Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

ÉTUDE DU DÉVELOPPEMENT DE LA PENSÉE ALGÉBRIQUE AU PRÉSCOLAIRE : CAS DE SUITES NON-NUMÉRIQUES

Manon BOILY [*] – Geneviève LESSARD [**] – Elena POLOTSKAIA [***] – Nathalie ANWANDTER-CUELLAR [****]

Résumé – Dans cet article, nous examinons le potentiel de l'activité portant sur les suites non-numériques au regard du développement d'une pensée algébrique chez les enfants de 5 ans. À cet égard, les relations récursive et explicite sont abordées. Nous apportons une réflexion sur les tâches proposées en nous attardant aux gestes et au langage utilisé par les élèves en relation avec celles-ci et ce, dans le but d'identifier le type de pensée mathématique sollicité. Une attention particulière est portée aux difficultés des élèves et aux stratégies utilisées par les enseignants, pour soutenir les apprentissages de leurs élèves dans l'expression des suites.

Mots-clefs : pensée algébrique, étayage, suite non-numérique, pensée récursive

Abstract – In this article, we examine the potential of educational activities, involving non-numerical patterns, to support the development of algebraic reasoning in five-year-old children. We focus our attention on recursive and explicit relationships present between and within elements of these patterns. In order to identify the type of mathematical thinking students may apply while solving tasks, we analyze the students' language and gestures, used in relation to the tasks' mathematical characteristics. We pay special attention to the students' difficulties and to the strategies used by teachers, to support the students' understanding of non-numerical patterns.

Keywords: Algebraic thinking, scaffolding, non-numerical patterns, recursive thinking

I. INTRODUCTION

Les régularités quantitatives et géométriques sont parmi les domaines d'étude les plus importants en mathématiques (Kieran 2014; Cai & Knuth 2011; Ministère de l'Éducation de l'Ontario 2005). En fait, l'étude de suites non-numériques fait partie de programmes de formation au sein de nombreux pays qui ont comme visée d'introduire le développement de la pensée algébrique de la maternelle à la 12ième année (Moss & McNab 2011 s'appuyant sur les travaux de Noss et al. 1997; Sasman et al. 1999; Warren 2000). Le fait d'introduire le raisonnement algébrique plus tôt dans le cheminement scolaire de l'élève aurait été influencé par plusieurs résultats de recherche démontrant les difficultés vécues par les élèves lorsqu'ils

[*] Université du Québec à Montréal – Canada – *boily.manon@uqam.ca*
[**] Université du Québec en Outaouais – Canada – *genevieve.lessard@uqo.ca*
[***] Université du Québec en Outaouais – Canada – *elena.polotskaia@uqo.ca*
[****] Université du Québec en Outaouais – Canada – *nathalie.anwandter@uqo.ca*

Boily M., Lessard G., Polotskaia E., Anwandter-Cuellar N. (2015) Étude du développement de la pensée algébrique au préscolaire. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT3, pp. 220-230.

sont initiés à l'algèbre au secondaire (Radford 2012; Carraher & Schliemann 2007 ; Kieran 1992).

II. L'ÉTUDE DES RÉGULARITÉS DANS LE PROGRAMME DE L'ONTARIO

À l'instar de ces travaux de recherche, le Ministère de l'Éducation de l'Ontario (MEO 2008) a décidé d'instaurer un programme préconisant le développement de la pensée algébrique, dès la maternelle, pour les élèves de 4 ans et le jardin, chez les élèves de 5 ans. L'idée étant que l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre soient présentés dans le curriculum non pas de façon linéaire et hiérarchique, mais en concomitance avec l'enseignement de l'arithmétique (Cai & Knuth 2011, Masson 2008; Squalli 2002). Toutefois, le MEO (2008) précise, en s'appuyant sur Squalli (2002), qu'il ne s'agit pas d'aborder plus tôt l'algèbre et son langage littéral mais d'amener l'élève à développer une pensée algébrique. À cet égard, le MEO (2008) accorde une place d'importance à l'étude des suites non-numériques et numériques qui, souligne-t-il, est une façon d'amener l'élève à observer les changements et analyser les relations marquées par ces changements ; ceux-ci étant au cœur du raisonnement algébrique.

Bien que les suites à motifs croissants ne soient vues qu'à partir de la deuxième année, nous voulions examiner la compétence de l'élève de 4 et 5 ans à réaliser ce type de suite au regard de la pensée mathématique suscitée.

III. L'INTÉRÊT DE CETTE ÉTUDE

Très peu d'études abordant le développement de la pensée algébrique ont été réalisées auprès d'élèves de 4 et 5 ans. En fait, les études ont plutôt été effectuées auprès d'élèves du primaire. Cependant, il semble qu'en introduisant le raisonnement algébrique dans le programme de maternelle, les enseignants peuvent construire des fondements solides chez leurs élèves, fondements qui leur seront utiles à l'étude de la notion de fonction dans les classes supérieures (Kieran 2004). Nous nous joignons donc à quelques-uns de ces auteurs tels que Moss et McNab (2011), Beatty (2010) et Warren Cooper (2008) pour examiner le potentiel de l'activité portant sur les suites non-numériques au regard du développement d'une pensée algébrique chez des élèves de l'âge préscolaire.

