L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés

Actes du colloque emf 2006

Autour des mathématiques dans la formation des étudiants en sciences économiques : le cas de l'algèbre linéaire à travers une étude clinique

Abdessatar Hdia, *Institut supérieur de l'éducation et de la formation continue de Tunis, Tunisie*

Résumé

Il n'est pas surprenant qu'une partie de l'économie soit mathématisée à partir du moment où il y a un intérêt qui ne cesse de croître. D'ailleurs, les mathématiques sont largement utilisées dans beaucoup d'autres domaines et ont fait la preuve de leur utilité. Cependant, l'opposition à la mathématisation de l'économie est un phénomène constaté dans les institutions supérieures des sciences économiques et laisse soupçonner la rationalité de ce courant et les rapports officiels aux objets de savoirs mathématiques que développent les enseignants dans deux disciplines (mathématiques et économie) au sein de ces institutions. Plus précisément, nous pensons que cette situation critique est essentiellement due à des répercussions de certaines pratiques institutionnelles en liaison avec des phénomènes très variés. C'est la thèse que nous essayons de défendre dans notre travail de recherche (en cours), et c'est de notre approche et de nos premiers résultats que traite ce texte communiqué au colloque EMF 2006.

Pour le pire et pour le meilleur, les mathématiques sont devenues le langage des analyses économiques modernes. Elles quantifient les relations entre les variables économiques et les acteurs de l'économie. Elles formalisent et clarifient les propriétés de ces relations. Grâce à cette approche, elles permettent aux économistes d'identifier et d'analyser ces propriétés générales qui sont exigées par le comportement des systèmes économiques.

Carl P. Simon et Lawrence Blume

Introduction

Malgré la diversité des caractéristiques qui la distinguent des sciences dites exactes, l'économie moderne exploite largement des savoirs scientifiques et notamment les mathématiques. Ces dernières ont la part du lion dans cette scientificité et c'est sans doute pour cette raison qu'on parle de « mathématisation de l'économie ». Il est donc naturel que ce phénomène conduise à une réforme de l'enseignement supérieur et c'est pourquoi l'enseignement des mathématiques représente une part importante (au moins dans les premières années) dans la plupart des formations à dominante économique de l'enseignement supérieur. On s'attend alors à ce que les institutions de l'enseignement supérieur concernées s'engagent dans cette orientation en garantissant un enseignement adéquat pour la qualité d'output attendue : pour ou contre cette mathématisation, tous ceux qui sont impliqués dans la formation des étudiants en sciences économiques sont, en principe, appelés à y contribuer pour assurer une formation, en mathématiques, pouvant subvenir aux besoins de ces étudiants en cette matière.

Or, dans le cadre de notre activité d'enseignant de mathématiques dans une institution tunisienne de sciences économiques, nous nous sommes confronté à des faits et des phénomènes qui laissent soupçonner le rapport de cette institution aux mathématiques ou plutôt les rapports officiels à ce domaine dans les deux disciplines (mathématiques et économie). Et, sans prétendre sous-estimer la particularité du contexte de cette institution, nous avons la forte conviction qu'il s'agit d'un problème qui n'est pas tout à fait propre à ce contexte mais qui s'étend même au-delà du contexte tunisien.

Nos hypothèses sont en fait le fruit d'une réflexion qui a émergé de la dynamique de notre situation professionnelle : quand on passe de l'enseignement au Secondaire à l'enseignement au Supérieur, des mathématiques universelles à des mathématiques pour économistes, des programmes avec des directives et des curricula prédéfinis à des libertés de choix et des coutumes, il est naturel de se heurter à certaines pratiques qui diffèrent dans ces deux univers de cultures différentes. Plus encore, lorsqu'il s'agit de travailler dans un environnement qui se démarque par un cloisonnement disciplinaire tout à fait visible, par une réticence des étudiants vis-à-vis des mathématiques enseignées (et même de ceux qui dispensent leurs enseignements) et par un échec remarquable dans les devoirs et les examens finaux de mathématiques, et lorsqu'on constate que la responsabilité des étudiants est un refuge partagé par plusieurs de leurs enseignants, il apparaît légitime de soupçonner ces pratiques institutionnelles.

La première partie de ce texte défend la thèse que certains phénomènes engendrent des pratiques institutionnelles affectant l'enseignement des mathématiques dans les institutions supérieures de sciences économiques. Après avoir explicité quelques-uns de ces phénomènes, nous montrerons en quoi ils sont suspects. La deuxième partie rend compte de notre approche et de nos premiers résultats. Enfin, nous concluons par un questionnement qui implique les théoriciens en économie, la communauté des mathématiciens, la noosphère et les institutions supérieures concernées.

Première partie : analyse de la situation

1. Le choix des contenus à enseigner est-il entièrement une affaire de l'institution ?

Par opposition aux institutions de l'enseignement primaire ou secondaire pour lesquelles ce choix relève totalement de la noosphère, il est en grande partie interne pour les institutions de l'enseignement supérieur. Les contenus à mettre en jeu sont, de coutume, du ressort de chacune de ces dernières et restent en cela relatifs. Néanmoins, des éléments de programmes, des manuels et des ouvrages de références sont mis à leur disposition en vue de contribuer à une formation plus ou moins homogène et pouvant satisfaire la société. Alors, et en ce qui concerne les institutions supérieures de sciences économiques, on s'attend à ce que les contenus mathématiques dispensés aux étudiants soient assez délimités et ne varient que très peu d'une institution à une autre, et à ce que ces institutions assurent une formation en mathématiques pouvant subvenir aux besoins d'un futur expert en économie ou d'un futur enseignant dans ce domaine. Ceci conduit à conclure que la marge de liberté dans le choix des contenus mathématiques à mettre en jeu dans une institution concernée est en principe assez réduite. À défaut, nous considérons que cette liberté est susceptible d'affecter la qualité d'output visée par la société. Nous montrerons un peu plus loin que ce phénomène existe et a de quoi se nourrir pour survivre.

2. Qui est le plus apte à dispenser l'enseignement de ces mathématiques ?

Plusieurs domaines de l'économie moderne utilisent des modèles mathématisés et dont la manipulation suppose, non seulement de solides bases mathématiques, mais aussi l'aptitude à mettre en œuvre les connaissances acquises dans les cours et les Travaux Dirigés de mathématiques. La compétence exigée est alors double et implique en premier lieu ceux qui dispensent l'enseignement de cette discipline. C'est dans la construction du lien de l'économie aux mathématiques que leur rôle apparaît crucial tant dans la formation des étudiants que dans le rapport aux mathématiques que doivent développer ces étudiants. Il est clair qu'on ne peut enseigner les mathématiques à des étudiants dont la première préoccupation, dans une visée professionnelle, est dirigée vers l'économie sans prendre en compte de façon centrale leur rapport à ce que ces étudiants savent et doivent apprendre de l'économie.

Mais d'un côté, les contenus mathématiques à enseigner et leur fonction par rapport au savoir économique sont souvent peu connus des enseignants de mathématiques. Néanmoins, les organisations mathématiques et didactiques obéissent à des contraintes internes à cette discipline et doivent, pour leur légitimité, rester sous le contrôle des mathématiciens. D'un autre côté, les cadres du département des méthodes quantitatives semblent avoir une formation en « mathématiques appliquées à l'économie » et ils sont aussi candidats pour dispenser l'enseignement des mathématiques dans les institutions concernées. C'est à l'institution de choisir l'équipe et c'est à elle seule que revient la décision. Dans tous les cas, la tâche de l'équipe choisie apparaît difficile et laisse soupçonner la pertinence des organisations mathématiques et didactiques mises en place.

