emf 2012

Enseignement des mathématiques et contrat social
Enjeux et défis pour le 21ème siècle

Actes du colloque emf 2012

Coordonnés par

Jean-Luc Dorier et Sylvia Coutat

Université de Genève 3 - 7 février 2012

ENSEIGNEMENT
DES MATHÉMATIQUES
ET CONTRAT SOCIAL
ENJEUX ET DÉFIS POUR LE 21e SIÈCLE

Actes du colloque EMF2012

Coordonnés par
Jean-Luc DORIER et Sylvia COUTAT

avec l'appui des membres du Comité Scientifique
et des coordonnateurs
des groupes de travail, des projets spéciaux
et de la table ronde

ISBN 978-2-8399-1115-3

PRESENTATION DE EMF2012

LES COLLOQUES EMF

L'*Espace Mathématique Francophone* (EMF) s'est constitué pour promouvoir réflexions et échanges au sein de la francophonie sur les questions vives de l'enseignement des mathématiques dans nos sociétés actuelles, aux niveaux primaire, secondaire et supérieur, ainsi que sur les questions touchant aux formations initiale et continue des enseignants. L'EMF contribue au développement d'une communauté francophone riche de ses diversités culturelles, autour de l'enseignement des mathématiques au carrefour des continents, des cultures et des générations. La langue de travail de l'EMF est le français.

Les rencontres scientifiques de l'EMF, qui ont lieu tous les trois ans depuis 2000, sont reconnues comme conférences régionales de la *Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique* (CIEM). Elles s'adressent aux différents intervenants préoccupés par les questions qui touchent à l'enseignement des mathématiques : mathématiciens, didacticiens des mathématiques, chercheurs, formateurs, enseignants de différents niveaux. Les lieux des conférences sont choisis pour respecter un équilibre géographique et favoriser la participation d'une communauté francophone la plus large possible.

Les colloques de l'EMF visent à :

- permettre les échanges d'idées, d'informations, d'expériences, de recherches autour des questions vives en enseignement des mathématiques, en particulier en lien avec le thème retenu pour chacun d'entre eux ;
- renforcer la coopération entre des chercheurs, formateurs, enseignants, vivant dans des contextes sociaux et culturels différents, et ayant des préoccupations communes quant aux questions touchant à l'enseignement des mathématiques ;
- susciter la participation de jeunes enseignants et chercheurs aux débats sur l'enseignement des mathématiques, ainsi que leur contribution à l'élaboration de perspectives d'avenir ;
- favoriser la prise de conscience chez les enseignants, formateurs, chercheurs de leur rôle dans l'élaboration de la culture mathématique de leurs pays respectifs ;
- contribuer au développement, dans la communauté francophone, de la recherche en didactique des mathématiques et de ses retombées, notamment sur les formations initiale et continue des enseignants.

Les précédents colloques ont eu lieu à Grenoble (2000), Tozeur (2003), Sherbrooke (2006) et Dakar (2009).

LE COLLOQUE EMF 2012 – ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES ET CONTRAT SOCIAL : ENJEUX ET DÉFIS POUR LE 21e SIÈCLE

L'année 2012 marque le 300e anniversaire de la naissance à Genève de Jean-Jacques Rousseau, en même temps que les 250 ans de la publication du *Contrat social* et de l'*Emile*. C'est également le centenaire de la création de l'Institut Rousseau, la célèbre Ecole des sciences de l'éducation fondée par le psychologue Edouard Claparède (1873-1940).

Dans l'*Emile*, non seulement Rousseau place l'élève au centre du processus éducatif, mais il confère aussi à l'éducation une dimension sociale affirmée en plaidant pour une école résolument émancipatrice. N'écrit-il pas : « Qu'on destine mon élève à l'épée, à l'église ou au barreau, peu m'importe. Avant la vocation des parents, la nature l'appelle à la vie humaine. Vivre est le métier que je lui veux apprendre ».

C'est ainsi que pour 2012, Genève et sa Faculté de Psychologie et des Sciences de l'Education, issue de l'Institut Rousseau, apparaissent comme un lieu tout désigné pour accueillir le congrès de l'EMF et nourrir ses travaux sur les dimensions sociale et citoyenne de l'enseignement des mathématiques.

En ce début de 21e siècle, il paraît opportun de s'interroger sur la place des mathématiques et de leur enseignement dans nos sociétés. La question du contrat social dans l'enseignement des mathématiques demeure d'autant plus cruciale que, dans beaucoup de pays, on assiste depuis plusieurs années à une baisse des effectifs dans les filières à forte composante mathématique. Le rôle social de l'enseignement des mathématiques a été dans un passé récent souvent réduit à celui de discipline de sélection. Ce rôle remis en cause, d'aucuns verraient bien la place des mathématiques diminuer dans les programmes scolaires. Plus généralement, les réflexions actuelles, dans la plupart des pays, sur les curriculums conduisent à redéfinir les contours des enseignements de mathématiques ainsi que leurs rapports aux sciences et à la « vie de tous les jours ».

Comment dans ce contexte assurer à l'enseignement des mathématiques une légitimité sociale, et sur quelles bases ?

Certaines demandes de nos sociétés sont aujourd'hui particulièrement fortes, comme celles de montrer dans l'enseignement l'intérêt des mathématiques pour la vie citoyenne, ou de mener une réflexion sur la place des filles, et plus généralement sur les questions liées au genre, dans l'enseignement mathématique.

Par ailleurs, l'enseignement des mathématiques semble être en pointe sur des questions vives des sociétés modernes, comme le travail collaboratif, la dimension sociale des apprentissages ou l'usage des nouvelles technologies.

Ainsi, les enjeux et défis entre enseignement des mathématiques et contrat social relèvent d'un double questionnement :

- Quelles sont les attentes explicites et implicites de la société vis-à-vis de la formation mathématique du citoyen ? L'enseignement actuel y répond-il ? Au besoin, comment pourrait-il mieux le faire ?
- Quelles contributions spécifiques l'enseignement des mathématiques peut-il apporter au contrat social, en prenant une part active aux débats dans la classe, dans l'école et plus largement dans la Cité ?

En abordant plus largement les questions vives qui concernent l'enseignement des mathématiques, les travaux des différents groupes, les projets spéciaux et les séances plénières traiteront particulièrement de celle du contrat social comme enjeu et défi pour le 21e siècle.

BILAN

Cette édition romande a regroupé 290 participants de 25 nationalités, ce qui montre qu'un espace de travail et d'échange sur les questions d'enseignement des mathématiques en langue française mobilise au-delà des frontières de la francophonie. Il y a eu environ 160 contributions et 30 affiches réparties dans 10 groupes de travail et 4 projets spéciaux.

Les groupes de travail qui ont fonctionné sur 6 plages représentant 10h de débats sont réellement le cœur du dispositif qui vise au-delà des colloques organisés tous les 3 ans de permettre des collaborations sur le long terme dans l'espace mathématique francophone. Les projets spéciaux permettent de lancer des thématiques plus novatrices, et le projet « Jeunes enseignants – Formation et entrée dans le métier » a permis à 27 jeunes enseignants de 9 nationalités[1] différentes d'échanger dès les 4 journées de pré-colloque, organisées à Fribourg et de présenter un travail lors du colloque. Ce projet « jeunes » montre l'intérêt que des jeunes enseignants trouvent dans un échange interculturel avec leurs pairs. Le projet spécial sur la Vulgarisation mathématique a permis, dans un partenariat avec le Musée d'histoire des sciences, la mise en place d'une exposition « Les jeux sont faits : hasard et probabilités » (http://www.ville-ge.ch/mhs/expo_2012_jeux.php) ouverte jusqu'au 7 avril 2013 et permettra des visites de classes. Ce projet a aussi permis de rendre plus visible un partenariat avec l'équipe de RTSdécouverte (http://www.rtsdecouverte.ch/home). Enfin ce projet et le Groupe de travail n° 10 sur la démarche d'investigation ont pu s'appuyer sur le projet européen PRIMAS (http://www.primas-project.eu), visant à promouvoir la démarche d'investigation dans l'enseignement des mathématiques et des sciences à tous les niveaux scolaires et dont une des 14 équipes partenaires est basée à Genève. La conférence du Pr. Charles Magnin, historien de l'éducation à l'Université de Genève s'intitulait : « 'L'enfant au centre !', la fortune conflictuelle d'une visée inspirée de Rousseau 1762-2012 ». Elle a permis de découvrir certains aspects liés à la création et l'histoire de l'Institut Rousseau, ancêtre de la Faculté de Psychologie et des Sciences de l'Education de l'Université de Genève. La conférence du Pr. Marcos Marino, de la faculté des sciences de l'Université de Genève, intitulée, « Mathématique et physique des particules élémentaires -Panorama d'une idylle scientifique », nous a donné une vision accessible et passionnante des liens entre mathématique et physique dans l'histoire de la théorie des cordes et de la physique des particules élémentaires. Enfin, les deux temps de tables rondes organisées par les Professeures Michèle Artigue et Nadine Bednarz ont permis de débattre de certains aspects des évolutions curriculaires en mathématiques dans plusieurs pays de la francophonie en lien avec le contrat social.

Malgré le froid polaire, cette 5e édition de l'EMF a montré la vitalité de cette communauté et la richesse de sa production scientifique, dans un partenariat qui, autour de la langue française, s'appuie sur une collaboration Nord-Sud exemplaire. Outre la spécificité linguistique, l'EMF s'impose comme un lieu privilégié de communication entre enseignants, formateurs et chercheurs à tous les niveaux scolaires. L'accent sur la participation de jeunes chercheurs et enseignants a également été réaffirmé.

Les actes de cette rencontre sont présentés ici et regroupent l'ensemble des textes, vidéos, et/ou bandes-son des 2 conférences, les textes des 2 tables rondes, des 10 groupes de travail, des 4 projets spéciaux et les affiches, plus quelques bonus.

La prochaine édition de l'EMF aura lieu fin avril début mai 2015, en Algérie, perpétuant ainsi ce qui est devenue une règle d'alternance Nord–Sud dans les lieux d'accueil du colloque.

[1] Algérie, Belgique, Burkina-Faso, Canada, France, Mali, Maroc, Sénégal, Suisse.

COMITÉ SCIENTIFIQUE

Jean-Luc DORIER - Responsable CS

Assude TERESA, Université de Provence, France
Jaime CARVALHO E SILVA, Université de Coimbra, Portugal (Secrétaire Général de la CIEM)
Pierre-Alain CHERIX, Université de Genève, Suisse
François CONNE, Université de Genève et UNIL, Suisse
Daniel CORAY, Université de Genève, Suisse
Ruhal FLORIS, Université de Genève, Suisse
Fernando HITT, Université du Québec à Montréal, Canada
Bernard HODGSON, Université Laval, Canada
Alain KUZNIAK, Université Paris Diderot, France
Maria POLO, Université de Cagliari, Italie
Eric RODITI, Université Paris Descartes, France
Maggy SCHNEIDER, Université de Liège, Belgique
Hassane SQUALLI, Université de Sherbrooke, Canada
Moustapha SOKHNA, Université Cheikh Anta Diop, Sénégal
Hikma SMIDA, Université El Manar, Tunisie
Kalifa TRAORE, Université de Koudougou, Burkina Faso
Carl WINSLOW, Université de Copenhague, Danemark

COMITÉ D'ORGANISATION

Ruhal FLORIS - Responsable CO

Sylvia COUTAT

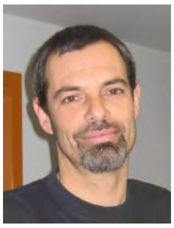
Audrey DAINA

Hedwige AYMON (HEP Valais)
Yves BAUDRAND (IUFE, UniGe)
Sonia BUEHLER (IUFE, UniGe)
Pierre-François BURGERMEISTER (IUFE, UniGe)
Jacques-André CALAME (HEP Bejune)
Pierre-Alain CHERIX (Section des Mathématiques, UniGe)
Stéphane CLIVAZ (HEP Lausanne)
François CONNE (FPSE, UniGe)
Michel CORAY (IUFE, UniGe)
Christine DEL NOTARO (FPSE, UniGe)
Jean-Luc DORIER (FPSE, IUFE, UniGe)
Nicolas DREYER (HEP Fribourg)
Shaula FIORELLI VILMART (Section des Mathématiques, UniGe)
Jean-Pierre GUEX (IUFE, UniGe)
Béatrice JACCARD (IUFE, UniGe)
Sophie KANMACHER (IUFE, UniGe)
Laurence MERMINOD (IUFE, UniGe)
Thomas PERRIN (IUFE, UniGe)
Céline MARÉCHAL (FPSE, UniGe)
Laura WEISS (IUFE, UniGe)

SECRÉTARIAT

Céline.MARLEIX-BARDEAU

ASSISTANCE TECHNIQUE



Alexandre FOUCHAULT

MESSAGES DE BIENVENUE A EMF2012

MESSAGE DU PRESIDENT DE LA COMMISSION INTERNATIONALE DE L'ENSEIGNEMENT MATHEMATIQUE

Au nom de la *Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique* (CIEM/ICMI) je vous souhaite chaleureusement la bienvenue à l'occasion de cette cinquième rencontre de *l'Espace Mathématique Francophone*.

La communauté internationale de l'éducation mathématique au sens large se nourrit de la vivacité et de l'énergie impulsées par des communautés locales et régionales. Dans ce sens, l'EMF assume une position exemplaire depuis de nombreuses années. Non seulement la qualité des travaux issus des conférences EMF se distingue dans la communauté internationale, mais EMF représente une force remarquable permettant de tisser des liens et de dépasser la séparation nord-sud. En particulier les initiatives de l'EMF en Afrique ont eu une grande influence dans la mise en place du réseau *IMU/ICMI Capacity & Networking Project* à l'initiative de l'*Union Mathématique Internationale* et de la CIEM, qui a été inauguré en 2011 lors d'un Séminaire au Mali.

Je tiens donc ici à vous remercier pour l'influence que vous avez, par vos actions, sur l'ensemble de la communauté internationale et vous transmets tous mes vœux de réussite pour cette rencontre de 2012, avec un remerciement spécial pour les comités scientifique et d'organisation et toutes celles et ceux qui ont œuvré au bon déroulement de EMF2012.

Que le colloque de Genève soit stimulant professionnellement, riche d'échanges pour votre communauté et une expérience pleine de plaisir. Je suis certain que ce sera le cas.

Cordialement,

Bill Barton

MESSAGE DU CONSEILLER D'ÉTAT CHARGE DU DEPARTEMENT DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE, DE LA CULTURE ET DU SPORT

Bienvenue à l'Espace Mathématique Francophone !

Chacun connaît bien l'importance des mathématiques dans l'univers scientifique en général, et dans le domaine pédagogique en particulier. Cette place prédominante n'est cependant pas immobile : elle fait débat et pose souvent des questions essentielles aussi bien aux élèves qu'aux enseignants. Il est donc important qu'à intervalles réguliers se rencontrent didacticiens, chercheurs, formateurs et, bien entendu, maîtres et maîtresses de mathématiques. Venus d'horizons culturels et géographiques vastes, ces professionnels ont ainsi l'occasion de mettre leurs pratiques en jeu, d'exprimer leurs préoccupations, de créer des liens entre eux, même s'ils travaillent dans des contextes très différents. Peu importe, car ils partagent la passion qu'ils éprouvent pour leur science et pour sa transmission.

C'est donc avec grand plaisir que j'accueille ici à Genève les participants à ce colloque. Je ne doute pas qu'ils s'attacheront à faire progresser l'enseignement des mathématiques, sujet particulièrement fondamental dans la scolarité des élèves, quels que soient leur âge et leur parcours.

Ce colloque a lieu dans le cadre de l'université de Genève, plus particulièrement sous l'égide de l'institut de formation des enseignants. Je m'en réjouis vivement, sachant à quel point une matière complexe devient soudain accessible quand, objet de réflexion et de débat, elle est ensuite enseignée avec talent et avec vivacité !

Je félicite les organisateurs de cette conférence et souhaite à chacune et à chacun un très bon séminaire.

Charles Beer

Conseiller d'Etat

MESSAGE DU RECTEUR DE L’UNIVERSITE DE GENEVE

C’est avec grand plaisir que nous accueillons à l’Université de Genève cette cinquième rencontre de l’*Espace Mathématique Francophone.* Je tiens au nom de toute la communauté universitaire à souhaiter la bienvenue à tous les participants et à remercier toutes celles et ceux qui ont œuvré à son organisation.

Notre université qui a fêté il y a peu son 450e anniversaire s’est toujours distinguée par une attention particulière aux valeurs éducatives. En cette année du tricentenaire de la naissance de Jean-Jacques Rousseau, nous sommes fiers de pouvoir être le centre d’une rencontre francophone sur les questions d’enseignement des mathématiques, soutenue par la Faculté de Psychologie et des Sciences de l’Education, la Faculté des Sciences et l’Institut Universitaire de Formation des Enseignants. Une forme de partenariat inter-facultaire que nous encourageons particulièrement et qui montre que la recherche en didactique des mathématiques est bien ancrée dans notre université.

La thématique du colloque sur les enjeux sociaux rejoint également la préoccupation de notre université de s’ouvrir sur la société. Dans ce sens, les événements en marge de ce colloque en partenariat avec le Musée d’Histoire des Sciences (par l’exposition *Les jeux sont faits*) et la Télévision Suisse Romande (à travers *TSR Découvertes*) nous paraissent particulièrement fructueux.

Je vous souhaite des échanges fructueux et une pleine réussite à votre manifestation.

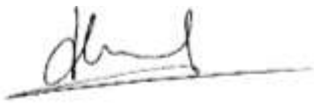
Jean-Dominique Vassalli

MESSAGE DU DOYEN DE LA FACULTE DE PSYCHOLOGIE ET DES SCIENCES DE L'ÉDUCATION

Au nom de l'ensemble des membres de la Faculté de Psychologie et des Sciences de l'Education de l'Université de Genève, je souhaite une très cordiale bienvenue à toutes les participantes et à tous les participants à cette cinquième rencontre de l'*Espace Mathématique Francophone.* Notre Faculté est honorée et heureuse d'accueillir cette très importante manifestation, et en son nom encore, je remercie vivement notre collègue Jean-Luc Dorier initiateur de l'entreprise et président du comité scientifique, et je remercie également Ruhal Floris, président du comité d'organisation, ainsi que tou(te)s celles et ceux qui ont œuvré à la conception et à l'organisation de ces rencontres.

La Faculté de Psychologie et des Sciences de l'Education se réjouit particulièrement du thème choisi pour cette manifestation, « Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21^{e} siècle » : au-delà du clin d'œil à Jean-Jacques Rousseau sous l'égide duquel notre institution fut créée il y a tout juste un siècle, ce thème fait écho aux orientations théoriques et stratégiques profondes de notre Section des Sciences de l'Education : aborder les problématiques d'enseignement en prenant en compte, simultanément, la teneur même de la « matière » à enseigner, la signification de celle-ci et ses enjeux dans le cadre du développement social, et les conditions possibles de sa transmission et de son apprentissage. La Faculté se réjouit également de l'élan et du dynamisme dont témoignent la conception et l'organisation de ces rencontres : le souci d'établir un équilibre et de permanents échanges entre francophones du Sud et du Nord ; la volonté de réunir et de faire dialoguer enseignants de terrain, formateurs, chercheurs en mathématiques et chercheurs en didactique ; la vivacité de l'organisation du programme des rencontres, dont témoignent notamment les démarches de travail de groupe et les projets spéciaux.

Je forme des vœux pour que la tenue de ces rencontres dans notre « espace » de travail permette un renforcement des liens entre notre Faculté et les associations impliquées dans ces rencontres, et je souhaite à tous les participants de riches échanges et un fructueux colloque.



Jean-Paul Bronckart

MESSAGE DU DIRECTEUR DE L'INSTITUT UNIVERSITAIRE DE FORMATION DES ENSEIGNANTS

Au nom de *l'Institut Universitaire de Formation des Enseignants* (IUFE), j'ai le grand plaisir de souhaiter la bienvenue aux participantes et participants à la 5ème rencontre de *Espace Mathématique Francophone*.

L'IUFE est une très jeune institution. Issu il y a trois ans de la volonté politique de regrouper toutes les formations dans une seule institution, située à l'université pour ainsi articuler étroitement recherche et formation, il est basé sur le principe que chaque formateur – professeur, chargé d'enseignement, maître d'enseignement et de recherche – participe activement à l'une des plus de 30 équipes de recherche qui interviennent dans la formation. Enseignants du secondaire et du primaire, enseignants du spécialisé, mais également les cadres des institutions éducatives sont ainsi formés par un personnel appartenant à de mêmes équipes afin de créer des bases communes de haut niveau pour assurer un enseignement de qualité pour tous.

Jeune certes, l'IUFE peut cependant compter sur une tradition ancienne de recherche et de formation. Les enseignants du primaire sont formés à l'université depuis la fin des années 20 déjà. Et l'Ecole des sciences de l'éducation, le fameux *Institut Rousseau*, fondé par Claparède il y a 100 ans exactement, a inauguré de nombreuses recherches sur l'école et sur l'enseignement et a formé des pédagogues venant du monde entier. Il a, pour ce faire, d'emblée fait appel à l'un des plus illustres spécialistes de l'enseignement des mathématiques, à savoir Henri Fehr qui a donné des cours de didactique des mathématiques de 1912 à 1945, date de sa retraite. Ce professeur de mathématique de l'Université de Genève a créé la revue *L'Enseignement Mathématique* en 1899 et l'a dirigée jusqu'à sa mort en 1954 ; une revue qui, pendant des décennies, a recensé tous les travaux essentiels dans le domaine de l'enseignement des mathématiques ; et qui est devenu l'organe officiel de la *Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique* dont il a été membre fondateur. Bien plus tard, d'autres chercheurs, professeurs et formateurs à *l'Institut des sciences de l'éducation*, s'appuyant sur l'immense œuvre de Piaget, ont entrepris des initiatives pour améliorer l'enseignement des mathématiques : Samuel Roller pour le primaire, créant lui aussi une revue, régionale celle-ci : *Math-école* ; ou Laurent Pauli qui a joué un rôle essentiel pour l'introduction de ce que jadis on appelait les « maths modernes ».

Riche de cette belle tradition, l'IUFE continue son travail pour comprendre les problèmes complexes de l'enseignement de mathématiques. Accueillir, avec les autres institutions de l'Université de Genève, les rencontres de l'EMF est l'une des manières de continuer le travail inlassable nécessaire pour mieux comprendre l'enseignement des mathématiques et pour contribuer à sa transformation afin de garantir à tous un accès à ce monde fascinant du savoir. Remerciant tous les organisateurs pour leur travail, je souhaite à toutes et à tous des échanges stimulants.

Bernard Schneuwly

MESSAGE DU PRÉSIDENT DE LA SECTION DE MATHEMATIQUES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES

Au nom de la Section de Mathématiques et de la Faculté des Sciences de l'Université de Genève, je me fais un plaisir de souhaiter la bienvenue aux participants du cinquième colloque *Espace Mathématique Francophone* EMF2012.

Dans un monde où les mathématiques sont de plus en plus présentes, l'enseignement des mathématiques est confronté à un double défi : d'une part, il doit donner aux élèves et aux étudiants les outils adaptés aux situations auxquelles ils seront confrontés ; d'autre part, il doit parvenir à convaincre ce même public de l'importance primordiale de cette branche non seulement dans leur vie professionnelle, mais aussi dans leur compréhension des enjeux de la société. En ce sens, le thème de ce colloque « Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle » est brûlant d'actualité.

En tant que Président de la Section de Mathématiques, je suis convaincu qu'une formation solide en mathématiques est indispensable non seulement pour les futurs scientifiques, mais aussi pour toute personne qui est de plus en plus confrontée dans la vie courante à des choix basés sur des arguments chiffrés.

Permettre des échanges entre enseignants, formateurs, mathématiciens et didacticiens de divers pays de la francophonie aidera, j'en suis convaincu, à améliorer l'adéquation de l'enseignement des mathématiques aux besoins de la société.

Je tiens donc à remercier les organisateurs du colloque EMF2012, en particulier le Professeur Jean-Luc Dorier, pour la mise en œuvre de cet événement et souhaiter à chacun un moment riche de découvertes, de réflexions et de partages.

Anton Alekseev

MESSAGE DU PRÉSIDENT DE LA SOCIÉTÉ SUISSE DE RECHERCHE EN DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

C'est avec plaisir que je vous souhaite la bienvenue au colloque EMF2012 au nom de la *Société Suisse pour la Recherche en Didactique* des Mathématiques (SSRDM). Fondée en avril 1997, la SSRDM a pour objectif de rassembler des chercheurs, des formateurs et des enseignants intéressés par une approche scientifique des phénomènes d'enseignement des mathématiques. Dans son manifeste (voir www.ssrdm.ch), on lit ainsi que :

> Considérer la didactique des mathématiques comme une science suppose qu'elle se donne des normes en vue de la connaissance et de la recherche de 'vérités scientifiques'. Ne confondons pas ces normes scientifiques avec celles du « bien faire didactique à l'école ». L'étude scientifique des phénomènes naturels ne nous dit pas comment 'faire' la nature, ni non plus comment la 'refaire' et encore moins comment 'bien la faire', mais elle est très utile pour savoir comment 'faire avec' la nature.

Les membres fondateurs de la SSRDM provenaient d'horizons intellectuels très différents: épistémologie, psychologie, mathématiques. Avec la quasi-absence, à l'époque, d'une formation de niveau tertiaire des enseignants, les institutions de rattachement de ses membres étaient de toutes sortes: universités, centres de formations initiales et continues non universitaires, groupes semi-institutionnels de réflexion d'enseignants. Cette hétérogénéité est l'une des richesses de notre Société que l'on retrouve aussi au colloque EMF 2012, ce qui nous réjouit.

Notre association se place volontairement à l'extérieur des institutions de formation et d'éducation, offrant un lieu ouvert d'échanges et de débats dans la perspective citoyenne du thème de EMF 2012. La SSRDM œuvre à faire connaître les résultats de la recherche en didactique des mathématiques, pensant que la large diffusion de ces connaissances dans le milieu éducatif est de nature à favoriser un débat éclairé sur le rôle social des mathématiques.

Ses statuts précisent en particulier que la SSRDM se propose de promouvoir, dans le cadre scientifique de ses travaux, des échanges entre, d'une part, les chercheurs et, d'autre part, les enseignants, auteurs et formateurs, ainsi que les responsables administratifs et politiques du domaine de l'enseignement des mathématiques à tous les degrés. C'est dans cet esprit que la SSRDM s'est associée à l'organisation d'EMF 2012 et ses membres présents au colloque se feront un plaisir de partager leurs idées avec vous.

Ruhal Floris

MESSAGE DU RESPONSABLE DU COMITÉ SCIENTIFIQUE DE EMF2012

En 2000, année mondiale des mathématiques, Bernard Cornu, alors président de la Commission Française pour l'Enseignement des Mathématiques (branche française de la CIEM) a été à l'initiative d'un colloque francophone intitulé *Enseignement Mathématique 2000* (EM2000) qui s'est tenu à Grenoble. Le dynamisme créé par cette première rencontre a conduit les organisateurs à créer une structure pérenne qui a pris le nom d'*Espace Mathématique Francophone* : l'EMF était né. Trois rencontres ont suivi celle de Grenoble : en 2003 à Tozeur, en 2006 à Sherbrooke, puis en 2009 à Dakar. La CFEM, que j'ai présidée de 2002 à 2006, a toujours tenu un rôle moteur dans cette entreprise, mais c'est bien à la création d'une réelle communauté d'échange et de travail que l'on doit le succès de ces différentes rencontres, riches de souvenirs inoubliables. Ainsi au-delà de ces moments forts, EMF a permis pendant 12 ans de nombreuses collaborations et la consolidation d'un réseau francophone riche de ses diversités.

Les colloques EMF, outre leur spécificité francophone, sont un lieu d'échange privilégié entre tous les intervenants préoccupés par les questions qui touchent à l'enseignement des mathématiques : mathématiciens, didacticiens des mathématiques, chercheurs, formateurs, enseignants de différents niveaux. Par ailleurs, l'EMF a toujours privilégié la participation de jeunes chercheurs mais aussi de jeunes enseignants, en particulier à travers le projet « jeunes », qui me tient personnellement à cœur et que nous avons tenté d'élargir encore lors de cette rencontre.

En proposant la candidature de Genève pour l'organisation d'EMF2012, je perpétuais une tradition d'alternance sud-nord dans l'organisation des colloques EMF. Le thème de EMF2012 « Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21^{e} siècle. », clin d'œil pour le 300^{e} anniversaire de la naissance d'un genevois célèbre, est dans la tradition d'EMF ancré dans le contexte local mais aussi une ligne de force pour impulser notre travail de réflexion. Les 10 groupes de travail constituent le noyau dur de notre rencontre et permettront grâce au travail d'élaboration et d'échanges mené depuis plusieurs mois de mener des réflexions de fond sur 10 heures réparties en 6 plages. Les projets spéciaux sont l'occasion d'aborder des thématiques plus novatrices. Nous aurons l'honneur de pouvoir entendre deux conférences par des personnalités locales sur des thèmes très différents. Les deux temps de table ronde permettront d'aborder certains des aspects du thème général du colloque dans la diversité francophone. Enfin, en lien avec le projet spécial sur la vulgarisation, une exposition « Les jeux sont faits – Hasard et probabilités » est organisée au musée d'Histoire des Sciences.

Je tiens ici à remercier toutes celles et tous ceux qui ont permis que cette rencontre ait lieu, non seulement les institutions dont les noms figurent au dos de cette brochure, mais les membres des comités scientifique et d'organisation, les coordonnateurs des groupes de travail et des projets spéciaux, les conférenciers, les organisatrices et les membres de la table ronde et *last but not least*, Sylvia, Audrey, Céline, Alexandre, Lone, Sonia… et Isa qui nous a fait une si belle horloge rouge pétant.

Je vous souhaite à toutes et tous un très beau colloque... « Tout de bon ! » Comme on dit à Genève.

Jean-Luc Dorier

Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle.

espace mathématique francophone
Genève - 3 au 7 février 2012

emf 2012

Le colloque a été réalisé avec le soutien de :

FACULTÉ DE PSYCHOLOGIE
ET DES SCIENCES DE L'ÉDUCATION
Section des sciences de l'éducation

FACULTÉ DES SCIENCES
Section de mathématiques

UNIVERSITÉ DE GENÈVE

DiMaGe
Equipe de Didactique des Mathématiques à Genève

ROUSSEAU 2012

INSTITUT UNIVERSITAIRE
DE FORMATION DES ENSEIGNANTS

SSRDM
Société Suisse pour la Recherche en Didactique des Mathématiques

International Commission on Mathematical Instruction

Ens Math

REPUBLIQUE ET CANTON DE GENEVE
Département de l'instruction publique
POST TENEBRAS LUX

CONFÉRENCE INTERCANTONALE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE DE LA SUISSE ROMANDE ET DU TESSIN

irdp
Institut de recherche et de documentation pédagogique

aebli näf stiftung
FÖRDERUNG DER LEHRERBILDUNG IN DER SCHWEIZ

FNSNF
FONDS NATIONAL SUISSE DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

AGENCE UNIVERSITAIRE DE LA FRANCOPHONIE

SMS
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUES SUISSE

HEP | PH FR
Haute Ecole pédagogique Fribourg
Pädagogische Hochschule Freiburg

sc | nat
Swiss Academy of Sciences
Akademie der Naturwissenschaften
Accademia di scienze naturali
Académie des sciences naturelles

SSRE SGBF
Société Suisse pour la recherche en éducation
Schweizerische Gesellschaft für Bildungsforschung
Società svizzera di ricerca in educazione

Schweizerische Akademie der Geistes- und Sozialwissenschaften
Académie suisse des sciences humaines et sociales
Accademia svizzera di scienze umane e sociali
Academia svizra da scienzas moralas e socialas
Swiss Academy of Humanities and Social Sciences

HEP BEJUNE

Haute école pédagogique du Valais
Pädagogische Hochschule Wallis

hep haute école pédagogique vaud

Nous tenons également à remercier tous les organismes et institutions de divers pays qui, en soutenant des participants, leur ont permis de prendre part au colloque

« L'ENFANT AU CENTRE ! »
LA FORTUNE CONFLICTUELLE D'UNE VISEE INSPIREE DE ROUSSEAU 1762-2012[1]

Charles MAGNIN[*]

Dans les pages initiales d'*Emile* ou *De l'Education*, paru à Genève en 1762 en même temps que le Contrat Social - les deux ouvrages ayant aussitôt été brûlés en place publique sur ordre des autorités genevoises - Rousseau écrit : « Commencez par observer vos *élèves* [C'est nous qui soulignons] car très assurément vous ne les connaissez point ». 150 ans plus tard, en 1912, Edouard Claparède inscrit cette phrase comme au fronton de l'article-programme intitulé *Un Institut des sciences de l'éducation et les besoins auxquels il répond* où il définit les ambitions et le fonctionnement de l'Institut Jean-Jacques Rousseau, l'ancêtre de l'actuelle Faculté de psychologie et des sciences de l'éducation de l'Université de Genève. Dans ce texte, Claparède souligne qu'il place la nouvelle institution sous l'égide du Citoyen de Genève car il voit dans l'*Emile* « la révolution que l'on a justement comparée à celle de Copernic, et qui consiste à regarder l'enfant comme le centre autour duquel doivent graviter les procédés et les programmes éducatifs, tandis que l'on considère habituellement ces procédés ou ces programmes comme un Absolu autour duquel l'enfant tournera tant bien que mal, mais au sujet duquel il n'a absolument rien à dire. » (pp. 9–10). Claparède en tire la devise de son Institut : *Discat a puero magister* (Que le maître apprenne de l'élève), qu'il illustre à travers une image renversant les rapports entre l'adulte et l'enfant figurant Rousseau et son père sur la médaille célébrant, en 1912 toujours, le bicentenaire de la naissance du Citoyen de Genève. Depuis, la polémique relative à cette visée n'a plus cessé. Cette conférence en brossera à grands traits l'histoire - et les enjeux - pour la recherche en éducation, les enseignants, les parents, les politicien-ne-s,… les élèves, ou plus généralement l'école et la société, sur deux siècles et demi, à l'échelle genevoise et romande.

[1] Un enregistrement audio de la conférence est en ligne sur le site : http://www.emf2012.unige.ch/

[*] Laboratoire d'histoire sociale et culturelle de l'éducation http://lhisce.unige.ch/ – Faculté de Psychologie et des sciences de l'éducation – Université de Genève – Suisse – charles.magnin@unige.ch

© Magnin C. (2012) « L'enfant au centre ! » – La fortune conflictuelle d'une visée inspirée de Rousseau – 1762-2012. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (Plénières, p. 1). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE DES PARTICULES PANORAMA D'UNE IDYLLE SCIENTIFIQUE[1]

Marcos MARIÑO[*]

Résumé – Depuis sa naissance, la physique quantique a établi une relation privilégiée avec les mathématiques modernes : plusieurs concepts qui sont apparus dans l'étude des particules élémentaires ont été redécouverts par les mathématiciens, alors que, réciproquement, des idées mathématiques abstraites se sont révélées essentielles pour la compréhension du monde microscopique. Cette idylle scientifique déjà ancienne entre les deux disciplines est aujourd'hui d'une importance capitale. Ainsi, d'un côté, les ingrédients mathématiques de la physique des particules seront mis à l'épreuve dans le nouvel accélérateur du CERN. D'un autre côté, la théorie des cordes, qui est née comme une théorie unifiée des particules élémentaires, a eu impact sans précédent dans les mathématiques pures. Dans cette contribution nous proposons un parcours de ces différents développements.

Mots-clefs : Physique des particules, mathématiques, Mécanique Quantique, théorie de cordes

Abstract – Since its inception, Quantum Physics has established an important relationship to modern mathematics. Many mathematical constructions, which appeared in the study of elementary particles, have been rediscovered by mathematicians, and conversely, abstract mathematical ideas have been crucial for the understanding of the microscopic world. This scientific «love affair » is still very relevant today: on the one hand, the mathematical ingredients of particle physics will be tested in detail in the new accelerator at CERN. On the other hand, string theory, which is born as a unified theory of elementary particles, has had a remarkable impact on pure mathematics. In this contribution we propose an overview of these developments.

Keywords: Particle Physics, Mathematics, Quantum Mechanics, String Theory

I. PHYSIQUE ET MATHEMATIQUES

Aujourd'hui, il nous semble naturel de penser que la physique et les mathématiques doivent être liées de façon intime, mais cela n'a pas été toujours le cas. La physique d'Aristote et des Grecs anciens n'avait pas un lien fondamental avec les mathématiques. Cette relation commence à s'établir avec Archimède[2], mais bien sûr c'est Galilée qui fera de cette relation la base de sa révolution scientifique. Cette révolution est aussi une révolution contre la tradition, et Galilée va opposer le livre de l'Univers aux livres d'Aristote. On pourrait dire que le texte fondateur de la physique moderne est ce fameux paragraphe de *Il Saggiatore*[3] :

> La philosophie est écrite dans cet immense livre qui se tient toujours ouvert devant nos yeux, je veux dire l'Univers, mais on ne peut le comprendre si l'on ne s'applique d'abord à en comprendre la langue et à connaître les caractères avec lesquels il est écrit. Il est écrit dans la langue mathématique, et ses caractères sont des triangles, des cercles et autres figures géométriques, sans le moyen desquels il est humainement impossible d'en comprendre un mot. Sans eux, c'est une errance dans une labyrinthe obscur.

L'approche méthodologique de Galilée s'est revélée d'une efficacité extraordinaire et, comme le remarque le physicien Eugene Wigner[4] dans un article fameux écrit en 1960, même « déraisonnable » :

> Le fait que le langage mathématique soit approprié pour la formulation des lois de la physique est un miracle que nous ne comprenons pas, et que nous ne méritons pas.

---

[1] Une vidéo de la conférence est en ligne sur le site : http://www.emf2012.unige.ch/

[*] Faculté des Sciences – Université de Genève – Suisse – marcos.marino@unige.ch

[2] Voir Russo, L. (2004), *The forgotten revolution*, Springer-Verlag.

[3] Livre publié à Rome par Galileo Galilei en octobre 1623, comme réponse à la polémique créée par le traité sur les comètes écrit en 1618 par le jésuite mathématicien Orazio Grassi, de l'Université pontificale grégorienne.

[4] Wigner E. (1960), « The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences », Commun. Of Pure and Applied Mathematics, vol. XIII, pp. 1-14.

© Mariño M. (2012) Mathématiques et physique des particules : panorama d'une idylle scientifique. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (Plénières, pp. 2–6). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

En effet, pourquoi une structure développée par le cerveau humain –la mathématique– serait-elle appropriée pour décrire le monde physique ? Dans d'autres domaines de la science, ces vertues miraculeuses du langage mathématique sont plus controversées, et le mathématicien Israel Gelfand a même parlé de la déraisonnable inefficacité des mathématiques dans les sciences de la vie (sans parler de ce que l'on appelle les « sciences économiques »...). On pourrait même avancer l'hypothèse que, plus complexe est un système naturel, moins sophistiquée peut être la mathématique qui le décrit. En tout cas, c'est un fait historique que la physique des systèmes fondamentaux a utilisé des outils mathématiques des plus en plus sophistiqués. Tous les exemples que donne Wigner de la « déraisonnable efficacité » des mathématiques viennent en fait de la physique fondamentale (Mouvement des corps célestes, Mécanique Quantique, Physique Atomique …).

Quels types de relations la physique peut-elle entretenir avec la mathématique ? En schématisant un peu, on pourrait distinguer trois types de relations possibles :

1) Relation simultanée : les outils mathématiques sont développés en même temps que les problèmes physiques (et quelquefois par la même personne). L'exemple le plus connu de ce type de relation est peut-être l'invention du calcul infinitésimal par Newton.

2) Avance des mathématiques sur la physique : les physiciens utilisent des outils déjà développés par les mathématiciens. Un bon exemple est le calcul tensoriel, inventé par Tulio Levi-Civita et utilisé par Einstein pour construire la Relativité générale.

3) Avance de la physique sur les mathématiques : les physiciens développent des outils mathématiques et/ou anticipent des résultats qui ne seront prouvés mathématiquement que plus tard. Un exemple récent est la découverte en 1990, par le théoricien des cordes Edward Witten, d'une connexion profonde entre les systèmes intégrables et la géométrie algébrique des surfaces de Riemann, qui ne fut prouvée que plus tard par Maxim Kontsevich.

On pourrait dire que, historiquement, et jusqu'au XIX$^{\text{ème}}$ siècle, la simultanéité était la règle, tandis que pendant les XIX$^{\text{ème}}$ et XX$^{\text{ème}}$ siècles, les mathématiques sont en avance, et les physiciens n'ont qu'à trouver la bonne référence.

II. PHYSIQUE DES PARTICULES

Le but de la physique des particules est d'isoler les ingrédients fondamentaux de la matière et de décrire leurs interactions. Ce programme est déjà implicite chez Galilée : il faut trouver l'alphabet du livre de l'Univers, que l'on exprime avec des signes mathématiques, mais aussi les règles pour les *combiner*. Il s'agit donc d'un programme delibérement *réductionniste* qui a eu un énorme succès.

La physique de particules modernes naît avec la Mécanique Quantique, dans les années 1900-1925. Un aspect très intéressant de cette théorie, du point de vue de ce qui nous occupe, est qu'elle exige une formulation mathématique plus sophistiquée et abstraite que celle que l'on trouve dans la Mécanique Classique. Comment décrit-on une particule ponctuelle dans la physique classique ? On donne tout simplement sa position q et son impulsion p, soit deux nombres pour chaque dimension. De façon plus abstraite, on dit qu'un état d'une particule classique est un *point dans l'espace de phases*. Ces points évoluent dans les temps, gouvernés par des équations différentielles, dont il y a plusieurs formulations possibles (Newton, Lagrange, Hamilton, ...). Donc, la mathématique des particules élémentaires dans la Mécanique Classique est essentiellement l'analyse et l'étude de ces équations dans l'espace de phases.

Le formalisme moderne de la Mécanique Quantique naît en 1925, quand Werner Heisenberg montre que, en réalité, la position et l'impulsion doivent être promues à des *matrices*. Les valeurs expérimentales de ces quantités sont des nombres, qu'il faut identifier avec les *valeurs propres* de ces matrices, associées à des vecteurs propres. Donc, en Mécanique Quantique, l'état d'une particule sera un *vecteur* dans un espace de Hilbert (car les matrices qui apparaissent peuvent être de taille infinie) et les quantités physiques sont des opérateurs dans cet espace de Hilbert. C'est un vrai saut dans l'abstraction ! La structure linéaire de cet espace implique que les combinaisons linéaires des états sont aussi des états possibles –ce qui éventuellement donne des « paradoxes » comme celui du chat de Schrödinger. Donc la Mécanique Quantique introduit toute une mathématique très différente de celle qui caractérise la Mécanique Classique (les espaces de Hilbert, la théorie des opérateurs, l'analyse fonctionnelle, ...) qui était déjà assez développée au début du XX$^{\text{ème}}$ siècle.

L'évolution de la physique des particules dans le XX$^{\text{ème}}$ siècle va montrer de façon de plus en plus évidente le pouvoir « déraisonnable » et presque magique des mathématiques pour dévoiler le monde, mais aussi le pouvoir de la physique pour anticiper certains développements en mathématiques. Un exemple assez extraordinaire de ce deux phénomènes est l'équation de Dirac. En 1928, Paul Adrien Maurice Dirac formule une équation pour décrire l'état quantique d'un électron – la seule particule vraiment élémentaire connue à l'époque. Cette équation marque un tournant dans l'idylle entre mathématiques et physique, pour plusieurs raisons.

1) Premièrement, Dirac obtient cette équation *à partir de contraintes purement formelles*, essentiellement : elle doit être compatible avec la Relativité restreinte d'Einstein et avec la Mécanique Quantique.

2) Deuxièmement, l'équation obtenue de cette façon n'est pas seulement la bonne description de l'électron : elle prédit l'existence du positron (une particule élementaire avec la même masse que l'électron mais avec charge électrique positive), et plus généralement de l'anti-matière. Cette prédiction fut vérifiée spectaculairement peu après, en 1932, par Carl Anderson, qui trouva des positrons dans les rayons cosmiques.

3) Finalement, pour écrire cette équation, Dirac doit introduire un nouveal espace – l'espace des spineurs– et un nouvel opérateur sur cet espace *–l'opérateur de Dirac*. Celui-ci peut être regardé comme la « racine carrée » du Laplacien qui apparaît dans l'équation de Schrödinger. De la même façon, l'espace des spineurs peut être regardé comme une « racine carrée » de l'espace vectoriel tridimensionnel ordinaire, et donc plus fondamental.

L'opérateur de Dirac fut redécouvert par Michael Atiyah et Iz Singer dans les années 1960, dans leurs études fondamentales sur la connexion entre opérateurs et topologie (théorie de l'indice). Il est aujourd'hui l'ingrédient basique de cette théorie. En parlant de cette « redécouverte », Atiyah écrivait en 1988[5] :

> Si l'on avait eu une meilleure éducation en physique, ou si l'on avait eu le contact avec les physiciens qui est plus commun aujourd'hui, on aurait obtenu ces résultats bien avant.

L'équation de Dirac eût un impact épistémologique considérable. Elle montrait aux théoriciens qu'il était possible de percer la réalité physique avec une argumentation « spéculative » et une mathématique sophistiquée. Avec la Relativité générale, elle deviendra l'exemple-type d'une stratégie de recherche en physique théorique basée sur le « spéculatif »,

[5] Atiyah M. (1998) The Dirac equation and geometry p. 116, in A. Pais, M. Jacob, D. Olive and M. Atiyah, *Paul Dirac. The man and his work*, Cambridge University Press.

la consistance formelle, et la beauté mathématique. Cette stratégie se trouve incarnée, aujourd'hui, dans la théorie des cordes.

Dans le développement de la physique de particules au XX$^{\text{ème}}$ siècle, d'autres parties des mathématiques vont jouer un rôle très important. Premièrement, les symétries qui organisent le monde des particules auront leur expression mathématique dans la *théorie des groupes*. Deuxièmement, on découvrira dans les années 1970 que toutes les interactions entre les particules élémentaires, sauf la gravité, sont décrites par des *théories de Yang-Mills*. Ces théories font intervenir pour la première fois, dans la physique des particules quantiques, des ingrédients *géométriques* et *topologiques* (les espaces fibrés).

Les efforts de cinquante ans de théorie et expériences dans la physique des particules ont culminé dans la formulation de ce que l'on appelle le *modèle standard* des particules et des forces. Pourtant, la culmination des interactions entre mathématiques et physique des particules ne va pas se produire dans le cadre du modèle standard, mais au sein d'une théorie dont le but est d'aller *au-delà* de ce modèle, et en particulier d'incorporer la force de la gravité : la *théorie des cordes*.

III. THEORIE DES CORDES

L'hypothèse fondamentale de la théorie des cordes est que les différentes particules élémentaires sont des vibrations d'un objet étendu unidimensionnel et unique, ou *corde*. Une conséquence surprenante de cette théorie est la présence de dimensions supplémentaires : le nombre de dimensions spatiales doit être neuf, au lieu de trois. Les six dimensions supplémentaires sont *compactifiées* dans un espace de taille minuscule. Les propriétés *géométriques* des ces espaces se manifestent directement dans les propriétés *physiques* des particules.

La théorie des cordes reste un sujet controversé du point de vue physique. Comme elle n'a pas encore permis de faire des prédictions précises pour la physique des particules ordinaires, on l'a accusée de ne « pas être même fausse » (« *not even wrong* »). Par contre, elle a eu un impact énorme dans les mathématiques (mais aussi dans d'autres domaines, comme la physique des trous noirs et même la physique de la matière condensée). Une raison de cet impact mathématique est que la théorie des cordes fait intervenir de façon essentielle la *géométrie des surfaces de Riemann*, un domaine assez sophistiqué des mathématiques modernes. En particulier, la théorie des cordes donne des idées profondes sur les différentes configurations géométriques des surfaces de Riemann à l'intérieur des espaces qui forment les dimensions supplémentaires, appelés *espaces de Calabi-Yau*.

De plus, la théorie de cordes « prédit » des résultats mathématiques surprenants sur ces espaces. Par exemple, deux espaces de Calabi-Yau a priori très différents peuvent avoir des propriétés géométriques intimement liées. Cette découverte, appelée *symétrie miroir*, est une contribution fondamentale de la théorie des cordes à la géométrie moderne.

Une des applications les plus frappantes de la symétrie miroir et de la théorie des cordes concerne ce que l'on appelle la *géométrie énumérative.* Cette application a commencé en 1990, quand Philip Candelas, Xenia de la Ossa et leur groupe de recherche ont utilisé la symétrie miroir pour compter de façon précise les configurations possibles des surfaces de Riemann à l'intérieur des espaces de Calabi-Yau. Leurs résultats, obtenus avec les techniques de la théorie des cordes, allaient bien au-delà de ce que les experts en géométrie étaient capables de faire à l'époque. On sait aujourd'hui que ce résultat est mathématiquement correct, mais il a fallu l'effort de plusieurs mathématiciens (y compris deux médailles Fields!) pour en trouver une preuve rigoureuse.

La symétrie miroir n'est qu'un exemple d'une nouvelle idylle entre mathématiques et physique : les théoriciens de cordes font des « prédictions », et les mathématiciens jouent le rôle d'« expérimentateurs » qui vérifient ces prédictions avec leur propres techniques[6]. Inversement, les vérifications mathématiques confirment les idées physiques que les théoriciens des cordes ont utilisées pour développer leur théorie. On ne peut qu'espérer que les développements à venir en physique des particules et en mathématiques vont renforcer cette belle relation.

REFERENCES

Bartocci C., Odifreddi P. (Eds.) (2011) *La Matematica*. Vol. 4, Ed. Einaudi.

Pais A., Jacob M., Olive D., Atiyah, M. (1998) *Paul Dirac. The man and his work*. Cambridge: Cambridge University Press.

Russo L. (2004) *The forgotten revolution*. Springer-Verlag.

Wigner E. (1960) The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences, *Commun. Of Pure and Applied Mathematics*. Vol. XIII, 1-14.

6 Pour un parcours plus technique et détaillé de cette relation, voir Mariño M. (2011), ? La teoria della stringhe ? In C. Bartocci and P. Odifreddi (Eds.) *La Matematica*. vol. 4, Ed. Einaudi.

ÉVOLUTIONS CURRICULAIRES RÉCENTES DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES DE L'ESPACE FRANCOPHONE

Tables rondes EMF2012

Michèle ARTIGUE[*], Nadine BEDNARZ[**]

> *Comme avant d'élever un grand édifice l'architecte observe et sonde le sol, pour voir s'il en peut soutenir le poids, le sage instituteur ne commence pas par rédiger de bonnes lois en elles-mêmes, mais il examine auparavant si le peuple auquel il les destine est propre à les supporter* (Rousseau, Du Contrat Social, L. II, chap..8, Du peuple)

I. INTRODUCTION

La tâche qui nous a été confiée par le comité scientifique de EMF 2012, au moment de la mise en place de son programme scientifique, fut celle d'étudier les évolutions curriculaires récentes dans l'espace mathématique francophone, en ayant à l'esprit la thématique spécifique retenue pour ce colloque : « Enseignement des mathématiques et contrat social, enjeux et défis pour le 21e siècle ». Le *contrat social* de Rousseau forme donc l'arrière plan de la thématique retenue dans ce colloque et, en conséquence, le filtre à travers lequel s'est engagée dès le début notre réflexion sur les évolutions curriculaires récentes en enseignement des mathématiques. Avant de préciser comment celui-ci a pu orienter notre approche, il nous semble intéressant de revenir minimalement sur ce concept de contrat social.

L'ambition de Jean-Jacques Rousseau, dans son célèbre ouvrage fondateur paru en 1762 « Du Contrat Social ou Principes du Droit Politique », est énoncée d'emblée dès le livre I

> Je veux chercher si, dans l'ordre civil, il peut y avoir quelque règle d'administration légitime et sûre, en prenant les hommes tels qu'ils sont, et les lois telles qu'elles peuvent être. Je tâcherai d'allier toujours, dans cette recherche, ce que le droit permet avec ce que l'intérêt prescrit, afin que la justice et l'utilité ne se trouvent point divisées (…..) Si je ne considérais que la force et l'effet qui en dérive, je dirais « Tant qu'un peuple est contraint d'obéir et qu'il obéit, il fait bien ; sitôt qu'il peut secouer le joug, et qu'il le secoue, il fait encore mieux : car recouvrant sa liberté par le même droit qui la lui a ravie, ou il est fondé à la reprendre, ou on ne l'était point à lui ôter ». (..) l'ordre social est un droit sacré qui sert de base à tous les autres. Cependant ce droit ne vient pas de la nature ; il est donc fondé sur des conventions. Il s'agit de savoir quelles sont ces conventions. (Livre I, chapitre 1, Sujet de ce premier livre)

Rousseau se présente ainsi comme un penseur réaliste dans cette recherche de « règle légitime » dans la mesure où il « prend les hommes tels qu'ils sont » en même temps qu'il promeut un changement de la nature même de l'homme considéré comme citoyen, à travers l'existence d'un « pacte social » par lequel chacun renonce en quelque sorte à sa « liberté naturelle » au profit d'une « liberté sociale » :

> Celui qui ose entreprendre d'instituer un peuple doit se sentir en état de changer, pour ainsi dire la nature humaine ; de transformer chaque individu, qui par lui-même est un tout parfait et solitaire, en partie d'un plus grand tout dont cet individu reçoive en quelque sorte sa vie et son être ; d'altérer la constitution de l'homme pour la renforcer ; de substituer une existence partielle et morale à l'existence physique et indépendante que nous avons tous reçue de la nature. (Contrat social, livre II, chap. VII, Du législateur ».

Un tel pacte au service de l'intérêt général trouve ses fondements dans une affirmation de la souveraineté du peuple, une souveraineté qui n'est elle-même possible que si chacun accepte de renoncer à sa liberté de nature au profit de la liberté civile que peut lui assurer la société.

[*] Université Paris Diderot, artigue@math.jussieu.fr
[**] Université du Québec à Montréal, descamps-bednarz.nadine@uqam.ca

© Artigue M., Bednarz N. (2012) Évolutions curriculaires récentes dans l'enseignement des mathématiques de l'espace francophone. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (Plénières, pp. 7-23). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

> Ce qu'il y a de nouveau chez Rousseau, c'est l'affirmation que la souveraineté doit toujours résider dans le peuple et que celui-ci ne peut pas en confier l'exercice aux gouvernants quels qu'ils soient. La souveraineté étant inaliénable, il ne peut y avoir d'autre souverain que le peuple et par conséquent en droit, le seul état légitime est celui où le peuple exerce lui-même la souveraineté, c'est-à-dire l'État républicain. (Médina, 1986, p. 9)

Avec Rousseau, la théorie du Contrat Social s'oriente donc délibérément dans la voie de la démocratie, même si le modèle qu'il défend n'a rien à voir avec ce qu'on connaît de nos jours comme démocratie parlementaire.

Comment une telle réflexion, qui peut paraître a priori assez éloignée de notre propos, peut-elle servir de filtre à un questionnement portant sur les évolutions curriculaires en enseignement des mathématiques dans l'espace mathématique francophone? Dans l'ouvrage de Rousseau sur le Contrat Social, considéré par plusieurs comme l'ouvrage fondateur de la philosophie politique, il n'est question ni d'éducation, ni d'école[1]. On ne peut toutefois nier que dans toutes les sociétés où existe une école constituée, cette école repose sur un certain contrat social. En ce sens, l'hypothèse que les dispositifs curriculaires puissent être marqués par le contrat social qui lie l'école à la société est légitime, ainsi que l'hypothèse que les évolutions de ces dispositifs curriculaires soient en quelque sorte des indicateurs des évolutions de ce contrat. On peut dès lors, par exemple, se demander ce qu'exprime tel ou tel choix curriculaire, fait à un moment donné, de ce contrat social. Quels éléments de ce contrat sont affectés par telle ou telle évolution et comment ? On peut encore s'intéresser à la souveraineté qu'exercent les différents acteurs dans ces développements curriculaires, pour reprendre ici un concept cher à Rousseau, ou encore s'intéresser aux évolutions dans cette souveraineté.

Transposée à l'école et au curriculum, cet « arrière-plan » du contrat social nous amène ainsi à regarder les dispositifs curriculaires et leur évolution comme des indicateurs des évolutions d'un contrat social, rejoignant en cela des questions de fond : quelle école est au cœur des choix curriculaires ? Quels changements promeuvent les évolutions ? Quel degré de souveraineté pour les acteurs ?

Comment dès lors approcher les évolutions curriculaires en ayant en tête ce filtre du contrat social ? Les lois qui régissent l'école, l'organisation curriculaire telle que définie par les textes officiels, sont bien sûr les composantes explicites de ce contrat social. Mais il nous semble raisonnable de considérer que ce contrat social qui fixe les rapports entre l'école et la nation, ou une sous-division administrative de celle-ci comme l'est une région, qui fixe les pouvoirs et obligations des différentes institutions concourant à la tâche éducative, les droits et les devoirs des différents acteurs, les attentes respectives, comporte aussi, à l'analogue du contrat didactique, une dimension plus implicite.

Etudier les évolutions curriculaires dans une perspective de contrat social suppose donc de se livrer à une enquête qui essaie de prendre en charge le contrat social dans ses caractéristiques explicites et implicites, et qui aille pour cela au-delà des textes et argumentations officiels pour reconstruire des dynamiques complexes auxquelles contribuent, de façon plus ou moins visible, une diversité d'acteurs et de communautés. Nous précisons dans la partie suivante comment, dans le cas qui nous occupe, cette enquête a été menée et quels outils l'ont soutenue.

[1] C'est davantage dans l'Émile, publié un mois après le Contrat Social, que Rousseau s'intéresse à l'éducation « pour former un homme bon et juste dans une société qui ne l'est pas » (Émile, L.I.)

II. NOTRE DEMARCHE

1. Un travail en plusieurs étapes

Ce travail s'est étalé sur deux ans et a été réalisé en plusieurs étapes. Nous nous sommes interrogés tout d'abord, comme nous venons de le voir précédemment, sur la façon d'aborder ces évolutions curriculaires pour mettre en évidence ce que leur étude pouvait apporter à la compréhension des contrats sociaux qui, dans les pays de l'espace mathématique francophone, lient l'école et la société, et ce de manière à pouvoir identifier quelques uns des enjeux et défis qui s'y posent. Cette réflexion sur les évolutions curriculaires n'étant, par ailleurs, pas tout à fait nouvelle même si l'angle sous lequel elle est abordée l'était, nous avons ressenti le besoin de retourner aux précédents colloques EMF de manière à en dégager ce que nous apportaient déjà leurs travaux, et ce depuis le colloque EM2000 de Grenoble. Cette synthèse nous a conduit à mettre en évidence un premier ensemble de questions qu'il nous a semblé nécessaire d'approfondir, mais aussi d'élargir à la lumière des débats contemporains sur les évolutions curriculaires. Six études de cas ont alors été organisées, sur la base d'une grille commune élaborée au préalable, en impliquant si possible dans chacune d'elles de jeunes chercheurs (voir pour ces études de cas, dans ces actes, les textes de Artigue, Rinaldi pour la France ; Baeten, Schneider pour la Belgique ; Smida, Ben Nejma, Khalloufi-Mouha pour la Tunisie ; Traoré pour le Burkina ; Coray pour la Suisse ; Bednarz, Maheux, Proulx pour le Québec). Chacune de ces études de cas constitue, pour reprendre les termes introduits lors de EMF2009 par Artigue et al. (2010), une étude verticale des évolutions curriculaires récentes dans un contexte donné. En essayant par la suite de tirer des leçons de ces différentes études pour l'organisation des tables rondes, notre idée était, dans une étude cette fois horizontale, de faire interagir ces différentes études de cas autour de thématiques porteuses. Nous revenons maintenant sur chacune de ces étapes.

2. Approcher les évolutions curriculaires récentes en enseignement des mathématiques : un questionnement de départ ayant conduit à faire certains choix.

En didactique des mathématiques, les études curriculaires se centrent souvent sur l'étude des programmes et documents officiels associés, ainsi que sur celle des manuels considérés comme des éléments clefs du processus de transposition didactique, en s'appuyant souvent pour cela, dans une perspective institutionnelle, sur l'analyse des contenus et des tâches. S'agissant d'identifier dans les choix curriculaires et dans les évolutions de ces choix des indicateurs du contrat social entre l'école et la société, il nous a semblé nécessaire d'adopter une perspective plus large, qui nous aide à prendre en compte des conditions et contraintes se situant aux niveaux les plus élevés de la hiérarchie des niveaux de co-détermination développée dans la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 2002), ou encore à rendre compte de la complexité d'un tel développement curriculaire sous l'angle des communautés de pratiques qui y contribuent de façon plus ou moins visible (Wenger, 1995). Ceci nous a conduits à nous intéresser non pas aux seuls produits curriculaires, les programmes d'études et documents officiels associés qui en résultent, mais aussi aux processus qui les engendrent. Notre travail a donc porté sur ce que nous allons désigner par le « design curriculaire », en englobant dans ce design, la conception, la mise en œuvre, l'accompagnement et la régulation des curricula. Nous faisions alors l'hypothèse que c'est autant à ce niveau des processus qu'à celui des productions curriculaires elles-mêmes que nous serions capables d'identifier des indicateurs du contrat social de l'école et de son évolution éventuelle. Nous faisions aussi l'hypothèse qu'un tel élargissement du regard était nécessaire pour comprendre les évolutions curriculaires mathématiques, en nous donnant les moyens de mettre en évidence leur dépendance d'évolutions plus globales mais aussi leurs spécificités.

III. QUEL ECLAIRAGE SUR LES EVOLUTIONS CURRICULAIRES AMENE PAR LES RENCONTRES DE L'ESPACE MATHEMATIQUE FRANCOPHONE ?

Notre propos n'est pas ici de faire un retour systématique sur chacune des rencontres EMF, en suivant pour cela l'ordre de leur apparition, mais bien de situer et mettre en évidence leur apport au regard des questions qui nous préoccupent ici.

1. Bref retour sur les colloques EMF

Quatre aspects ressortent de notre analyse de différentes contributions à ces colloques, qui viennent éclairer de près ou de loin les questions curriculaires en enseignement des mathématiques : 1) les finalités associées à l'enseignement des mathématiques au fil des réformes (pourquoi enseigner les mathématiques et pour qui ?) ; 2) l'ancrage culturel et social de ces évolutions curriculaires ; 3) les contenus des curricula et leur évolution ; 4) le poids des influences externes sur ces évolutions curriculaires.

Les finalités associées à l'enseignement des mathématiques

C'est l'angle retenu par les trois conférenciers de EM2000 pour aborder l'analyse de l'évolution des programmes. La mise en perspective historique de cette évolution en France (Gispert 2002), au Québec (Bednarz 2002) et en Belgique (Noël 2002) au XXème siècle, vient en effet éclairer la dualité des fonctions associées à cet enseignement des mathématiques au fil du temps : une finalité « pratique » associée aux mathématiques et à leur enseignement qui va se traduire dans les programmes par certains choix au plan des contenus mais aussi des approches, celui par exemple d'un apprentissage arithmétique centré sur les opérations et les habiletés de calcul ou encore d'une géométrie appliquée avant tout associée au mesurage (Bednarz 2002), d'un enseignement de la géométrie ancré dans les applications « rompant avec Euclide (…) (qui) propose de fonder la géométrie sur la notion de déplacement, instrument fondamental de la démonstration » (Gispert 2002, en référence à la réforme de 1902, p.163) ; une finalité « culturelle », formatrice, qui va là aussi se traduire par certains choix, comme le montre bien l'exemple de l'évolution de l'enseignement de la géométrie en France sur un siècle et demi :

> La fin du régime de la bifurcation scolaire au début des années 1860 provoque de nouveaux changements : pour les lycées qui voient réaffirmée leur fonction exclusive de formation générale, le retour à Euclide, « à l'admirable enchaînement de ses propositions dès les classes de quatrième et troisième » et une critique violente des programmes précédents qui « habituaient les élèves à se contenter de l'à peu près en matière géométrique. » (Ibid, p.162)

Ces analyses font ainsi apparaître, de façon fine, deux finalités associées à cet enseignement, constamment présentes au fil du temps, avec des poids respectifs différents, chacune occupant une place plus ou moins grande et prenant des couleurs différentes en lien avec les rôles et missions que les gouvernements successifs ont attribué à l'école. Ainsi la « réalité » dont on parle dans ces différents programmes ne recouvre pas toujours la même chose, des problèmes réels et vrais dans leurs données aux domaines scientifiques ou autres ayant recours aux mathématiques, la marge est énorme (voir à ce sujet Lajoie, Bednarz sous presse), des contenus pensés en liaison avec la physique, domaine d'application privilégié des mathématiques dans les programmes du secondaire en France en 1902 à son extension aux sciences biologiques et médicales ainsi qu'à l'économie et aux sciences humaines dans les réponses des années 1960, là aussi le paysage pour la formation des élites techniques et scientifiques recouvre des significations diverses, mettant bien en évidence que cette fonction « pratique » prend au fil du temps des significations fort différentes.

Enfin, ces analyses viennent éclairer les rapports qu'entretiennent ces deux finalités au fil du temps, dans certain cas mises en opposition, en tension. On le voit par exemple, dans ce qui précède, dans l'opposition entre une géométrie euclidienne associée à une fonction exclusive de formation générale et un enseignement de la géométrie ancré dans les applications. Dans d'autres cas au contraire, elles se situent davantage dans un rapport dialectique. À titre d'exemple, l'arithmétique sera vue, au début du XXème siècle, comme étant nécessaire pour son utilité pratique mais aussi pour sa fonction formatrice, cette dernière pouvant forcer la réflexion, le jugement, un rôle qui apparaît fortement lié à la manière d'approcher cet enseignement (Bednarz 2002). Une certaine dualité pratique/culturelle, formatrice se retrouve ici présente.