IV. CADRE THÉORIQUE

Dans cet article, nous présentons les compétences des élèves de la maternelle et du jardin à reconnaître et à prolonger une suite non-numérique à motifs croissants. Puis, une attention particulière est portée aux difficultés des élèves et aux stratégies utilisées par les enseignants pour soutenir les apprentissages de leurs élèves dans l'activité sur les suites. Nous apportons également une réflexion sur le développement de la pensée algébrique des élèves à l'égard des tâches proposées en nous attardant aux gestes et au langage utilisé par les élèves en relation avec celles-ci et ce, dans le but d'identifier le type de pensée mathématique sollicité.

1. Le développement de la pensée algébrique

Kieran (2004) explique que la pensée algébrique dans les premières années implique certains modes de pensée, non exclusif à l'algèbre, qui servent de base commune pour des pensées mathématiques, telle que : raisonner sur les relations, représenter et modeler. Les modes de pensée ayant cette caractéristique peuvent être sollicités dans différents types de tâches. Dans le présent article, nous nous intéressons à l'élaboration de cette pensée associée aux suites non-numériques.

Quant à Blanton et Kaput (2011), ils précisent que « *les expériences dans la construction, l'expression, et la justification des généralisations mathématiques* » sont au centre de la préparation à l'algèbre. Ils suggèrent que de telles expériences soient proposées aux élèves dès le début de la scolarisation. En outre, Kaput, Carraher et Blanton (2008) caractérisent la pensée algébrique à partir de deux aspects fondamentaux: (1) la construction et l'expression des généralisations dans des systèmes de symboles conventionnels de plus en plus formels et, (2) le raisonnement avec des formes symboliques (a-a=0), y compris les manipulations syntaxiquement guidées par les formes symboliques. Toutefois, tenant compte de l'âge de nos participants, dans notre étude, nous nous préoccupons principalement de l'aspect de construction et de l'expression non formel (non conventionnel) des relations en contexte de suites non-numériques. Nous adhérons, à l'instar de Kaput et al. (2008), à l'étude du développement d'une pensée algébrique associée aux relations et aux variations au sein de l'activité reliée aux suites non-numériques.

Par ailleurs, dans le contexte d'étude de suites, Bezuszka et Kenney (2008) distinguent la relation récursive : relation entre l'élément de la suite et l'élément suivant (exemple : f(5)=f(4)+2), et la relation explicite : relation entre la position de l'élément dans la suite et la composition (valeur) de cet élément (exemple : f(n)=2n+1). Les pensées donnant accès à l'appréciation de ces relations sont distinctes mais étroitement liées entre elles. Les deux types de pensées sont de nature algébrique selon les auteures car celles-ci sont en fait, les généralisations des relations entre des quantités. Quant à Radford (2012) ce qui fait une pensée de type algébrique est son aspect analytique. Par exemple, la reconnaissance d'une relation sous une forme généralisée.

Dans le cas de suites non-numériques, nous pouvons parler de : (1) l'appréciation d'un motif récurrent dans une suite répétitive ; (2) l'appréciation de la variation dans une suite croissante. Par conséquent, on peut se demander comment la répétition ou la variation influence le type de pensée de l'élève : récursive ou explicite (Bezuszka & Kenney 2008). La distinction entre la pensée récursive et la pensée associée à la relation explicite est importante, car selon (Moss et al. 2008 cités dans Kieran 2014) le raisonnement récursif peut poser un obstacle à l'élève dans son appréciation de la relation explicite pour arriver à une formule (règle fonctionnelle) pour exprimer le n-ième élément. On peut aussi se demander quels sont les aspects des éléments de la suite (figures) qui ont nourri la pensée de l'élève : quantitative et/ou qualitative (+2 ou «ça augmente»), géométrique et spatial («un autre carré», «plus haut») (Berdonneau 2005). Ces pensées peuvent apparaître à l'aide d'un soutien pédagogique de l'enseignant à l'intérieur d'une situation spécifique où l'enfant peut atteindre sa zone proximale de développement.

2. *Le soutien pédagogique de l'enseignant au regard de l'atteinte de la zone proximale de développement de la pensée algébrique de l'enfant*

Plusieurs chercheurs se sont intéressés à la théorie vygotskienne portant sur la zone proximale de développement qui fait référence à «*un niveau de développement potentiel*» que l'élève peut atteindre s'il reçoit le soutien pédagogique approprié d'un adulte expert (Brodrova & Leong 2012 ; Bouchard 2009). Ce soutien est optimal si l'étayage, qui «consiste à soutenir et guider l'apprentissage de l'enfant, notamment par le dialogue, en tenant compte de ses capacités actuelles et potentielles» est utilisé comme stratégie de soutien pédagogique (Bouchard 2009, p.165), puisqu'il permet alors à l'élève d'atteindre sa propre zone proximale de développement. Wood, Bruner et Ross (1976) proposent un cadre théorique pertinent pour analyser le soutien pédagogique, l'étayage, que l'enseignant peut apporter à l'élève lorsque celui-ci est en apprentissage. À cet effet, les auteurs présentent plusieurs types d'interventions pédagogiques pour amener l'élève dans sa zone proximale de développement.

