la présentation. L'accompagnateur était plus présent auprès des apprentis chercheurs afin d'éviter qu'ils ne se découragent, les stimuler dans leurs recherches par ses questions, ses remarques, et les inviter à chercher suffisamment longtemps pour rentrer dans une démarche de recherche en mathématiques.

1. Présentation synthétique des productions des élèves ou étudiants

Nous pouvons considérer que tous les groupes d'élèves sont entrés dans une démarche de recherche en mathématiques, plus ou moins élaborée.

Il n'y a pas de différences marquantes entre les dynamiques de recherche mises en place même si les niveaux scolaires sont différents, mis à part une méthode de recherche de proche en proche[5] qui n'est apparue qu'en primaire. Plusieurs autres méthodes de construction de solution ont été proposées, quels que soient le niveau et les cas étudiés. Elles s'appuient sur les démarches de recherche. Les décalages ont été introduits par plusieurs groupes, après 2 ou 3 séances de recherche. Toutefois, même si les méthodes découvertes sont similaires, leur formulation semble être influencée par l'utilisation ou non du support matériel. Parmi les

[5] Consiste à fixer ce qui marche et à ne modifier que le reste.

groupes de l'université, ceux qui ne l'ont utilisé qu'au début de leur recherche pour rapidement se tourner vers le support papier-crayon ont introduit un codage numérique des couleurs et une représentation du problème à l'aide d'un tableau, ils ont donné des méthodes de construction qui tendaient à se détacher de la description de ce qu'il faut faire, en utilisant un vocabulaire mathématique et en cherchant à généraliser. Les autres groupes, pour leur part, sont restés plus proches du commentaire d'une action.

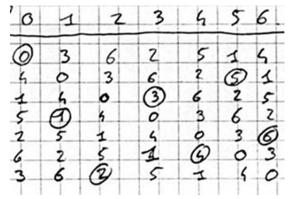


Figure 4- *Traduction de la rotation par un tableau prolongé en DEUG*

Tous ont émis des conjectures, qu'ils aient ou non mis en place des démarches de recherche organisées. Ceux qui ont procédé par tâtonnements ont énoncé des conjectures locales, liées à des cas particuliers, les autres les ont complétées par de conjectures globales, plus générales. Parmi eux, tous sont parvenus à émettre la conjecture qu'il n'y a pas de solution lorsque cela était le cas. Toutefois cela est apparu plus facilement à l'université. Nous faisons l'hypothèse que cette différence peut être due à la conception répandue chez les élèves de primaire et secondaire qu'un problème a toujours une solution, vu que cela est vrai pour la majorité des exercices qui leur sont proposés. Les étudiants de l'université, quant à eux, ont pu être confrontés à des exercices sans solution dans le cas de la résolution d'équations et ont de toute façon rencontré l'impossibilité dans les situations recherche qu'ils avaient déjà étudiées avant notre expérimentation.

Enfin, quel que soit le niveau de connaissance, tous ont été confrontés à l'activité de preuve. Ils ont montré notamment qu'il n'y avait pas de solution pour le cas (2,2) et pour (4,4), par exhaustivité des cas (qui n'était pas toujours garantie pour (4,4)) et forçage. Pour les autres cas impossibles, seuls certains groupes de l'université ont cherché des arguments de preuve.

Il n'y a donc pas de différences notoires quant à la dévolution aux élèves du problème et aux principaux résultats obtenus aux différents niveaux. Cependant, une différence majeure semble être liée à la conception que peuvent avoir les élèves sur la notion de solution.

