Titre : Aplusix, un logiciel pour l'apprentissage de l'algèbre.
Exemples d'intégration dans le cas de la résolution des équations en collège

Alain Bronner,

ERES, LIRDEF, IUFM de Montpellier

Denis Bouhineau, Jean-François Nicaud

MTAH, laboratoire Leibniz, Grenoble

Résumé

Le logiciel Aplusix d'aide à l'apprentissage de l'algèbre, en cours de développement au laboratoire Leibniz, a fait l'objet d'expérimentations dans des classes de collège et de lycée en France, depuis septembre 2002. De nombreuses séquences didactiques ont été conduites avec Aplusix dans un but de remédiation. Nous postulons que l'intégration de ce logiciel est possible avec une place et un rôle spécifique aux différents moments de l'étude. Dans cette communication, nous présentons une ingénierie en classe de quatrième sur l'intégration du logiciel pour l'apprentissage de la résolution des équations.

Introduction

Après avoir décrit les caractéristiques du logiciel Aplusix[1], nous rappelons quelques repères sur l'enseignement des équations au collège et donnons quelques références théoriques qui fondent nos travaux. Nous tentons ensuite de montrer que l'intégration de ce logiciel est possible avec une place et un rôle spécifique aux différents moments de l'étude (CHEVALLARD, 1999), notamment dans les moments de première rencontre avec un nouveau savoir. Pour ce faire, nous analysons une ingénierie en classe de quatrième concernant l'apprentissage de la résolution des équations. Les situations sont analysées à l'aide des cadres de la théorie anthropologique (CHEVALLARD, 1999) et de la théorie des situations de BROUSSEAU (1986).

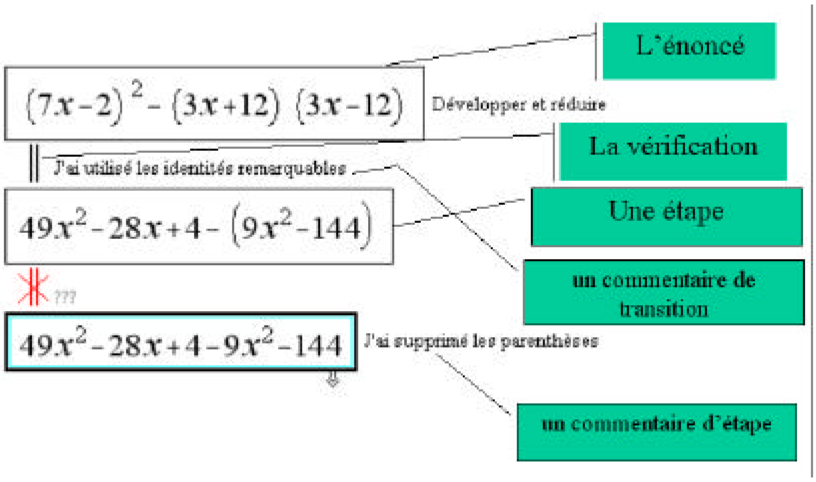
Description du logiciel

Aplusix est un micromonde algébrique (BOUHINEAU et al, 2002) comportant un éditeur avancé d'expressions algébriques. Il permet à l'élève d'organiser ses calculs algébriques et de

[1] http://aplusix.imag.fr

raisonner de manière assez comparable à l'environnement papier-crayon, avec parfois quelques contraintes de présentation. On peut faire résoudre aux élèves des séquences d'exercices préparées au préalable et enregistrées dans des fichiers. Le logiciel peut indiquer ou non l'équivalence entre l'équation courante et celle dont elle est issue. Il peut afficher ou non des indicateurs sur l'état d'avancement de la résolution et indiquer si l'exercice est résolu. Toutes ces fonctionnalités sont paramétrables. Dans les dernières versions, le logiciel peut aussi suggérer ou demander à l'élève d'écrire des commentaires sur les étapes de son raisonnement. Aplusix garde une trace informatique de l'activité des élèves en enregistrant l'intégralité des actions produites au clavier et à la souris. Il comporte un magnétoscope qui permet de rejouer les résolutions de l'élève à partir de cette trace.