Ces finalités, mises en lien, dans les analyses, avec les ambitions affichées pour cette école, les réponses que donnent en quelque sorte les institutions à la question « pourquoi et pour qui enseigner les mathématiques », peuvent être interprétées déjà, si on les pousse plus loin, comme des indicateurs d'un certain contrat social liant l'école et la société :

- Une école et un enseignement des mathématiques au service d'une société telle qu'elle est, de son fonctionnement économique, de la préservation de ses structures sociales. Un tel contrat est bien visible dans les visées exprimées par le contenu du programme de mathématiques élaboré au début du XXème siècle au Québec, celles de « former un bon citoyen, un bon chrétien, capable d'apprécier la valeur de l'argent et d'en faire bon usage… » (Bednarz, 2002, p. 148), ou encore dans la visée explicite d'un enseignement secondaire dans le lycée, distinct de la filière primaire supérieur, qui

  > demeure le lieu d'enseignement de l'élite, même avec sa filière moderne (…) Pour l'élite du peuple, le petit pourcentage des enfants qui continuent des études au delà du primaire élémentaire, ce n'est pas non plus au lycée qu'ils vont, mais dans le primaire supérieur qui a une toute autre fonction que l'enseignement secondaire et répond à une orientation essentiellement pratique. (Gispert 2002, pp.159–160)

- Une école et un enseignement des mathématiques préparant des évolutions de cette société. On peut retrouver des indices d'un tel contrat par exemple dans les propos qui sous-tendent les réformes des années 60 dans différents pays, celui de « mathématiques pour tous » et de la volonté de démocratisation de l'accessibilité, conduisant à penser l'école et l'enseignement des mathématiques, non plus pour une élite, mais pour toute la population scolaire. On peut encore retrouver un tel contrat dans l'idée d'adaptation à une évolution de la société de plus en plus exigeante, présente dans le programme de 1993 au secondaire au Québec (Bednarz 2002)
- Une école se donnant des ambitions émancipatrices, visible notamment dans la volonté de modernisation de l'enseignement des mathématiques des années 60 et le mouvement de réforme dit des « mathématiques modernes » (Gispert 2002)

L'ancrage culturel et social des évolutions curriculaires

La conférence d'Hikma Smida donnée dans le cadre de EMF 2003 à Tozeur, portant sur la genèse de l'enseignement des mathématiques en Tunisie à travers les différentes réformes des programmes, poursuit la réflexion précédente, en mettant clairement en évidence les finalités successives associées à cet enseignement et qui sous-tendent les différentes réformes: par exemple édifier une nation moderne et ouverte sur le progrès dans la réforme de 1958, un enseignement des mathématiques en 1968 subissant l'influence du mouvement des maths modernes et participant d'une réforme qui se révélera la plus élististe de l'histoire de la Tunisie, une meilleure adéquation entre la formation et l'emploi en 1978 ; une égalité des chances au regard d'un enseignement de masse en 1993 (Smida 2003). On y perçoit bien également l'influence que ces finalités ont pu avoir sur les choix qui y ont été faits au plan des contenus. Mais elle éclaire surtout, avec la conférence de Ahmed Djebbar donnée en 2006 à Sherbrooke et portant sur les évolutions des réformes de l'enseignement des mathématiques dans quatre pays du Maghreb (Algérie, Maroc, Tunisie, Mauritanie), les dimensions sociologiques et culturelles qui ont conduit à mettre en place les différentes réformes dans ces pays (Djebbar 2007) ainsi que les moyens mis en place par l'institution pour supporter l'implantation de ces réformes (Smida 2003). Des similitudes traversent, comme le met bien en évidence Djebbar, l'histoire de ces différentes réformes pour les pays concernés. Nous reprenons ici deux d'entre elles : une influence de la colonisation qui se fait sentir bien après l'indépendance de ces pays, et qui va transparaître dans la manière même dont seront pensés, élaborés les premiers programmes d'études

> Une démarche globale qui consiste, le plus souvent, à adopter les innovations venues d'ailleurs, essentiellement de France, sans qu'elles aient fait l'objet, au préalable, d'une procédure d'expérimentation à petite échelle et d'éventuelles adaptations en fonction de particularités locales. (Djebbar 2007, p. 50)

Un autre élément de similitude a trait à la langue d'enseignement, ces réformes étant en effet marquées par l'arabisation de cet enseignement des mathématiques dans l'éducation de base, sur une période plus ou moins longue dans chacun des pays. Le problème du « bilinguisme » qui en résulte (l'enseignement des mathématiques continue par la suite de se faire en français) n'a :

> trouvé, dans aucun des pays, de solution réellement satisfaisante au niveau du long terme. La difficulté de sa résolution tient au fait que ses dimensions idéologique et culturelle masquent ses aspects « techniques » liés au degré de maîtrise des langues pour les élèves […] une proportion importante de chaque classe d'âge des écoles maghrébines ne maîtrise ni l'arabe classique ni le français. Ce qui pose le problème réel du discours mathématique délivré aux élèves. (Ibid, p. 50)

Ces quelques éléments viennent ainsi éclairer davantage le processus de développement de ces curricula, en les ancrant dans leur contexte social et culturel.

Contenus des curricula et évolution

Dans les conférences de Jean Dionne et Maggy Schneider, lors du colloque EMF2006, c'est une toute autre entrée qui est prise pour aborder l'analyse des évolutions curriculaires en enseignement des mathématiques, celle des contenus de ces curricula, mettant en évidence le rôle qu'y jouent les compétences (Schneider 2007) et l'idée d'une activité mathématique signifiante et authentique (Dionne 2007). Dans le premier cas, une analyse critique de l'évolution curriculaire en termes de compétences est proposée, montrant les dérives possibles de cette mouvance pédagogique à partir de quelques observations faites en Belgique. C'est ici l'usage abusif du concept de situation-problème qui est abordé en référence aux travaux des didacticiens, notamment de la théorie des situations didactiques, en montrant que cette notion de situation problème telle que définie dans ces curricula est aux antipodes de celle construite par Brousseau, et mettant clairement en évidence, à ce propos, les risques de « décatégorisation » auxquels elle risque de conduire.

Dans les deux cas abordés ici, les curricula en Belgique et au Québec, les questions étudiées à l'école sont fédérées désormais non plus par les savoirs mais par les compétences, compétences disciplinaires, compétences transversales qui traversent plusieurs disciplines, un fonctionnement, pour Schneider (2007), qui écrase les spécificités épistémologiques de ces disciplines. Cette entrée sur les compétences est par ailleurs replacée dans son contexte, ces dernières relevant davantage par exemple pour le Québec, comme nous le montre bien Dionne (2007), d'une évolution plus que d'une révolution. Est ici amené pour nous un questionnement central qu'il serait sans doute intéressant de pousser : que recouvre cette idée de compétence dans chacun des curricula ? A t-elle toujours la même signification ? Recouvre t-elle la même réalité ? Quelle motivation a conduit à cette entrée par les compétences dans les curricula ? S'inscrit-elle en rupture ou dans la continuité des curricula précédents…Il nous semble y avoir là une histoire, au delà du terme retenu, propre à chacun des pays et qui inscrit de manière très différente la manière dont vont vivre ces curricula par la suite.

En lien avec ce dernier point, le texte de Dionne (2007) met notamment en évidence les facteurs qui constituent un support important aux réformes curriculaires en enseignement des mathématiques au Québec (1970, 1980, 1994), expliquant leur succès mais aussi les zones d'ombre susceptibles de jouer dans l'implantation de la réforme récente, celle de 2000 : une cohésion de la communauté en enseignement des mathématiques, une action qui s'est quelque peu effritée, une dispersion des forces en présence. Ce que Chevallard appellerait la noosphère du métier a ici un rôle important à jouer.

Est enfin soulevée, sur un tout autre plan, la question de la dimension culturelle des mathématiques telles qu'elles apparaissent dans les contenus de ces curricula, avec le texte notamment de Djebbar (2007) en référence aux pays du Maghreb :

> Malgré une histoire scientifique millénaire, aucune des réformes qui ont été évoquées précédemment ne contient une réflexion approfondie sur la place et le rôle de l'histoire des objets, des concepts et des outils qui interviennent dans les programmes de mathématiques (Op. cité, p.50)

Cette place faite à la dimension culturelle des mathématiques constitue un enjeu de taille dans les débats curriculaires contemporains, à la suite notamment des travaux menés dans le champ de l'ethnomathématique (Gerdes 1985, 1995, D'Ambrosio 1982, 2001, Powell & al. 1997).

Influences externes sur les évolutions curriculaires

Dans la rencontre EMF 2009 à Dakar, les questions curriculaires ne sont pas abordées de front, mais indirectement, par les questions de désaffection des mathématiques des élèves envers les mathématiques (Matheron & René de Cotret 2010) ou encore le rôle des évaluations internationales (Artigue & al. 2010). Dans le second cas, la synthèse de ce projet spécial, et les contributions de ce groupe, mettent bien en évidence l'impact des évaluations internationales à grande échelle sur les pays francophones et la manière dont l'enseignement des mathématiques dans cet espace est soumis à des pressions qui le dépassent. Dans le premier cas, le projet spécial vient en quelque sorte questionner les liens souvent affirmés entre désaffection des élèves pour les études mathématiques et les choix curriculaires qui sont faits : Les raisons pouvant expliquer de tels phénomènes seraient-elles à rattacher aux choix curriculaires, aux mathématiques à enseigner ? Quel lien peut-on établir entre le phénomène décrit et le curriculum en vigueur ? Sans entrer véritablement sur ces questions, les travaux menés par ce groupe ont au moins le mérite d'interroger certains choix curriculaires : en pointant par exemple, dans une étude réalisée par Establet en France, une des causes du désamour des élèves envers les mathématiques au lycée (élèves de 15 à 18 ans), certains indicateurs liés au fait qu'elles ne parlent pas du monde dans lequel on vit ; ou encore en identifiant des pistes d'enseignement innovantes (tels le « inquiry based teaching ») permettant de faire vivre les mathématiques comme connaissances, permettant de répondre à d'authentiques questions dont les élèves s'emparent.

À travers le bref portrait que nous avons tracé des contributions sur les évolutions curriculaires au sein des différents colloques EMF, il est possible déjà d'entrevoir des questions en germe qui sont débattues, telles celle par exemple des finalités associées à ces évolutions curriculaires, des valeurs qui les sous-tendent ; celle des contenus de ces curricula et de la place qu'y occupent les compétences, une question qui traverse l'ensemble des curricula à travers le monde ; celle encore de la place de la dimension culturelle dans cet enseignement ; celle enfin du poids des évaluations internationales. D'autres questions traversent toutefois les débats contemporains sur les curricula à travers le monde, que nous reprendrons maintenant pour aller plus loin, notamment en lien avec le processus de design curriculaire sur lequel nous avons choisi de mettre l'accent et qui a été peu abordé dans les précédents colloques EMF à la lumière de ce que nous en avons retracé.

2. *Des questions nouvelles*

Il s'agit ici pour nous de pointer, dans ces débats contemporains, un certain nombre de questions qui peuvent guider utilement l'analyse des évolutions curriculaires dans la perspective qui est la nôtre, celle du contrat social.

Elles ont trait, d'une part au *processus de design curriculaire*. La remise en question du caractère exclusivement « top-down » de ces processus est au cœur des débats contemporains (Abrantès 2004), et les efforts divers entrepris pour s'émanciper de ce modèle, démocratiser en un sens le design, accorder plus de place et de responsabilités à ceux qui ont en charge la mise en œuvre des choix curriculaires (Fiorentini 2011, Cobb & al. sous presse) a sa place ici : Est-ce que les évolutions curriculaires essaient de s'émanciper de ce modèle, de démocratiser le processus de design ? Comment ? Est-ce que plus de souveraineté, pour reprendre un concept cher à Rousseau, est accordée à ceux en charge de la mise en œuvre de ce curriculum ? Quel est le degré d'ouverture de ce curriculum ? Il est intéressant de rapprocher ce questionnement des processus « top-down » de celui des processus « Nord-Sud », lui aussi bien mis en évidence par les précédents colloques EMF et par les travaux menés par de nombreux chercheurs de pays du Sud (voir à ce sujet notamment Gerdes 1988 et 1999)

Concernant les *valeurs qui guident ce design curriculaire*: Quelles sont-elles ? (par exemple accessibilité à tous, réussite pour tous, épanouissement et autonomie des individus, citoyenneté, équité…) ? Comment ces valeurs agissent-elles comme ressources structurantes dans le design curriculaire ?

Concernant la *structuration et les priorités curriculaires* : quelles finalités sont ici associées à l'enseignement de façon générale, et à l'enseignement des mathématiques ? Quelles tensions s'y expriment entre contenus et compétences ? Quel est l'accent mis sur des pratiques comme les démarches d'investigation, la modélisation ? Quelle importance est accordée aux interactions entre mathématiques et autres disciplines d'enseignement, notamment les disciplines scientifiques, entre mathématiques et société ? Quelle importance est accordée aux dimensions culturelle et historique de l'enseignement des mathématiques ? Quelle importance est accordée aux dimensions critique et citoyenne de cet enseignement ?…

Concernant *l'impact sur ce design curriculaire d'influences externes* et les contrats sociaux dont il témoigne : quelles influences plus larges que celles internes à un pays donné ou même une zone régionale donnée peut-on mettre en évidence, comme ceux portés par exemple par l'OCDE, relayés notamment par l'évaluation internationale PISA ?

C'est avec ces questions en tête que nous avons organisé les différentes études de cas, et ce en ayant comme fil conducteur la façon dont le design curriculaire, ses caractéristiques stables et ses évolutions récentes, nous renseignent sur le contrat social qui lie un pays ou une région donnée à son école.

IV. UNE ETUDE VERTICALE DANS UN CONTEXTE DONNE, LES ETUDES DE CAS

Comme indiqué plus haut, six études de cas ont été menées en Belgique francophone (voir Baeten, Schneider, ces actes), au Burkina Faso (Traoré, ces actes), en France (voir Artigue, Rinaldi, ces actes), au Québec (voir Bednarz, Maheux, Proulx, ces actes), en Suisse Romande (voir Coray, ces actes) et en Tunisie (voir Smida, ces actes). Chacune des études de cas, si l'on se réfère à la terminologie introduite dans le projet spécial sur les évaluations internationales d'EMF2009 (Artigue & al. 2010), constitue une étude verticale dans un contexte donné. C'est par la suite dans la préparation et réalisation des deux tables rondes que s'est engagé le travail de nature horizontale consistant à les faire interagir, même s'il était anticipé. Pour mener ces études, une grille a été élaborée distinguant d'une part :

- *le processus de design curriculaire* : quels en sont les acteurs, et avec quelles responsabilités et quels rôles ? Quelles influences ? (par exemple du monde de la recherche mathématique, de la recherche didactique, des sciences de l'éducation, des praticiens de l'enseignement et de la formation des maîtres, des acteurs institutionnels tels le ministère de l'éducation, les inspections ou les commissions scolaires.., des acteurs sociaux autres, tels les parents, le monde du travail, les intervenants d'autres disciplines). Comment les processus de développement et d'implantation du curriculum sont-ils conçus ? Quels sont les modes d'accompagnement dans sa mise en place ? Quels sont les modes de régulation éventuellement existants ? Quels sont les points forts et les points faibles de ce design curriculaire ? Quelles évolutions voit-on apparaître, pour dépasser notamment les modèles habituels « top-down », pour mieux prendre en charge les spécificités culturelles et la diversité des contextes sociaux ?
- *les conceptions de l'enseignement des mathématiques et de son rôle dans la formation sous-jacentes* : Quelle vision des mathématiques, des finalités de leur enseignement et de leur apprentissage ? Quelles différenciations de l'enseignement suivant les parcours ? Quelle importance accordée aux contenus, à l'activité mathématique (par exemple, démarches d'investigation, développement de processus) ? Quels rapports entre mathématiques et autres disciplines ? Quelle place pour la modélisation ? Quelle place pour les mathématiques actuelles ? Quelle place pour les demandes sociales et la formation citoyenne ? Quelle place pour la technologie ? Quelle place pour l'histoire des mathématiques et plus largement pour une dimension culturelle des mathématiques ?

Ceci a conduit à un premier ensemble de textes décrivant les processus de design curriculaire dans chaque pays et les évolutions récentes dans ce domaine. La lecture de ces textes montrait, comme nous l'avions supposé, une grande diversité mais en même temps, dans chaque étude, des évolutions récentes qui pouvaient effectivement s'interpréter en termes de contrat social. On y repérait notamment des façons distinctes de répondre à des demandes sociales qui nous semblaient proches sinon identiques, par exemple la volonté d'atteindre tous les élèves, l'ambition affichée de démocratisation de la réussite, les tentatives diverses pour sortir du modèle « top down » de design curriculaire prenant la forme d'une certaine décentralisation (voir par exemple Traoré, ces actes) ou de modèles hybrides (voir Coray, ces actes ; Bednarz, Maheux, Proulx, ces actes), la place accordée aux demandes sociales et à la formation citoyenne.... Au fil de l'enquête, ayant à l'esprit la question transversale du contrat social, chacun a été amené à mettre l'accent sur les aspects qui lui semblaient les plus révélateurs, en s'attachant non seulement aux processus de design curriculaire mais aussi aux curricula qui en résultent. Ceci nous a conduites, dans un second temps, à demander à chaque équipe, de choisir un aspect, concernant ce curriculum, qui lui semblait un bon indicateur d'une évolution récente des caractéristiques du contrat social avec l'école et de développer l'enquête sur cet élément. C'est ce qui a été fait, conduisant pour chaque étude à documenter, outre le processus de design curriculaire dans chacun des pays, un aspect spécifique qui lui semblait particulièrement représentatif. Ce sont ces deux temps de l'enquête qui nous ont servi pour structurer les deux tables rondes lors du colloque.

V. FAIRE INTERAGIR CES DIFFERENTES ETUDES DE CAS DANS DEUX TABLES RONDES.

1. *Design curriculaire et contrat social*

Rappelons ici les questions de départ plus larges introduites précédemment et qui ont servi en quelque sorte de trame de discussion dans la première table ronde au regard des différentes analyses réalisées sur le design curriculaire dans chacun des pays.

- Quelles tentatives pour démocratiser le processus de construction des programmes de mathématiques, leur mise en œuvre et leur accompagnement, leur régulation ? Quel espace de liberté pour les acteurs ?
- Quels acteurs y sont centraux ? À quels niveaux et dans quelle phase interviennent-ils ?
- Quelle école cherche-t-on à mettre en place à travers ce contrat social ? Comment cela se manifeste-t-il, notamment dans l'expression des finalités éducatives ?

Il s'agissait ici de reconstruire, pour chacun des pays, ce processus dans ses différentes composantes, un processus où s'expriment des valeurs, et de mettre en évidence, ce faisant, le contrat social qui le sous-tend. Nous reprenons ici quelques uns des éléments clés qui ressortent dans chacun des cas, dans l'ordre où ils ont été présentés lors de la première table ronde, et renvoyons pour une analyse détaillée de ce processus aux études de cas plus précises reprises dans les actes.

- *Le cas de la Tunisie* (voir Smida, Ben Nejma et Khalloufi-Mouha, ces actes) *:* L'analyse met ici en évidence un processus de design curriculaire qui s'inscrit dans une certaine tradition de type « top down », un modèle stable qui traverse les différentes réformes. Il est toutefois possible de dégager, à l'intérieur d'un tel modèle, des indicateurs de changement de contrat social, dans le rôle par exemple joué par différents acteurs dans la construction des programmes. Ainsi, on observe un renversement dans la place que jouent certains acteurs dans le processus de construction des programmes. On passe d'une place majoritairement réservée aux universitaires dans la réforme de 1958, en collaboration avec les inspecteurs de mathématiques et quelques enseignants, à une hégémonie des inspecteurs dans la réforme de 1978, puis on note une réinsertion progressive des universitaires dans les réformes plus récentes, 1993 et 2002. À travers l'analyse de ceux et celles qui font et rédigent les programmes, il est aussi possible de percevoir plus récemment (2002) une volonté de sortir l'enseignement des mathématiques d'un repli sur lui-même, à travers notamment la composition d'une commission des programmes qui sort de la stricte discipline mathématique, une commission formée d'inspecteurs, d'universitaires en moins grand nombre, mais aussi d'intellectuels au sens large provenant de différents champs disciplinaires. On observe enfin des efforts pour sortir du modèle « top down » dans l'implantation de ces programmes avec une certaine décentralisation, et une régulation par le retour du terrain, dont les données restent cependant locales.
- *Cas du Burkina Faso* (voir Traoré, ces actes) *:* Il n'y a pas ici de tradition clairement établie comme dans le cas de la Tunisie. Même si on retrouve, dans la manière dont est

pensé le processus de construction du curriculum, quelque chose qui reste très proche de ce que l'on avait dans le passé (un modèle qui reste de type « top down »), on peut percevoir dans la réforme en cours certains changements, par exemple une décentralisation plus grande dans la mise en œuvre ; la mise en place d'un groupe d'experts nationaux, formé de didacticiens, de psychopédagogues et d'inspecteurs, chargé de réfléchir aux orientations à donner à cette réforme, et qui devrait théoriquement encadrer le processus. La conception plus précise des programmes relève d'une sous-commission disciplinaire pour le secondaire, formée d'un mathématicien, d'encadreurs et d'enseignants expérimentés nommés par le ministre, et pour le primaire d'une équipe de rédaction, formée de mathématiciens, encadreurs, instituteurs et inspecteurs, nommés par le ministre. Des incohérences sont mises en évidence, et qui sont sans doute l'expression d'une tension entre les nouvelles manières de faire que l'on tente d'instaurer (comité d'experts, document de référence, encadrement du processus…etc) et l'habitus ancien qui continue à fonctionner en parallèle. Ainsi les comités de rédaction ont commencé à travailler sur les programmes alors même que le comité d'experts nationaux n'avait pas encore remis son rapport et enclenché le processus. Enfin il est important ici de signaler diverses sources d'influences externes, venant d'Afrique ou d'ailleurs, qui ont joué un rôle non négligeable dans l'orientation nouvelle donnée à cette réforme curriculaire, celle de l'approche par compétence (APC).

- *Cas de la Belgique* (voir Baeten, Schneider, ces actes) : On observe ici dans les évolutions curriculaires récentes un *processus de standardisation* de l'enseignement des mathématiques, qui semble à l'opposé des expériences mises en avant dans d'autres pays ou régions du monde, par exemple la Suisse ou le Québec. La réforme curriculaire en Belgique francophone, qui s'inscrit dans la mouvance des compétences, est ainsi caractérisée, sur le plan du design, par une standardisation des pratiques d'enseignement des mathématiques, à travers notamment la rédaction de référentiels de compétences pour tous les niveaux d'enseignement, la création d'outils d'évaluation devant servir de référents externes à tous les réseaux d'enseignement, une centralisation en matière de pilotage du système éducatif, qui rompt avec le passé. Cette analyse fait aussi ressortir le poids de l'évaluation externe prégnante dans le pilotage de cette réforme, le rôle des inspecteurs et conseillers pédagogiques dont le mandat est un très fort de contrôle de cette dernière.

- *Cas de la France* (voir Artigue & Rinaldi, ces actes) : L'analyse met ici en évidence une tradition de design curriculaire centralisé et essentiellement de type « top down ». Elle montre les efforts entrepris pour aller vers une conception plus démocratique de ce design avec la création du Conseil National des Programmes à la fin des années 80 mais aussi le recul sur ce plan qui a suivi sa dissolution en 2005 à la suite de changements politiques. Elle montre aussi, s'agissant des évolutions du contrat social, le changement profond que représente la mise en place, également en 2005, du socle commun de connaissances et compétences, inscrit dans la loi, et les difficultés générées par la cohabitation qui en résulte de deux systèmes de description curriculaire et de deux systèmes d'évaluation.

- *Cas de la Suisse Romande* (voir Coray, ces actes) : Un premier indice de changement de contrat social est visible à travers l'idée, nouvelle pour la Suisse, d'un programme d'études romand, commun à différents cantons, et dont le processus de conception semble bien loin de celui retenu pour la Belgique. Ce n'est nullement en effet, une volonté de standardisation de l'enseignement des mathématiques qui est en jeu comme dans le cas de la Belgique mais bien plus celle d'*une coordination entre les* *programmes, laiss*ant une marge de manœuvre à chacun des cantons, et puisant à un certain parcours de réformes et d'expériences. Du groupe de réflexion mis en place à cette fin aux 125 personnes appelées à écrire plus précisément ce programme, de multiples acteurs vont participer à ce processus, enseignants d'expérience, formateurs, didacticiens. Ce dernier va trouver tout naturellement son ancrage dans les expériences antérieures. L'idée des POEM (Principe Organisateur de l'Enseignement-apprentissage des Mathématiques), en place dans l'ancien curriculum, en est un exemple.

> Ce POEM liste, pour chaque thème d'enseignement, les obstacles et erreurs caractéristiques, les outils de vérification, les types de problèmes pouvant être soumis aux élèves, les techniques et savoir-faire, les propriétés (en acte et déclaratives) et le vocabulaire et syntaxe. Ces indications didactiques, assorties de commentaires détaillés sont d'une grande richesse et vont permettre aux enseignants (et plus particulièrement aux enseignants débutants) de faire une analyse préalable des activités élèves et les aider dans la construction de leur séquence d'enseignement sur un thème donné (Coray, ces actes).

On voit bien à travers ce qui précède une certaine influence didactique dans laconstruction de ce programme.

- *Cas du Québec* (voir Bednarz, Maheux et Proulx, ces actes) : L'analyse de la réforme récente au Québec met en évidence un changement profond du contrat social dans la manière dont est pensé le processus de conception du curriculum, sa mise en œuvre et son accompagnement de même que sa régulation. Ce dernier est visible notamment à travers le modèle hybride qui ressort de l'analyse, et les éléments clés qui le caractérisent : un processus qui s'inscrit sur une longue durée, qui met en jeu de multiples interactions entre des acteurs provenant d'horizons multiples, un rôle important dévolu aux enseignants et au personnel scolaire, un processus cohérent, pensé de manière organique et systémique, faisant ressortir au delà du texte qui en résulte, l'idée centrale « d'un curriculum en développement », vu comme objet frontière qui circule entre différents acteurs, différents groupes de pratique appelés à le faire signifier. Cette analyse fait ressortir ici la continuité des politiques qu'on y sent, l'acceptation du temps nécessaire de l'action, la cohérence du processus, un certain « curriculum vivant » qui n'exclut pas le débat.

2. *D'un regard global sur le processus de design curriculaire à un regard focalisé sur un aspect particulier de ce curriculum*

Chaque étude de cas s'est ici intéressée à documenter un aspect du curriculum récent, un aspect qui lui semblait représentatif d'un changement de contrat: on passe ici d'un regard global sur le processus à un regard focalisé *sur un point particulier du curriculum produit* dans chacun des cas (Belgique, Burkina, France, Québec, Suisse, Tunisie), jugé significatif d'une évolution du contrat social et qui a été approfondi au cours de l'enquête. Ces points sont les suivants : l'exemple du socle commun des connaissances et compétences qui modifie ce que l'école s'engage à fournir à tous les élèves, à leur permettre d'apprendre (voir Artigue & al., ces actes); une entrée de la modélisation au sein du projet global de formation de l'élève (Coray, ces actes) ; une émergence de préoccupations sociales qui se traduit par l'entrée de thématiques émergentes dans le programme (Traoré, ces actes) ; un changement perceptible dans la vision des mathématiques au fil du temps dans le « curriculum comme texte » (Bednarz & al., ces actes) ; le feuilleton belge des compétences et le retour des disciplines (Baeten, Schneider, ces actes) ; l'évolution des pratiques algébriques au sein du curriculum de formation (Smida & al., ces actes).

Un regroupement a été effectué suivant des thématiques qui nous sont apparues porteuses par rapport aux questions posées au départ, et qui traversent les différentes études de cas. Rappelons ces questions : Quelle vision des mathématiques, des finalités de leur enseignement et de leur apprentissage ? Quelle importance accordée aux contenus, à l'activité mathématique (par exemple, démarches d'investigation, développement de processus…) ? Quels rapports entre mathématiques et autres disciplines ? Quelle place pour la modélisation ? Quelle place réservée aux mathématiques actuelles ? Quelle place pour les demandes sociales et la formation citoyenne ? Quelle place à la technologie ? Quelle place à l'histoire des mathématiques et plus largement à une dimension culturelle des mathématiques ?

En fonction de notre lecture transversale des différents textes, se sont dégagées en termes d'évolution du contrat social, différentes dimensions qui nous semblaient susceptibles de permettre des discussions intéressantes et productives : 1) de la démocratisation via l'accessibilité à tous à l'ambition de la réussite pour tous ; 2) une évolution vers un enseignement des mathématiques plus en interaction avec les autres disciplines, notamment scientifiques et la société ; 3) des changements plus internes aux mathématiques elles-mêmes, dans la vision des mathématiques et des pratiques mathématiques.

Une organisation a ainsi été mise en place mettant à profit le regard croisé qu'amènent les différentes études de cas.

1ère dimension : Démocratisation de la réussite pour tous : une école qui ambitionne la réussite du plus grand nombre, comment ceci se traduit-il dans le curriculum produit ?

Une entrée sur ce thème a été amorcée par la présentation de Anne Marie Rinaldi (France) sur le socle commun de connaissances, la réponse que la France a donné à la question« qu'est-ce que l'école doit s'engager à fournir à tous, qu'est-ce qu'elle doit permettre à tous de réussir ? » (voir ici Artigue, Rinaldi, ces actes).

Cette première dimension du contrat social semble partagée par plusieurs systèmes, dans ses intentions, mais non dans les réponses données (voir ici Bednarz & al., ces actes ; Traoré, ces actes). La réussite pour tous prend ainsi un autre sens dans d'autres curricula. Par exemple dans l'analyse du processus de réforme curriculaire au Québec, cette réussite pour tous est pensée davantage en termes de mathématiques « de même niveau », aussi fortes, mais diversifiées, de manière à rejoindre les intérêts des élèves (voir Bednarz & al., ces actes)

2ème dimension: un enseignement des mathématiques non replié sur lui-même, plus en interaction avec les autres disciplines, notamment scientifiques, ou la société

Comment cette dimension se retrouve t-elle dans le curriculum produit, notamment dans la place de la modélisation, de l'interdisciplinarité, de préoccupations sociales, d'une formation citoyenne ?

Une entrée sur ce thème a été amorcée par la présentation de Michel Coray pour la Suisse, axée spécifiquement sur la place qu'y occupe la modélisation à l'intersection des programmes de mathématiques et des programmes de sciences (voir Coray, ces actes), puis celle du cas du Burkina Faso, avec l'émergence de préoccupations sociales via l'entrée de thématiques dites émergentes comme celles de l'éducation en matière de population, VIH , …etc (voir Traoré, ces actes). Ce non repli des mathématiques sur elles-mêmes est perceptible aussi dans d'autres curricula, à travers notamment le rôle de la modélisation, ou encore la présence d'une formation citoyenne.

3ème dimension : Des changements à l'intérieur même de la discipline mathématique.

Comment ceci se retrouve t-il à l'intérieur des curricula produits ? Quel sens cela prend-il ? Quelle vision des mathématiques s'en dégage ?

Une entrée sur ce thème a été amorcée par les présentations du cas du Québec, à travers l'analyse de la vision des mathématiques et des changements perceptibles dans les évolutions curriculaires récentes, notamment via le rôle important qu'y joue l'activité mathématique (Bednarz & al., ces actes) ; par les finalités qui caractérisent l'enseignement des mathématiques en général et celui de l'algèbre en particulier (Smida & al., ces actes) ; ou encore par ce que Maggy Schneider appelle pour la Belgique « le feuilleton des compétences, dernier épisode, le retour des disciplines » revenant sur le sens des mathématiques et de leur enseignement que n'est pas sans provoquer l'approche par compétences. Ces changements à l'intérieur même de la discipline mathématique sont aussi visibles dans les autres curricula. Par exemple l'accent mis sur les compétences est une tendance partagée par l'ensemble des curricula, mais en lien avec des motifs souvent différents, il prend suivant les cas, comme ces études le montrent, des sens différents.

VI. CONCLUSION

Le regard a posteriori sur ces différentes études de cas, à travers les deux tables rondes, fait ressortir des similarités et différences entre les pays francophones à la fois dans les caractéristiques et les dynamiques d'évolution du processus de design curriculaire et dans le curriculum qui en résulte.

Des différences importantes apparaissent ainsi dans la manière dont sont conçus les processus de construction des programmes d'études, de mise en œuvre et d'accompagnement ou encore de régulation de ces programmes, allant de processus qui restent fortement centralisés (cas de la Tunisie, du Burkina, de la France) ou qui tendent à le devenir (cas de la Belgique) à des processus qui s'en éloignent pour adopter davantage des modèles que nous pourrions qualifier d'hybrides, alliant davantage un mouvement à la fois « top down » et « bottom up » (cas de la Suisse et du Québec). Mais au delà de ces différences marquées, des similarités sont aussi à chercher du côté des tentatives, plus ou moins fortes, que révèlent ces analyses pour rendre ces manières de faire plus démocratiques dans leur fonctionnement. Cela va se traduire par certaines manières de faire dans la construction du curriculum, son accompagnement ou sa régulation; des efforts visibles, même s'ils sont inégaux, pour sortir du « top down » ; ou encore des tensions diverses à l'intérieur de dynamiques de construction, accompagnement ou régulation que l'on veut souvent trop vite modifier (cas par exemple du Burkina et de la Tunisie).

Il est également possible de mettre en évidence le rôle plus ou moins central que jouent dans ce design curriculaire les différents acteurs : enseignants, inspecteurs, universitaires, mathématiciens, didacticiens, formateurs, intellectuels d'autres disciplines, intervenants d'horizons divers. L'écriture des programmes s'organise ainsi autour de plusieurs pôles, plusieurs points de vue didactiques (Martinand 2007), le rapport à la pratique de l'enseignement des mathématiques et une certaine didactique praticienne incarnée par les enseignants (cas par exemple du Burkina, du Québec, de la Suisse), une certaine didactique normative incarnée par les inspecteurs (cas par exemple de la Tunisie et du Burkina), une didactique de recherche et de formation incarnée par les universitaires (cas de la Tunisie, de la France), didacticiens et formateurs (cas de la France et de la Suisse), mais aussi par les autres disciplines (cas par exemple de la France ou de la Tunisie) ou expériences d'intervenants venant d'horizons divers (cas par exemple du Québec).

Ce design curriculaire et son évolution viennent en retour influencer le type de curriculum produit : d'un curriculum prescrit fermé, venant encadrer une standardisation des pratiques (cas de la Belgique) à un curriculum ouvert à des initiatives locales, conçu dans une perspective de coordination, d'harmonisation et non de standardisation (cas de la Suisse Romande) à un curriculum « en développement» (cas du Québec), se rapprochant de ce que Martinand (2007) nomme curriculum « potentiel », différentes formes en ressortent pour ces curriculums. Les cas du Québec et de la Suisse sont ainsi plus près de l'idée de curriculums « potentiels » développée par Martinand : ce que les enseignants et formateurs sont capables d'imaginer de pouvoir et devoir réaliser en fonction de leurs habitudes, de leurs compétences, de leurs aspirations et de suggestions de curriculums possibles. Cette analyse au regard des formes de curriculum met ainsi de l'avant en parallèle l'espace de liberté que laisse le curriculum aux acteurs de l'enseignement.

Des valeurs communes sous-tendent ces réformes trouvant toutefois des réponses différentes dans la manière dont celles-ci seront traitées. Par exemple la finalité d'une école qui dépasse la simple démocratisation via l'accessibilité à tous, présente dans les réformes passées, et qui ambitionne la réussite du plus grand nombre, est un fil directeur qui traverse les réformes curriculaires en France et au Québec, avec des réponses toutefois différentes dans ces deux cas. Ces intentions de « démocratisation de la réussite » ou encore d'épanouissement et d'autonomie des individus (cas de la Belgique) se retrouvent dans plusieurs des textes, elles semblent au fondement des réformes curriculaires engagées.

Cette analyse met également en évidence une discipline mathématique moins repliée sur elle-même, plus ouverte sur les autres disciplines, à travers notamment la place qu'occupe la modélisation dans plusieurs de ces programmes en lien avec les sciences ou les sciences sociales, ou encore l'entrée de thématiques émergentes prenant en compte des problématiques sociales et locales, rejoignant une visée de formation citoyenne. La nature des mathématiques mobilisées dans ces programmes, elle aussi, bouge.

Enfin il est possible de faire ressortir des déterminants plus globaux, influences par exemple des évaluations externes comme le montre bien le cas de la Belgique, ou pressions externes exercées autour de l'approche par compétences sur la construction des programmes des pays en développement (voir par exemple ici le cas du Burkina)

Même si des similarités semblent ressortir de cette lecture a posteriori des différentes études de cas, résultant de cette culture francophone partagée, le paysage est, on peut le constater, un paysage très divers. Nous espérons que le travail réalisé en aval de ces études, les analyses conduites dans un contexte donné dont rend compte chacune des études de cas, et la réflexion engagée a posteriori lors de ce colloque dans le cadre des tables rondes et après, aideront chacun d'entre nous à mieux comprendre les processus curriculaires complexes dont ils sont acteurs et leurs effets, à envisager des alternatives, des marges de manœuvre pour faire face aux défis du 21^{e} siècle.

REFERENCES

Abrantes P. (2004) L'innovation curriculaire en éducation de base au Portugal. In Jonnaert P., Masciotra D. (Eds.) (pp. 37-49) *Constructivisme, choix contemporains*. Montréal : Presses de l'université du Québec.

Artigue M., Coagri Nassoui C., Smida H., Winslow C. (2010) Évaluations internationales : impacts politiques, curriculaires et place des pays francophones. Projet spécial 2, compte rendu et synthèse. Dans Kuzniak A., Sokhna M. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et développement, enjeux de société et de formation. Actes du colloque EMF2009. Revue internationale Francophone*, numéro spécial.

Bednarz N. (2002) Pourquoi et pour qui enseigner les mathématiques ? Une mise en perspective historique de l'évolution des programmes au Québec au XX^{ème} siècle. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* (ZDM) 34(4), 146-157.

Chevallard Y. (1992) Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 12(1,) 73-112.

Cobb P., Smith T. (sous presse) The challenge of scale: Designing schools and districts as learning organizations for instructional improvement in mathematics. In Wood T., Jaworski B., Krainer K., Sullivan P., Tirosh D. (Eds.) *International handbook of mathematics teacher education*. Rotterdam, The Netherlands: Sense.

D'Ambrosio U. (1982) *Mathematics for rich and for poor countries*. Paramaribo, Brésil : Carimath.

D'Ambrosio U. (2001) What is ethnomathematics, and how it can help children in schools? *Teaching Children Mathematics* 7(6), 308-310.

Djebbar A. (2007). Les mathématiques dans les systèmes éducatifs du Maghreb à la lumière des dernières réformes. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies* 7(1), 41-52.

Dionne J. (2007). L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école au Québec : une cohérence à vivre dans une nécessaire cohésion. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies* 7(1), 6-27.

Fiorentini D. (2011) Teacher development and curricular change : A research program. In N. Bednarz, D. Fiorentini, R. Huang (Eds.) (pp. 213-222) *International Approaches to professional development for Mathematics Teachers*. Ottawa : University of Ottawa Press.

Gerdes P. (1985) Conditions and strategies for emancipatory mathematics education in underdeveloped countries. *For the learning of mathematics* 5(1), 15-20.

Gerdes P. (1988) On possible uses of traditional Angolan sand and drawings in mathematics classroom. *Educational studies in mathematics* 19(1), 3-22.

Gerdes P. (1995) *Ethnomathematics and education in Africa*. University of Stockholm, Institute of International Education.

Gerdes P. (1999) *Geometry from Africa : Mathematical and educational explorations*. Washington : The Mathematical Association of America.

Gispert H. (2002) Pourquoi, pour qui enseigner les mathématiques? Une mise en perspective historique de l'évolution des programmes de mathématiques dans la société française au XXe siècle. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* (ZDM) 34(4), 158-163.

Lajoie C., Bednarz N. (sous presse) Évolution de la résolution de problèmes en enseignement des mathématiques au Québec : un parcours sur cent ans des programmes et documents pédagogiques. *Revue canadienne en enseignement des sciences, de la technologie et des mathématiques.*

Lebeaume J. (2007) Entretien avec Jean-Louis Martinand et Yves Reuter. *Recherche et Formation* 55, 107-117.

Martinand J.-L. (2006) Didactique et didactiques : Esquisse problématique. In Beillerot J., Mosconi N. (Eds.) *Traité des sciences et pratiques de l'éducation*. Paris : Dunod

Martinand J.-L. (1994) La didactique des sciences et de la technologie et la formation des enseignants. *Aster* 19, 61-75.

Matheron Y., René de Cotret S. (2010) La désaffection envers l'étude des mathématiques : Entre problématiques curriculaires et didactiques. Synthèse du travail mené au sein du groupe du projet spécial 1. In Kuzniak A., Sokhna M. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et développement, enjeux de société et de formation. Actes du colloque EMF2009. Revue internationale Francophone*, numéro spécial.

Medina J. (1986). Le Contrat Social : du droit naturel à l'histoire. In Médina J., Senik A., Morali C., Chomienne G (Eds.) (pp .6-17) *Jean-Jacques Rousseau. Du Contrat Social*. Paris : Magnard.

Noël G. (2002) Pourquoi, pour qui enseigner les mathématiques? Une mise en perspective historique de l'évolution des programmes, au XX^{ème} siècle, en Belgique. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 34(4), 110-119

Powell A.B., Frankestein M. (1997) *Ethnomathematics : challenging eurocentrism in mathematics education*. Albany, N.Y : State University of New York Press.
Rousseau J.-J. (1762) *Du Contrat Social ou Principes du Droit Politique*. Amsterdam : Edition Marc Michel Rey
Schneider M. (2007) Les compétences comme cadre pour organiser des enseignements de mathématiques ? Oui mais… Quelques dérives possibles. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies* 7(1), 28-40.
Smida, H. (2003) L'enseignement des mathématiques en Tunisie : Genèse et Destinée. In Smida H. (Ed.) *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone EMF2003,* Tozeur, Tunisie. Cederom.
Wenger E. (2005) *La théorie des communautés de pratique. Apprentissage, sens et identité*. Québec : Les Presses de l'Université Laval.

CONTRIBUTIONS AUX TABLES RONDES

ARTIGUE M., RINALDI A. – Design curriculaire et contrat social : le cas de la France.
BEDNARZ N., MAHEUX J.-F., PROULX J. –Design curriculaire et vision des mathématiques au Québec.
BAETEN E., SCHNEIDER M. – Le paradigme des compétences en Communauté française de Belgique et, plus particulièrement, dans l'enseignement secondaire.
CORAY M. – Design curriculaire et contrat social dans l'enseignement des mathématiques en Suisse Romande.
SMIDA H., BEN NEJMA S., KHALLOUFI-MOUHA F. – Évolutions curriculaires et certaines conceptions sous-jacentes à l'enseignement des mathématiques en Tunisie.
TRAORÉ K. – Design curriculaire et contrat social : Le cas du Burkina Faso.

DESIGN CURRICULAIRE ET CONTRAT SOCIAL DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES EN FRANCE

Un étude de cas dans le cadre des tables rondes EMF2012 *–Evolutions curriculaires récentes dans l'enseignemnt des mathématiques de l'espace francophone*

Michèle ARTIGUE[*], Anne-Marie RINALDI[**]

Résumé – Ce texte concerne les processus de design curriculaire en mathématiques en France, en englobant sous ce terme la conception des curricula, et notamment celle des programmes d'enseignement, leur mise en œuvre, les processus d'accompagnement et de régulation associés. En cohérence avec la thématique d'EMF 2012, il vise plus particulièrement l'identification dans ces processus d'expressions du contrat social relatif à l'École et de ses évolutions. Après une partie précisant quelques éléments de contexte, l'étude est centrée sur la période qui débute avec la création du *Conseil National des Programmes* en 1989 et sur le Socle commun de connaissances et compétences.

Mots-clefs : mathématiques, design curriculaire, évolution cuuriculaire, contrat social, socle commun

Abstract – This text studies processes of curricular design in mathematics in France, which includes the conception of curricula, and especially that of syllabuses, their implementation, and associated support and regulation processes. Coherently with the thematic of EMF 2012, this study especially aims at identifying how characteristics of the social contract between School and Society and its evolution are reflected in these processes. After clarifying some contextual elements, the study focuses on the priod starting with the creation of the *Conseil National des Programmes* in 1989 and on the Commun Base of Knowledge and Competence introduced in 2005.

Keywords: mathematics, curricular design, curricular evolution, social contract, common base of knowledge and competence

S'intéresser au design curriculaire, même s'il s'agit de considérer une discipline donnée, c'est s'intéresser à des processus complexes qui, si l'on se réfère à la hiérarchie des niveaux de codétermination introduite dans la théorie anthropologique du didactique (Chevallard 2002), font intervenir les plus hauts niveaux de cette hiérarchie, ceux de l'école, de la société, et même le dernier niveau qui correspond à des déterminations qui transcendent une société donnée. Les déterminations de ces niveaux interagissent avec celles se situant aux niveaux strictement disciplinaires et comprendre ce qui se joue aux niveaux disciplinaires nécessite que soient mises à jour et élucidées ces interactions. C'est ce que nous essayons de faire dans ce texte, s'agissant de la France, en ayant pour conduire l'étude, un fil conducteur qui nous est donné par la thématique globale du colloque EMF 2012, le fil du contrat social. Il s'agit pour nous de rechercher dans les caractéristiques du design curriculaire sur la période récente et dans ses évolutions, des signes du contrat qui lie l'École à la société dans laquelle elle s'inscrit et de comprendre comment l'enseignement des mathématiques contribue à ce contrat et comment, en retour, il est affecté par ce dernier.

Tout processus de design curriculaire s'inscrit dans un contexte particulier. Dans une première partie, nous essayons de cerner des éléments du contexte français importants à connaître pour comprendre comment le design curriculaire et ses évolutions peuvent, dans ce cas précis, faire signe sur le contrat social. Nous le faisons en reprenant les différentes étapes du processus : conception, mise en œuvre, accompagnement, régulation. Notre projet n'étant

[*] LDAR, Université Paris Diderot – Paris 7 – France – michele.artigue@univ-paris-diderot.fr
[**] LDAR, Université d'Amiens – France – rinaldi.anne-marie@orange.fr

© Artigue M., Rinaldi A.M. (2012) Design curriculaire et contrat social dans l'enseignement des mathématiques en France – Une étude cas dans le cadre des tables rondes EMF2012 : évolutions curriculaires récentes dans l'enseignement des mathématiques de l'espace francophone. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (Plénières, pp. 24–52). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

pas de faire œuvre historique mais de considérer l'histoire récente[1], nous choisissons ensuite de considérer la période qui débute avec la création en 1989 du Conseil National des Programmes (CNP dans la suite), la création de ce conseil nous semblant en elle-même significative d'une volonté d'évolution du contrat social. Après avoir décrit les évolutions portées par le CNP et leurs répercussions sur les curricula mathématiques à travers l'exemple de la réforme du lycée de 2000, nous en venons à l'instauration du socle commun en 2005 qui exprime une volonté d'évolution bien plus radicale de ce contrat social, mettant en évidence sa longue genèse et les bouleversements induits par sa mise en œuvre.

I. DESIGN CURRICULAIRE EN FRANCE : QUELQUES ELEMENTS DE CONTEXTE

1. Une structure centralisée

La France est un pays dont l'administration reste marquée par la centralisation, malgré le processus de régionalisation qui a débuté en 1982. Au niveau éducatif, cette centralisation s'exprime notamment par la responsabilité de l'état pour tout ce qui concerne l'organisation des cursus scolaires, la définition des programmes scolaires et leur contenu, le recrutement et la gestion des personnels enseignants, et par des structures, horaires, programmes, modes d'évaluation qui sont nationaux[2]. L'organisation de l'enseignement (structures, horaires…), pour ce qui concerne l'enseignement primaire et secondaire, relève de la responsabilité du Ministère de l'éducation nationale, des commissions disciplinaires[3] étant constituées pour l'élaboration des programmes. A ces commissions participent généralement des inspecteurs de l'éducation nationale (inspecteurs généraux ou régionaux), des universitaires et des enseignants, mais les compositions et responsabilités varient suivant les époques et contextes politiques, exprimant des variations dans le pouvoir accordé aux uns et aux autres dans ces questions de design curriculaire. Ainsi, a-t-on assisté ces dernières années, après la dissolution du CNP en 2005, à une reprise de la maîtrise de ces commissions par les corps d'inspection.

2. La conception

Le système de conception curriculaire a toujours été et reste essentiellement de type « top-down » même si de larges consultations sont assez régulièrement organisées à partir des projets de programmes depuis les années 2000[4]. Il faut aussi mentionner le rôle qu'a pu jouer une institution comme celle des IREM[5], via certaines commissions inter-IREM, par exemple la Commission inter-IREM Lycées Techniques pour les programmes des séries d'enseignement technologique au lycée et les STS[6], ainsi que des commissions nationales comme la COPREM (Commission permanente de réflexion sur l'enseignement des mathématiques, 1982-1986), le GREM (Groupe de réflexion sur l'enseignement des

[1] Pour les périodes antérieures, nous renvoyons notamment le lecteur à (Prost 1968) et (Belhoste, Gispert & Hulin 1996).

[2] En revanche, la gestion des établissements est déléguée aux communes (enseignement élémentaire), conseils généraux (collèges) et conseils régionaux (lycées).

[3] Ces commissions auront, suivant les époques, des noms divers, par exemple GTD (groupes techniques disciplinaires) puis GEPS (Groupes d'experts pour les programmes scolaires).

[4] L'effet de ces consultations sur les programmes eux-mêmes est cependant souvent très limité et les programmes qui paraissent très proches des projets mis en consultation.

[5] Les trois premiers IREM, Instituts de recherche sur l'enseignement des mathématiques, ont été créés en 1969, suite au mouvement de mai 68. Progressivement des IREM ont été créés dans toutes les académies et se sont structurés en réseau (www.univ-irem.fr/).

[6] STS : Sections de techniciens supérieurs, implantées dans les lycées et conduisant au BTS (Brevet de technicien supérieur).

mathématiques, 1988-1992) ou même, de façon plus indirecte, la CREM (Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques, 1999-2005).

3. *La mise en œuvre*

En cohérence avec la structure centralisée, la mise en œuvre des changements curriculaires se fait directement au niveau du pays tout entier. Elle a été cependant, dans de rares cas, précédée d'une phase d'expérimentation dans un certain nombre d'académies et d'établissements. Un cas exemplaire est celui de la réforme des programmes de mathématiques du collège (élèves de 11 à 15 ans) des années 80 dont la mise en place s'est étalée de 1985 (classe de 6^{e}) à 1988 (classe de 3^{e}). Pour chaque niveau, une mise en œuvre expérimentale anticipée des programmes d'un an, pilotée par les IREM, a été organisée dans un certain nombre d'établissements, et des brochures de suivi associées à cette expérimentation ont été publiées chaque année par la commission inter-IREM Collège, accessibles aux enseignants au moment précis où la réforme entrait en vigueur pour leur niveau d'enseignement. L'influence de la COPREM sur cette évolution curriculaire n'y est en rien étrangère.

4. *L'accompagnement*

L'accompagnement des changements curriculaires est traditionnellement assuré par les corps d'inspection qui organisent des réunions d'information, ainsi que par les stages de formation continue proposés dans le cadre des plans académiques de formation des différentes académies. Les IREM y contribuent fortement mais, malheureusement, cette formation continue a vu ses moyens fortement réduits au cours de la dernière décennie. A ceci s'ajoute la réalisation et la publication de différentes ressources par les IREM, l'APMEP, les CRDP et le CNDP[7]. Les réformes menées sous l'égide du CNP qu'ont été les réformes du lycée en 2000, de l'école élémentaire de 2002 et du collège de 2005, ont par ailleurs donné lieu à la réalisation, sous la responsabilité des commissions en charge des programmes, de très substantiels documents d'accompagnement des programmes (cf. II.1 et II.2 ci-après). Mais le statut même de document d'accompagnement des programmes a été remis en cause par la suite et ceux qui sont produits aujourd'hui sont présentés comme des documents ressources que les enseignants n'ont pas obligation de connaître ou d'utiliser.

5. *La régulation*

Il n'existe pas à notre connaissance dans le système français de dispositif institué de régulation des évolutions curriculaires. Changements et réformes se succèdent depuis des décennies sans que leurs effets ne semblent sérieusement identifiés et évalués, et cette situation est régulièrement déplorée par les acteurs du système éducatif. Suite à leurs demandes réitérées, portées notamment par l'APMEP (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public) et les IREM, en 2011, la DGESCO (Direction Générale des Enseignements Scolaires) a décidé de constituer une commission de 12 membres : professeurs, inspecteurs, universitaires et cadres de l'administration, chargée du suivi de la mise en œuvre des programmes de mathématiques[8]. Il est prévu que la DGESCO fixe chaque année, sur proposition de la commission, les sujets sur lesquels cette dernière fera

---

[7] APMEP : Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public, CRDP : Centres régionaux de documentation pédagogique, CNDP : Centre national de documentation pédagogique.

[8] Précisons que, sur ces 12 membres, 3 ont été proposés par l'APMEP et 3 par les IREM.

porter son travail et que, pour l'année 2011-2012, elle se centre plus particulièrement sur la mise en œuvre des nouveaux programmes de la classe de seconde[9].

Même s'il n'existait pas jusqu'ici de système institué de régulation, le ministère de l'Éducation dispose cependant de différents indicateurs, qu'il s'agisse par exemple des rapports produits régulièrement par l'Inspection générale mais qui ne sont pas nécessairement rendus publics[10], des résultats des évaluations nationales menées par la DEPP[11] ou des rapports produits chaque année par le Haut Conseil de l'Education (HCE), organisme consultatif créé en 2005 par la loi d'orientation et de programme pour l'avenir de l'école dont l'article L. 230-3 stipule :

> Le Haut Conseil de l'éducation remet chaque année au Président de la République un bilan, qui est rendu public, des résultats obtenus par le système éducatif. Ce bilan est transmis au Parlement. (JO du 24 avril 2005)

Il existe ainsi deux évaluations nationales menées dans l'enseignement élémentaire chaque année : l'une en CE1 et l'autre en CM2[12]. Il existe par ailleurs des évaluations sur échantillon menées tous les trois ans (évaluations CEDRE), et il y a eu par ailleurs pendant longtemps des évaluations diagnostic systématiques en début de CE2 dans l'école élémentaire, de sixième et de seconde dans le secondaire, aujourd'hui supprimées.

Après avoir précisé ces éléments de contexte, nous nous centrons, comme annoncé dans le résumé, sur la période qui a commencé avec la création du CNP, cette création exprimant elle-même, à nos yeux, la volonté de faire évoluer le contrat social avec l'École.

II. DESIGN CURRICULAIRE ET VISION DE L'ÉCOLE : LES CHANGEMENTS APPORTES PAR LE CNP

La création d'une institution analogue au CNP avait été prônée par diverses instances et notamment dans le rapport du Collège de France au Président de la République en 1985 et dans celui de la commission Bourdieu-Gros en 1989. Elle était associée à la nécessité de repenser les finalités de l'enseignement à la lumière des importants changements tant scientifiques, culturels que sociaux, et à l'ambition formulée par le gouvernement de l'époque d'amener 100% d'une classe d'âge à une qualification et 80% d'une classe d'âge au niveau du baccalauréat[13]. Le CNP a été officiellement créé par la loi d'orientation sur l'éducation dite loi Jospin de juillet 1989 qui, entre autres réformes, a aussi créé les IUFM[14]. C'est un organisme

> composé de personnalités qualifiées, nommées par le ministre de l'éducation nationale [qui] donne des avis et adresse des propositions au ministre de l'éducation nationale sur la conception générale des

---

[9] Précisons que ces programmes sont entrés en vigueur en 2010-2011 dans le cadre de la réforme en cours des lycées.

[10] Voir par exemple le site récemment ouvert par l'inspection générale de mathématiques http://igmaths.net/ et le site général http://www.education.gouv.fr/pid78/igen-inspection-generale-education-nationale.html

[11] DEPP : Direction de l'évaluation, de la prospective et de la performance. Elle exerce une fonction de suivi statistique, d'expertise et d'assistance pour le ministère de l'Éducation nationale et le ministère de l'Enseignement supérieur et de la recherche.

[12] CE1 (élèves de 7-8 ans), CE2 (élèves de 8-9 ans), CM1 (élèves de 9-10 ans). Ces évaluations ont lieu en français et en mathématiques et visent à situer les acquis de chaque élève par rapport aux objectifs définis dans les programmes. Une synthèse nationale est effectuée et contribue au pilotage du système éducatif. Les résultats globaux et anonymes de la France entière, des académies et des départements sont publics. (http://www.education.gouv.fr/cid262/l-evaluation-des-acquis-des-eleves-en-ce1.html)

[13] Encore aujourd'hui, environ 150 000 jeunes quittent le système éducatif sans qualification.

[14] IUFM : Instituts Universitaires de Formation des Maîtres.

> enseignements, les grands objectifs à atteindre, l'adéquation des programmes et des champs disciplinaires à ces objectifs et leur adaptation au développement des connaissances. (article 6 de la loi)

Ses avis et propositions sont rendus publics. Comme souligné plus haut, cette création s'inscrit dans une réflexion plus générale sur les finalités de l'École, le rejet d'une vision encyclopédique des savoirs et donc la nécessité de déterminer des critères qui permettent de choisir les savoirs à enseigner. Il semble important alors pour penser ces critères de sortir du seul monde de l'École et, notamment, de donner la parole à des universitaires au fait des évolutions et enjeux scientifiques actuels. La composition du CNP, constitué de 22 membres nommés par le ministre de l'éducation, reflète cette position : les universitaires y sont majoritaires et les corps d'inspection qui ont joué, depuis le reflux de la réforme des mathématiques modernes, un rôle clef dans les commissions chargées de l'élaboration des programmes, ont une position plus marginale[15]. Le premier président du CNP est le mathématicien Didier Dacunha Castelle. Le philosophe Luc Ferry lui succèdera en 1994 avant de devenir Ministre de l'Éducation Nationale en 2002.

Le CNP n'est pas directement en charge de l'écriture des programmes d'enseignement et son intervention à ce niveau est clarifiée par le décret d'application du 23 février 1990. Les projets de programmes sont élaborés, pour ce qui est de l'enseignement général, par des groupes disciplinaires comportant des représentants des divers ordres d'enseignement et des corps d'inspection qui seront ensuite dénommés GEPS (groupes d'experts pour les programmes scolaires) et, pour ce qui est de l'enseignement technologique et professionnel, par des commissions professionnelles consultatives (CPC). Ces instances sont constituées par les directions compétentes du Ministère de l'Éducation nationale, avec consultation du CNP[16], et placées auprès de ces directions, mais elles rendent compte régulièrement de l'avancement de leurs travaux auprès du CNP qui rédige des lettres de cadrage pour les programmes et donne ensuite un avis sur les programmes produits. Seuls les programmes ayant reçu un avis favorable du CNP sont présentés au Conseil Supérieur de l'Éducation.

1. La Charte des programmes

De fait, le CNP va rédiger une Charte des programmes, publiée au BO du 20 février 1992, qui précise le processus de design curriculaire dans ses différentes composantes et où s'expriment les valeurs et le contrat social qui sous-tendent ce processus. Il est intéressant de souligner que cette charte elle-même est le résultat d'une très large concertation, qui a impliqué les directions pédagogiques du Ministère de l'Éducation nationale, les syndicats d'enseignants, les associations de spécialistes, les mouvements pédagogiques et les fédérations de parents d'élèves.

Il ne nous est pas possible de rentrer ici dans les détails de cette charte mais, dans la perspective qui est la nôtre, d'étude de l'évolution des processus de design curriculaire et du contrat social avec l'École, nous voudrions insister sur quelques points :

<u>La vision générale :</u>

Celle-ci est précisée dans l'avant-propos dont nous reproduisons l'extrait suivant :

> Refondre l'ensemble des programmes de l'école primaire à la classe Terminale des lycées est une vaste entreprise qui, au-delà de l'actualisation nécessaire des contenus, suppose une réflexion de fond sur les finalités de la formation des élèves, les critères qui président à la sélection des savoirs disciplinaires, les

---

[15] Dans le premier CNP, on trouve ainsi 10 universitaires ou de statut équivalent, 5 enseignants de statut secondaire, 1 enseignant du primaire, un conseiller pédagogique, un proviseur, un responsable d'association et deux directeurs de sociétés ; dans le dernier CNP, 13 universitaires ou équivalent, 5 enseignants de statut secondaire, 1 enseignant du primaire, et 4 inspecteurs généraux.

[16] Les procédures de choix sont en revanche opaques.

> articulations entre objectifs de connaissances et objectifs de socialisation, indissociablement liés, si l'on veut non pas que les apprentissages scolaires soient leur propre fin mais qu'ils débouchent sur un réinvestissement hors du monde scolaire pour permettre aux jeunes de construire leur vie personnelle, leur vie professionnelle et d'être des citoyens responsables. (p.1)

C'est la première fois qu'un document de cadrage pour la rédaction des programmes de l'ensemble du système éducatif est élaboré : il répond au souci d'introduire les cohérences nécessaires à la réalisation des finalités du système éducatif, telles qu'elles sont définies dans la loi d'orientation : mener 100 % d'une classe d'âge à une qualification et, pour cela, centrer les démarches du système éducatif sur l'élève. »

Ceci étant, la charte définit « les principes qui doivent fonder l'élaboration des programmes disciplinaires », délimite ce qui est du ressort des programmes d'une part et des documents d'accompagnement d'autre part, ainsi que les modalités de leur diffusion et celles « de la concertation pendant leur durée de vie ».

<u>La définition des programmes et leur contenu :</u>

La charte réaffirme la nécessité de programmes offrant un cadre de référence national qui a valeur règlementaire et fonde pour chaque discipline d'enseignement et chaque niveau, le contrat d'enseignement. Le programme proprement dit est complété de deux types de documents d'accompagnement, à destination des enseignants d'une part, des élèves et de leurs parents, ainsi que des employeurs pour l'enseignement professionnel d'autre part. Dans l'exposé des principes qui doivent guider l'élaboration des programmes, le texte insiste notamment sur la nécessité de prendre en compte

> les étapes et le rythme du développement de l'élève, tels que permet de les apprécier l'état actuel de nos connaissances, avec la cohérence propre à la discipline,
> favoriser des situations d'apprentissages qui permettent de développer chez les élèves les attitudes fondamentales qui donnent sens aux démarches intellectuelles et sociales (p. 2)

ainsi que sur l'importance à attacher à la cohérence verticale (au long du cursus) et à la cohérence horizontale (entre disciplines).

Les programmes eux-mêmes doivent être déclinés en termes d'objectifs, de connaissances et de compétences. Au niveau des objectifs, il est demandé de distinguer entre les objectifs généraux à un cycle d'études ou une filière de formation, qui font l'objet d'un texte introductif commun à tous les programmes disciplinaires, et ceux spécifiques à une discipline, déclinés eux-mêmes en objectifs par cycle ou filière, et en objectifs par niveau. Les contenus d'enseignement sont, quant à eux, exprimés en termes de connaissances et compétences, comme le montre l'extrait suivant :

> Le programme énonce les contenus disciplinaires en terme de connaissances et de compétences à acquérir :
> connaissances, c'est-à-dire notions et concepts ainsi que savoir-faire propres à la discipline ; pour certains niveaux et certaines disciplines, il est important de définir aussi le type d'activités à pratiquer ;
> compétences terminales visées en fin d'année, dans la perspective de fin de cycle ou de fin de formation : le programme détermine chaque fois le niveau de compétence visé, en donnant une liste des tâches que les élèves devront être capables d'accomplir. (p.3)

Le programme doit par ailleurs distinguer entre des connaissances et savoir-faire dont la maîtrise technique est requise pour passer au niveau supérieur, et ceux dont l'apprentissage est seulement amorcé.

La charte précise également la fonction et le contenu des différents documents d'accompagnement. Ceux destinés aux enseignants doivent leur permettre de comprendre les choix effectués lors de l'élaboration des programmes et favoriser leur mise en œuvre. A ce titre, ils doivent notamment formuler de façon explicite et argumentée en quoi telle connaissance ou tel savoir-faire aident à la construction de telle compétence : il montre l'articulation entre l'acquisition de savoirs, les méthodes propres à la discipline, les tâches proposées aux élèves et les savoir-faire qu'elles mettent en œuvre. (p.4)

Ils doivent également proposer :

des parcours pédagogiques, des situations d'apprentissage et des activités diversifiées, qui respectent toujours le programme et permettent de les mettre en œuvre ;
des pistes pour la mise en œuvre d'une évaluation formative et des moyens pour atteindre les objectifs visés ;
des moyens facilitant la mise en place d'auto-évaluations ;
des pistes et des activités pour le travail des élèves en autonomie et la mise en œuvre de la pédagogie du projet ;
des activités de synthèse ou de recherche à accomplir par les élèves ;
des activités d'approfondissement, de réinvestissement pour une compréhension ou assimilation meilleures. (p.5)

Il leur est également demandé de souligner les convergences et les méthodes propres à la discipline et celles d'autres disciplines et de proposer des pistes pour des activités interdisciplinaires, en associant les documentalistes pour ce qui concerne l'approche méthodologique des contenus. Enfin, ils doivent inclure

une bibliographie facilement accessible sur les problèmes pédagogiques, la didactique de la discipline et, éventuellement pour certaines questions touchant la discipline, une bibliographie minimale. (p.5)

La description des documents d'accompagnement destinés aux élèves, parents et employeurs le cas échéant, est moins détaillée mais il est précisé que leur fonction

est de donner des informations et de faire comprendre aux élèves et à leurs parents les raisons des exigences auxquelles les élèves doivent satisfaire au cours et au terme de l'année scolaire. Dans les formations professionnelles et technologiques, il doit permettre aux futurs employeurs de connaître les savoirs, savoir-faire et le niveau de compétence acquis en fin de formation ».[17] (p.5)

La charte rappelle ensuite la responsabilité, mentionnée plus haut, des groupes disciplinaires pour l'enseignement général et celle des commissions professionnelles consultatives pour l'enseignement professionnel et technologique, pour ce qui est de la rédaction des programmes, conformément au décret de février 1990, ainsi que le fait que, selon ce même décret, le Conseil national des programmes est consulté sur les conclusions des travaux de ces groupes.

Selon la charte, tout ceci nécessite un travail conjoint des groupes disciplinaires sur les cohérences et les convergences interdisciplinaires et que,

tout au long de l'élaboration des programmes, le travail de réflexion soit mené dans un débat pluraliste avec des spécialistes représentatifs de la discipline (entendue au sens large) [que les CPC, de leur côté] opèrent la confrontation nécessaire entre les acteurs professionnels des entreprises, les enseignants et les organismes de recherche (laboratoires publics, centres techniques industriels…) sur les qualifications et les contenus. (p.6)

Il est ajouté que la transparence du dispositif doit être

garantie par la mise en place d'une structure efficace d'échanges notamment avec les associations, par la publication de la composition des différents groupes qui élaborent les projets de programmes. (p.6)

<u>L'accompagnement et la régulation :</u>

La charte précise que les programmes doivent être en vigueur pour une durée minimale de 5 ans, et que tous les enseignants, y compris les enseignants stagiaires en IUFM, doivent

[17] La production de documents destinés plus particulièrement aux parents avait été initiée sous le ministère de Jean-Pierre Chevènement. Elle avait alors conduit à la publication des programmes de l'enseignement primaire de 1985 en livre de poche.

recevoir programmes et documents d'accompagnement qui devraient être pour eux des instruments de travail essentiels.