Dans cet article, les expérimentations des élèves seront examinées au regard de six types d'interventions de soutien pédagogique que proposent Wood, Bruner et Ross (1976) : 1) Attirer l'intérêt et susciter l'engagement de l'enfant à la tâche ; 2) Encadrer l'enfant dans la tâche (proposition de stratégies et d'interventions pour alléger la tâche) ; 3) Garder l'attention de l'enfant sur l'activité et la poursuite des objectifs à atteindre en préservant sa motivation et son engagement ; 4) Orienter l'enfant vers les caractéristiques essentielles de la tâche (notamment l'inviter à apprécier un motif récurrent, à porter attention à la variation dans une suite croissante et attirer son attention sur les caractéristiques quantitatives et qualitatives des figures observées) ; 5) Contrôler la frustration de l'enfant en diminuant son stress ; 6) Démontrer, modeler et proposer des solutions à l'enfant afin de le guider vers les étapes de réalisation de l'activité.

V. LA MÉTHODOLOGIE

1. *Composition de l'échantillon*

L'échantillon se compose de 24 élèves provenant de deux écoles et quatre classes dont 12 en maternelle 4 ans et 12 en jardin 5 ans. Chaque enseignante de niveau scolaire maternelle et jardin devait choisir 2 élèves « forts », 2 « moyens », et 2 élèves « faibles » par classe comme échantillon pour représenter les élèves de la classe. Un seul élève de niveau «faible» de la maternelle représentait le deuxième groupe. Le niveau des élèves était évalué par l'enseignante en lien avec son rendement général (écoute, niveau de participation, apprentissages réalisés, etc.). Toutefois, dans cet article, nous présentons uniquement trois cas d'élèves de maternelle et du jardin. Ceux-ci ont tous 5 ans.

2. *Instruments de collecte de données*

La tâche était construite comme instrument de prétest dans le cadre d'une enquête collaborative. La tâche consistait à présenter aux élèves 4 modèles de suites différents. Les tests sur les régularités ont été inspirés de « clinical interviews » apparu dans « Public Lesson: February 6, 2013, Bishop Strachan School ». Dans ce texte, il s'agit de deux modèles particuliers de suites. Le modèle 2 est une suite dont chaque élément est composé d'un nombre de carrés rouges qui correspond à la position d'éléments dans la suite, disposés horizontalement, puis d'un hexagone jaune placé au-dessus des carrés.

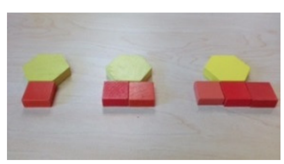

Figure 1 *- Le modèle 2 est un motif croissant avec un hexagone jaune constant et des carrés orange représentant la variable*

Pour construire l'élément suivant, l'élève doit placer un nombre exact de carrés, puis un hexagone jaune.

Le modèle 3 est une suite dont chaque élément est composé d'un nombre de carrés qui correspond à la position d'éléments dans la suite, disposés verticalement, ainsi que d'un autre carré rouge disposé différemment (tourné à 90 degré). Pour construire l'élément suivant, l'élève doit placer un nombre exact de carrés en ajoutant un carré tourné à 90 degré sur le dessus.

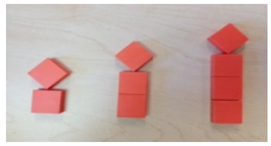

Figure 2 - *Le modèle 3 est un motif croissant de même couleur. Il s'agissait d'un changement d'orientation pour faire la distinction entre la constante et la variable.*

Pendant le déroulement du prétest, les élèves étaient filmés. Dans un premier temps, trois modèles de suites de complexité croissante ont été présentés à chaque élève individuellement. Dans chaque cas, on demandait aux élèves de montrer, « Qu'est-ce qui vient après? » et d'expliquer « Pourquoi? ». Dans un deuxième temps, on demandait aux élèves de construire leur propre modèle de régularité. Par la suite, l'enseignante et la conseillère pédagogique pouvaient questionner l'élève pour l'amener à réaliser la tâche demandée. Ainsi, elles ont pris l'initiative de poser d'autres questions dans le but d'aider l'enfant dans la tâche à accomplir. Elles ont également pris l'initiative de poser des questions d'entrée quelque peu différentes d'un enfant à l'autre. Plusieurs de leurs interventions sont analysées au regard des types de soutien pédagogique proposés par Wood, Bruner et Ross (1976). Dans cet article, nous présentons uniquement l'analyse et les résultats portant sur l'activité des modèles 2 et 3 qui sont reproduits ci-dessous.