Un raisonnement d'élèves dans Aplusix peut ainsi comporter les éléments suivants :



Les éléments d'un raisonnement d'élève avec Aplusix

Quelques repères sur les programmes de l'enseignement secondaire français

Les programmes actuels de collège et de lycée à propos des équations proposent une certaine progressivité dans l'enseignement de l'algèbre du collège au lycée, même si on peut identifier quelques ruptures importantes. En particulier, la classe de quatrième[2] du collège en France constitue une étape importante dans cet enseignement au niveau des équations (BRONNER et NOIRFALISE 2001). L'organisation mathématique visée relève du domaine des “ travaux numériques ”, du secteur “ calcul littéral ”, et plus précisément du thème constitué autour du type de tâche T : “ résolution d'un problème conduisant à des équations du premier degré à

[2] Elèves de 14 ans.

une inconnue ”. Dans les textes des programmes, ce type de tâches est découpé en trois types de sous tâches[3] :

Tm : “ mettre en équation du problème ”

Tr : “ résoudre l’équation ”

Ti “ interpréter le résultat ”.

L’association “ résolution de problèmes ” et “ mise en équation” n’apparaît explicitement, dans les programmes, qu’à partir de la classe de quatrième.

Dans les textes officiels la rencontre avec les équations est associée en classe de 6° avec “la recherche d’un nombre manquant dans une opération ” , disjointe à ce niveau de l’initiation aux écritures littérales. En classe de 5°, l’initiation à la résolution d’équations est associée au travail sur le calcul littéral.

Quelques repères sur les travaux en didactique des mathématiques à propos de la résolution des équations

Les travaux en didactique de l’algèbre montrent la complexité multidimensionnelle de l’algèbre (GRUGEON, 1995).

Ils font ressortir la nécessité d’une négociation de l’articulation numérique/algébrique, de la rupture entre les procédures arithmétiques et les procédures algébriques (CHEVALLARD, 1985, 1989).

De nombreuses recherches montrent que les élèves mobilisent spontanément une conception procédurale (SFARD, A. et LINCHEVSKI, L., 1994) et évoluent difficilement vers une conception structurale nécessaire au bon traitement de certaines équations, notamment celles où se trouvent des inconnues dans les deux membres. Nous l’avons repéré même dans des classes de première S lors d’évaluations diagnostiques réalisées avec le logiciel Aplusix (BOUHINEAU et al, 2003).

Enfin l’articulation des caractères outil et objet (DOUADY, 1984) est aussi une dimension sensible dans le cas des équations (BRONNER et NOIRFALISE, 2001).

[3] Nous faisons référence à l’analyse d’un domaine de savoirs mathématiques comme complexe praxéologique au sens de Chevallard (1999).

Notre problématique sur l'apprentissage de l'algèbre dans le domaine des équations et sur l'intégration du logiciel A+x.

Cet environnement informatique a été utilisé spontanément par des enseignants pour des activités de remédiation en algèbre dans le cadre de l'aide individualisée en classe de seconde (BRONNER et al, 2003). Nous souhaitons montrer que le logiciel Apluxis est bien plus qu'un outil de remédiation en algèbre. D'autres types d'usages didactiques sont possibles comme des activités d'étude et de recherche avec des moments de première rencontre, d'élaboration de techniques ou de théories (CHEVALLARD, 2000), destinées à introduire des nouvelles connaissances algébriques dans la classe.

L'analyse précédente nous a conduits à la problématique suivante dans le cadre des équations en classe de quatrième :

Comment rendre l'outil équation et les techniques associées, motivés et fonctionnels ?

Comment travailler les spécificités du registre des écritures algébriques (au sens de DUVAL, 1993) ?

Comment intégrer dans cette perspective un travail avec le logiciel Aplusix en l'articulant avec le travail papier/crayon ?