3. Le cloisonnement disciplinaire est-il naturalisé ?

Bien que l'orientation pédagogique classique séparant les disciplines vise la spécialisation, elle soulève la question du rôle d'un enseignant « spécialiste » dans la formation d'un apprenant face à des savoirs qui relèvent de différentes disciplines. En particulier, cette question est cruciale pour une approche favorisant la recherche des interactions des savoirs et de leur complémentarité, en l'occurrence les mathématiques et l'économie. Est-il si naturel que l'enseignement dans chacune des deux disciplines (mathématiques et économie) évolue de façon hermétique ? Doit-on alors, sous prétexte de cette spécialisation, dispenser un enseignement de mathématiques sans lien véritable avec l'économie ? Ou au contraire, inscrire notre enseignement dans cette approche ? Ce dernier choix suppose, nous semble-t-il, qu'on doive se réinvestir dans une formation supplémentaire en économie. Toutefois, une solution moins coûteuse pourrait rendre possible un apprentissage fructueux permettant de donner plus de sens aux connaissances mathématiques à faire acquérir aux étudiants en sciences économiques : c'est la pratique interdisciplinaire. Mais à partir du moment où il s'agit de reconsidérer son propre rapport au savoir qu'on « détient », une telle pratique semble se heurter à la conception qu'ont plusieurs enseignants du phénomène de spécialisation. Pourtant, il nous semble que cette pratique ne met pas en cause les disciplines, mais qu'elle se traduit au contraire par un renforcement du disciplinaire. De ce point de vue, il apparaît que le cloisonnement disciplinaire, qui démarque d'ailleurs l'enseignement supérieur en général, rend plus difficile (voire problématique) la tâche de ceux qui dispensent l'enseignement des mathématiques dans les institutions de sciences économiques.

4. Quel est le statut des mathématiques en économie ?

Tout d'abord, et à partir du moment où l'orientation[1] vers la branche des sciences économiques et de gestion ne suppose même pas que l'élève soit moyen en mathématiques (on exige qu'il ait une moyenne au moins de sept), cette dernière discipline se trouve considérée peu importante pour un cursus en sciences économiques. De plus, l'orientation des bacheliers vers cette branche apparaît à la portée d'un grand nombre de candidats issus de toutes filières (même les littéraires). Le public est alors formé d'étudiants hétérogènes quant à leurs formations de bases en mathématiques et munis d'une conception faisant de ces dernières un simple outil en économie et dont on peut même se passer : qu'il s'agisse ou non d'un faux-semblant, c'est un fait et à l'institution de gérer la situation.

Par ailleurs, les rapports de plusieurs enseignants aux mathématiques pour un cursus en sciences économiques semblent aller parfois à l'encontre de l'attente sociale. Ceci se manifeste essentiellement pendant les délibérations qui constituent des occasions régulières de négociations à la baisse qui ne cessent de s'accentuer. Les discours sont centrés sur la raison d'être des mathématiques en économie et de leur enseignement dans les institutions de sciences économiques plutôt que sur le problème didactique qu'engendre la mathématisation de l'économie et que nous expliciterons par la suite. Les débats déclenchés s'articulent essentiellement autour du statut à accorder aux mathématiques enseignées en sciences économiques. D'un côté, on s'accorde sur le fait que les mathématiques sont fondamentales pour le savoir économique contemporain, mais certains préservent seulement cette caractéristique à un niveau théorique (chez les théoriciens de l'économie et non dans le cursus de l'étudiant). D'un autre côté, on tient fort à leur statut d'outil sans pour autant tenir à un enseignement de recettes. On joue avec les mots et il semble que la distinction de vocabulaire soit avant tout pratique pour défendre son point de vue et débattre, à la fois, de la mathématisation de l'économie et du statut à accorder aux mathématiques dans le cursus de l'étudiant. Ainsi, si on s'accorde sur le fait que les mathématiques à enseigner dans de telles institutions constituent un outil fondamental pour un futur expert économiste ou pour un futur enseignant d'économie, ceci exclut le court terme et laisse soupçonner les stratégies adoptées dans les enseignements existants. Les rapports développés par les enseignants dans les deux disciplines (mathématiques et économie) sont alors tributaires de ces stratégies suspectes et il n'est pas sûr qu'ils révèlent aux étudiants ce caractère d'outil fondamental.

Au terme de cette réflexion, nous disons que si ces phénomènes et les pratiques institutionnelles qu'ils engendrent ne sont pas à l'abri de l'observateur, ce n'est pas le cas pour leurs répercussions. Quelles sont alors ces répercussions et comment les cerner ?

Deuxième partie : répercussions, un exemple le cours d'algèbre linéaire

Pour des raisons de faisabilité liées à la durée prévue pour la préparation de notre thèse, nous avons volontairement choisi d'aborder le sujet à travers une étude clinique centrée sur l'algèbre linéaire, celui-ci étant un élément important du programme de mathématiques du premier cycle de sciences

1 Cette orientation se fait en Tunisie à la fin de la 2e année de l'enseignement secondaire tunisien, soit l'équivalente de la classe de Seconde en France.

économiques[2]. Cette étude repose essentiellement sur la théorie anthropologie du didactique mise au point par Yves Chevallard et notamment sur le concept de rapport au savoir (rapport institutionnel et rapport officiel) et l'approche praxéologique connue sous le nom de la théorie des quatre T. Elle intègre une étude écologique sur le savoir économique de référence et sur le savoir économique enseigné en microéconomie et en macroéconomie, un aperçu de l'évolution de l'enseignement de ce champ de savoirs mathématiques dans l'institution citée auparavant et des analyses praxéologiques dans les trois disciplines (mathématiques, microéconomie et macroéconomie). En outre, nous avons adressé aux collègues deux questionnaires et nous avons réalisé deux entretiens avec deux enseignants chargés du cours de mathématiques au sein de cette institution.

Quels sont nos premiers résultats de ce travail de thèse (en cours) ? Avant de répondre à cette question, il nous semble important de rendre compte, au moins de façon succincte, de l'écologie de l'algèbre linéaire en économie en vue de cerner les enjeux institutionnels relatifs à cet enseignement.

Une étude écologique

Pour construire des modèles compatibles avec la réalité économique, les économistes ont élaboré une classe de formes fonctionnelles (les fonctions les plus fréquemment utilisées en économie sont linéaires ou quadratiques) dont ils se servent pour la modélisation mathématique des phénomènes économiques. Mais du fait que plusieurs variables économiques sont définies par des systèmes d'équations linéaires, les modèles économiques les plus fréquents dans l'enseignement supérieur sont des modèles linéaires tels que le modèle ouvert simple de Léontief, le modèle linéaire de population de Lesli, le modèle linéaire de Markov, le modèle linéaire Keynésien IS-LM et le modèle linéaire d'investissement et arbitrage[3]. Par ailleurs, l'analyse de plusieurs modèles économiques se réduit à l'étude d'un système d'équations linéaires qui peut apparaître de deux manières : soit le modèle est une structure linéaire quasiment naturelle, soit les relations entre les variables en jeu sont décrites par un système non linéaire qui, par différentiation, est approximé par un système linéaire. De plus, les systèmes linéaires se présentent sous deux formes : soit les variables dépendantes (endogènes) et les variables indépendantes (exogènes) sont séparées et on parle dans ce cas de système linéaire ordinaire, soit elles sont mélangées et le système linéaire est dit implicite. Enfin, ces systèmes linéaires sont présents dans l'étude de modèles stables ou de modèles dynamiques dont les événements se situent en temps discret et sont modélisés essentiellement par des équations de récurrence linéaires, ou bien en temps continu et modélisés par des équations différentielles linéaires. Outre le cadre de l'étude de certains modèles macroéconomiques et qui se ramène à l'analyse d'un système d'équations linéaires, des notions d'algèbre linéaire sont repérées dans la théorie d'optimisation enseignée dans les cours de microéconomie, dans la comptabilité nationale, dans le domaine de la programmation linéaire appelée également l'optimisation linéaire et dans des techniques élémentaires de l'économétrie telles que l'estimation par les moindres carrés généralisés, les matrice des covariances ou les matrices d'informations.