VI. PRÉSENTATION DES RÉSULTATS

1. *Un tout début d'émergence d'une pensée algébrique*

Exemple 1 : Matthieu 5 ans élève au jardin (modèle 3)

Pour le modèle 3, l'enseignante indique à Matthieu qu'il y a une suite sur la table puis lui demande : «Dis-moi ce que tu vois?» Il répond en pointant les ensembles d'objets d'une même figure : «un de plus en montant». Dans cette activité, Matthieu est en mesure de décrire la relation en termes récursifs en établissant une règle « un de plus » qui peut être répétée à l'infini. Plus précisément, il perçoit la récursion présente dans la suite et la généralise. Dans cet exemple, Matthieu démontre sa capacité à généraliser en établissant sa propre règle récursive qui intègre les sens quantitatif et qualitatif : «un de plus en montant». Le sens quantitatif provient du fait que c'est «un de plus», peu importe le nombre. Le sens qualitatif (spatial) vient du fait qu'il nous indique la direction «en montant». Il semble donc que dans cette situation, la pensée de Matthieu soit associée à l'émergence d'une pensée de généralisation qui elle sous-tend une forme de pensée algébrique.

Si nous portons notre analyse sous un autre angle, en abordant l'aspect pédagogique, nous constatons que la demande de l'enseignante était en soi très ouverte : «Dis-moi ce que tu vois». À cet effet, nous pensons que l'essence même de la question ait pu influencer la pensée de Matthieu et l'amener à formuler à son tour une réponse générale. En fait, l'enseignante n'a pas demandé à Matthieu de lui dire ce qui venait après, ce qui aurait probablement orienté tout autrement la pensée de Matthieu, et par conséquent, sa réponse. En réalité, la question posée par l'enseignante nous laisse croire que la réponse de Matthieu réfère à toute la situation et non à la construction du prochain élément concret, ce qui l'a donc amené à trouver une règle qu'il pouvait appliquer à toute la séquence.

Dans la suite de l'activité, l'enseignante a posé plusieurs questions à Matthieu. Nous analysons également cette partie afin de comprendre de façon plus large l'expression de la pensée de Matthieu. À cet effet, au regard des questions posées par l'enseignante, nous constatons que Matthieu n'exprime pas la constante au sein des figures. Plus précisément, il n'établit pas verbalement le lien entre les carrés en-dessous où il faut en ajouter un de plus et le carré sur le dessus dont la quantité reste toujours la même (la constante). Nous pouvons le percevoir lorsque l'enseignante lui demande combien il y a de carrés dans la première figure, il répond «1», dans la deuxième figure, il répond «2», dans la troisième figure, il répond «3». À ce moment, Matthieu n'exprime aucune relation entre le nombre de carrés en dessous et le carré sur le dessus dont la quantité reste toujours la même. Notre première hypothèse est la suivante : il se peut que l'attention de Matthieu ne soit pas dirigée vers cet élément qu'est la constante mais qu'il porte plutôt son attention sur la partie qui change et que par ailleurs, ce soit celle-là qu'il analyse. Notre deuxième hypothèse est que le terme «carré» n'est probablement pas maîtrisé par l'enfant. Si la figure avait été constituée de deux formes différentes ou si l'enseignante avait nommé les deux formes de façon distincte, par exemple : « carré droit» et « carré tourné », Matthieu aurait pu répondre correctement à la question posée par l'enseignante et exprimer la distinction entre la constante et les autres formes qui composent les figures. En fait, pour accéder à la pensée de Matthieu en ce sens, il faudra l'amener à s'exprimer sur la relation entre les parties variables et la partie «constante» dans la suite. Ainsi, par le questionnement de l'enseignante, nous pourrions accéder à la pensée de Matthieu par rapport à l'élément présent dans la figure associé à la constante.

Dans l'ensemble, cette analyse nous amène à émettre l'hypothèse qu'une question «ouverte» tend à favoriser l'élaboration d'une réponse générale. En fait, il est probable que le fait que l'enseignante ait utilisé une question très ouverte, ait permis à l'élève d'investiguer et de porter son attention sur plusieurs aspects tels que «numérique» et «spatial». En d'autres termes, la question de l'enseignante a offert l'opportunité à l'élève d'investiguer la récursion autant sur le plan visuel que numérique (Bezuszka & Kenney 2008). Ainsi, il se peut également que ce soit la question de l'enseignante de type «ouvert» qui ait incité l'élève à observer l'ensemble de la situation et à construire une règle générale. Moss et London Mc Nab (2011) vont dans ce sens en précisant que le choix des questions de l'enseignante peut diriger l'attention de l'élève vers des éléments spécifiques, ce qui par conséquent, amènerait l'élève à utiliser une forme de pensée algébrique.