Une stratégie d'enseignement de la résolution des équations intégrant A+x :

Nous décrivons dans les parties suivantes le processus expérimenté dans une classe de quatrième[4]. Notre ingénierie, intégrant le micro-monde Aplusix, se fonde sur la prise en compte des différentes dimensions de l'algèbre (GRUGEON, 1995), des statuts objet et outil de l'objet équation, et des potentialités nouvelles développées par l'équipe de recherche autour du logiciel Aplusix. Nous analysons notamment le processus de dévolution (BROUSSEAU, 1986) de la recherche des méthodes et règles de résolution aux élèves. Le processus d'enseignement comprend cinq grandes phases.

[4] Il s'agit d'une expérimentation dans le cadre d'une ingénierie réalisée en collaboration avec Marc Boullis, professeur de cette classe et animateur à l'IREM de Montpellier.

Phase 1 : La motivation des tâches Tr

Tout d'abord, nous avons essayé de motiver le type de tâches Tr en le reliant dès le début au type de tâche Tm, c'est-à-dire la résolution de problèmes du premier degré, et donc de commencer par le type de tâches Tm. Ce choix est bien conforme à l'esprit des programmes de la classe de quatrième. Un premier problème est choisi pour faciliter l'entrée des élèves dans le contexte des problèmes et favoriser la diversité des procédures de résolution, sans discriminer la nature des procédures possibles (arithmétique par inversion des opérations, par essais ou algébrique). Ensuite, nous avons proposé aux élèves de travailler sur quatre problèmes du type suivant : Problèmes[5] « Arthur et Béatrice » .

> Deux élèves, Arthur et Béatrice, ont chacun une calculatrice. Ils affichent le même nombre sur leur calculatrice.
>
> Arthur multiplie le nombre affiché par a, puis ajoute b au résultat obtenu.
>
> Béatrice multiplie le nombre affiché par c, puis ajoute d au résultat obtenu.
>
> Quand ils ont terminé, ils s'aperçoivent que leurs calculatrices affichent exactement le même résultat.
>
> Quel nombre ont-ils affiché au départ ?
>
> Il s'agit de dire comment on peut trouver le nombre de départ.

Ces problèmes ne présentent pas de difficulté de contexte ou de langage. Les valeurs a, b, c et d sont choisies de manière à rendre la procédure par essai de plus en plus disqualifiée en allant du problème 2 au problème 5 compte tenu des valeurs choisies.

Ils mettent directement les élèves dans le domaine des nombres, des relations arithmétiques entre les nombres. Une conception procédurale des expressions algébriques ne bloque pas chez les élèves les procédures par essai et même les mises en équation de ces problèmes.

Ces problèmes ne favorisent pas les solutions arithmétiques. Ils renvoient à la *didactical cut* (Filloy et Rojano 84), rupture didactique entre les équations de la forme $x + a = b$, $ax = b$, $ax + b = c$ et la résolution d'équations de la forme $ax + b = cx + d$ qui demande en général de nouvelles techniques. Il s'agit alors de motiver au sein du groupe classe la recherche de techniques efficaces pour résoudre ces équations.

Effectivement, dans la classe de quatrième, et pour le deuxième problème, 12 élèves ont raisonné par tâtonnements pour aboutir à la solution (le nombre 3) et 5 élèves ont abordé le

---

[5] Problèmes inspirés de G.COMBIER, JC GUILLAUME, A. PRESSIAT (1996), *Les débuts de l'algèbre au collège – au pied de la lettre !*-INRP.

problème en écrivant l'équation $3x+4=2x+7$. En revanche, au problème 4 (dont la solution est 2,5) on ne retrouve plus que 3 élèves qui ont utilisé une méthode par tâtonnement et aucun n'a réussi à le résoudre. Parallèlement, 20 élèves sont entrés dans une procédure algébrique avec des réussites diverses.

Les différentes procédures ont été écrites au tableau. La classe a conclu à l'universalité de la procédure algébrique contrairement à la procédure par tâtonnement. La motivation du type de tâche Tr semble réalisée.

Phase 2 : L'élaboration des techniques de résolution et des éléments théoriques associés

L'objectif de cette étape est de t

ravailler l'objet équation avec le logiciel Aplusix. L'utilisation de ce logiciel permet d'avoir davantage de rétroactions et un milieu comportant une certaine a didacticité (Brousseau, 1986), contrairement au dispositif classique du papier/crayon.