2 Certes, les mathématiques de l'économiste ne peuvent se réduire à l'algèbre linéaire. On y trouve l'analyse d'une fonction d'une et de plusieurs variables, le calcul différentiel, l'intégrale simple et l'intégrale multiple, les suites et les séries numériques et bien d'autres domaines mathématiques à l'œuvre dans les études en sciences économiques.

3 Une description détaillée et une analyse praxéologique de deux modèles macroéconomiques sont placées en annexe.

Aux plans de la microéconomie et de la macroéconomie, par exemple, l'analyse d'un support constitué d'ouvrages de référence et de manuels nous a montré que le rôle de l'algèbre linéaire et particulièrement de l'algèbre matricielle réside essentiellement dans le traitement de problèmes d'optimisation (statiques et dynamiques) d'une fonction de plusieurs variables et dans la modélisation mathématique de plusieurs phénomènes économiques, notamment l'équilibre et le déséquilibre d'un marché dans divers contextes (économie fermée ou ouverte, marché des biens, marché du travail et marché de la monnaie). Par ailleurs, elle montre que le recours à ce domaine mathématique s'est imposé comme fondement théorique et unique moyen permettant la franchise des limites de l'approche graphique sur laquelle sont basées l'analyse microéconomique et l'analyse macroéconomique. En particulier, les techniques de l'algèbre matricielle permettent de répondre aux questions de l'existence et de la recherche des solutions éventuelles d'un système d'équations, aux questions de la détermination de l'état d'équilibre d'une économie et de ses caractéristiques. Ces techniques permettent également de rendre compte de la taille (dimension) et de la forme de l'ensemble des solutions.

Outre leur utilisation dans la résolution des systèmes linéaires ordinaires, les matrices sont présentes dans l'étude de la partition des systèmes implicites en vue de séparer les variables endogènes des variables exogènes et d'en déduire l'effet des modifications des paramètres ou des variables exogènes sur les solutions du système en jeu. À un niveau plus avancé, l'analyse spectrale d'une matrice carrée est fondamentale pour l'analyse des modèles dynamiques ; si les valeurs propres et les vecteurs propres constituent les éléments des solutions explicites des modèles linéaires dynamiques, les signes des valeurs propres déterminent la stabilité de l'équilibre dans le cas des modèles dynamiques non linéaires. Notons aussi qu'un grand nombre de modèles économiques utilisent des formes quadratiques dont les variables sont soumises à des contraintes souvent linéaires. L'étude des propriétés de telles fonctions économiques revient à l'analyse des propriétés d'une matrice symétrique. Les signes des valeurs propres (qui sont toujours réelles pour les matrices symétriques) sont l'élément clé pour la détermination de la nature des formes quadratiques et, par conséquent, jouent un rôle central dans les conditions du second ordre qui précisent la nature des extrema éventuels dans les problèmes d'optimisation.

Enfin, nous constatons que l'enseignement des théories économiques est structuré de façon à étudier dans les cours de premier cycle des théories et des modèles économiques élaborés en dimension deux ou trois, puis à étudier, dans les cours du second cycle, des généralisations appropriées.

En conclusion, il apparaît que l'algèbre linéaire et notamment l'algèbre matricielle (le calcul matriciel et l'analyse spectrale d'une matrice carrée) est omniprésente dans la mathématisation de l'économie. Les notions utilisées sont d'une part utiles (voire indispensables) pour la manipulation et la compréhension des phénomènes économiques étudiés et, d'autre part, nombreuses et varient d'un domaine à un autre. Outre le fondement théorique de plusieurs analyses économiques, le rôle des techniques de ce champ de savoir mathématique ne peut être sous-estimé, soit dans la description et l'analyse de modèles géométriques simples, soit dans l'élargissement de leurs champs d'application à des dimensions élevées. Ces techniques simplifient le traitement des fonctions à plusieurs variables et réduit ou non l'étude des modèles linéaire à l'analyse d'un système d'équations linéaires. Elles sont indispensables dans l'étude des propriétés d'une fonction économique définie par une forme quadratique et, par conséquent, dans l'étude des problèmes d'optimisation d'une fonction de plusieurs variables, étude qui implique, entre autres, un traitement matriciel au niveau de la condition de second ordre.

Enfin, s'il est vrai que les théories économiques reposent sur des données statistiques et des hypothèses d'optimisation, l'algèbre linéaire est mise en œuvre dans le traitement de ces données, dans l'optimisation des fonctions économiques élaborées et dans la modélisation des phénomènes économiques étudiés.

Les trois schémas suivants (figures 1, 2 et 3) illustrent, nous semble-t-il, la manière dont le lien entre l'algèbre linéaire et l'économie est construite.