2. *Présentation des productions dans un cadre de vulgarisation*

Même si les recherches ont duré moins longtemps (1h30 pour l'atelier, environ 30 min en moyenne pour l'animation stand), nous avons retrouvé plusieurs observables présents dans l'institution scolaire, notamment en primaire. Les participants ont eu recours au support matériel pour faire leurs essais, ils ont su s'organiser dans le choix des valeurs de (n,k) à étudier et ont adopté une progression régulière, par exemple, (4 ,2) ; (5,2) ; (6,2), jusqu'à (8 ,2) qui correspondait au nombre maximal de couleurs disponibles. Ils sont parvenus à énoncer Rem couleurs, ont cherché des méthodes de construction. Cependant, nous notons des différences pour les cas où il n'y a pas de solution. Sans les relances de l'accompagnateur, les enfants abandonnent très vite les cas plus difficiles (en fait impossibles). Avec l'aide de l'accompagnateur, ils arrivent à verbaliser leurs actions, justifier leurs propos, énoncer le fait que « ça ne marche pas du tout », voire à émettre la conjecture que certains cas sont impossibles, à prouver par forçage et exhaustivité sur de petites valeurs de (n,k).

Dans le cas du stand, plusieurs supports étaient disponibles simultanément. La dualité possible/impossible des cas à étudier a été un facteur stimulant à la recherche. En effet, pour (n,n), tous ont cherché des solutions, quel que soit le cas considéré, encouragés par le fait que certains trouvaient rapidement des solutions pour (5,5), même au hasard. A contrario, le fait que les cas (6,6) et (4,4) soient impossibles les a conduits à organiser leurs essais, pour parvenir à trouver des solutions, comme eux-mêmes ou d'autres y étaient parvenus pour (5,5). Certains avaient à l'esprit le fait qu'il puisse exister des méthodes, plusieurs cherchaient à anticiper la rotation quand ils plaçaient leurs pions, deux enfants ont découvert une méthode de construction par symétrie pour (2n+1, 2n+1). Pour (4,4) et (6,6), la majorité est restée dans le doute ou a conclu que *« ceux-là, ils sont beaucoup plus durs »* ou *« à 4, c'est presque impossible car il y a toujours 2 ou 0 à un moment »*. Cependant, quelques-uns ont évoqué l'idée que les cas pairs pouvaient être distingués des impairs et l'un d'entre eux a énoncé que (n,n) n'avait de solution que lorsque n est impair. Guidé par l'accompagnateur, il a ensuite étudié (3,3) et (2,2) pour vérifier cette idée. Comme dans les classes, la preuve de l'inexistence de solution pour (2,2) par exhaustivité des cas a alors été formulée.

Ainsi, même si rien dans le contrat didactique de notre situation ne force les enfants à continuer à chercher, leur seule curiosité et envie de trouver, comprendre, les poussent ici aussi à persévérer, se creuser la tête, essayer, recommencer... et donc à amorcer une démarche de recherche mathématique du problème. Cependant, suite à nos expérimentations, nous précisons que *La roue aux couleurs*, ainsi que toutes les autres situations recherche, est dévoluable dans le cadre d'une animation stand sous réserve qu'elle ne soit pas en concurrence directe avec des stands plus attractifs, type chimie amusante ou autre présentation spectaculaire. Dès lors, même si elle donne intrinsèquement envie de chercher, cela peut ne plus être assez fort pour parvenir à lutter contre la concurrence !

IV. JEU, SITUATION RECHERCHE ET APPRENTISSAGES

Nos expérimentations autour de plusieurs situations recherche ont montré que l'aspect ludique associé à un support matériel permet, quels que soient l'âge, le niveau de connaissance et le cadre d'intervention, de comprendre les règles du jeu et de mettre en place des stratégies de recherche, et s'avère donc être une aide à la dévolution du problème. Il est aussi une aide à la recherche pour les élèves, notamment ceux de l'école primaire, ainsi que pour les enfants dans le cadre du loisir ou le grand public car il donne l'opportunité de faire facilement des essais et d'exhiber des contre-exemples (Godot 2005). Ainsi, il permet d'aborder la recherche en mathématiques dans le cadre d'ateliers « sciences » proposés pendant les temps péri et extrascolaires, comme nous le faisons dans le cadre du projet Maths et malice mis en place en partenariat avec l'association grenobloise Sciences et malice (Godot 2012) ainsi que lors d'animations stand.