Pour maintenir la cohérence avec le travail précédent, nous avons proposé, dans un premier temps, 4 problèmes de type « Arthur et Béatrice » aux élèves. Ils devaient seulement mettre en équation chaque problème, s'arrêter à ce point de la résolution du problème, pour arriver aux quatre équations

$$2x+1 = 4x - 4 \ ; \ 0{,}3x - 5{,}2 = 4x - 4 \ ; \ \frac{x}{3} + 5 = -2x + 3 \ ; \ \frac{x+5}{3} = (x+3)(-2)$$

dont les solutions sont respectivement : 2,5 ; 2 ; $-\frac{6}{7}$; $-\frac{23}{7}$.

Pour poursuivre la dévolution aux élèves de la recherche de règles de résolution, la tâche suivante proposée est celle de la résolution de ces équations mais avec l'enjeu de trouver des méthodes générales de résolution. De plus, ce travail se fera avec l'environnement et l'aide du logiciel Aplusix. Les quatre équations sont déjà entrées dans le logiciel et les élèves doivent les résoudre l'une après l'autre mais en décrivant et en justifiant leurs actions dans un cadre fourni par le logiciel. Une fois les quatre équations résolues, ils essaient de formuler :

- la liste des règles mathématiques qu'il faut utiliser pour résoudre une équation.
- la stratégie qu'il semble falloir adopter pour résoudre une équation.

Nous avons paramétré le logiciel pour qu'il soit en vérification permanente. L'activation de la fonction « résolu » offre à l'élève une information sur la finitude de son travail. Enfin, le logiciel leur rappelait l'obligation de décrire et justifier leurs procédures en leur demandant deux types de commentaires :

- Un commentaire au niveau de chaque étape qui doit décrire l'action à ce pas du raisonnement.
- Un commentaire de transition entre deux étapes qui doit indiquer les règles qui justifient la réussite de l'action.

Le milieu de l'action est tout d'abord constitué des expressions algébriques, des équations, des consignes données aux élèves et des éléments de l'environnement Aplusix qui sont en interaction permanente avec les élèves. Le logiciel étant mis en mode « vérification permanente », il apporte une rétroaction fondamentale sur la justesse des transformations des équations par les élèves. Ces derniers peuvent ainsi être assurés à chaque étape de la validité de leurs actions sur les expressions algébriques.
Pour autant, ils ne sont peut-être pas capables de formuler leurs actions et d'expliciter les théorèmes algébriques qui les rendent effectivement valides.

C'est pour cela que nous avons exploité les possibilités des dernières versions du logiciel en leur demandant les deux types de commentaires en les faisant entrer dans une situation de formulation (Brousseau 1986).
Le travail se poursuit dans une phase de restitution collective et de bilan, gérée par le professeur.

Les élèves ont respecté globalement le contrat en essayant de citer une règle à chaque étape et d'expliquer ce qu'ils ont fait.
Certains ont eu un peu de mal à étiqueter ou caractériser la règle, comme Emma qui parle de *règle de proportionnalité* pour l'ajout ou le retrait d'un nombre aux deux membres de l'équation pour justifier sa transformation.

$\boxed{2x+1=4x-4}$ Résoudre

$\Updownarrow$ la règle de proportionnalité qui me dit que si je retire un nombre d'un coté de l'équation je dois faire

$\boxed{2x-2x+1=4x-2x-4}$ on aretiré 2x de chaque coté pour que l'équation soit toujours égale et pour pouvoir continuer le cal

$\Updownarrow$ on effectue les calculs

$\boxed{1=2x-4}$ j'ai calculé

$\Updownarrow$ la règle de proportionnalité

$\boxed{1+4=2x-4+4}$ on a ajouté +4 de chaque coté pour que l'équation soit toujours égale et pour pouvoir continuer le c

$\Updownarrow$ on effectue les calculs

$\boxed{5=2x}$ j'ai calculé

$\Updownarrow$ on a divisé

$\boxed{x=2.5}$ on a trouvé x

Production de Emma

Florent explicite dans le registre du langage naturel des éléments de sa stratégie et de ses actions : « on simplifie l'équation afin de ne garder que les x » ainsi que les règles qui justifient l'équivalence « Si on soustrait un nombre d'un côté, il faut aussi le soustraire de l'autre ».