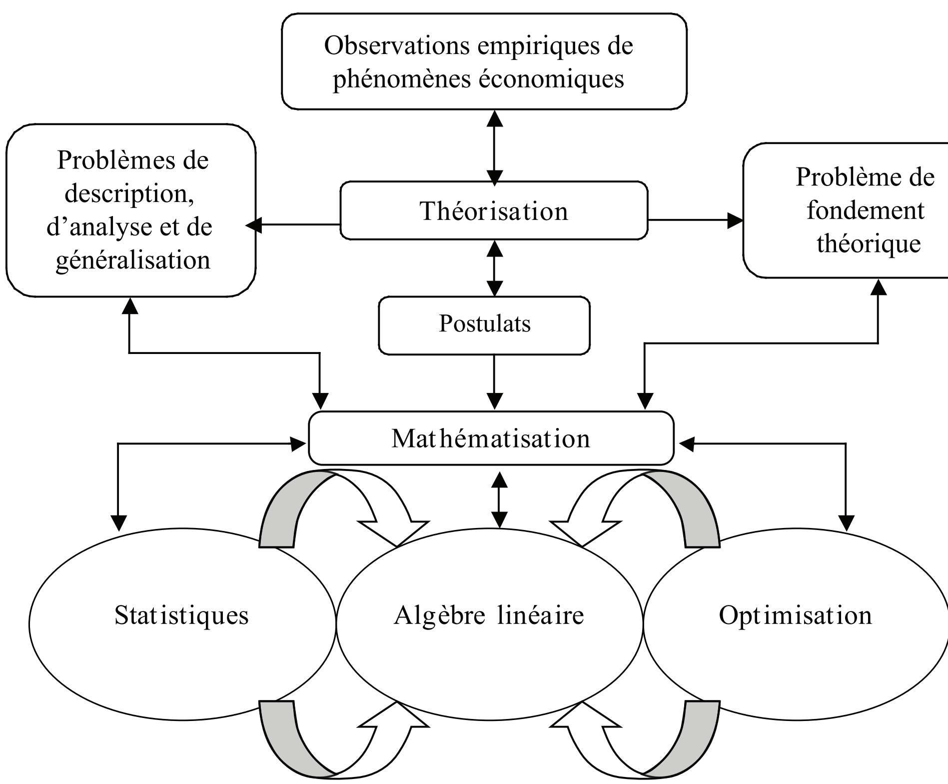

Figure 1 – Modèle général de l'écologie de l'algèbre linéaire en économie

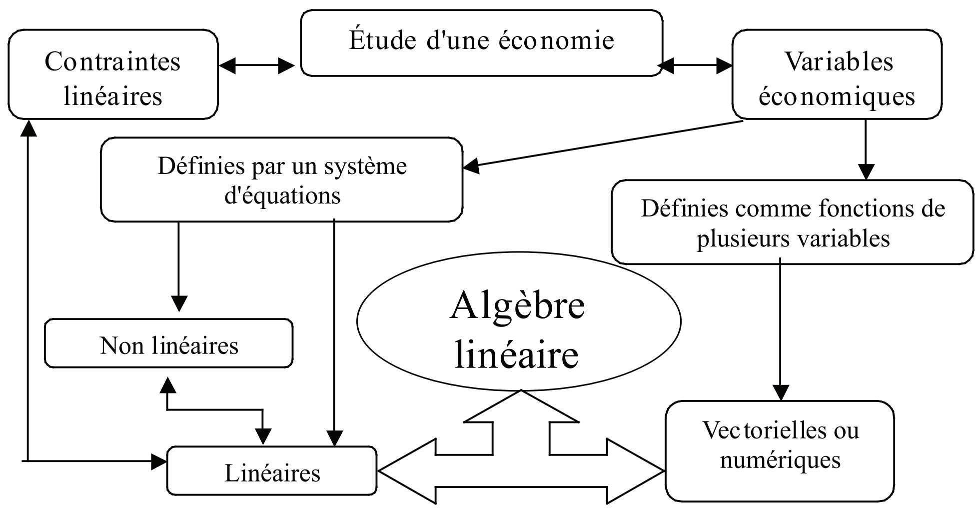

Figure 2 – L'environnement écologique de l'algèbre linéaire

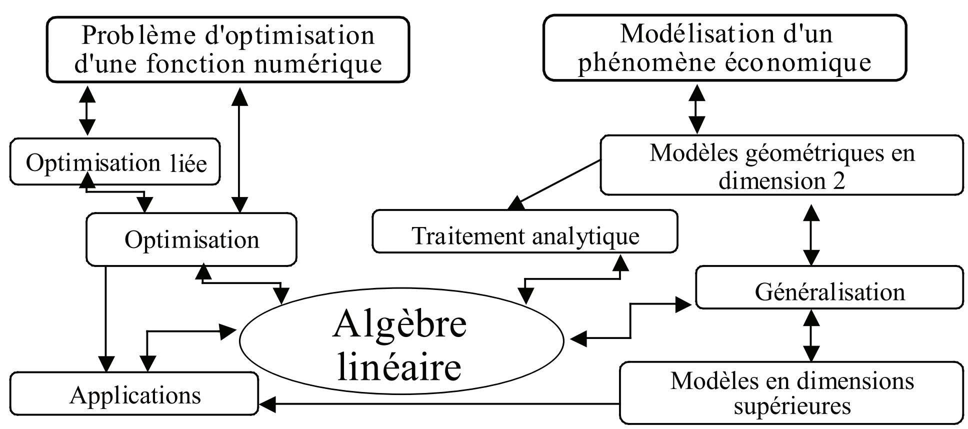

Figure 3 – Fonctionnement de l'algèbre linéaire en économie

Ainsi délimitée, l'algèbre linéaire en économie ne peut se réduire à des techniques à mettre en œuvre sans une compréhension en profondeur des concepts en jeu. C'est ce qui explique, nous semble-t-il, la raison d'être d'un troisième module (essentiellement d'algèbre linéaire) dans la formation des étudiants orientés vers la branche «sciences économiques» après une année de tronc commun (économie et gestion). Reste à voir, comment fonctionne effectivement ce champ de savoir mathématique dans l'enseignement supérieur de sciences économiques.

Nos premiers résultats

1. Concernant les contenus enseignés

- De qui relève leur choix ?

Conformément au régime tunisien des études en sciences économiques, l'enseignement des mathématiques s'étale sur les deux années du premier cycle. Les notions d'algèbre linéaire sont réparties sur deux modules semestriels (Maths II en première année et Maths III en deuxième année) et à raison de trois heures de cours magistral et une heure et demi de travaux dirigés par semaine.

Dans le tableau suivant, nous avons reproduit deux programmes d'algèbre linéaire de la 1re année en sciences économiques enseignés successivement par deux enseignants dans une institution que nous allons désigner par « I » pour l'anonymat.

Période	Programme d'algèbre linéaire
1997/1998 et 1998/1999	I. Les matrices : Définition – Opérations sur les matrices – Les matrices carrées (définition, produit matriciel, matrice symétrique, matrice diagonale et trace d'une matrice). II. Déterminant : Définition – Matrice des cofacteurs – Calcul du déterminant – Propriétés du déterminant. III. Matrice inversible : Définition – Matrice adjointe – Calcul de l'inverse (méthode des cofacteurs et méthode de Gauss). IV. Systèmes d'équations linéaires : Définition – Rang d'une matrice, rang d'un système linéaire – Résolution d'un système linéaire à n équations et n inconnues (cas où le système est de plein rang « trois méthodes » et cas où le système n'est pas de plein rang) – Résolution d'un système linéaire quelconque. V. Application : Recherche d'extremum : Matrice définie positive, négative – Calcul d'extrema, sous contrainte, d'une fonction à deux variables.
De 1999/2000 à 2002/2003	I. L'espace vectoriel (IR^n, +, .) : Propriétés de l'addition dans IR^n et de la multiplication par un réel – Sous-espace vectoriel de IR^n – Notions de famille libre, de famille liée, de famille génératrice, de base et de dimension d'un s.e.v. de IR^n- Applications linéaires de $IR^n \rightarrow IR^n$ (définition et noyau). II. Les matrices : Définition – Opérations sur les matrices – Les matrices carrées (définition, produit matriciel, matrice symétrique, matrice diagonale) III. Déterminant : Définition – Matrice des cofacteurs – Calcul du déterminant - Propriétés du déterminant. IV. Matrice inversible : Définition – Matrice adjointe – Calcul de l'inverse (méthode des cofacteurs et méthode de Gauss). V. Systèmes d'équations linéaires : Résolution d'un système linéaire à n équations et n inconnues (trois méthodes) – Résolution d'un système linéaire quelconque. VI. Diagonalisation d'une matrice : Polynôme caractéristique – Valeurs propres, vecteurs propres et sous-espaces propres – Calcul de puissance d'une matrice diagonalisable puis d'une matrice carrée quelconque – Signe d'une matrice symétrique.