La question du suivi est elle aussi explicitement abordée. Il est écrit que « pendant les cinq années où le programme est en vigueur, il fait l'objet d'un suivi rigoureux, s'appuyant sur la concertation la plus large possible », et le texte précise la façon dont le CNP conçoit cette large concertation :

> Dans l'année qui précède l'entrée en application des nouveaux programmes, des actions d'information et de formation sont lancées pour expliquer les changements, et susciter l'intérêt et la participation active des enseignants à leur mise en œuvre (on pourra utiliser à cette fin les ressources qu'offrent les technologies modernes, télévision, télématique…). Dans les établissements, les équipes pédagogiques, réunies en conseils d'enseignement d'abord disciplinaires, puis interdisciplinaires, font les choix pédagogiques adaptés aux élèves dont ils ont la responsabilité ; cette démarche s'intègre au projet d'établissement.
>
> Les groupes disciplinaires seront à l'écoute des professeurs du terrain et de leurs représentants, des élèves et de leurs parents et prendront connaissance des évaluations de l'inspection générale. Ils seront destinataires des remarques émanant des professeurs et des élèves sur la faisabilité de ce qui est proposé, les problèmes suscités par la mise en œuvre, et des suggestions sur des évolutions possibles. Des réunions d'enseignants seront systématiquement organisées dans les académies pour recueillir les avis. Une mission placée auprès de chaque recteur, facilite l'expression et recueille les remarques des professeurs et des élèves.
>
> Les associations de spécialistes, les mouvements pédagogiques, les représentants des branches professionnelles, les organisations syndicales, les éditeurs scolaires, les fédérations de parents d'élèves et les organisations d'élèves représentatives seront associés à cette concertation. (p.7)

Il est de plus ajouté que

> dans le cas des formations professionnelles, chaque programme fera, au bout de cinq ans, l'objet d'une évaluation en termes d'insertion dans l'emploi et de débouchés, en concertation entre l'inspection générale et la branche professionnelle concernée. (p.8)

Mais ces précisions ne fournissent pas pour autant un dispositif permettant d'assurer le suivi rigoureux souhaité pendant la durée d'application du programme.

La cohérence de l'enseignement tout au long de la scolarité comme celle des enseignements des différentes disciplines et le développement de l'interdisciplinarité, la clarté des choix faits pour l'enseignement et leur lisibilité pour les acteurs du système éducatif mais aussi, au-delà du seul système éducatif, pour les élèves, les parents et les acteurs économiques et sociaux, la concertation, sont des préoccupations centrales du CNP qui se reflètent dans cette charte des programmes. S'agissant d'interdisciplinarité, le CNP envisagera même à un moment une réorganisation radicale de l'enseignement au collège : un seul enseignant y assurerait les enseignements de mathématiques, sciences et technologie, mais le projet remettant nécessairement en question le statut des enseignants de collège n'aboutira pas.[18]

Les préoccupations mentionnées ci-dessus et l'influence de la charte des programmes sur le processus de design curriculaire seront particulièrement visibles dans les processus d'élaboration des programmes pour le lycée général (programmes de 2000), l'école élémentaire (programmes de 2002) et le collège (2005). Nous nous centrerons, dans ce texte,

[18] Il est intéressant de noter que, depuis 2006, un enseignement intégré des sciences et de la technologie (EIST - http://eduscol.education.fr/cid57927/eist-en-sixieme-et-cinquieme.html) s'est mis en place à titre expérimental dans certains collèges, en sixième et cinquième avec le soutien de l'académie des sciences et l'ambition de prolonger au niveau du collège l'esprit de la Main à la pâte, de promouvoir des démarches d'investigation et décloisonner les disciplines, mais ce sont des professeurs monovalents qui prennent en charge cet enseignement au sein d'équipes pluridisciplinaires d'enseignement. Le Ministère de l'Education cherche aujourd'hui à étendre les expérimentations mais sans, semble-t-il, vouloir s'engager à fournir aux équipes d'enseignants les moyens de concertation nécessaires, faisant craindre qu'une ambition « d'optimisation » de la gestion des ressources enseignantes ne prenne le pas sur les objectifs pédagogiques affichés.

sur la réforme des lycées de 2000. Mentionnons de plus, pour ce qui concerne l'école élémentaire et le collège, la publication des deux ouvrages : *Qu'apprend-t-on à l'école élémentaire (primaire) ? Qu'apprend-t-on au collège ?*[19], rédigés pour présenter les nouveaux programmes à un large public, conformément à l'esprit de la charte.

2. L'exemple de la réforme des lycées

En ce qui concerne les cohérences horizontales et l'interdisciplinarité, la réforme de 2000 voit notamment l'introduction des TPE (Travaux personnels encadrés) en classe de première[20]. Il s'agit là de projets au moins bi-disciplinaires et mobilisant au moins une des disciplines dominantes du cursus des élèves. Ils sont menés en petits groupes sur la durée d'un semestre à raison de 2h hebdomadaires, et co-encadrés par des professeurs des disciplines concernés. Les élèves sont censés y bénéficier d'une grande autonomie, définissant eux-mêmes leur thème d'étude en liaison avec une série de thèmes nationaux relativement larges, et la problématique qu'ils souhaitent développer sur ce thème. Par ailleurs, les échanges entre les groupes d'experts de mathématiques, sciences physiques et sciences de la vie et de la terre vont se traduire par un travail commun sur le thème de la radioactivité, et ils ont une répercussion sur les programmes de mathématiques de la classe de Terminale scientifique. Il est en effet demandé d'introduire les fonctions exponentielles comme solutions d'équations différentielles de la forme y'=k.y et non plus comme fonctions inverses des fonctions logarithmes. Ce choix est en particulier justifié par le souci d'interaction avec les autres disciplines scientifiques. Par ailleurs, outre cet exemple de la radioactivité, les documents d'accompagnement présentent au fil du lycée divers exemples de questions permettant de faire des liens entre disciplines. Les programmes de collège de 2005 verront, quant à eux, l'introduction de Thèmes de convergence[21], auxquels l'enseignement des différentes disciplines doivent contribuer mais cette introduction n'étant pas associée à la mise en place d'un dispositif spécifique, comme pour les TPE, elle sera de peu d'effet.

Dans cette même réforme du lycée, le souci de prendre en compte dans l'enseignement les évolutions scientifiques et l'évolution des besoins sociaux en termes de mathématiques, conduisent notamment à donner une importance accrue à l'enseignement des statistiques, avec une introduction à la statistique, au-delà des seules statistiques descriptives dès la classe de seconde, la partie statistique étant censée correspondre environ à 1/8 du temps d'enseignement. C'est d'ailleurs une universitaire statisticienne, Claudine Robert, qui est choisie comme responsable du groupe d'experts en charge de la rédaction des programmes. Les documents d'accompagnement[22] sur cette partie statistique nouvelle, à l'enseignement de laquelle les enseignants sont très mal préparés, précisent d'ailleurs que ces nouveautés résultent du fait qu'en statistique « la pratique scolaire n'avait pas encore pris en compte l'évolution de ce domaine ».

Par ailleurs, les cohérences verticales sont explicitement mentionnées dans le programme de seconde et les documents d'accompagnement et, pour les souligner, sont rappelés dans les programmes, pour chacun des trois principaux domaines : statistiques, calcul et fonctions, géométrie, les principaux éléments de ceux des quatre années du collège[23]. Les programmes proposent aussi un certain nombre de thèmes d'étude. Ils sont présentés dans l'introduction des programmes de la façon suivante :

---

[19] http://www2.cndp.fr/ecole/quapprend/pdf/755a0212.pdf et http://www2.cndp.fr/archivage/valid/complements/36554/pdf/0RC00789.pdf
[20] http://eduscol.education.fr/pid23170-cid46519/historique-des-tpe.html
[21] ftp://trf.education.gouv.fr/pub/edutel/bo/2005/hs5/annexe5.pdf
[22] http://www2.cndp.fr/gtd_maths/pdf/ESEMA003.pdf
[23] ftp://trf.education.gouv.fr/pub/edutel/bo/2001/hs2/mathematiques.pdf

> De plus, un ensemble de thèmes d'études est proposé, dans lequel l'enseignant pourra puiser au gré du questionnement et des motivations de ses élèves ; ces thèmes, entourant le contenu du chapitre, permettent de faire vivre l'enseignement au-delà de l'évaluation sur les capacités attendues et de prendre en compte dans une certaine mesure l'hétérogénéité des classes. L'enseignant a toute liberté pour choisir les thèmes au-delà de ces propositions.

Ceci étant, la rédaction de ces programmes s'inscrit dans la continuité des usages qui se sont établis dans les années 80. Après une introduction qui précise les objectifs généraux et spécifiques, les démarches attendues, la place à accorder aux technologies informatiques, les formes d'évaluation, la présentation des programmes est structurée à partir des domaines mathématiques et, pour chacun d'eux, organisée en trois colonnes : contenus, capacités attendues et commentaires, comme c'était déjà le cas. Le langage des compétences n'est pas repris.

Enfin s'agissant de concertation, une consultation est organisée sur une période de plusieurs mois avec notamment injonction aux lycées d'organiser des demi-journées réservées à cette consultation et de faire remonter une synthèse à l'Inspection qui, elle-même, assure une synthèse pour la DGESCO. Cette consultation montre notamment que la place prise par l'enseignement des statistiques et l'extension à la statistique qui l'accompagne suscitent de nombreuses réactions négatives. A la place jugée démesurée, qui induit des réductions notables en géométrie, à l'impréparation évidente des enseignants, s'ajoutent les doutes sur la possibilité de faire sens des concepts de la statistique sans une initiation préalable aux probabilités et des interrogations sur le rôle précoce que l'on fait jouer aux simulations informatiques pour approcher les fluctuations d'échantillonnage. Les critiques sont relayées notamment par l'APMEP et les IREM. Le groupe d'experts organise des réunions pour expliquer ses choix et la façon dont il envisage cet enseignement, réunions qui se déroulent dans des ambiances parfois houleuses. De fait, la consultation conduira à des précisions et des évolutions de formulation, mais les choix effectués ne seront pas remis en question. Des documents d'accompagnement substantiels seront par ailleurs produits. Le suivi des programmes, souhaité par le CNP et le groupe d'experts qui souhaiterait d'ailleurs y participer, lui, ne sera pas mis en place.

3. Après le CNP

En 2005, comme nous l'avons mentionné plus haut, une nouvelle loi, la loi sur l'avenir de l'école est votée et, avec elle, la dissolution du CNP. Comme nous l'avons également indiqué, avec cette dissolution, les rapports de force vont également se déplacer, s'accompagnant d'une plus grande opacité en ce qui concerne les processus de design curriculaire. Par exemple, il semble encore aujourd'hui impossible de savoir par qui ont été exactement écrits les programmes de l'école élémentaire de 2008. De la même façon, lorsqu'une réforme des lycées sera de nouveau envisagée, en 2008, seul le nom du responsable de la commission en charge de l'écriture des programmes de mathématiques de la classe de seconde, le doyen de l'inspection générale de mathématiques, sera initialement rendu public et il faudra une forte pression des associations pour que le secret soit levé. Quand le projet de réforme sera momentanément abandonné, il sera demandé aux membres de cette commission de ne pas divulguer les résultats de leur travail. Les commissions qui seront mises en place lorsque le projet de réforme sera remis en chantier travailleront dans l'urgence pour les programmes de seconde et de première, sans même dans le premier cas être fixés sur les horaires exacts attribués aux mathématiques, et sans avoir d'informations précises sur l'organisation des années suivantes. Il est difficile de ne pas voir dans ces évolutions une dégradation des conditions du design curriculaire et un net recul par rapport à l'évolution vers un modèle hybride et plus démocratique à l'image de ceux que nous donnent à voir les études de cas du

Québec et de la Suisse Romande dans ces mêmes actes. L'organisation maintenue de consultations sur les projets de programme[24], et même la création mentionnée plus haut d'une commission de suivi de la mise en œuvre des programmes auront du mal à le compenser.

En fait, c'est à travers la mise en place du Socle commun de connaissances et compétences institué par cette même loi sur l'Avenir de l'école, que s'est exprimée ces dernières années l'évolution du contrat social avec l'École. Nous présentons et discutons ce processus dans la partie suivante.

III. LE SOCLE COMMUN DE CONNAISSANCES ET COMPETENCES

1. La lente genèse du socle commun

Le socle commun est d'instauration récente puisqu'établi en 2005 mais, comme le souligne Lelièvre, historien de l'éducation (2006), l'idée est loin d'être nouvelle et il en mentionne les germes dans le discours politique sur l'éducation déjà trente ans plus tôt. Dès sa première conférence de presse à l'Élysée, le 25 juillet 1974, le Président de la République Valery Giscard d'Estaing, en effet, trace les bases de ce qui devrait être le fondement du collège unique qu'il va instituer[25] et introduit dans ce contexte l'idée de savoir minimal :

> Le premier objectif, c'est l'élévation du niveau de connaissances et de culture des Français [...]. On peut se poser la question de savoir si, à côté de l'obligation de scolarité jusqu'à seize ans, il ne faudrait pas imaginer une autre obligation qui serait de donner à chaque Française et à chaque Français un savoir minimal. (Lelièvre 2006, p.2)

On y voit effectivement déjà envisagée une évolution du contrat social entre l'École et la Nation, le passage de l'obligation de rendre l'École accessible à tous à l'obligation d'un certain apprentissage pour tous. On remarquera cependant que la formulation est prudente : cette évolution n'est pas présentée comme nécessaire mais comme une question qui mériterait d'être envisagée. On notera aussi le langage utilisé, celui d'un savoir minimal qui peut prêter à de multiples interprétations. Comme le souligne Lelievre, ce langage sera effectivement mal perçu et « autant à droite qu'à gauche (!) le président fut accusé de 'minimiser les savoirs', de vouloir un nivellement par le bas ». Le débat sur la définition d'un « savoir commun minimal exprimant notre civilisation particulière » qu'il appelait de ses vœux n'aura pas lieu. Mais le changement introduit par le collège unique va néanmoins créer un contexte favorable. En effet, les problèmes rencontrés pour gérer l'hétérogénéité des classes et mettre en œuvre une pédagogie différenciée vont être très vite ressentis par un corps enseignant qui a du mal à suivre des programmes ambitieux et pas nécessairement adaptés à l'ensemble des élèves qui accèdent au collège. Dans les années qui suivent, toutes les commissions instituées sur la question scolaire vont insister sur la nécessité de fixer le noyau de savoirs et de savoir-faire fondamentaux et obligatoires que tous les citoyens devraient posséder, comme le soulignent le rapport Bourdieu-Gros et le rapport du collège de France mentionnés plus haut.

Ce sera aussi le cas du CNP. Ainsi le rapport du conseil national des programmes rédigé par Ferry en décembre 1994 propose-t-il une méthode pour instaurer un vaste débat public sur la définition d'un « socle commun fondamental » (on notera l'évolution de langage) ayant sa conclusion dans l'enceinte du Parlement. Mais cette proposition, remise au Ministre de l'Education nationale François Bayrou en décembre 1994, restera lettre morte. Il n'y aura pas de définition d'un socle commun fondamental et, a fortiori, pas de débat public. Pour

[24] Le peu d'effet de ces consultations, pour ce qui concerne les programmes de la classe de terminale, a été notamment dénoncée dans un communiqué commun de l'APMEP et de la SMF (Société mathématique de France).

[25] Le collège unique sera institué dans le cadre de la réforme Haby, l'année suivante.

Lelievre, « François Bayrou, bien qu'il ait lancé la formule 'collège unique, collège inique' limite les changements apportés au collège pendant ses quatre années de ministère à quelques transformations secondaires » (ibidem, p.2).

Il faudra attendre que la commission Thélot (du nom de son président), chargée par le gouvernement en 2003 de préparer une loi d'orientation sur l'école, remette son rapport intitulé « *Pour la réussite de tous les élèves* » en octobre 2004 pour que l'idée du socle soit enfin sérieusement prise en compte par le pouvoir politique en place. Cette fois, le débat public a été organisé, structuré, et synthétisé par une commission plurielle et indépendante. Il ressort dès le texte introductif du rapport que :

> Les Français ont demandé que se réduise l'abîme entre ce que l'on dit et ce que l'on fait. L'écart entre les généreux propos fondateurs sur l'école et la réalité quotidienne de son fonctionnement local n'est plus supporté […] Aussi le message principal qui se dégage du grand débat et auquel la Commission a voulu répondre est-il clair : il faut que l'école fasse vraiment réussir tous les élèves. (p 1)

La question est posée en termes de réussite nécessaire de tous les élèves et elle implique clairement un changement de contrat social entre l'École et la Nation. Comme le montre l'étude de cas réalisée au Québec pour ce colloque, différentes visions peuvent être élaborées de ce que l'on entend par réussite pour tous. Ce que la commission va proposer comme premier programme d'action consiste à s'assurer que, durant la scolarité obligatoire, chaque élève maîtrise le socle commun des indispensables et trouve sa voie de réussite. Initialement, ce socle s'articule autour des fonctions suivantes considérées comme primordiales : lire, écrire, compter, maîtriser la langue et les discours, connaître les principales opérations mathématiques, s'exprimer (y compris en anglais de communication internationale), se servir de l'ordinateur, vivre ensemble dans notre république.

Une des vives critiques que va soulever ce projet est cette idée de retour aux fondamentaux. Les humanités et les sciences expérimentales n'apparaissent pas. Le socle ainsi pensé est resserré autour de deux piliers, français et mathématiques, ne proposant comme ouverture qu'une compétence en anglais et une autre en informatique ainsi que l'éducation à la vie en commun. Malgré cela, le projet n'a pas que des détracteurs, comme en témoigne l'article publié par Legrand dans le Bulletin de l'APMEP en janvier 2006. Pour cet inspecteur général, ce projet permet :

> de rompre avec la rigidité des parcours, le bourrage engendré par la multiplicité des disciplines, le refus de prendre en compte l'hétérogénéité des élèves, l'orientation autoritaire. (p. 77)

En effet, dès cette période, à l'idée de socle est aussi associée l'idée d'apprentissage personnalisé, avec un découpage en cycles de l'école élémentaire et du collège : cycle des apprentissages de base (Grande section de maternelle, CP, CE1), cycle des approfondissements (CE1, CE2, CM1, CM2, 6^{e}), suivi d'un cycle de diversification (5^{e}, 4^{e} et 3^{e}). A partir du CE2, les enseignements hors socle s'enrichissent et, dès la 5^{e}, des enseignements complémentaires, en fonction des intérêts et des aptitudes des élèves sont envisagés pour permettre à chacun de trouver sa voie de réussite. Il est à noter qu'un élève ne peut pas a priori passer d'un cycle au suivant sans avoir attesté la maîtrise des indispensables. Pour ceux, supposés être une petite minorité[26], qui à l'issue de la scolarité obligatoire n'auraient pas atteint le niveau défini par le socle, le droit à un complément de formation est envisagé.

Cette nouvelle organisation de la scolarité suscite cependant la crainte chez certains d'un retour à une école différenciée comme l'était celle la première moitié du 20^{ième} siècle quand co-existaient ordre primaire et secondaire (Gispert, 2011), la crainte d'une remise en question

[26] Les évaluations récentes montrent que ce n'est pas le cas.

de l'idée de collège unique. Or même si le collège unique est régulièrement critiqué et considéré comme le maillon faible du système éducatif, les sociologues et chercheurs en éducation, comme le souligne Mons (2007), s'accordent très largement sur le constat un quasi que :

> ce sont les systèmes qui, dans l'enseignement obligatoire, mixent le plus possible les élèves de niveaux scolaires et de conditions sociales différents qui sont les plus efficaces. A contrario, aux enquêtes internationales, comme celles de PISA, les résultats les plus faibles sont observés dans les pays qui ont conservé les filières, la destinée sociale des enfants se décide alors aux alentours de 10-11 ans. C'est d'ailleurs pour cela que des pays comme l'Allemagne et l'Autriche sont eux en train de penser à la mise en place d'une école unique.(8$^{\text{ième}}$ réponse).

En avril 2005, comme cela a été dit plus haut le CNP est supprimé et ses attributions sont en partie transmises au HCE, autorité indépendante constituée de 9 membres nommés pour 6 ans[27]. Le HCE est sollicité par le Premier Ministre d'émettre un avis sur le socle. La méthode choisie par le HCE consiste à effectuer de nombreuses auditions d'acteurs et d'experts, à rassembler de nombreuses contributions écrites pour aboutir, dans un premier temps, à des recommandations sur le texte à venir puis, dans un second temps, à formuler son avis sur le projet de décret. Bouvier, ancien recteur et membre du HCE, précise dans (Bouvier 2007) que :

> Le HCE, au sujet du socle, avait retenu comme important que les compétences soient transversales, que toutes les disciplines enseignées puissent leur apporter leur contribution et surtout que l'évaluation se fasse sans compensation entre les compétences, l'ensemble du socle ne constituant pas la totalité de l'enseignement.(p. 505)

Il relate qu'il y eut deux sortes de sujets : ceux polémiques comme l'enseignement de l'anglais, celui de l'histoire, les questions de citoyenneté, d'éducation et le vivre ensemble, et ceux comme les mathématiques et les sciences qui dégagèrent des consensus très clairs. En effet :

> l'importance à accorder très tôt aux mécanismes et algorithmes, à la mémoire, au calcul mental, aux quatre opérations, fut citée lors de nombreuses auditions, sur la base d'arguments scientifiques éclairants. De même que le sens des énoncés vrais en sciences expérimentales comme en mathématique avec en plus, pour cette discipline, la place centrale de la rigueur et de la démonstration.(p. 505)

Porteur de cette lente gestation, le socle commun des connaissances et des compétences, introduit dans la loi en 2005, sera finalement intégré au code de l'Education par le décret du 11 juillet 2006. En quoi consiste-t-il exactement et quelle place y ont les mathématiques ? C'est ce que nous précisons dans le paragraphe suivant.

2. Le socle commun : description

Selon son texte introductif reproduit en annexe 1, le socle commun constitue le « ciment de la nation » et

> présente ce que tout élève doit savoir et maîtriser à la fin de la scolarité obligatoire. Il constitue l'ensemble des connaissances, compétences, valeurs et attitudes nécessaires pour réussir sa scolarité, sa vie d'individu et de futur citoyen.(p. 3)

Comme le soulignent divers textes, c'est la première fois, depuis les lois de 1882 et l'avènement de la scolarité obligatoire sous Jules Ferry, qu'un tel texte de loi à portée pédagogique est voté concernant l'École. C'est aussi « la première fois, dans l'histoire de

---

[27] Trois sont nommés par le président de la république, 2 par le président de la chambre des députés, 2 par le président du Sénat et 2 par le président du Conseil économique et social.

l'enseignement de notre pays, qu'une obligation de résultats est fixée à l'École ».[28] Il ne fait donc pas de doute, dans l'esprit du législateur, qu'il constitue un élément clef du contrat qui lie l'École et la nation.

Le socle commun est organisé autour de sept grandes compétences, composées chacune de connaissances essentielles, de capacités à les utiliser et d'attitudes indispensables tout au long de sa vie, comme l'ouverture aux autres, la curiosité, la créativité, le respect de soi et d'autrui. On retrouve, dans ce langage des compétences, celui utilisé dans les instances européennes (cf. la recommandation du Parlement européen et du Conseil de l'Union européenne en matière de « compétences clés pour l'éducation et l'apprentissage tout au long de la vie ») et le programme d'évaluation internationale PISA de l'OCDE, deux références d'ailleurs rappelées dans le texte d'introduction. Le socle porte donc la marque explicite de déterminations qui dépassent la seule société française.

Ces compétences, appelées aussi les piliers du socle, sont les suivantes : la maîtrise de la langue française, la pratique d'une langue vivante étrangère, les principaux éléments de mathématiques et la culture scientifique et technologique, la maîtrise des techniques usuelles de l'information et de la communication, la culture humaniste, les compétences sociales et civiques, l'autonomie et l'initiative. Cinq des piliers concernent des disciplines enseignées mais le socle commun ne prétend ni être un condensé des programmes, ni s'y substituer.

En mathématiques, on peut lire ainsi dans les programmes du collège[29], que :

> « Le socle recouvre la quasi-totalité des champs du programme, la différence entre le programme proprement dit et le socle commun résidant surtout dans le degré d'approfondissement et d'expertise attendue ». (p. 9)

Il est ainsi précisé, à titre d'exemple, qu'en géométrie, tous les élèves doivent apprendre à raisonner et à argumenter mais que l'écriture formalisée d'une démonstration n'est pas un exigible du socle. Cette idée est d'ailleurs reprise, même renforcée, quand on lit le préambule en géométrie, relatif à la classe de quatrième :

> Les activités de découverte, d'élaboration et de rédaction d'une démonstration sont de natures différentes et doivent faire l'objet d'une différenciation explicite. (p. 30)

Outre des différences dans les degrés d'expertise attendus, suivant que l'on prenne comme référence le socle ou les programmes, on trouve des différences au niveau des connaissances étudiées et des capacités attendues à chaque niveau de la scolarité. Celles qui ne sont pas exigibles figurent en italique dans les programmes, précédées d'un astérisque si elles deviennent exigibles à un autre niveau du socle. Ce codage (italique ou écriture droite) entraine la nécessité pour les enseignants d'une double lecture des programmes à chaque niveau d'enseignement. L'importance des parties en italiques, comme le montre l'annexe 2, montre de plus que, contrairement à ce que pourraient laisser croire les affirmations citées plus haut, il y a des différences sensibles entre le socle et le programme, et que par exemple l'algèbre en est quasiment absente. Ainsi, une double référence s'installe-t-elle avec le risque que l'enseignement ne se réduise à ce qui, dans les programmes à un niveau donné, fait partie des exigences du socle commun, dans les secteurs les plus fragiles de la société.

Mais les différences entre programmes d'enseignement et socle commun comme les changements apportés par le socle ne peuvent s'apprécier correctement à l'aune de cette seule comparaison. Pour en prendre la mesure en ce qui concerne les mathématiques, il nous faut

[28] Introduction du rapport de la mission d'information parlementaire sur la mise en œuvre du socle commun au collège (avril 2010).

[29] Bulletin officiel spécial n°6 du 28 août 2008

rentrer plus précisément dans le contenu du socle, en revenant au texte du décret du 11 juillet 2006. Les mathématiques figurent dans le troisième pilier avec la culture scientifique et technologique. Elles sont présentées dans un paragraphe dont la dénomination est « Les principaux éléments de mathématiques ». L'introduction de cette partie précise :

> Dans chacun des domaines que sont le calcul, la géométrie et la gestion des données, les mathématiques fournissent des outils pour agir, choisir et décider dans la vie quotidienne. Elles développent la pensée logique, les capacités d'abstraction et de vision dans le plan et dans l'espace par l'utilisation de formules, de modèles, de graphiques et de diagrammes. Il s'agit aussi de développer le raisonnement logique et le goût de la démonstration. (p. 10)

Même s'il n'oublie pas la dimension culturelle de l'enseignement des mathématiques et la contribution spécifique de cette discipline à la formation du raisonnement, ce texte met donc clairement en avant une vision pragmatique des attentes vis-à-vis de l'enseignement des mathématiques orientée vers la vie quotidienne et les besoins du futur citoyen. Et cette vision pragmatique s'exprime dans le langage des compétences. Pour Kahn et Rey (2009), une particularité du socle est de partir d'une idée de compétence au sens large pour définir ensuite des compétences générales et des compétences spécifiques. Considérons par exemple dans les principaux éléments de mathématiques la compétence *« Pratiquer la déduction »*. Elle appartiendrait selon eux à la première catégorie car elle précise bien le type d'opération à effectuer (on pourrait dire qu'elle définit un genre de tâche au sens de la théorie anthropologique du didactique (TAD)) mais laisse ouverts le type d'objets et de situations sur lequel on effectue cette opération, alors que « effectuer des tracés à l'aide des instruments usuels (règle, équerre, compas, rapporteur) : parallèle, perpendiculaire, médiatrice, bissectrice » serait une compétence spécifique car elle porte sur des objets définis d'une manière univoque. Pour ces auteurs,

> ces compétences générales peuvent à première vue paraître très intéressantes, d'abord parce qu'elles semblent pouvoir donner lieu à des rapprochements transdisciplinaires féconds, ensuite parce qu'elles permettent d'envisager que des habitudes intellectuelles acquises au sein des disciplines scolaires puissent ensuite servir sur des objets différents, dans la vie extrascolaire. Malheureusement, aussi bien l'expérience des enseignants que les travaux de psychologie cognitive font apparaître qu'un élève qui sait accomplir une opération sur un objet et dans un contexte donné n'est pas toujours capable d'accomplir le même type d'opération sur des objets différents. (p. 25)

Ils en déduisent qu'il n'est pas facile pour l'enseignant d'amener les élèves à construire de telles compétences générales. En reprenant l'exemple du « tracé », la tâche semble beaucoup plus facile. Il n'en est pas de même cependant pour toutes les compétences spécifiques. C'est ainsi que le cas de la compétence : « Savoir quand et comment utiliser les opérations arithmétiques élémentaires » est plus délicat car, même si les objets mathématiques concernés sont bien précisés, l'ensemble des situations reste indéterminé et, sans plus de précision, peut correspondre à des tâches de complexité très variable dans des contextes plus ou moins familiers à l'élève. Ceci amène les deux auteurs à distinguer entre des compétences spécifiques proches de procédures de base et des compétences où l'élève doit utiliser des procédures qu'il connaît pour répondre à une situation nouvelle c'est-à-dire une situation inédite. Ils dénomment ces dernières des compétences avec mobilisation[30]. Et ils ajoutent que c'est dans ce cadre, pour ne pas développer uniquement chez les élèves des procédures de base, que le socle insiste sur l'importance de la résolution de problèmes :

> La maîtrise des principaux éléments de mathématiques s'acquiert et s'exerce essentiellement par la résolution de problèmes, notamment à partir de situations proches de la réalité. (p. 10)

[30] On peut relier cette notion à celle de connaissance disponible au sens de Robert (1998) ou de technique r-convoquée au sens de Castela (2008).

Pour finir de brosser ce portrait du socle, rappelons que les connaissances et compétences du socle doivent être acquises progressivement, au fil de la scolarité obligatoire, pour rendre l'élève « capable de mobiliser ses acquis dans des tâches et des situations complexes, à l'École puis dans sa vie ». Trois moments clefs de la scolarité donnent lieu à une validation institutionnelle : la fin du cycle 2 (CE1) et la fin du cycle 3 (CM2) à l'école élémentaire, la classe de troisième au collège, cette validation s'appuyant depuis 2010 sur un livret personnel de compétences qui suit l'élève au fil de sa scolarité. Depuis 2011, la maîtrise des sept piliers du socle est d'ailleurs nécessaire pour obtenir le diplôme national du brevet (D.N.B.) passé, par les élèves, en fin de troisième. Comme on pouvait l'anticiper, cette double évaluation via d'une part la réussite au DNB qui repose sur la moyenne des notes obtenues aux épreuves finales et au contrôle continu dans les différentes disciplines, avec des épreuves basées sur la logique des programmes, d'autre part la validation du socle commun qui, elle, repose sur la validation des 7 piliers du socle et s'effectue sans compensation possible et en obéissant à la logique du socle, met bien évidence, par les perturbations qu'elle crée, la difficulté qu'il y a à à concilier ces deux logiques. Nous reviendrons ultérieurement sur ce point mais il nous semble intéressant de signaler ici que la validation du socle n'est pas exigée pour valider le brevet d'enseignement technologique, ceci montrant bien que le système éducatif reconnaît qu'il n'est pas aujourd'hui dans l'état d'assurer la maîtrise du socle à tous les élèves en fin de collège. Précisons cependant que, selon la loi du 23 avril 2005, un élève qui risque de ne pas maîtriser les compétences du socle commun doit se voit proposer un "programme personnalisé de réussite éducative" (PPRE), à tout moment de la scolarité obligatoire.

3. Validation du socle commun : le livret personnel de compétences

Evaluer les connaissances et compétences du socle ne va pas de soi et l'on retrouve ici un problème qui n'est pas propre au socle commun comme le montre par exemple l'étude de cas concernant la Belgique francophone dans ces mêmes actes. Comme mentionné ci-dessus, bien que le socle commun ait été institué en 2006, ce n'est que récemment qu'un outil spécifique, le livret personnel de compétences (LPC), a été mis à la disposition des professionnels de l'enseignement, par l'arrêté du 14 juin 2010[31]. Trois diaporamas dont deux réalisés à l'intention des enseignants[32] (mise en œuvre du LPC à l'école élémentaire et mise en œuvre du LPC au collège, DGESCO janvier 2011 et août 2010) et un à destination des parents (socle commun et LPC, DGESCO, août 2010) sont consultables sur le site Eduscol.

Ces diaporamas rappellent le cadre Européen dans lequel s'inscrit le socle mentionné plus haut, les sept compétences évaluées ainsi que les trois paliers où une attestation de maîtrise sera renseignée. Une page du LPC est présentée et permet d'expliquer, sur un exemple, ce qui correspond à la compétence, au domaine et aux items. La double fonction du livret, fonction pédagogique (valorisation des acquis, suivi du parcours, articulation école-collège, mise en évidence des liens entre disciplines) et fonction institutionnelle (attestation des compétences aux trois paliers) est précisée. Des recommandations pour valider sont faites en précisant notamment comment on passe de la validation des items à la validation des compétences. Il est également rappelé qu'en cas de non validation d'un palier, une aide individualisée doit être organisée et que, par ailleurs, la validation du socle peut se poursuivre au lycée ou en formation d'apprentis.

---

[31] http://media.education.gouv.fr/file/27/02/7/livret_personnel_competences_149027.pdf
http://eduscol.education.fr/cid55510/banque-de-situations-d-apprentissage-competence-3.html
[32] http://media.eduscol.education.fr/file/socle_commun/86/8/LPC_ecole_primaire_mise-en-oeuvre_169868.pdf
http://media.eduscol.education.fr/file/socle_commun/68/6/LPC-presentation-enseignants_163686.pdf
http://media.eduscol.education.fr/file/socle_commun/91/4/LPC-presentation-familles_161914.pdf

Nous n'avons aujourd'hui pas assez de recul pour savoir si, concrètement, le LPC va pouvoir remplir les fonctions pour lesquelles il a été mis en place mais tout laisse à penser que son utilisation ne peut aller de soi, d'une part parce que ce mode d'évaluation est en rupture avec les pratiques usuelles d'évaluation des enseignants, d'autre part parce que l'outil, tout en étant complexe et multipliant les rubriques, reste relativement imprécis quant à ce que signifie la validation de chacune d'elles. Un témoignage nous est fourni par Delatouche dans un article des *Cahiers pédagogiques* (2011). Cette Professeure des écoles, étudiante en sciences de l'Education, s'est entretenue avec une vingtaine d'acteurs de l'école élémentaire (inspecteurs de l'éducation nationale, conseillers pédagogiques, professeurs des écoles) dans la région parisienne. Tous se demandent en premier lieu « comment valider de façon juste ? » Doivent-ils mettre oui ? Doivent-ils mettre non quand une compétence est à renforcer ou en cours d'acquisition ? Dans le doute, la plupart d'entre eux avouent préférer renseigner la case « oui » plutôt que la case « non ». C'est d'autant plus vrai en ZEP, où l'enseignant aurait peur de stigmatiser ses élèves. Par ailleurs il semble, selon l'inspection générale de mathématiques, que l'on assiste à de grandes disparités entre établissements concernant la validation du socle commun, allant de 50% à 100% pour les pourcentages de validation, des disparités inexplicables par des différences de niveau entre les établissements.

Les personnes interrogées par Delatouche regrettent le peu de ressources spécifiques en termes de banque d'activités pour l'enseignement primaire. Quelques ressources pour les mathématiques existent par exemple (Obert, Verriez, Gouy, 2010) ainsi qu'une banque d'activités sur Eduscol dans la rubrique « Outils pour l'évaluation », mais elles concernent essentiellement le collège et sont souvent complexes, différentes des tâches d'évaluation usuelles au collège. Ces ressources mettent bien en évidence le fait que, même si une activité est centrée sur les mathématiques, elle contribue en général à développer des compétences relatives à d'autres piliers, notamment la maîtrise de la langue, la maîtrise des techniques usuelles de l'information, l'autonomie et l'initiative, et à la fois des compétences spécifiques de base et des compétences à forte mobilisation. Les personnes interrogées mentionnent d'autres aspects problématiques du LPC : les différences de formulations selon les piliers et les champs disciplinaires associés qui peuvent donner l'impression que le LPC ne propose pas réellement une évaluation des trois types de compétences ; le déséquilibre enfin qui peut exister entre le nombre d'items du LPC pour une discipline et le nombre d'heures qui lui est imparti dans l'enseignement, un déséquilibre particulièrement criant pour le pilier « La pratique d'une langue vivante étrangère » au primaire.

La conclusion de cette enquête suivant l'auteur est :

> la difficile appropriation du LPC, et d'autre part, les effets de son adaptation en fonction des contextes socioculturels d'enseignement avec un risque d'abaissement des exigences dans des contextes plus défavorisés. (p. 67)

Cette conclusion montre bien la nécessité d'observer finement la façon dont les enseignants vont s'emparer de cet outil, et les effets qui vont en résulter sur la validation du socle, et plus généralement sur leurs pratiques d'évaluation et leurs pratiques d'enseignement. Un rapport très récent du HCE dresse un bilan de la mise en œuvre du socle commun[33] et confirme l'existence de ces difficultés tout en soulignant que ce n'est qu'avec un certain retard que l'institution a commencé à s'atteler sérieusement à la mise en œuvre du socle commun, avec tout ce que cela devrait impliquer en termes d'harmonisation, de ressources, d'accompagnement, de formation. Il est d'ailleurs intéressant de signaler que, dans ce rapport, le cas du pilier 3, c'est-à-dire des mathématiques et des sciences, est plusieurs fois cité comme un exemple à suivre de ce point de vue :

[33] http://www.hce.education.fr/gallery_files/site/21/116.pdf

> Les personnels sont souvent demandeurs d'un "mode d'emploi du socle", d'outils d'ordre pédagogique, cohérents avec les grilles de références, conçus, ou du moins diffusés, au niveau national, pour les aider à faire maîtriser le socle commun par tous les élèves. Ces outils ont été réalisés pour la seule compétence 3 - les principaux éléments de mathématiques et la culture scientifique et technologique -, à partir de 2009 : vade-mecum (mis à jour en janvier 2011), banque de situations d'apprentissage (mise à jour en mai 2011), etc. Pour cette même compétence 3, un document d'appui ministériel indique la progressivité des exigences de la 6ème à la 3ème pour chaque item du livret personnel de compétences. C'est une aide précieuse. (p.15)

Au-delà de son mode de description des attentes institutionnelles, au-delà de son mode de validation qui rompt avec les usages curriculaires de l'école, le socle commun exprime un changement de contrat social en ce qu'il demande à l'école d'assurer aux élèves la maîtrise du socle commun à l'issue de leur scolarité obligatoire. Même si certains considèrent, comme le souligne le rapport du HCE mentionné plus haut, que « le socle commun marque un abaissement des exigences et un appauvrissement culturel », ce que ce même HCE récuse, il s'agit là d'une demande que l'école est en ce moment sans doute incapable d'assurer, et l'efficacité des différents dispositifs qui sont envisagés pour les élèves qui ont des difficultés à maîtriser les compétences du socle commun reste à prouver, comme le souligne aussi ce rapport. Comment est, dans ces conditions, perçu, vécu le changement introduit par le socle commun par les acteurs du système et notamment les enseignants ? C'est ce que nous examinons dans le paragraphe suivant en nous appuyant d'une part sur des articles parus sur le socle dans le Bulletin de l'APMEP et la revue Repères IREM notamment, ainsi que sur un questionnaire proposé à des enseignants débutants dans le cadre d'une formation à l'évaluation.

4. La perception du socle commun

Dans la présentation du texte officiel, on peut lire que l'établissement du socle commun répond « à une nécessité ressentie depuis plusieurs décennies en raison de la diversification des connaissances ». L'accent est aussi mis sur le fait que

> la scolarité obligatoire doit au moins garantir à chaque élève les moyens nécessaires à l'acquisition d'un socle commun constitué d'un ensemble de connaissances et de compétences qu'il est indispensable de maitriser pour accomplir avec succès sa scolarité, poursuivre sa formation, construire son avenir personnel et professionnel et réussir sa vie en société. (p. 3)

Il est enfin mentionné que la définition du socle commun prend

> appui sur la proposition de recommandations du Parlement Européen et pour finir qu'elle se réfère aux évaluations internationales, notamment au Programme international pour le suivi des acquis des élèves(PISA).(p. 3)

C'est la perception des rapports entre socle commun, recommandations européennes et programme PISA que nous considérons d'abord.

Socle commun, Europe et PISA

La question des rapports entre le socle commun et PISA est par exemple abordée par Bodin (2007) qui souligne que sept des huit compétences évaluées par PISA sont en effet présentes dans le socle, seule la compétence « Apprendre à apprendre » n'y apparaissant pas. Selon lui, les pays de l'OCDE et d'autres, en adhérant au programme d'évaluation PISA, détaché initialement de leur curriculum ont été alertés par des résultats préoccupants :

> Alors que les niveaux de compétence sont évalués de 1 à 6 ; le niveau 2 encore très modeste est atteint dans le monde (et en France) par moins de 80% des élèves.

Tout naturellement s'est alors imposée l'idée de travailler à réduire les dissonances entre les évaluations internes et locales (par exemple, les évaluations nationales en France) et les évaluations externes.

C'est aussi, comme l'avait souligné Richard Cabassut dans sa contribution à EMF2009 (Cabassut 2009), le cas de l'Allemagne qui a effectué des choix éducatifs, ces dix dernières années, allant dans ce sens.

Dans le cadre d'une formation à l'évaluation à l'IUFM d'Amiens, le second auteur de ce texte a fait passer un questionnaire à des professeurs des écoles titulaires depuis un an (T1), en décembre 2011. L'objet de ce questionnaire était d'engager le dialogue en formation sur les enjeux de PISA et du socle, et l'une des questions posées était la suivante : « Pensez-vous que la mise en place du socle commun ait un lien avec PISA, pourquoi ? ». 21 personnes ne se sont pas prononcées, soit 31% des sondés et sur les 42 réponses positives données, trois types de raison sont apparues :

- Dans le premier type, c'est l'idée d'uniformisation européenne, effectivement mentionnée dans le préambule du décret du 11 juillet 2006, qui est invoquée : « le socle est une base commune que doivent avoir les Européens, le socle est une échelle Européenne, les contenus sont uniformisés en Europe, les objectifs sont communs,…. ».
- Dans le second type, ce sont les évaluations internationales communes qui sont mises en avant. Ces évaluations internationales des compétences des élèves se faisant à partir des mêmes bases d'exercices, cela suppose quelque chose de commun à tous les pays qui participent. Comme en France, nous avons les programmes et autre chose, à savoir le socle, c'est certainement cette autre chose qui a un lien avec PISA.
- Dans le troisième type, l'association est plus indirecte. Elle consiste à percevoir PISA comme une enquête conçue pour chercher à mettre en place un système éducatif qui fonctionne mieux. Vu qu'en France, le socle a été instauré en 2006, c'est donc lui qui a été élaboré à cet effet. Un professeur d'Ecole formule cela ainsi : « retour rétroactif en vue des résultats de PISA et ce pour améliorer les programmes (normalement) et s'interroger sur les méthodes d'apprentissage. »

D'autres questions concernaient plus directement le contenu du socle, telle la suivante : « Quelles différences faites-vous entre paliers et piliers, où retrouve-t-on ces deux termes ? ». Les 43 réponses obtenues montrent que ces jeunes enseignants connaissent l'existence des 7 piliers. Plusieurs arrivent même à les nommer intégralement, mais pour uniquement 33% d'entre eux, un pilier est une compétence. Beaucoup croient le socle découpé comme les programmes en domaines (en référence à la maternelle) ou en disciplines (en référence à l'élémentaire).

L'accueil fait au socle

Les articles que nous avons examinés tendent à montrer une perception positive du contrat social qui est sous-jacent au socle commun. C'est le cas par exemple de Durand–Guerrier (2007). La didacticienne soutient qu'il est possible d'aller vers une appropriation des mathématiques par le plus grand nombre, en proposant pour cela trois grandes directions : articuler logique et mathématiques, articuler géométrique et numérique, ancrer les mathématiques dans les différents champs de la connaissance humaine. Et elle conclut en ces termes :

> prendre au sérieux la question du socle commun de connaissances ne signifie pas nécessairement un renoncement aux ambitions légitimes que nous avons pour les élèves. Les programmes actuels de la scolarité obligatoire offrent de nombreuses opportunités pour travailler dans le sens d'un enseignement des mathématiques pour tous.(p. 239)

De même Charnay (2007), qui avait été responsable du groupe d'experts en charge de l'élaboration des programmes de l'école élémentaire de 2002, se questionne au sujet des outils mathématiques dont chacun doit disposer pour être à l'aise dans sa vie quotidienne, pour exercer pleinement sa lucidité face au flot d'informations chiffrées auquel il se trouve confronté et participer au débat politique et social, ainsi que sur le type d'activité intellectuelle que l'apprentissage des mathématiques contribue à développer plus particulièrement. Il conclut lui aussi en proposant une vision du contrat social de l'Ecole cohérente avec celle portée par le socle commun :

> le collège ne peut-être conçu que comme une école pour tous dont on doit attendre : qu'il fournisse à tous cette culture mathématique ; qu'il permette à ceux qui le choisissent d'aller plus loin dans l'appropriation de cette culture, par exemple dans le cadre d'une option scientifique dont les mathématiques ne seraient pas absentes. (p. 61)

D'autres témoignages fournis par la revue Plot, comme celui de Sermanson (2006), enseignante juste nommée dans un collège de la Vienne, montrent cependant l'investissement dont doit faire preuve un enseignant pour travailler dans l'esprit du socle. Mais elle explique aussi, en quoi, très vite, ce travail lui a semblé incontournable pour motiver des élèves de 4^{e} et 3^{e} qui décrochaient. Elle écrit :

> même si ces élèves ne représentent qu'une minorité de la classe, je ne peux pas accepter qu'ils perdent leurs temps dans mes cours et que leur passivité nuise à la dynamique du groupe. (p. 9)

Elle indique que son premier travail a été de se questionner sur l'évaluation, de faire évoluer sa pratique pour ne pas enfermer l'élève dans un constat d'échec. En 2007, avec tous les enseignants d'une classe de troisième, elle a ainsi expérimenté une méthode d'évaluation développée par Vauquois[34]. Celle-ci « consiste à expliciter à chaque activité ou devoir la liste de compétences évaluées et repérer par un code couleur l'acquisition de la compétence. ». Elle débouche sur la constitution de groupes de besoin et donne lieu ensuite à une réévaluation afin de dresser une liste de réussites propre à chaque élève. L'expérimentation s'est avérée constructive et positive pour les élèves : « le regard valorisant de l'ensemble de l'équipe enseignante sur leurs réussites leur a donné confiance en eux. Les séances de soutien ont été bien accueillies et fructueuses. » (p. 10)

Malheureusement comme elle demandait trop d'heures de présence (concertation, soutien, communication aux familles) non reconnues dans le service initial de chaque enseignant et qu'elle marginalisait trop les élèves de cette classe puisqu'ils étaient seuls à ne pas être notés, l'expérimentation n'a pas été reconduite. Ce n'est pas pour autant que ce professeur a renoncé à réfléchir à la mise en place du socle. Elle a orienté davantage sa réflexion sur la formation des élèves et conduit un travail de recherche de ressources documentaires[35] qui lui permettent de concilier socle et programme. « La référence reste le programme mais les activités proposées permettent dans leur forme de travailler à l'acquisition par tous des compétences du socle. »

---

[34] http://michel.vauquois.free.fr

[35] banque de problèmes disponibles sur eduscol dans la rubrique outils pour l'évaluation,
www.lema-project.org
brochure mathématiques et socle commun au collège : aider, évaluer, différencier, motiver, citée en référence à la fin de l'article.

Dans ce même numéro de Plot, Ah-Pine et Lagarde (2011), enseignantes en RAR[36] présentent leur propre itinéraire et les changements radicaux de pédagogie auxquels les a conduites la prise en compte du socle commun. Comme elles l'expliquent, elles ont vu le socle comme

> un moyen pour l'élève de se repérer dans ses acquisitions, un moyen de pouvoir lui donner de l'aide, de l'aider à devenir un citoyen autonome et responsable, capable de mobiliser ses compétences pour réagir face à une situation inédite (p. 14).

Ceci les a conduites à mettre en place une progression plus spiralée, en travaillant les notions dans différents contextes, avec différents degrés de difficulté, à envisager des entrées plus larges que celles classiquement adoptées comme l'entrée Grandeur, en référence aux parcours d'études et de recherche développés à l'IREM de Poitiers[37], à changer substantiellement le déroulement usuel de leurs séances de classe et leurs méthodes d'évaluation[38].

En conclusion de cette brève enquête dont nous sommes bien conscients qu'elle ne reflète que de façon biaisée, le point de vue des acteurs, ceux écrivant dans ces revues n'étant pas représentatifs de la communauté enseignante, ce qui est aujourd'hui problématique, ce n'est pas principalement la philosophie du socle mais la mise en œuvre pratique de cette idée et ce qu'elle comporte de changements dans les organisations praxéologiques et dans la façon d'évaluer les apprentissages des élèves. C'est aussi l'inscription du système curriculaire dans une double logique : celle des programmes et celle du socle, c'est l'inscription des attentes dans un langage en termes de compétences transversales dont la maîtrise est difficile à définir et à évaluer.

IV. CONCLUSION

Nous avons, dans ce texte, essayé de préciser ce que sont les processus de design curriculaire en France, en centrant plus particulièrement notre regard sur la question du contrat social entre l' École et la Nation ce qui nous semblait des évolutions récentes dans ce domaine. Ceci impose, même si l'on se limite aux mathématiques comme nous l'avons fait, d'inscrire l'étude dans celle du fonctionnement d'un système et de faire intervenir pour en décrire le fonctionnement et les dynamiques, les niveaux les plus élevés de la hiérarchie des niveaux de co-détermination au sens de la TAD . Comme on le voit bien dans ce qui précède, si ces processus s'inscrivent dans une certaine tradition culturelle, ils sont soumis aujourd'hui à des influences qui dépassent largement notre seul contexte éducatif. La nécessité d'une évolution du contrat social avec l'École est une nécessité qui s'impose d'autant plus à nous qu'y contribuent à la fois des facteurs internes et externes à ce contexte. Les formes que prend cette nécessité, son expression dans le socle commun et le langage des compétences, ne sauraient être comprises, en se limitant à notre seul contexte. Mais, dans le même temps, le récit proposé montre bien, nous semble-t-il, à quel point, notre propre contexte marque ces évolutions, la façon dont elles sont conduites, les formes qu'elles prennent et leurs effets sur le système éducatif globalement et sur les curricula mathématiques plus particulièrement. Il montre aussi à quel point les changements qui se concrétisent à un moment donné résultent d'un long processus qui reste souvent invisible à beaucoup des acteurs du système éducatif. Il montre l'influence décisive de la sphère politique, de ses enjeux et de ses temporalités propres.

---

[36] RAR : Réseaux Ambition Réussite créés en 2006 dans le cadre de la réorganisation de l'éducation prioritaire.
[37] Cf. les différentes brochures produites par cet IREM intitulées « Enseigner les mathématiques à partir des grandeurs », http://irem2.univ-poitiers.fr/portail/listepublications/descriptifs-brochures/
[38] Plus de détails peuvent être accessibles en consultant le site de l'IREM de la Réunion http://www.reunion.iufm.fr/recherche/irem/spip.php?rubrique56

Si l'on examine ce contrat social à l'aune des processus de design curriculaire, force est de constater qu'il reste marqué par une conception top-down de ce processus. Les acteurs essentiels que sont les enseignants y sont très peu associés et les évolutions dont était porteur le CNP avec notamment la charte des programmes ont, pour la plupart, disparu avec lui. Même si la rédaction des programmes est affaire de commissions où différentes communautés sont représentées, la façon dont sont choisis leurs membres est pour le moins opaque. Au-delà du seul processus de design curiculaire, on ne peut cependant nier qu'il existe des évolutions indéniables, visibles dans les choix curriculaires effectués en mathématiques, comme nous l'avons montré avec l'exemple des programmes du lycée. Mais, comme nous avons aussi essayé de le montrer, aujourd'hui c'est autour de la problématique introduction du socle commun, présentée comme réponse à l'ambition d'une École qui permette à chacun une insertion sociale et citoyenne, que se joue essentiellement l'évolution du contrat social entre l'École et la Nation.

Le travail d'enquête effectué pour cette étude de cas n'a cependant que le statut de propédeutique à ce que devrait être un travail véritablement didactique. Il ne rentre pas par exemple dans le détail des évolutions en jeu en termes d'organisations didactiques, en termes d'émergence et de structuration progressive des praxéologies. Le socle commun a, en un sens, l'ambition de briser les cloisonnements disciplinaires, de rapprocher l'enseignement des mathématiques du monde des élèves. En ce sens, l'on pourrait penser que le paradigme de questionnement du monde porté par les récents développements de la TAD (Chevallard, 2011) lui serait approprié pour une analyse didactique. Et l'on pourrait s'interroger sur la proximité praxéologique des ressources développées d'une part pour soutenir la mise en place du socle telles celles déjà mentionnées dans ce texte, d'autre part des travaux comme ceux menés par la commission inter-IREM Didactique et le groupe CDAMPERES de l'IFÉ[39] qui en est issu. Il y a certainement là tout un champ de recherches à investir pour la didactique des mathématiques, pour étudier ce processus qui n'en est qu'à ses débuts et ses conséquences sur l'enseignement des mathématiques, et pour contribuer à ce qu'il puisse servir réellement la cause de l'enseignement des mathématiques. Comme l'affirment des historiens de l'éducation comme Lelièvre ou Prost, cités par Alain Bouvier (2007) il est raisonnable en effet de penser que :

> la mise en place du socle commun avec tout ce que cela entraine de récriture des programmes, de production d'outils d'évaluation, de dispositifs d'individualisation des apprentissages, d'information du grand public, d'actions en directions des parents d'élèves, de formation des cadres et des enseignants, etc, nécessite une quinzaine d'années. (p. 505)

RÉFÉRENCES

Ah-Pin N., Lagarde C. (2011). Le socle à la Réunion. *Plot* 34, 13-19.

Belhoste B., Gispert H., Hulin N. (1996). *Les sciences au lycée. Un siècle de réformes des mathématiques et de la physique en France et à l'étranger.* Paris : Editions Vuibert.

Bouvier A. (2007). Les mathématiques, leur enseignement et la formation des maîtres, *Bulletin de l'APMEP* 471, 497-506.

Cabassut R. (2009). *Un nouveau curriculum en Allemagne : le cas du Bade-Wurtemberg* – Evaluations internationales : impacts politiques, curriculaires et place des pays Francophones. In A. Kuzniak, M. Sokhna (Eds.) *Enseignement des mathématiques et*

[39] CDAMPERES : Conception et Diffusion d'Activités Mathématiques et de Parcours d'Etude et de Recherche dans l'Enseignement Secondaire, IFÉ : Institut Français de l'Education qui a succédé à l'Innstitut National de Recherche Pédagogique. http://educmath.inrp.fr/Educmath/ressources/documents/cdamperes/

développement, enjeux de société et de formation. Actes du colloque EMF2009. Revue internationale Francophone, numéro spécial (Projet spécial 2, séance 3).

Charnay R. (2006). Quelle culture mathématique commune (ou partagée) au terme de la scolarité obligatoire ? *Repères IREM* 64, 49-61.

Chevallard Y. (2002) Organiser l'étude. In Dorier J.L., Artaud M., Artigue M., Berthelot R., Floris R. (Eds.), Actes *de la XIème Ecole d'été de didactique des mathématiques* (pp. 3-22, 41-56). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chevallard Y. (2011). L'ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD. In Margolinas, C., Abboud-Blanchard, M., Bueno-Ravel, L., Douek, N., Fluckiger, A., Gibel, P., Vandebrouck F. & Wozniak F. (Eds.). *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (pp.81–108). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Delatouche A (2011). Les livrets de compétence au primaire : beaucoup de questions ! *Les Cahiers Pédagogiques* 488, 66-67.

Durand-Guerrier V. (2006). Vers un socle commun en mathématiques Quelques pistes de réflexion. *Bulletin de l'APMEP* 463, 227-239.

Gispert H. (2011). Enseignement, mathématiques et modernité au XXe siècle : réformes, acteurs et réthoriques. *Bulletin de l'APMEP* 463, 286-296.

Legrand P. (2006). Faut-il vraiment un socle commun ? *Bulletin de l'APMEP* 462, 73-87.

Lelièvre C. (2006). Quel socle commun, un socle commun pour un collège unique, *Les Cahiers Pédagogiques* 439. http://www.cahiers-pédagogiques.com/spip.php?article209

Mons N. (2007). *Education : la France fait-elle les bons choix ?* www.cafépédagogique.net.

Kahn K., Rey B. (2009). Les pratiques doivent nécessairement évoluer. In Zakhartchouk J.-M., Hatem R. (Eds.) *Travail par compétences et socle commun* (pp. 24-29). ScerEn, CRDP Académie d'Amiens.

Prost A. (1968). *Histoire de l'enseignement en France*. Paris : Armand Colin.

Sermanson K. (2011). Mes quatre années en collège, réflexion personnelle sur le socle commun. *Plot* 34, 9-13.

ANNEXE 1

INTRODUCTION DU SOCLE COMMUN DE CONNAISSANCES ET COMPETENCES

L'établissement d'un socle commun des savoirs indispensables répond à une nécessité ressentie depuis plusieurs décennies en raison de la diversification des connaissances. L'article 9 de la loi du 23 avril 2005 d'orientation et de programme pour l'avenir de l'École en arrête le principe en précisant que « la scolarité obligatoire doit au moins garantir à chaque élève les moyens nécessaires à l'acquisition d'un socle commun constitué d'un ensemble de connaissances et de compétences qu'il est indispensable de maîtriser pour accomplir avec succès sa scolarité, poursuivre sa formation, construire son avenir personnel et professionnel et réussir sa vie en société ». De plus, par l'article 2 de la même loi, « la nation fixe comme mission première à l'école de faire partager aux élèves les valeurs de la République ».

Pour toutes ces raisons, **le socle commun est le ciment de la Nation** : il s'agit d'un ensemble de valeurs, de savoirs, de langages et de pratiques dont l'acquisition repose sur la mobilisation de l'École et qui suppose, de la part des élèves, des efforts et de la persévérance.

La définition du socle commun prend également appui sur la proposition de recommandation du Parlement européen et du Conseil de l'Union européenne en matière de « compétences clés pour l'éducation et l'apprentissage tout au long de la vie».

Elle se réfère enfin aux évaluations internationales, notamment au Programme international pour le suivi des acquis des élèves (PISA), qui propose une mesure comparée des connaissances et des compétences nécessaires tout au long de la vie. Cinq générations après les lois scolaires fondatrices de la III^{e} République, une génération après l'instauration du collège unique, **le socle constitue une référence commune, pour tous ceux qui confient leurs enfants à l'École, mais aussi pour tous les enseignants.**

L'enseignement obligatoire ne se réduit pas au socle commun. Bien que désormais il en constitue le fondement, le socle ne se substitue pas aux programmes de l'école primaire et du collège ; il n'en est pas non plus le condensé. Sa spécificité réside dans la volonté de donner du sens à la culture scolaire fondamentale, en se plaçant du point de vue de l'élève et en construisant les ponts indispensables entre les disciplines et les programmes. Il détermine ce que nul n'est censé ignorer en fin de scolarité obligatoire sous peine de se trouver marginalisé. L'École doit offrir par ailleurs à chacun les moyens de développer toutes ses facultés.

Maîtriser le socle commun c'est être capable de mobiliser ses acquis dans des tâches et des situations complexes, à l'École puis dans sa vie ; c'est posséder un outil indispensable pour continuer à se former tout au long de la vie afin de prendre part aux évolutions de la société ; c'est être en mesure de comprendre les grands défis de l'humanité, la diversité des cultures et l'universalité des droits de l'Homme, la nécessité du développement et les exigences de la protection de la planète.

Le socle commun s'organise en sept compétences. Cinq d'entre elles font l'objet, à un titre ou à un autre, des actuels programmes d'enseignement : la maîtrise de la langue française, la pratique d'une langue vivante étrangère, les compétences de base en mathématiques et la culture scientifique et technologique, la maîtrise des techniques usuelles de l'information et de la communication, la culture humaniste. Deux autres domaines ne font pas encore l'objet d'une attention suffisante au sein de l'institution scolaire : il s'agit, d'une part, des compétences sociales et civiques et, d'autre part, de l'autonomie et de l'initiative des élèves.

Chaque grande compétence du socle est conçue comme une combinaison de connaissances fondamentales pour notre temps, de capacités à les mettre en œuvre dans des situations variées, mais aussi d'attitudes indispensables tout au long de la vie, comme l'ouverture aux autres, le goût pour la recherche de la vérité, le respect de soi et d'autrui, la curiosité et la créativité.

Le socle commun s'acquiert progressivement de l'école maternelle à la fin de la scolarité obligatoire. Chaque compétence qui le constitue requiert la contribution de plusieurs disciplines et, réciproquement, une discipline contribue à l'acquisition de plusieurs compétences.

À l'école et au collège, **tous les enseignements et toutes les disciplines ont un rôle à jouer dans l'acquisition du socle**. Dans ce cadre, les pratiques scolaires artistiques, culturelles et sportives y contribuent pleinement.

L'exigence de contenu du socle commun est indissociable d'une exigence d'évaluation. Des paliers intermédiaires, adaptés aux rythmes d'apprentissage définis par les cycles, sont déterminés dans la maîtrise du socle.

Des outils d'évaluation, correspondant notamment aux exigences des différents paliers de maîtrise du socle commun, sont mis à la disposition des enseignants. Un livret personnel permettra à l'élève, à sa famille et aux enseignants de suivre l'acquisition progressive des compétences.

Afin de prendre en compte les différents rythmes d'acquisition, les écoles et les collèges organiseront un accompagnement adapté : études surveillées, tutorat, accès aux livres, à la culture et à internet. Les élèves qui manifestent des besoins particuliers quant aux acquisitions nécessaires à chaque palier se voient proposer un programme personnalisé de réussite éducative.

ANNEXE 2 : LES PRINCIPAUX ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUES

Dans chacun des domaines que sont le calcul, la géométrie et la gestion des données, les mathématiques fournissent **des outils pour agir, choisir et décider dans la vie quotidienne**. Elles développent la pensée logique, les capacités d'abstraction et de vision dans le plan et dans l'espace par l'utilisation de formules, de modèles, de graphiques et de diagrammes. Il s'agit aussi de développer le raisonnement logique et le goût de la démonstration.

La maîtrise des principaux éléments de mathématiques s'acquiert et s'exerce essentiellement par la résolution de problèmes, notamment à partir de situations proches de la réalité.

Les compétences acquises en mathématiques conditionnent l'acquisition d'une culture scientifique.

V. CONNAISSANCES

Il est nécessaire de créer aussi tôt que possible à l'école primaire des automatismes en calcul, en particulier la maîtrise des quatre opérations qui permet le calcul mental. Il est aussi indispensable d'apprendre à démontrer et à raisonner.

Il faut aussi comprendre des concepts et des techniques (calcul, algorithme) et les mémoriser afin d'être en mesure de les utiliser.

Les élèves doivent connaître :

- pour ce qui concerne les nombres et le calcul
  - les nombres décimaux, les nombres relatifs, les fractions, les puissances (ordonner, comparer) ;
  - les quatre opérations et leur sens ;
  - les techniques élémentaires du calcul mental ;
  - les éléments du calcul littéral simple (expressions du premier degré à une variable) ;
  - le calcul de la valeur d'une expression littérale pour différentes valeurs des variables ;
  - les identités remarquables ;
- pour ce qui concerne l'organisation et la gestion de données et les fonctions :
  - la proportionnalité : propriété de linéarité, représentation graphique, tableau de proportionnalité, « produit en croix » ou « règle de 3 », pourcentage, échelle ;
  - les représentations usuelles : tableaux, diagrammes, graphiques ;
  - le repérage sur un axe et dans le plan ;
  - les notions fondamentales de statistique descriptive (maximum, minimum, fréquence, moyenne) ;
  - les notions de chance ou de probabilité ;
- en géométrie :
  - les propriétés géométriques élémentaires des figures planes et des solides suivants : carré, rectangle, losange, parallélogramme, triangle, cercle, cube, parallélépipède rectangle, cylindre, sphère ;
  - les notions de parallèle, perpendiculaire, médiatrice, bissectrice, tangente (à un cercle);
  - les transformations : symétries, agrandissement et réduction ;
  - des théorèmes de géométrie plane : somme des angles d'un triangle, inégalité triangulaire, Thalès (dans le triangle), Pythagore.

Il faut aussi savoir interpréter une représentation plane d'un objet de l'espace ainsi qu'un patron (cube, parallélépipède rectangle) ;

- pour ce qui concerne les grandeurs et les mesures :
  - les principales grandeurs (unités de mesure, formules, calculs et conversions) : longueur, aire, contenance, volume, masse, angle, durée, vitesse, masse volumique, nombre de tours par seconde ;
  - les mesures à l'aide d'instruments, en prenant en compte l'incertitude liée au mesurage.

VI. CAPACITÉS

À la sortie de l'école obligatoire, **l'élève doit être en mesure d'appliquer les principes et processus mathématiques de base dans la vie quotidienne**, dans sa vie privée comme dans son travail. Pour cela, il doit être capable :

- de raisonner logiquement, de pratiquer la déduction, de démontrer ;
- de communiquer, à l'écrit comme à l'oral, en utilisant un langage mathématique adapté ;
- d'effectuer :
  - à la main, un calcul isolé sur des nombres en écriture décimale de taille raisonnable (addition, soustraction, multiplication, division) ;
  - à la calculatrice, un calcul isolé sur des nombres relatifs en écriture décimale : addition, soustraction, multiplication, division décimale à 10^{-n} près, calcul du carré, du cube d'un nombre relatif, racine carrée d'un nombre positif ;
  - mentalement des calculs simples et déterminer rapidement un ordre de grandeur ;
- de comparer, additionner, soustraire, multiplier et diviser les nombres en écriture fractionnaire dans des situations simples ;
- d'effectuer des tracés à l'aide des instruments usuels (règle, équerre, compas, rapporteur) :
  - parallèle, perpendiculaire, médiatrice, bissectrice ;
  - cercle donné par son centre et son rayon ;
  - image d'une figure par symétrie axiale, par symétrie centrale ;
- d'utiliser et construire des tableaux, des diagrammes, des graphiques et de savoir passer d'un mode d'expression à un autre ;
- d'utiliser des outils (tables, formules, outils de dessin, calculatrices, logiciels) ;
- de saisir quand une situation de la vie courante se prête à un traitement mathématique, l'analyser en posant les données puis en émettant des hypothèses, s'engager dans un raisonnement ou un calcul en vue de sa résolution, et, pour cela :
  - savoir quand et comment utiliser les opérations élémentaires ;
  - contrôler la vraisemblance d'un résultat ;
  - reconnaître les situations relevant de la proportionnalité et les traiter en choisissant un moyen adapté ;
  - utiliser les représentations graphiques ;
  - utiliser les théorèmes de géométrie plane ;
- de se repérer dans l'espace : utiliser une carte, un plan, un schéma, un système de coordonnées.