$\boxed{2x+1=4x-4}$ resoudre

$\Updownarrow$ si on soustrait un nombre d'un coté, il faut le soustraire aussi de l'autre.

$\boxed{2x+1-1=4x-4-1}$ on simplifie l'equation afin de ne garder que les x

$\Updownarrow$ somme des nombres relatifs

$\boxed{2x=4x-5}$ on effectue le calcul

$\Updownarrow$ si on divise un nombre d'un côté, il faut le diviser de l'autre

$\boxed{\frac{2x}{2}=\frac{4x-5}{2}}$ on simplifie l'equation afin de ne garder que les x

Production de Florent

Delhia utilise des actions qui sont de l'ordre de la transposition d'un terme dans l'autre, cependant la première règle énoncée n'est pas conforme à l'action de transposition. Elle utilise le registre algébrique pour formuler les règles, mais elle reste très proche du contexte et de la forme des expressions algébriques de chaque équation : pour justifier le passage de l'étape 2 à l'étape 3, elle : « Si ab = bc + d alors ab – bc = d ».

$$\boxed{0{,}3x - 5{,}2 = -4{,}7x + 4{,}8}$$ Résoudre

$\Updownarrow$ SI a=b ALORS a-c=b-c

$$\boxed{0{,}3x = -4{,}7x + 4{,}8 + 5{,}2}$$ Pour faire passer un nombre de l'autre côté de l'opération on ajoute son opposé

$\Updownarrow$ SI ab= bc+d ALORS ab-bc=d

$$\boxed{0{,}3x + 4{,}7x = 4{,}8 + 5{,}2}$$ on fait passer les x du même côté

$\Updownarrow$ on factorise

$$\boxed{5x = 10}$$ on effectue les calculs

$\Updownarrow$ Si ab=c ALORS B=c/a

$$\boxed{x = \frac{10}{5}}$$ on effectue les calculs

$\Updownarrow$ on effectue les calculs

$$\boxed{x = 2}$$ on trouve x

Production de Delhia

Lucille arrive à généraliser avec des règles exprimées dans le registre algébrique. Par exemple, elle formule : « Si a = b et c un nombre relatif, alors a-c = b – c » ou encore « Si a = b et c un nombre relatif, alors a/c = b /c ».

$$\boxed{0{,}3x - 5{,}2 = -4{,}7x + 4{,}8}$$ resoudre

$\Updownarrow$

$$\boxed{0{,}3x - 5{,}2 - 4{,}8 = -4{,}7x + 4{,}8 - 4{,}8}$$ j' ai retranché -4,8 de chaque côté de l'égalité.

$\Updownarrow$ l'addition des nombres relatifs

$$\boxed{0{,}3x - 10 = -4{,}7x}$$ j'ai additionné -5,2 et -4,8

$\Updownarrow$ Si a=b et c un nombre relatif alors a-c=b-c

$$\boxed{0{,}3x - 10 - 0{,}3x = -4{,}7x - 0{,}3x}$$

$\Updownarrow$ autre régle

$$\boxed{-10 = -5x}$$ j'ai additionné -4,7x et -0,3x

$\Updownarrow$ Si a=b et c un nombre relatif alors a/c=b/c

$$\boxed{-\frac{10}{-5} = \frac{5x}{5}}$$ j'ai divisé par 5 de chaque côté de l'équation

$\Updownarrow$ autre régle

$$\boxed{x = 2}$$ j'ai divisé -10 et -5

Production de Lucille

Certains élèves sont passés assez rapidement à des formulations algébriques, d'autres sont restés dans le registre de la langue naturel. Au-delà de cette diversité, la grande partie des élèves ont compris que les règles spécifiques sur la transformation des équations reposaient sur la conservation des égalités par les opérations arithmétiques et qu'elles étaient nécessaires au raisonnement.