Une simple lecture de ce tableau montre que les contenus d'algèbre linéaire enseignés en 1[re] année sont loin d'êtres stables. Ces changements remarquables dans le programme repérés à la suite du changement de l'enseignant chargé du cours illustrent une pratique institutionnelle réservée exclusivement à l'enseignement supérieur : les contenus à enseigner relèvent de l'enseignant chargé du cours. De plus, l'analyse des deux entretiens réalisés avec ces deux enseignants montre que chacun d'eux est quantitativiste, fort assujetti à sa formation initiale et se réfère essentiellement à son épistémologie pour les contenus qu'il choisit et l'enseignement qu'il dispense,

- Comment fonctionnent-ils ?

a) Dans la discipline des mathématiques : l'analyse praxéologique d'un enseignement existant dans cette institution « I » et dispensé par un « quantitativiste » aux étudiants de la première année nous a montré qu'il s'agit d'un enseignement où il y a plusieurs déficits technologico-théoriques. Il apparaît composé de recettes, centré sur des tâches algorithmiques et strictement internes aux mathématiques et qui respecte, dans les examens des deux sessions, les règles du contrat didactique instauré au cours de l'année en cause. D'autre part, un simple aperçu du cours enseigné en 2[e] année « sciences économiques » par un « matheux », des séries des TD associés et des deux examens de fin d'année nous montre que l'enseignement dispensé à ce niveau d'étude ne diffère de l'enseignement en 1[re] année que par les contenus mis en jeu et par le cours qui semble apparenté à un cours classique qu'on dispense aux étudiants en sciences, mais plus simplifié : les TD sont en grande partie centrés sur des tâches internes aux mathématiques (traitement de matrices symétriques ou orthogonales et résolution de systèmes linéaires ordinaires ou de récurrence) sans lien apparent avec l'économie, et les examens sont conçus en conformité avec le contrat didactique instauré au niveau de ces TD. De plus, nous remarquons, à titre d'exemple, l'absence dans cet enseignement des systèmes implicites et des systèmes dynamiques et l'abord superficiel des notions de base et de rang. Cependant, l'étude écologique précédente montre que ces systèmes et notions sont en jeu en économie.

Par ailleurs, l'exploration des manuels de mathématiques disponibles dans la bibliothèque de cette institution, nous a permis de rendre compte d'une réalité qui nous semble surprenante : rares sont les manuels qui prennent en charge, même partiellement, l'intrinsèque articulation entre l'algèbre linéaire et l'économie. Cependant, la lecture des préfaces de certains auteurs laisse croire le contraire. Plus précisément, nous identifions deux catégories de manuscrits de mathématiques pour l'économie non financière (de volumineux ouvrages de références et des manuels destinés aux étudiants) et pour lesquels nous constatons que :

- Seule la première catégorie prend en charge et partiellement le lien à l'économie;
- Il existe une divergence dans les programmes recouverts par ces manuels.

b) Dans les disciplines de microéconomie et de macroéconomie : l'exploration de onze manuels destinés à l'enseignement de ces deux domaines économiques[4] montre que les connaissances d'algèbre linéaire intégrées sont utilisées sans la moindre explicitation des raisons qui sous-tendent le recours à ce domaine mathématique. Par ailleurs, ces connaissances apparaissent supposées acqui-

4 Ce sont, d'après le journal de la bibliothèque, les manuels les plus empruntés par les enseignants et les plus consultés par les étudiants

ses puisqu'aucun rappel ou renvoi à un cours ou à un manuel de mathématiques n'est repéré. Quant à leur usage, il semble fait avec « prudence » pourtant il est explicitement sollicité, au niveau des avant-propos ou des préfaces, par tous les auteurs de ces manuels : en macroéconomie, on préfère se limiter à des modèles simples en les résolvant par la technique de substitution (même pour des systèmes linéaires de grands formats) et, en microéconomie, on préfère implicitement raisonner sur des fonctions concaves ou convexes pour se limiter aux conditions de premier ordre. Mais quand la situation impose d'autres types de fonctions, certains manuels se contentent de rappeler qu'il est nécessaire de vérifier les conditions de second ordre sans même les rappeler.

En outre, nos analyses des praxéologies « mixtes » montrent que les ouvrages de référence et les manuels économiques intègrent les mêmes types de tâches. Toutefois, seuls les ouvrages de référence explicitent la majorité des techniques pouvant résoudre ces types, les « logos » correspondants et les problématiques qui sous-tendent la construction de chacune de ces praxéologies. Quant aux manuels, ils se contentent d'un nombre réduit de techniques, sans explicitation de la partie mathématique des « logos », qu'ils font fonctionner dans des situations particulières.

2. Concernant les enseignants

À travers l'analyse des deux entretiens et des deux questionnaires, nous avons pu mettre en évidence des rapports à l'algèbre linéaire qui semblent expliquer les stratégies mises en place pour l'enseignement de ce champ de savoirs mathématiques et de prévoir son utilisation dans les deux principales disciplines économiques, la microéconomie et la macroéconomie :

- Du côté des enseignants de mathématiques et qui sont au nombre de onze et dont neuf sont des « quantitativistes », les rapports au savoir en jeu développés par les responsables des TD sont conditionnés par le rapport développé par l'enseignant du cours. Le rapport développé dans le cours est, quant à lui, conditionné par la réussite aux examens et par le statut qu'il accorde aux mathématiques pour un cursus en sciences économiques, statut qui fait de ces mathématiques enseignées un simple outil dont l'utilisation en économie ne suppose que la disposition d'un minimum de techniques. Par ailleurs, tous les enseignants ont mis l'accent sur la nécessité d'une coopération entre les deux départements (de mathématiques et d'économie) et trouvent que l'algèbre linéaire est le plus facile des domaines mathématiques, pourtant l'enseignement et l'apprentissage de ce domaine dans les filières scientifiques sont réputés difficiles[5]. Il est clair alors qu'il s'agit ici d'un paradoxe qui ne s'explique que par le fait que les connaissances d'un quantitativiste en algèbre linéaire et notamment dans ses liens à l'économie ne lui permettent pas, ni de prendre acte de ce qui distingue ce champ de savoir mathématique, ni de prendre en charge la question de la construction du lien de l'algèbre linéaire à l'économie.
- Du côté des enseignants d'économie, quelques-uns d'entre eux sont anti-mathématiques et ont refusé de répondre au questionnaire. Quant aux enseignants questionnés, ils s'accordent sur la nécessité d'une coopération entre les deux départements (mathématiques et économie)

5 Voir à ce sujet les travaux de Dorier et notamment sa thèse intitulée : « Contribution à l'étude de l'enseignement à l'université des premiers concepts d'algèbre linéaire. Approche historique et didactique » et l'ouvrage intitulé : « L'enseignement de l'algèbre linéaire en question » (Dorier *et al*. 1997) qui présente l'essentiel des recherches didactiques (en France, aux USA et au Canada).

et certains d'eux développent une attitude vis-à-vis de l'enseignement des mathématiques en lui reprochant de ne pas prendre en compte l'entraînement sur des problèmes économiques. Par ailleurs, tous ces enseignants se déclarent non satisfaits du niveau en algèbre linéaire de leurs étudiants et pourtant, aucun d'entre eux n'a fourni une réponse claire à la question suivante : « Existe-t-il des contenus dans la matière que vous enseignez qui font appel à des connaissances d'algèbre linéaire ? Si oui, quelles sont ces connaissances et leurs fonctions par rapport à ces contenus ? ». Qu'il s'agisse ou non de contradictions dans les réponses, il est clair que les rapports des enseignants d'économie à l'algèbre linéaire semblent négatifs et laissent soupçonner les rapports développés dans leurs cours et leurs répercussions sur les apprentissages réalisés.