Exemple 2 : Sébastien 5 ans élève de la maternelle (modèle 3)

Pour le modèle 3, qui représente une suite à régularité croissante de même couleur et de même forme, de différentes dispositions, l'enseignante demande à Sébastien de continuer la suite. Il réussit à continuer la suite avec un ordre de croissance mais ne met pas le bon nombre de carrés dans la figure construite. À cet effet, il établit une relation existante entre les ensembles en se référant au concept de grandeur. Il qualifie ainsi le premier ensemble de «petit», le deuxième de «moyen», le troisième de «grand». Lorsque la conseillère pédagogique lui demande de continuer la suite et de l'expliquer, Sébastien ajoute des carrés (plus de carrés qu'il n'en faut) et en pointant chacun des ensembles, il dit : «petit», «moyen», «grand» et «ben plus grand». La conseillère lui demande ce qu'il y aurait après, Sébastien répond «ben plus grand que ça». Sébastien fut donc en mesure de trouver une relation de variation entre les figures, celle reliée à un ordre croissant qualitatif. Toutefois, Sébastien, n'a pas été en mesure de continuer la suite avec le bon nombre d'objets, il en a mis cinq au lieu de quatre. La relation qu'il a établie n'a pas suffi à l'amener à trouver la règle complète de la suite. Dans le cas de Sébastien, nous pensons que le travail de la conseillère pédagogique serait d'amener Sébastien à observer davantage les détails de la suite pour être capable de discerner le changement quantitatif exact qui se produit d'une figure à l'autre.

Par ailleurs, l'enseignante a utilisé plusieurs interventions d'étayage proposées par Wood, Bruner et Ross (1976) qui visent à encadrer l'enfant dans la tâche : «Peux-tu continuer la suite?» ; «Peux-tu expliquer ta suite?» ; «Et qu'est-ce qu'il y aurait ici?» et «Est-ce que tu peux me dire ce que tu vois ici?» De plus, quelques interventions utilisées par l'enseignante, de type trois, visent à préserver la motivation de l'enfant : «Très bien!» et «Super!». Toutefois, certaines interventions de l'enseignante de type quatre auraient pu amener l'élève à observer les caractéristiques essentielles de l'activité dont les détails quantitatifs, ce qui aurait peut-être pu aider Sébastien à construire à bon escient les prochaines figures de la suite. Par ailleurs, une question plus ouverte telle que «Que vois-tu?», aurait peut-être permis à Sébastien de coordonner plusieurs caractéristiques et d'émettre une tout autre réponse.

Exemple 3 : Maryanne 5 ans élève au jardin (modèle 2)

Pour le modèle 2, l'enseignante dit à Maryanne de regarder sur la table parce qu'elle a une autre suite puis lui dit: «Peux-tu m'expliquer ce que tu vois devant toi?» À cet effet, l'enfant répond «une suite». On constate ici que la question posée à Maryanne oriente la pensée de l'enfant non pas sur l'interprétation de la structure en terme de changement d'une figure à l'autre, mais sur une pensée déjà construite axée sur une connaissance antérieure au niveau de la terminologie qui sous-tend la notion de «suite». Ainsi, Maryanne s'est plutôt attardée à percevoir la suite comme répétitive parce que c'est ce qu'elle a appris antérieurement. La pensée de Maryanne semble donc avoir été construite au regard de la phrase d'entrée évoquée par l'enseignant. Malheureusement, nous ne pouvons pas savoir ce qui se serait passé si l'enseignante avait posé directement la question «Que vois-tu?» à Maryanne. Peut-être que celle-ci aurait influencé Maryanne à percevoir d'entrée de jeu le changement au sein de la suite et à émettre une réponse différente. En fait, l'enfant est souvent orienté vers un désir de dire ou faire ce qu'il pense que l'enseignant aimerait qu'il dise ou qu'il fasse (Brousseau 1980). Ainsi, lorsque l'on examine les réponses de Maryanne, nous sommes portées à croire que celles-ci ont été orientées par son désir de satisfaire l'enseignante en faisant référence à un apprentissage précédent.

Par ailleurs, l'élève semble utiliser un comportement qu'elle a appris avec les suites répétitives, c'est-à-dire «nommer les couleurs». À cet effet, elle essaie d'appliquer sa connaissance précédente à l'activité sur les suites croissantes que l'enseignante lui présente. Elle nomme les couleurs. Par la suite, lorsque l'enseignante pose la question suivante à Maryanne «Qu'est-ce qui vient après?», l'élève utilise sa connaissance précédente sur les suites répétitives et essaie de changer sa suite en cohérence avec cette connaissance, c'est-à-dire, la transformer en une suite répétitive. Ce n'est que lorsque l'enseignante lui dit qu'elle ne peut rien changer que Maryanne est amenée à porter attention sur la relation récursive et à construire le prochain élément de la suite. Il semble que la question de l'enseignante ait permis à Maryanne d'établir un raisonnement récursif de type quantitatif qui l'a finalement amenée à mettre le bon nombre de carrés dans chacune des figures de la suite. À cet effet, Maryanne utilise une procédure de comptage adéquate mais n'est toujours pas en mesure de prononcer la règle de la suite. Une autre question de l'enseignante fait suite à celle précédemment citée. Cette fois-ci, la question de l'enseignante fait référence au processus de changement qui se passe au sein des figures de la suite : «Qu'est-ce que tu vois qui est différent au premier, au deuxième et au troisième»? L'enfant est ainsi amené à observer la suite, à prendre conscience de l'unicité de chacune des figures et à établir des relations entre celles-ci et par conséquent à percevoir le changement qui se produit au sein de la suite. Les interventions de l'enseignante ont permis d'orienter l'attention de l'enfant vers le changement. Par la perception de ce changement, elle a réussi au niveau de la manipulation concrète des objets à continuer la suite. Cependant, sur le plan verbal, elle ne peut exprimer ce changement par une règle qui le sous-tend. Ainsi, bien que les questions de l'enseignante aient sollicité la pensée récursive de Maryanne et que celle-ci ait été en mesure de continuer la suite, elle n'est pas parvenue à exprimer verbalement la formule récursive associée à la suite du modèle 2.