VII. ATTITUDES

L'étude des mathématiques permet aux élèves d'appréhender l'existence de lois logiques et développe :

- la rigueur et la précision ;
- le respect de la vérité rationnellement établie ;
- le goût du raisonnement fondé sur des arguments dont la validité est à prouver.

ANNEXE 3 : EXTRAIT DES PROGRAMMES DE QUATRIEME

VIII. 3. GEOMETRIE

Dans le plan, les travaux portent sur les figures usuelles déjà étudiées (triangles, cercles, quadrilatères particuliers), pour lesquelles il est indispensable de continuer à faire fonctionner les résultats mis en place. L'étude plus approfondie du triangle rectangle et d'une nouvelle configuration (celle de triangles déterminés par deux droites parallèles coupant deux sécantes) permet d'aborder quelques aspects numériques fondamentaux de la géométrie du plan. Certaines propriétés géométriques d'un agrandissement ou d'une réduction d'une figure sont également étudiées. L'effet sur les aires et les volumes n'est abordé qu'en classe de Troisième.

Les activités de découverte, d'élaboration et de rédaction d'une démonstration sont de natures différentes et doivent faire l'objet d'une différenciation explicite. Dans l'espace, les travaux sur les solides étudiés exploitent largement les résultats de géométrie plane. L'étude de configurations de géométrie dans l'espace donne des exercices et des illustrations pour différents champs du programme. À ce titre, il convient d'aborder la géométrie dans l'espace suffisamment tôt dans l'année scolaire.

Objectifs		
La résolution de problèmes a pour objectifs : - de connaître les objets usuels du plan et de l'espace et d'utiliser leurs propriétés géométriques et les relations métriques associées ; - de développer les capacités heuristiques et de conduire sans formalisme des raisonnements géométriques simples utilisant les propriétés des figures usuelles, les symétries, les relations métriques, les angles ou les aires ; - d'entretenir en l'enrichissant la pratique des constructions géométriques (aux instruments et à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique) et des raisonnements sous-jacents ; - d'initier les élèves à la démonstration ; - de poursuivre la familiarisation avec les représentations planes des solides de l'espace ; - de s'initier aux propriétés laissées invariantes par un agrandissement ou une réduction de figure.		
Connaissances	Capacités	Commentaires
3.1 Figures planes Triangle : milieux et parallèles.	- Connaître et utiliser les théorèmes relatifs aux milieux de deux côtés d'un triangle.	Ces théorèmes sont démontrés en utilisant la symétrie centrale et les propriétés caractéristiques du parallélogramme ou les aires. Dans le cadre du socle commun, seules les propriétés directes de la droite des milieux sont exigibles.
**Triangles déterminés par deux parallèles coupant deux demi-droites de même origine.*	**Connaître et utiliser la proportionnalité des longueurs pour les côtés des deux triangles déterminés par deux parallèles coupant deux demi- droites de même origine.*	*Le théorème de Thalès dans toute sa généralité et sa réciproque seront étudiés en classe de Troisième.*
Triangle rectangle : théorème de Pythagore.	- Caractériser le triangle rectangle par l'égalité de Pythagore. - Calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle à partir de celles des deux autres.	On ne distingue pas le théorème de Pythagore direct de sa réciproque (ni de sa forme contraposée). On considère que l'égalité de Pythagore caractérise la propriété d'être rectangle.
Triangle rectangle : cosinus d'un angle.	*- Utiliser dans un triangle rectangle la relation entre le cosinus d'un angle aigu et les longueurs des côtés adjacents.* *- Utiliser la calculatrice pour déterminer une valeur approchée :* *- du cosinus d'un angle aigu donné ;* *- de l'angle aigu dont le cosinus est donné.*	*Le cas où le demi-cercle n'est pas apparent (la longueur d'une médiane d'un triangle est la moitié de celle du côté correspondant) est étudié.*
Triangle rectangle : cercle circonscrit.	*- Caractériser le triangle rectangle par son inscription dans un demi-cercle dont le diamètre est un côté du*	

	triangle. *- Caractériser les points d'un cercle de diamètre donné par la propriété de l'angle droit.*	
Distance d'un point à une droite.	*- Savoir que le point d'une droite le plus proche d'un point donné est le pied de la perpendiculaire menée du point à la droite.*	
Tangente à un cercle.	*- Construire la tangente à un cercle en l'un de ses points.*	Dans le cadre du socle commun, il est simplement attendu des élèves qu'ils sachent reconnaître qu'une droite est tangente à un cercle.
Bissectrice d'un angle. **[reprise des programmes antérieurs]**	- Connaître et utiliser la définition de la bissectrice. *- Utiliser différentes méthodes pour tracer :* *- la médiatrice d'un segment ;* *- la bissectrice d'un angle.*	La bissectrice d'un angle est définie comme la demi- droite qui partage l'angle en deux angles adjacents de même mesure. La justification de la construction de la bissectrice à la règle et au compas est reliée à la symétrie axiale. Cette construction n'est pas exigible dans le cadre du socle commun.
Bissectrices et cercle inscrit.	*- Caractériser les points de la bissectrice d'un angle donnée par la propriété d'équidistance aux deux côtés de l'angle.* *- Construire le cercle inscrit dans un triangle.*	*Cette caractérisation permet de démontrer que les trois bissectrices d'un triangle sont concourantes et justifie la construction du cercle inscrit.* *L'analogie est faite avec le résultat concernant les médiatrices des trois côtés du triangle vu en classe de Cinquième.*
3.2 Configurations dans l'espace *Pyramide et cône de révolution.*	*- Réaliser le patron d'une pyramide de dimensions données.*	L'observation et la manipulation d'objets constituent des points d'appui indispensables. Ces activités doivent être complétées par l'observation et la manipulation d'images dynamiques données par des logiciels de géométrie. *Les activités sur les pyramides exploitent des situations simples. L'objectif est toujours d'apprendre à voir dans l'espace, ce qui implique un large usage des représentations en perspective et la réalisation de patrons. Ces travaux permettent de consolider les images mentales relatives à des situations d'orthogonalité.*
3.3 Agrandissement et réduction	*- *Agrandir ou réduire une figure en utilisant la conservation des angles et la proportionnalité entre les longueurs de la figure initiale et de celles de la figure à obtenir.*	**Des activités de construction (avec éventuellement l'utilisation de logiciels de construction géométrique) permettent aux élèves de mettre en évidence et d'utiliser quelques propriétés : conservation des angles (et donc de la perpendicularité) et du parallélisme, multiplication des longueurs par le facteur k d'agrandissement ou de réduction…* **Certains procédés de construction peuvent être analysés en utilisant le théorème de Thalès dans le triangle.*

LE PARADIGME DES COMPETENCES EN COMMUNAUTE FRANÇAISE DE BELGIQUE ET, PLUS PARTICULIEREMENT, DANS L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE[1]

Une étude de cas dans le cadre des tables rondes EMF2012 *–Evolutions curriculaires récentes dans l'enseignement des mathématiques de l'espace francophone*

Edith BAETEN[*], Maggy SCHNEIDER[**]

I. SUR LE DESIGN CURRICULAIRE

1. Un contexte institutionnel complexe issu d'une histoire qui ne l'est pas moins

Le système scolaire belge est particulièrement complexe et, pour le montrer, nous retournerons, en nous inspirant de Draelants et al. (2003), à une époque antérieure à 1830, date de la création même de l'Etat belge. Cette période se caractérise, en matière scolaire, par des tensions entre une organisation laissée par l'Etat aux autorités locales et surtout aux initiatives de l'Eglise et la volonté d'affirmer une politique publique. A la création de l'Etat belge, ces premiers conflits scolaires se soldent par la reconnaissance de la liberté scolaire inscrite dans la première constitution belge de 1831, ce qui implique à la fois la liberté pour tous d'organiser un enseignement et la liberté du père de famille de choisir le type d'enseignement auquel il confiera ses enfants. Mais le fait de reconnaître la légitimité de l'initiative privée en matière d'enseignement n'empêche pas des guerres scolaires successives liées à des revendications de subsidiation faites en particulier par l'enseignement catholique qui occupe une place importante. En 1959, Le Pacte scolaire rétablit la paix au prix d'un compromis selon lequel l'Etat étend sa propre offre scolaire tout en s'engageant à subventionner les autres écoles organisées par des personnes de droit public (provinces et communes) ou de droit privé (principalement l'enseignement catholique). Il en résulte une organisation complexe de l'enseignement public en ces trois « réseaux » qui viennent d'être précisés, à partir de plusieurs critères différentiateurs : la référence à une autorité publique ou privée, le caractère confessionnel ou non confessionnel et le fait d'être organisé ou subventionné par l'Etat. La liberté pédagogique reste cependant un principe fondateur du système scolaire belge, notamment en matière de méthodes pédagogiques et de programmes de cours.

S'ajoute à cela, dans les années 80, une « communautarisation » de l'enseignement, les responsabilités du Ministère de L'Education nationale et de la Culture étant transférées à trois communautés culturelles : néerlandaise, française et allemande. Mais les principes de financement de ces mêmes communautés entraînent des restrictions budgétaires et la diminution de l'emploi enseignant, ce qui suscite des mouvements de grève importants en 90 et 95. Faute de pouvoir répondre à la revendication de refinancement de l'enseignement, les politiciens tentent alors d'agir sur la qualité du système d'enseignement - évalué peu performant et très inégalitaire dans sa dispersion suite à une enquête de l'OCDE - notamment

---

[1] Dans ce texte, nous faisons de larges emprunts à Schneider, 2006a, 2006b, 2007 et 2011

[*] Conseillère pédagogique, FESeC – Belgique – edith.baeten@skynet.be
[**] Professeur, Université de Liège – Belgique – mschneider@ulg.ac.be

© Baeten E., Schneider M. (2012) Le paradigme des compétences en communauté française de Belgique et, plus particulièrement, dans l'enseignement secondaire – Une étude cas dans le cadre des tables rondes EMF2012 : évolutions curriculaires récentes dans l'enseignement des mathématiques de l'espace francophone. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (Plénières, pp. 53–65). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

par le biais d'un décret, appelé décret « Missions » qui, en 1997, définit, pour la première fois en Belgique, les objectifs de l'enseignement obligatoire, dans une perspective « d'égalité des chances ». Parmi ceux-ci, on lit qu'il faut « préparer tous les élèves à être des citoyens responsables » et « à s'approprier des savoirs et à acquérir des compétences qui les rendent aptes à apprendre toute leur vie et à prendre une place active dans la vie économique, sociale et culturelle ». Outre des mesures relatives à l'organisation des établissement scolaires, aux droits et à l'égalité des élèves, ce décret promeut une transformation pédagogique importante axée sur l'école de la réussite mais visant aussi une *standardisation du curriculum avec la rédaction de référentiels de compétences pour tous les niveaux d'enseignement* (sous la forme de profils de formation pour l'enseignement de qualification) *et la création d'outils d'évaluation devant servir de référents externes communs à tous les réseaux*. Désormais, les programmes scolaires doivent respecter les exigences correspondant à ces référentiels de compétences, ce qui constitue tout de même une brèche dans la liberté d'enseignement et l'autonomie des réseaux d'enseignement. En effet, si les programmes sont spécifiques aux réseaux, ceux d'avant le décret « Missions » pouvaient être rédigés sans tenir compte de ce référent commun. Les programmes de mathématiques représentent toutefois, de ce point de vue, une exception en un sens que nous préciserons dans la 2ème partie de ce texte.

Comme on le voit, la mouvance des compétences s'inscrit donc, en Communauté française de Belgique (CFWB), dans une perspective idéologique d'égalité des chances, d'insertion sociale et d'éducation à la citoyenneté mais aussi dans celle d'une politique de centralisation en matière de pilotage du système éducatif.

2. Le système de pilotage et la mise sur pied d'évaluations externes

Ce souci politique de pilotage se manifeste par un empressement à évaluer les effets d'une réforme, celle des compétences, à peine celle-ci engagée avec force formations, que ce soit au niveau des conseillers pédagogiques qu'à celui des enseignants eux-mêmes. Comme le soulignent Gerard et Van Lint (2003) :

> Il est troublant de constater que l'on ne peut apparemment pas parler de compétences sans parler d'évaluation. Que ce soit dans le monde de l'enseignement ou dans l'univers professionnel, il suffit de parler de compétences pour que résonnent les trompettes de l'évaluation.

On peut sans doute expliquer cette névrose de l'évaluation, en Belgique, par l'absence d'évaluations externes nationales telles que pratiquées en France comme le brevet de collège et le baccalauréat. La mouvance des compétences s'est ainsi accompagnée de la mise en place d'un dispositif de pilotage comprenant, entre autres, des commissions chargées de rédiger des outils d'évaluation.

Ce système de pilotage a été pensé de manière à obliger les différents réseaux à travailler ensemble. Il comprend désormais un corps inter-réseaux d'inspecteurs (alors qu'auparavant, seuls des professeurs enseignant dans les écoles organisées par l'Etat étaient susceptibles de devenir inspecteurs), et un corps de conseillers pédagogiques dont les mandats respectifs sont précisés comme suit dans un décret.

> La mission des inspecteurs est essentiellement l'évaluation et le contrôle :
>
> - du niveau des études ;
> - du respect des programmes d'études fixés ou approuvés par le Gouvernement ;
> - de l'adéquation du matériel didactique et de l'équipement scolaire aux nécessités pédagogiques ;
> - de la cohérence des pratiques pédagogiques dont les pratiques d'évaluation.
> - la détection au sein des établissements scolaires des éventuels mécanismes de ségrégation et le soutien à la suppression de tels mécanismes ;
> - donner des avis et formuler des propositions, d'initiative u à la demande du

Gouvernement sur tout ce qui relève de leur compétence ;
- participer aux groupes de travail, commissions et conseils, en vertu des lois, décrets et règlements ;
- collaborer avec les départements pédagogiques des Hautes Ecoles dans le cadre et selon les conditions fixées par le Gouvernement ;
- contrôler l'observation de la neutralité, là où cette neutralité s'impose.

Les inspecteurs pourront dispenser conseils et informations en lien avec les constats qu'ils auront posés dans le cadre de ces missions.

Les services d'inspection peuvent également être sollicités soit par le chef d'établissement soit par le Pouvoir organisateur qui souhaitent que soient évaluées les aptitudes pédagogiques des membres de leurs équipes éducatives (et les aptitudes professionnelles pour les membres du personnel des Centres psycho-médico-sociaux).

En ce qui concerne l'enseignement fondamental, secondaire et spécialisé, les observations des inspecteurs peuvent faire l'objet de notes d'informations qui seront transmises aux Cellules ou au Service de conseil et de soutien pédagogique

Les inspecteurs bénéficient d'un statut propre qui leur assure notamment une totale indépendance par rapport aux écoles et aux pouvoirs organisateurs. Ils sont dorénavant recrutés sur la base d'un brevet obtenu au terme de trois sessions de formation, chacune sanctionnée par une épreuve. Les sessions de formation portent sur les aptitudes relationnelles et les ressources humaines ; les aptitudes pédagogiques ; la connaissance de matières législatives et règlementaires. Enfin, contrairement à ce qui était de mise dans le système antérieur, pour certains niveaux d'enseignement, la fonction d'inspecteur est accessible aux enseignants de tous les réseaux.

A ce corps d'inspecteurs est associé celui de conseillers pédagogiques. Ceux liés au réseau d'enseignement dit « de la communauté française de Belgique » (écoles organisées par l'Etat) bénéficient d'un statut propre et d'une formation spécifique. Leurs missions consistent à soutenir et à accompagner les équipes pédagogiques et les directions d'écoles dans les efforts qu'elles mettent en œuvre pour améliorer les résultats de leur action éducative. Il s'agit par exemple de les accompagner dans la concrétisation de méthodes pédagogiques telles que la pédagogie différenciée, l'évaluation formative, la remédiation.

Par ailleurs, ils sont amenés à conseiller les enseignants, les équipes pédagogiques et les écoles pour lesquels les inspecteurs ont relevé des faiblesses ou des manquements, éventuellement sur base des notes d'information qu'ils auront rédigées et transmises au Service ou aux Cellules de conseil et de soutien pédagogiques.

Les conseillers pédagogiques du réseau libre n'ont pas de statut et sont des enseignants détachés de leur établissement pour une durée déterminée. Leur rôle n'est pas spécialement nouveau mais est, pour la 1ère fois spécifié dans un texte :

- vérifier la conformité vis-à-vis de l'inspection ;
- analyser les résultats des évaluations externes et proposés des pistes didactiques ;
- implanter les nouveaux programmes ;
- accompagner les enseignants débutants ;
- établir une cohérence pédagogique autour d'une discipline ou d'une option ;
- construire collectivement en école des démarches pédagogiques, des outils pour leurs cours ;
- analyser les besoins de formation disciplinaire.

Tant les inspecteurs que les conseillers pédagogiques se doivent de remplir leurs missions en se référant à des évaluations internationales (telle PISA) et à des évaluations nationales (plutôt « commutaires » : francophones, néerlandophones ou germanophones) externes aux écoles. Ces évaluations n'ont pas de valeur certificative, le professeur et le conseil de classe restant maîtres du jeu jusqu'à présent. Cependant, l'évolution laisse supposer que les conseils de classe (CC) n'auront plus, à terme, le monopole de la décision en matière d'évaluation certificative. Par ailleurs, il est à noter que plusieurs de ces outils d'évaluation servent à alimenter l'évaluation formative, les enseignants les considérant, y puisant des questions auxquelles ils tentent de préparer leurs élèves. On peut imaginer que cette démarche n'est pas exempte de risques liés à ce qu'on appelle le « bachotage » mais il est sans doute prématuré de le conclure.

Les outils d'évaluation propres à la Belgique francophone sont rédigés par des commissions composées de membres issus des cellules de conseil et de soutien pédagogique de chacun des réseaux, ces membres étant des inspecteurs, des conseillers pédagogiques, des professeurs de terrain, éventuellement des chercheurs (suivant une proportion non précisée). On voit qu'y sont représentés tous les réseaux publics, ce qui participe là au souhait de centraliser les différents pouvoirs organisateurs et de standardiser ainsi l'enseignement.

Au total, en l'absence d'évaluations nationales à caractère certificatif (hormis pour les 6-14 ans et ce, assez récemment), les outils d'évaluation qui servent de référence pour les inspecteurs et conseillers pédagogiques sont multiples, comme le montre la synthèse que voici.

Evaluation internationale : PISA (programme qui évalue la maîtrise des mathématiques à 15 ans).

Ces évaluations internationales comparatives informent sur l'efficacité de systèmes éducatifs

Evaluation non certificative (EVEX)
Evaluation externe à la fin du 1er et du 2ème degré (resp. 13 et 15 ans)

Ces évaluations informent les équipes éducatives mais également les responsables du système sur le niveau d'avancement des élèves. Les résultats qu'obtiennent les élèves à ces évaluations n'affectent pas leur parcours scolaire.

Evaluations certificatives

CEB (certificat de fin de primaire: socles à 12 ans). Cette épreuve externe commune à tous les réseaux publics d'enseignement est liée à l'octroi du certificat d'études de base (CEB) et a pour but d'évaluer et de certifier tous les élèves sur une même base (socles à 12 ans) .

CE1D (certificat d'étude du 1er degré: socles à 14 ans)

Epreuve externe commune liée à l'octroi du certificat d'études du 1er degré de l'enseignement secondaire (CE1D). L'objectif est d'évaluer et certifier tous les élèves sur une même base.

COE (commissions des outils d'évaluation inter-réseaux pour l'enseignement secondaire)

Ces outils d'évaluation sont construits en référence à la réforme dite des compétences ainsi qu'au décret "Missions" (2002) qui définit la compétence comme une « *aptitude à mettre en œuvre un ensemble organisé de savoirs, de savoir-faire et d'attitudes permettant d'accomplir un certain nombre de tâche* ». Cette référence a donné lieu à des items d'évaluation prenant la forme de tâches dont l'accomplissement impose d'être capable d'organiser les acquis (savoirs, savoir-faire et attitudes) des apprentissages. Chaque outil propose donc une tâche spécifique dont l'accomplissement suppose l'organisation judicieuse des ressources : choix, combinaison et mobilisation des ressources acquises en adéquation avec la tâche.

Il est à noter que les diverses commissions chargées de rédiger des outils d'évaluation semblent travailler selon des perspectives différentes. A titre d'exemple, l'épreuve proposée pour la première fois en juin 2010 pour l'attribution du CE1D en mathématique demande peu de justifications et/ou d'argumentation, les résolutions de problèmes sont peu nombreuses et sont souvent guidées alors que les inspecteurs exigent l'évaluation de la compétence à résoudre des problèmes en revendiquant des questions « ouvertes » du style de celles proposées par les outils d'évaluation inter-réseaux. Cette situation semble mettre les enseignants mal à l'aise, ainsi que les conseillers pédagogiques qui les forment. Plusieurs y voient des injonctions institutionnelles contradictoires. Malgré ces incohérences, il existe cependant un paradigme commun à tous ceux qui participent au pilotage du système éducatif : c'est le paradigme dit « des compétences » dont nous décrirons, dans la seconde partie, ce qu'il a pu avoir comme influence.

Pour terminer cette partie, précisons que le même décret « Missions » stipule, pour les professeurs en cours de carrière, une obligation de formation continuée : chaque enseignant doit suivre annuellement 6 demi-jours de formation en choisissant les 2/3 de ces formations parmi celles organisées dans son propre réseau et les autres dans celles proposées par un organisme inter-réseaux.

II. SUR LE CURRICULUM

1. Une emphase mise sur la résolution de problèmes. Des stratégies de repli

La mouvance des compétences s'est concrétisée par une emphase mise sur les compétences transversales, toutes disciplines confondues, et, en particulier, la résolution de problèmes en mathématiques. Plusieurs recherches commanditées par la CFWB mettent l'accent sur une méthodologie générale liée aux étapes de cette démarche. Un exemple significatif, au niveau de l'enseignement primaire, est la recherche de Fagnant et Demonty (2005) qui signent des guides méthodologiques à l'adresse des enseignants portant le titre : « Résoudre des problèmes : pas de problème !». Dans ces guides qui alimentent actuellement les formations d'enseignants, ces chercheuses visent à favoriser chez les élèves une *démarche réflexive* de résolution de problèmes en articulant deux objectifs : « développer chez les enfants des compétences propres à chaque phase du processus de résolution » et « contrecarrer les stratégies superficielles peu compatibles avec la mise en œuvre d'une démarche générale de résolution ». Conformément au premier objectif, les problèmes multiples repris dans ces guides sont groupés en chapitres et sections qui correspondent aux étapes et démarches de la résolution de problèmes telles que mises en évidence par les psychologues cognitivistes, e.a. Schoenfeld (1989) : d'abord, *la représentation du problème* et ce qu'elle suppose en termes, par exemple, d'estimation de la solution ; ensuite, *la résolution proprement dite* du problème qui requiert de développer des « démarches de type essais-erreurs » et, parfois, de « décomposer le problème en sous-problèmes » ; enfin, l'interprétation de la solution, y compris dans des situations « ouvertes », et la communication de celle-ci « sous une forme adaptée au contexte ». Les ressorts majeurs de ces guides sont donc d'ordre dit « méthodologique » et concernent prioritairement les stratégies générales de résolution de problèmes scolaires même si, sur les 280 pages que contient par exemple celui écrit en 2005, 50 sont consacrées aux outils mathématiques spécifiques enseignés au niveau d'étude considéré : les grandeurs proportionnelles, les intervalles et les partages inégaux. Quant au deuxième objectif, il conduit Fagnant et Demonty à choisir les problèmes proposés de manière à provoquer chez les élèves le « désapprentissage de stratégies superficielles et des présupposés associés ». Ces présupposés, selon Reusser et Stebler (1997) ou Verschaffel et al. (2000), consistent, par exemple, à supposer que tous les problèmes proposés par les enseignants ou dans les manuels ont un sens, que tout problème a une solution et une seule et qu'elle doit se présenter sous une forme numérique et précise ou encore que la tâche peut être effectuée en exploitant les concepts et les formules qu'on vient d'apprendre. En clair, il s'agit de dénoncer le contrat didactique ordinaire dont on a montré pourtant qu'il était à la source de tout apprentissage par enseignement : une telle position risque de produire la perte de confiance des élèves envers leur professeur.

Les enseignants qui optent pour un tel regard ont généralement une posture « puriste » en matière de résolution de problèmes et d'évaluation de cette démarche. Ce qui les conduit à se retenir d'enseigner pour préserver le caractère inédit des problèmes soumis aux élèves lors des évaluations (Schneider 2006a). Devant les échecs des élèves, on observe alors un repli des enseignants sur des évaluations qui font la part belle aux acquisitions techniques ou à un bachotage caché des problèmes précédemment posés lors des évaluations officielles.

Un repli analogue s'observe chez des chercheurs auxquels la CFWB a donné mandat pour concevoir des épreuves d'évaluation des compétences auprès d'une cohorte importante d'élèves concernés par le socle commun. C'est le cas de Rey (2009) et Kahn (2010) dont nous résumons ici la position. Tous deux commencent par distinguer les « procédures » qui se ramènent à l'exécution d'une tâche relativement stéréotypée telle que *Effectuer à la main un calcul isolé sur des nombres en écriture décimale de taille normale* et les « compétences avec mobilisation », c'est-à-dire des « compétences qui impliquent que l'élève doive choisir, parmi les procédures qu'il connaît, celle ou celles qu'il y a lieu de mettre en œuvre dans une situation nouvelle ». Affirmant en conséquence que « la compétence avec mobilisation ne saurait être attestée que par l'affrontement de l'élève à une situation inédite », ils proposent alors « la passation des épreuves d'évaluation, dans chaque classe, en trois temps répartis sur la semaine : d'abord la situation complexe qui requiert la mise en œuvre et la combinaison de plusieurs procédures ; ensuite, dans un second temps, cette situation découpée en « petits problèmes » qui nécessitent la mobilisation d'une seule procédure ; enfin, ce sont des batteries d'exercices correspondants aux procédures requises dans les deux temps précédents qui sont présentées aux élèves ».

Pour Rey et Kahn, une telle forme d'évaluation « permet d'abord de donner à chaque élève toutes les chances de faire prendre en compte ce qu'il sait faire : la mobilisation complexe s'il le peut et, s'il ne le peut, la mobilisation simple et enfin s'il n'y arrive pas, on lui donne au moins la possibilité de montrer qu'il a automatisé certaines opérations élémentaires ». Leur proposition révèle un certain pessimisme et ils la motivent en développant que le « à bon escient » dont il faut savoir faire preuve pour mobiliser les savoirs pertinents dans une situation donnée « ne s'enseigne pas ». Les auteurs insistent sur le fait que la difficulté majeure est de faire partager aux élèves « le mode d'interprétation des tâches et des situations qui est celui de l'Ecole ».

2. Les situations-problèmes et leur justification socioconstructiviste sujette à caution

La mobilisation complexe dont parlent Rey et Kahn touche à la question du transfert des connaissances et à celle d'un apprentissage à l'autonomie. En Belgique francophone, c'est principalement en référence à ces deux thèmes et aux théories « socioconstructivistes » que s'est propagée la « mode » des « situations-problèmes » censées être des occasions d'exercice à la compétence de « résolution de problèmes ». Voici une analyse de ce phénomène au départ d'extraits de Schneider (2006a).

La mouvance des compétences a souvent été légitimée en faisant référence au socioconstructivisme, expression d'abord entendue au sens de théories d'apprentissage telles que la théorie de Piaget (cf. e.a. Jonnaert et Vanderborght 1999, Roegiers 2000). Alors que cette mouvance est sous influence multiple, en particulier du monde de l'entreprise, on cherche en effet à la situer comme une révolution interne au monde de l'éducation par un phénomène de « solipsisme en pédagogie », comme incriminé par Crahay et Forget (2006) qui estiment que les arguments pédagogiques utilisés pour justifier la réforme masquent les enjeux sociétaux en favorisant une « conception linéaire et technocratique de la construction des curriculums : les enjeux sociétaux une fois réglés, les objectifs sont confiés aux techniciens du curriculum qui se chargent de leur opérationnalisation pédagogique » (Ibid.).

Mais cette légitimation est-elle pertinente ? Il est bon ici de se rappeler le contexte d'émergence de ces théories (socio)-constructivistes et nous le ferons en nous limitant, par souci de simplification, aux travaux de Piaget lesquels se situent essentiellement dans le cadre de la psychologie génétique. Dans ce contexte, sa théorie constitue tant une modélisation du développement de l'intelligence chez l'enfant et l'adolescent (en termes de stades) qu'un modèle de l'apprentissage (en termes de déséquilibration et d'équilibration majorante) qui permettent de rendre compte des observations faites sur des individus lorsqu'ils passent d'un stade à l'autre. Mais elle n'étudie pas les apprentissages scolaires et n'autorise aucune conclusion sur les effets d'un modèle d'enseignement qu'elle pourrait inspirer. Cette théorie ne permet pas non plus de problématiser une quelconque relation entre les situations proposées aux enfants et les apprentissages qu'ils réalisent. Elle ne peut donc pas être avancée en tant que « preuves scientifiques » d'un certain impact positif sur les apprentissages de modèles d'enseignement socioconstructivistes et l'on assiste donc ici, nous semble-t-il, à une sorte de détournement de théories d'apprentissage comme des modèles d'enseignement.

De théories d'apprentissage, on passe alors à des théories didactiques pour légitimer une « approche par compétences » mais, comme Schneider (2006b) le développe, cette forme de légitimation se fait, elle aussi, selon des mécanismes abusifs. Prenons l'exemple de la *Théorie des Situations Didactiques* de Brousseau (1998). Plusieurs chercheurs y pointent l'importance des situations adidactiques (qui sont souvent vulgarisées en une notion plus « molle » de « situation-problème ») comme situations dans lesquelles l'élève fait l'apprentissage de l'autonomie. Ainsi, dans leur « cadre de référence socioconstructiviste pour une formation didactique des enseignants », Jonnaert et Vander Borght (1999) empruntent à G. Brousseau le concept de situation adidactique dont ils font un maillon d'une évolution temporelle caractéristique du transfert des apprentissages : entre les situations didactiques et les situations non didactiques, les situations adidactiques semblent constituer un intermédiaire lors d'une « utilisation de plus en plus indépendante par rapport au contexte scolaire des connaissances et des compétences acquises ». De même, Roegiers (2000) voit dans les situations adidactiques des situations-problèmes concrètes que « l'élève appréhende, seul ou avec d'autres », ce qui lui apparaît une caractéristique importante des situations dans lesquelles s'exerce la compétence car c'est une « situation que l'apprenant, tout comme n'importe quelle autre personne, pourrait résoudre dans un cadre non scolaire, ce qui n'a rien d'étonnant puisqu'une compétence devrait être intériorisée d'une façon telle qu'elle puisse être mobilisée en dehors de tout contexte scolaire ». Quant à Dalongeville et Huber (2000), ils adoptent un ton plus militant encore en faveur de « l'efficacité des situations-problèmes » qui seraient « une modalité d'apprentissage favorisant une modification durable des représentations et des schèmes » tout en ayant « des effets sur l'intelligence et la créativité ». Le qualificatif « durable » renvoie ici à une certaine pérennité d'une représentation adéquate entre la situation initiale qui en a favorisé l'émergence et toute autre situation nouvelle analogue.

Or, la théorie des situations didactiques de Brousseau se démarque délibérément d'une idéologie des « situations-problèmes », mais permet en revanche d'étudier les conditions *sine qua non* (donc nécessaires sans être suffisantes) d'un fonctionnement socioconstructiviste en situation scolaire. Parmi ces conditions qui caractérisent les situations adidactiques, citons brièvement le caractère fondamental des problèmes soumis aux élèves par rapport au savoir à construire, l'existence d'un milieu qui en permet la dévolution sans jouer trop sur des effets de contrat, la part irréductible d'institutionnalisation faite par le professeur, le caractère collectif de la construction du savoir. Moyennant les analyses épistémologiques auxquelles elle engage, cette même théorie permet aussi d'évaluer les opportunités d'un enseignement basé sur le paradigme socioconstructiviste, en termes d'identification et de franchissement d'obstacles d'apprentissage. Comme toute théorie didactique, celle de Brousseau n'est donc pas un modèle normatif d'enseignement mais un réseau conceptuel. La preuve en est qu'elle a permis tout autant de problématiser les pratiques de cours « ordinaires », fort éloignées du socioconstructivisme, et leurs effets sur les apprentissages que de rendre compte de phénomènes didactiques inhérents à la dévolution supposée par tout apprentissage, quels que soient la forme que prend cette dévolution (travaux personnels, travaux d'interdisciplinarité, gestion d'exercices,…), la discipline scientifique concernée ou le niveau d'enseignement visé.

Mais, sur le terrain, subsiste une forte croyance dans l'efficacité des situations-problèmes en matière d'apprentissage des élèves à l'autonomie. Ainsi, en cherchant à évaluer si les enseignants ont intégré le paradigme des compétences dans leurs pratiques enseignantes, les inspecteurs pointent le nombre croissant de situations-problèmes. En utilisant le concept de situation adidactique mais sans qu'on soit bien sûr qu'ils y associent toutes les caractéristiques citées plus haut, ainsi que le laisse craindre cet extrait d'un compte-rendu d'une réunion entre des Inspecteurs et des Conseillers pédagogiques :

> Un consensus se dégage sur la définition d'un outil d'évaluation de compétences : celui-ci demande aux élèves de résoudre une tâche qui :
>
> - soit nouvelle et <u>inédite</u> (du moins en apparence) pour eux ;
> - soit <u>complexe</u>, c'est-à-dire qu'elle mobilise des ressources diverses, mais connues, à choisir et à combiner de manière pertinente ;
> - soit <u>adidactique</u>, c'est-à-dire qu'elle ne fournit aucu élément de résolution automatisé.

On voit, de plus, dans cet extrait, que les situations adidactiques ne se sont pas inscrites dans un processus d'enseignement comme le prévoit la théorie des situations didactiques de Brousseau puisqu'elles sont évoquées à propos de l'évaluation.

3. Une modélisation du transfert dans un cadre scolaire

En dépit d'une certaine naïveté dans la manière de lier situations-problèmes et apprentissage à l'autonomie, on se doit de reconnaître que les situations adidactiques peuvent jouer un rôle dans le transfert, au prix d'un environnement didactique qui est décrit ci-après. D'abord, parce qu'elles supposent la mise en évidence des questions auxquelles le savoir visé apporte une réponse. On touche là immanquablement aux connaissances conditionnelles dont Tardif (1999) montre l'importance dans le transfert des savoirs acquis dans d'autres disciplines. en effet, il ne suffit pas de posséder des connaissances déclaratives et procédurales, il convient en outre de savoir « quand » et « pourquoi » on utilise les unes et les autres, c'est-à-dire de maîtriser les connaissances conditionnelles. Toutefois, iI est à noter que les raisons d'être des savoirs peuvent être exposées par le professeur lors d'un discours heuristique, au sens que lui donne Schneider (2011), qui met en évidence la question à l'étude, les pistes de solution qui se présentent, les raisons pour lesquelles on va privilégier l'une d'entre elles. Ensuite, ce que Brousseau appelle un milieu d'apprentissage doit permettre d'inscrire la situation adidactique dans un dispositif didactique qui la complète par un processus d'étude à plus long terme. Compte tenu de l'analyse que permettent les théories didactiques à ce propos (Schneider 2006b), nous défendons ci-dessous une certaine manière d'articuler résolution de problèmes et situations-problèmes.

Des questions relevant d'une même problématique seraient exposées d'entrée de jeu aux élèves ; elles leur seraient ensuite dévolues pourvu qu'elles aient pu se traduire en situations adidactiques, ou, à défaut, explorées par le professeur devant les élèves par le biais d'un discours métacognitif portant sur le savoir (auquel cas, on ne parlera évidemment pas de situation-problème, … et l'objet principal de la dévolution sera l'exploration de la technique dans un champ de problèmes parents). De cet examen qui ferait ressortir l'essence commune de ces questions devrait émerger une technique type de résolution. Les questions seraient alors cristallisées en une classe de problèmes et le discours technologique qui valide cette " technique " et la rend intelligible déboucherait sur un embryon (ou un pan) de théorie, lequel institutionnaliserait la technique comme répondant à cette classe de problèmes. Les élèves seraient alors entraînés à la résolution de problèmes de cette classe et invités à explorer le domaine d'opérationnalité de la technique de résolution jusqu'à en éprouver les limites. Ils seraient enfin évalués sur leur capacité à transférer la méthode de résolution à de nouveaux problèmes de la même classe et plus tard, évalués sur leur capacité à reconnaître un problème de cette classe lorsqu'il est mélangé à des problèmes appartenant à d'autres catégories. A la lumière des théories didactiques, un tel canevas se justifie pleinement pourvu qu'il satisfasse à certaines précautions méthodologiques, principalement l'analyse épistémologique qui déterminera la classe, ou plutôt les classes de problèmes constitutives des différents sens du savoir visé. Par ailleurs, il est cohérent avec les résultats de la psychologie cognitive, ainsi que développé par Schneider (2006b).

Dans une telle perspective, les savoirs construits outillent les élèves pour résoudre une classe particulière de problèmes, puis une autre et ainsi de proche en proche de sorte qu'ils disposent d'un arsenal de connaissances leur permettant de faire face à un nombre sans cesse croissant de types de problèmes. Mais peut-on exercer et évaluer la compétence " résolution de problèmes " dans le scénario décrit ci-dessus, objecteront certains. De fait, à force de faire explorer aux élèves le domaine de validité d'une technique de résolution associée à une classe de problèmes, on ne peut guère, au terme de l'apprentissage en cours, que tester leur capacité à exploiter cette même technique pour résoudre un problème qu'ils identifient d'office, contrat didactique oblige, comme faisant partie de la classe étudiée. Cependant, un enjeu de transfert non négligeable se profile dès que l'élève, susceptible de maîtriser plusieurs classes de problèmes, doit reconnaître à quelle classe appartient tel ou tel problème qui lui est proposé, tout comme un expert le ferait d'ailleurs. D'où l'intérêt de proposer des évaluations où, de manière affichée et effective, différentes classes de problèmes sont brassées d'une année à l'autre, afin d'éviter les effets de contrat poussant l'élève à adopter telle méthode ou telle autre en fonction des contenus de programmes travaillés pendant l'année en cours. Ainsi, si un problème doit être modélisé par une fonction et que la question est posée en dernière année du secondaire en Belgique, il y a des chances actuellement pour qu'il s'agisse d'une fonction exponentielle ou logarithmique puisque les autres types de fonctions font partie des programmes d'autres années.

Nous reviendrons plus loin sur cette analyse qui nous servira à interpréter les injonctions institutionnelles les plus récentes. Mais, auparavant, voici un bref topo sur l'évolution des programmes belges en mathématiques.

4. L'évolution des contenus des programmes de mathématiques

Par rapport à la volonté politique de centralisation du pilotage, l'exemple des programmes de mathématiques relèvent du paradoxe. Contrairement à toutes les autres disciplines ainsi que décrit plus haut, les programmes de mathématiques d'avant le décret « Missions » étaient rédigés par une commission « inter-réseaux », ce qui était sans doute dû à des initiatives personnelles, les référentiels de compétences sont faits en inter-réseaux (comme imposé) et les programmes ultérieurs sont propres aux réseaux et peuvent différer les uns des autres même s'ils se doivent d'être, par le même décret, conformes aux référentiels de compétences. Cela étant, on peut quand même décrire l'évolution des programmes de l'enseignement secondaire en général à partir des suivants :

- Programmes inter-réseaux des années 80 conçus dans une perspective de correction des excès de la réforme des mathématiques modernes.
- Programmes inter-réseaux des années 90 qui s'inscrivent dans la continuité des précédents en se réclamant des recommandations faites par une commission commanditée par le ministre de l'éducation de l'époque (et formée surtout d'inspecteurs et de professeurs d'université) pour faire un état des lieux sur l'enseignement des mathématiques en CFWB. Dans ce rapport on peut lire que « l'écueil majeur est la perte de sens » et que « le problème majeur de l'enseignement est celui du sens ».
- Référentiels inter-réseaux de compétences (1999) qui, après une liste de compétences

transversales, reprennent grosso modo les contenus des programmes précédents.
- Programmes de la FESeC (par exemple) des années 2000 qui reprennent toujours les mêmes contenus mais en les regroupant selon des rubriques dont la formulation a l'allure d'une compétence telle que « Explorer, organiser et démontrer des propriétés en termes de rapports et d'angles ».
- Ces mêmes programmes, ou presque, écrits de manière à améliorer la lisibilité des programmes précédents, suite à une enquête auprès des enseignants, et desquels sont gommés beaucoup de références … aux compétences.

Dans cet ensemble de programmes, on peut détecter une évolution progressive dans le sort fait aux thèmes suivants :

- Le rôle précoce de la géométrie dans l'espace afin de susciter le besoin de démontrer des propriétés de figures planes non évidentes visuellement et non constatables par mesure parce que contenues dans des plans représentés en perspective au sein d'une configuration spatiale.
- Une approche plus intuitive des transformations que l'on applique à des figures géométriques plutôt que de les envisager comme applications du plan dans lui-même ; un malaise dans l'absence d'usage fait des transformations malgré une tentative timide d'exploitation dans des problèmes de construction.
- Des vecteurs enseignés non comme éléments d'espaces vectoriels mais comme outils de démonstration de propriétés de figures.
- L'impact des NTICE, d'abord sous forme d'un chapitre d'algorithmique, puis par l'usage des calculatrices scientifiques et graphiques ou l'usage d'ordinateurs.
- La disparition d'un chapitre de logique et du symbolisme associé (quantificateurs, …), les divers modèles de démonstration se devant d'être introduits au fur et à mesure des besoins.
- Une étude des fonctions autour du tryptique « tableaux-graphiques-formules » (TGF) et en prise sur leurs applications à d'autres disciplines.
- Une étude des fonctions facilitée par les transformés des graphiques des fonctions de référence par des translations ou affinités parallèles aux axes.
- Une place croissante faite à la modélisation fonctionnelle associée à une sourdine mise sur la technicité tant en algèbre qu'en analyse.
- Introduction précoce au traitement de données et importance accrue accordée à la statistique descriptive.

Désormais, dans un des réseaux d'enseignement, les contenus de programmes sont regroupés en trois domaines :

1. grandeurs, nombres, algèbre TGF et fonctions ;
2. traitement de données ;
3. géométrie et trigonométrie ;

domaines articulés, au premier degré de l'enseignement secondaire, aux domaines de savoir des socles de compétence, ce qui conduit à 4 domaines (Nombres – solides et figures – grandeurs – traitement de données).

D'un nouveau contrat social porteur d'un paradoxe à la nécessité d'une réécriture des référentiels de mathématiques.

Cette réforme des compétences a fonctionné jusqu'à présent comme une véritable *doxa* à laquelle devaient se soumettre les acteurs de terrain souvent privés des outils didactiques qui leur auraient permis, par exemple, de discerner les opportunités et inopportunités du paradigme socioconstructiviste et les contraintes didactiques qui pèsent sur le fonctionnement des dispositifs qu'il inspire ou encore d'inscrire l'exercice de la compétence à résoudre des problèmes dans un environnement didactique tenant compte de ces contraintes. Et, sur base d'observations nombreuses sur le terrain, nous souhaitons souligner ce qui nous apparaît comme un paradoxe du nouveau contrat social engagé par cette réforme. Les enseignants sont supposés rendre leurs élèves « autonomes », capables de penser par eux-mêmes, mais ne disposent pas forcément eux-mêmes des outils intellectuels leur permettant de le faire de manière un tant soit peu éclairée et critique. Ce qui risque de les confiner dans un rôle d'exécutant que certains d'ailleurs assument en se contentant de donner des « signes extérieurs de compétences » mais s'en pour autant savoir comment améliorer leur enseignement.

Plus de 10 ans après le lancement de la réforme des compétences, des acteurs de terrain continuent en effet de poser des questions aussi fondamentales que « De quoi s'agit-il », « Que dois-je enseigner ? », « Comment dois-je m'y prendre ? », « Que dois-je faire faire aux élèves ? ». Ce sont de telles demandes qu'identifient les rapports d'inspection annuels et que relayent les conseillers pédagogiques. C'est le cas des mathématiques et ce, malgré l'existence de programmes listant des contenus disciplinaires mais qu'il est cependant malaisé d'articuler au discours sur les compétences. A ces observations s'ajoutent un mauvais score des petits wallons aux études PISA, se classant loin derrière les petits flamands, ainsi que des constats négatifs consignés dans un rapport par le Service général de l'Inspection au terme de l'année scolaire 2008-2009 et qui révèlent deux difficultés structurelles majeures du système éducatif en Belgique francophone : d'une part, l'imprécision des référentiels inter-réseaux en matière de savoirs et savoir-faire à construire et en matière de niveaux de maîtrise attendus et, d'autre part, l'absence de continuité et donc de cohérence dans les apprentissages. Au niveau des savoirs, on y lit : « *En juillet 1997, le décret « Missions » a fixé les grandes missions de notre système éducatif et mis en place les structures propres à les atteindre. En 1998 et 1999 les groupes de travail inter-réseaux ont déterminé les compétences-socles, les compétences terminales et les profils de formation. Toutefois, pour les deux premiers référentiels cités ci-dessus les savoirs requis ont été définis de façon tellement vague que les programmes des différents réseaux sont quasi inconciliables* ». Il s'ensuit que la différence d'une classe à l'autre, d'une école à l'autre, d'un réseau à l'autre dans les apprentissages visés et construits conduit à une inégalité de maîtrise pour les élèves et à une inégalité de signification pour les diplômes. En ce qui concerne la continuité, le même rapport note que « *Suite à des missions d'inspection, il apparaît qu'il y a peu de coordination entre les professeurs des degrés inférieur et supérieur et que peu d'enseignants ont connaissance des programmes des années dans lesquelles ils n'enseignent pas et l'organisation d'une planification coordonnée au sein d'un degré est rarissime [...] Ce qui est vrai au niveau des savoirs l'est aussi pour les compétences. Rares sont les enseignants qui planifient l'exercice des compétences dans l'esprit d'un apprentissage progressif et construit en spirale [...] Incohérence, discontinuité, lacunes, redites, aggravées parfois par l'instabilité des équipes ou les aléas des attributions compliquent la tâche des élèves ».*

Par ailleurs, l'emphase mise, dans les référentiels de compétences de nombreuses disciplines, sur des compétences très transversales telles que « se poser des questions » ou « formuler une hypothèse » ont jeté un certain discrédit, aux yeux des enseignants, sur les apports propres aux disciplines. Le but, semble-t-il, est de faire acquérir aux élèves ce que certains appellent tantôt une « méthode de recherche scientifique », tantôt une « démarche expérimentale », ou encore une « démarche d'investigation » … finalement une méthode implicitement universelle qui les rendrait aptes à aborder n'importe quelle question avec rationalité. Dans cette optique, la « souveraineté » supposée des mathématiques est questionnée. Toutes les disciplines se valent et leurs spécificités épistémologiques passent à l'arrière-plan. Ce qu'on perd là, nous semble-t-il, est une certaine efficacité de la « disciplinarisation » des questions que se sont posées les humains, qu'elle soit d'ordre scientifique ou scolaire (par exemple la biochimie relève du premier mais pas du second du moins avant l'enseignement universitaire), qu'elle soit standardisée aujourd'hui ou à concevoir dans l'avenir (ainsi, on pourrait imaginer une discipline scolaire « math-physique » à supposer qu'on en valide la pertinence). Cette disciplinarisation permet en effet de fédérer en classes des questions parentes car pouvant être traitées au moyen de mêmes savoirs et techniques. Et les bons résolveurs de problèmes de mathématiques le savent puisqu'ils lisent l'énoncé d'un problème à la lumière des catégories de problèmes que leurs connaissances leur auront permis de distinguer. On a pu trouver cette idée de parenté de questions dans le concept de « famille de tâches » (Beckers 2002) supposé structurer l'écriture d'outils d'évaluation associés aux référentiels de compétences mais elle a été parfois déclinée de manière tellement générale que l'on retrouvait, d'une discipline à l'autre, des familles de tâches communes formulées … au moyen de compétences transversales, au risque de rendre peu visibles, pour les élèves et les enseignants, les questions constitutives d'une discipline donnée.

Face au marasme observé, l'Inspection préconisait dès le rapport 2008-2009 : « de fixer, en inter-réseaux, de manière consensuelle et pour chaque discipline, les savoirs « incontournables ». « En l'occurrence, il s'agirait de définir les ressources qui sont réellement utiles à l'exercice des compétences et que l'on peut raisonnablement considérer comme les fondements d'une culture citoyenne dans le champ disciplinaire concerné ». Et, tout récemment, les autorités politiques ont décidé de faire réviser, entre autres priorités, les référentiels de compétences terminales en mathématiques. Un texte de cadrage pour cette réécriture a été proposé il y a quelques jours au ministère de l'éducation et il nous paraît intéressant, pour terminer, d'épingler quelques idées-forces de ce texte.

D'abord une insistance sur le travail par disciplines, motivé par des arguments proches de ceux que je viens de formuler. En évitant toutefois tout cloisonnement disciplinaire stérile et en attirant l'attention sur certains phénomènes associés au processus de transposition didactique qui conduisent les auteurs du texte à prôner une formalisation progressive des concepts. Ensuite une revalorisation du « connaître » auquel est octroyé le statut de compétence pour autant qu'on pense cette rubrique à un certain niveau de réflexivité : l'élève doit pouvoir, en regard d'une tâche donnée, justifier le choix d'une procédure et pouvoir en exprimer l'intelligibilité sans laquelle il ne peut espérer en reconnaître les opportunités d'usage. On reconnaît là le « discours technologique » de Chevallard (1992) ou les « connaissances conditionnelles » de Tardif (1999). Enfin, l'idée que le transfert doit rester le résultat d'un apprentissage, l'enseignement ayant permis aux élèves de construire des homologies et d'identifier ainsi des classes de problèmes. Le transfert est alors pensé en termes d'ajustement d'une méthode standardisée et de traitement de problèmes s'éloignant des standards.

Au regard de notre analyse de ce nous pensons être un environnement didactiquement crédible pour l'apprentissage à la résolution de problèmes et que nous avons développé plus haut, nous ne pouvons que souscrire à de telles orientations nouvelles. A ceci près toutefois, c'est que, suivant notre analyse, le passage de l'application au transfert se définit par le brassage contractuel de plusieurs classes de problèmes, l'élève ne pouvant plus se situer en devinant les attentes, plutôt que par le caractère standard ou inédit de ces problèmes.

Ce virage récent en Belgique francophone nous paraît donc légitime mais, quant à savoir comment sera interprété ce texte de cadrage par les commissions chargées de réécrire les référentiels de savoirs et compétences mathématiques, l'avenir le dira. Affaire à suivre …

REFERENCES

Beckers J. (2002) *Développer et évaluer des compétences à l'école : vers plus d'efficacité et d'équité.* Bruxelles : Editions Labor.

Brousseau G. (1998) *La théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chevallard Y. (1992) Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 12(1), 72-112.

Crahay M., Forget A. (2006) Changements curriculaires : quelle est l'influence de l'économique et du politique ? In Audigie, F., Crahay M., Dolz J., Delhaxhe A. (Eds.) (pp. 63-84) *Curriculum, enseignement et pilotage*. Bruxelles : De Boeck.

Dalongueville A., Huber M. (2000) *(Se) former par les situations-problèmes*. Lyon : Chronique Sociale.

Draelants H., Dupriez V., Maroy C. (2003) *Le système scolaire en Communauté française*. Bruxelles : CriSP.

Fagnant A, Demonty I. (2005) *Résoudre des problèmes : pas de problème ! Guide méthodologique et documents reproductibles*. Bruxelles : De Boeck.

Gerard F.-M., Van Lint-Muguerza S. (2003) Quel équilibre entre une appréciation globale de la compétence et le recours aux critères ? In Bosman Chr., Gerard F.-M., Roegiers X. (Eds.) (pp. 135-140) *Quel avenir pour les competences ?* Bruxelles : De Boeck.

Kahn S. (2010) *Différents types de compétences : Comment les faire acquérir ? Comment les évaluer ?* Socle commun et travail par compétences. Balises et boussole.

Jonnaert P., Vander Borght C. (1999) *Créer des conditions d'apprentissage*. Bruxelles : De Boeck Université.

Rey B. (2009) Les compétences, oui, mais ce qui compte, c'est de faire apprendre… *Café pédagogique du 6 Décembre 2009*, INRP.

Reusser K., Stebler R. (1997) Every word problem has a solution. The social rationnality of mathematical modelling in schools. *Learning and Instruction* 7(4), 309-327.

Roegiers X. (2000) Une pédagogie de l'intégration. Compétences et intégration des acquis dans l'enseignement. Bruxelles : De Boeck Université.

Schneider M. (2006a) Quand le courant pédagogique 'des compétences' empêche une structuration des enseignements autour de l'étude et de la classification de questions parentes. *Revue Française de Pédagogie* 154, 85-6.

Schneider M. (2006b) Comment des théories didactiques permettent-elles de penser le transfert en mathématiques ou dans d'autres disciplines ? *Recherches en Didactique des Mathématiques* 26 (1), 9-38.

Schneider M. (2007) Les compétences comme cadre pour organiser des enseignements de mathématiques ? Oui, mais … Quelques dérives possibles. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education* 7/1), 28-40.

Schneider M. (2011) L'approche par compétences en Communauté française de Belgique, ce que la recherche en didactique des mathématiques pourrait apporter à un fonctionnement essentiellement idéologique. In Lebeaume J., Hasni, A., Harlé I. (Eds.) (pp. 137-148) *Recherches et expertises pour l'enseignement scientifique*. Bruxelles : De Boeck.

Schoenfeld A.H. (1989) Teaching mathematical thinking and problem solving. In Resnick L. B., Klopfer L. E. (Eds.) (pp. 83-104) *Toward the thinking curriculum : Current cognitive research*. Alexandria : VA : Association for Supervision and Curriculum Development.

Tardif J. (1999) *Le transfert des apprentissages*. Montréal : Les Editions Logiques.

Verschaffel L., Greer B., De Corte E. (2000) *Making sense of word problems*. Lisse, The Netherlands : Swets & Zeitlinger.

DESIGN CURRICULAIRE ET VISION DES MATHEMATIQUES AU QUEBEC

Une étude de cas dans le cadre des tables rondes EMF2012 – *Evolutions curriculaires récentes dans l'enseignement des mathématiques de l'espace francophone*

Nadine BEDNARZ* – Jean-François MAHEUX* – Jérôme PROULX*

> Ces contenus à maîtriser et ces habiletés qui constituent le programme d'études de notre école ne sont pas nécessairement ceux d'autres pays, ni ceux qui ont été appliqués à l'école québécoise par le passé. Le curriculum d'études de l'école obligatoire est un construit social, il représente ce qu'une société donnée, à un moment donné de son histoire, considère comme important de transmettre à ses enfants et à ses jeunes pour qu'ils puissent, mieux armés, affronter l'avenir. Les curriculums d'études sont ainsi un bon miroir de la manière dont, à un moment donné de son histoire, une société, une nation, se représente son avenir. (Inschauspé 2007, p. 7)

INTRODUCTION

La modification récente du curriculum en mathématiques au Québec, sur laquelle se centre notre analyse, s'inscrit dans une réforme majeure pour l'école primaire et secondaire, touchant simultanément à l'ensemble des programmes d'études dans toutes les disciplines, ainsi qu'à l'organisation scolaire. C'est la première fois, depuis la révolution tranquille[1], qu'autant de changements sont introduits simultanément dans le milieu scolaire québécois. Dès lors, entrer dans l'analyse du processus de design curriculaire en mathématiques ne peut se faire sans considérer cette donnée incontournable, une certaine vision d'ensemble, organique[2], est en effet, nous le verrons, au fondement de cette réforme. Elle constitue une donnée centrale pour saisir le processus de conception même de ce programme, sa mise en œuvre, sa régulation, telles qu'elles ont été pensées, et en retour la vision du curriculum qui en résulte.

Cette vaste réforme a été amorcée, dès 1995, par une large consultation de la population, à travers ce que l'on a appelé les États Généraux de l'Éducation, ayant donné lieu à un rapport final qui allait définir les orientations globales[3] de cette ambitieuse réforme du système

* Université du Québec à Montréal – Canada – descamps-bednarz.nadine@uqam.ca, maheux.jean-francois@uqam.ca, proulx.jerome@uqam.ca

[1] Le Québec a connu deux réformes majeures de son système éducatif, la réforme actuelle sur laquelle se centre l'analyse, et celle mise en place dans les années 60 à la suite du rapport Parent, qui aboutira à la création du Ministère de l'Éducation, des Commissions Scolaires, des CEGEP (ordre collégial situé entre l'ordre secondaire et universitaire), d'universités réparties sur tout le territoire (réseau de l'université du Québec), d'une école publique primaire et secondaire accessible à tous…

[2] Le terme organique, chez Durkheim, renvoie à l'idée d'une unité cohérente de la collectivité, résultant ou s'exprimant par la différenciation. L'utilisation de ce terme est, sans doute, guidée par l'analogie suivante: Les parties d'un organisme vivant ne se ressemblent pas, ses organes, par exemple le cœur et les poumons, remplissent chacun une fonction propre, différente, et sont dans ce sens également indispensables à la vie.

[3] Dix chantiers prioritaires y étaient alors précisés. Parmi ceux-ci figuraient: remettre l'école sur ses rails en matière d'égalité des chances; restructurer les curriculums du primaire et du secondaire pour en rehausser le niveau culturel; traduire concrètement la perspective de formation continue: soutenir les principaux acteurs en vue de la réussite éducative; redistribuer les pouvoirs pour renforcer le pôle local et l'ouverture à la communauté.

© Bednarz N., Maheux J.-F., Proulx J. (2012) Design curriculaire et vision des mathématiques au Québec – Une étude cas dans le cadre des tables rondes EMF2012 : évolutions curriculaires récentes dans l'enseignement des mathématiques de l'espace francophone. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (Plénières, pp. 66–107). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

éducatif (voir Rapport final de la Commission des États Généraux sur l'Éducation, 1996). Tous les programmes allaient être modifiés du primaire au secondaire, et ce dans tous les domaines : certaines disciplines vont être bousculées telles la physique, la chimie, la biologie, de nouvelles disciplines vont apparaître telles « Culture religieuse et Éthique ». Nous rappellerons ici quelques-unes des étapes importantes de ce processus :

- Mise en place, à la suite du rapport final de la Commission des États Généraux sur l'Éducation (1996), d'un *groupe de travail sur la réforme du curriculum* (Réaffirmer l'école, 1997)
- Création dès 1997 par la ministre de l'Éducation, dans la foulée de la recommandation de ces deux groupes, de la *Commission des Programmes d'Études* qui jouera, nous le verrons par la suite, un rôle important dans le processus de design curriculaire, son orientation et sa régulation.
- Conception des programmes prise en charge, *dans chacune des disciplines*, par un *comité de rédaction*. La *mise en œuvre* de ces programmes s'étalera alors de 1999, pour le programme du primaire, à 2008, pour le programme du second cycle du secondaire, programme présentant, *pour les deux dernières années de ce second cycle, un parcours de différenciation avec 3 séquences possibles*.

Ce processus de design curriculaire, on l'entrevoit dans ce qui précède, est donc extrêmement complexe, puisqu'il renvoie à de multiples acteurs, à plusieurs ordres d'enseignement, à une réforme des programmes qui touche simultanément plusieurs disciplines, à une vision transversale de l'ensemble des programmes (et qui prendra la forme de ce que l'on appellera le « programme des programmes »), à une coordination à de multiples niveaux. C'est ce dont nous essaierons de rendre compte afin de comprendre les assises des évolutions curriculaires actuelles en mathématiques et de dégager, dans ces nouvelles manières de penser le design curriculaire, des indicateurs de changement de « contrat social ».

Les objectifs poursuivis par notre étude visent : 1) d'une part à retracer, au plan structurel et en tenant compte de ce contexte plus global, le processus de conception de la réforme du curriculum d'études en mathématiques au Québec, la manière dont a été pensée sa mise en œuvre et son accompagnement, ainsi que son processus de régulation ; 2) d'autre part, à cerner dans le cas des mathématiques, comment ce processus de construction a été vécu par quelques-uns des acteurs qui y ont participé ; 3) Il vise aussi à mettre en évidence les changements qui en résultent sur le plan de la vision des mathématiques.

Cette reconstruction s'appuie sur un ensemble de données touchant à différents aspects du processus (conception, mise en œuvre, accompagnement, régulation) ainsi qu'au contenu de ces programmes. Plus précisément, nous avons eu recours à :

- Une étude documentaire croisant différentes sources : rapports de groupes de travail, de la Commission des Programmes d'Études, documents de travail, compte rendus de recherches (Carpentier, 2010 ; Comité conseil sur les programmes d'études, 2007; Commission des programmes d'études, 1998-a,b, 1999, 2002, 2005-a, 2005-b, Inschauspé, 2007 ; Gosselin et Lessard, 2007 ; MEQ, 1996, 1997, MELS, 2008, 2010). Cette étude permet de retracer le processus au fil du temps, tel qu'il a été pensé, et ses éléments clés. Ont aussi été consultés les programmes d'études en mathématiques (MEQ 1870, 1980, 1988, 1994, MELS 2000, 2003, 2005) permettant de retracer les différences dans la vision des mathématiques qui en résulte.

- Un entretien avec la responsable du programme de mathématiques au Ministère de l'Éducation, plus particulièrement sur les dimensions d'accompagnement et de régulation du programme de mathématiques depuis 2008.
- Des entrevues individuelles semi-dirigées réalisées avec 3 enseignants du secondaire ayant participé à la conception du programme de mathématiques (1 membre du comité de rédaction des différents programmes du secondaire au 1er cycle et au 2ème cycle; 2 membres du comité élargi de conception des programmes au 2nd cycle du secondaire, ayant participé à l'élaboration de séquences différentes[4])

I. LE PROCESSUS DE CONCEPTION, MISE EN ŒUVRE ET REGULATION DU CURRICULUM EN MATHEMATIQUES

> Le système d'établissement des programmes d'études est un des éléments les plus sensibles du curriculum. Il a un effet structurant important sur le curriculum réel effectif, celui qui se déroule dans la classe (Réaffirmer l'école 1997, p. 79)

1. Le processus de conception du curriculum tel qu'il a été pensé, au plan structurel, à ses différentes étapes

Dès 1995, les « États Généraux sur la qualité de l'éducation » auxquels plus de 6000 personnes ont participé, vont mettre au cœur du débat le curriculum :

> Au plan des valeurs, quelles sont donc ces choses de la plus grande importance que nous demanderons à l'école de transmettre aux jeunes ? (....) Quels types d'apprentissage allons-nous demander à l'école ? Quelles sont les responsabilités de l'école en ce qui concerne l'accès aux divers niveaux d'apprentissage, l'évaluation et la sanction ? (…) La tenue des États généraux commande en quelque sorte la réouverture de ces questions (Ibid., p. 17).

La tenue de cette Commission des États Généraux[5], chargée au départ de préciser la situation de l'éducation au Québec et d'en analyser les principaux éléments à partir de consultations publiques, est déjà pour nous un premier indicateur de changement de contrat social, dans la manière d'envisager les tous premiers jalons de ce processus de design curriculaire: *s'engagent en effet dans ces audiences publiques, tenues dans toutes les régions du Québec, de multiples acteurs provenant de toutes les couches de la population*. Même si ces consultations qui suscitent une importante mobilisation n'ont pas de retombées immédiates, elles ont au moins le mérite de mettre sur la table les enjeux et les multiples conceptions en présence, et d'amorcer des discussions sur des questions de fond: Quelle école voulons-nous pour nos enfants ? Quelles valeurs ? Quelles priorités ?

Ces consultations seront condensées, au terme du processus, dans un rapport, publié en janvier 1996, intitulé «L'exposé de la situation », qui fait état des propos entendus et qui cible, pour faire progresser le débat, un certain nombre de questions jugées prioritaires. Ils

---

[4] L'ordre secondaire au Québec comprend deux cycles, un premier cycle de deux années (12-14 ans) et un deuxième cycle de trois ans, comprenant une première année commune à tous les élèves suivie, dans le cas des mathématiques, de parcours différenciés.

[5] Les membres de la Commission, présidée pour le sous-ministre de l'éducation, n'étaient pas là à titre d'experts en éducation, mais en raison du fait qu'ils venaient de milieux et d'horizons divers (expérience en enseignement au primaire et au secondaire, dans le syndicalisme, milieu francophone, anglophone, représentants de milieux allophones, milieu de travail, industrie, environnement, informatique, sociologues, parents, organisations communautaires, coopératives….etc). *C'est en quelque sorte à cette étape cette pluralité d'acteurs qui était recherchée.*

déboucheront dans un deuxième temps[6], à partir d'assises régionales et nationales, sur l'énoncé de dix chantiers prioritaires (voir Rapport final de la Commission des États Généraux sur l'Éducation, 1996). Parmi ces derniers, figurent la refonte des curricula et l'énoncé de fond qui les guide en quelque sorte : *remettre l'école sur ses rails en matière d'égalité des chances*. *Nous y trouvons un second indicateur important de changement de contrat social*. En effet, si la réforme des années 70 s'inscrit dans un mouvement de démocratisation de l'accès pour tous à l'école, cette réforme est ainsi orientée par une toute autre finalité :

> Si dans les années 60 on voulait, dans la foulée du rapport Parent, démocratiser l'accès à l'école, on veut cette fois *démocratiser la réussite à l'école* (Dionne 2007, p.12).

Dans ce rapport, sont énoncés un certain nombre de principes pour la refonte de ces curricula :

- englober les trois finalités éducatives (instruire, éduquer, qualifier) et les quatre types de savoir (savoir, savoir-faire, savoir-être et savoir vivre ensemble) ;
- restructurer ces curriculums pour en rehausser le niveau culturel[7];
- garder à l'esprit l'idée d'une formation commune jusqu'à la fin de secondaire 3 ($9^{ème}$ année) et un souhait de diversification par la suite ($10^{ème}$ et $11^{ème}$ années) ;
- prévoir un étalement équilibré de la matière tout au long de la scolarité ;
- assurer un équilibre entre les divers domaines de la connaissance ;
- considérer les possibilités d'interdisciplinarité ;
- respecter la mission éducative de chaque ordre d'enseignement (préscolaire, primaire, secondaire) tout en prévoyant la continuité entre les ordres d'enseignement ;
- associer le personnel scolaire, en particulier les enseignants, aux choix en matière de refonte du curriculum et à la révision des programmes qui devrait en découler.

On y retrouve enfin déjà énoncée, l'idée d'un mécanisme permanent de révision de ces curricula (rapport final de la Commission des États Généraux 1996, p.81).

Y sont donc déjà posées quelques-unes des balises qui orienteront la suite du processus (elles prendront par la suite d'autres formes, seront raffinées, explicitées). *Par exemple, la délimitation d'un curriculum non seulement orienté vers des savoirs mais aussi des savoirs faire (qui deviendront par la suite des compétences) y est bien présente. Le rôle que devraient jouer les enseignants dans la conception même de ce curriculum y est aussi énoncé. On a là deux indicateurs importants d'un changement de cap relativement à la conception du curriculum,* sur lesquels nous reviendrons.