Dès lors, les situations recherche ludiques, à l'école ou en dehors, peuvent permettre des apprentissages en mathématiques. Ce ne sont pas des apprentissages notionnels mais transversaux, constitutifs de l'activité de recherche mathématique, tels que l'intérêt de commencer par étudier des petites valeurs (alors que les participants ont tendance à faire le contraire), d'organiser ses essais, de généraliser, d'autres liés à la mémoire de la recherche tels que l'importance de la clarté de la prise de notes et du fait qu'il est aussi important de marquer les erreurs « pour ne pas les refaire ». Les joueurs découvrent également ce qu'est un contre-exemple (et qu'un seul suffit), le statut d'une conjecture, d'une preuve, que certaines questions peuvent rester sans réponse… Des éléments relatifs à la notion même de problème mathématique sont aussi en jeu. D'une part, le fait qu'un problème de mathématiques n'a pas forcément une solution et une seule comme cela est souvent le cas dans les manuels, mais peut en avoir plusieurs ou aucune. D'autre part, qu'il n'y a pas qu'un seul schéma de résolution : quel que soit le niveau de connaissance, plusieurs stratégies de recherche apparaissent même chez les participants les plus en difficulté en mathématiques. Cependant, pour qu'il y ait apprentissages, jouer une seule fois ne suffit pas, il faut une pratique régulière.

Enfin, une telle pratique des mathématiques peut conduire à enrichir le rapport personnel du participant vis-à-vis des mathématiques car elle implique une appréhension différente de l'activité mathématique, en les montrant sous un angle expérimental, où le public est actif et acteur. Au cours de nos expérimentations, nous avons interrogé le public, dans le cadre scolaire et extrascolaire, pour savoir s'il reconnaissait les situations recherche comme faisant partie des mathématiques. La majorité des réponses rejette cette idée précisant que c'est plutôt « un jeu, un jeu de logique, de créativité », « qu'il n'y a pas de chiffres, qu'il faut réfléchir et non calculer », que « ce serait plutôt de la logique et pas des maths », que« ça ne peut pas être des maths puisqu'on s'amuse »… Une fois reconnus comme mathématiques (par le fait de les proposer en cours de mathématiques, par la présence d'un chercheur, après discussion avec l'accompagnateur, par un débat dans la classe, le groupe…), ces jeux pour apprentis chercheurs peuvent donc aussi contribuer à réconcilier certains avec cette discipline scientifique, en « cassant l'image caricaturale des mathématiques comme d'une matière où l'on applique, ou l'on ne doit pas se tromper, pour en faire une matière qui permet de développer l'autonomie, la prise d'initiative, de faire appel à l'imagination, de développer la créativité, d'attiser la curiosité, de déclencher l'envie et le plaisir d'apprendre, de réfléchir, de comprendre et de… trouver ! c'est-à-dire des qualités transférables au-delà des maths… » comme le souligne un enseignant. Ainsi, la pratique régulière de situations recherche dans le cadre scolaire et extrascolaire peut-elle, selon nous, permettre de développer un aspect de la culture mathématique très peu traité, que ce soit à l'école ou en dehors: comprendre ce qu'elles sont et ainsi leur donner plus de sens.

REFERENCES

Godot K. (2012) Maths et Malice, un projet pour faire découvrir les mathématiques sur le temps du loisir. *Enseignement des mathématiques et contrat social. Enjeux et défis pour le XXIe° siècle, colloque Espace Mathématiques Francophone*.

Godot K. (2005) *Situations recherche et jeux mathématiques pour la formation et la vulgarisation.* Thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble, novembre 2005. En ligne sur http://tel.ccsd.cnrs.fr/tel-00102171.

Grenier D., Payan C. (1998) Spécificités de la preuve et de la modélisation en mathématiques discrètes. *RDM* 18(1), 59-100

Grenier D., Payan C. (2002) Situations de recherche en classe : essais de caractérisation et proposition de modélisation. *Cahiers du séminaire national de recherche en didactique des mathématiques*.

Pastori M. (2011) Faire pratiquer une démarche d'investigation en classe en mathématiques, un exemple : Les ateliers Maths à Modeler et séminaires juniors. In Grangeat M. (Ed.) *Les enseignants de sciences face aux démarches d'investigation*. Regards sur l'éducation, PUG.