Étant donné que Maryanne exprime bien ce changement par la manipulation des objets de la suite puisqu'elle peut continuer la suite, il est donc plausible de croire que Maryanne possède une connaissance implicite lui permettant de réguler la situation par manipulation (Brousseau 1971). Toutefois, nous ne sommes pas en mesure de confirmer l'essence de cette pensée puisqu'elle n'a pas été exprimée verbalement.

En résumé, nous concluons que les interventions de l'enseignante dans un cadre d'étayage ont amené Maryanne à apprécier les caractéristiques variées de la suite à un stade qui lui a permis de continuer correctement celle-ci. Toutefois, nous pensons qu'elle n'a pas eu accès à un *niveau* de pensée algébrique au même titre que Matthieu et Sébastien. En fait, Maryanne n'a pas exprimé verbalement la généralisation correspondante à cette construction comme l'avait fait Matthieu sous forme quantitative, ni sous forme qualitative tel que Sébastien l'a fait.

De plus, treize interventions ont été nécessaires pour amener l'enfant à réaliser l'activité et par conséquent atteindre sa zone proximale de développement. À cet effet, l'enseignant utilise des interventions de type 2 qui visent à simplifier la tâche sans indiquer la solution directement (L'enseignante aide Maryanne en enlevant les carrés de surplus qu'elle avait ajoutés) et de type quatre qui consiste à orienter l'attention de l'enfant sur certaines caractéristiques essentielles de l'activité et vers le but de l'activité car Maryanne semble avoir dévié de la direction en puisant dans ses connaissances antérieures reliées aux suites répétitives. Ainsi, l'enseignante réoriente son attention en l'amenant sur une autre piste, celle du changement. À cet effet, elle formule la question suivante: «Que remarques-tu qui est différent?» Elle tente alors d'attirer et d'accentuer l'attention de l'enfant sur des caractéristiques qui lui permettront de comprendre le changement au sein de la suite et ainsi de poursuivre l'activité : «Combien vois-tu de carrés dans le premier?» ; «Dans le deuxième?» ; «le troisième?» ; «le quatrième?» Ces interventions permettent à Maryanne de s'orienter vers l'aspect quantitatif des figures. De plus, les questions de l'enseignante contiennent des remarques qui donnent l'information nécessaire à l'enfant pour comprendre ce vers quoi l'enseignante aimerait l'amener, plus précisément le but de l'activité c'est-à-dire l'observation du changement dans la suite. Enfin, l'enseignante fait une intervention de type 6 en indiquant à l'enfant la prochaine étape à réaliser. Elle lui demande: «Qu'est-ce que tu mettrais dans ton dernier?» À cet effet, Maryanne qui semble avoir établi la relation entre les figures, met 4 carrés et 1 hexagone à la dernière figure et complète la dernière figure.

VII. DISCUSSION

1. Le développement de la pensée algébrique et les stratégies de soutien apportées par l'expert (enseignant ou conseillère pédagogique)

Dans le premier exemple, Matthieu a perçu la variation en s'appuyant sur une pensée récursive de type quantitatif et qualitatif «un de plus en montant». À cet effet, Bezuska et Kenney précisent (2008) que : «Tout comme la pensée récursive est fondamentale pour la pensée et le raisonnement algébrique, ainsi la récurrence et les relations de récurrence font partie du contenu de base fondamental de l'algèbre.» (p.1, traduction libre). De plus, ce qui attire notre attention c'est le fait que Matthieu puisse coordonner différents types de pensée (nombre, opération, qualitatif, et spatial) pour rendre compte de la relation récursive qui relève d'une pensée plus axée sur les relations et donc à portée algébrique (Kieran 2004).

Cette coordination rendue possible grâce à la connaissance numérique de Matthieu, démontre un niveau de raisonnement bien élevé.