Ces discussions et réflexions initiées par les États Généraux donneront lieu, par la suite, à la constitution d'un groupe de travail sur la réforme du curriculum[8]. Ce groupe, formé par la

[6] Le mandat dans ce deuxième temps de la Commission sera redéfini, il conduira, dans le rapport final, à préciser des perspectives et des priorités d'action pour l'avenir de l'éducation au Québec.

[7] Cette dimension culturelle, très présente dans les premiers écrits (voir Inschauspé 2007) ne sera cependant pas réellement reprise par la suite. L'analyse des différents documents montre bien en effet que cet enjeu majeur pour Inschauspé n'a pas eu de réelle résonance par la suite. Il prendra tout au plus la forme dans les programmes d'études de ce que l'on nommera les repères culturels.

[8] Ce groupe, présidé par Paul Inschauspé (membre de la commission des États Généraux de l'Éducation) était formé de 2 enseignants, un du primaire et un du secondaire, d'un universitaire, de 2 directeurs de Commissions Scolaires et d'un conseiller cadre au Ministère de l'Éducation.

ministre de l'Éducation, est chargé de faire des recommandations concernant les changements à apporter au curriculum du primaire et du secondaire. Le rapport de ce groupe de travail (Réaffirmer l'école 1997) *viendra préciser les attentes auxquelles doit répondre la réforme du curriculum :*

- Une mission d'instruction précisée en termes de rehaussement du contenu culturel, d'une adaptation aux changements sociaux et de maîtrise de compétences générales ;
- Une mission de socialisation remettant de l'avant des valeurs communes et parmi, celles-ci, la question de l'histoire nationale et de la langue ;
- Une mission de qualification.

Il viendra aussi préciser les contenus globaux de formation (profils de sortie, grands domaines d'apprentissage, savoirs essentiels dans les grands domaines de type disciplinaire et dans le domaine des compétences transversales). Du point de vue social, ces précisions sont certes importantes, mais reflètent en fait, en l'actualisant, une vision très proche de ce que l'on trouve à l'origine du système d'éducation québécois (Rapport Parent, 1964). En revanche dans ce rapport, on précise également des éléments du *processus d'établissement des programmes d'études qui, eux, confirment et continuent le changement évoqué plus haut.* C'est sur ce point que nous reviendrons surtout ici pour mieux comprendre les indicateurs d'un changement de « contrat social » dans la manière même dont est envisagée la conception des programmes.

Ainsi, l'analyse à ce sujet du document « Réaffirmer l'école » (1997) met bien en évidence *quelles étaient, au préalable, les pratiques usuelles à l'égard de la conception des programmes, pratiques clairement mises en cause par le groupe de travail, et sur lesquelles des réajustements importants vont être proposés.* Quelles étaient ces pratiques ?

> Pour chaque programme, un comité consultatif est constitué pour orienter l'élaboration du programme assurée par un ou une responsable du Ministère. Ce comité réunit des personnes issues des associations représentatives ou des milieux aptes à fournir une expertise éclairée. Ce comité consultatif participe à l'établissement des orientations générales du programme. Les auteurs soumettent aussi leur projet au milieu, à l'occasion de sessions ou de congrès pédagogiques d'associations. Une fois le programme approuvé par le ministre, des activités d'information et de sensibilisation ont lieu (p. 76).

Les critiques émises à l'égard de ces pratiques font état de diverses dérives possibles relativement aux acteurs qui interviennent, essentiellement des représentants d'associations professionnelles, de la part de qui on craint des prises de position partisanes, par exemple sur la place que devraient occuper les mathématiques par rapport aux autres disciplines, ou sur les questions d'identité nationale, dans le cas de l'histoire, des questions fortement politisées au Québec. Autres dérives relativement au format prescrit pour rédiger les programmes, un format qui a une influence déterminante, laissant place à une plus ou moins grande marge de manœuvre possible de la part de l'enseignant. On pense ici aux programmes cadres de 1970 qui permettaient l'ouverture à des projets créateurs, mais pouvaient aussi causer l'abaissement des standards, ou à l'inverse aux programmes de 1980 qui, par leur découpage hyperspécialisé en objectifs globaux et intermédiaires, freinaient l'innovation pédagogique, tendant à transformer les enseignants en techniciens « applicateurs ». On y critique aussi la mise en

---

Le travail de ce groupe s'est appuyé sur les avis de nombreux groupes consultés : les différents services du Ministère de l'éducation (les directions des programmes d'études, de l'évaluation, la direction de la recherche, des relations de travail, de la formation professionnelle et technique, des nouvelles technologies, le comité sur la formation continue…) ; le Conseil supérieur de l'éducation, les autres ministères et organismes, le Conseil pédagogique interdisciplinaire du Québec, le ministère de la culture….etc. Là encore les acteurs impliqués sont multiples, même si dans le groupe de travail lui-même, l'expertise en est une clairement dans le champ dans ce cas de l'éducation.

œuvre des programmes, clairement pensée dans une logique « top down » : lorsque le programme est établi, des séances d'informations sur le programme visent à faire des enseignants des « applicateurs » de celui-ci.

> Or, il n'en est pas nécessairement ainsi : un professionnel applique rarement efficacement un changement dont il n'est pas partie prenante (p.80).

Les ajustements proposés sont un troisième indicateur de changement de contrat social quant à la façon de penser cette conception. On met en évidence, d'une part, l'importance des mécanismes de supervision, de coordination et de contrôle des activités d'établissement des programmes d'études et, d'autre part, le rôle des enseignants dans l'élaboration de ces derniers (p. 80).

Dans le premier cas, ils conduiront à recommander la création d'une *Commission nationale des programmes*, dont le mandat est, dans la période où des refontes de programmes devront être menés, d'établir des *orientations qui serviront de guides* pour établir les programmes, et de donner, avant approbation par le ministre, un *avis sur les programmes proposés*, mais aussi d'entretenir une *réflexion permanente sur le curriculum* et les programmes (p.86). Cette commission, formée de 11 membres, deviendra effective dès 1997.

Dans le second cas, le *processus cherche à prendre appui sur l'expertise des enseignants comme professionnels de terrain*. Il s'agit là, dans son intention[9] tout au moins, d'un changement important :

> La logique du système mis en place (tend) à les considérer comme des applicateurs et non comme des experts. Or cette conception de leur rôle doit être changée (…) il faut donc faire la part la plus large possible dans l'élaboration des programmes aux enseignants et enseignantes qui enseignent ces programmes (p. 87).

En guise de bilan

On reconnait bien dans ce qui précède un des éléments fondateurs, sur lequel nous reviendrons, marquant le changement dans les orientations de l'école québécoise d'une politique « d'accessibilité » à une mission de « réussite pour tous ». Cette démocratisation ne concerne pas que les élèves mais aussi les enseignants. En effet, on va voir cette image de l'enseignant expert mise à contribution non seulement dans le design du curriculum comme texte (Pinar, Reynolds, Slattery et Taubman 1995), mais aussi dans la classe, ce que Aoki (1993) appelle le « curriculum vécu » (voir à ce sujet les sections 1.2 et 2). Mais d'abord, la reconstruction du processus de conception du curriculum[10] sur le plan structurel met déjà en évidence la présence *de multiples acteurs impliqués à un moment ou un autre du processus* :

- Des *acteurs provenant de toutes les couches de la population*, dans le cadre de la vaste consultation des États généraux de l'Éducation qui débouche sur l'énoncé de chantiers prioritaires, dont celui de la refonte du curriculum (avec un énoncé de fond qui le guide : *remettre l'école sur ses rails en matière d'égalité des chances, démocratiser la réussite* ;
- Une *pluralité d'acteurs provenant de milieux et horizons divers*, dans la Commission des États Généraux (milieu de travail, milieu communautaire, industrie, informatique, parents, sociologues…) qui jouent un rôle important dans les orientations de cette réforme du curriculum (orientation vers des

---

[9] Les comités chargés de la conception des programmes étaient dans les faits déjà par le passé composés d'enseignants et de conseillers pédagogiques. Toutefois ces enseignants étaient là à titre de représentants d'associations professionnelles (le Groupe des Responsables en Mathématiques pour le secondaire par exemple) et non comme de simples enseignants. De plus dans le processus de mise en œuvre qui suivait l'adoption du programme, ils étaient vus comme de simples « applicateurs » (dans une logique « top down »).

[10] Celui-ci sera précisé par la suite pour le programme de mathématiques plus spécifiquement (voir section 2).

savoirs mais aussi des savoirs faire, savoir être, savoir vivre ensemble; formation commune et diversification ; continuité entre les ordres, association du personnel scolaire aux choix en matière de refonte du curriculum…)

- Une *diversité d'acteurs près du monde de l'éducation*, au sein du groupe de travail sur la réforme du curriculum (enseignants du primaire, du secondaire, universitaire, directions de commissions scolaires, conseiller au ministère) qui jouent un rôle important dans la clarification des attentes auxquelles doit répondre cette réforme et du processus d'établissement des programmes
- *Des acteurs provenant d'un peu partout dans le champ de l'éducation*, pour la Commission des Programmes d'études, qui jouent un rôle clé dans l'orientation, la coordination et l'adoption de ces programmes, puis leur régulation par la suite: 5 enseignants du primaire et du secondaire, 2 universitaires, 1 membre de l'ordre collégial, 1 directeur d'école ou de commissions scolaires, 1 conseiller pédagogique ou membre du personnel professionnel, 1 représentant des parents d'élèves fréquentant une école primaire ou secondaire ;
- *Des enseignants*[11] *de différents milieux* en charge de la conception plus spécifique de chacun des programmes disciplinaires (voir à ce sujet la section 2).

Le processus de participation, à différentes étapes, de ces acteurs met par ailleurs en évidence *leur place plus ou moins périphérique dans ce processus de conception* (nous y reviendrons dans la partie 2) : par exemple, des acteurs sociaux provenant d'une diversité de milieux, et qui sont là à ce titre (multiples expériences), au moment de la définition des orientations globales de cette réforme ; des enseignants dont le rôle est central puisqu'ils sont les maîtres d'œuvre dans l'établissement plus précis du programme de mathématiques…

L'analyse met également en évidence la *complexité de ce processus*, qui fait appel à de *multiples négociations entre différents acteurs* provenant de différents milieux (comme nous le verrons plus précisément dans la partie 2). Ceci s'accompagne de *défis en termes de transitions entre les différents moments de la conception*, le processus de construction s'étalant sur un temps assez long. Par exemple, la rédaction du programme du 1er cycle dans le cas du secondaire prendra place de 2000 à 2003, et celle du 2ème cycle de 2003 à 2006, sur une période de 2 ans ½ dans chacun des cas. Dans un souci de continuité, on s'assurera alors de la présence d'enseignants ayant participé aux étapes précédentes. On fera appel pour le 1er cycle du secondaire à un des enseignants ayant participé comme rédacteur au programme de 3ème cycle du primaire, et pour le 2ème cycle du secondaire, on fera participer une des rédactrices du programme du 1er cycle du secondaire.

Des indicateurs de changement de « contrat social » peuvent, dès cette étape, être dégagés dans la manière dont est pensé au plan structurel ce processus, notamment :

- Sous l'angle *du rôle qu'y jouent les enseignants*, considérés comme des professionnels, dans l'établissement des programmes d'études (et non plus comme des « applicateurs » de celui-ci) ;
- Dans la *vision organique et systémique*[12] que met de l'avant ce processus, via la mise en place notamment d'une Commission nationale des programmes d'études, nouvelle, et de son mandat, et qui fait en sorte que le programme de mathématiques et sa conception sont profondément imbriqués dans un

[11] Nous préciserons plus loin sur quelle base ils sont choisis.

[12] L'adjectif « systémique » caractérise ce qui concerne un système ou qui agit sur un système. Le mot « système » est issu du grec ancien « *systema* », signifiant « ensemble organisé ».

ensemble plus vaste, cohérent (de programmes, une vision transversale dite « programme de programmes », des orientations qui lient l'école à la société).

Ces deux aspects se combinent en ceci que les enseignants ne sont pas sollicités seulement pour faire entendre leur avis sur l'organisation des programmes, la formulation des idées conductrices, l'identification des contenus à aborder et leur position, il y a plus. La vision organique et systémique de l'ensemble du processus de design curriculaire mise de l'avant fait en sorte que les enseignants contribuent à une *entreprise collective, sont mis en relation avec d'autres groupes, d'autres visions, d'autres intérêts* (voir à ce sujet dans le cas des mathématiques la section 2). *Cette mise en relation avec d'autres groupes se produit au plan des disciplines,* la réforme touchant toutes les matières*, au niveau des différents ordres d'enseignement* (dans l'arrimage entre le primaire et le secondaire, le secondaire et le collégial) *mais aussi et surtout par l'implication continuelle d'acteurs différent* comme nous le verrons plus loin (enseignants rédacteurs, autres enseignants, didacticiens, administrateurs à l'ordre collégial, comités du ministère, autres intervenants….). Ces acteurs sont tous « partie prenante » du système d'éducation (ils ne sont pas des membres d'entreprises privées ou de groupes d'intérêt par exemple), y intervenant de manière diverse (à titre de gestionnaire, cas par exemple du collégial, à titre de formateurs d'enseignants, cas des didacticiens, à titre d'enseignants au primaire ou au secondaire….). Dans cette distribution, les enseignants ont une place de choix, mais cette position ne vise pas à leur permettre de déterminer un « territoire » du curriculum qui leur appartienne (que celui-ci soit ou non délimité de manière externe au préalable). On verra, dans la seconde partie de ce texte (design du point de vue des acteurs) comment cette situation a été vécue dans le cas particulier de l'écriture du programme de mathématique.

2. Le processus de mise en œuvre et d'accompagnement de ce curriculum

> La qualité de l'enseignement dépend de la qualité de l'acte professionnel des enseignants et des enseignantes. Encore faut-il un espace pour qu'un tel acte puisse s'exercer. Et, pour qu'il le soit, cette expertise professionnelle doit être sollicitée au moment de l'établissement des programmes, elle doit aussi pouvoir s'exercer pleinement au moment de leur mise en œuvre, elle doit enfin être alimentée par un environnement qui facilite l'innovation. (Rapport du groupe de travail sur la réforme du curriculum 1997, p. 87)

La mise en œuvre de ce curriculum a été réalisée graduellement : le curriculum du primaire a été finalisé en 2000 et son implantation dans toutes les écoles du Québec s'est réalisé dès 2000-2001, et ce sur trois ans (2000-2001 au 1er cycle du primaire, 2001-2002 au 2ème cycle, 2002-2003 au 3ème cycle) ; celui du 1er cycle du secondaire a été finalisé en 2003 et son application dans toutes les écoles secondaires du Québec s'est faite dès 2005-2006. Enfin celui du 2ème cycle du secondaire (avec ses trois séquences, trois cheminements différenciés possibles pour les deux dernières années de ce cycle) a été approuvé en 2005 et son application dans toutes les écoles du Québec s'est réalisée en 2007-2008 pour la 1ère année de ce cycle (la même pour tous les élèves) et en 2008-2009 pour les parcours différenciés des deux dernières années. La première cohorte d'élèves ayant vécu la réforme complète est sortie du secondaire en 2010. On est donc ici en présence d'une *implantation qui s'est étalée sur une très longue période de temps, de plus de dix ans* (voir ci-dessous le travail en amont des écoles pilotes), avec des ajustements et des ralentissements par rapport à ce qui était initialement prévu. Par exemple, le programme du 1er cycle du secondaire a vu son implantation retardée de deux ans ; il en fut de même pour le second cycle.

On peut distinguer trois moments dans ce processus d'implantation et d'accompagnement de la réforme curriculaire : a) une mise en œuvre dans des écoles pilotes, avant l'entrée en vigueur réelle du curriculum dans toutes les écoles; b) un accompagnement pour supporter l'implantation de la réforme, du début du primaire au secondaire, de 1998 à 2009 (avant et au moment de cette implantation) ; c) un processus d'accompagnement une fois cette implantation officiellement complétée : de 2009 à aujourd'hui.

a) Une implantation dans des écoles pilotes, dites « ciblées ».

Des écoles primaires et secondaires ont accepté de participer à l'implantation du curriculum, avant la mise en œuvre de celui-ci dans toutes les écoles. Au moment où se mettent en place les écoles ciblées, les enseignants ne disposent pas encore de la version finale du programme. Ils ont sans doute entre les mains une version de travail provisoire, quelques éléments directeurs, et vont travailler à la construction de situations d'apprentissage.

Ainsi 15 écoles ciblées au secondaire, réparties dans différentes régions du Québec et différents milieux socioéconomiques (13 écoles publiques, 2 privées, 11 écoles francophones, 3 anglophones, 1 avec deux secteurs anglophone et francophone), de grandeur variable (200 à 1800 élèves) ont commencé, sur une base volontaire, à mettre en œuvre le programme de formation au 1er cycle du secondaire en 2003-2004, soit deux ans avant son application obligatoire dans l'ensemble des écoles du Québec (MELS 2008). Ces écoles pilotes ont bénéficié localement du support, de l'encadrement, durant cette implantation, de conseillers pédagogiques, de la direction d'école, voire de chercheurs, intervenants externes. Ainsi dans le cas d'une des écoles au primaire, Inchauspé lui-même, président du groupe de travail sur la réforme du curriculum, a accepté de jouer le rôle de mentor du directeur, et Claude Lessard, chercheur à l'université de Montréal, avec le conseiller pédagogique, a accompagné de jeunes enseignants impliqués dans cette école. Les écoles pilotes n'ont duré dans les faits qu'une année. Des considérations politiques (une ministre de l'éducation pressée d'implanter à la grandeur du système « sa » réforme) ont conduit à abréger quelque peu cette expérience qui aurait dû se dérouler normalement sur un temps plus long.

Une étude longitudinale, conduite au 1er cycle du secondaire sur trois ans (de 2003 à 2006) dans les 15 écoles ciblées du secondaire, nous donne davantage d'informations sur la mise en œuvre de cette réforme et son suivi. Cette recherche (MELS 2008) visait à déterminer les conditions qui favorisent la mise en œuvre du programme de formation au secondaire, et à dégager des pistes d'action susceptibles de faciliter celle-ci. Les résultats[13] ciblent, entre autres, la formation continue et l'accompagnement parmi les conditions essentielles: une formation continue axée au départ sur les besoins des enseignants dans leur pratique, notamment dans ce cas autour de la création de situations d'apprentissage et d'évaluation, l'évaluation des compétences, les programmes disciplinaires, et un accompagnement donné par des personnes qualifiées. Les rencontres d'accompagnement avec d'autres enseignants et des conseillers pédagogiques se sont avérées pour les enseignants les plus utiles, ainsi que la présence d'une personne ressource disponible à l'école. On pointe ici également l'importance d'un suivi, d'un soutien plus personnalisé, et les limites d'une formation qui ne serait que ponctuelle. Ces écoles ont bénéficié de 30 heures et plus de formation par année, et de 12 h et plus d'accompagnement par année. Cet accompagnement touche aussi les directions d'écoles. Ces derniers ont opté pour des rencontres collectives (5 rencontres par année) autour du partage d'expériences et de la recherche, entre eux, de solutions aux difficultés qui se présentaient dans leurs établissements. Cette analyse, réalisée après coup, n'a toutefois pas pu informer et éclairer le processus d'implantation dans toutes les écoles.

b) L'accompagnement au moment de l'implantation du programme dans toutes les écoles.

---

[13] Des questionnaires ont été administrés aux enseignants, directions d'école, élèves à chacune des années. On y a eu recours aussi à des descriptions de situations d'apprentissage et d'évaluation remises par les enseignants à chaque année avec quelques productions d'élèves, ainsi qu'à des « focus group » avec des enseignants et les directeurs.

Avant, au moment et après l'implantation du programme de formation de l'école québécoise, et ce pour l'ensemble des programmes mis en place au fil du temps (2000 pour les programmes du primaire ; 2005-2006 pour les programmes du 1er cycle du secondaire, 2007-2008 pour le programme du 2nd cycle du secondaire), deux types de formations ont été offertes au niveau national par le ministère de l'éducation : (a) des sessions de formation s'adressant aux « gestionnaires » que cette réforme interpelle directement (directions d'école majoritairement mais aussi directions de commissions scolaires….) ainsi que (b) des sessions de formation s'adressant aux personnes ressources chargées d'accompagner les enseignants (conseillers pédagogiques majoritairement mais aussi enseignants ressources, directions d'école, formateurs..)

Dans le premier cas, 52 journées de rencontres ont été organisées par le MELS entre 1999 et 2010, à raison en moyenne de 4 rencontres par année. Dans le second cas, 45 journées de formation ont été organisées à raison de 4 rencontres par année de 1998 à 2008 (dont 5 journées pour l'année 2000, au tout début du processus). Convoquées au même rythme et à quelques semaines d'intervalles, ces formations touchent surtout aux aspects généraux de la réforme et ne sont pas spécifiques comme telles aux mathématiques. Elles ont regroupé, dans le second cas, en moyenne 535 personnes ressources par année, présentes à chacune des rencontres, en majorité des conseillers pédagogiques provenant de différentes régions du Québec, actifs au primaire et au secondaire, et ce dans différentes disciplines. À titre illustratif, la première rencontre (473 participants) regroupait 163 conseillers pédagogiques, 53 enseignants ressources, 88 directions d'école. Chaque bloc de 2 journées nationales touchait à un thème assez général, non propre à une discipline en particulier, au fondement des différents programmes. Les thèmes suivants s'y sont par exemple retrouvés : 1- la notion de compétence et ses éléments; 2-les domaines généraux de formation ; 3-les compétences transversales ; 4-les valeurs des jeunes et la culture (en lien avec les aspects culturels dans cette réforme curriculaire) ; 5-le socioconstructivisme ; 6-l'interdisciplinarité ; 7-les approches pédagogiques; 8-l'évaluation comme support à l'apprentissage versus l'évaluation sanction ; 9-différentes formes d'évaluation…etc. Chacun des blocs de formation prenait la forme suivante : une brève présentation situant les avancées de la réforme, le travail en cours, suivie d'une conférence (par un conférencier invité) sur la thématique retenue (socioconstructivisme, interdisciplinarité, valeurs des jeunes et la culture…..). Les participants se séparaient pour le reste des deux journées en ateliers de 20 à 30 personnes chacun, avec 2 animateurs comme responsables. Le travail se faisait alors en petits groupes de 8 personnes, sur un mode impliquant les participants, *dans une perspective de réappropriation par les personnes de cette réforme et de ses fondements.* Par exemple dans le cas du thème de la culture, les participants étaient appelés à discuter de la place de la culture dans chacun des programmes, de la forme qu'elle pourrait prendre dans chacune des disciplines, cette discussion donnant lieu à une synthèse en fin de processus.

Il est difficile ici de tracer un portrait du réinvestissement de ces sessions de formation par les conseillers pédagogiques auprès des enseignants, des choix locaux étant faits en fonction des possibilités et contraintes de l'équipe de conseillers pédagogiques dans chacune des Commissions scolaires. Ce réinvestissement a, à titre illustratif, pris la forme de formations ponctuelles, organisées dans ce cas par les CP en maths et en français, destinées aux enseignants du primaire, par exemple, une journée sur les compétences transversales, sur le portfolio…, ou encore de documents préparés pour les enseignants sur d'autres aspects. Des difficultés à remettre ce qui était travaillé aux sessions de formation aux enseignants ont été mises de l'avant par les conseillers pédagogiques que nous avons consultés. Compte tenu de l'abondance de l'information qui arrivait simultanément et de leurs contraintes de fonctionnement et de temps, des choix ont dû être faits.

Concernant plus spécifiquement le programme de mathématiques, des formations ont par ailleurs été organisées par l'équipe de rédaction du programme, dans chacune des directions régionales, et ce sur une base régulière de 2004 à 2007 dans le cas du programme de 1er cycle au secondaire (4 jours par région en 2004-2005, et ce dans chacune des régions ; 2 jours/région en 2005-2006, 2 jours/région en 2006-2007) ; de 2006 à 2010 dans le cadre du programme de second cycle (4 jours/région pour le programme de 3ème secondaire, et 4 jours/région pour 4ème et 5ème secondaire en 2006-2007 ; 2 jours/région en 2007-2008 pour 3ème secondaire ; 2 jours/région en 2008-2009 pour 4ème et 5ème secondaire ; 1 journée en 2009-2010 pour 5ème secondaire). Ces formations de deux à quatre journées, et dont les modalités d'aménagement ont varié (par exemple 2 journées consécutives ; 2 journées à l'automne et 2 journées au printemps) s'adressaient principalement aux enseignants en mathématiques (quelques conseillers pédagogiques y assistaient également). Elles réunissaient en moyenne, dans chacune des régions, une vingtaine d'enseignants, qui à leur tour partageaient par la suite avec leurs collègues l'expérience de formation vécue.

Là encore le format retenu n'en était nullement un de présentation d'informations sur le programme (modèle « top down » présent dans les précédentes réformes) mais davantage *une mise en activité des enseignants autour du programme pour en favoriser la réappropriation*. À titre d'exemple, des équipes d'enseignants étaient appelées à se mettre au travail autour de la construction de situations d'apprentissage, et ce à partir de balises données par les concepteurs. La situation devait toucher une compétence, un domaine général de formation, et un contenu de formation, par exemple déployer un raisonnement en mathématiques, médias et arithmétique. Dans les cas où 4 journées étaient consacrées à ces formations, une expérimentation de ces situations d'apprentissage construites au cours des deux premières journées (à l'automne) se faisait dans les classes et les enseignants faisaient un retour sur celles-ci dans les deux autres journées (au printemps).

c) Un accompagnement qui se poursuit après l'implantation

En dehors de cette période d'implantation, un accompagnement a continué d'être proposé. Il a pris la forme, dans le cas des mathématiques plus spécifiquement, d'offres de formation, et ce en fonction des besoins manifestés par les conseillers pédagogiques, notamment dans les évaluations faites aux formations antérieures. Ces besoins pouvant partir eux-mêmes de besoins exprimés par les enseignants, de difficultés que ces conseillers pédagogiques observent lors de l'accompagnement de ces enseignants, ils ciblent en quelque sorte des aspects pour lesquels une formation leur semble nécessaire. Des formations supra-régionales ont ainsi été offertes en mathématiques à chacune des années sur la base de ces besoins. De telles formations ont été organisées depuis 2008 sur la progression des apprentissages au primaire en mathématiques ; sur la progression des apprentissages au secondaire ; sur l'arrimage primaire secondaire en lien avec le programme et la progression des apprentissages. En 2010, ce thème de l'arrimage primaire secondaire en mathématiques a fait de nouveau l'objet d'une formation impliquant activement les participants autour d'exemples concrets (tels des problèmes mathématiques présentés à chaque ordre).

Le mode d'accompagnement est ici plus ponctuel, de courte durée, et cherche à répondre aux besoins exprimés. Il s'adresse là encore à l'ensemble des conseillers pédagogiques en mathématiques et est davantage centralisé. Naturellement, il se confond aussi avec ce qui sera abordé à la section suivante, soit le processus de régulation et son évolution.

En guise de bilan

La reconstruction de cette mise en œuvre et de cet accompagnement montre que des *moyens importants* ont été mis en place, au plan national, pour accompagner cette réforme curriculaire :

1. Une insertion pensée d'abord dans des *écoles pilotes avec un accompagnement en contexte*, répondant aux besoins locaux et faisant en sorte que chaque école développe son expertise et son autonomie. Le réinvestissement de cette expérience, par la suite, n'est cependant pas très clair.
2. Une *formation et un accompagnement sur une longue durée, au moment de l'implantation dans l'ensemble des écoles,* et faisant appel à des « spécialistes » pour éclairer les fondements de cette réforme. Sur 10 ans et plus, elle se déroule à raison de quatre journées par année, touche 400 à 500 personnes-ressources à travers le Québec (4 autres journées par année touchant les directions d'école) et a recours, pour faire le point sur diverses thématiques à des conférenciers.
3. Des *formations régionales* dans le cas des mathématiques plus spécifiquement qui, là aussi, s'étalent sur une longue période, touche en petits groupes les enseignants et les conseillers pédagogiques dans leur région.
4. Des *formations ponctuelles*, après l'implantation, répondant à des besoins spécifiques exprimés par le milieu, et destinées aux conseillers pédagogiques.

Le choix a été fait, dans les rencontres nationales, de viser *l'ensemble des disciplines au programme, d'y intégrer le primaire et le secondaire,* et de miser dans ces formations sur les éléments globaux au fondement de cette réforme (le concept de compétence, de compétence transversale, de culture, le socioconstructivisme, les domaines généraux de formation, l'évaluation….). Dans le cas plus spécifique des mathématiques, le modèle d'accompagnement qui apparaît ici est un *modèle décentralisé*, on se déplace vers les régions, et il *mise sur la construction concrète de situations par les enseignants* en lien avec les éléments centraux de ces programmes (domaines généraux de formation, compétences disciplinaires, contenu de formation, séquences associées aux parcours différenciés et spécificité de celles-ci).

L'intention sous-jacente semble être d'accompagner, dans le cas des formations nationales, les conseillers pédagogiques, les personnes ressources, les directions à s'approprier, par un travail en petits groupes, les fondements de ce curriculum dans un mode qui s'éloigne du simple exposé informatif. Les contributions des conférenciers invités aux rencontres nationales vont dans ce sens dans la mesure où ceux-ci n'étaient pas chargés de « présenter le programme » dans l'un ou l'autre de ses aspects, mais bien d'aborder des thèmes (tels l'utilisation du portfolio pour suivre le cheminement des élèves, ou les valeurs des jeunes et la culture) permettant une appropriation de celui-ci. Une intention semblable se retrouve dans les formations régionales organisées par l'équipe de rédaction du programme de mathématiques, celle de rejoindre quelques enseignants volontaires et conseillers pédagogiques, cette fois dans leur région, avec une *idée d'appropriation par ces derniers des éléments clés du programme*.

Enfin, on voit nettement que cet accompagnement s'installe sur une longue durée. Son étendue se prolonge jusque dans des accompagnements ponctuels dont le but est, encore une fois, de soutenir l'implantation à l'échelle locale, en fonction des besoins particuliers des milieux. C'est alors bel et bien d'adaptation dont il est question, conduisant à passer naturellement du processus d'accompagnement et de mise en œuvre du curriculum à celui de régulation, que nous abordons maintenant.

3. Le processus de régulation et son évolution

En parallèle à cette réforme curriculaire majeure, un processus de régulation des programmes prend progressivement forme, dont les modalités vont se préciser au fil du temps. L'idée de *l'instauration d'un mécanisme permanent de régulation* est explicitement mis de l'avant dès

1996, par la Commission des États Généraux sur l'Éducation (Rapport final 1995-1996), et ce donc au tout début de la réforme touchant l'ensemble des curricula :

> L'instauration d'un mécanisme permanent de révision, léger, efficace et transparent, devrait être aussi prévue afin d'assurer les mises à jour nécessaires des curriculums (p.23).

Cette même idée est reprise dans la recommandation du groupe de travail sur la réforme du curriculum (1997) qui propose la mise en place d'une Commission Nationale des Programmes, s'inspirant en cela du modèle français du Conseil National des Programmes. On y met de l'avant l'importance de son caractère permanent, lui donnant pour mandat d'être « responsable pendant la période de refonte des curriculums de l'établissement des orientations et des encadrements généraux qui serviront de guides pour établir des programmes (et) de donner au terme du processus un avis sur les programmes proposés » (p. 86) mais aussi (et c'est là que la fonction de régulation apparaît)

> d'entretenir une réflexion permanente sur le curriculum et les programmes, ….de fonder des recommandations sur les analyses solides plutôt que sur des rapports de force de groupes d'intérêt, d'assurer une continuité dans l'évolution des programmes d'études et de les ajuster au fur et à mesure de l'arrivée de nouveaux besoins ou de nouvelles connaissances, de favoriser une vision d'ensemble du curriculum et des contenus des programmes, d'entreprendre des changements en profondeur et à long terme plutôt que de réagir aux pressions et aux circonstances… (p.87)

Ce processus de régulation est ainsi pensé au départ pour l'ensemble des programmes d'études, de manière permanente et non locale, dans un souci de cohérence d'ensemble entre les divers programmes mais aussi pour un même curriculum dans le temps (continuité et concertation entre les acteurs). Il est pensé aussi dans une logique « d'expertise » et non de pressions partisanes, et cherche à faire contrepoids à une logique de système compartimentée, comme nous le voyons bien dans les extraits suivants :

> Jeter un regard plus libre sur les programmes et sur le curriculum parce que mieux protégée de la pression des groupes d'intérêt, des aléas de la politique et des réactions de l'opinion publique…constituer un lieu où l'interaction entre des personnes qualifiées provenant d'horizons divers est rendue possible…augmenter la crédibilité des recommandations parce que l'organisme ne peut être soupçonné d'opportunisme politique (pp. 86-87).

Instaurée officiellement en 1997 par la Ministre de l'éducation, la Commission des Programmes d'Études, qui deviendra par la suite le Comité conseil sur les Programmes d'Études, se voit effectivement confier dans son mandat l'adaptation continue des programmes d'études. Elle est composée de 11 membres venant de milieux et d'expertises différentes : 5 enseignants (2 du primaire et 3 du secondaire), 1 membre du personnel professionnel (par exemple, un conseiller pédagogique), 3 membres de l'ordre postsecondaire (1 de l'ordre collégial et 2 universitaires), 1 représentant des parents et 1 membre du personnel cadre (directions d'écoles, de commissions scolaires…), au moins 2 de ces membres devant provenir du milieu de l'enseignement en anglais. Cette commission se voit ainsi confier et se doit d'exercer *une fonction de régulation continue du curriculum*, suivant en cela les recommandations du groupe de travail sur la réforme du curriculum.

Cette Commission jouera effectivement son rôle dans toute la période d'établissement des programmes, en élaborant des orientations et des encadrements généraux[14] qui serviront de guides pour établir des programmes. Elle a notamment, pour le programme de mathématiques, joué un rôle important dans les orientations des parcours différenciés pour les

[14] Voir notamment Commission des programmes d'études (1998). Calendrier d'élaboration, d'implantation et de révision des programmes d'études. Gouvernement du Québec

deux dernières années du secondaire[15]. Ces parcours s'appuient sur le principe fondamental d'une différenciation qui ne serait plus conçue, comme c'était le cas jusqu'alors, en termes de parcours « faible » (s'adressant aux élèves qui n'étudieront pas de maths ou de sciences par la suite), « régulier » et « fort » (pour les élèves qui poursuivront par la suite en sciences, incluant les sciences de la santé). S'offriraient plutôt trois profils définis en termes de mathématiques aussi solides et consistantes les unes que les autres, mais orientés en fonction de différents intérêts chez les élèves[16].

La Commission émettra aussi plusieurs avis sur les programmes proposés, et ce tout au long de ce processus d'élaboration (voir notamment pour les mathématiques, Commission des programmes d'études, 1999, 2005-b). Sa fonction de régulation des programmes, qui est donc amorcée lors de la construction même des programmes, se poursuivra par la suite à travers un premier avis portant sur les Domaines Généraux de Formation (Vers un élève citoyen, 2005). Suivra l'établissement, en 2007, d'un cadre de référence commun pour l'examen et l'adaptation du programme de formation, contribuant à préciser quelques principes directeurs. On parle *d'un souci de transparence*, *de rigueur* et *de cohérence*. Des axes et outils d'analyse prenant appui sur le rapport du groupe de travail sur la réforme du curriculum y sont proposés[17].

Par l'exercice d'une fonction de veille, une veille prospective visant à comprendre certains phénomènes à moyen et long terme, une veille touchant à des préoccupations plus ponctuelles, partant par exemple d'un questionnement du milieu scolaire, du ministre, le Comité-conseil se charge de recueillir l'information nécessaire pouvant mener à une prise de décision à propos des ajustements à apporter aux programmes. Ce sera le cas d'une des séquences (séquence TS) en 2008, en lien avec les exigences d'admission à certains programmes d'études collégiales. À cette occasion, le comité-conseil s'est associé à des spécialistes de l'enseignement secondaire, collégial et à des didacticiens universitaires pour émettre un avis. Cet avis rappelle également que la distinction entre les séquences ne devrait pas concerner que les approches utilisées (approche empirique ou théorique) mais également le contenu de formation[18].

> La proximité du contenu des deux séquences (TS et SN) les éloigne de leur finalité respective, qui se caractérise par un cheminement et des intentions qui leur sont propres.

Ce suivi assez serré, conduit sous forme « d'avis », s'est cependant arrêté au cours de l'année 2010, le comité conseil sur les programmes d'études ayant été aboli au terme de son mandat[19].

---

[15] Commission des programmes d'études (2002). Pour des élèves différents, des programmes motivants, avis au ministre de l'Éducation sur les programmes différenciés et les programmes à option au cycle de diversification du secondaire. Gouvernement du Québec.

[16] Ce principe, avancé par la commission des programmes en 2002, et explicité au moyen de pistes possibles selon le contexte de réalisation (des mathématiques dans un contexte de sciences et techniques physiques, dans un contexte des arts, des lettres et de la communication, dans un contexte d'univers social) sera repris par l'équipe de rédaction du programme de mathématiques au 2nd cycle et donnera lieu à la création de trois parcours: la séquence culture, technique, société (CST); la séquence technico-sciences (TS); la séquence sciences naturelles (SN). Ces séquences se veulent au départ de force égale sur le plan mathématique. C'est ici le souhait de rejoindre des intérêts différents qui guident le contenu et les approches privilégiées dans ces séquences, avec aussi la possibilité de passage d'une séquence à l'autre suite à la première année (voir section 3).

[17] Cet examen et cette adaptation continue va ainsi s'appuyer sur 3 axes (p 8-10) : un axe épistémologique en lien avec la conception de l'enseignement, de l'apprentissage et de l'évaluation qui orientent la réforme des curriculums; un axe curriculaire faisant référence à l'approche par compétences ayant servi de modèle à l'élaboration du programme; un axe disciplinaire qui, à partir de l'approche par compétences, suggère une nouvelle façon d'aborder les disciplines.

[18] En rendant le contenu des séquences TS et SN quasi équivalentes, on accentue par ailleurs l'écart avec la séquence CST, qui correspond déjà à un nombre moindre d'heures.

[19] Cette décision n'est pas encore officielle, la ministre de l'éducation doit l'approuver.

La fonction d'adaptation continue des programmes revient donc entre les mains de la direction des programmes, et donc pour chacun des programmes spécifiques, sous la responsabilité du responsable de ce programme. On note néanmoins que ceci ne semble pas nuire au travail en cours en lien avec cette adaptation du programme de mathématiques. Ainsi, se poursuit la démarche « informelle » mise en place par la responsable du programme de mathématiques visant à mieux comprendre comment se vivent les programmes au quotidien : leur compréhension, l'adhésion aux orientations de ce programme, les effets remarqués chez les élèves…etc. Ces rencontres auprès d'intervenants du milieu permettent d'apprécier la réappropriation de la réforme par les enseignants sur le long terme, une réforme dont ils voient les effets positifs chez les jeunes. Des difficultés aussi ressortent à l'égard des définitions et de l'attention donnée aux « compétences » retenues dans le programme (résoudre une situation problème versus raisonner au primaire, la compétence à communiquer, les compétences dites transversales.). Cette démarche informelle ne s'inscrit toutefois plus dans une programmation systématique de collecte d'informations, de sorte que ces observations ont davantage une valeur d'indicateurs de nature exploratoire.

Autre exemple, la séquence TS qui avait été l'objet en 2008 d'un avis du comité-conseil des programmes, fut de nouveau examinée au printemps 2010: réalisation de plusieurs « focus group » auprès de directeurs d'établissements, de directeurs des services éducatifs, d'enseignants, de conseillers pédagogiques, de conseillers en orientation, de représentants de l'Association Mathématique du Québec. Les informations recueillies[20] pointent les difficultés qu'ont les enseignants à réaliser cette séquence dans le temps prescrit, la difficulté à concevoir les passerelles souhaitées entre la séquence TS et CST, ainsi qu'un besoin d'accompagnement particulier. Sur ce dernier point, des actions sont prévues pour les années 2012 à 2015 : Un accompagnement auprès des conseillers pédagogiques qui agissent comme personnes ressources auprès des enseignants qui interviennent dans cette séquence, mais aussi auprès des intervenants des niveaux préalables. Cet accompagnement est centré sur une préparation aux approches empiriques et expérimentales en enseignement des mathématiques pouvant concerner tout le secondaire et même le primaire[21].

En guise de bilan

De ce qui précède se dégage aussi un indicateur important de changement de contrat social, dans la mesure où est ici pensée *une fonction de régulation des programmes sur le plan structurel et dans la continuité* du travail de refonte curriculaire amorcé. Cette fonction n'était pas réellement présente antérieurement[22], et elle offre une *belle cohérence avec le processus de conception et mise en œuvre*, étant elle aussi pensée de manière organique et systémique (pour tous les programmes et ce de manière cohérente avec les orientations au fondement de la réforme, enracinée dans ces orientations). *Son caractère continu*, qui se veut une manière

---

[20] Les données issues de cette étude ne sont pas publiées. Les éléments que nous reprenons ici sont issus de l'entretien que nous avons eu avec la responsable du programme de mathématiques.

[21] Un autre dossier, issu au départ de cette réflexion sur la séquence TS, est celui des transitions inter-ordres[21]. Une table de concertation inter-ordres (secondaire/collégial/universitaire) a été mise sur pied, dont le mandat est de rechercher des pistes d'action à chacun des ordres pour faciliter la continuité dans l'enseignement d'un ordre à l'autre.

[22] De 1984 à 1995, les programmes d'études ont été soumis à un processus d'évaluation (inventaire des étapes d'implantation et des conditions de mises en œuvre des programmes, enquêtes visant à évaluer l'atteinte des objectifs auprès de diverses catégories de personnes, cadres, directeurs d'école, conseillers pédagogiques, enseignants, échantillons représentatifs d'élèves). Plus de 25 programmes ont ainsi été évalués…Le plus souvent, les conclusions des évaluations ont rarement conduit à une révision prompte et complète d'un programme, même quand cela se révélait nécessaire. Il semble que les raisons aient tenu non seulement à la réduction des ressources consacrées à cette fin au ministère mais aussi…à la difficulté de les changer à la pièce alors que les modifications nécessaires exigeaient des approches plus organiques (Réaffirmer l'école 1997, p. 76)

d'éviter l'écueil de la réécriture du programme tous les 10 ou 15 ans, permettrait ainsi d'y intégrer les « étapes » de conception et de mise en œuvre, et toujours de manière à respecter la logique participative décrite plus haut. Elle se veut de la sorte « transparente et rigoureuse », de manière à permettre son ajustement au fur et à mesure de l'apparition de nouveaux besoins ou de nouvelles connaissances, et à éviter les modifications à l'emporte-pièce sous la pression partisane d'associations professionnelles ou de pressions politiques : les motivations que nous décrivions comme étant à l'origine de tout le processus.

Si un bémol s'impose en raison de la disparition du comité conseil des programmes chargé de sa régulation et qui, par sa position centrale, pouvait avoir une vue d'ensemble sur le curriculum, il est intéressant de noter qu'un certain nombre d'initiatives semblent persister. On perd peut-être en partie la vision systémique de cette fonction de régulation, et peut-être une partie de ce qui permettait aux évolutions de se faire de manière cohérente, transparente, voire rigoureuse, et commune à l'ensemble des programmes. L'avenir nous dira alors si nous assistons à la fin du mouvement lancé par la publication du rapport des États Généraux en 1996, ou si, au contraire, nous entrons de manière plus ou moins consciente dans une nouvelle phase de celui-ci.

4. Quelques éléments de discussion en termes de contrat social

De cette analyse d'un vaste processus de design curriculaire dans sa conception, sa mise en œuvre et sa régulation, en particulier dans le cas du programme de mathématiques, se dégage une cohérence d'ensemble qui confirme ce que nous avons noté concernant un changement en termes de contrat social. S'approprier s'est « faire sien », dans un mouvement qui suggère à la fois une transformation de la chose dont on se fait propriétaire, au sens de « rendre approprié » (à soi, à une situation), mais aussi une transformation de celui qui l'adopte, comme lorsque l'on adopte de penser, de sentir, de parler. En termes de contrat social, la mise en œuvre du curriculum est pensée de manière systémique et organique. Elle cherche non seulement à joindre, mais à mettre à contribution l'ensemble des groupes de personnes concernées, en faisant participer directement ces groupes dans les différents aspects du processus.

Le grand changement envisagé pour passer d'une école « accessible à tous » à une école où « tous réussissent » passe en fait par la construction et la reconstruction de cette visée au fur et à mesure que les programmes se développent, se mettent en place. Le processus d'accompagnement laisse aussi deviner une prise en compte du besoin de formation qui accompagne une réforme de cet ordre. De ce point de vue, l'enjeu, toujours sur le plan du contrat social, n'est pas seulement de mettre à contribution des gens d'horizons, d'expériences, de compétences divers, mais également de *contribuer à leur développement* en regard de l'idée d'une « école de la réussite ». En effet, cette finalité du processus de réforme, très tôt énoncé, ne semble pas lui-même remis en cause (au moins du point de vue du processus, lorsque l'on examine les différents textes consultés). Serait-ce alors l'ambiguïté même de ce que « réussir » signifie ici, jamais explicitement défini, qui aura permis que le travail se poursuive à l'intérieur de ce « cadre » ? Une interprétation intéressante serait alors d'envisager l'ensemble de ce processus de design curriculaire comme *une entreprise commune de signification* à propos de ce terme. On entendrait alors « la réussite pour tous » comme une formule s'appliquant non seulement aux élèves, mais à l'ensemble de la communauté ; non seulement dans le sens de « faire réussir » tous les enfants à l'école, mais aussi de se donner les moyens de faire signifier l'idée de « réussite » de telle sorte que *tous* puissent s'y reconnaître.

Ceci permet d'enrichir l'analyse récente du processus de mise en place de ce curriculum proposée dans la thèse de doctorat de Carpentier (2010). L'auteur caractérise celui-ci de

« modèle hybride », c'est-à-dire combinant des aspects « top-down » et « bottom-up » d'une mise en œuvre curriculaire. Les difficultés mêmes qu'elle note lors de cette mise en œuvre apparaissent alors comme faisant partie intégrante de l'entreprise visée, et non comme des faiblesses au niveau de la conception de cette mise en œuvre. Absence d'expertise reconnue sur des concepts clés du programme (par exemple celui de compétence), sollicitation de plusieurs changements de culture simultanée (culture du design curriculaire, de l'organisation scolaire, de la classe…), difficultés à faire participer les acteurs à la logique du modèle hybride, et même la présence d'un contexte sociologique incertain (négociations syndicales, changements successifs de ministres de l'éducation), tous ces « obstacles » répondent en fait très bien au projet proposé sur le plan du contrat social.

Quant au processus de régulation, la manière dont il est conçu – un suivi continu, global et précis, transparent et mettant à contribution différents acteurs, etc. – s'accorde aussi, on le voit clairement, avec cette logique d'hybridité. Devenant lui-même un moment du design (et vice-versa), le curriculum peut alors devenir un objet en constante évolution. Il ne s'agit plus simplement d'adapter ou de transformer ses pratiques, ou de mettre son expérience de la classe ou du monde à contribution dans la rédaction de ce qui deviendra « le » curriculum. Ce n'est pas le curriculum comme « textes » au sens de Pinar et Reynolds (1992), qu'il soit pris dans sa forme institutionnelle, herméneutique ou autre, qui domine. Au contraire, c'est *l'écriture* elle-même de ces textes (et le texte ou sa forme) qui émerge, le va et vient entre toutes formes de textes, une ouverture vers ce que Derrida (1967) nomme l'archi-écriture : un mouvement qui conditionne le rapport au « texte » et à l'écrit, à sa dimension temporelle, au rapport à l'autre qui s'y inscrit.

Ce jeu sur la langue n'est pas banal ni gratuit, en ce qu'il nous permet de revenir sur la notion même de « contrat » utilisé jusqu'ici sans trop de nuances. Cette idée de « contrat social » inspiré de Rousseau ne réfère évidemment pas à un document écrit, un contrat au sens commun du terme, au sens où on pourrait vouloir penser le curriculum dans sa forme « achevée » comme une convention devant laquelle on se trouve obligé. Mais ce contrat social, si implicite soit-il, on se le présente néanmoins comme quelque chose de déterminé, de complètement (Latin *de-*) terminé (L. *terminare*). C'est pour Rousseau ce « pacte social » par lequel chacun renonce (définitivement) à sa « liberté naturelle » au profit d'une existence civile, pacte dont « les clauses se réduisent toutes à une seule : l'aliénation totale de chaque associé avec tous ses droits à toute la communauté ». Ce n'est pas tant le contenu de cette clause que son impossible finitude qu'il s'agit de souligner ici. Le « contrat social » auquel nous conduit notre analyse du développement curriculaire est d'une nature différente : ce n'est pas un contrat signé, ou qu'on signera (même dans l'implicite, même dans le figuratif). C'est justement, tout au contraire, un contrat qui s'écrit, qui s'écrit sans fin. Un contrat vivant dont le travail est de tirer ou trainer (L. *trahere*) ensemble (L. *con-*), de nous lier les uns aux autres. Pas un contact au sens d'une chose morte, la chose qui meurt quand on la signe (Derrida, 1988), mais plutôt un « contracter » dans les deux sens du terme qui ne demande, pour débuter, que la reconnaissance de ce que Derrida (2003) appelle « une alliance primordiale », le « Oui originaire » condition de tout lien social.

II. LE PROCESSUS DE DESIGN CURRICULAIRE DU POINT DE VUE DES ACTEURS

L'analyse précédente, conduite du point de vue structurel (en partant d'une étude documentaire), nous a conduits à une réflexion, entre autres en termes de contrat social, dans laquelle l'implication de différents acteurs au processus de conception, de mise en œuvre et de régulation du curriculum est centrale. Cette importance accordée aux acteurs nous a conduit à vouloir pousser l'analyse précisément sur ce terrain.

1. Le contexte

Pour cette étude, nous nous sommes penchés sur le processus de développement de ce curriculum en mathématiques tel que vécu par des acteurs qui ont participé à sa conception, et, de manière plus spécifique, sur le processus de construction du curriculum au secondaire (le premier cycle comprend la 7$^{\text{ème}}$ et 8$^{\text{ème}}$ années, le deuxième cycle une 9$^{\text{ème}}$ année commune à tous les élèves, puis 2 années où prennent place trois parcours différenciés). Mais avant d'aller plus loin, soulignons que les concepteurs de ces programmes sont d'emblée, chacun leur tour, placés devant la nécessité de s'arrimer aux programmes adoptés pour les cycles précédents : programme du primaire pour les uns, et programme du 1er cycle du secondaire pour les seconds. Ces programmes en aval doivent être vus, on le comprendra, comme « structurants » : ils sont développés autour de 3 compétences mathématiques (résoudre une situation-problème en mathématiques ; déployer un raisonnement mathématique ; communiquer à l'aide du langage mathématique), et présentés dans un format uniforme et succinct (où l'on note, par exemple, l'absence de guides pédagogiques) que les programmes suivants doivent reprendre. De plus, une des « données » avec lesquelles les concepteurs du programme du 2$^{\text{nd}}$ cycle doivent composer est la subdivision en 3 cheminements distincts, dont les orientations doivent être précisées.

Pour prendre en considération le point de vue des acteurs, des entrevues ont été réalisées avec des personnes ayant participé au processus de conception du curriculum de mathématiques au secondaire dans le cadre de la réforme discutée ici. Les entrevues ont été réalisées en suivant un protocole organisé autour des composantes suivantes :

- <u>La composition des comités</u> : Au niveau des acteurs, dégager la composition réelle des comités, le processus de recrutement et la base sur lequel il s'est fait, la stabilité et les mouvements perçus à l'intérieur des comités, la continuité d'un comité à l'autre, les conditions de participation (dégagement de tâche pour les enseignants, nombre de journées, autres exigences).
- <u>Le fonctionnement des comités</u> : Au niveau du processus lui-même, comprendre le fonctionnement des comités durant la construction du programme, la perception que les acteurs ont de leur rôle et du projet dans lequel ils sont engagés, la dynamique de discussion, les balises, les consultations et leur rôle, la coordination entre les différents comités.
- <u>Les perceptions face au résultat du processus</u> : Face aux résultats de cette conception du programme en comité, apprécier ce que les participants eux-mêmes disent par rapport au produit de leur travail, le regard qu'ils portent sur le programme comme résultat de ce processus (se reconnaissent-ils dans ce programme ? Quels sont les éléments de leurs discussions qu'ils retrouvent dans les documents ? Quels sont les éléments qui ont disparu ? Qu'est-ce qui a conduit à faire certains « deuils ») ?

Les sections qui suivent rapportent ce que nous avons recueilli sur ces trois points, éléments dont nous offrirons une brève analyse et discussion par la suite.

2. Analyse de ce qui se dégage concernant la composition des comités

L'analyse des entrevues avec des acteurs impliqués dans les comités de rédaction du programme de mathématiques au secondaire permet d'expliciter comment concrètement a été réalisée cette démarche de construction, et quelle forme particulière elle a prise. Le travail semble avoir été organisé autour de la formation de différents comités :

(a) Un comité restreint de rédaction formé de deux à trois enseignants.

Au 1er cycle, ce comité restreint était formé de 2 enseignants, dont l'un, ayant participé à la rédaction du programme du 3ème cycle du primaire, assurait ainsi une continuité avec le travail fait préalablement pour le primaire. Au 2ème cycle, le choix sera fait par le responsable de programme de mathématiques d'un comité restreint formé de 3 enseignants, dont l'un ayant été responsable de la rédaction du programme du 1er cycle, assurait la continuité avec le travail fait au 1er cycle. Aussi, après un travail sur le curriculum de la première année de ce 2ème cycle (commune à tous les élèves) et sur la clarification des trois parcours différenciés pour les deux dernières années de ce cycle[23], chacun des 3 enseignants prendra la responsabilité de la rédaction d'une des 3 séquences (nous y reviendrons à la section suivante). Cependant, la partie commune à ces 3 séquences (présentation de la discipline, relations avec les domaines généraux de formation, avec les compétences transversales et les autres disciplines, le contexte pédagogique) était rédigée par les 3 enseignants ensemble.

Le responsable du programme de mathématiques au ministère ne fait pas lui-même partie de ces comités de rédaction. Son rôle est de coordonner le travail de ce comité (dans lequel il intervient à l'occasion) de manière plus large : il se tient régulièrement au courant bien sûr de l'avancement du travail pour y réagir ; il organise les rencontres avec d'autres groupes, pour de la consultation par exemple, prenant part ou non à ces rencontres ; il assure le lien avec d'autres comités ou personnes, la Commission des Programmes d'Études ou les responsables des autres programmes d'étude, par exemple.

(b) Des comités de rédaction élargis formés majoritairement d'enseignants

Dans tous les cas, chacun de ces comités de rédaction va s'adjoindre l'aide d'un comité élargi de rédaction formé majoritairement d'enseignants, se réunissant une fois par mois (à raison d'une à deux journées) pour travailler à partir de documents élaborés par le comité de rédaction restreint. Ce travail sur l'élaboration du programme, touchant à la fois le fond et la forme, nourrit donc de manière soutenue le comité restreint dans la rédaction, et ce pendant toute la période de conception qui s'est étalée sur deux ans et demi.

Ce comité élargi est formé de 8 enseignants et conseillers pédagogiques (on y retrouve parfois des personnes retraitées) recommandés par leurs commissions scolaires, sur la base de leur engagement dans la communauté (le ministère dispose ici d'une banque de personnes ressources possibles, dont les CV ont été envoyés, dans laquelle il peut puiser). Ici aussi ces personnes sont choisies par le responsable du programme de mathématiques, avec pour objectif de représenter l'ensemble du territoire : différentes provenances géographiques, des acteurs provenant des réseaux publics et privés, des écoles anglophones et francophones…etc[24]. Les membres sont également choisis de manière à assurer un minimum

[23] Le choix de ces 3 parcours n'était en effet nullement défini au départ, seules les balises (voir ici l'avis de la Commission des programmes d'études, 2002, « Pour des élèves différents, des programmes motivants ») avaient été précisées. Des choix possibles avaient été lancés dans cet avis pour préciser ces nouvelles balises sous-jacentes à la différenciation des parcours, par exemple une orientation rejoignant certains intérêts des élèves en arts orientant vers un travail en géométrie dans l'espace, une orientation rejoignant certains intérêts en sciences humaines autour de l'analyse de phénomènes sociaux et de la modélisation en mathématiques,…etc. Les séquences, telles qu'elles apparaissent dans la forme finale (Sciences technique société, CST ; Technico sciences TS ; Sciences naturelles SN) sont repensées et sont donc le produit de la construction de ce comité.

[24] Le système québécois est assez complexe. Il compte en effet un vaste réseau d'écoles publiques et un petit réseau d'écoles privées en partie financées par l'État. Certaines de ces écoles privées sont laïques et d'autres intègrent un enseignement religieux (principalement catholiques ou protestantes, mais aussi judaïque,

de continuité. Ainsi certaines personnes ayant participé à l'élaboration du programme du cycle précédent sont impliquées, comme on vient de le voir, dans ces comités.

Dans le cas du programme du 2nd cycle (parcours de différenciation pour les deux dernières années du cycle), chacun des rédacteurs était entouré de son propre comité élargi. Il y avait donc, fonctionnant en parallèle, trois comités élargis, associés à chacune des séquences (CST, TS, SN). Les enseignants travaillant sur une des séquences n'étaient jamais en contact avec les autres séquences et comités, et n'avaient pas d'écho de ce qui s'y passait. Une des personnes que nous avons interviewées, et qui était membre du comité élargi d'une des séquences, précisera que ce choix était volontaire, le but étant d'éviter que les comités « s'influencent » (dans l'idée que l'on imagine que l'un aurait pu vouloir imposer une vision, des contenus….)

(c) Des comités de consultation plus larges

Par ailleurs, des comités de consultation plus larges, formés là aussi majoritairement d'enseignants, sont réunis 3 à 4 fois par année pour réagir au document dans son état d'avancement. On parle d'environ 20 personnes dans le cas du 1er cycle, et d'un peu moins dans le cas du second. L'idée est ici, pour les rédacteurs, de recueillir des réactions d'enseignants moins impliqués dans le processus de conception, de manière à disposer d'un regard « extérieur » sur la faisabilité des propositions, la lisibilité des documents, la compréhension qui s'en dégage et ainsi de suite.

Par ailleurs, des consultations plus larges sont également organisées par le comité restreint de rédaction auprès d'autres acteurs. Ces consultations ont lieu en tout début de processus, par exemple, dans le cas du programme de 1er cycle, avec des acteurs provenant de différents milieux, et ce afin de lancer le travail de conception, de discuter des choix importants, des orientations possibles ..etc. Elles se poursuivent en cours de processus. Par exemple, dans le cas du programme du 2nd cycle du secondaire, le comité restreint de rédaction rencontrera (séparément) des professeurs des différentes universités québécoises (didacticiens des mathématiques, formateurs intervenant dans la formation des enseignants) ; des enseignants du collégial, des administrateurs de l'ordre collégial (e.g. les regroupements de collèges qui décident des préalables et des conditions d'admission à leurs programmes). On sait également que sera formé, à un certain moment, un comité d'évaluation indépendant avec lequel le comité de rédaction va interagir sur la base du travail réalisé jusque là. On en connaît cependant très peu sur ce comité, n'ayant pas interrogé ses participants.

(d) Un comité de soutien à la rédaction des programmes

Les rédacteurs seront enfin appuyés, en cours de route, par un comité de soutien à la rédaction des programmes. Ce comité a pour rôle de soutenir, sur le plan de la rédaction, les différentes équipes qui travaillent à la conception des programmes dans les différentes disciplines, et réagit aux documents en cours d'élaboration. Une des intentions ici est d'assurer une certaine uniformité entre le format des différents programmes, y compris au niveau du contenu pouvant s'y retrouver. Dans la même veine, la Commission des Programmes d'Études sera aussi appelée à réagir en cours de processus, suggérant des modifications et renvoyant au besoin les équipes au travail, jusqu'à ce que la version finale soit approuvée par elle.

On voit dans ce qui précède la présence de nombreux enseignants au sein des comités (les comités restreints de rédaction, les comités élargis de rédaction, et les comités de consultation ponctuels). Cette forte participation enseignante fut possible en raison de conditions

---

islamique….) en plus d'être partagées entre écoles francophones et anglophones. Cependant, c'est surtout à Montréal que cette diversité apparaît.

facilitatrices : les enseignants sont dégagés de leurs tâches pour pouvoir participer à ces journées de rencontre et même, dans le cas des rédacteurs, sont complètement dégagés de leur travail d'enseignant pour toute la durée du processus (Ils travaillent donc à temps plein à cette rédaction).

En ce qui concerne la stabilité et les mouvements à l'intérieur de ces comités, il est difficile d'avoir une vue très détaillée de la situation. Nous savons que les comités de rédaction (restreints et élargis) ont à l'occasion connu des changements en cours de processus, lors de la rédaction d'un même programme. Les consultations plus larges semblent aussi avoir été réalisées auprès d'un ensemble plus ou moins mouvant de personnes, mais somme toute assez stable.

On rappellera enfin que ce processus de construction s'étale sur un temps long. La rédaction du programme se fait sur une période de 2 ans ½ dans chacun des cas : de 2000 à 2003 pour le 1er cycle du secondaire, de 2003 à 2006 pour le 2nd cycle. Inscrit dans une telle durée, on comprend mieux encore le souci de continuité, mentionné plus haut, présent dans tout ce processus (conduisant à assurer la présence pour le 1er cycle du secondaire d'un des enseignants ayant participé, comme rédacteur, au programme de 3ème cycle du primaire, et pour le 2nd cycle du secondaire, d'une des rédactrices du programme de 1er cycle).

En guise de bilan

De ce qui ressort des entrevues au sujet de la composition des comités, il se dégage nettement une certaine vision du processus de conception du curriculum. Nous avons d'une part, comme on s'y attendait à la suite de la première partie de ce texte, la présence de multiples acteurs intervenant à différents moments du processus. On remarque cependant que cette pluralité se retrouve pour ainsi dire « en marge » d'un noyau assez dense dans lequel interviennent surtout des enseignants et des conseillers pédagogiques: comité restreint de rédaction, comités de rédactions élargis, et comités de consultations ponctuels. Cette forte mise à contribution de ces « praticiens de l'école » laisse présager qu'une place importante soit donnée aux observations ou préoccupations issues de l'expérience quotidienne de l'enseignement des mathématiques dans les écoles. On sent bien, néanmoins, que la présence même d'une structure faisant appel à différents comités, les comités précédents mais aussi des comités de consultation plus larges, cherche à maintenir une mixité dont on peut concevoir les retombées à deux niveaux. D'une part, on s'assure pour ainsi dire que le programme construit n'est pas seulement celui « d'une pratique de l'enseignement », mais se trouve offert à l'influence d'autres groupes du monde de l'éducation ayant divers intérêts, diverses préoccupations, connaissances ou expériences. En même temps, le resserrement à cette étape sur « ce monde de l'éducation » a pour effet de baliser le travail de conception du programme à l'intérieur des consultations plus vastes discutées au début de ce texte. *Le projet d'une « école de la réussite » et l'organisation de ce projet en termes de « compétences disciplinaires, domaines généraux de formation, compétences transversales… » n'est pas à questionner. Par contre, et c'est là que la pluralité des acteurs joue un rôle important, l'interprétation de ces directives dans le cadre de la rédaction d'un programme particulier reste ouverte.*

Différents acteurs, différents comités, différents types de relations entre eux, différentes sortes de consultations également y sont présents : un ensemble hétéroclite *au milieu* duquel ceux qui « tiennent le crayon » (les enseignants du comité restreint de rédaction) sont plongés, avec un devoir d'écriture face à ces différences. La structure adoptée ne semble pourtant pas particulièrement propice à l'obtention d'un « consensus » (même par procuration) entre les voix qui se mêlent de (à/ dans) cette conception. Les comités semblent formés à discrétion, à condition que certaines balises (visant la pluralité) soient respectées, et l'approbation finale du travail produit dépend d'une entité (la Commission des Programmes d'études) qui a aussi son mot à dire tout au long du processus. Il est très peu probable, suivant une telle architecture, d'arriver à un « accord » entre toutes les parties impliquées : notons le bien, *cette recherche d'un accord n'est d'ailleurs pas un des éléments* qui se dégage des orientations ou des motivations du vaste projet de réforme discuté en première partie de ce texte.

C'est vers autre acception du terme consensus qu'il faut se tourner, celle qu'évoquent les racines latines du mot : *con* (« avec ») et *sensus* (« perçu », « sensé »). Le programme qui se construit en est ainsi un auquel *différents acteurs « touchent »*, et dont *tous peuvent faire sens,* qu'ils soient ou non d'accord avec ses propositions. On devine par contre que ceci n'est pas obtenu sans un coût élevé. Nous avons vu en effet l'investissement financier et le temps important consacré à ce processus : nombreux dégagements d'enseignants provenant de différents milieux et régions du Québec, certains sur des années complètes, etc. Mais on peut également envisager des coûts d'une nature différente, en termes d'expériences et de perceptions, cette fois. Les deux sections suivantes vont nous le confirmer.

3. Analyse de ce qui se dégage concernant le fonctionnement des comités

Notre entrée sur ce fonctionnement des comités durant la construction du programme est naturellement limitée quant à la perception des acteurs (de leur rôle, de l'organisation du projet dans lequel ils sont engagés), quant aux dynamiques de discussions dans ces groupes ou encore au travail de coordination entre les différents comités. Les entrevues réalisées nous ont tout de même permis de dégager certains éléments.

Les comités restreints de rédaction ont ainsi entrepris leur travail par une *phase préalable de recherches de différentes sources* pouvant alimenter leur réflexion. Avant de s'engager dans la rédaction comme telle, l'un des membres du comité de rédaction, que nous avons rencontré en entrevue, précisera ainsi avoir consulté *différents curricula* fonctionnant par compétences (Abrantes et la réforme au Portugal constituera une source importante pour leur réflexion à cette étape, avec également les États Unis et les documents du NCTM, l'Angleterre et son curriculum, un peu la France, etc.) et d'autres *écrits sur la notion de compétence*. Cette recherche d'informations s'est poursuivie en cours de rédaction, en se tournant alors vers *les travaux de didacticiens portant sur certains aspects plus spécifiques* (en lien par exemple, avec la compétence à « raisonner en mathématiques »). Les membres des comités de rédaction avaient donc accès à ces différentes ressources, *mais aussi, naturellement, aux anciens programmes du secondaire en mathématiques dont l'un en particulier* (MEQ, 1994) s'avérera une source importante d'inspiration, selon une de nos entrevues. Clairement aussi, bien sûr, *le programme du primaire,* avec lequel ils doivent s'articuler , s'offre comme une ressource: trois compétences choisies pour les mathématiques y sont définies (résoudre une situation problème, raisonner en mathématiques, communiquer à l'aide du langage mathématique), le travail consistant alors à partir de celles-ci pour en préciser la teneur dans le cas du 1er cycle du secondaire (ce qui amènera à revoir leur formulation, passant par exemple de « raisonner en mathématiques » à « déployer un raisonnement en mathématiques », puis à expliciter celle-ci en termes d'induction, de déduction, d'analogie, de conjecture, etc.). Enfin, ils disposent des documents d'orientation de la réforme qui seront également mis à contribution pour amorcer, puis poursuivre la construction du programme à ce niveau.