L'apport du logiciel, et notamment sa rétroaction fondamentale, a été capital pour chaque élève, pour produire une méthode de résolution correcte, pour permettre une étude de la méthode et enfin pour formuler les règles sous-jacentes. La nature de ces activités aurait été beaucoup plus difficile à réaliser en papier crayon, notamment pour valider sur le moment les procédures des élèves.

Phase 3 : L'institutionnalisation

En s'appuyant sur le travail individuel avec le logiciel, la restitution a permis une comparaison en collectif des méthodes de résolution, des règles de transformation et de leur formulation. Une réflexion sur les stratégies et sur les étapes essentielles de la résolution a pu être menée. L'institutionnalisation a porté sur le concept d'équation et de solution, la stratégie de résolution des équations du 1er degré (sous la forme d'un exemple) et sur trois règles d'équivalence des équations :

Pour résoudre une équation on la transforme, par étapes successives, pour aboutir à une équation de la forme $x = a$ ou $0x = a$ (où a est un nombre). Cependant, il faut qu'à chaque étape, les équations obtenues aient la (les) même(s) solution(s).

Une équation a les mêmes solutions que toutes les équations obtenues….

Règle 1 : En transformant chacun des membres de l'équation à l'aide de règles mathématiques.

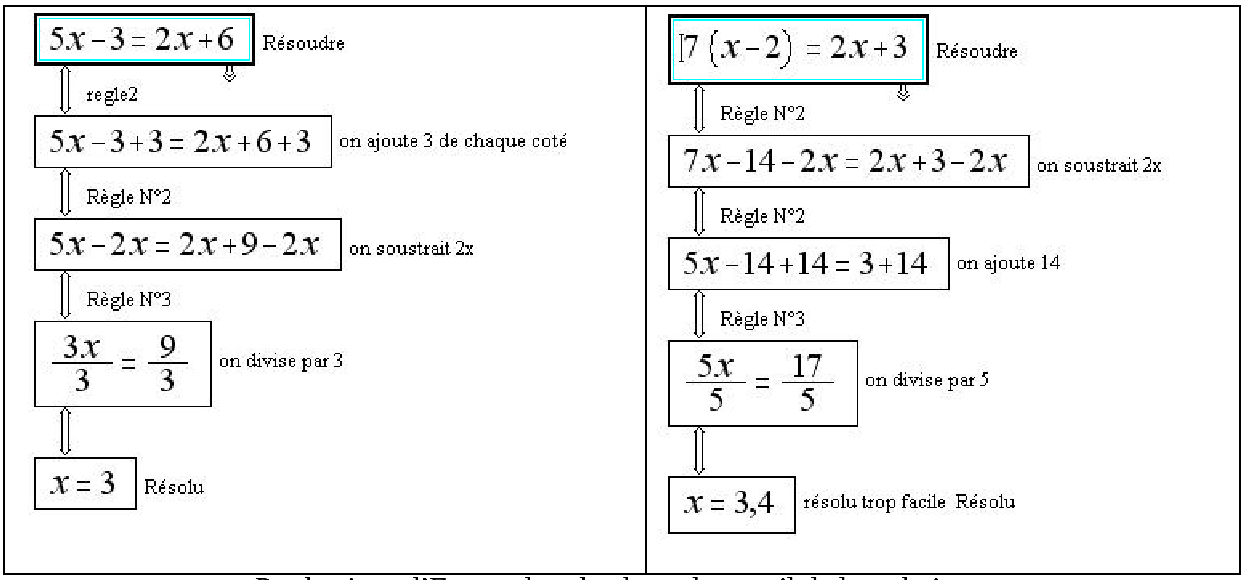
Règle 2 : En ajoutant ou en soustrayant un même nombre aux deux membres de l'équation.

Règle 3 : En multipliant ou en divisant par un même nombre non nul les deux membres de l'équation.