Dans le deuxième exemple, Sébastien fut en mesure de trouver une relation de croissance sous forme qualitative: « petit, moyen, grand, plus grand, ben plus grand que ça ». Nous pouvons ainsi percevoir que Sébastien fait référence à une pensée récursive de type qualitatif. Cependant, il est possible que Sébastien ait été en mesure de mettre le bon nombre d'éléments dans les figures, s'il avait porté son attention sur les caractéristiques quantitatives de la suite. De plus, bien que Sébastien ait utilisé une pensée de type algébrique en faisant référence à l'aspect récursif et qualitatif de la suite, nous pensons que sa pensée n'a pas atteint un niveau supérieur, celui associé à la coordination de plusieurs caractéristiques des figures de façon simultanée tel que Matthieu l'a démontré. Il s'agirait donc, chez Sébastien et chez Matthieu, de deux niveaux de pensée de type algébrique. Il est vrai que la question de l'expérimentation «qu'est-ce que tu vois?» est ouverte et n'incite pas nécessairement chez l'élève l'analyse quantitative. Dans l'enseignement, il faut penser comment construire la situation pour que cet objectif soit plus clair chez l'élève.

Dans le troisième exemple, Maryanne utilise une procédure de comptage adéquate mais n'est toujours pas en mesure d'exprimer la variation entre les figures telle que l'avaient fait Sébastien et Matthieu. Elle a toutefois été capable d'exprimer sa pensée en construisant l'élément suivant correctement. Cependant, à notre avis, Maryanne est dans un processus d'acquisition d'outils langagiers pour exprimer une compréhension plus développée des changements et de la récursion au sein des suites à motif croissant sous une forme verbale. En fait, à ce propos, Bodrova et Leong (2012) précisent que le développement cognitif de niveau supérieur est dépendant de l'acquisition d'outils de la pensée qui est favorisée par le langage partagé, soit lorsque l'adulte intervient auprès de l'enfant par le dialogue (interventions verbales) et lui propose des stratégies lui permettant de réaliser de nouveaux apprentissages et d'atteindre un autre niveau de pensée, soit lorsque l'élève est mis dans une situation qui est rendue «nécessaire» ou «optimale».

À cet effet, notre analyse nous a permis de constater que des interventions spécifiques de l'étayage, soient celles de type 4, pourraient amener les élèves à percevoir et à coordonner plusieurs caractéristiques dans les figures et ainsi établir différentes relations au sein de la suite. De plus, nous avons pu remarquer que le type de question posé par l'enseignant pouvait avoir des répercussions sur le genre de pensée élaborée par l'élève. À cet effet, il semble qu'une question ouverte telle que «Que vois-tu?» amènerait l'élève à regarder l'ensemble de la situation et à percevoir et coordonner plusieurs caractéristiques à la fois. Ce genre de question favoriserait chez l'élève un raisonnement plus général basé sur l'observation de la situation dans son ensemble. Toutefois, notre analyse nous amène à être prudent quant aux consignes ou aux phrases qui sont émises par l'enseignant juste avant l'activité. Par exemple, si une question telle que «Peux-tu m'expliquer ce que tu vois devant toi?» est précédée d'une phrase de l'enseignant qui indique ce qu'il y a sur la table telle que :«Regarde ici, tu as une suite», celle-ci peut influencer et orienter différemment la pensée de l'enfant qui pourra dès lors être porté à se référer à certains apprentissages antérieurs sur les suites, ce qui le limitera dans l'expression des relations qu'il pourrait percevoir. Ainsi, à notre avis, il serait préférable de ne pas indiquer à l'enfant ce qu'il y a sur la table et commencer d'emblée par «Que vois-tu?».

En résumé, les trois cas discutés permettent d'alléguer que les suites non-numériques ont le potentiel de susciter chez l'enfant les éléments de la pensée d'ordre algébrique suivants :

- l'appréciation des caractéristiques quantitative et qualitative des figures
- l'appréciation de changement (croissance) au niveau qualitatif et quantitatif

- l'appréciation de rôles différents des composantes des figures : « constante » et « variable »
- la coordination des caractéristiques variées des figures
- l'expression de la régularité par manipulation (construction du prochain élément de la suite)
- l'expression verbale de la règle de la suite.

Toutefois, nous n'avons observé aucun cas où l'enfant ait exprimé la règle d'une suite (fonctionnelle, non récursive) sous une forme explicite. On peut penser que cela est dû au fait que ce type de pensée algébrique n'était pas accessible aux enfants, ou que les enfants n'ont tout simplement jamais porté attention à la relation directe entre la position de la figure dans la suite et la composition de la figure, puisqu'aucun matériel visuel n'était présent pour alimenter la pensée de l'enfant à ce niveau. Toutefois, la généralisation de relation récursive était bien observée dans l'expérimentation ce qui nous donne le droit de parler de raisonnement algébrique.