Une première consultation, dans un but « d'orientation », a par ailleurs eu lieu, assez tôt dans le processus. Tant dans le cas du 1er cycle que dans le cas du 2nd cycle, les rédacteurs ont réuni des personnes provenant de différents milieux. Selon l'information recueillie, cette rencontre visait à lancer le travail sur ces programmes à partir des idées proposées par les uns et les autres. Ce fut notamment le cas à propos du programme de 1er cycle et des trois séquences au 2nd cycle.

Dans ce dernier cas, les 3 membres du comité restreint de rédaction ont travaillé ensemble à préciser ces trois parcours différenciés et leur orientation. Le choix de ces trois parcours n'était pas, en effet, arrêté au départ. Seules des balises générales avaient été données (voir avis de la Commission des programmes d'étude, 2002), et des idées y avaient été proposées pour permettre de comprendre le rationnel sous-jacent à cette différenciation des parcours (par exemple mathématiques dans un contexte des arts, des lettres et de la communication ; mathématiques dans un contexte de sciences et techniques physiques; mathématiques dans un contexte d'univers social). Les séquences, telles qu'elles apparaissent dans la forme finale (CST, TS, SN) sont donc le produit de la construction du comité de rédaction restreint à partir de cet avis et de la consultation mentionnée au paragraphe précédent.

Les entrevues nous donnent par ailleurs une idée de la manière dont ont fonctionné les comités élargis de rédaction. Sur une période d'une année, 10 rencontres ont eu lieu (à raison d'une fois par mois, sur 2 jours). Ces rencontres étaient organisées autour de la présentation de quelques pages d'une version de travail du programme, soumise par les rédacteurs. Le document de travail portait sur un aspect du programme en rédaction, par exemple, la présentation de la discipline ou d'une compétence, et était transmis tantôt en avance, tantôt au moment de la rencontre. La discussion, durant cette rencontre, se faisait autour de ce document, que les rédacteurs se chargeaient ensuite d'ajuster, de modifier. Les échanges sur le document portaient tant sur la forme que sur le contenu, le tout devant néanmoins répondre aux contraintes globales du programme. Selon les acteurs que nous avons interviewés, les pages ajustées ne faisaient pas nécessairement l'objet de relecture ou de révision au sein du comité élargi de rédaction. Dans le cas du programme de 2nd cycle, nous l'avons mentionné précédemment, les comités travaillant sur chaque séquence ignoraient le produit du travail portant sur les autres cheminements, et ce jusqu'à la toute fin de la rédaction. Ce n'est qu'une fois les séquences terminées que les rédacteurs du comité restreint ont travaillé à la rédaction de la partie de présentation plus générale de celles-ci, ajustant au besoin certains éléments de forme dans chacune des séquences.

En parallèle avec ce travail de rédaction, d'autres consultations, nous l'avons vu précédemment, ont été organisées, dont celles avec le comité plus large d'enseignants, et ce à raison de 3 ou 4 fois par année.

En guise de bilan

Se dégagent ici deux idées fortes par rapport au fonctionnement des comités. D'une part, on cherche à inscrire le programme rédigé dans une *continuité par rapport à ce qui s'est fait avant, ou ce qui se fait ailleurs*. On ne fait pas table rase du programme précédent qui, dira une personne que nous avons interviewée, « n'est pas si loin, par certains côtés, de l'idée de compétence, notamment la compétence à raisonner en mathématiques, si on reprend, par exemple les objectifs terminaux souvent formulés en termes de raisonnements ». Par ailleurs, on observe un net *cloisonnement entre les comités, dans le cas de la rédaction des trois séquences*. Pour l'essentiel, une seule personne est chargée, pour chacun des programmes, de faire le lien entre ceux-ci et le « document ». L'écrit même du curriculum, ne circule pas librement entre les groupes qui, pourtant, sont appelés à y contribuer.

4. Analyse de ce qui se dégage concernant les perceptions face au résultat du processus.

Que rapportent les acteurs à propos du processus, de leur rôle, de leur contribution ? Quel regard portent-ils sur le résultat de ce processus ?

Il se dégage des entrevues une impression de plus ou moins grande contribution selon la place plus ou moins périphérique qu'occupe l'acteur : ainsi dans le cas d'une enseignante ayant occupé une place centrale dans ce processus, comme membre du comité de rédaction du programme de 1er cycle et du 2nd cycle, un engagement entier ressort, et ce à toutes ses phases : recherches préalables, consultations diverses, rédaction, … On y sent un investissement important, sur le long terme dans ce cas : elle couvrira tout le programme du secondaire, s'impliquera dans sa mise en œuvre, et elle se reconnaît parfaitement dans le résultat de ce processus, dans le programme qui en est issu.

Dans le cas d'autres acteurs, membres de comités élargis, une participation beaucoup plus périphérique ressort, c'est un processus dans lequel ils se sentent plus ou moins impliqués : ils décriront surtout leur travail comme un travail de réaction à l'écriture du document, sur lequel ils n'auront pas nécessairement de retour, et en ce sens plus ou moins intéressant pour eux-mêmes, limitant, à cause de la forme prise, les possibilités réelles de contribution sur le plan des idées. La structure du programme uniforme, très contraignante, nous dira un des acteurs, oblige à abandonner une part importante du travail. Et ils se reconnaissent en ce sens plus ou moins dans le produit final issu de ce processus. C'est seulement dans les notes de bas de page que l'on peut retrouver certains éléments des discussions, nous dira une des personnes interviewées.

5. En guise de conclusion pour aller plus loin sur ce processus de design curriculaire

La reconstruction faite précédemment nous laisse penser que le programme d'étude, non pas ici les produits finaux, les textes écrits qui deviendront le programme institutionnel, mais bien le curriculum en développement, peut être vu comme un «objet frontière» (Star & Griesemer 1989). Il traverse, d'une part, tout au long du processus les frontières de différentes communautés de pratique : enseignants des comités restreints de rédaction et des comités élargis, didacticiens des mathématiques et formateurs universitaires réunis lors des consultations, intervenants autres.., membres de la Commission des programmes d'Études…, et révèle, ce faisant, différentes manières de voir ce curriculum, d'en parler, d'interpréter son contenu en développement, d'en faire sens. Cet objet qui entrecroise au fil de sa construction plusieurs communautés de pratiques, n'appartient ainsi en définitive, en propre à aucune d'elle. L'analyse que nous avons mené du processus de design curriculaire tant au plan structurel qu'au plan des acteurs nous montre, par ailleurs, que cet objet entrecroise plusieurs groupes de pratique sans que pour autant en ressorte une visée de consensus à l'égard de celui-ci. À titre d'exemple, si le fil directeur de la « réussite pour tous » semble guider cette réforme curriculaire à différentes phases, jamais cette réussite pour tous ne donnera lieu à un consensus explicite sur ce qu'elle signifie. De la même façon, même si la notion de compétence sera au fil du temps reprise comme un élément venant structurer les programmes, les consensus qui se feront à son propos peuvent être davantage vus comme des consensus temporaires, ouverts à la ré-appropriation, comme nous le montre bien tout le processus de construction des programmes de mathématiques, mais aussi leur mise en œuvre. Comment expliquer qu'en l'absence de tels consensus, un travail de construction puisse dès lors se poursuivre autour de ce curriculum, comme semble le montrer l'analyse précédente ? Qu'est-ce ce qui permet à la discussion de se poursuivre et à cet objet en développement qu'est le curriculum de jouer son rôle ?

Le concept « d'objet frontière » renvoie justement à ces objets qui agissent, comme c'est le cas ici pour ce curriculum en construction, comme point de rencontre, comme interface entre différentes communautés, ou «univers sociaux» (Star & Griesemer 1989). En traversant les frontières de ces communautés, l'objet permet à celles-ci de s'articuler entre elles, de se coordonner. Idéalement, l'objet frontière a donc cette particularité, en leur appartenant, de refléter chacun des groupes à travers lesquels il est transigé, en même temps qu'il est un point d'intersection de ces différentes pratiques (Bowker et Star 1999). Il est, par nature, compréhensible par chacun des intervenants sans pour autant devoir être entièrement compris et accepté par tous. Il est en ce sens utile pour observer les processus de médiation et de négociation des intentions, des visées, ou des visions qui se rencontrent alors que différentes communautés utilisent le « même » objet (Corcoran 1992, Fujimura 1988). C'est ce rôle que semble bien avoir joué, dans le cas du processus de design curriculaire analysé ici, ce curriculum en développement.

Les rédacteurs peuvent ici être vus, dans cette perspective, comme des "agents frontières" (« brookers »), en charge en quelque sorte de faire circuler le programme en développement pour permettre de poursuivre le travail sur celui-ci, mais aussi en charge de le rendre (par l'écriture) communicable ou prêt à circuler. En aucun cas, nous ne sommes, dans tout ce processus, à la recherche d'un consensus entre différentes communautés. Ce qui ressort de l'analyse nous montre davantage ce curriculum comme un objet « circulable », avec lequel les différentes communautés sont en mesure de travailler, d'avancer, mobilisant une flexibilité interprétative permettant aux différents acteurs de poursuivre la discussion.

Sous cette caractéristique à la fois d'un « programme en développement » comme « objet frontière » et de rédacteurs comme « agents frontières » s'expriment ainsi implicitement les valeurs et le contrat social qui sous-tend ce processus en action : celui de permettre qu'une interaction se poursuive au sujet de ce programme et de son contenu entre différents acteurs, appelés à se le réapproprier, à le faire vivre, un curriculum qui « n'appartient » à personne tout en voulant appartenir à tout le monde…

Quelles caractéristiques revêt ce programme d'études, dans sa forme écrite, de manière à permettre à cette « circulation » de se poursuivre, aux différents acteurs, appelés à travailler avec celui-ci, de continuer à avancer ? Nous tenterons de répondre à ceci dans la prochaine section, en nous attardant à la vision des mathématiques qui se dégage de l'analyse de celui-ci.

III. QUELQUES DISTINCTIONS PARLANTES SUR LA PLACE ET LA VISION DES MATHEMATIQUES DANS LE PROGRAMME D'ETUDES

1. *Clarifications/mises en garde*

Il nous semble important de rappeler ici ce sur quoi a porté l'analyse dans ce cas. D'un côté, les programmes d'études sont élaborés, nous l'avons vu précédemment, suite à un certain nombre de consultations et rapports préliminaires qui suggèrent des orientations, une certaine vision de cette réforme (voir notamment dans le cas du programme actuel, le rapport de la Commission des États Généraux de l'Éducation, 1996 ; le rapport du groupe de travail sur la réforme du curriculum, 1997) et un long processus impliquant de multiples acteurs, provenant de milieux et d'horizons divers. De l'autre côté, les programmes d'études sont implantés en classe par les enseignants et ce à travers divers contextes d'implantation, faisant suite là aussi, nous l'avons vu, à un long processus de mise en œuvre. Dans le cas qui nous intéresse ici, lorsque nous parlons de la place et de la vision des mathématiques dans le programme d'études, nous référons à ce qui est écrit dans le texte du programme d'études, et donc très peu à ce qui est dit dans les documents préliminaires, et pas du tout à ce qui se fait réellement en classe.

Par ailleurs, le programme d'étude étant un sujet sensible, voire émotif, il nous semble important de préciser que ce sur quoi nous avançons, dans cette dernière section, constitue une tentative d'interprétation d'éléments qui semblent se dégager du texte du programme en ce qui concerne la place et la vision des mathématiques. Il y aurait bien sûr d'autres angles d'analyse possibles, et peut-être de meilleures. Nous croyons cependant que les distinctions avancées sont utiles pour repérer des indicateurs de changement de contrat social dans les évolutions curriculaires récentes en enseignement des mathématiques. Ces distinctions ne sont en effet pas exprimées de façon explicite dans les documents officiels et c'est donc avec un œil externe que nous les faisons ressortir, pour les besoins de l'exercice d'analyse.

2. Introduction et orientation pour l'analyse

Le programme d'étude actuel (2001 pour le programme du primaire ; 2003-2004 pour le programme du 1er cycle du secondaire ; 2005 pour le programme du 2nd cycle du secondaire) reçoit une importante dose de critiques dans les médias, chez les universitaires, dans la population. Celles-ci vont de la critique d'un délaissement des contenus et des connaissances au profit des compétences et savoir-faire, à la critique d'une extrême contextualisation du travail mathématique, trouvant sa motivation dans une volonté d'ancrage dans la vie réelle. Ces critiques, lorsqu'on scrute ce programme d'étude avec précision, ne tiennent pas vraiment la route, du moins sur papier. On peut cependant affirmer que des modifications sont perceptibles quant à la place et à la vision des mathématiques dans ce programme d'étude, comme nous le verrons dans ce qui suit. Celles-ci relèvent toutefois davantage, selon nous, d'une évolution que d'une rupture ou transformation profonde.

Avant d'entrer dans une description de certains aspects de ce programme d'études en mathématiques et de son évolution, des années 1970 à aujourd'hui, il nous semble intéressant de retourner au rapport Parent, à la base de la vaste réforme du système éducatif qui se produira dans les années 60. Les deux citations suivantes, tirées du Rapport Parent (1964) sont instructives, dans la mesure où elles ont eu une influence marquée sur tous les programmes d'études qui ont suivi.

> La pédagogie moderne a opéré un *retour à un enseignement centré sur l'enfant*. C'est un lieu commun de dire que l'école est faite pour l'enfant ; pourtant on pense trop souvent l'enseignement en fonction des programmes, des maîtres ou de l'école elle-même. Cette préoccupation d'un enseignement centré sur l'enfant a présidé à l'élaboration d'une pédagogie active ; celle-ci se propose toujours de partir de l'enfant, de ses intérêts, de son jeu, de son imagination pour développer chez lui la curiosité intellectuelle et l'initiative personnelle. On chercher à éliminer le pédantisme du maître, le carcan des programmes, la passivité de l'enfant. *Ce courant de pensée s'inspire des valeurs que nous voulons voir honorer à l'école : respect de l'intelligence, des dons créateurs, de l'esprit de recherch*e. *Systématisé au niveau de la maternelle et de l'école élémentaire, ce courant pédagogique porte en lui un esprit et une intention que l'on devrait aussi retrouver dans l'enseignement secondaire et universitaire* (Rapport Parent 1964, Tome II, p. 45)

> Il faudra sans doute […], dans les études *réduire la part de l'érudition et celle des exercices d'application pour se concentrer sur les principes fondamentaux,* et développer par ailleurs l'observation, la curiosité, le sens de la recherche personnelle, les méthodes de travail et l'habitude d'utiliser les divers modes de connaissance : mathématiques, psychologie, perception des structures d'ensemble et sens de la causalité, conscience des liaisons entre les disciplines, entre l'enseignement et la vie concrète. *La formation doit prendre le pas sur l'information*, il faut apprendre à apprendre parce qu'on devra s'instruire sans fin tout le long de la vie (…) Les structures scolaires *et les programmes d'études devront refléter cet humanisme nouveau* et se faire eux aussi suffisamment *multiformes* (Rapport Parent 1964, Tome II, p.45)

Ces idées vont être reprises d'un programme à l'autre, prenant des formes différentes au fil du temps : une centration importante sur l'enfant[25], son apprentissage, son contexte

---

[25] Cette idée d'adaptation de l'intervention à l'enfant, et de reconnaissance du rôle actif de l'enfant dans l'apprentissage, est présente déjà avant 1970. On le retrouve en effet dans la période 1948-1959, formulée en termes d'adaptation de l'enseignement à l'enfant, d'un enseignement qui cherche à rejoindre l'enfant, et non pas

d'apprentissage, etc., un accent mis sur le développement de ses compréhensions mathématiques[26], sur un rôle graduellement grandissant accordé à la résolution de problèmes (Lajoie et Bednarz, sous presse). Une visée qui mènerait à penser, mais ce serait un abus car on ne trouve nulle part cela dans les documents, aux « mathématiques de l'enfant » (Steffe, 1983).

Les analyses qui ont été réalisées des différents programmes au Québec nous montrent très clairement que ces derniers ne se sont jamais vraiment situés en rupture l'un par rapport à l'autre (voir à ce sujet Lajoie et Bednarz, sous presse ; Dionne et al, 2009 ; Bednarz, 2002). Même si des analyses externes ont parfois fait ressortir des différences marquées entre les uns et les autres, l'étude des textes fait davantage ressortir une idée de suivi et de continuité que celle d'un changement brusque des pratiques précédentes. On peut notamment voir cette continuité à travers la fonction associée à cet enseignement des mathématiques au fil du temps, sur laquelle nous reviendrons plus loin (Bednarz, 2002) ou encore à travers l'analyse, menée sur plus d'un siècle, de la résolution de problèmes en mathématiques dans les programmes et documents pédagogiques associés (Lajoie et Bednarz, sous presse). Ces différentes analyses semblent ainsi indiquer, plus souvent qu'autrement, une évolution d'un programme dans une société qui elle aussi évolue, renvoyant à une nécessité sociétale. Nous reviendrons plus précisément sur certains aspects de cette évolution.

3. *Visées et finalités pour les mathématiques et leur apprentissage : dialectique entre fonction « formatrice» et fonction « pratique » des mathématiques*

Au Québec, et ce depuis très longtemps (Bednarz, 2002), les programmes d'études ont toujours jonglé avec deux finalités importantes, la plupart du temps mises en relation dialectique : une nature « formatrice » des mathématiques et une nature « utilitariste » des mathématiques (en lien avec son utilisation dans la réalité). Ces deux fonctions vont occuper une place plus ou moins grande dans chacun des programmes[27]. On retrouve, ainsi, dès le début du XXième siècle une prépondérance de la finalité pratique de cet enseignement, même si son apport possible au développement du jugement y est reconnu, comme nous le montrent bien les citations suivantes :

> Il n'en reste pas moins vrai que cette science est surtout d'une très grande utilité pratique. […] L'aspect utilitaire, pratique, voilà surtout ce dont nous devons nous préoccuper en enseignant l'arithmétique. (L'Abbé Maurice 1925-1926, pp.6-8)

> Peu de personnes dans notre province ont besoin d'une connaissance, même élémentaire, de l'algèbre pour remplir les devoirs de leurs charges; et cependant il n'est permis à personne de commencer l'étude d'une profession avant d'avoir subi avec succès l'examen sur cette matière. Pourquoi exige-t-on ainsi de ceux qui se destinent aux professions la connaissance d'un sujet qui ne paraît avoir aucune utilité pratique ? Parce qu'on suppose que pour réussir dans une profession il faut avoir une intelligence cultivée et qu'il est nécessairement admis que l'étude de l'algèbre est un des puissants moyens de fortifier le jugement. [...] L'algèbre élémentaire, si elle est enseignée de manière rationnelle, affermit le jugement. (Mgr Ross 1919, p.210)

Cette prépondérance pratique va disparaître graduellement de la visée de l'enseignement des mathématiques, au profit de la reconnaissance de la complémentarité de ces deux fonctions, tel que le montre cet énoncé du Programme d'étude secondaire de 1956 :

> L'enseignement des mathématiques doit avoir un double objectif:

---

dans le sens de la centration sur son apprentissage. Les années 1970 marquent donc une évolution importante (voir Lajoie et Bednarz, sous presse).

[26] On parlera de « former des intelligences » en 1948-1959 (Lajoie & Bednarz sous presse)

[27] Cette double finalité est en effet déjà présente dans le programme de 1904 (Bednarz 2002 ; Lajoie & Bednarz sous presse).

> un objectif de formation: rendre l'élève apte à traiter objectivement et avec méthode toute question qu'il aura à résoudre…;
>
> un objectif utilitaire: lui faire acquérir un instrument indispensable à la connaissance du réel sensible mesurable. Pour une part, les sciences sont redevables aux mathématiques de leur progrès et de leur évolution.

Cette complémentarité se verra confirmée dans les programmes qui se succéderont par la suite. Une analyse plus précise de ces programmes à travers les années montre toutefois que la visée pratique dont on parle n'est pas toujours de même nature, donnant lieu à différentes interprétations de la « réalité » (voir à ce sujet Lajoie et Bednarz, sous presse): des problèmes exacts et vrais dans leurs données énoncés en 1919, à la variété des contextes (réels, réalistes, fantaisistes…) à laquelle réfère le guide pédagogique sur la résolution de problèmes associée au programme de 1980 (Fascicule K, 1988) jusqu'à l'insertion des domaines généraux de formation[28] du programme actuel (MEQ 2001, MELS 2003, 2005) (santé et bien être, orientation et entrepreneuriat, environnement et consommation, vivre ensemble et citoyenneté, médias), l'élargissement est considérable. De la même façon, au plan de la visée formatrice de cet enseignement, on passe de « raisonner le problème », présent dès 1919, au développement de la pensée mathématique du programme de 1970, s'inscrivant dans la réforme des mathématiques modernes (cherchant à faire percevoir le caractère structurant de la mathématique), puis au développement du raisonnement dans un domaine donné, par exemple le raisonnement proportionnel (MEQ 1994) et à la compétence déployer un raisonnement mathématique comme pierre angulaire de toute activité mathématique (MELS 2005, p.1). Là aussi l'élargissement est considérable.

Nous avions déjà souligné ceci en partie, il y a quelques années, dans une mise en perspective historique des programmes d'études du Québec (de1900 à 1994). Nous y faisions déjà apparaître des éléments du contrat social qui semblent lier, à travers ces finalités, l'école à la société :

- *une école au service d'une société catholique*, *qui vise à former* « comme le montre Mgr Ross (1919) *un bon citoyen, un bon chrétien*, capable d'apprécier la valeur de l'argent et d'en faire bon usage » (Bednarz 2002, p.148), où la finalité pratique jouera en conséquence un rôle important ;

- *Une école qu'on veut « accessible à tous »* dans les années 70-80, qui va venir façonner cet enseignement

> Un enseignement des mathématiques qui viserait à faire comprendre le mieux possible et au plus grand nombre possible de citoyens ce que sont et ce que ne sont pas les mathématiques devrait aboutir aux trois éléments majeurs de formation suivants : une façon de penser qui fournit un instrument extrêmement puissant pour analyser ses expériences, un complément de culture qui peut améliorer l'intérêt et le plaisir de vivre, et enfin un langage important, essentiel à la communication des idées et à l'expression des buts de la société (MEQ, 1980, p. 6)

- *Une école au service d'une société, préparant ses évolutions*, qui va orienter vers le développement des habiletés essentielles à cette adaptation

> L'évolution rapide de la société constitue un défi gigantesque pour notre système d'éducation quant à la préparation des jeunes à la société de demain. Il est aujourd'hui difficile de prévoir les connaissances exhaustives dont l'élève aura besoin demain (…) nous devons nous assurer qu'il

[28] Au quotidien, sous différentes formes, nous dit le programme, la mathématique peut être mise à profit, entre autres à travers les domaines généraux de formation : « les intentions éducatives et les axes de développement des domaines généraux de formation sont des toiles de fond qui permettent d'élaborer des situations d'apprentissage où pourront se développer les compétences disciplinaires et les compétences transversales » (MELS 2005, p. 6)

acquière une solide formation de base, des habiletés et des attitudes essentielles à son adaptation afin qu'il puisse réinvestir ses connaissances pour acquérir celles dont il aura besoin au cours de sa vie (MEQ 1994, p.15)

- *Une école qui cherche à promouvoir « une réussite pour tous », une égalité des chances*, conduisant à mettre de l'avant de façon forte l'idée de pertinence au cœur des mathématiques enseignées (voir 3.5 plus loin)

Un autre aspect qui transcende les visées de l'enseignement des mathématiques dans les programmes d'études au Québec est l'idée de permettre à l'élève de vivre une expérience mathématique enrichissante, axée sur la compréhension et le sens. Cette visée est décrite dans les termes suivants au travers des différents programmes, même si elle prend des formes différentes au fil du temps: axer sur le raisonnement mathématique et non sur la mémorisation des concepts ; utiliser du matériel, des illustrations, des représentations pour donner du sens aux concepts enseignés ; faire appel à divers contextes de la vie de tous les jours pour permettre aux élèves de donner un sens et une pertinence aux mathématiques qu'ils étudient ; maintenir l'équilibre entre un enseignement trop axé sur le « sens » qui manque de rigueur et un enseignement basé sur la rigueur où le sens serait élagué ; amener l'élève à développer ses habiletés à mathématiser, à symboliser, à prouver, à conjecturer, etc. De plus, présent dans tous les programmes de façon explicite, et ce dès les programmes de 1970 mais surtout 1980 au primaire, et valorisé par la suite par l'entremise d'un document pédagogique particulier produit par le ministère de l'éducation (Fascicule K, MEQ, 1988), on retrouve l'idée que ceci se fait par la résolution de problèmes[29]. En filigrane, deux objectifs sont en arrière plan: on résout des problèmes en mathématiques pour faire des mathématiques et appliquer des connaissances, mais aussi pour apprendre de nouvelles mathématiques (la résolution de problèmes comme source de construction de connaissances nouvelles apparaît dans les années 1970, et se confirme en 1980). Ces objectifs sont constamment présents dans les programmes d'études, dans le but d'amener les élèves à donner du sens aux mathématiques qu'ils apprennent. Ainsi, les mathématiques, dans ces énoncés présents dans les différents programmes, sont des mathématiques vivantes, elles se raisonnent, se contextualisent, s'illustrent, se font par résolution de problèmes,... : les mathématiques se font ! Une certaine vision forte sous-jacente des mathématiques peut en être dégagée qui nous laisse a priori percevoir une continuité, si ce n'est dans l'insistance mise sur l'activité mathématique par rapport aux contenus, ce dont nous parlons en 3.6.

4. Quelle place des mathématiques ?

Alors que dans les années 1970 le cadre de travail défini par le programme d'études (nommé « programme cadre ») ne définissait que les grandes lignes d'un enseignement des mathématiques laissant place à divers aménagements possibles par les équipes régionales[30], celui des programmes des années 80 et 90, avec diverses rééditions, marquent un retour à un programme précis, structuré, détaillé, faisant contrepoids au programme de 1970, avec une place des contenus mathématiques clairement tracée.

[29] La résolution de problèmes est présente dans tous les programmes de mathématiques, et ce dès le début du 20ème siècle, toutefois son rôle, comme nous le montre l'analyse réalisée par les deux didacticiennes, prend un essor de plus en plus considérable dans les années 1980 (Lajoie et Bednarz sous presse).

[30] Ce programme cadre est en rupture avec la conception traditionnelle, peu flexible, d'un programme uniforme pour tous. L'idée sous-jacente, comme l'a montré Paquette (1976), était d'opérer une décentralisation qui puisse permettre une meilleure adaptation à des situations régionales diversifiées et de favoriser ainsi une évolution pédagogique.

Au plan de l'ensemble des disciplines scolaires, les mathématiques y ont une place de choix. Cette place centrale dans la « grille horaire » des élèves est ainsi expliquée :

> L'importance du temps accordé à l'enseignement des mathématiques au primaire est un bon indice de la valeur que la société accorde à cette discipline (MEQ 1980, p. 6).

À l'intérieur de la discipline mathématique elle-même, l'attention à accorder à chacun des contenus est prescrite de façon quasi chirurgicale, avec des tableaux de pourcentage indiquant le travail à y faire. Par exemple, au primaire, on trouve ce tableau, où un pourcentage de l'année doit au minimum être accordé à tel contenu, mais aussi un maximum, tout ceci devant comptabiliser, bien évidemment, 100% du temps incluant tous les imprévus/impondérables reliés à la classe de mathématiques (examens, sorties, révisions, etc.).

Le tableau suivant révèle l'importance relative accordée à l'exploration des thèmes retenus dans le programme de mathématique du niveau primaire.

THÈMES	TEMPS RELATIF	
	minimum	maximum
Les nombres naturels	40%	50%
Les fractions et les décimaux	15%	25%
Les nombres entiers relatifs	2%	3%
Les activités géométriques	20%	25%
Les mesures	5%	10%

Tableau 1 *– Répartition du contenu dans le programme du primaire (MEQ 1980)*

On trouve donc des prescriptions fort précises sur ce qui doit être fait et sur sa pondération. Le minimum que l'on retrouve 2% et maximum 3% pour l'enseignement des nombres relatifs, ou ailleurs dans le programme, pour l'enseignement des statistiques, par exemple, a de quoi faire sourire ! Au secondaire, même si l'idée de maximum/minimum est moins présente, on rencontre, de façon encore plus précise, l'indication de « l'importance relative » à accorder à chacun des contenus (voir tableaux 2, 3, 4, 5 ci-dessous).

Au-delà d'une interprétation qui pourrait être vue comme un excès de zèle de la part des concepteurs du programme, il y a des raisons importantes qui expliquent ces directives détaillées dans les programmes d'étude de 1980 au primaire et 1994 au secondaire. Le programme cadre de 1970, comme son nom l'indique, ne définissait pas précisément au plan des contenus ce qui devait être fait, l'idée sous-jacente étant de laisser place à des innovations. Ce manque de précisions a fait en sorte qu'une importante diversité de pratiques a été mise en place dans différents milieux scolaires, avec parfois des différences très importantes pouvant poser problème entre autres lorsqu'un enfant passait d'une commission scolaire à l'autre. Le programme de 1980 au primaire est une réponse à ces dérives. Il vise, tout en apportant une attention particulière aux besoins des divers milieux, à « uniformiser les programmes dans toutes les commissions scolaires du Québec » (MEQ 1980, p. 3), par la mise en place d'objectifs terminaux constituant un seuil minimal pour tous les élèves.

Le tableau suivant révèle l'importance relative accordée aux objectifs généraux dans le programme de mathématique du premier cycle.

OBJECTIFS GÉNÉRAUX	TEMPS	
	Sec. I	Sec. II
1- FAVORISER chez l'élève l'utilisation des connaissances relatives aux nombres naturels ou aux nombres entiers.	14%	8%
2- FAVORISER chez l'élève l'utilisation des connaissances relatives aux nombres rationnels.	27%	12%
3- FAVORISER chez l'élève un apprentissage de base en algèbre.	0%	15%
4- FAVORISER chez l'élève la participation à des activités de mesurage ou de repérage.	8%	8%
5- HABITUER l'élève à l'application des notions, des relations ou des propriétés géométriques.	20%	17%
6- INITIER l'élève au langage et à l'application de la statistique élémentaire.	6%	8%
7- INITIER l'élève à l'approche mathématique reliée à certains phénomènes où intervient le hasard.	0%	7%
TOTAL	75%	75%
Nombre de semaines	36	36

Tableau 2 *– Répartition du contenu/ secondaire 1 et 2 (MEQ, 1994)*

Le même découpage précis se retrouve aux autres niveaux du secondaire pour préciser la place de chacun des objectifs généraux de formation.

Importance relative de chaque objectif général

Objectifs généraux	Pourcentage
1. Favoriser chez l'élève l'acquisition de préalables à l'apprentissage de l'algèbre.	*
2. Accroître chez l'élève le sens du nombre et des opérations.	52%
3. Amener l'élève à utiliser ses connaissances relatives aux figures géométriques.	36%
4. Amener l'élève à exploiter des représentations de données statistiques.	12%

Importance relative de chaque objectif général

Objectifs généraux	%
1. Favoriser chez l'élève l'accroissement de l'habileté à utiliser l'algèbre pour résoudre des problèmes.	25
2. Favoriser chez l'élève le développement du raisonnement proportionnel.	25
3. Amener l'élève à utiliser ses connaissances relatives aux figures géométriques.	35
4. Initier l'élève à l'étude mathématique de phénomènes où intervient le hasard.	15

Secondaire 1 (mat 116) à gauche et Secondaire 2 (MAT216) à droite

Importance relative de chaque objectif général

Le tableau qui suit est présenté afin de faire ressortir l'importance relative de chaque objectif général.

Objectifs généraux	%
1. Favoriser chez l'élève l'utilisation de l'algèbre comme outil de généralisation.	45
2. Amener l'élève à utiliser ses connaissances relatives aux figures géométriques.	40
3. Accroître chez l'élève l'habileté à analyser des données statistiques.	15

Tableau 3 *– répartition en secondaire 3 (mat 314)*

Importance relative de chaque objectif général

Dans le tableau qui suit, on fait ressortir l'importance relative de chaque objectif général.

Objectifs généraux	%
1. Favoriser chez l'élève l'application de connaissances algébriques.	38
2. Amener l'élève à analyser des situations géométriques.	38
3. Accroître chez l'élève l'habileté à analyser des données statistiques.	24

Importance relative de chaque objectif général

Dans le tableau qui suit, on fait ressortir l'importance relative de chaque objectif général.

Objectif général	%
1. Accroître chez l'élève l'habileté à utiliser l'algèbre.	55
2. Accroître chez l'élève l'habileté à analyser des situations géométriques.	35
3. Accroître l'esprit critique de l'élève devant une étude statistique.	10

Tableau 4 *– répartition en secondaire 4 (mat 416) à gauche et secondaire 4 (mat 436) à droite*

Importance relative de chaque objectif général

Dans le tableau qui suit, on fait ressortir l'importance relative de chaque objectif général.

Objectifs généraux	%
1. Favoriser chez l'élève l'utilisation d'outils d'optimisation.	50
2. Accroître chez l'élève l'habileté à analyser des données statistiques ou probabilistes.	30
3. Amener l'élève à analyser des situations géométriques.	20

Importance relative de chaque objectif général

Dans le tableau qui suit, on fait ressortir l'importance relative de chaque objectif général.

Objectif général	%
1. Accroître chez l'élève l'habileté à utiliser l'algèbre.	67
2. Accroître chez l'élève l'habileté à analyser des situations géométriques.	23
3. Accroître chez l'élève l'habileté à analyser des données statistiques.	10

Tableau 5 *– Répartition en secondaire 5 (mat 516) à gauche et secondaire 5 (mat 536) à droite*

La révision de ces pourcentages dans le guide pédagogique qui a suivi (relié au programme) nous permet d'aller plus loin sur la nature de ces mathématiques. Dans ce guide pédagogique, les ratios pour algèbre sont 30%-30%-35% pour secondaire III, IV et V respectivement, la même chose en géométrie et 15%-15%-20% en statistiques et probabilités. En scrutant plus en détails l'aspect arithmétique/algèbre, on se rend compte que l'algèbre occupe 16 des 22 objectifs intermédiaires associés à ce domaine. De plus, en scrutant plus en détails ce programme, on se rend compte que l'algèbre prend une place énorme même dans les autres domaines (géométrie et statistiques) avec des incursions en trigonométrie, avec la relation de Pythagore, avec des calculs de moyennes, etc. Ces pondérations pour l'algèbre atteindront des sommets inégalés en secondaire V alors qu'ils occuperont 67%, du temps, sans compter la place de l'algèbre dans le travail fait sur les vecteurs, les statistiques, etc. D'une certaine façon, du moins au secondaire, la vision des mathématiques est une vision algébrique, si on calcule toute la place qui lui est faite, cette dernière occupant au minimum 55% à 65% du contenu du programme d'étude. Dans le cas du primaire, toutes les activités reliées aux nombres cumulent entre 65% et 75% du contenu du programme. Ainsi, le vieil adage à l'effet que « le primaire travaille le nombre et que le secondaire travaille l'algèbre » semble assez bien fondé ici.

Cette question de la place des contenus, sans être élaguée, est beaucoup moins proéminente dans le programme d'étude actuel (MEQ 2001, MELS 2003, 2005), alors que ces pondérations ne sont pas explicitement mises de l'avant, ou même, demeurent floues. Ainsi dans le programme de 2005 au second cycle du secondaire, trois champs sont repris (p.50) : arithmétique et algèbre (sens du nombre réel, des expressions algébriques et des liens de dépendance), géométrie (sens spatial et figures géométriques), probabilités et statistiques (sens des expériences aléatoires et des relevés statistiques), renvoyant à un ensemble de concepts et processus avec leur progression au cours des trois années du 2nd cycle (pp.51–53), mais en aucun cas des directives ne sont données sur la place des uns et des autres. On ne spécifie donc nullement l'importance à accorder à l'un ou l'autre des contenus, si ce n'est que la liste des contenus à couvrir, plus importante dans certains cas, semble favoriser certains champs tels l'algèbre au secondaire et l'arithmétique au primaire, une tradition qui semble donc se perpétuer.

Notons ici que dans le cas du primaire, la liste des contenus à couvrir, dans une section intitulée « savoirs essentiels », renvoie à des objets mathématiques à travailler en arithmétique, géométrie, statistique et probabilité, et ce pour chacune des années du primaire. Il faut donc noter la place nouvelle qu'occupent maintenant les notions de statistiques et de probabilités, qui étaient peu présentes au primaire auparavant. Les probabilités et les statistiques traversent ainsi tout l'apprentissage des mathématiques de la 1ère année primaire à la dernière année du secondaire. Il est ainsi possible de dire, sans trop insister, que les mathématiques du primaire sont maintenant plus diversifiées, changeant quelque peu leur visage presqu'uniquement « nombres » ou arithmétique.

5. *De nouvelles orientations et significations pour les mathématiques à travers des profils différenciés de cheminement : les dernières années du secondaire*

Dans le programme actuel, on voit apparaître une façon nouvelle de préparer les élèves à leur vie « postsecondaire » en assignant trois cheminements mathématiques différentiés possibles, qui s'offrent aux élèves comme choix. Alors qu'auparavant le choix des dernières années du secondaire se décrivait par un choix entre ce qui s'appelait dans le langage scolaire des « mathématiques fortes », « moyennes » ou « faibles », l'élève est maintenant appelé à choisir entre des mathématiques de types différents. Les élèves sont en effet, pour leurs deux dernières années du secondaire, amenés à s'investir dans une des trois « séquences » mathématiques suivantes : Culture, technique, société ; Technico-sciences et Sciences naturelles. Pour chacune de ces séquences, le sens donné aux mathématiques n'est pas du tout le même, alors que les contenus eux pourraient être les mêmes ou en partie se recouper : tout réside, ou semble reposer, sur la « façon de faire » les mathématiques dans les cours de chacune des séquences. Voici comment ces séquences sont présentées d'entrée de jeu dans les premières pages des documents officiels.

La séquence Culture, société et technique (CST) s'adresse aux élèves qui

> aiment élaborer des projets ou coopérer à leur réalisation. Elle est susceptible d'éveiller chez l'élève un intérêt pour les causes sociales (…) Elle fait davantage appel à la statistique et aux mathématiques discrètes (…) On vise la consolidation des facettes de la mathématique qui l'aideront à devenir un citoyen autonome participant de façon active et raisonnée à la vie en société (…) (MELS 2005, p. 3)

La séquence Technico sciences (TS)

> s'adresse à l'élève désireux d'explorer des situations qui combinent à l'occasion le travail manuel et le travail intellectuel. L'accent est mis sur la réalisation d'études de cas ainsi que sur l'aptitude à repérer des erreurs et des anomalies dans des processus ou des solutions en vue d'établir un diagnostic et d'apporter des correctifs appropriés. On vise également à dégager les concepts et processus mathématiques associés à la conception, au fonctionnement ou à l'utilisation d'instruments liés à certaines techniques (Ibid., p. 3)

La séquence Sciences Naturelles (SN)

> s'adresse à l'élève qui cherche à comprendre l'origine et le fonctionnement de certains phénomènes, à les expliquer et à prendre des décisions dans ces domaines. On amène l'élève à élaborer des preuves ou des démonstrations formelles dans des situations où le besoin d'affirmer une vérité est omniprésent. Cette séquence fait davantage appel à la capacité d'abstraction (…) L'accent est mis sur la recherche, l'élaboration et l'analyse de modèles issus d'expériences touchant principalement les domaines scientifiques (Ibid., p. 3)

Ainsi, dans la séquence CST, apparaît une demande pour que tout contenu mathématique et manière de l'approcher soit ancré dans une certaine pertinence d'utilisation (sociétale), pour arriver à montrer l'utilité des mathématiques dans la société en général et inciter les élèves à voir comment les mathématiques peuvent intervenir dans ces diverses sphères et à les utiliser de manière judicieuse.

> Comme son nom le suggère, la séquence Culture, société et technique vise à développer chez l'élève une culture mathématique pour qu'il apprécie les liens entre la mathématique et les autres pans de la culture ainsi que sa contribution à l'évolution de la société. Elle lui procure des outils qui l'aident à accroître sa capacité d'analyse, à envisager différentes possibilités, à prendre des décisions éclairées, à étayer ses raisonnements, à prendre position au regard de différents enjeux. Elle lui permet de parfaire sa formation de base et de poursuivre le développement de sa formation citoyenne. Elle le rend apte à s'intégrer dans la société et le prépare à poursuivre soit des études supérieures dans différentes sphères d'activité ou des études dans les domaines de la formation professionnelle et de nombreuses techniques. […]L'élève engagé dans cette séquence dispose de plusieurs occasions de s'ouvrir sur le monde. Elle lui offre une formation qui le sensibilise à de nombreuses attitudes et aptitudes fortement sollicitées dans notre société. Il développe ainsi des compétences qui le prédisposeront à œuvrer efficacement dans un monde en évolution et à agir en citoyen avisé. […] Cette activité a pour objectif d'amener l'élève à apprécier l'omniprésence de la mathématique, à prendre conscience de l'apport des compétences mathématiques dans la réalisation de différentes tâches, à faire preuve de persévérance et d'autonomie. (MELS 2009, pp. 66-67)

Alors qu'en CST on semble davantage axer sur la pertinence des mathématiques pour le citoyen, sur la formation d'un citoyen avisé, en TS on axe davantage sur l'utilisation des mathématiques pour traiter des cas, analyser des situations, prendre des décisions importantes, pour résoudre des problèmes qui requièrent l'intervention des mathématiques en lien avec le monde des techniques. La modélisation de phénomènes divers, à l'aide des outils mathématiques, est au cœur de l'activité mathématique proposée, dans une perspective fortement reliée au marché du travail. L'aspect utilitaire des mathématiques n'est donc pas de même nature qu'en CST, où les mathématiques sont vues comme des outils pour appréhender les phénomènes sociaux, en comprendre les enjeux, prendre des décisions et porter des jugements.

> L'élève poursuit cette exploration à l'intérieur de la séquence Technico-sciences de manière à mieux en percevoir les caractéristiques, à recourir à des habiletés manuelles et intellectuelles associées notamment aux instruments entourant le monde des techniques et à tisser ainsi des liens entre la mathématique et les différentes sphères d'activité du marché du travail. Il importe par ailleurs de créer des situations d'apprentissage qui l'amènent à découvrir les différents rôles joués par la mathématique. Certaines d'entre elles contribuent au développement d'aptitudes sollicitées dans les techniques et favorisent l'exploitation de contextes en relation avec les domaines de la biologie, de la physique, de la chimie, des sciences humaines ou administratives, de l'agroalimentaire, des arts ou des communications graphiques, et ce, sans omettre le recours à des activités purement mathématiques. […] Cela prend tout son sens notamment dans les études de cas qui nécessitent l'intégration et la mise en pratique de savoirs mathématiques. Ces études permettent d'examiner un ensemble de cas possibles ou probables dans une situation donnée ou de faire intervenir un raisonnement par disjonction de cas ou d'observer des cas particuliers afin d'en généraliser des éléments. […] Les actions liées à des processus de modélisation, de régulation, de validation et de prise de décisions occupent une place importante dans cette séquence. L'élève développe son esprit critique en validant un modèle dont il détermine les limites. […] L'élève engagé dans cette séquence est régulièrement invité à réfléchir sur ses démarches, à explorer différents points de vue, à agir dans le respect des contraintes d'une situation ou à agir sur celles-ci afin d'obtenir un résultat particulier. (MELS 2009, pp. 83-84)

Finalement, la séquence SN se centre sur l'étude des mathématiques en elles-mêmes, sans pour autant être déconnectée des contextes, la pertinence des mathématiques dans le monde qui nous entoure y étant très présente. La modélisation et la résolution de problèmes y est donc aussi présente, avec toutefois un accent important mis sur l'étude des mathématiques en elles-mêmes. Le rôle « formateur » des mathématiques est ici bien mis de l'avant, plus que dans les autres séquences. On axe beaucoup en ce sens sur l'établissement de liens avec les autres disciplines scientifiques (alors qu'en TS les liens établis étaient avec le marché du travail et en CST avec les enjeux sociaux). Ces liens avec les autres disciplines scientifiques font ressortir l'importance de la modélisation mathématique et de l'utilisation de la technologie.

> Dans la séquence Sciences naturelles, l'élève poursuit le développement de ses compétences, exploite et approfondit ses connaissances antérieures et s'approprie de nouveaux réseaux de concepts et de processus. Sa capacité d'abstraction l'amène à établir de multiples liens entre les différents champs mathématiques, notamment entre l'algèbre et la géométrie. Il manie davantage, de façon formelle, le symbolisme, les règles et les conventions dans ses productions et il est amené à réaliser des démonstrations. Dans cette séquence, un accent particulier est mis sur le processus de modélisation. […] Ils se trouvent placés devant des contextes purement mathématiques, tout en continuant de traiter des situations concrètes, particulièrement de nature scientifique. Les situations d'apprentissage concernant le domaine de la science sont privilégiées, car elles permettent de développer des méthodes liées à la recherche et à l'investigation scientifique. […] Ces activités permettent à l'élève de développer une attitude positive à l'égard de la mathématique, de mieux comprendre les différents concepts qu'elle sous-tend et de s'engager d'une manière différente dans ses apprentissages. […] Cette séquence lui offre donc une formation intellectuelle qui le prépare à agir avec efficience dans un monde en évolution. (MELS 2009, pp. 100-101)

Ces diverses séquences décrivent donc une pluralité dans la vision donnée aux mathématiques, qui prennent ici diverses couleurs. Les mathématiques ne sont plus singulières, mais peuvent être pensées de façon plurielle.

6. *Contenus mathématiques versus activité mathématique*

On le voit dans ce qui précède, les programmes d'étude des années 80-90 mettent l'accent sur la place que devrait prendre tel et tel contenu (avec des minimums et maximums, cas du programme de 1980). Tous ces contenus (nombres, algèbre, statistiques, géométrie, etc.), et les programmes sont explicites sur ce point, doivent être travaillés de façon « active », à travers la résolution de problèmes, le recours à une activité de validation (recours à des contre-exemples, développement d'argumentations…), le recours à des conjectures..etc, en axant ces activités sur le raisonnement mathématique de l'élève. Les mathématiques sont donc à travailler dans un contexte mathématique vivant où l'élève est mis en activité de résolution de problèmes, de déduction, de raisonnement, etc. et non pas en situation de mémorisation et « d'ingurgitation » de connaissances. Cette visée caractérise les programmes des années 70, des années 80 et des années 90 : il y a des contenus mathématiques à travailler, et ceux-ci doivent être travaillés à travers des activités axées sur le raisonnement.

Cette visée se retrouve également dans le programme actuel, mais on observe dans ce cas un certain changement de plan. Tout d'abord, la place précise de chacun des contenus n'est plus indiquée. De plus, ce sont les compétences mathématiques, verbalisées grosso modo en termes de savoir-faire (résoudre une situation-problème, raisonner mathématiquement, communiquer mathématiquement), qui sont mises au premier plan. Ce sont ces trois compétences qui doivent être travaillées, et elles doivent l'être à travers divers contenus mathématiques qui ne sont pas explicitement délimités sur le plan de l'importance à accorder à l'un ou l'autre, si ce n'est que la liste des contenus à couvrir favorise certains contenus tels l'algèbre au secondaire et le nombre au primaire – une tradition qui semble se perpétuer. On rencontre donc exactement les mêmes idées que dans les programmes précédents, mais de manière toutefois inversée: alors qu'on étudiait les contenus en les travaillant à travers une activité mathématique, maintenant c'est l'idée de l'activité mathématique (résoudre des problèmes, raisonner, communiquer) qui est à réaliser par les contenus. On assiste donc à un déplacement de l'accent mis sur telle ou telle chose : contenus mathématiques par l'activité ; activité mathématique par les contenus. L'activité mathématique elle-même devient centrale, comme on peut le voir très clairement à travers le portrait des trois séquences précédentes, différenciant le parcours de la fin du secondaire. C'est en effet sur la base de cette activité que se fait cette différenciation : celle-ci met l'accent dans un cas (CST) sur la modélisation et le traitement de phénomènes sociaux à travers notamment les statistiques ; sur l'étude de cas, la conception, le fonctionnement et l'utilisation d'instruments (séquence TS) ; sur l'élaboration, la recherche, l'analyse de modèles issus d'expériences touchant les domaines scientifiques (séquence SN).

D'une certaine façon, on met de l'avant dans cette évolution récente l'idée que les mathématiques sont des savoir-faire et renvoient à des processus (modéliser, mathématiser, conceptualiser, expliquer, prouver, etc.), qu'il n'y a pas de mathématiques sans qu'on en fasse. L'activité mathématique est dorénavant au cœur de la vision des mathématiques que met de l'avant ce programme et de la place qu'elles occupent. Auparavant, on définissait les mathématiques par leurs contenus, et ceux-ci devaient se réaliser par l'activité mathématique. Maintenant, on définit les mathématiques par leurs activités, et ces activités se mobilisent dans un travail sur des contenus divers : les nombres, l'algèbre, les statistiques, la géométrie, etc.

En guise de bilan

Ce qui précède permet de mettre de l'avant certaines dimensions importantes de la vision des mathématiques qui sont présentes depuis longtemps dans les divers programmes. Les mathématiques depuis longtemps ont été vues comme devant être raisonnées et les élèves doivent pour cela être mis en activité. Le programme actuel insiste sur ces aspects de façon explicite, en installant d'entrée de jeu les compétences disciplinaires (résoudre une situation-problème, raisonner mathématiquement, communiquer mathématiquement) comme objet central de l'enseignement des mathématiques. Le message que les mathématiques renvoient à des processus, à une activité, est mis de l'avant. Sans transformer ce qui se faisait auparavant, cette orientation n'est pas anodine et inscrit clairement le travail fait à l'école dans une certaine vision spécifique des mathématiques. Ceci dit, à travers l'analyse qui précède, la dialectique entre nature « formatrice » et «pratique» des mathématiques ressort de nouveau fortement du programme actuel, sous l'angle notamment de la compétence à raisonner d'une part et d'un ancrage très fort des mathématiques, d'autre part, en contexte. Les orientations du nouveau programme contribuent, pourrait-on dire, à accentuer cet angle plus «pratique/utilitariste » des mathématiques, alors que les mathématiques sont particulièrement amenées en tant qu'outils d'appréhension du réel. Ceci se voit, entre autres, à travers l'accent mis sur les domaines généraux de formation pour lesquels des demandes explicites d'arrimage sont formulées, à travers la quasi-absence de référence à des contextes « purement mathématiques » dans le texte du programme, ou encore à travers la forte emphase mise, dans l'orientation des trois séquences en fin de secondaire, sur les « contextes », que ces derniers soient reliés au marché du travail, à la société, ou aux autres sciences.

Une telle vision des mathématiques est sans doute à lier à l'importance accordée à la motivation des élèves pour le travail mathématique dans une « école de la réussite pour tous ». Ce principe s'est opérationnalisé entre autres dans le programme par l'idée de faire voir la pertinence des mathématiques en lien avec les problèmes de société, les sciences ou le marché du travail, et les intérêts des élèves.., les mathématiques étant des outils puissants pour y arriver. Ceci est particulièrement clair au niveau des trois séquences de fin de formation, axées sur des contextes particuliers pour travailler les mathématiques, des contextes taillés pour les élèves. La démocratisation de la réussite peut être vue comme passant par cet angle d'entrée, celui de la pertinence des mathématiques : on ne parle pas ici de diminution marquée des contenus dans ces trois séquences de fin de formation, on parle d'un arrimage des contenus avec les intérêts différents des élèves. On retrouve bien ici le rationnel « pour des élèves différents, des programmes motivants » provenant de l'avis émis par la Commission des Programmes d'Études (2002), l'idée étant de former les élèves *par* et *à partir de* leurs intérêts. Se dessine donc ici le sens qu'a pris dans le texte écrit de ce curriculum « la réussite pour tous en mathématiques ».

Enfin dans la logique de réappropriation de ce curriculum mise en évidence dans la partie 1 à travers l'analyse de son processus de construction et mise en œuvre, des indicateurs de changement de contrat social sont à signaler au regard des programmes précédents. L'absence de pourcentages explicites sur le traitement à allouer aux différents contenus mathématiques, jumelé à un angle d'entrée par l'activité mathématique à travers des compétences dont l'arrimage avec ces mêmes contenus n'est pas toujours facile à saisir (et a fait l'objet de nombreuses critiques), est un révélateur de l'insistance mise sur les choix à faire par l'enseignant. En cohérence avec cette logique de réappropriation, l'enseignant est ici vu comme un professionnel, qui doit travailler fort pour élaborer des situations d'apprentissage (voir section 1, la mise en œuvre insistait sur cette construction de situations d'apprentissage par les enseignants), articuler compétences et connaissances, avec un poids relatif aux divers contenus bien équilibré. L'importance de l'enseignant comme professionnel, qui possède des savoirs importants à mobiliser dans l'action, est mise de l'avant. La démocratisation de la réussite chez les élèves passe donc aussi par la démocratisation de l'enseignement et des façons de faire chez les enseignants.

CONCLUSION

La manière dont nous avons approché l'analyse des évolutions curriculaires récentes en enseignement des mathématiques au Québec n'est pas habituelle. Les didacticiens ont en effet souvent tendance à aborder ces questions par ce que Pinar, Reynolds, Slattery et Taubman (1995) nomment le « curriculum comme texte ». Ils prennent appui sur l'étude des programmes, des textes officiels associés (les documents pédagogiques, par exemple) et les manuels, entrant alors sur une analyse des contenus et des tâches proposées, ou bien encore par une reconstruction du curriculum comme texte « vécu » en classe, en prenant, par exemple, le point de vue de différents élèves ou de l'enseignant. Le choix que nous avons fait comme chercheurs a été d'adopter une perspective différente, nous sommes entrés sur la reconstruction du design curriculaire ayant mené à ce « curriculum comme texte », en le situant dans son contexte et en prenant en compte le point de vue des acteurs qui ont participé de près à cette élaboration. Cet angle d'analyse nous a permis de dégager les indicateurs d'un profond changement de contrat social au Québec, particulièrement dans la manière même dont se sont déroulés le processus de construction du curriculum, sa mise en œuvre, son accompagnement et sa régulation. Ces changements révèlent, *a posteriori*, une démarche étonnamment cohérente et un projet collectif dans lequel de nombreux acteurs, issus d'horizons divers, ont été impliqués.

En nous engageant dans cette analyse, nous avons pris résolument une position de chercheur, mettant en veilleuse notre propre opinion sur ce curriculum et son contenu (que celle-ci ait trait, à titre d'exemple, aux compétences ou aux savoirs). Plus encore, nous avons fait l'effort de mettre de côté de possibles partis pris à l'égard de la contribution des didacticiens des mathématiques dans le processus d'élaboration du curriculum, contribution dont plusieurs pensent, d'emblée, qu'elle fut minime, voire inexistante. En prenant cette distance par rapport à de possibles opinions, nous nous sommes trouvés en mesure de mieux essayer de comprendre le développement de ce curriculum, les raisons qui ont pu le guider, ses éléments clés, etc., nous mettant à l'écoute des « acteurs » (« humains et non-humains », Latour 1999), qui ont été des témoins clés de ce processus. Nous nous sommes alors demandés : ne devrait-on pas tout d'abord chercher à comprendre les circonstances (incluant les raisons évoquées) qui ont guidé un tel développement, les ouvertures qu'il provoque, les efforts qu'il appelle de tous, et en particulier des enseignants ?

Ce positionnement a permis de mettre en évidence un processus de design curriculaire tout autre que celui que nous avions envisagé, a priori, faisant ressortir la complexité de celui-ci, les multiples interactions qu'il a suscitées entre acteurs d'horizons divers, ainsi que sa cohérence d'ensemble à travers la vision organique et systémique qui le sous-tend. Ce fut là, pour nous, un premier apprentissage important. Nous pourrions le formuler comme une mise en garde face au lot de critiques et d'opinions qui traversent souvent le débat concernant les questions curriculaires, et qui proviennent non seulement du public, des parents et des enseignants, mais aussi des chercheurs et des didacticiens. Après cet exercice d'analyse, la nécessité de prendre une distance nous semble en effet essentielle pour avancer méthodiquement dans nos questionnements sur le curriculum: il y a urgence, nous semble-t-il, à prendre le contrepied de la tendance à entrer par le biais des opinions dans des questions aussi marquées affectivement.

Au-delà du texte qui en résulte, le « curriculum produit », celui que l'institution (et on peut y inclure la classe) retient, à un moment ou à un autre, comme son « programme officiel », c'est avant tout cette idée d'un « curriculum en continuel développement » qui ressort comme un point fort de cette analyse : un curriculum vu comme un « objet frontière » qui circule, traverse différents groupes d'acteurs et auquel tout le monde touche et que tout le monde est appelé à faire signifier. Bref, on conceptualise ici un « curriculum vivant », fondé sur une démarche qui se tient, à l'opposé de celles qui mènent à l'identification et la compréhension d'un curriculum statique, figé dans le temps ou dans l'espace. Il y a là un élément clé, fondamental, pour qui cherche à aborder les questions curriculaires, et tout particulièrement le type de curriculum sur lequel nous nous sommes penchés, qui reflète explicitement ce caractère non figé, le texte étant construit comme un processus auquel il faut donner sens et non comme un produit à interpréter. Un curriculum ainsi explicitement conçu peut paraître flou : au Québec, plusieurs personnes, provenant de milieux divers, l'ont critiqué sur cette base. Toutefois, notre analyse montre que ce flou est, jusqu'à un certain point, ce qui fait la force et la cohérence d'un tel curriculum : on met de l'avant l'idée de donner du sens (en mathématiques) alors que l'élève est l'acteur central de son apprentissage et que l'enseignant est un professionnel qui fait ses choix et comprend sa pratique de l'intérieur. Laisser place à une réappropriation du programme par les enseignants et autres acteurs du milieu scolaire (tels les conseillers pédagogiques, les directeurs d'établissements, etc.) prend alors tout son sens, et participe en fait d'une logique forte. Cette cohérence est importante et cela ressort de façon explicite dans l'étude du processus que nous avons présenté ici. On le voit notamment dans la mise en œuvre telle qu'elle ressort de l'analyse: présentation aux milieux scolaires dans des formations où des enseignants (mais aussi des conseillers pédagogiques, des directeurs d'établissements, …) sont mis à la tâche, ayant à donner sens aux fondements de ce programme ou à construire des situations d'apprentissage et d'évaluation autour de balises fournies par ceux qui travaillent au sein de ce programme et qui, eux aussi, se le sont appropriés à leur façon. On peut voir là une volonté de maintenir le caractère « vivant » du curriculum souhaité, celui-ci étant toujours appelé à être réapproprié, à évoluer, à se réguler, tout en misant sur une mobilisation réelle des acteurs, enseignants ou personnes impliquées. Nous sommes, nous semble-t-il, au plus près de ce que Martinand (2007) nomme un « curriculum potentiel », qui laisse place aux possibles développements plutôt que de délimiter, à l'avance et de façon très précise, son contenu.

Cette idée d'un curriculum en développement, vivant, ressort donc clairement de notre analyse, et ce qui pourrait apparaître comme une faiblesse dans le flou apparent de son contenu se révèle un élément caractéristique central, qui cherche à le maintenir dans cet esprit.

Une telle conception pose toutefois de sérieux défis à la communauté en enseignement des mathématiques : aux enseignants qui doivent donner sens à ce programme, construire des situations appropriées, participer à sa réalisation et son évolution ; aux intervenants multiples qui ont à penser le développement de ressources, leur partage pour appuyer son développement (non pas comme des ressources à utiliser, à appliquer mais bien comme des ressources qui aident à maintenir ce curriculum vivant en faisant place au rôle central des enseignants dans son actualisation en classe et son évolution) ; aux didacticiens qui peuvent contribuer en offrant leur éclairage sur certaines questions en lien avec ce développement curriculaire (que l'on pense par exemple ici aux enjeux que pose le développement de la modélisation en classe de mathématiques ou encore une approche expérimentale des mathématiques) ; aux formateurs d'enseignants qui doivent saisir l'importance fondamentale de l'appropriation du curriculum par l'acteur que sera et qu'est déjà le futur enseignant en tant que professionnel de l'enseignement. Des questions vives se posent, autant des questions d'enseignement que de recherche ou de formation des enseignants, mais des questionnements sains et productifs, à condition qu'ils contribuent à leur façon à maintenir ce curriculum vivant, c'est-à-dire en développement.

En dernier lieu, nous voudrions souligner un parallèle important que nous entrevoyons, à la lumière de cette analyse, entre les deux réformes majeures du système québécois. Le projet collectif que porte ce design curriculaire, tel que nous venons de l'exprimer, rejoint en effet par certains côtés la réforme majeure conduite au Québec à la suite du rapport Parent sur la Réforme de l'Éducation, en 1964. Dans les deux cas, on assiste à des tentatives d'ouverture dans la manière dont est pensé le curriculum. La première tentative d'ouverture prend la forme, dans les années 60-70, d'un programme cadre laissant place aux initiatives d'équipes locales et aux innovations pédagogiques. Aujourd'hui elle prend la forme d'un « curriculum en développement », qui doit laisser place à une réappropriation réelle et profonde par les acteurs. Comme nous le rappelle Paquette (1976), « L'idée du programme cadre (était) un élément parmi d'autres, mais un élément important, qui (pouvait) permettre de briser la conception de l'enseignement que le Conseil supérieur de l'Éducation qualifiait de mécaniste » (p. 6). L'idée de souplesse, de décentralisation pédagogique, d'adaptation à des situations régionales diversifiées, sous-tend le concept de programme cadre, et ce, dans une tentative pour rompre avec une vision « uniforme » des programmes. Les conditions pratiques de réalisation, les pressions politiques, notamment des parents, les exigences d'un tel programme pour les enseignants, un ensemble de facteurs ont conduit, dans un mouvement de balancier que l'on (re-)connaît bien, à revenir à un programme structuré, détaillé et uniforme pour tous, celui des années 1980 et les ajustements subséquents dans les années 1990. La réforme récente, celle de 2000, nous apparaît donc comme une nouvelle tentative pour ouvrir ce processus de design curriculaire, le repenser autrement. Toutefois, tel que nous l'avons souligné, le maintien de cette perspective et l'impact de sa cohérence soulèvent des défis importants, et on peut être en droit pour terminer de nous demander si nous sommes prêts, comme communauté éducative intéressée à l'enseignement des mathématiques, à assumer pleinement les conséquences de ce choix et les implications de sa cohérence en nous donnant réellement les moyens de le faire vivre, de l'adapter et de le faire évoluer.

À bien des égards, un curriculum vivant tel qu'évoqué à travers notre analyse a des racines et des implications profondes de l'ordre du contrat social, se proposant comme "pacte" fondamental d'unir tous les intervenants de la communauté éducative en fonction même de leur rôle par rapport à la société dans son ensemble. En enseignement des mathématiques, sommes-nous prêts à nous engager autour d'un tel curriculum et, donc, dans une telle entreprise collective et sociale ?

RÉFÉRENCES

Aoki T. (1993) Legitimating lived curriculum: re-mapping the curricular landscape. *The Journal of Curriculum and Supervision* 8(3), 255-268

Bednarz N. (2002) Pourquoi et pour qui enseigner les mathématiques? Une mise en perspective historique de l'évolution des programmes au Québec au XX$^{\text{ème}}$ siècle. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* (ZDM) 34 (4), 146-157.

Bowker G. C., Star, S. L. (1999) *Sorting Things Out: Classification and Its Consequences*. Cambridge, MA : MIT Press.

Carpentier A. (2010) *Étude de la mise en œuvre du curriculum québécois du primaire, de 1997 à 2003.* Thèse de doctorat en éducation. Université de Montréal

Comité Conseil sur les programmes d'études (2008) *Avis à la ministre de l'éducation, du loisir et du sport sur le programme de formation de l'école québécoise, Enseignement secondaire second cycle, mathématique, séquence technico-sciences.* Québec : Gouvernement du Québec.

Comité Conseil sur les programmes d'études (2007) *Cadre de référence pour l'examen et l'adaptation continue du programme de formation de l'école québécoise*. Québec : Gouvernement du Québec.

Commission des Programmes D'études (1998-a) *Orientations et encadrements pour l'établissement du Programme de formation*, Québec, 48 p.

Commission des Programmes D'études (1998-b) *Calendrier d'élaboration, d'implantation et de révision des programmes d'études*, Québec, 15 p.

Commission des Programmes D'études (1999) *Réactions et commentaires sur le Programme de formation de l'école québécoise (premier cycle), version consolidée*, Québec, 33 p.

Commission des Programmes d'Etudes (2002) *Pour des élèves différents, des programmes motivants*, *avis au ministre de l'Éducation sur les programmes différenciés et les programmes à option au cycle de diversification du secondaire,* Québec, 39 p.

Commission des Programmes D'études (2005-a). *Vers un élève citoyen, avis au ministre de l'Éducation sur les domaines généraux de formation dans le Programme de formation de l'école québécoise, éducation préscolaire, enseignement primaire et secondaire,* Québec, 58 p.

Commission des Programmes D'études (2005-b) *Enseignement secondaire, deuxième cycle (phase 1*), Québec.

Corcoran E. (1992) Building Networks. *Scientific American* (Nov), 118-120.

Derrida J. (1967) *De la grammatologie*. Paris : Editions de minuit.

Derrida J. (2003) Abraham, l'autre. In Cohen J., Zagury-Orly R. (Eds.) (pp. 11-42) *Judéités : questions pour Jacques Derrida* . Paris : Galilée.

Derrida J. (1988) *Signéponge*. Paris : Seuil.

Dionne J., Voyer D. (2009) Conférence d'ouverture : 50 ans d'enseignement des mathématiques au Québec. *Bulletin AMQ* Vol. XLIX, n° 3, octobre 2009, Actes du 52[e] congrès.

Fujimura J. H. (1988) The molecular biological bandwagon in cancer research: where social worlds meet. *Social Problems*, 35(3), 261–283.

Gosselin G., Lessard C. (Eds.) (2007) *Les deux principales réformes de l'éducation du Québec moderne. Témoignages de ceux et celles qui les ont initiées*. Québec : Presses de l'Université Laval, collection «Formation et profession».

Inschauspé P. (2007) *Pour l'école. Lettres à un enseignant sur la réforme des programmes*. Montréal : Liber.

Lajoie C., Bednarz N. (sous presse) Évolution de la résolution de problèmes en enseignement des mathématiques au Québec : un parcours sur cent ans des programmes et documents pédagogiques. *Revue canadienne en enseignement des sciences, de la technologie et des mathématiques.*

Latour B. (1999). *Politiques de la nature : Comment faire entrer les sciences en démocratie ?* Paris : Ed. La Découverte.