Extraits du cours du professeur

Phase 4 et 5 : le travail de la technique et le retour aux problèmes

Des phases d'entraînement et de perfectionnement des techniques de résolution ont été ensuite proposées aux élèves avec la même démarche que celle développée dans la phase 2 d'élaboration. Ici le milieu a été enrichi par les règles élaborées par les élèves à l'étape 2 et par la liste des trois règles institutionnalisées dans le cours. Les trois règles pourront ainsi être rappelées par les élèves directement par leurs numéros comme le montre les productions d'Emma ci-dessous :



Productions d'Emma dans la phase de travail de la technique

Enfin, des problèmes dans des contextes variés et différents de celui des problèmes de type 1 et 2, ont été proposés aux élèves pour poursuivre l'articulation des types de tâches Tm et Tr.

Conclusion

Si le domaine de travail naturel d'Aplusix est l'algèbre formelle, nous avons montré que ce travail peut s'articuler avec le statut d'outil des expressions algébriques dans la résolution de problèmes. Le logiciel Aplusix comme Environnement Informatique pour l'Apprentissage Humain (EIAH) constitue une aide à l'apprentissage dans le domaine des équations, non seulement dans les phases d'entraînement et de perfectionnement des techniques de résolution, mais aussi des phases d'élaboration des techniques de résolution et des éléments théoriques.

Les caractéristiques d'Aplusix ont favorisé un travail fondamental sur la rationalité algébrique qui est partout présente implicitement dans l'EIAH. Il se pose en effet en permanence le problème du choix de la transformation à effectuer. La vérification permanente de l’équivalence fournit aux élèves une rétroaction fondamentale sur l’état du milieu, qu’il est bien difficile d’avoir en papier-crayon.

Bibliographie :

BOUHINEAU D., HUGUET T., NICAUD J.F., (2002), «Doing mathematics with the APLUSIX-Editor , Actes de Visit'me 2002, ACDCA'7, J Böhm (ed.), Vienne

BOUHINEAU D., BRONNER A., CHAACHOUA C., HUGUET T., (2003a), Analyse didactique de protocoles obtenus dans un EIAH en algèbre, Actes du colloque EIAH 2003, Université Pasteur, Strasbourg.

BOUHINEAU D., BRONNER A., HUGUET T., NICAUD J.F., (2003b), Usages didactiques du logiciel Aplusix pour l'enseignement de l'algèbre, Actes du colloque ITEM, Reims.

BROUSSEAU G., (1986) , Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, RDM Vol. 7/2, La pensée sauvage. Grenoble

BRONNER A, NOIRFALISE A., (2001), Structures, fonctionnement, écologie des organisations didactiques à propos de l'algèbre en quatrième, La pensée sauvage, Grenoble

CHEVALLARD Y., (1985), Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège, Petit x n° 5, Irem de Grenoble.

CHEVALLARD Y., (1989), Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège - Deuxième partie : Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. Petit x n'19, , Irem de Grenoble.

CHEVALLARD, Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, Recherches en Didactique des Mathématiques 19(2), La pensée sauvage, Grenoble .

DOUADY R. (1984), Jeux de cadres et Dialectique outil-objet, Thèse d'état, Université Paris VII.

DROUHARD J.PH., (1992), Les écritures symboliques de l'algèbre élémentaire, Thèse de doctorat, Université Paris 7.

DUVAL R., (1993), Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, Annales de didactiques et de sciences cognitives, Vol. 5, ULP, IREM de Strasbourg.

GRUGEON B., (1995), Etude des rapports institutionnels et des rapports personnels des élèves à l'algèbre élémentaire dans la transition entre deux cycles d'enseignement : BEP et Première G. Thèse, Université Paris VII.

KIERAN C., (1981), Concepts Associated with the Equality Symbol. Educational Studies in Mathematics. Volume 12, n°3 August, Kluwer Academic Publishers.

RABARDEL P., (1995), Les hommes et les technologies, Armand Colin

SFARD A. et LINCHEVSKI L., (1994), The gains and the pitfalls of réification – The cas of algebra, Educational Studies in Mathematics, Vo.l 26, Kluwer Academic Publishers.