VIII. CONCLUSION

Cette étude nous a permis de mettre de l'avant le potentiel des suites non-numériques par l'entremise des éléments de la pensée d'ordre algébrique qu'elles suscitent ainsi que l'influence de l'étayage dans le type de pensée qu'elle favorise. À l'instar de (Bjorkland, 2014, sous presse), nous croyons que les suites représentent un objet d'apprentissage potentiel mais que les enseignants ont besoin de comprendre ce que l'élève doit discerner pour faire les apprentissages spécifiques. Toutefois, le curriculum de l'Ontario n'est pas précis dans la distinction de la compréhension du changement sous forme récursive ou explicite. De plus, le curriculum n'est pas précis sur le potentiel des questions qui peuvent favoriser le développement de la pensée algébrique et du type de soutien à apporter à l'élève en ce sens. Par ailleurs, en donnant l'occasion aux élèves de 4 et 5 ans de vivre une activité sur les suites à motifs croissants, bien que cela ne soit pas favorisé dans le curriculum, il faut se demander s'ils ont les outils nécessaires pour formuler des règles explicites tels que du matériel visuel à l'appui ainsi qu'une connaissance des nombres suffisamment élaborée pour être capable de formuler cette relation explicite. Cette avenue de recherche peut sembler intéressante.

REFERENCES

Beatty R. (2010) Supporting algebraic thinking : Prioritizing visual representations, *OAME Gazette, 49(2)*, 28-33.

Berdonneau C. (2007) Mathématiques. Activités pour les tout-petits. Profession enseignant. Hachette éducation.

Bezuska S., Kenney M. (2008) The three R's : Recursive thinking, Recursion, and Recursive formulas . *NCTM : "Algebra and algebraic thinking in school mathematics".*

Björklund C. (2014 sous presse) Playing with patterns-lessons learned from a learning study with toddlers Communication présentée en Suède dans le cadre du POEM.

Bouchard C. (2009) Le développement global de l'enfant de 0 à 5 ans en contextes éducatifs. Presses de l'Université du Québec : Québec

Blanton M. L., Kaput J.J. (2011) Functional Thinking as a Route Into Algebra in the Elementary Grades . *In* Cai, J., Knuth, E. (Eds) (p.5-21) *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives*. Heidelberg, Germany: Springer.

Bodrova E., Leong D. (2012) *Les outils de la pensée. L'approche vygotskienne dans l'éducation à la petite enfance.* Presses de l'Université du Québec : Québec

Brousseau, G., (1971) *La théorie des situations didactiques*. Bordeaux, France : DAEST-Faculté des Sciences de l'Homme-Université Victor Segalen Bordeaux 2.

Cai J., Knuth, E. (2011) *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives.* Heidelberg, Germany: Springer.

Carraher D.W., Schliemann A. (2007) Early algebra and algebraic reasoning. In Lester F. K. (Eds.) (p.669-705) *Second handbook of research on mathematics teaching and learning.* Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Kaput J.J. (2008) What Is Algebra? What is Algebraic Reasoning? In Kaput J.J., Carraher D.W., Blanton M.L. (Eds.) (p.xvii-xxi) *Algebra in the early grades.* National Council of teachers of mathematics. New York .

Kaput J.J., Carraher D., Blanton M. (2008) Skeptic's guide to algebra in the early grades. In Kaput J.J., Carraher D.W., Blanton M.L. (Eds.) (p.xvii-xxi) *Algebra in the early grades.* National Council of teachers of mathematics. New York .

Kieran C. (2014) What Does Research Tell Us about Fostering Algebraic Thinking in Arithmetic? National council of teachers mathematics NCTM.

Kieran C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It? *The Mathematics Educator* 8(1), 139 - 151

Kieran C. (1992) The learning and teaching of school algebra. In Grouws D.A. (Eds.) *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). New York: Macmillan.

Masson J. (2008) Making Use of Children's Powers to Produce Algebraic Thinking. In Kaput J.J., Carraher D.W., Blanton M.L. (Eds.) *Algebra in the early grades* (pp.57-94). National Council of teachers of mathematics. New York .

Ministère de l'Éducation de l'Ontario (2008) *Guide d'enseignement efficace des mathématiques de la maternelle à la troisième année. Modélisation et algèbre de la maternelle à la troisième année.* Fascicule 1 régularités et relations. Imprimeur de la Reine pour l'Ontario.

Moss J., London McNab S. (2011) An Approach to Geometric and Numeric Patterning that Fosters Second Grade Students' Reasoning and Generalizing about Function and Co-variation . In Cai J, Knuth E. (Eds.) *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp.277-320). Heidelberg, Germany: Springer.

Radford L. (2012) *On the development of early algebraic thinking*. P*NA*, *6*(4), 117-133.

Squalli H. (2002) Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire : un exemple de raisonnement à l'aide de concepts mathématiques. *Instantanés mathématiques*, 39, 4-13.

Warren E., Cooper J. (2008) Generalizing the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds' thinking . *Educational Studies in Mathematics* 67, 171–185.

Wood D., Bruner J. S., Ross G. (1976) The tutoring in problem solving. *Journal of Child Psychology and Psychiatry* 17, 89-100.