Martinand J.L., Reuter Y. (2007) Entretien. *Recherche et Formation* 55, 107-117.

Ministère de l'Éducation du Québec (1970) *La mathématique à l'élémentaire (programme-cadre).* Québec : ministère de l'Éducation, DGEES (Document 16-2013), Gouvernement du Québec.

Ministère de l'Éducation du Québec (1980) *Programme d'études. Primaire. Mathématique*. Québec : ministère de l'Éducation, DGDP (Document 16-2300-00) Gouvernement du Québec.

Ministère de l'Éducation du Québec (1988) *Guide pédagogique. Primaire. Mathématique. Résolution de problèmes. Orientation générale.* Fascicule K. Québec : Gouvernement du Québec.

Ministère de l'Éducation (1994) *Programme d'Études. Secondaire. Mathématique 216*. Québec : ministère de l'Éducation, Gouvernement du Québec.

Ministère de l'Éducation du Québec (1996) *Les États Généraux sur l'Éducation 1995-1996, Rénover notre système d'éducation : dix chantiers prioritaires*. Rapport final de la Commission des États Généraux sur l'Éducation. Québec : Gouvernement du Québec.

Ministère de l'Éducation du Québec (1997) *Réaffirmer l'école*. Rapport du groupe de travail sur la réforme du curriculum. Québec : Gouvernement du Québec.

MELS (2001) *Programme de formation de l'école québécoise. Version approuvée, Éducation préscolaire, Enseignement primaire*. Québec : ministère de l'Éducation, Gouvernement du Québec.

MELS (2002) *Écoles ciblées, Recherche sur la mise en œuvre du programme de formation de l'école québécoise au premier cycle du secondaire. Rapport de recherche 2003-2006*. Québec : Gouvernement du Québec.

MELS (2003) *Programme de formation de l'école québécoise. Enseignement secondaire, premier cycle*. Québec : ministère de l'Éducation, Gouvernement du Québec.

MELS (2005) *Programme de formation de l'école québécoise. Enseignement secondaire 2e cycle.* Document de travail aux fins de validation. Québec : ministère de l'Éducation, Gouvernement du Québec.

MELS (2008) *Évolution des sessions de formation des personnes-ressources 1998-2008*. Document de travail.

MELS (2010) *Évolution des rencontres nationales sur le renouveau pédagogique 1999-2010*. Document de travail.

Pinar W., Reynolds W. (Eds.) (1992) *Understanding Curriculum as Phenomenological and Deconstructed Text*. New York : Teachers College Press.

Pinar W. F., Reynolds W. M., Slatterey P., Taubman P. M. (1995) *Understanding Curriculum: An Introduction to the Study of Historical and Contemporary Curriculum Discourses*. New York : Peter Lang.

Star S.L. (2010) *Ceci n'est pas un objet frontière*, Revue d'anthropologie des connaissances 4 (1), 18-35.

Star S. L., Griesemer J. R. (1989) Institutional ecology, "translations" and boundary objects : amateurs and professionals in Berkely's Museum of Vertebrate Zoology, 1907-39. *Social Studies of Sciences* 19(3), 387-420.

Steffe L. (1983) The teaching experiment methodology in a constructivist research program. In Zweng M., Green T., Kilpatrick J., Pollak H., Suydam (Eds.) (pp. 469-471) *Proceedings of the fourth International Congress on Mathematical Education*. Boston : Birkhauser.

DESIGN CURRICULAIRE ET CONTRAT SOCIAL DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES EN SUISSE ROMANDE

Une étude de cas dans le cadre des tables rondes EMF2012 –*Evolutions curriculaires récentes dans l'enseignement des mathématiques de l'espace francophone*

Michel CORAY*

> Aujourd'hui, il passe même pour provocateur de parler d'une école romande. L'expression ne figure dans aucun texte officiel. L'école est cantonale. Seule la coordination est romande, et on ne l'accepte à condition qu'elle ne porte pas le moindre ombrage à la sacro-sainte autonomie des cantons. Sous couvert de génie propre et de fédéralisme, on fait la part belle aux conservatismes, immobilismes et égoïsmes de tout poil. (Perrenoud 1994, p. 30)

Dans cet article je vais présenter dans une première partie le design curriculaire suisse qui prend place dans un contexte d'harmonisation de la structure du système scolaire Suisse, harmonisation qui a pris une forme plus poussée en Suisse romande avec la création d'un plan d'études commun aux cantons romands. Je ferai un détour par le canton de Genève en cela qu'un des éléments de son curriculum peut être vu comme une source possible d'influence pour un point particulier du plan d'étude romand, le PER. Après avoir présenté le processus de conception et d'élaboration de ce dernier, je vais détailler sa structure et ses particularités avant de décrire son implémentation et accompagnement dans le canton de Genève, car, fédéralisme oblige, chaque canton romand peut agir comme il souhaite. Je terminerai cet article par quelques propos sur la régulation du PER pour conclure cette première partie par un rappel de ce que j'ai pu identifier comme indicateurs de changement de contrat social au travers de ces éléments de design curriculaire.

Dans une seconde partie je vais présenter un point particulier du PER, l'axe thématique de la modélisation qui articule les deux parties du domaine mathématiques et sciences de la nature. La présence et la place de cet axe sont des indicateurs d'une évolution du contrat social au sein de notre plan d'études.

I. PREMIÈRE PARTIE – DESIGN CURRICULAIRE

1. D'une perspective cantonale à une vision romande de la formation des élèves de l'école obligatoire

En guise de préambule précisons que la Suisse est une confédération et que chaque canton possède son département de l'instruction publique (DIP) qui gère les cursus scolaires. Il n'y a pas de centralisation étatique comme on pourrait en trouver en France par exemple, bien que la question de savoir qui doit prendre en charge l'instruction publique se pose depuis la création de notre état fédéral en 1848. En 1882 une proposition de loi fédérale créant notamment un secrétaire fédéral aux écoles primaires est refusée par les deux tiers des votants, craignant ainsi une perte d'autonomie des cantons. En 1969 une initiative populaire « Pour la coordination scolaire » incite le Conseil fédéral à proposer des articles

* ForEnSec, Université de Genève – Suisse – michel.coray@unige.ch

© Coray M. (2012) Design curriculaire et contrat social dans l'enseignement des mathématiques en Suisse romande – Une étude cas dans le cadre des tables rondes EMF2012 : évolutions curriculaires récentes dans l'enseignement des mathématiques de l'espace francophone. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (Plénières, pp. 108–126). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

constitutionnels lui donnant notamment des compétences en matière de coordination scolaire ; cette initiative ne verra pas le jour, la majorité des cantons lui ayant fait défaut[1].

Néanmoins, la volonté de coordonner l'école et les plans d'études en particulier afin de favoriser la mobilité des familles, existe en Suisse romande (partie francophone de la Suisse), puisque la Conférence intercantonale de l'instruction publique de la Suisse romande et du Tessin[2] (CIIP) a adopté en 1972 un premier plan d'études commun pour les degrés 3 à 6[3], suivi en 1979 par un plan semblable pour les degrés 7 et 8, puis en 1986 pour les degrés 9 à 11. Les structures scolaires différant d'un canton à l'autre, la Suisse romande n'a adopté qu'un programme cadre, laissant une marge de manœuvre aux cantons en fonctions de la nature et du niveau de leurs filières. Ce programme cadre, proposé par la commission intercantonale romande pour la coordination de l'enseignement (CIRCE), constitue ainsi un squelette sur lequel chacun des cantons va déposer de la chair correspondant à ses attentes propres et particularités ; il regroupe des objectifs généraux et particuliers, regroupés en aptitudes à développer et en savoirs à opérationnaliser.

Ce plan d'études est resté en vigueur, moyennant, comme mentionné plus haut, des adaptations cantonales, pendant près de vingt ans.

Dès 2000 les enquêtes internationales (TIMSS et plus particulièrement PISA) ont fait éclater au grand jour non seulement les écarts avec les autres pays mais aussi l'extraordinaire diversité des écoles en Suisse et ont remis au goût du jour la nécessité d'harmoniser les pratiques des cantons.

Ainsi, au niveau suisse, le processus d'harmonisation scolaire s'est accéléré le 21 mai 2006 lorsque le peuple et les cantons ont largement accepté en votation populaire la révision des articles constitutionnels (Constitution fédérale art. 62, alinéa 4) portant notamment sur l'harmonisation de l'école publique : âge de l'entrée à l'école, durée, objectifs des niveaux d'enseignement et passage de l'un à l'autre. Il s'est poursuivi par la réalisation de l'accord intercantonal sur l'harmonisation de la scolarité obligatoire (accord HarmoS), entré en vigueur le 1er août 2009. Cet accord promeut la qualité de la formation au niveau national, la perméabilité du système et veut favoriser la mobilité des élèves ; il fixe la durée de l'école obligatoire (11 ans), définit les attentes de fin de cycles (4ème, 8ème et 11ème) et vise acquisition et développement de connaissances et de compétences fondamentales et sociales ainsi que le développement de la personnalité autonome des élèves. L'accord définit les domaines d'enseignement au niveau suisse : il va ainsi regrouper mathématiques et sciences de la nature en un seul domaine, ce qui est un indicateur d'évolution du contrat social, ces deux domaines ayant par le passé été traités indépendamment.

Un autre lien avec le contrat social se trouve dans le communiqué du 17.06.2010 de la conférence suisse des directeurs cantonaux de l'instruction publique qui annonce :

> Harmoniser ne veut pas dire uniformiser, et encore moins centraliser. HarmoS respecte les particularités de la Suisse : plurilinguisme, souveraineté cantonale et traditions scolaires locales. Seul l'essentiel sera harmonisé à l'échelle nationale.

La souveraineté cantonale est donc un élément à part entière de l'harmonisation romande.

---

[1] Les modifications de la constitution fédérale sont soumises à la double majorité : il faut non seulement la majorité des votes des citoyens mais aussi que la majorité des cantons y adhère. Dans le cas de cette votation, le peuple l'accepte à 52% mais seul 10,5 sur 22 cantons y adhère.

[2] Le Tessin, partie italophone de la Suisse, est coordonné avec la partie francophone de la Suisse.

[3] Les degrés 1 et 2 (4 à 6 ans) correspondent à l'école enfantine, les degrés 3 à 8 (6 à 12 ans) à l'école primaire, et les degrés 9 à 11 (12–15 ans) au secondaire 1, qui clôt la scolarité obligatoire.

Pour ce qui est de la Romandie, les cantons de Vaud, du Jura, du Valais, de Neuchâtel, de Berne et de Genève ont ratifié (dans l'ordre) ces deux accords (HarmoS et la Convention scolaire romande[4]) entre avril et décembre 2008. Suite à un référendum lancé contre HarmoS par le Forum des parents, le canton de Fribourg s'est prononcé en votation populaire le 7 mars 2010. A 61.09% des voix, il a dit oui à HarmoS.

Au niveau Suisse, dix-huit cantons (dans lesquels vit 80% de la population suisse) ont mené à terme la procédure d'adhésion au concordat HarmoS. Douze cantons (qui représentent 67% de la population) l'ont accepté, six l'ont rejeté. Huit cantons ne se sont pas encore prononcés.

Le délai pour la mise en œuvre du concordat HarmoS – valable également pour les cantons qui adhèreront ultérieurement – est fixé au 31 juillet 2015 (c'est-à-dire au début de l'année scolaire 2015/2016).

La conférence suisse des directeurs cantonaux de l'instruction publique fait remarquer qu'il est important que tous les cantons se prononcent sur HarmoS et que lorsque le délai transitoire fixé pour la mise en œuvre du concordat HarmoS arrivera à échéance, il conviendra de faire le point sur la situation et de vérifier où en sont les cantons en ce qui concerne l'harmonisation de la scolarité obligatoire.

En Romandie, la Convention scolaire romande (CSR), adoptée par tous les parlements romands, réalise HarmoS tout en allant plus loin : « une coordination par région linguistique » est devenu « un plan d'étude par région linguistique », comme on peut le voir dans les articles 7 et 8 adoptés le 21.06.07 par la CIIP :

> Article 7 : plan d'études roman
> La CIIP édicte un plan d'études romand.
> Article 8 : contenu du plan d'études romand
> Le plan d'études romand définit :
> Les objectifs d'enseignement pour chaque degré et pour chaque cycle.
> Les proportions respectives des domaines d'études par cycle et pour le degré secondaire 1 en laissant à chaque canton une marge maximale d'appréciation à hauteur de 15% du temps total d'enseignement.
> Le plan d'études romand est évolutif. Il se base sur les standards de formation fixés à l'article 7 de l'Accord suisse.

La CSR institue donc un espace romand de la formation, dont l'élément central est l'élaboration d'un plan d'études pour l'ensemble des cantons romands. Si les précédents plans d'études romands ne revêtaient pas à l'époque un caractère contraignant, il en va différemment du futur PER (plan d'études romand) qui constituera un cadre de référence central pour l'école obligatoire. Le plan d'études romand précise en effet en détail les objectifs spécifiques à atteindre en fin de cycle pour l'ensemble de la Romandie, laissant au plus une marge de 15% du temps total d'enseignement à chaque canton alors que le plan d'étude cadre définit par la CIRCE ne faisait somme toute que des propositions.

Nous sommes donc en présence d'un changement de contrat social : HarmoS promeut au niveau Suisse une harmonisation des politiques scolaires et la CSR met en place un plan d'études commun à la Romandie ; ces deux accords mettent de côté pratiquement un siècle de régionalisme.

Le plan d'études romand (PER) est entré en vigueur à la rentrée 2011 pour le début des cycles 2 (5ème, 8-9 ans) et 3 (9ème, 12-13 ans). Couvrant l'ensemble de la scolarité

---

[4] La convention scolaire romande, adoptée par la CIIP le 21 juin 2007, a pour but d'instituer et de renforcer l'Espace romand de la formation, en application de l'Accord intercantonal sur l'harmonisation de la scolarité obligatoire.

obligatoire, le PER a une double visée : répondre à la volonté d'harmonisation de l'école publique en déclinant les objectifs d'enseignement dans une perspective globale et cohérente et définir en particulier les attentes fondamentales de fin de cycle en lien avec les standards nationaux de formation. Il va permettre une lisibilité du parcours de l'enseignant au travers des trois cycles pour l'ensemble des domaines disciplinaires et fournir une référence permettant aux professionnels de l'enseignement :

- de situer leur travail dans le cadre du projet global de formation de l'élève ;
- de situer la place et le rôle de leur-s discipline-s dans ce projet global ;
- de visualiser les contenus d'apprentissage ;
- d'organiser leur enseignement ;
- de disposer, pour chaque cycle, d'attentes fondamentales comme aide à la régulation des apprentissages.

Le PER constitue donc un élément déterminant de l'Espace romand de la formation concrétisant les finalités et objectifs de l'école publique, décrivant les tâches d'instruction et d'éducation que l'école publique doit assurer en les déclinant dans le cadre des domaines et disciplines communs à l'ensemble des cantons de Suisse romande.

2. *Etude d'un cas particulier : le plan d'études genevois au secondaire 1 (degrés 9, 10 et 11) entre 2000 et 2013*

Depuis la rentrée 2011 – 2012 coexistent en classe à Genève deux plans d'études : le PER, introduit en 2011 au degré 9 (voir section précédente) et le PE2000, introduit en 2000 pour les trois degrés et actuellement encore en vigueur pour les degrés 10 et 11, le PER devant couvrir l'ensemble du secondaire 1 d'ici la rentrée 2013 – 2014.

Dans ce deuxième paragraphe nous nous pencherons sur le curriculum de mathématiques issu du PE2000 car il a marqué son époque d'une avancée majeure en termes d'apports didactiques, apports qui ont été repris peu ou prou dans le PER comme nous le verrons dans le paragraphe 3.

Au début des années 90, le département de l'instruction publique genevoise (DIP), au travers de la direction générale du secondaire 1, mandate un groupe de réflexion constitué de représentants des disciplines enseignées dans les degrés 9 à 11 et de représentants des établissements (maîtres choisis par leurs pairs et la direction de l'établissement) et appelé à travailler sur la formation équilibrée des élèves, la « FEE », sur la base de la question suivante : que mettre en place afin de répondre au mieux à la loi sur l'instruction publique genevoise (LIP art. 4, 1977) :

> Art. 4 Objectifs de l'école publique
> L'enseignement public a pour but, dans le respect de la personnalité de chacun :
> a) de donner à chaque élève le moyen d'acquérir les meilleures connaissances dans la perspective de ses activités futures et de chercher à susciter chez lui le désir permanent d'apprendre et de se former ;
> b) d'aider chaque élève à développer de manière équilibrée sa personnalité, sa créativité ainsi que ses aptitudes intellectuelles, manuelles, physiques et artistiques ;
> c) de veiller à respecter, dans la mesure des conditions requises, les choix de formation des élèves ;
> d) de préparer chacun à participer à la vie sociale, culturelle, civique, politique et économique du pays, en affermissant le sens des responsabilités, la faculté de discernement et l'indépendance de jugement ;
> e) de rendre chaque élève progressivement conscient de son appartenance au monde qui l'entoure, en éveillant en lui le respect d'autrui, l'esprit de solidarité et de coopération et l'attachement aux objectifs du développement durable ;
> f) de tendre à corriger les inégalités de chance de réussite scolaire des élèves dès les premières années de l'école.

Notamment suite aux conclusions du travail de ce groupe de réflexion, les groupes de discipline ont reçu mandat de réécrire leurs plans d'études dans le cadre d'un processus hybride bottom up – top down : des consultations régulières des enseignants, faisant des propositions qui étaient validées par la direction générale du secondaire 1 par délégation du DIP. En mathématiques et en sciences, des avancées notables ont pu être constatées, particulièrement au niveau du travail sur le statut de l'erreur en lien avec les finalités de l'enseignement.

De ces réflexions est né le PE2000, incluant le « Curriculum de mathématiques », ci-dessous désigné uniquement par « Curriculum ». La présidence bicéphale du groupe de mathématiques à ce moment-là[5], des enseignants chevronnés passionnés par la didactique des mathématiques, a joué un rôle important dans la conception et la structuration de ce Curriculum qui, sur la base du plan d'étude cadre CIRCE de 1986, présentait des avancées notables. Cette présidence a collaboré avec le français Michel Mante de l'IREM de Lyon dans le cadre de l'animation d'une formation continue nommée « Pratique Pédagogique en Mathématiques » ayant touché près des deux tiers des enseignants genevois de mathématiques et qui était destinée, entres autres, à donner des pistes aux enseignants pour la mise en place de situations problèmes et de problèmes ouverts dans leurs classes, répondant en cela au nouveau contrat social lié à la posture de l'enseignant, comme relevé au début du paragraphe 1. De cette collaboration est née l'idée d'un POEM « Principe Organisateur de l'Enseignement-apprentissage des Mathématiques » appliqué au Curriculum : ce POEM liste, pour chaque thème d'enseignement, les obstacles et erreurs caractéristiques, les outils de vérification, les types de problèmes pouvant être soumis aux élèves, les techniques et savoir-faire, les propriétés (en acte et déclaratives) et le vocabulaire et syntaxe (Figure 1). Ces indications didactiques, assorties de commentaires détaillés (annexe 1) sont d'une grande richesse et vont permettre aux enseignants (et plus particulièrement aux enseignants débutants) de faire une analyse préalable des activités élèves et les aider dans la construction de leur séquence d'enseignement sur un thème donné. La liste des obstacles et erreurs caractéristiques permet notamment d'envisager l'introduction d'un thème sous l'angle de la situation problème.

[5] Chaque discipline du secondaire 1 est représentée auprès de la direction générale par un président de groupe qui est un enseignant élu par l'ensemble des enseignants de la branche qu'il représente. Le président de groupe reçoit une décharge horaire durant son mandat. Il est chargé d'assurer la coordination entre les groupes de sa discipline de chaque établissement scolaire, de mettre sur pied des formations continues destinées aux enseignants de sa discipline et de superviser la mise en place et le suivi des plans d'étude et des moyens d'enseignement.

9e – Écritures de nombres, puissances et racines, sensibilisation aux irrationnels

Obstacles et erreurs caractéristiques

- théorème-élève : " $a^n \cdot a^m = a^{n \cdot m}$ "
- théorème-élève : " $(a \pm b)^n = a^n \pm b^n$ "
- théorème-élève : " $\sqrt{a \pm b} = \sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ "
- théorème–élève : " $\sqrt{a} = \frac{a}{2}$ "
- accepter qu'une écriture sous forme d'opérations non effectuées[1] représente un nombre

Outils de vérification

- estimation de l'ordre de grandeur
- retour au sens de la puissance comme multiplication répétée pour un exposant entier ≥ 2
- pour vérifier des racines carrée et cubique, effectuer le carré ou le cube du résultat pour retrouver le radicande

Problèmes

B. • comparaison de nombres ou de grandeurs ①
• problèmes d'estimation ②
• problèmes pris dans d'autres domaines ou d'autres disciplines ③
C. • écritures de nombres sous forme d'opérations non effectuées[1] ④
• construction des propriétés des puissances et des racines

Techniques et savoir-faire

- calculer une puissance avec un exposant entier positif ou nul d'un nombre réel
- appliquer la hiérarchie des opérations (y compris avec des puissances et des *racines*)
- calculer les racines carrée ou cubique d'un nombre rationnel
- calculer une puissance de 10, d'exposant entier relatif
- exprimer un nombre en écriture scientifique
- *utiliser l'écriture scientifique* ⑤
- encadrer une racine
- *opérer avec des fractions négatives*

Propriétés ⑥

Propriétés en acte et déclaratives

$\sqrt{a^2} = \left(\sqrt{a}\right)^2 = a$, pour $a \geq 0$; $\sqrt[3]{a^3} = \left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a$

- propriétés des puissances de même base :

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$, $\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}$, pour n et m entiers ⑦

- puissance d'un produit : $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$, pour n entier ⑦
- puissance d'un quotient : $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, pour $b \neq 0$ et n entier ⑦
- racines carrée et cubique d'un produit :

$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, pour $a \geq 0$ et $b \geq 0$; $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$

- racines carrée et cubique d'un quotient :

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, pour $a \geq 0$ et $b > 0$; $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$, pour $b \neq 0$

Vocabulaire et syntaxe

- puissance, base, exposant, exponentiation, carré, cube
- écriture scientifique
- racine carrée, racine cubique, indice, radicande, extraction de racine
- nombre entier, naturel, relatif, rationnel, irrationnel, réel
- $a^0 = 1$ pour $a \neq 0$
- $a^1 = a$
- $10^{-n} = \frac{1}{10^n}$

P.E. MATHÉMATIQUES LIVRET 1 NOMBRES ET OPÉRATIONS 9e 2003 – 2004 1 32

Figure 1 *- POEM pour le thème Nombres et opérations 11ème Harmos (12-13 ans)*

3. La conception et l'élaboration du plan d'études romand

Parallèlement à cette réflexion genevoise et à la conception de son PE2000 s'est développée, comme relaté dans le paragraphe 1, l'idée d'un plan d'étude cadre romand né d'une volonté politique officialisée dans la déclaration de la CIIP du 30.01.2003[6] relative aux finalités et objectifs de l'école publique, donnant la base légale nécessaire à la création d'un plan d'étude romand. Ce dernier manifeste clairement la volonté des cantons romands d'harmoniser leur enseignement par le biais d'un cadre de référence commun décrivant les contenus et les visées de la formation dispensée par l'école publique.

En 2004, Berne partie francophone reçoit l'injonction institutionnelle de refaire ses plans d'études ; une demande particulière sera que cette réécriture devra être faite par des enseignants du terrain, pouvant toutefois porter une double casquette. Les cantons de l'espace de formation HEP BEJUNE (Haute école pédagogique des cantons de Berne – Jura – Neuchâtel) saisissent l'occasion d'élaborer un plan d'études commun à l'espace BEJUNE permettant aux formateurs d'enseignants de cette HEP de former les enseignants à l'emploi d'un unique plan d'études. Ces cantons sont rapidement rejoints par les autres cantons romands (Valais et Genève en 2006, Vaud en 2007).

Le 20 septembre 2007, suite à l'adoption de la Convention Scolaire et à l'accord HarmoS, la CIIP, avec un comité de pilotage constitué de politiques (conseiller d'état, secrétaires généraux, chefs de service) et de conseillers scientifiques, a décidé de reprendre sous son entière responsabilité et compétence les travaux en cours mandatant l'équipe en place (un groupe de pilotage, une équipe de projet et des rédacteurs constitués d'enseignants, de formateurs et de didacticiens) de poursuivre et finaliser la réalisation du PER.

[6] http://www.ciip.ch/pages/portrait/fichiers/cp030403_2%20.pdf

En automne 2008 cette première version du PER a été soumise à cinq experts nationaux et internationaux et a été l'objet d'une large consultation auprès des départements de l'instruction publique, des milieux d'enseignants (primaire, secondaire et université), des milieux syndicaux et de parents. De nombreuses remarques, critiques et observations pertinentes ont été émises, mais globalement, le PER a été bien reçu. Ainsi durant l'automne 2009, plus d'une centaine de rédactrices et rédacteurs, enseignant-e-s expérimenté-e-s, conduit par le groupe de pilotage, ont examiné et traité des centaines de demandes de modifications émanant de cette consultation afin de décliner, pour l'ensemble des disciplines communes, les connaissances et compétences que les élèves doivent apprendre et maîtriser tout au long des 11 années de la scolarité obligatoire.

Satisfaite du travail réalisé, la CIIP a adopté la version définitive du PER le 27 mai 2010.

On constate ainsi que le processus d'élaboration du PER est aussi de type bottom up – top down : il obtient ainsi une double légitimité, praticienne et politique.

Récapitulatif de la chronologie

30.01.2003 Déclaration de la CIIP :: volonté d'harmoniser le système éducatif et les politiques de formation des cantons romands.

2004 Début de réflexion romande pour la construction d'un plan d'études romand.

21.05.2006 Votation populaire sur l'harmonisation de l'école publique suisse.

21.06.2007 La CIIP pose un cadre de référence pour la mise en place de la convention scolaire romande (CSR).

20.09.2007 La CIIP prend à sa charge l'élaboration du PER.

2008 Large consultation sur une première version du PER.

01.08.2009 La CSR entre en vigueur ainsi que l'accord HarmoS.

Automne 09 Analyse des réactions suite à la consultation de 2008.

27.05.2010 La CIIP adopte la version définitive du PER.

4. *La structure du plan d'études romand*

Le PER contient cinq domaines disciplinaires : langues, mathématiques et sciences de la nature, sciences humaines et sociales, arts, corps et mouvement. Nous pouvons donc constater que les mathématiques sont associées dans ce PER aux sciences de la nature, elles sont articulées entre elles par un axe thématique nouvellement apparu et qui fera l'objet de la seconde partie de ce texte, la modélisation.

Ce regroupement et cette articulation est, comme mentionné plus haut, un indicateur de changement de contrat social, en ce sens où chacun des deux volets de ce domaine enrichi l'autre :

> Le domaine Mathématiques et Sciences de la nature, en cohérence avec les finalités et objectifs de l'école publique, mobilise et développe des méthodes de pensée et d'action tout autant qu'un ensemble de concepts, de notions et d'outils. Il fournit à l'élève des instruments intellectuels d'appréhension et de compréhension du réel et d'adaptation à ce dernier […]. C'est dans ces buts que le domaine choisit de développer la résolution de problèmes et la posture scientifique […] (extrait des intentions des commentaires généraux)

Les visées prioritaires du cycle 3 pour le domaine Mathématiques et Sciences de la Nature (MSN) sont :

> se représenter, problématiser et modéliser des situations et résoudre des problèmes en construisant et en mobilisant des notions, des concepts, des démarches et des raisonnements propres aux mathématiques et aux sciences de la nature dans les champs des phénomènes naturels et techniques, du vivant et de l'environnement, ainsi que des nombres et de l'espace.

Pour chaque domaine et pour les disciplines qui en font partie, le PER est décliné en trois cycles :

- cycle 1 (degrés 1 à 4 primaires)
- cycle 2 (degrés 5 à 8 primaires)
- cycle 3 (degrés 9 à 11)

La progression des apprentissages est déclinée par demi-cycle (deux années scolaires) pour les cycles primaires et par année scolaire pour le cycle secondaire I.

La structure du PER est la suivante : la partie centrale décrit l'ensemble des contenus d'apprentissage pour chaque domaine et chaque discipline associée. Elle est structurée comme suit :

***Figure 2** – Structure du PER*

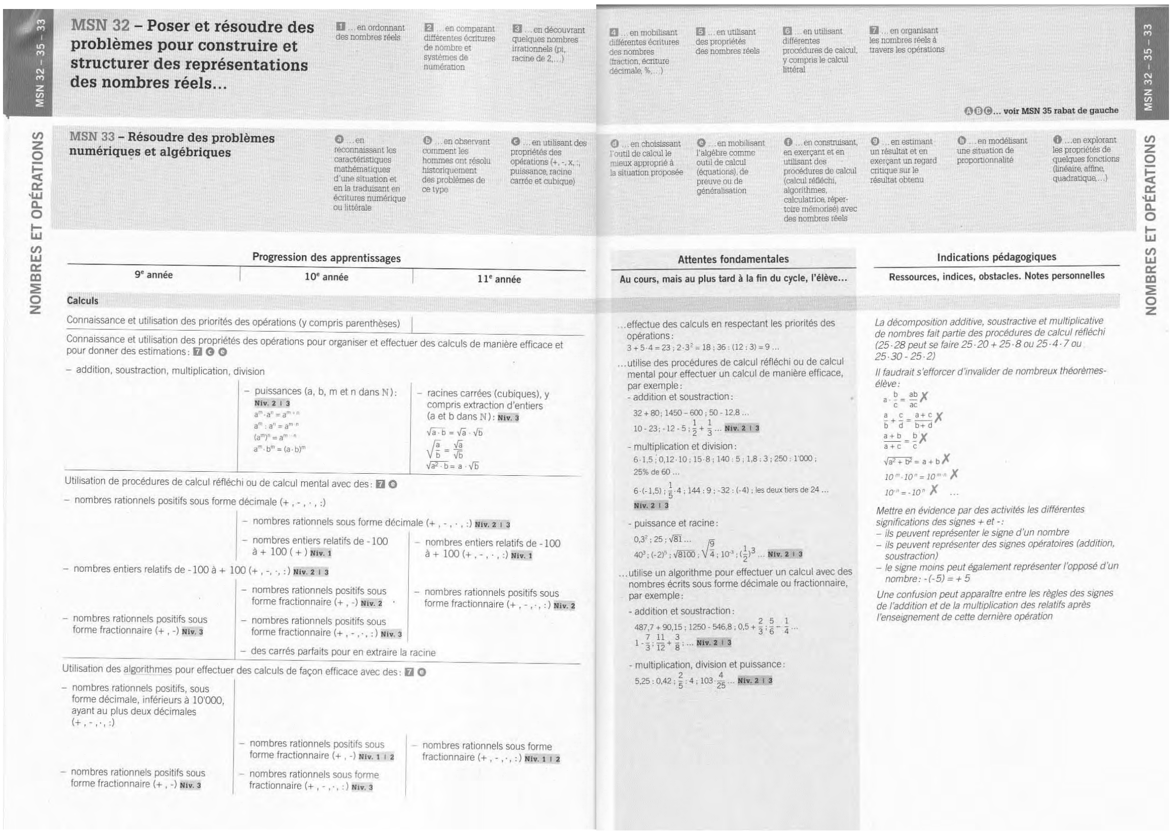
La progression des apprentissages décrit les contenus à aborder en classe et les illustre à l'aide d'exemples d'activités, tout en indiquant leur progression tout au long de la scolarité.

Les attentes fondamentales déclinent les apprentissages dont la maîtrise est essentielle pour poursuivre sa scolarité. Elles doivent être atteintes au cours, mais au plus tard à la fin de chaque cycle (fin 4e, 8e et 11e année).

Au cycle 3, les attentes fondamentales (niveau 1) pour toutes les disciplines sont complétées par deux niveaux d'attentes complémentaires pour les disciplines français, allemand et mathématiques et par un niveau d'attentes complémentaires pour l'anglais, l'histoire, la géographie et les sciences de la nature. Ces niveaux d'attentes constituent des repères complémentaires permettant aux enseignants de situer les élèves sur un parcours de formation ; ils indiquent les notions que doivent maitriser les élèves afin de pouvoir progresser dans leurs apprentissages.

Les indications pédagogiques proposent au corps enseignant des conseils, remarques et observations utiles à l'enseignement et précisent certains éléments de la progression des apprentissages. Dans le cas des mathématiques elles ne sont pas sans rappeler certains éléments du POEM, en particulier la mention de certains théorèmes-élève ou obstacles et erreurs caractéristiques. En effet, des auteurs du Curriculum genevois faisaient partie des comités d'écriture du PER et ont ainsi pu proposer ces compléments.

Un exemple du domaine nombres et opérations est proposé en figure 3.



MSN 32 – 35 – 33

NOMBRES ET OPÉRATIONS

MSN 32 – Poser et résoudre des problèmes pour construire et structurer des représentations des nombres réels…

1 … en ordonnant des nombres réels
2 … en comparant différentes écritures de nombre et systèmes de numération
3 … en découvrant quelques nombres irrationnels (pi, racine de 2,…)
4 … en mobilisant différentes écritures des nombres (fraction, écriture décimale, %,…)
5 … en utilisant des propriétés des nombres réels
6 … en utilisant différentes procédures de calcul, y compris le calcul littéral
7 … en organisant les nombres réels à travers les opérations

A B C … voir MSN 35 rabat de gauche

MSN 33 – Résoudre des problèmes numériques et algébriques

a … en reconnaissant les caractéristiques mathématiques d'une situation et en la traduisant en écritures numérique ou littérale
b … en observant comment les hommes ont résolu historiquement des problèmes de ce type
c … en utilisant des propriétés des opérations (+, -, x, :, puissance, racine carrée et cubique)
d … en choisissant l'outil de calcul le mieux approprié à la situation proposée
e … en mobilisant l'algèbre comme outil de calcul (équations), de preuve ou de généralisation
f … en construisant, en exerçant et en utilisant des procédures de calcul (calcul réfléchi, algorithmes, calculatrice, répertoire mémorisé) avec des nombres réels
g … en estimant un résultat et en exerçant un regard critique sur le résultat obtenu
h … en modélisant une situation de proportionnalité
i … en explorant les propriétés de quelques fonctions (linéaire, affine, quadratique,…)

Progression des apprentissages — 9e année | 10e année | 11e année

Calculs

Connaissance et utilisation des priorités des opérations (y compris parenthèses)

Connaissance et utilisation des propriétés des opérations pour organiser et effectuer des calculs de manière efficace et pour donner des estimations : 7 c e

– addition, soustraction, multiplication, division

– puissances (a, b, m et n dans ℕ) : Niv. 2 | 3
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
$a^m : a^n = a^{m-n}$
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$

– racines carrées (cubiques), y compris extraction d'entiers (a et b dans ℕ) : Niv. 3
$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$
$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
$\sqrt{a^2 \cdot b} = a \cdot \sqrt{b}$

Utilisation de procédures de calcul réfléchi ou de calcul mental avec des : 7 e

– nombres rationnels positifs sous forme décimale (+ , - , · , :)
– nombres rationnels sous forme décimale (+ , - , · , :) Niv. 2 | 3
– nombres entiers relatifs de -100 à + 100 (+) Niv. 1
– nombres entiers relatifs de -100 à + 100 (+ , - , · , :) Niv. 1
– nombres entiers relatifs de -100 à + 100 (+ , -, ·, :) Niv. 2 | 3
– nombres rationnels positifs sous forme fractionnaire (+ , -) Niv. 2
– nombres rationnels positifs sous forme fractionnaire (+ , - , · , :) Niv. 2
– nombres rationnels positifs sous forme fractionnaire (+ , -) Niv. 3
– nombres rationnels positifs sous forme fractionnaire (+ , - , · , :) Niv. 3
– des carrés parfaits pour en extraire la racine

Utilisation des algorithmes pour effectuer des calculs de façon efficace avec des : 7 e

– nombres rationnels positifs, sous forme décimale, inférieurs à 10'000, ayant au plus deux décimales (+ , - , · , :)
– nombres rationnels positifs sous forme fractionnaire (+ , -) Niv. 1 | 2
– nombres rationnels sous forme fractionnaire (+ , - , · , :) Niv. 1 | 2
– nombres rationnels positifs sous forme fractionnaire (+ , -) Niv. 3
– nombres rationnels sous forme fractionnaire (+ , - , · , :) Niv. 3

Attentes fondamentales

Au cours, mais au plus tard à la fin du cycle, l'élève…

…effectue des calculs en respectant les priorités des opérations :
$3 + 5 \cdot 4 = 23$; $2 \cdot 3^2 = 18$; $36 : (12 : 3) = 9$ …

…utilise des procédures de calcul réfléchi ou de calcul mental pour effectuer un calcul de manière efficace, par exemple :
- addition et soustraction :
32 + 80 ; 1450 – 600 ; 50 - 12,8 …
10 - 23 ; - 12 - 5 ; $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ … Niv. 2 | 3
- multiplication et division :
6·1,5 ; 0,12·10 ; 15·8 ; 140 : 5 ; 1,8 : 3 ; 250 : 1'000 ; 25% de 60 …
6·(-1,5) ; $\frac{1}{5} \cdot 4$; 144 : 9 ; -32 : (-4) ; les deux tiers de 24 … Niv. 2 | 3
- puissance et racine :
$0{,}3^2$; 25 ; $\sqrt{81}$ …
40^3 ; $(-2)^5$; $\sqrt{8100}$; $\sqrt{\frac{9}{4}}$; 10^{-3} ; $(\frac{1}{2})^3$ … Niv. 2 | 3

…utilise un algorithme pour effectuer un calcul avec des nombres écrits sous forme décimale ou fractionnaire, par exemple :
- addition et soustraction :
487,7 + 90,15 ; 1250 - 546,8 ; $0{,}5 + \frac{2}{3}$; $\frac{5}{6} - \frac{1}{4}$ …
$1 - \frac{7}{3}$; $\frac{11}{12} + \frac{3}{8}$; … Niv. 2 | 3
- multiplication, division et puissance :
5,25 : 0,42 ; $\frac{2}{5} : 4$; $103 \cdot \frac{4}{25}$ … Niv. 2 | 3

Indications pédagogiques

Ressources, indices, obstacles. Notes personnelles

La décomposition additive, soustractive et multiplicative de nombres fait partie des procédures de calcul réfléchi (25·28 peut se faire 25·20 + 25·8 ou 25·4·7 ou 25·30 - 25·2)

Il faudrait s'efforcer d'invalider de nombreux théorèmes-élève :
$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{ab}{ac}$ ✗
$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ ✗
$\frac{a+b}{a+c} = \frac{b}{c}$ ✗
$\sqrt{a^2+b^2} = a + b$ ✗
$10^m \cdot 10^n = 10^{m \cdot n}$ ✗
$10^{-n} = -10^n$ ✗ …

Mettre en évidence par des activités les différentes significations des signes + et - :
– ils peuvent représenter le signe d'un nombre
– ils peuvent représenter des signes opératoires (addition, soustraction)
– le signe moins peut également représenter l'opposé d'un nombre : -(-5) = + 5

Une confusion peut apparaître entre les règles des signes de l'addition et de la multiplication des relatifs après l'enseignement de cette dernière opération

***Figure 3** – pp. 22 et 23 du PER (voir aussi annexe 2)*

Le PER est destiné en priorité au corps enseignant, qui devra le mettre en œuvre au quotidien. Pour ce faire, il disposera d'une version papier correspondant à ses besoins (cycles, domaines et disciplines).

De plus, dans le futur, une version informatisée, développée sur une plateforme Internet, proposera de multiples liens vers des ressources et documents utiles à la pratique quotidienne de l'enseignement.

5. Implantation du PER et accompagnement

Dès l'automne 2010 ont eu lieu des présentations du PER, obligatoires pour tous les enseignants du secondaire 1 genevois, toutes disciplines confondues. Ces présentations, de type « top down », ont été faites notamment par la directrice du service de l'enseignement. La structure même du PER différant en quelques points de celle du Curriculum, des clés de lecture des objectifs, des atteintes en fin de cycle et des niveaux d'attentes complémentaires ont été données.

En octobre 2010 et février 2011 la présidence de groupe a proposé deux demi-journées aux représentants des enseignants de mathématiques de chaque établissement scolaire afin de permettre une appropriation des enjeux et des évolutions induits par ce changement de plan d'études : une mise en en parallèle des notions du Curriculum et de celles du PER pour le degré 9 a été élaborée. En a résulté un « document de liaison » signalant les items en plus ou en moins (notions, savoirs) dans le PER par rapport au curriculum genevois. Ce document, représentant une aide pour faciliter la mise en œuvre du plan d'études romand sous forme de tableau a été diffusé par le service de l'enseignement à tous les enseignants de maths du secondaire ; il a été accompagné par un « plan de cheminement 9ème Harmos 2011-2012 » (romand) faisant une proposition de planification annuelle (nombre de semaines par thèmes avec apprentissages visés).

A noter qu'un troisième document a été élaboré par la présidence de groupe : un découpage genevois des objectifs du PER. En effet, certains objectifs du PER courant sur deux voire trois ans, il a fallu, par souci de cohésion et de suivi d'année en année, déterminer dans quel degré prendrait place cet objectif. Ce document a aussi été diffusé à tous les enseignants genevois de mathématiques du secondaire 1.

De plus, et conformément à l'article 9 de la CSR :

> Article 9 – Moyens d'enseignement et ressources didactiques
>
> 1 La CIIP assure la coordination des moyens d'enseignement et des ressources didactiques sur le territoire des cantons parties à la Convention.
>
> 2 Elle réalise par ordre de priorité les actions suivantes :
>
> a) adopter et acquérir un ensemble unique de moyens pour l'enseignement d'une discipline dans un degré ou un cycle ;
>
> b) adopter un choix de deux à trois ensembles de moyens pour l'enseignement d'une discipline dans un degré ou un cycle et les acquérir ;
>
> c) définir une offre ouverte de moyens d'enseignement dûment sélectionnés et approuvés; l'approbation autorise l'usage du moyen dans les classes des cantons parties à la Convention ;
>
> d) réaliser ou faire réaliser un moyen original

une nouvelle édition des manuels romands de mathématiques a été introduite en même temps que le PER : en 1999 une collection de type « théorie – exercices (majoritairement de drill) » a été remplacée temporairement et dans l'attente d'une collection romande, par des collections françaises et canadiennes (Carrousel (CA), Triangle (F), 5sur5 (F)) afin de bien montrer aux enseignants la rupture existant entre les plan d'études CIRCE et PE2000. En 2003 est apparue la collection des manuels romands de mathématiques, chaque manuel couvrant un thème. Cette collection a été remplacée en 2011 par les nouveaux manuels romands de mathématiques, chaque manuel recouvrant cette fois les thèmes d'une année d'enseignement.

6. *Régulation*

Comme on peut le lire dans la présentation et organisation du PER, « le PER, produit évolutif, peut être périodiquement repris, amendé et complété. Référentiel fondamental et instrument d'harmonisation de l'enseignement, il ne peut cependant être constamment modifié. Ses adaptations doivent en effet être annoncées et planifiées sur la base de décisions prises par la Conférence intercantonale de l'instruction publique.

Les adaptations du PER s'appuient sur des besoins clairement identifiés :

- changements importants dans l'enseignement d'une discipline (degré d'enseignement, évolution des exigences,…) ;
- prise en compte des résultats d'évaluations régionales, nationales ou internationales ;
- décisions majeures des autorités concernant un domaine, une discipline.

Le dispositif de veille permanente du PER mis en place par la CIIP permet aux cantons, aux établissements et au corps enseignant de disposer d'un potentiel d'évolution répondant aux besoins communs. Ce suivi évolutif concerne particulièrement :

- l'adéquation du PER à la réalité de l'enseignement (évaluation de ses effets après quelques années de pratique) ;

- le développement de ressources (nouveaux moyens d'enseignement, moyens et ressources en ligne, banque de données,...) ;
- l'adaptation de la plateforme informatique du PER, en particulier en ce qui concerne les liens vers des ressources diverses ;
- le développement d'épreuves romandes communes.

Le PER étant tout neuf et dans une phase de mise en place, l'avenir nous dira comment cette régulation sera faite. Affaire à suivre donc !

7. Conclusion

> Les clauses [du pacte social] se réduisent toutes à une seule : l'aliénation totale de chaque associé avec tous ses droits à toute la communauté : car premièrement, chacun se donnant tout entier, la condition est égale pour tous ; et la condition étant égale pour tous, nul n'a intérêt de la rendre onéreuse aux autres. (Jean-Jacques Rousseau)

Nous avons ainsi pu constater au travers de cette étude du design curriculaire suisse et suisse romand un premier indicateur de changement de contrat social lié à l'accord HarmoS qui regroupe au sein d'un même domaine disciplinaire les mathématiques et les sciences de la nature : l'enseignement des mathématiques est ouvert sur d'autres disciplines et n'est pas, sur le papier en tous cas, replié sur lui-même.

Un deuxième indicateur d'évolution du contrat social est l'introduction même du PER : il instaure une égalité de formation sur l'ensemble de la Suisse romande, qui n'est plus de facto constituée d'entités distinctes agissant au sein de leurs fiefs respectifs mais qui est considérée comme une région formant l'ensemble de ses élèves selon les mêmes objectifs. En référence à la citation qui ouvrait ce texte, peut-on répondre à M. Perrenoud que maintenant l'école romande existe ?

Pour reprendre la thématique de cet article, nous constatons que les cantons, que nous pouvons assimiler aux associés du pacte de Rousseau, ont renoncés à certains individualismes pour constituer une communauté, la Romandie, garantissant l'égalité de traitement entre tous les élèves. Nous avons néanmoins relevé que la souveraineté cantonale était garantie au travers des 15% de marge de manœuvre accordés par la convention scolaire romande (article 8).

II. DEUXIÈME PARTIE – L'AXE THÉMATIQUE DE LA MODÉLISATION

1. Contexte

Jusqu'à la rentrée scolaire 2011 l'ancien plan d'étude, le « Curriculum de mathématiques », s'appliquait dans les classes du secondaire 1 (cycle 3 : degrés 9 à 11, élèves de 12 à 15 ans) et le thème « Modélisation » n'apparaissait pas en tant que thème dans ce dernier. Seuls les termes de modélisation – modéliser apparaissaient au sein de plusieurs thèmes. Par exemple :

> « Le domaine Initiation aux fonctions doit permettre aux élèves de : […]
> 2. reconnaître des situations pouvant être modélisées par des fonctions ;
> 3. prendre conscience que des situations en apparence très diverses peuvent se modéliser par des fonctions du même type ; »
>
> Commentaires au thème proportionnalité :
> « […] on introduira le cadre graphique et on présentera d'autres exemples de situations de proportionnalité permettant ainsi la modélisation de phénomènes comme le mouvement uniforme en physique ou la relation entre le côté et le périmètre du carré en géométrie. »
> « L'étude du domaine Géométrie a pour buts :
> 1. de permettre aux élèves de modéliser l'espace physique et de résoudre des problèmes de maîtrise de l'espace physique ;
>
> Progression et contenus :
> 1. Pour faire acquérir aux élèves une certaine maîtrise de l'espace physique et leur permettre de modéliser des situations réelles, on leur proposera des activités dans le cadre des grandes questions liées à la géométrie, par exemple des problèmes de mesurage (partages de terrains, mesures de dimensions inaccessibles comme la distance d'un bateau en mer, la hauteur d'une montagne, le rayon de la Terre, etc.) ou des problèmes de représentation de l'espace (plan à l'échelle ou non, maquette, représentation plane d'un corps, repérage, etc.) . »

L'emploi de ces termes se fait néanmoins sans pour autant qu'ils soient explicités ni définis dans ce curriculum, malgré la proposition d'activités faite dans le cadre de la géométrie, proposition qui nécessiterait des éclaircissements : comment faire ou que faire pour modéliser ces situations ?

Dans le PER entré en vigueur en septembre 2011, les visées prioritaires du domaine Mathématiques et Sciences de la Nature, sont :

> se représenter, problématiser et modéliser des situations et résoudre des problèmes en construisant et en mobilisant des notions, des concepts, des démarches et des raisonnements propres aux mathématiques et aux sciences de la nature dans les champs des phénomènes naturels et techniques, du vivant et de l'environnement, ainsi que des nombres et de l'espace.

Ces visées prioritaires nous renseignent sur la conception de l'enseignement des mathématiques sous-jacentes au PER : des mathématiques axées sur la résolution de problèmes ; les intentions, tirées des commentaires généraux, et les commentaires généraux eux-mêmes nous apportent plus de renseignements :

> Le domaine Mathématiques et Sciences de la nature, en cohérence avec les finalités et objectifs de l'école publique, mobilise et développe des méthodes de pensée et d'action tout autant qu'un ensemble de concepts, de notions et d'outils. Il fournit à l'élève des instruments intellectuels d'appréhension et de compréhension du réel et d'adaptation à ce dernier […]. C'est dans ces buts que le domaine choisit de développer la résolution de problèmes et la posture scientifique. Elles visent, toutes deux, à permettre aux élèves :
>
> - d'acquérir un certain nombre de notions, de concepts et de modèles scientifiques développés progressivement par l'humanité et de réaliser la manière dont les savoirs scientifiques se sont construits ;
> - d'identifier des questions, de développer progressivement la capacité de problématiser des situations, de mobiliser des outils et des démarches, de tirer des conclusions fondées sur des faits, notamment en vue de comprendre le monde naturel et de prendre des décisions à son propos, ainsi que de comprendre les changements qui sont apportés par l'activité humaine ;

- de se montrer capable d'évaluer des faits, de faire la distinction entre théories et observations, et d'estimer le degré de confiance que l'on peut avoir dans les explications proposées.

Par ses savoirs, ses connaissances, ses méthodes, ses modes de pensées ainsi que parses modalités d'enseignement, le domaine contribue, chez l'élève, au développement de :

- la Collaboration, notamment en engageant l'élève dans une recherche en Mathématiques et/ou en Sciences de la nature lors de travaux de groupe ;
- la Communication, notamment en faisant participer l'élève aux débats scientifiques, en formulant des questions, en exploitant l'information, en sélectionnant des sources pertinentes, en structurant des données, en présentant ses résultats ;
- les Stratégies d'apprentissage, notamment en développant le raisonnement de l'élève, ses stratégies, sa systématique, en utilisant ses essais et ses erreurs et celles des autres pour reconstruire une réflexion et en comprendre les faux-pas ;
- la Pensée créatrice, notamment en amenant l'élève à imaginer des modèles, des explications, des procédés, des expérimentations, des moyens et des outils de mesure, à accepter le risque et l'inconnu, en se représentant et en projetant diverses modalités de réalisation ;
- la Démarche réflexive, notamment en amenant l'élève à choisir des méthodes adéquates, à vérifier ses hypothèses par confrontation au réel, en développant son regard critique sur ses propres choix et/ou résultats et ceux des autres, en l'amenant à renoncer aux idées toutes faites sur la compréhension de phénomènes naturels ou mathématiques, à analyser l'adéquation d'un modèle choisi, pour une représentation statistique par exemple, et les limites qu'il comporte.

La figure 4 résume ces intentions :

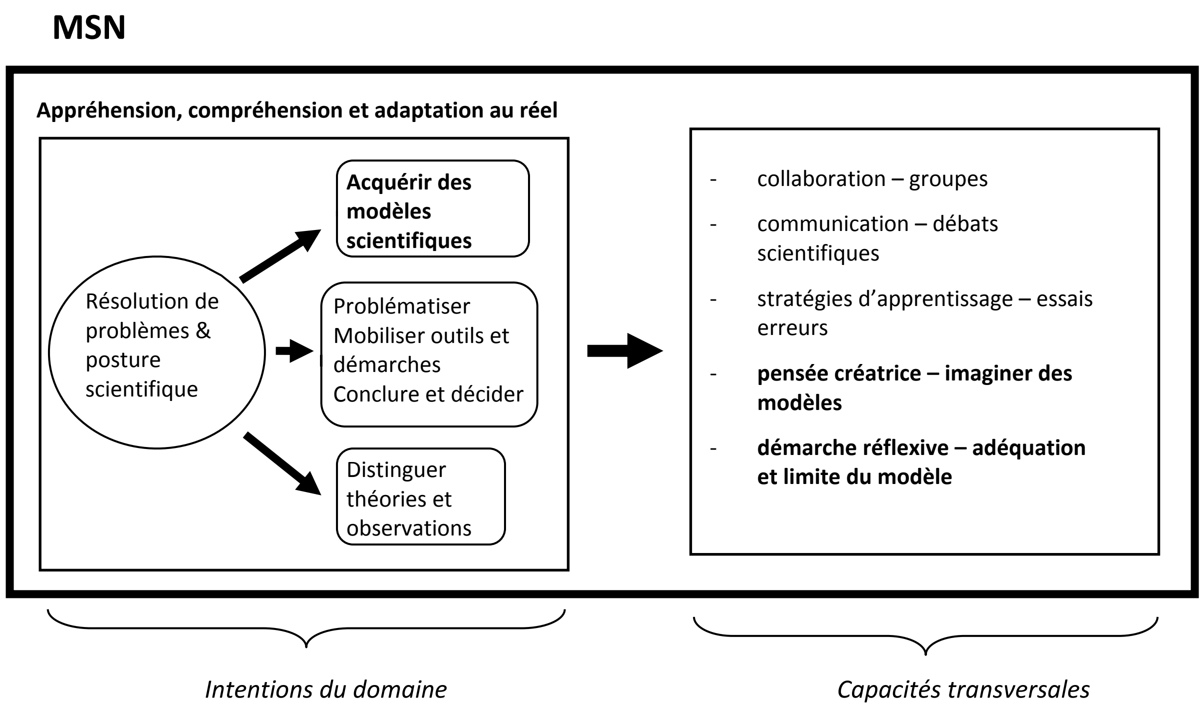


Figure 4 *– intentions et commentaires généraux*

L'injonction à imaginer et acquérir des modèles ainsi qu'à porter un regard critique sur ces derniers est révélateur d'un changement de contrat social dans les intentions et indique un certain positionnement par rapport à la modélisation : on va plus loin que le processus de modélisation mettant l'accent sur l'élaboration de modèles spontanés par les élèves, on souhaite qu'ils en acquièrent.

Comme relevé dans la première partie de ce texte, le domaine contient une partie Mathématiques et une partie Sciences de la nature, l'axe thématique Modélisation étant commun aux deux parties ; il s'agit de la considérer avec chaque objectif d'apprentissage. Elle articule ces deux parties du domaine et les fait interagir.

La partie Mathématiques contient cinq thèmes, de même que la partie Science de nature. Elles partagent deux thèmes : grandeurs et mesures et modélisation.

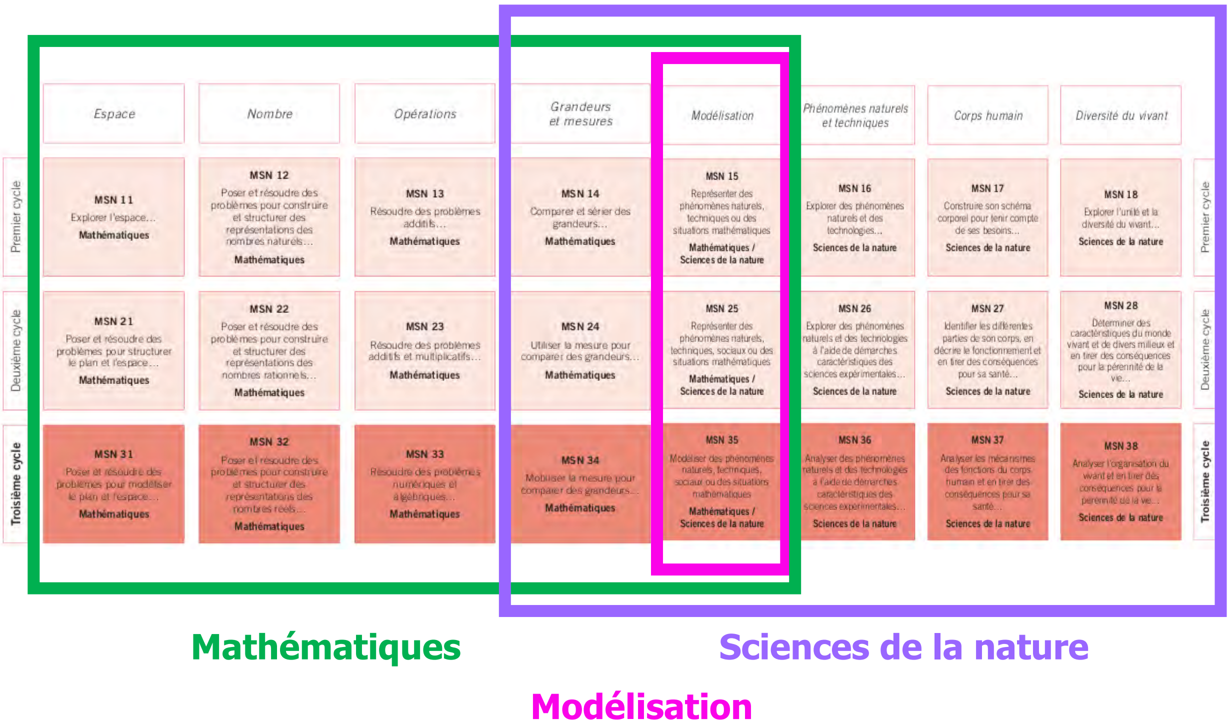


Figure 5 *– Le réseau des objectifs d'apprentissage (voir aussi annexe 3)*

L'axe thématique Modélisation est décliné tout au long de la scolarité obligatoire, dans les trois cycles, ce qui est une grande nouveauté au niveau romand : on peut ainsi voir sur l'ensemble de la scolarité obligatoire comment un même axe thématique est abordé et approfondi.

MSN 15

MSN 15 – Représenter des phénomènes naturels, techniques ou des situations mathématiques…

A …en imaginant et en utilisant divers outils de représentation

B …en menant des observations répétées

C …en se référant à diverses sources

D …en triant et organisant des données

E …en confrontant et en communiquant ses observations, ses résultats, ses constats, ses interprétations

F …en mobilisant, selon la situation, la mesure et/ou des outils mathématiques

G …en se posant des questions et en exprimant ses conceptions

MSN 25	**MSN 25 – Représenter des phénomènes naturels, techniques, sociaux ou des situations mathématiques…**	A …en imaginant et en utilisant des représentations visuelles (codes, schémas, graphiques, tableaux,…)	B …en identifiant des invariants d'une situation	C …en triant et organisant des données
D …en communiquant ses résultats et ses interprétations	E …en explorant des situations aléatoires et en se confrontant au concept de probable	F …en se posant des questions et en définissant un cadre d'étude	G …en mobilisant, selon la situation, la mesure et/ou des outils mathématiques	

MSN 35	**MSN 35 – Modéliser des phénomènes naturels, techniques, sociaux ou des situations mathématiques**	A …en mobilisant des représentations graphiques (codes, schémas, tableaux, graphiques,…)	B …en associant aux grandeurs observables des paramètres	C …en triant, organisant et interprétant des données	
D …en communiquant ses résultats et en présentant des modélisations	E …en traitant des situations aléatoires à l'aide de notions de probabilités	F …en dégageant une problématique et/ou en formulant des hypothèses	G …en recourant à des modèles existants	H …en mobilisant, selon la situation, la mesure et/ou des outils mathématiques	(fonctions, statistiques, algèbre,…)

***Figure 6** – Les trois cycles de modélisation*

> L'axe Modélisation se trouve à mi-chemin entre une méthodologie et un contenu. En ce sens, la modélisation est transversale à ce domaine qu'elle chapeaute. Elle s'appuie sur la méthodologie des sciences expérimentales, mais la focalisation porte d'abord sur la gestion mathématique de la situation qui commence par son épuration et continue dans le traitement mathématique du problème ainsi défini.

Ce commentaire extrait des commentaires généraux laisse ainsi entendre que l'on travaille au sein du modèle sur une mathématisation du problème.

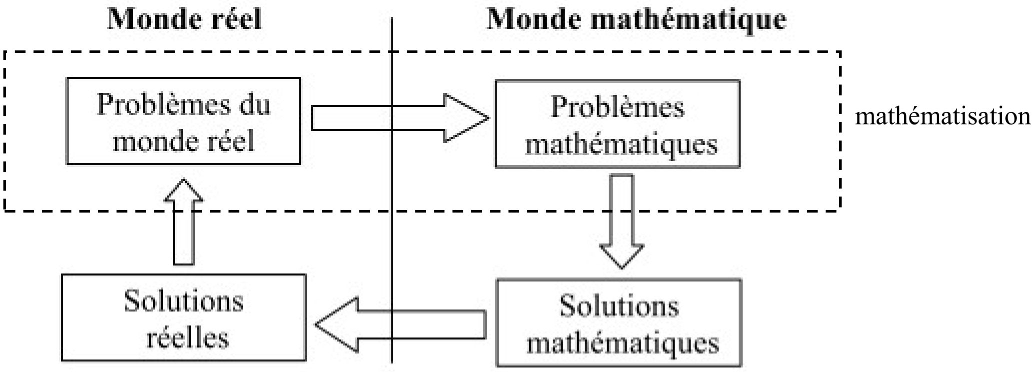
2. Mathématiser ou modéliser ?

> Modéliser : Recouvre l'idée d'associer à une situation complexe un modèle qui la rend intelligible en la réduisant à ses éléments essentiels. (Lexique du PER)

L'idée principale est celle de simplification, n'incluant pas nécessairement de mathématisation, ce qui est en un sens normal, si l'on considère par exemple la diversité des modèles utilisés dans les sciences de la nature et de la vie, mais la question de l'identification de ce qui est essentiel reste posée.

> En Mathématiques […] on se focalise plutôt sur le traitement du problème. Ce traitement a lieu après la modélisation, souvent liée au contexte, et s'organise en essais-erreurs, ajustements, généralisation, formulation d'une conjecture et validation de celle-ci par une démonstration mathématique. (Commentaires généraux)

Modélisation semble associé ici à mathématisation, il s'agit sans doute d'un glissement de sens, indiquant une différence avec la vision en termes de cycle de modélisation.



La modélisation est le parcours de tout le cycle

Figure 7 *– Le cycle de modélisation*

Afin de permettre aux enseignants de répondre aux attentes du PER, d'identifier ce qui est du ressort de la mathématisation et de la modélisation et investir pleinement cet axe de la modélisation, des actions de formation sont ou seront menées au sein des cantons romands. Par exemple à Genève c'est le groupe PRIMAS[7] qui se charge de donner les outils nécessaires aux enseignants pour mettre en place dans leur classe des activités de modélisation au travers de demi-journées de recyclage.

3. Conclusion

Cette entrée de la modélisation dans les programmes fait apparaître une évolution du contrat social avec l'école et occupe une place de plus en plus importante dans la sphère éducative comme mis en évidence par le développement de la communauté ICTMA, maintenant groupe affilié à ICMI, la reprise par l'OCDE dans le programme PISA notamment, puis par les instances européennes, en relation avec l'accent mis sur les démarches d'investigation pour la rénovation de l'enseignement scientifique, développement ayant engendré des projets comme PRIMAS, FIBONACCI et autres.

De tout temps, la dimension applications a été importante dans l'enseignement des maths, mais comme bien montré dans l'étude ICMI 14 intitulée « Modelling and Applications in Mathematics Education », penser en termes de modélisation représente un changement important de la vision, notamment des rapports entre mathématiques et monde réel, mathématiques et autres disciplines scientifiques : on identifie donc bien en cela une évolution du contrat social.

REFERENCES

Perrenoud P. (1994) École romande : de la coordination des programmes à l'émergence d'une politique régionale ? *Synergie. Édition spéciale des Hautes écoles de Suisse occidentale*.28-32.

Rousseau J.-J. (1762) *Du Contrat Social ou Principes du droit politique*. Amsterdam : Marc-Michel Rey.

Tauxe C. (2005) *Que vaut le système éducatif suisse ?* L'Hebdo, édition du 9 juin 2005.

www.ciip.ch – www.geneve.ch/dip – www.plandetudes.ch

[7] Promoting Inquiry in Mathematics and Science education across Europe

ANNEXE 1 – EXTRAIT DU CURRICULUM GENEVOIS DE MATHÉMATIQUES

11e

Écritures de nombres, puissances et racines, sensibilisation aux irrationnels

Intentions :

L'étude de ce module doit :

1) **permettre aux élèves d'approfondir et de consolider leurs techniques opératoires;**
2) **offrir aux élèves des outils de calcul basés sur les propriétés des puissances et des racines;**
3) **sensibiliser les élèves au fait qu'il existe d'autres nombres que les rationnels.**

Commentaires :

- **Progression et contenus :**

Par rapport à la 10e les élèves seront confrontés à des expressions plus complexes combinant:
- les différents types de nombres
- les différentes opérations
- les différentes écritures de nombres, en particulier sous forme d'opérations non effectuées[1]

Les calculs et les réductions d'expressions numériques pourront faire appel aux propriétés des différentes opérations pour être effectués plus simplement. Ces notions seront appliquées lors de la résolution de problèmes choisis dans les autres domaines ou dans d'autres disciplines, essentiellement la physique.

- **Commentaires au tableau :**

Problèmes :

① Dans les problèmes de comparaison de nombres, les élèves pourront rencontrer différents types de nombres, y compris des nombres écrits à l'aide d'opérations non effectuées[1].

② On pourra proposer par exemple d'estimer la grandeur d'un nombre écrit comme une grande puissance de 2 (en utilisant $2^{10} \cong 10^3$) ou d'encadrer des racines sans l'aide de la calculatrice.

③ En *Géométrie*, on calculera par exemple des longueurs en utilisant les théorèmes de Pythagore et de Thalès. En physique, on rencontre des rapports, des produits ou des sommes, dans lesquels peuvent intervenir des écritures scientifiques. En 9e, les élèves devraient acquérir une certaine aisance dans le maniement de ces expressions complexes.

④ Confrontés à des écritures de nombres sous forme d'opérations non effectuées[1] (écriture fractionnaire, écriture scientifique, racines, etc.), les élèves devraient pouvoir manipuler des expressions exactes simples, sans passer nécessairement à l'écriture décimale, pour calculer, par exemple, la diagonale d'un parallélépipède rectangle sans arrondis intermédiaires.

Techniques et savoir-faire :

⑤ Par utiliser l'écriture scientifique, on entend faire appel à celle-ci à bon escient et opérer avec.

Propriétés :

⑥ On construira les propriétés des puissances avec les élèves dans la mesure du possible. On étudiera aussi quelques propriétés des racines (carrée et cubique). En ce qui concerne ces propriétés, on travaillera parallèlement dans le cadre numérique et algébrique.

⑦ Pour la base 10, les exposants peuvent être négatifs; pour les autres bases, les exposants sont des entiers positifs.

- **Lien avec les autres domaines et thèmes ou avec les autres disciplines :**

Domaines : tous les domaines.

Thèmes : tous les thèmes.