Synthèse

- Le choix des contenus mathématiques en jeu dans les enseignements en cette discipline relève des enseignants chargés des cours. C'est une coutume qui trouve une justification dans la nature du rapport institutionnel (très ouvert pour ne pas réduire la marge de liberté dans l'élaboration d'un programme) et qui a engendré une pratique de changements, sans justification rationnelle, dans les programmes enseignés. Ces derniers sont le fruit des références épistémologiques, et non bibliographiques au sens strict, puisque les manuscrits mis à la disposition de ces enseignants ne leur permettent pas facilement, même s'ils s'en servent, d'élaborer un programme adéquat de mathématiques pouvant répondre aux besoins réels d'un étudiant, futur économiste.
- Un seul enseignant assure le cours de mathématiques à un niveau donné (même pour plus qu'un amphi), il est choisi pour sa tendance « quantitativiste » en 1re année du tronc commun et « matheux » pour la 2e année en sciences économiques. Il s'agit ici d'une pratique difficile à comprendre dans ses raisons mais dont il est facile de voir les répercussions : pour le cas de l'algèbre linéaire, chacun de ces deux enseignants a exposé à sa manière son propre cours mais tous les deux ont développé dans les TD des notes de cours officielles qui apparaissent conditionnées par la réussite dans les deux modules correspondants. Ces enseignements d'algèbre linéaire apparaissent être un ensemble de recettes, centrés sur des tâches internes à cette discipline et sans lien apparent avec l'économie. Ces deux enseignants ont instauré, notamment dans les TD, des contrats didactiques qu'ils n'ont pas rompus dans les examens et qui semblent engendrer chez les étudiants un rapport à l'algèbre linaire faisant de ce domaine un ensemble réduit de tâches et de techniques calculatoires ou algorithmiques, dont la maîtrise garantit la réussite dans les deux modules correspondants et constitue l'enjeu de leur enseignement.
- Les rapports à l'algèbre linéaire développés par les enseignants chargés des TD de mathématiques sont conditionnés par le contenu des notes que le responsable du cours a mis sur pied.
- Les connaissances d'un quantitativiste en algèbre linéaire et notamment dans ses liens à l'économie ne lui permettent pas de prendre en charge la question de la construction du lien de l'algèbre linéaire à l'économie.
- La microéconomie et la macroéconomie, quant à elles, utilisent à bon escient et seulement au niveau du savoir de référence plusieurs connaissances d'algèbre linéaire, et cela davantage

que dans les cours de mathématiques analysés. Ces connaissances apparaissent dans la genèse du savoir économique contemporain, elles sont sollicitées dans la formation d'un étudiant futur économiste et mises en évidence par tous les auteurs des manuels analysés qui déclarent, dans les préfaces et les avant-propos, entretenir des rapports positifs aux mathématiques. Cependant, l'utilisation de l'algèbre linéaire dans ces manuels apparaît pour certains manuels trop réduite, sans justification, sans rappel ou enseignement complémentaire, et carrément évitée pour d'autres manuels et ce au détriment d'une initiation à la démarche scientifique dans les analyses économiques. En tout cas, l'algèbre linéaire apparaît fondamentale tant dans les analyses microéconomiques que dans les analyses macroéconomiques, indispensable pour des enseignements qui visent cette initiation. Elle permet, en outre, l'élaboration de cours d'économie moins volumineux et plus adaptés aux temps réservés à leur enseignement.

- Les rapports aux mathématiques et particulièrement à l'algèbre linéaire des enseignants d'économie semblent négatifs et laissent prédire l'orientation des enseignements qu'ils donnent, en ce qui concerne les analyses économiques qui nécessitent le recours aux mathématiques.

En guise de conclusion

À la lumière de nos premiers résultats, il apparaît que la mathématisation de l'économie est un fait qui ne va pas de soi et qui engendre un problème didactique à ne pas sous estimer. Les mathématiques constituent un savoir fondamental pour l'économie contemporaine mais il en va tout autrement dans le cursus de formation en économie. La formation préalable semble défavorable pour l'instauration à l'université d'une culture pouvant assurer une formation qui réponde aux besoins en matière de connaissances mathématiques mobilisables. Certes, notre étude montre que sa résolution est entièrement réservée aux institutions concernées et reste en cela relative au contexte de chacune d'elles. Néanmoins, il nous semble en tant qu'enseignant de mathématiques dans une institution de sciences économiques et, par conséquent, impliqué dans la formation des étudiants, futurs économistes, que notre devoir n'est pas de se taire sur des pratiques soupçonnées, en contribuant à un enseignement des mathématiques sans rapport avec ce que ces étudiants savent et doivent savoir de l'économie, ni de défendre ou de justifier la raison d'être des mathématiques en économie ou dans les institutions de formation à dominante économique. Il s'agit plutôt de défendre notre discipline qui se trouve, d'un côté, « banalisée » dans cet envahissement par des non-spécialistes et, d'un autre côté, utile et sollicitée dans la formation visée. C'est une question qui implique, nous semble-t-il, la communauté des mathématiciens, des théoriciens en économie, la noosphère et les institutions de sciences économiques. Elle les invite à réfléchir sur les contenus mathématiques à mettre en jeu dans ces institutions et sur les stratégies à adopter dans leur enseignement. Comment une réforme de l'enseignement supérieur peut-elle s'orienter dans ce choix tout en laissant, à la charge de chacune des institutions concernées, le problème didactique qu'engendre la mathématisation de l'économie ? Est-il suffisant de théoriser et de diffuser des idées et théories mêmes justifiées ? Pourquoi ne pas diffuser des praxéologies « mixtes » au sens de Michelle Artaud ? Pourquoi ne pas favoriser la pratique interdisciplinaire dans les institutions concernées ou prévoir des formations supplémentaires des enseignants impliqués ? Telles sont des questions qui émergent de ce travail de thèse en (cours) et qui nous laissent sur notre soif.

Références

Abdessalem. T. (1989) : *Mathématiques en sciences économiques*, Volume 1 et 2, Éditions CERP, Tunis.

Auliac. G. et all. (1996) : *Mathématiques et statistiques appliquées à l'économie et la gestion, Analyse*, Tomes 1 et 2, Éditions Ediscience international, Paris.

Auray. J-P. et all. (1977) : *Problèmes d'économie mathématique*, Économica édition, Paris.

Bance. P. et all. (1997) : *Mathématiques pour l'économie, tome I : Mathématiques économiques linéaires*, Éditions Ediscience international, Paris.

Ben Mrabet. A. (2000) : *Exercices corrigés d'algèbre linéaire pour économiste*, Publication de l'imprimerie officielle de la république tunisienne.

Boursin. J-L. (2000) : *L'essentiel des mathématiques pour l'économie et la gestion*, Série Les Carrés, Gualino éditeur, Paris.

Carlot. D. et Droguet. A. (2003) : *Précis de mathématiques, Algèbre linéaire et Analyse, classe préparatoire, Voie économique*, Collection ECE, Éditions Bréal, Rosny.

Dameron. P. (2001) : *Mathématiques économiques : Analyse dynamique*, Éditions Économica, Paris.

Darreau P. (2000) : *Mathématique et Science Économique*, Conférences tout public « Fête de la Science », semaine du 16 au 22 octobre 2000, Université de Limoges.

Dollo. C et Luiset. B. (1998) : *Des concepts économiques aux outils mathématiques*, Éditions Hachette, Paris.

Driss. N. et Essid. S. (2000) : *Cours de mathématiques, 1re année sciences économiques et gestion*, tomes 1 et 2, Publication de l'imprimerie officielle de la république tunisienne.

Dowling. E.T. (1992) : *Mathématiques pour l'économiste*, 2e édition, Série Schaum, Éditions McGRaw-Hill, England.

Esch. L. (1999) : *Mathématiques pour économistes et gestionnaires*, 2e édition, Collection Ouvertures économiques, Série Prémisses, Éditions De Boeck Université, Paris-Bruxelle.

Fourastié. J. (1991) : *Mathématiques appliquées à l'économie*, Éditions Dunod, Paris.

Frikha. S. (2004) : *Maths II Pour économistes, Algèbre linéaire et intégrale*, Presse d'imprimerie Finzi, Tunis.

Hal. R. Varian. (2000) : *Introduction à la microéconomie*, 4e édition, Ouvertures économiques, Série Prémisses, Éditions De Boeck, Belgique.

Kohli. U. (1999) : *Analyse macroéconomique, Ouvertures économiques*, Série Prémisses, Éditions De Boeck, Belgique.

Planche. A. (1998) : *Mathématiques pour économistes*, Algèbre, 2e édition, Éditions Dunod, Paris.

Piller. A. (1995) : *Algèbre linéaire, manuels d'exercices corrigés, Deug Sciences économiques et autres*, Collection Maxima, Laurent du Mesnil éditeur, Paris.

Royer. D. (1991) : *Mathématiques de base, Science économique et gestion*, Éditions Économica, Paris.

Simon C. P. et Blume L. (1994) : *Mathématiques pour économistes*, Traduction française, Collection Ouvertures économiques, Série Prémisses, Éditions De Boeck Université, Paris.

Talbi. B. (1997) : *Analyses Microéconomiques : développements théoriques et sujets d'examen corrigés*, Volumes 1 et 2, Publication de l'imprimerie Finsi, Tunis.

Pour joindre l'auteur

Abdessatar Hdia
Étudiant au doctorat en didactique des mathématiques,
Institut supérieur de l'Éducation et de la formation continue, Tunis
Adresse postale : Abidi Abdessatar 78 Rue Farhat Hached, Jendouba 8100, TUNISIE
Email : Abdessatar.Abidi@fsjegj.rnu.tn

Annexe

1. Le modèle ouvert simple de Léontief

C'est un modèle linéaire de production à rendement d'échelle constant. Il est utilisé dans un contexte interindustriel pour l'étude des processus de production d'un certain nombre n de biens dont chacun est produit par une seule branche qui est, à la fois, cliente et fournisseur des autres branches. Le processus de production d'un bien bi est décrit, dans ce modèle, par un ensemble de coefficients positifs (a_i) (coefficients d'input-output) où la production totale nette est répartie entre les n branches. Par ailleurs, le fait que la productivité du système économique ou la loi de l'offre et de la demande suppose que l'output total satisfait la demande de consommation, contraint le vecteur de production $X(x_1,\ldots, x_n)$ et celui de la demande de consommation $B(c_1,\ldots, c_n)$ d'avoir seulement des composantes non négatives. Si x_i est la quantité produite par la branche b_i et dont la production nécessite $a_{ij}x_j$ du bien produit par b_j, cette quantité n'est autre que la somme de ces termes augmentée de la demande de consommation du bien produit par bi : $a_{i1}x_1+ a_{i2}x_2 +\ldots+ a_{ii}x_i+\ldots a_{in}x_n+ c_i = x_i$. Après aménagement de ces équations, ce processus de production interindustriel se trouve modélisé par un système d'équations linéaires dont l'écriture matricielle est (I-A)X=B. La matrice carrée A est appelée matrice des coefficients techniques ou matrice des coefficients d'input-output : cette matrice, dont les colonnes sont appelées vecteurs d'activité, est dite productive si l'inégalité stricte (I-A)X>0 admet une solution X non négative. Enfin, deux versions de ce modèle coexistent et qui diffèrent uniquement par la prise en compte du facteur travail qui est fourni et non demandé pour la consommation et dont l'application de la loi de l'offre et de la demande à ce facteur autonome donne $a_{01}x_1 + a_{02}x_2+\ldots a_{0n}x_n +c_0 = 0$ avec $c_0 < 0$. Toutefois, les deux versions du modèle ouvert simple de Léontief se rejoignent au niveau de l'analyse mathématique.

Il est clair que l'étude du processus de production de Léontief, modélisé par l'équation matricielle (I-A)X=B, repose sur l'analyse des propriétés de la matrice carrée positive A et sur la manipulation de cette équation. Quant à la problématique correspondante à la praxéologie relative à ce type de tâches, elle est fondée sur les deux questions fondamentales suivantes :

– Quelles sont les conditions garantissant la productivité de la matrice A ?

– Si ces conditions sont vérifiées, combien de vecteurs de production X permettant un output total qui satisfait une demande de consommation donnée B ?

Les réponses mathématiques aux questions évoquées ci-dessus sont :

– Pour qu'une matrice carrée positive A soit productive (dite encore de Léontief), il faut et il suffit qu'une des quatre propositions suivantes soit vérifiée :

*(I-A) est une matrice singulière et son inverse est non négative,

*tous les mineurs principaux successifs de (I-A) sont strictement positifs,

*la partie réelle de chacune des valeurs propres de (I-A) est strictement positive, *la racine de Frobenius[6] de A (valeur propre réelle dominante) est strictement inférieure à un.

Il existe un seul vecteur de production X permettant un output total qui satisfait une demande de consommation donnée B : c'est le vecteur $(I\text{-}A)^{-1}$ B.

En pratique, on donne d'abord une matrice technologique (ou une matrice de coefficients techniques valorisés) A ou un tableau d'entrée-sortie (TES) à partir duquel on demande d'extraire la matrice A. Ensuite, on demande d'étudier la productivité de cette matrice et de chercher, dans le cas affirmatif, le vecteur X pour une demande de consommation donnée B. De plus, on demande souvent d'étudier l'interdépendance des industries en jeu. Ainsi l'étude du modèle linéaire de production de Léontief est un type de tâches qui regroupe essentiellement les trois tâches suivantes :

T_1 : étudier la productivité d'une matrice carrée positive A,

T_2 : déterminer, pour une matrice productive A et une demande de consommation B, le vecteur X de production satisfaisant cette demande,

T_3 : étudier l'interdépendance des industries en jeu dans un processus de production de Léontief à matrice des coefficients d'input-output donnée A.

Pour la première tâche T_1, nous recensons quatre techniques universelles à savoir :

La première technique θ_1 consiste à :

- étudier l'inversibilité de la matrice (I-A), si cette matrice n'est pas inversible alors A n'est pas productive (fin de tâche) ; hormis, on doit
- calculer l'inverse de cette matrice et s'assurer qu'elle n'est pas négative.

La seconde technique θ_2 consiste à calculer tous les mineurs principaux de (I-A) puis d'examiner leurs signes : s'il existe un mineur principal négatif ou nul, la matrice A n'est pas productive.

La troisième technique θ_3 consiste à déterminer toutes les valeurs propres de (I-A) (réelles et complexes) puis d'examiner les signes de leurs parties réelles : si une partie réelle d'une valeur propre est négative ou nulle, la matrice A n'est pas productive.

La quatrième technique θ_4 consiste à déterminer la racine de Frobenius de A puis de la comparer à l'unité : si elle est supérieure ou égale à 1, la matrice A n'est pas productive. Il est à noter que cette racine peut être spécifiée par les sommes en colonnes ou en ligne puisqu'elle est comprise entre la somme minimale et la somme maximale en lignes (et aussi en colonnes). En particulier, si A est la transposée d'une matrice de Markov (la somme des éléments de chacune de ses lignes vaut 1) qu'on appelle encore matrice stochastique, la racine de Frobenius associée est 1.

Pour la seconde tâche T_2, c'est une tâche du type T_{sys} et donc toutes les techniques que nous avons recensées dans l'analyse praxéologique relative à ce type peuvent êtres utilisées. Néanmoins, c'est

6 D'après le théorème de Perron-Frobenius, toute matrice carrée positive A admet une valeur propre réelle positive (ou nulle), supérieure ou égale au module de n'importe quelle autre valeur propre de A : c'est la racine de Frobenius. De plus, cette racine est une racine simple strictement positive lorsque A est indécomposable (ce dernier concept sera développer par la suite).

la technique qui consiste à calculer d'abord $(I-A)^{-1}$, puis de calculer la solution $X= (I-A)^{-1}B$ qui est utilisée dans le support retenu pour cette analyse.

Pour la troisième tâche T_3, nous dénombrons une seule technique que nous explicitons comme suit :

si A est décomposable, alors deux cas se présentent et dans lesquels on peut déterminer un groupe de variables indépendamment des autres :

1er cas : La matrice peut se mettre, après une permutation analogue de lignes et de colonnes, sous la forme $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$

où A_{11} et A_{22} sont des blocs carrés d'ordre respectif m et p. Dans ce cas, l'économie en jeux est répartie en deux groupes de produits. Les m premiers sont utilisés par toutes les branches (on les appelle des biens fondamentaux) alors que les p derniers ne sont utilisés que par les branches correspondantes.

2e cas : La matrice A peut se mettre sous la forme $\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$

Dans ce cas, l'économie est aussi subdivisée en deux groupes de produits qui sont ici indépendants et aucun bien n'est fondamental.

- Si aucune permutation analogue des lignes et des colonnes de la matrice A ne donne une des deux écritures précédentes (c'est-à-dire que A est indécomposable), l'économie ne comporte aucun produit fondamental. Toutes les branches de production sont reliées puisque chaque bien sert à sa production et à la production des autres biens.

Remarquons que cette dernière technique repose sur l'étude de la décomposabilité (réductibilité) de la matrice en jeu et qu'il existe n! permutations possibles pour une matrice carrée d'ordre n. Toutefois, il existe une méthode pratique et plus économique que le test de ces permutations. En effet, il suffit de tracer le graphe de connexité[7] associé à la matrice et de faire fonctionner le résultat suivant : une matrice A est irréductible si, et seulement si, pour tout couple (i, j) de sommets de son graphe G_A, il existe un chemin (une succession d'arcs) de i vers j. Malheureusement, aucun enseignement (en mathématiques ou en économie) n'a fait référence à cette méthode qui interprète l'irréductibilité d'une matrice, sur le graphe associé.

2. Le modèle linéaire de population de Lesli

C'est un modèle linéaire dynamique qui, utilisé dans le contexte d'une population partitionnée en k catégories (voire groupes d'âge) ayant chacun un taux de natalité et un taux de mortalité qui sont supposés fixes dans le temps, permet d'analyser et de décrire l'évolution de cette population. Pour une meilleure explicitation de ce modèle, nous supposons que la population est partagée en trois groupes d'âge C_1, C_2 et C_3 (qui correspondent à trois périodes p_1, p_2 et p_3) avec des taux de natalité a_1, a_2, a_3 et des taux de mortalité b_1, b_2 et b_3. Si x^n, y^n et z^n, désigne, respectivement, le nombre d'in-

7 Le graphe de connexité associé à une matrice carrée $A = (a_{ij})$ d'ordre n est défini ainsi :
- on trace n sommets numérotés 1, 2, …, n ;
- on trace un arc du sommet i vers le sommet j si et seulement si $a_{ij} \neq 0$.

dividus en la période p_1, p_2 et p_3 pour la date n, alors la dynamique temporelle de cette population est décrite par le système d'équations de récurrence linéaires suivant :

$$\begin{cases} x^{n+1} = a_1 x^n + a_2 y^n + a_3 z^n \\ y^{n+1} = (1-b_1)\, x^n \\ z^{n+1} = (1-b_2) y^n + (1-b_3) z^n \end{cases}$$

Ainsi, dans ce modèle où le temps est supposé discret, la dynamique temporelle de la population d'une date n à la date n+1, se trouve décrite par un système d'équations de récurrence linéaires homogènes à coefficients non négatifs $X^{n+1}=AX^n$. Dans le cas de k groupes d'âge, la matrice A de ce modèle linéaire est

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & .... & a_{k-1} & a_k \\ (1-b_1) & 0 & .... & ...0 & 0 \\ 0 & (1-b_2) & 0 & ...0 & 0 \\ 0 & 0... & (1-bi) & ...0 & 0 \\ 0 & 0... & 0... & (1-b_{k-1}) & (1-b_k) \end{pmatrix}$$

Enfin, outre l'évolution temporelle des catégories, l'analyse mathématique de ce système linéaire de récurrence permet de rendre compte du comportement, à long terme, de la population et notamment des tailles relatives des groupes d'âge.

Comme nous venons de l'expliciter, ce modèle à pour but d'analyser et de décrire l'évolution d'une population subdivisée en k groupes d'âge ayant chacun un taux de natalité et un taux de mortalité qui sont supposés fixes dans le temps. La problématique correspondante à la praxéologie relative à ce type de tâches est fondée essentiellement sur les deux questions fondamentales suivantes :

- Comment déterminer, pour une population ainsi répartie, le nombre d'individus en les mêmes périodes p_i dans une date donnée n ?
- Sachant une distribution en une date n donnée, quel est le nombre d'individus en les mêmes périodes pi dans une date ultérieure quelconque t ?
- Quelle est la taille, à long terme, de la population ?

* Pour la première question, elle correspond à la résolution d'un système d'équations de récurrence linéaires homogènes à coefficients non négatifs $X_{n+1}=AX_n$. C'est un type de tâches dont la résolution directe n'est pas tout à fait immédiate puisqu'elle suppose un changement de coordonnées adéquat pour séparer les variables composantes. Par ailleurs, si on se limite à la diagonalisation dans IR, il n'est pas évident que la matrice A soit diagonalisable et il faut, en conséquence, déterminer les vecteurs propres généralisés pour élaborer la réduite de Jordan. Toutefois, nous recensons une alternative possible qui conduit à l'élaboration d'une technique universelle permettant de résoudre ce système. Il s'agit de diagonaliser dans IC la matrice en jeu et d'appliquer le résultat technologico-théorique suivant :

Si r_1, r_2, ..r_k sont les valeurs propres réelles de A auxquelles sont associés respectivement des vecteurs propres ui et si (r_{k+1}, r_{k+2}), … (r_{n-1}, r_n) sont les h couples des valeurs propres complexes conjuguées de A auxquels sont associés respectivement des couples de vecteurs propres (v_i+iw_i, v_i-iw_i), alors la solution générale du système de Lesli est donnée par :

$$X_n = \sum_{i=1}^{k} C_i r_i^n u_i + \sum_{i=1}^{h} p_i^n [(C'_i \cos n\theta_i - C''_i \sin n\theta_i) v_i - (C'_i \cos n\theta_i + C''_i \sin n\theta_i) w_i]$$

où les C_i, C'_i et C''_i sont des réels quelconques.

* Pour la seconde question, il existe une seule technique qui consiste à :

- préciser l'équation matricielle $X_t=A^{t-n}X_n$ modélisant la solution recherchée,
- calculer A^{t-n} puis X_t.

Notons ici que le calcul des premières puissances de la matrice A du système de Lesli ne permet pas d'obtenir une forme de récurrence. La diagonalisation dans IC de cette matrice s'impose alors comme unique moyen permettant de calculer A^{t-n}.

* Pour la troisième question, la seule technique consiste à calculer d'abord la solution générale X_n du système en jeu et la limite de cette solution lorsque n tend vers l'infini et, ensuite à interpréter le résultat.