Autres disciplines : *Physique*

- **Évaluation :**

Voir carnet de route.

[1] Nous appelons écritures à l'aide d'opérations non effectuées les écritures de nombres qui mettent en évidence la construction d'un nombre à partir d'autres nombres et d'opérations sur ceux-ci (en représentant le nombre en quelque sorte comme s'il était "en suspens" sous le coup d'une opération non effectuée).

ANNEXE 2 – EXTRAIT DU PER

4 … en mobilisant différentes écritures | 5 … en utilisant des propriétés | 6 … en utilisant différentes | 7 … en organisant les nombres réels à

33

MSN 32 – 35 – 33

NOMBRES ET OPÉRATIONS

MSN 32 – Poser et résoudre des problèmes pour construire et structurer des représentations des nombres réels…

1 … en ordonnant des nombres réels

2 … en comparant différentes écritures de nombre et systèmes de numération

3 … en découvrant quelques nombres irrationnels (pi, racine de 2,…)

MSN 33 – Résoudre des problèmes numériques et algébriques

a … en reconnaissant les caractéristiques mathématiques d'une situation et en la traduisant en écritures numérique ou littérale

b … en observant comment les hommes ont résolu historiquement des problèmes de ce type

c … en utilisant des propriétés des opérations (+, -, x, :, puissance, racine carrée et cubique)

Progression des apprentissages

9ᵉ année	10ᵉ année	11ᵉ année
Calculs		
Connaissance et utilisation des priorités des opérations (y compris parenthèses)		
Connaissance et utilisation des propriétés des opérations pour organiser et effectuer des calculs de manière efficace et pour donner des estimations : 7 a c		
– addition, soustraction, multiplication, division		
	– puissances (a, b, m et n dans ℕ) : **Niv. 2 I 3** $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $a^m : a^n = a^{m-n}$ $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$	– racines carrées (cubiques), y compris extraction d'entiers (a et b dans ℕ) : **Niv. 3** $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $\sqrt{a^2 \cdot b} = a \cdot \sqrt{b}$
Utilisation de procédures de calcul réfléchi ou de calcul mental avec des : 7 c		
– nombres rationnels positifs sous forme décimale (+ , - , · , :)		
	– nombres rationnels sous forme décimale (+ , - , · , :) **Niv. 2 I 3**	
	– nombres entiers relatifs de - 100 à + 100 (+) **Niv. 1**	– nombres entiers relatifs de - 100 à + 100 (+ , - , · , :) **Niv. 1**
– nombres entiers relatifs de - 100 à + 100 (+ , -, ·, :) **Niv. 2 I 3**		
	– nombres rationnels positifs sous forme fractionnaire (+ , -) **Niv. 2**	– nombres rationnels positifs sous forme fractionnaire (+ , - , · , :) **Niv. 2**
– nombres rationnels positifs sous forme fractionnaire (+ , -) **Niv. 3**	– nombres rationnels positifs sous forme fractionnaire (+ , - , · , :) **Niv. 3**	
	– des carrés parfaits pour en extraire la racine	
Utilisation des algorithmes pour effectuer des calculs de façon efficace avec des : 7 c		
– nombres rationnels positifs, sous forme décimale, inférieurs à 10'000, ayant au plus deux décimales (+ , - , · , :)		
	– nombres rationnels positifs sous forme fractionnaire (+ , -) **Niv. 1 I 2**	– nombres rationnels sous forme fractionnaire (+ , - , · , :) **Niv. 1 I 2**
– nombres rationnels positifs sous forme fractionnaire (+ , -) **Niv. 3**	– nombres rationnels sous forme fractionnaire (+ , - , · , :) **Niv. 3**	

ANNEXE 3 – RÉSEAU DES OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

	Espace	*Nombre*	*Opérations*	*Grandeurs et mesures*
Premier cycle	**MSN 11** Explorer l'espace… **Mathématiques**	**MSN 12** Poser et résoudre des problèmes pour construire et structurer des représentations des nombres naturels… **Mathématiques**	**MSN 13** Résoudre des problèmes additifs… **Mathématiques**	**MSN 14** Comparer et sérier des grandeurs… **Mathématiques**
Deuxième cycle	**MSN 21** Poser et résoudre des problèmes pour structurer le plan et l'espace… **Mathématiques**	**MSN 22** Poser et résoudre des problèmes pour construire et structurer des représentations des nombres rationnels… **Mathématiques**	**MSN 23** Résoudre des problèmes additifs et multiplicatifs… **Mathématiques**	**MSN 24** Utiliser la mesure pour comparer des grandeurs… **Mathématiques**
Troisième cycle	**MSN 31** Poser et résoudre des problèmes pour modéliser le plan et l'espace… **Mathématiques**	**MSN 32** Poser et résoudre des problèmes pour construire et structurer des représentations des nombres réels… **Mathématiques**	**MSN 33** Résoudre des problèmes numériques et algébriques… **Mathématiques**	**MSN 34** Mobiliser la mesure pour comparer des grandeurs… **Mathématiques**

Modélisation	*Phénomènes naturels et techniques*	*Corps humain*	*Diversité du vivant*	
MSN 15 Représenter des phénomènes naturels, techniques ou des situations mathématiques **Mathématiques / Sciences de la nature**	**MSN 16** Explorer des phénomènes naturels et des technologies… **Sciences de la nature**	**MSN 17** Construire son schéma corporel pour tenir compte de ses besoins… **Sciences de la nature**	**MSN 18** Explorer l'unité et la diversité du vivant… **Sciences de la nature**	Premier cycle
MSN 25 Représenter des phénomènes naturels, techniques, sociaux ou des situations mathématiques **Mathématiques / Sciences de la nature**	**MSN 26** Explorer des phénomènes naturels et des technologies à l'aide de démarches caractéristiques des sciences expérimentales… **Sciences de la nature**	**MSN 27** Identifier les différentes parties de son corps, en décrire le fonctionnement et en tirer des conséquences pour sa santé… **Sciences de la nature**	**MSN 28** Déterminer des caractéristiques du monde vivant et de divers milieux et en tirer des conséquences pour la pérennité de la vie… **Sciences de la nature**	Deuxième cycle
MSN 35 Modéliser des phénomènes naturels, techniques, sociaux ou des situations mathématiques **Mathématiques / Sciences de la nature**	**MSN 36** Analyser des phénomènes naturels et des technologies à l'aide de démarches caractéristiques des sciences expérimentales… **Sciences de la nature**	**MSN 37** Analyser les mécanismes des fonctions du corps humain et en tirer des conséquences pour sa santé… **Sciences de la nature**	**MSN 38** Analyser l'organisation du vivant et en tirer des conséquences pour la pérennité de la vie… **Sciences de la nature**	**Troisième cycle**

EVOLUTIONS CURRICULAIRES ET CONCEPTIONS SOUS-JACENTES À L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES EN TUNISIE

Une étude de cas dans le cadre des tables rondes EMF2012 – *Evolutions curriculaires récentes dans l'enseignemnt des mathématiques de l'espace francophone*

Hikma SMIDA* – Sonia BEN NEJMA** – Faten KHALLOUFI-MOUHA**

I. INTRODUCTION

Depuis son indépendance, en mars 1956, la Tunisie a connu cinq grandes réformes de son système éducatif (1958, 1968, 1978, 1993 et 2002), dans lesquelles l'enseignement des mathématiques a subi plusieurs transformations. Chacune de ces réformes se caractérise par des enjeux et un contrat social spécifiques, au vu du contexte socio-économique et culturel du pays. De même que chacune de ces réformes s'est trouvée confrontée à des difficultés d'implantation spécifique, menaçant la rupture du contrat social. Ce qui a nécessité des régulations et parfois même des modifications fondamentales qui ont eu un impact certain sur la réforme suivante. Dans la première partie de ce travail, nous tenterons de dégager les processus de design curriculaire, en focalisant sur les réformes de 1993 et 2002. Dans la deuxième partie, nous nous intéresserons à certaines conceptions sous-jacentes aux domaines de l'algèbre dans la transition collège/lycée.

II. LE DESIGN CURRICULAIRE

Dans cette partie, nous répondrons aux questions suivantes :

- Quels sont les éléments du contrat social de chaque réforme?
- Quels sont les acteurs des réformes? et avec quelles responsabilités et quels rôles ?
- Comment les processus de développement et d'implantation du curriculum sont-ils conçus ? Quels sont les modes d'accompagnement dans sa mise en place ? Quels sont les modes de régulation éventuellement existants ?
- Quels sont les points forts et les points faibles de chaque design curriculaire ?
- Quelles évolutions voit-on apparaître, pour dépasser notamment les modèles habituels « top-down », pour mieux prendre en charge les spécificités culturelles et la diversité des contextes sociaux ?

1. Les réformes de 1958, 1968 et 1978

S'inscrivant dans une étape de reconstruction nationale, la réforme de 1958 était fondée sur trois principes : unification de l'enseignement[1], égalité des chances[2] et conception d'un enseignement moderne, en conformité avec les tendances internationales[3]. L'enjeu principal de la réforme de 1958 était de combattre l'analphabétisation et de contribuer à former les futurs cadres du pays. L'enseignement des mathématiques a eu une double mission. Il

* Université El Manar – Tunisie – Hikma.Smida@minedu.edunet.tn ou Hikma.Smida@ipest.rnu.tn
** Faculté des sciences de Bizerte – Tunisie – sonianejma@yahoo.com, fkhalloufi@yahoo.fr

[1] Avant cette période coexistaient trois systèmes d'enseignements : français, tuniso-français et coranique.
[2] En instaurant un enseignement obligatoire, gratuit et mixte.
[3] Notamment quant aux méthodes pédagogiques.

© Smida H., Ben Nejma S, Khalloufi-Mouha F. (2012) Evolutions curriculaires et conceptions sous-jacentes à l'enseignement des mathématiques en Tunisie – Une étude cas dans le cadre des tables rondes EMF2012 : évolutions curriculaires récentes dans l'enseignement des mathématiques de l'espace francophone. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (Plénières, pp. 127–141). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

s'agissait, au primaire, d'accorder une place prépondérante au calcul[4] en vue de permettre à l'élève[5] de s'intégrer dans l'activité sociale ; au secondaire, de présenter un enseignement mathématique, offrant des opportunités de développer certaines attitudes telles que l'autonomie, la prise d'initiative ou encore la rigueur. L'enjeu d'un tel enseignement était de munir la majorité des apprenants de moyens leur permettant d'affronter leur vie de citoyens ou de poursuivre des études supérieures.

La réforme de 1958 a été mise en place par une commission, désignée par le ministère de l'éducation et de l'enseignement supérieur, composée des universitaires ayant une activité au sein de l'association tunisienne des sciences mathématiques (ATSM), en collaboration avec les inspecteurs de mathématiques[6] et quelques enseignants. En plus de la conception des programmes, cette commission a mis en place un processus d'implantation, notamment en termes d'outils d'enseignement et de formation des enseignants. Ce qui s'est traduit par l'élaboration de manuels tunisiens uniques écrits par des professeurs et des inspecteurs. Dans ces manuels, l'accent était particulièrement mis sur la résolution de problèmes mathématiques ou de la vie quotidienne. Signalons aussi qu'une attention particulière a été portée sur l'habillage des problèmes en lien avec l'environnement, notamment concernant l'égalité des genres, l'équité sociale, le respect d'autrui, ou encore l'amour de la patrie. L'implantation de la réforme a été accompagnée de la mise en place de processus de formations initiale et continue des enseignants, donnant lieu à deux populations d'enseignants. L'une constituée de diplômés des écoles normales d'instituteurs (ENI) et de l'école normale supérieure[7] (ENS), ayant bénéficié d'une formation initiale en pédagogie théorique et pratique (stages, visites témoins dans les classes, leçons); l'autre constituée de diplômés de l'université ayant bénéficié d'une formation continue assurée par les inspecteurs et les conseillers pédagogiques, le modèle de référence étant celui des normaliens.

Malgré les conditions difficiles en termes de ressources humaines[8] et d'infrastructure, la réforme de 1958 s'est caractérisée par la convergence des attentes de ses différents acteurs : institutions, enseignants, apprenants et parents. Les moyens financiers et politiques mis en place pour la réforme et son implantation étaient considérables.

Les enseignants de mathématiques, dont la profession était hautement valorisée et qui bénéficiaient d'une grande considération sociale, faisaient totalement confiance à l'institution et à ses choix. De ce fait, ils ont grandement contribué au succès de cette réforme dont l'enjeu essentiel, rappelons–le, était de favoriser l'édification d'une nation moderne et ouverte sur le progrès.

La réforme de 1968

Au milieu des années 60, à l'instar de plusieurs autres pays, l'enseignement traditionnel des mathématiques en Tunisie a été remis en cause dans son contenu comme dans ses méthodes, et ce par les universitaires, avec une adhésion quasi totale de la part des inspecteurs et des enseignants.

[4] Lequel, se faisait en arabe dans les trois premières années.

[5] Pour ceux qui arrêteront leur scolarité à ce niveau.

[6] En nombre très réduit.

[7] En 1958, on comptait 106 enseignants issus de l'ENS (et 241 enseignants provenant de l'ENI).

[8] En 1958, on comptait 5358 enseignants du primaire (dont 590 étrangers) pour 320362 apprenants (les besoins réels étant de 20000 enseignants), et 1268 enseignants du secondaire et de l'enseignement professionnel (dont 428 étrangers) pour 32934 élèves. En 1962, le nombre d'enseignants tunisiens a augmenté de 70%.

La commission chargée des programmes, qui était composée d'universitaires connus pour leur activité au sein de l'ATSM, d'inspecteurs et d'enseignants, n'a eu aucune difficulté à imposer un programme de mathématiques directement issu de l'école bourbakiste dont les idées majeures étaient : structures, formalisme, abstraction, utilisation des quantificateurs. Alors que les textes continuaient de privilégier la résolution de problèmes dans le primaire, cette activité disparut du secondaire laissant place à l'apprentissage de mécanismes opératoires, de formalisme et d'automatisme. Il s'agissait pour l'enseignement secondaire de :

> substituer à l'enseignement pratique et concret, des notions sur les ensembles et les opérations adjointes, de développer la capacité d'abstraction et de se restreindre à un référentiel purement mathématiques. (Programmmes de 1958)

Les manuels scolaires ont été réécrits conformément aux nouveaux contenus et aux nouvelles tendances pédagogiques et la politique de formations initiale et continue des enseignants a été modifiée dans ce sens.

Les enseignants ont parfaitement adhéré aux principes de la réforme. Ayant suivi eux-mêmes un enseignement universitaire conforme aux mathématiques modernes, la réforme leur permettait de reproduire en classe le rapport au savoir qu'ils avaient acquis. Adoptant pour la plupart d'entre eux des stratégies d'enseignement magistral, ils ont ignoré les difficultés d'apprentissage en les laissant totalement à la charge des apprenants. Ce qui a induit une rupture du contrat social, dans la mesure où un grand nombre d'élèves a été privé d'un enseignement des mathématiques adapté. En fait, la réforme de 1968 est l'une des plus élitistes de l'histoire de l'enseignement tunisien des mathématiques : les pourcentages de réussite sont passés de 40% à 26% en 6ème année primaire, de 55% à 40% pour les baccalauréats sciences et techniques, de 72% à 36% pour le baccalauréat économie. Fait parfaitement significatif, le pourcentage de réussite en terminale mathématiques n'a pratiquement pas varié, se maintenant à environ 70%.

La réforme de 1978

Les finalités de la réforme 1978 s'appuyaient sur des idées forces telles que :

> favoriser l'adéquation des programmes avec la vie et la civilisation moderne, réaliser l'ouverture de l'école sur l'environnement, valoriser l'éducation manuelle et technologique dès l'école primaire. (Programmmes de 1978)

En plus de s'inscrire dans les finalités générales, l'enseignement des mathématiques devait répondre à la nécessité urgente de stopper la dérive élitiste.

La réforme de 1978 se caractérise fondamentalement par le changement dans la composition de la noosphère chargée de la conception des programmes et de leur implantation. En effet, l'époque des années 80 est caractérisée par l'hégémonie des inspecteurs de mathématiques sur tout ce qui est questions vives de l'enseignement dans le primaire et secondaire (conception des programmes, des manuels et formation continue). Plusieurs raisons peuvent expliquer ce phénomène :

- La communauté des inspecteurs s'est considérablement renforcée en nombre.
- La communauté des universitaires est devenue de plus en plus accaparée par les questions de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique.
- Des divergences profondes quant aux choix institutionnels d'ordre épistémologique, didactique et pédagogique sont apparues entre les deux communautés. En effet, alors que les inspecteurs, parfaitement conscients de la dérive induite par l'enseignement des mathématiques modernes, défendaient la nécessité de tempérer l'apport de l'axiomatique, le retour de l'enseignement de la géométrie classique et l'adoption d'une pédagogie active

centrée sur l'apprenant, les universitaires continuaient d'appeler à un enseignement magistral et théorique, conforme à celui du supérieur.

Ce clivage entre les deux communautés constitue à notre avis l'une des grandes failles de la réforme de 1978. En effet, malgré la mise en place de tout un programme de formation continue axé sur l'enseignement de la géométrie classique (non enseignée à l'université) et sur les stratégies de pédagogie active, les inspecteurs ne sont arrivés ni à convaincre les enseignants de l'efficacité des nouvelles méthodes pédagogiques, ni à changer leurs représentations par rapport aux mathématiques à enseigner. Il en a alors découlé un malaise profond qui perdure jusqu'à nos jours. D'une part, l'institution exigeait l'efficacité, la conformité aux finalités fixées et un rendement satisfaisant les besoins socioéconomiques, d'autre part, les enseignants, soumis à une obligation incontestable de résultats, exprimaient leur crainte de la dévalorisation de la discipline et s'érigeaient en défenseurs d'un enseignement fondamental et "au niveau". Les élèves, quant à eux, subissaient l'impact de la divergence de point de vue entre l'institution et les enseignants.

2. *La réforme de 1993*

Finalités

La réforme de 1993 a fixé ses finalités sur la base de l'égalité des chances et en regard d'un enseignement de masse[9]. L'événement majeur de cette réforme a été d'instaurer une école de base, dispensant un enseignement obligatoire de six à seize ans et dans laquelle l'enseignement des disciplines scientifiques est dispensé en arabe. Selon les textes de la réforme, l'école est

> destinée à permettre l'acquisition d' un ensemble de connaissances, de capacités cognitives et un savoir-faire pratique en vue de réaliser l'équilibre dans l'éducation des jeunes générations entre les diverses matières d'enseignement, de sorte que les intérêts portés aux sciences, aux humanités, à la technique, à la dextérité manuelle ainsi qu'aux dimensions cognitives, morales, affectives et pratiques soient équivalentes.

Dans ce contexte, l'enseignement des mathématiques devait répondre à deux enjeux principaux : placer l'élève au centre de l'apprentissage et offrir une formation à tous les élèves via la résolution de problèmes.

Design curriculaire

Les programmes ont été conçus par des commissions sectorielles disciplinaires, désignées par le ministère de l'éducation et constituées d'inspecteurs du primaire, du secondaire, et de quelques universitaires choisis selon des critères implicites tels que l'intérêt qu'ils portent aux questions vives de l'enseignement, ou leur contribution à la formation des enseignants. La commission sectorielle de mathématiques qui était dirigée par Mahdi Abdeljaouad, s'est réunie de façon régulière pendant environ une année. Les discussions concernaient les contenus à enseigner, les approches pédagogiques à adopter, la langue d'enseignement et les transitions entre les cycles. Parallèlement, des sous-commissions travaillaient sur les programmes spécifiques à chaque cycle et rendaient compte à la commission. En plus de la conception des programmes, les sous-commissions étaient chargées de valider les cahiers de charge relatifs à la conception des manuels.

[9] En 1995, le taux de scolarisation est passé à 92%. Le nombre des élèves dans le primaire est égal à 1460000 et celui des élèves du secondaire est égal à 725926, ce qui correspond à 25% de la population totale.

Les programmes étaient conçus sur la base d'une pédagogie par objectifs dans laquelle l'élève est au centre de l'apprentissage, l'enseignant étant appelé à le guider dans la construction de son savoir. De plus, ces programmes qui retiennent la résolution de problèmes comme objet d'apprentissage, étaient rédigés dans un document comportant trois colonnes : une colonne relative au contenu, une colonne relative aux objectifs et une colonne comportant des commentaires spécifiant les résultats à admettre ou à démontrer, ou encore les limites à ne pas dépasser lors de l'enseignement de certaines notions. Par exemple, concernant l'étude des équations, on trouve les commentaires ci-dessous :

> On n'exigera pas de la part des apprenants, de résoudre des équations comportant une valeur absolue ou un paramètre.

La réforme de l'enseignement des mathématiques de 1993 s'est caractérisée par une rupture totale avec les mathématiques modernes. L'enseignement de l'algèbre linéaire y a été supprimé, ainsi que le recours aux quantificateurs et au formalisme. L'enseignement de la géométrie analytique a été réduit de façon notable au profit de la géométrie traditionnelle du plan et de l'espace. En particulier, l'étude des isométries de l'espace a été instaurée en terminale section mathématique. L'enseignement de l'algèbre qui commençait dès le début de la 8$^{\text{ème}}$ année est devenu plus proche d'une algèbre élémentaire traditionnelle, avec une volonté des concepteurs d'amorcer une approche de l'algèbre qui semblait s'organiser autour de sa dimension « outil ». Par exemple, l'enseignement des équations du premier degré ne faisait plus l'objet d'une étude théorique, l'enjeu étant la « mise en équation » dans la résolution de problèmes.

> Pour la résolution de tout problème, on dégagera nettement les différentes phases : choix de l'inconnue ou des inconnues, mise en équation, résolution de l'équation ou du système d'équations, vérification et interprétation des résultats (programme officiel p.9).

Implantation et formation

Dans le cas de la réforme de 1993, les processus d'implantation et d'accompagnement des nouveaux programmes étaient sous la responsabilité des inspecteurs. Les nouveaux programmes et manuels étaient accompagnés de documents d'accompagnement et de directives, écrits par les inspecteurs et/ou des enseignants. Signalons que ces documents d'accompagnement donnaient souvent lieu à des formations continues nationalisées et standards, assurées par les inspecteurs ou les conseillers pédagogiques.

Régulation

Dès le début de l'implantation, une grande résistance est apparue chez les enseignants. Non satisfaits de la réduction du volume horaire et des changements profonds, notamment ceux qui concernent l'axiomatique, le formalisme et l'algèbre linéaire, ces derniers ont protesté contre la longueur des programmes et leur inaccessibilité à la plupart des élèves.

Tentant de pallier à la situation, le ministère de l'éducation, qui avait entre temps changé de ministre, a chargé une autre commission de procéder à des réaménagements. En réalité, ces réaménagements ont consisté à tronquer certains contenus à enseigner. A titre d'exemples, les « allégeurs » ont supprimé la géométrie dans l'espace et les statistiques pour le baccalauréat mathématiques. Les manuels ont été aussi « allégés », à l'exception du manuel de la première année du lycée qui a été totalement réécrit.

Cette démarche, politique disons-le, a été à l'origine d'une grande crise de confiance qui perdure jusqu'à nos jours. Tout d'abord, le fait de ne pas avoir eu recours à la commission d'origine pour le réaménagement des programmes consistait en un désaveu de la part du ministère des choix de cette dernière. De plus, la précipitation des responsables à ordonner des suppressions de contenus a donné l'impression aux acteurs sociaux que l'institution manquait de vision et de stratégie quant à ses choix.

Aucune réflexion n'a été engagée sur les véritables raisons de la résistance des enseignants à la réforme proposée. En réalité, l'école tunisienne faisait face à une véritable explosion démographique[10], donnant lieu à une population hétérogène d'élèves et à des contextes de plus en plus difficiles dans les classes. De plus, faute d'une stratégie de formations initiale et continue pertinentes et efficaces, les enseignants étaient complètement démunis. Il en a résulté que l'apprentissage de l'activité mathématique est resté, la plupart du temps, au premier niveau, la tâche de l'élève se réduisant soit à appliquer des recettes par automatisation, soit à reproduire un raisonnement algorithmique. Quant à la résolution de problèmes, fixée par les programmes comme objet d'apprentissage, elle a consisté en un entraînement de l'apprenant à reproduire des réponses à des problèmes familiers et récurrents. Cet état des lieux a été confirmé par les résultats des évaluations internationales, dans lesquelles les élèves tunisiens ont eu des performances très faibles.

3. La réforme de 2002

Finalités

La réforme de 2002 s'inscrit dans un nouveau contrat social. Il s'agit pour l'école tunisienne, appelée Ecole de Demain, de

> former un citoyen qui apprend à apprendre, à agir, à être et à vivre avec les autres [11].

Pour ce faire, l'école tunisienne est appelée à

> […] assurer aux apprenants une formation solide, équilibrée, multidimensionnelle, et les aider à maîtriser les savoirs et à acquérir les compétences qui les préparent à apprendre tout au long de la vie[12]." L'intégration des TICE dans l'apprentissage constitue un choix stratégique : « les programmes accordent l'intérêt qui se doit à l'entraînement des apprenants à l'utilisation des technologies de l'information et de la communication comme moyen d'accès au savoir et outil de l'auto formation[13].

Dans ce contexte, les enseignements des mathématiques et des sciences se trouvent attribués les missions de développer des compétences de raisonnement, de résolution de problèmes et de modélisation.

> Les mathématiques et les sciences sont enseignées dans le but de permettre aux élèves de maîtriser les différentes formes de la pensée scientifique, de les exercer à l'usage des modes de raisonnement et d'argumentation, de les doter de compétences de résolution des problèmes et d'interprétation des phénomènes naturels et des faits humains.[14]

Design curriculaire

En 2000, le processus du design curriculaire diffère des réformes précédentes, dans la mesure où a été nommée une commission du programme des programmes chargée de définir les finalités du système éducatif qui formeront un cahier de charges pour les commissions chargées ensuite de l'écriture des programmes. Dans cette première commission constituée d'inspecteurs, d'universitaires mais en moins grand nombre et élargie à des intellectuels au sens large[15], différents champs disciplinaires sont représentés. C'est à son niveau que se sont

[10] En 1995, le taux de scolarisation est passé à 92%. Le nombre des élèves dans le primaire est égal à 1460000 et celui des élèves du secondaire est égal à 725926, ce qui correspond à 25% de la population totale.
[11] La nouvelle réforme du système éducatif tunisien. Programme pour la mise en œuvre du projet. " Ecole de demain ". (2002 – 2007).
[12] Loi d'orientation de l'éducation, juillet 2002.
[13] Idem.
[14] Idem.
[15] Choisis selon leurs contributions à la réflexion sur les systèmes éducatifs.

effectuées les négociations et prises de décisions sur les profils de sortie à l'issue de l'enseignement secondaire, la répartition des heures entre disciplines, les modes d'évaluation, en fait toute l'infrastructure curriculaire. La commission a de plus rédigé un cahier de charge précis sur les profils de sortie attendus exprimés en termes d'aptitudes et de compétences transversales, pour les commissions chargées de l'écriture des programmes. Suite à cela, des commissions multidisciplinaires (sciences, langues, sciences humaines, art), formées par des inspecteurs et quelques universitaires, ont été constituées et ont élaboré les compétences transversales par champ disciplinaire. La commission des sciences a retenu six compétences transversales : pratiquer une démarche scientifique, communiquer dans un langage approprié, résoudre des problèmes, organiser et analyser l'information, intégrer les TICE, apprécier la contribution des sciences. Enfin, des commissions disciplinaires ont été chargées d'écrire les programmes, sur la base de ces compétences transversales. Signalons qu'à la demande des inspecteurs, les commissions disciplinaires étaient formées uniquement d'inspecteurs, à l'exception du coordonateur qui est un universitaire. Cette restriction est essentiellement due aux divergences profondes existant entre les universitaires et les inspecteurs.

Pour écrire les curricula, la commission de mathématiques a d'abord procédé à l'étude comparative des programmes de certains pays dont l'Australie, le Canada, Chypre, la France, la Jordanie, la Malaisie et Singapour, ainsi qu'à une étude des principaux dysfonctionnements des performances des élèves tunisiens participants aux évaluations TIMSS et PISA.

L'une des ambitions majeures de la réforme de 2002 était de concevoir un enseignement de mathématiques pour tous, favorisant l'acquisition chez l'apprenant de compétences lui permettant d'affronter la vie active. C'est dans ce contexte que l'on constate des enjeux majeurs d'apprentissage tels que l'enseignement des statistiques à tous les niveaux d'enseignement du collège et du lycée, l'initiation aux phénomènes aléatoires dès le début de la scolarité, l'enseignement du calcul approché et des notions d'ordre de grandeur, l'articulation entre différents registres numérique, graphique, algébrique, etc., la résolution de problèmes reliés à des thèmes de la vie sociale et d'environnement et l'intégration dans l'apprentissage de l'usage des calculatrices et des logiciels d'enseignement, l'enjeu principal de ces choix étant de favoriser le développement de compétences de raisonnement, de résolution de problèmes, de traitement des données, d'utilisation des TICE et de communication.

Implantation et Accompagnement

A partir de 2000, il n'y a plus eu de documents d'accompagnement pédagogiques unifiés. Les principales raisons exprimées par l'institution étaient qu'il fallait adapter les formations aux besoins locaux qui pouvaient être sensiblement différents d'un contexte à un autre et favoriser le développement professionnel chez l'enseignant. Par conséquent, chaque inspecteur est censé identifier les besoins spécifiques des enseignants dans sa région et définir les moyens d'y répondre. Toutefois, il existe au niveau national des réunions de concertation gérées par un inspecteur coordonateur désigné par l'ensemble des inspecteurs de la discipline, et qui ont lieu environ trois fois par an. Ces réunions sont censées permettre aux inspecteurs de faire le point sur les problèmes rencontrés par les enseignants qu'ils accompagnent (concernant les notions à enseigner, l'utilisation des manuels, l'évaluation, ou encore les difficultés des élèves), afin de permettre la mise en place de stratégies communes et cohérentes de formation et d'accompagnement. Malheureusement, la forte augmentation du nombre des inspecteurs[16] et les nouveaux modes de recrutement de ce corps[17] ont généré une grande hétérogénéité,

[16] Ce corps a triplé sur les 5 dernières années.
[17] Les nouveaux inspecteurs font une formation de deux années, alors que les anciens sont inspecteurs dès leur réussite au concours.

laissant apparaître des conflits susceptibles de porter un grand préjudice à l'enseignement des mathématiques. Dans tous les cas, il nous a été impossible de trouver des documents qui explicitent les besoins locaux, ou encore le contenu des formations dispensées.

Régulation

Comme dans le cas de la réforme de 1993, la réforme de 2002 a été confrontée à une grande résistance de la part des enseignants. Encore une fois, l'absence de stratégies claires de formation et de ressources (documents d'accompagnement, livres du professeur, logiciels, etc.) est à l'origine des difficultés rencontrées par les enseignants. Malgré une évolution nette des mentalités, il semble encore difficile aujourd'hui de faire inclure dans l'enseignement par les professeurs de mathématiques des exercices reliés à des thèmes de la vie sociale, des questions d'environnement, ou en lien avec les autres disciplines. En fait, les enseignants les mieux intentionnés se contentent de faire travailler les élèves sur des problèmes contextualisés. Le problème d'implantation se pose également pour l'enseignement du calcul approché. En effet, la majorité des enseignants reste convaincue que le calcul approché n'est pas une priorité dans l'enseignement des mathématiques actuelles, sachant que les conditions sociales des élèves ne leur permettent pas d'avoir des calculatrices scientifiques.

Conclusion

L'étude des processus de design curriculaire en Tunisie montre une tradition top-down et une tendance à la décentralisation qui modifie elle aussi sans aucun doute certaines caractéristiques du mécanisme de régulation en le rendant plus local. De plus l'évolution des compositions des commissions laisse apparaître plusieurs indicateurs de changements tels qu'une participation de plus en plus importante des inspecteurs dans la conception des programmes et une volonté institutionnelle d'une vision pluridisciplinaire pour définir les finalités et les compétences transversales. Toutefois, il est important de souligner la présence de difficultés importantes d'implantation dues notamment au manque de coordination avec les enseignants.

III. PRATIQUES MATHEMATIQUES SPECIFIQUES, UN EXEMPLE AVEC L'EVOLUTION DES PRATIQUES ALGEBRIQUES DANS LE CONTEXTE TUNISIEN

1. Introduction

Un curriculum d'enseignement est une des manifestations les plus évidentes, voire la plus évidente, d'un projet de société en matière d'éducation. Cela implique en particulier que l'on ne fasse pas l'impasse sur la question du profil de sortie de l'élève. Ce profil pose des questions essentielles, et en particulier les questions suivantes : Quels types de contenus souhaite-t-on véhiculer ? Quelle importance donne-t-on aux savoir-être (autonomie, citoyenneté,...), par rapport aux connaissances et aux savoir-faire ? En particulier, quelle est l'importance relative des acquis qui permettent à l'élève de continuer sa scolarité, et ceux qui lui permettent de s'insérer dans la vie active ? La définition du profil attendu est très importante, car celui-ci conditionne toute une série de choix institutionnels et organisationnels relatifs au déroulement de la scolarité.

Dans le cadre de cette intervention, nous nous intéressons au profil de sortie de l'élève en fin d'enseignement de base. Cette transition au cours secondaire tunisien est marquée entre-autres par de nouveaux apprentissages fondamentaux parmi lesquels le développement du raisonnement algébrique occupe une place importante. Ce niveau d'enseignement représente non seulement un moment de transition entre « enseignement de base et enseignement secondaire », mais également l'année où s'effectue pour les élèves une première orientation vers les filières scientifiques, littéraires, etc. Dans ce cadre, bon nombre de connaissances développées antérieurement vont nécessiter un réajustement important dont une confrontation à approcher la résolution de problèmes différemment.

Cette approche du profil attendu nous semble intimement liée au « contrat social » puisqu'elle permet d'interroger les finalités qui caractérisent l'enseignement des mathématiques en général et celui de l'algèbre en particulier.

Nous commençons notre présentation par un cadrage historique qui permet de cerner les évolutions de l'enseignement de l'algèbre au fil des réformes de l'enseignement tunisien.

2. *Un éclairage historique sur l'enseignement de l'algèbre au fil des réformes*

Concrètement, les époques considérées dans cette étude correspondent à des réformes successives de l'enseignement secondaire tunisien dont les caractéristiques générales ont été évoquées dans la première partie de l'article.

- La réforme de 1958 : La période « classique » (Programmes de 1958- 1968).
- La réforme de 1968 : La période de la « réforme » des mathématiques modernes (1968-1978).
- La réforme de 1978 : La période de la « contre-réforme » (Programmes de 1978-1991).
- La réforme de 1993 : La période de la réforme «de base» (Programmes de1993-2002).
- La réforme de 2002 : La période actuelle (entrée en vigueur en 2004).

Pour chaque réforme, Nous menons une analyse du programme d'algèbre et du manuel officiel correspondant. Notons que dans le contexte tunisien, il existe un manuel officiel unique qui s'avère dans tous les cas la principale référence « à suivre » pour les enseignants, si ce n'est la seule. Nous interrogeons plus particulièrement, le rapport institutionnel à l'algèbre dominant pour chaque période ainsi que la manière dont les pratiques algébriques évoluent au fil des réformes successives. En quoi notamment, ces évolutions de pratiques représentent-elles des indicateurs de changement du « contrat social »?

Durant *la période classique* (Programmes des années 1958-1968), l'approche d'enseignement de l'algèbre est essentiellement équationnelle avec une articulation entre les deux domaines arithmétique et algèbre qui offre la possibilité d'un « retour au concret » au fil d'un corpus de problèmes « concrets » ou pseudo-concrets à étudier tant par l'arithmétique que par l'algèbre. Nous relevons une étude assez approfondie des objets algébriques mobilisés, avec un travail de la technique abondant.

La réforme des mathématiques modernes (Programmes des années 1970- 1978) se caractérise par une approche essentiellement « structurelle » des mathématiques, les objets algébriques étant introduits dans un contexte formel et ensembliste, avec l'accent mis sur une théorie mathématique « forte ». Mais si les techniques de résolution sont fortement mises en avant par un important discours s'appuyant sur les notions de fonction et d'application (dont on peut penser qu'il reste essentiellement à la charge de l'enseignant) pour les légitimer d'un point de vue théorique, le travail à proprement parler de ces techniques paraît nettement appauvri. Notons que dans ce contexte le cadre graphique n'apparaît qu'en aval du cadre algébrique, à titre « illustratif » (pour illustrer des éléments de la théorie).

Durant la *« contre-réforme » (*Programmes des années 1978-1988*),* le discours théorique ensembliste typique de la période des mathématiques modernes autour de la résolution algébrique prend une autre forme : on intègre la géométrie analytique pour « donner corps » à ce discours, afin qu'il ne paraisse plus aussi abstrait. Le symbolisme lié à la théorie des ensembles reste toutefois très présent. La mise en équation n'est pas totalement évacuée du savoir à enseigner (alors que c'était le cas dans la réforme précédente) ; elle occupe une certaine place à travers la résolution de problèmes concrets et géométriques, étudiés en aval.

Durant la période de la *réforme 1993,* les rapports institutionnels aux objets algébriques sont marqués par une nouvelle perspective d'enseignement : c'est la dimension « outil » de l'algèbre qui devient prépondérante au sein des organisations mathématiques du savoir à enseigner. Cette nouvelle approche se caractérise par le fait que les objets algébriques (équations, inéquations, systèmes d'équations…) apparaissent d'emblée comme des outils de modélisation de situations de la « vie courante ». Mais le travail de modélisation reste limité : il est souvent guidé par la donnée préalable des grandeurs étudiées et désignées par des lettres. Toutefois, il semble bel et bien exister des dialectiques explicites entre registres sémiotiques : arithmétique, algébrique et fonctionnel, qui sont guidées par les énoncés ou les consignes des activités introductives du manuel. Le travail des techniques de résolution algébrique occupe une place relativement importante, tout en s'accompagnant de justifications technologiques explicites et institutionnalisées. Le travail graphique joue un rôle moins important mais il fait l'objet d'un discours technologique explicite en rapport avec les fonctions affines.

IV. LA REFORME 2002 : DES CARACTERISTIQUES RECENTES INDICATRICES D'UN CHANGEMENT DE « CONTRAT SOCIAL »

Avec l'avènement de la réforme 2002, de nouvelles exigences pour l'enseignement des mathématiques, sont préconisées, une réflexion épistémologique sur les contenus des programmes semble s'imposer à la vue d'une algorithmisation des techniques et d'une focalisation sur les aspects calculatoire et formels, au détriment du développement de l'esprit d'analyse et de synthèse dans un contexte de résolution de problèmes et des situations – problèmes :

> A une époque où le volume des connaissances double tous les quinze ans et où les sources du savoir se multiplient et deviennent de plus en plus accessibles, retirant ainsi à l'école son monopole en la matière ; il serait erroné, voire dangereux, de continuer d'inculquer aux élèves des masses de connaissances, dans un nombre considérable de disciplines, à un rythme qui favorise la mémorisation et l'application quasi mécanique des règles et des algorithmes plutôt que la mise en action des processus d'analyse, de synthèse et de résolution des problèmes. (Loi d'orientation de l'éducation, juillet 2002)

Notre analyse fait ressortir des indicateurs de changements tant au niveau des savoirs algébriques à enseigner que du côté des pratiques et des méthodes d'enseignement.

1. Au niveau des savoirs algébriques

Une approche par la modélisation algébrique

La visée des mathématiques actuelles accorde une place importance à la modélisation algébrique dans la construction du savoir. Les rapports institutionnels aux objets algébriques semblent évoluer dans un contexte qui offre des possibilités de disposer d'applications internes et externes aux mathématiques à travers la résolution de problèmes et de situations problèmes. Ces situations mettent en jeu une variété de contextes et une diversification des domaines d'expériences selon une approche à la fois constructiviste et interdisciplinaire des apprentissages. De nombreuses activités proposées dans le manuel officiel mettent en avant une étude simultanée des organisations mathématiques autour de la résolution (qu'elle soit algébrique ou graphique) et de la mise en équation. Ce choix des activités qui « prolifèrent » semblent en grande partie conditionné par les rapports existants entre les mathématiques et d'autres domaines : sciences physique, sciences économiques et sociales.

> A travers des situations familières et non familières, dans des contextes mathématiques ou en rapport avec l'environnement, les élèves approfondiront leur compréhension des concepts mathématiques, intégreront leurs connaissances et leurs habilités dans divers domaines mathématiques pour résoudre des problèmes. De même les élèves développeront leurs aptitudes à utiliser différentes approches de recherche, à élaborer des stratégies de résolution, à modéliser des situations réelles et à persévérer dans leurs efforts. » (Ibid.).

Dans cette perspective d'enseignement, une grande place est accordée à la flexibilité entre les registres de représentations sémiotiques et les cadres mathématiques.

Des dialectiques renforcées entre registres sémiotiques : des dialectiques implicites entre le registre arithmético-numérique et le registre algébrique

L'enjeu de cette approche permettant d'entrer dans un raisonnement de type algébrique n'est pas explicité au niveau des directives du programme officiel mais apparait au fil des activités et des exercices proposés au élèves dans leur manuel officiel : assurer au niveau de l'enseignement une rupture épistémologique entre l'arithmétique et l'algèbre en accordant plus d'importance aux types de tâches qui mettent en jeu les différents statuts des lettres et de l'inégalité, de nouvelles appréhensions des objets de savoir et des modes de résolution de problèmes . Par contraste avec la réforme précédente, l'apprentissage de la résolution de problèmes qui émane d'une volonté explicite dans tout l'enseignement de la discipline n'est plus une affaire d'apprentissage de procédures ou de techniques de résolution, c'est désormais le travail de recherche de l'interprétation adéquate qui prime.

Des dialectiques renforcées entre le registre algébrique et le registre graphique

La nouvelle visée de l'enseignement de l'algèbre accorde une place essentielle au travail graphique, des types de tâches en rapport avec le maniement des différents modes de représentations : tableau de nombres, représentations graphiques et symbolisme algébrique, la lecture graphique ou encore la résolution graphique de problèmes apparaissent systématiquement dans chaque chapitre du manuel officiel. Cette approche semble faire évoluer le rapport aux objets algébriques d'un point de vue « inconnu » vers un point de vue « variable » par le sens donné aux différentes représentations (graphique, équations…) et à leur utilisation « avec flexibilité » pour décrire et interpréter des situations extra-mathématiques. Ce point de vue fonctionnel est d'ailleurs amorcé par la nouvelle imbrication des thèmes d'études équations fonctions et inéquations. Le fait de marquer les interrelations entre fonction et équations peut avoir des effets positifs sur l'acquisition de ces deux notions et permettre de négocier la rupture entre l'arithmétique et l'algèbre selon de nombreux travaux en didactique de l'algèbre. Insister sur ces interrelations dans une telle perspective curriculaire nous semble un enjeu de savoir essentiel dans la mesure où elles contribuent dans les pratiques algébriques à passer d'une conception des équations en terme de quantités connues et de quantités inconnues à une conception en terme de variables dépendante et indépendante, soit de passer du cadre algébrique installé au niveau du collège au cadre fonctionnel nouveau dans le secondaire.

2. Au niveau des pratiques et des méthodes d'enseignement

Un changement dans le rôle des acteurs en classe : l'élève au centre de l'action

Ces changements constatés au niveau du savoir algébrique à enseigner vont de pair avec des évolutions marquées dans l'organisation de l'étude et dans les rôles impartis au professeur et à l'élève dans l'étude. Le manuel officiel de la réforme 2002 montre la volonté délibérée des auteurs de placer l'élève au centre de ses apprentissages. Ainsi d'une organisation de l'étude binaire : « cours » et « exercices », le système d'enseignement est passé à une organisation tertiaire « activité », « cours » et « exercices ». De plus, une nouvelle manière d'enseigner les mathématiques se met en place, centrée sur les activités réservées à l'élève pour introduire une nouvelle notion, propriété ou technique. On retrouve cette nouvelle approche déjà au niveau des objectifs d'enseignement formulés en terme de compétences et de savoir faire (raisonner, résoudre des problèmes, communiquer). On assiste ainsi à un bouleversement dans l'organisation de l'étude qui va dans le sens d'une diminution importante du topos de l'enseignant par l'avènement « d'activités » diverses destinées à l'élève, sans pour autant que, le rôle de l'enseignant dans le choix et la gestion des situations d'enseignement liées à ces « activités » ne soit tout à fait précisé. C'est surtout une nouvelle manière d'enseigner les mathématiques en général qui se met en place et qui vient répondre à des buts sociaux assignés à l'enseignement. La loi d'orientation de l'éducation (2002) confère à l'école les missions suivantes :

> […] assurer aux apprenants une formation solide, équilibrée, multidimensionnelle et les aider à maîtriser les savoirs et à acquérir les compétences qui les préparent à apprendre tout au long de la vie ; à participer effectivement à la vie économique, sociale et culturelle ; et à contribuer à la construction d'une société démocratique, capable de suivre le rythme de la modernité et du progrès. (Loi d'orientation de l'éducation, juillet 2002)

Une visée constructiviste dans la mesure où pour apprendre il faut entrer dans une activité intellectuelle.

La visée actuelle que l'on retrouve dans les programmes semble mettre en avant l'idée que les mathématiques sont des savoir-faire et renvoient à des processus (modéliser, mathématiser, conceptualiser, expliquer, prouver…etc.). Tout d'abord, la place précise de chacun des contenus n'est plus indiquée. De plus, ce sont les compétences mathématiques, verbalisées grosso modo en termes de savoir-faire (résoudre une situation-problème, raisonner mathématiquement, communiquer mathématiquement), qui sont mises au premier plan. Ce sont ces trois compétences qui doivent être travaillées, et elles doivent l'être à travers divers contenus mathématiques qui ne sont pas spécifiés sur le plan de l'importance à accorder à l'un et l'autre, si ce n'est que la liste des contenus à couvrir favorise certains contenus tels l'algèbre au secondaire. On rencontre les mêmes idées que dans le programme précédent, mais de manière toutefois inversée: alors qu'on étudiait les contenus en les travaillant à travers une activité mathématique, maintenant c'est l'idée de l'activité mathématique (résoudre des problèmes, raisonner, communiquer) qui est à réaliser par les contenus. En algèbre, on assiste à une prolifération d'activités qui mettent en avant la mise en équation, en même temps que l'étude des objets algébriques. Ces activités suggèrent effectivement une évolution de l'organisation mathématique enseignée autour de la résolution et une évolution de l'organisation didactique des contenus mathématiques : des contenus par l'activité à l'activité mathématique par les contenus. L'activité mathématique elle-même devient centrale et se mobilise dans un travail sur des contenus divers : les nombres, l'algèbre,… en développant des capacités intellectuelles chez les élèves et en leur offrant plus d'autonomie, parallèlement à l'acquisition de compétences pertinentes, solides et durables :

> L'abandon définitif de méthodes et de pratiques, encore en usage dans nos institutions éducatives, qui poussent à l'accumulation des connaissances, lesquelles sont rapidement oubliées parce que peu susceptibles d'être exploitées à bon escient, au moment opportun, dans des situations authentiques de communication ou de résolution de problèmes. L'alternative aux programmes surchargés de matières, pour l'acquisition desquelles maîtres et élèves engagent chaque année une course vaine, est contestable ment l'approche par compétences qui permet de déterminer, au regard des apprentissages antérieurs et ultérieur les savoirs et les savoir-faire essentiels. (Ibid.)

Un nouveau modèle de professionnalité: l'innovation, l'intégration des TICE

Par contraste avec les réformes précédentes, la réforme 2002 semble donner un sens nouveau à la professionnalisation de l'enseignement et au rôle assigné au professeur dans la conception et la construction de son projet d'enseignement en général. Les programmes vont jusqu'à remettre en question la conception des documents officiels, qui semblent limiter la prise de décision chez l'enseignant et réduire sa marge d'initiative, entraînant une homogénéisation des pratiques et une routinisation contraignante qui stabilise en quelque sorte l'état du système institutionnel et empêche son évolution :

> Le recours systématique à des guides pédagogiques assez contraignants qui, entre autres des effets pervers :
> - ont uniformisé les pratiques enseignantes, à tel point que telle leçon de calcul ou de grammaire, par exemple, était faite le même jour, à la même heure, de la même manière, dans toutes les écoles du pays.
> - ont inhibé progressivement l'esprit d'initiative des enseignants, pour qui bien faire son travail se réduisait à reconduire avec fidélité le contenu des fiches pédagogiques proposées dans le guide du maître.
> Il en a été de même au niveau des établissements dont la multiplication rapide a conduit à la nomination de jeunes directeurs inexpérimentés à qui il fallait expliquer les procédures et montrer la voie à suivre, dans des circulaires détaillées, de plus en plus nombreuses, émanant du Ministère. Le résultat en a été la réduction continue de la marge d'initiative et de manœuvre dans les établissements et, à l'inverse, l'accroissement considérable des prérogatives des structures centrales. Cette situation, qui déresponsabilise les acteurs principaux du système éducatif, a naturellement des incidences négatives sur le fonctionnement de l'institution scolaire, ainsi que sur son rendement. (Ibid.

Ce nouveau curriculum impose sans aucun doute, une réflexion sur les pratiques enseignantes dans le but de promouvoir *un nouveau modèle de professionnalité*. Etant donné qu'on reconnaît à l'élève un rôle actif et réflexif dans ses apprentissages, le rôle de l'enseignant se modifie pour devenir celui d'un guide, d'un accompagnateur qui conduit l'élève au cœur de ses apprentissages. Cette évolution déterminante du rôle de l'enseignant doit transparaître concrètement au niveau de sa pratique selon les nouvelles orientations.

> Recycler, mettre à niveau, actualiser les connaissances des enseignants, initier à de nouvelles approches et techniques pédagogiques ; ce sont là des services essentiels que l'institution doit assurer pour élever le niveau de qualification des enseignants. L'objectif à viser est la professionnalisation progressive du corps enseignant. Des enseignants professionnels, cela veut dire des maîtres qui connaissent à la fois la science et l'art de leur métier ; capables de construire et de mettre en œuvre un projet pédagogique intégrant les spécificités du contexte où ils évoluent ; capables aussi de planifier, d'évaluer, de gérer des situations pédagogiques diverses ; de donner aux élèves le goût d'apprendre ; de réguler leur enseignement à la lumière des diagnostics fréquents qu'ils effectuent. (Ibid.)

Par ailleurs, l'un des soucis de la réforme 2002 est celui de faire évoluer le secteur de la technologie, de l'information et de la communication considéré comme un auxiliaire puissant de l'apprentissage de manière à préparer des élèves à vivre dans une société du savoir qui repose sur les technologies .

> Les formidables ressources que recèlent les nouvelles technologies en termes de savoirs, mais aussi de moyens d'accès direct à ces savoirs, peuvent aider à développer, beaucoup plus rapidement et facilement qu'avec des moyens classiques, des compétences variées de type cognitif, et en particulier méthodologique (savoir chercher une information ; savoir constituer un dossier autour d'un thème donné...) ; et de type socio-affectif (autonomie, curiosité, etc.) ; compétences nécessaires pour forger le profil du sortant de l'école de demain qui allie souplesse d'esprit, capacité d'adaptation, sens de l'initiative et goût de la recherche des solutions inédites et du travail bien fait. (Ibid.)

Cependant, ces technologies de l'information perçus comme des outils puissants mis à la disposition des enseignants requièrent une nouvelle utilisation non seulement comme des technologies de l'information en classe mais aussi des outils de production, de communication et de création. Prendre en compte dans ce modèle de professionnalité du fait qu'elles font partie de l'acculturation d'un nombre important de jeunes à la société actuelle où elles sont omniprésentes.

> A travers des activités numériques, algébriques, géométriques et statistiques, les élèves se familiariseront avec l'outil informatique et développeront leurs aptitudes à utiliser la calculatrice ou des logiciels dans leur travail de recherche, de prospection et de contrôle. De même, les élèves développeront leurs aptitudes à utiliser l'outil informatique comme moyen d'échange et de communication de l'information. (Ibid.)

V. CONCLUSION

Ce travail bien que se focalisant sur des pratiques spécifiques dans le domaine de l'algèbre révèle selon nous, certains indicateurs de changement du contrat social dans le contexte tunisien. Ce sont autant de dimensions à prendre en compte pour opérer ce choix aux multiples enjeux. Le cadrage historique a permis de situer ces changements par rapport à l'évolution de l'enseignement du domaine en général au fil des réformes : la réforme 2002 contrairement aux réformes précédentes fait apparaitre deux finalités liées à l'enseignement des mathématiques en général : une finalité culturelle et une finalité pratique qui prennent toutefois une importance et des couleurs différentes en lien avec les rôles des acteurs et les contenus d'enseignement. Ainsi, la visée pratique des années 1980 n'a plus rien à voir avec la visée pratique des années 1990 et encore moins avec l'époque de la réforme 2002. Mais le pari de la réforme de l'enseignement tunisien à vouloir enrichir l'activité conceptuelle de l'élève, laisse à la charge des enseignants une marge de liberté importante dans la conception, la planification et la construction de son enseignement et donc une grande part d'autonomie dans l'organisation de l'étude, la gestion des savoirs à enseigner et l'utilisation des moyens technologiques. Il nous semble que ce processus de design curriculaire suscite des « réactions » chez les enseignants principaux acteurs de la transposition didactique puisque de nouvelles règles de « contrat social » sont été mises en place sans qu'elles soient explicitées ou accompagnées par des formations initiale et continue spécifiques visant une adaptabilité des pratiques enseignantes au nouveau modèle de la société .Ce sont tous des choix stratégiques, à retenir en fonction d'un projet pour l'école, à l'échelle du pays.

REFERENCES

Bednarz N., Kieran C., Lee L. (1996) *Approaches to Algebra, Perspectives for Research and Teaching.* New-York : Kluwer Academic Publishers.

Ben Nejma S. (2004) *La mise en équations en première année de l'enseignement secondaire Tunisien : Transition collège/Lycée*. Mémoire de DEA de didactique des mathématiques, Université de Tunis.

Ben Nejma S. (2007) Etude des rapports institutionnels aux équations via la mise en équations dans la transition collège lycée. *Actes du colloque international critical analysis of school science textbooks analyse critique des manuels scolaires de science* (Tunisie), 7-10 Février 2007.

Ben Nejma S. (2009) *D'une réforme à ses effets sur les pratiques enseignantes : une étude de cas dans le contexte scolaire tunisien*. Thèse de Doctorat. Université de Tunis et Université Paris-Diderot.

Chevallard Y. (1989) Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège, deuxième partie, perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x* 19, 43-72.

Chevallard Y. (1990) Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège – 3ème partie : voies d'attaques et problèmes didactiques. *Petit x* 23, 5-38.

Drouhard J.-P. (1996) Algèbre, calcul symbolique et didactique. In Noirfalise R, Perrin Glorian M.-J. (Eds.) (pp. 325-344). *Actes de la VIIIe Ecole d'été de didactique des mathématiques* IREM de Clermont Ferrand.

Durand-Guerrier V., Guernier M.-C., Sautot J.-P. (2006) *Interactions verbales, didactiques et apprentissages*. Besançon : Presses universitaires de France-comté.

Duval R. (1993) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitive de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 5, 37-65.

Duval R. (1998) Graphiques et équations : L'articulation de deux registres. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 6, 235-253.

Duval R. (2002) L'apprentissage de l'algèbre et le problème cognitif de la désignation des objets. *Séminaire Franco-Italien de Didactique de l'Algèbre*. SFIDA XIII-Nice, 67-93.

Smida H. (2003) L'enseignement des mathématiques en Tunisie : genèse et destinée. *Actes du colloque EMF 2003.*

Ministère de l'éducation et de la formation, Direction générale des programmes et de la Formation continue, Programmes de mathématiques 1ère & 2ème année secondaire. Disponible sur : http://www.edunet.tn/ressources/reforme/nouv_prog/programmes/sciences/mathematique/math_1_2anne.pdf

Ministère de l'éducation et de la formation, Direction générale des programmes et de la Formation continue, Programmes de mathématique du second cycle de l'enseignement de base Disponible sur :
http://www.edunet.tn/ressources/reforme/nouv_prog/programmes/sciences/mathematique/

DESIGN CURRICULAIRE ET CONTRAT SOCIAL
LE CAS DU BURKINA FASO

Kalifa TRAORE*

Le Burkina Faso (ex Haute Volta) n'a pas une tradition de design curriculaire clairement établie comme c'est le cas d'autres pays. Nous reviendrons dans une première partie sur les tentatives d'évolution curriculaire au Burkina Faso, et sur les orientations qui se dessinent, et dans une seconde partie sur l'insertion ce que l'on a appelé les « thèmes émergents », un des éléments de cette orientation nouvelle, dans les programmes de mathématiques. La volonté prendre en compte des préoccupations de la société dans les programmes de mathématiques nous semble assez significatif du point de vue de l'évolution du contrat social.

I. PROCESSUS DE DESIGN CURRICULAIRE

1. Historique des réformes curriculaires au Burkina Faso

Le Burkina Faso a hérité des programmes français après son indépendance en 1960. Au secondaire, les programmes de mathématiques de 1966 ont été en vigueur dans les classes jusqu'à la fin des années 80. Au primaire, quelques tentatives de réforme (1967, 1974, 1984) visant à introduire notamment les langues nationales dans les programmes ont été mises en œuvre sans succès. L'éloignement de l'école des besoins réels de la société et la faiblesse des taux de rendement interne ont été les principaux motifs de toutes ces réformes. L'inefficacité externe[1] du système éducatif burkinabè conduisait au découragement des populations, ce qui les amenait à un questionnement sur l'utilité de l'école. Une partie de la population était ou est même réticente à scolariser ses enfants. Pire, il arrivait que certaines personnes retirent leurs enfants de l'école à cause des difficultés d'insertion socioprofessionnelle des sortants du système (Actes des États généraux de l'éducation 1994).

L'adoption du principe des cycles terminaux[2] par les États généraux de l'éducation en 1994 devait conduire à une révision des curricula. Mais 16 ans après, à la rentrée 2010-2011, ce sont pratiquement toujours les programmes de 1989-1990 qui sont en vigueur dans les classes de l'école primaire. Il faut toutefois noter l'insertion de thèmes émergents et le fait que certaines classes soient en expérimentation avec des programmes écrits selon l'approche par les compétences. Quant au secondaire, ce sont les programmes de mathématiques de 1996 auxquels les thèmes émergents ont été insérés qui sont en vigueur, notions sur lesquelles nous reviendrons dans la deuxième partie du texte. Leurs contenus sont ceux de 1991 auxquels des notions touchant l'Éducation en matière de population (EmP) ont été ajoutées.

* Ecole Normale Supérieure, Université de – Burkina Faso – krinkalifa@hotmail.com

[1] L'efficacité externe, ou rendement externe, désigne la rentabilité sociale de la formation. Elle est appréciée par le nombre de diplômés qui parviennent effectivement à s'insérer dans le tissu économique. Elle a trait à la capacité, ou aux facilités d'insertion professionnelle, des sortants du système éducatif (Actes des EGE 1994, p. 44).

[2] Un cycle terminal est un cycle dont le sortant a la possibilité de travailler c'est à dire de s'insérer professionnellement ou de poursuivre les études du cycle supérieur. Selon ce principe, les programmes d'études devraient être conçus de sorte qu'à la fin de la 3ème (fin de l'éducation de base) et à la fin de la terminale (fin du secondaire), l'élève ait le choix entre travailler et poursuivre les études.

© Traore K. (2012) Design curriculaire et contrat social dans l'enseignement des mathématiques au Burkina Faso – Une étude de cas dans le cadre des tables rondes EMF2012 : évolutions curriculaires récentes dans l'enseignement des mathématiques de l'espace francophone. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (Plénières, pp. 142–154). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

Ainsi les programmes de mathématiques (du primaire et du secondaire) n'ont presque pas évolué depuis les années 90, même si dans le cadre de la réforme globale du système éducatif une reforme des curricula orientée vers une approche par compétences est prévue et a commencé avec l'insertion des thèmes émergents.

2. *Organisation curriculaire*

En ce qui concerne l'organisation curriculaire globale de toutes les réformes, la décision est d'abord prise au niveau politique. Ensuite, une commission[3] de programme par ordre d'enseignement (primaire ou secondaire), nommée par le ministre de tutelle est chargée de valider les projets de programmes conçus dans le cadre de l'organisation curriculaire pré-établie par des sous-commissions techniques. La mise en œuvre des programmes se faisait enfin de façon progressive par tranches.

Pour ce qui est du secondaire, les sous-commissions techniques sont des sous-commissions disciplinaires. Celle de mathématiques est formée d'un mathématicien universitaire, d'inspecteurs, de conseillers pédagogiques et d'enseignants expérimentés.

Pour ce qui est du primaire, la sous-commission technique en charge d'élaboration des programmes de mathématiques est constituée d'un inspecteur de mathématiques, d'inspecteurs du primaire et de conseillers pédagogiques.

Les autorités du Burkina Faso ont amorcé en 2007, une réforme globale du système éducatif du pays qui se traduit entre autres mesures, par la gratuité de l'éducation au primaire, la réduction des frais de scolarité au secondaire, la restructuration des cycles d'enseignement de façon à mettre en place un cycle d'éducation de base formelle allant du préscolaire au 1er cycle du secondaire, l'intégration de thèmes dits émergents dans les programmes d'études et une révision des curriculums selon l'Approche Par les Compétences (APC).

La réforme des curricula préconisée dans le cadre global du système éducatif concerne tous les niveaux d'enseignement, du préscolaire au supérieur. Elle constitue par ailleurs une réponse aux recommandations issues des grandes rencontres organisées au plan international, régional et national, sur l'Education Pour Tous (EPT) : Jomtien (1990), MINEDADEF 6 Dakar (1991), 46ème CONFEMEN/Yaoundé (1994), Dakar (2000), Libreville (2003), Brazzaville (2010). Ces rencontres qui ont regroupé des décideurs politiques, des éducateurs, des chercheurs et des partenaires techniques et financiers ont insisté sur la nécessité pour les Etats de réformer leur système éducatif pour plus de pertinence et de qualité.

Faisant suite aux différentes recommandations, cette réforme est clairement exprimée dans la Lettre de Politique Educative (LPE) de juillet 2008 (p. 5-6) ainsi qu'il suit : « La réforme des curriculums fondée sur l'APC et l'intégration des thèmes émergents dans les programmes du système éducatif : Éducation à l'environnement, Education en matière de Population, Education civique, IST / VIH /SIDA, TIC, Art et Culture etc.»

Le politique a défini les finalités de l'éducation dans la loi n°2007-013 /AN du 30 juillet 2007 portant loi d'orientation de l'Education, décidé de reformer les curricula selon l'approche par les compétences. Après ces décisions, les structures techniques des trois ministères (les ministères en charge du préscolaire, du primaire, du secondaire et du supérieur) ont fait appel à des «experts nationaux[4]» en APC pour élaborer un document

[3] Pour le secondaire, il s'agit d'une sous-commission disciplinaire et l'ensemble des sous-commissions disciplinaires forme la commission nationale des programmes. Le mathématicien est dans ce cas un universitaire. Pour le primaire, il s'agit d'une commission de programme et le mathématicien est soit un enseignant de maths, soit un encadreur de maths du secondaire.

[4] L'équipe des «experts nationaux» est constituée d'universitaires et d'inspecteurs ayant une certaine expérience en APC. L'expression personne ressource correspondrait mieux au rôle joué par l'«expert national»

conjoint de référence, document sur lequel chaque sous-commission disciplinaire et (ou) commission de programme devrait s'appuyer pour l'écriture des programmes.

L'équipe des experts nationaux est constituée de quatre universitaires dont un didacticien de mathématiques, un didacticien de français, un psychopédagogue et un en administration scolaire ; d'inspecteurs de l'enseignement secondaire, d'inspecteurs du primaire et du préscolaire. Après avoir justifié le choix de l'entrée par les compétences de base pour la conception des programmes d'études (du préscolaire au secondaire) du Burkina Faso, l'équipe des experts nationaux a proposé des stratégies, un chronogramme de mise en œuvre et les différents organes pour la reforme des curricula. Elle a insisté sur les exigences et conditions de réussite de la réforme des curriculums selon l'APC et a fait une évaluation des ressources nécessaires. Le document conjoint validé seulement en juillet 2010, donne donc les grandes orientations pour l'élaboration et la mise en œuvre de la reforme curriculaire. Ce sont les sous-commissions techniques qui devraient définir les profils de sortie des apprenants et les faire valider par une commission interministérielle des programmes dont la création a été proposée par les l'équipe des experts nationaux. Cette commission devrait être constituée de d'enseignants, d'encadreurs, d'universitaires, de parents d'élèves et de membres de la société civile.

Un comité interministériel de pilotage de la reforme des curricula est préconisé par le document conjoint de référence. C'est au niveau de ce comité que toute l'infrastructure curriculaire (les profils de sortie à l'issue de l'enseignement secondaire, la répartition des heures entre disciplines, les modes d'évaluation) devrait être discutée. Il devrait rédiger un cahier de charge précis sur les profils de sortie attendus exprimé en termes d'aptitudes et de compétences transversales, pour les sous-commissions chargées de l'écriture des programmes. Pour la suite du dispositif, la tradition devrait être maintenue.

Bien que l'équipe des experts nationaux ait insisté sur les précautions à prendre pour donner plus de chances de succès à la réforme des curricula selon l'APC, notamment avec une vision systémique et holistique de l'éducation, il y a un risque réel que le processus en cours suive les schémas classiques à savoir sans prendre en compte le caractère interministériel et interdisciplinaire.

Théoriquement l'équipe des experts nationaux devrait encadrer l'ensemble du processus mais, elle n'a pas encore une existence légale et les structures techniques de chaque ministère qui sont soumises aux injonctions et instructions de leur hiérarchie peuvent ne pas prendre en compte l'avis de cette équipe qui est tout à fait indépendante. C'est ainsi que l'on peut constater un début d'écriture des programmes au niveau d'un ministère donné alors que le référentiel de compétences n'a pas encore été défini en interministériel.

L'équipe des experts nationaux a prévu par exemple une campagne d'information et de sensibilisation des différents acteurs et bénéficiaires de l'éducation afin d'avoir un consensus autour des grandes orientations. Cette disposition ne semble plus intéresser les différents ministères car chacun travaille de son côté pour avoir ses programmes de formation.

3. Implantation et accompagnement

Dans ce domaine, il existe une tradition bien établie. Tout ce qui est implantation et accompagnement est sous la responsabilité des inspecteurs. Il existe des manuels scolaires officiels uniques de mathématiques (du primaire jusqu'à la fin du premier cycle du secondaire). Ces manuels sont conçus et écrits par des équipes composées d'enseignants, de conseillers pédagogiques et d'inspecteurs sous la tutelle de l'inspection de mathématiques pour le secondaire et l'Institut pédagogique du Burkina pour le primaire. Cela n'empêche pas que des écoles primaires notamment privées choisissent d'autres manuels. Il y a des documents d'accompagnement pédagogique ainsi que des directives pédagogiques, écrits par les inspecteurs. Ces documents servent de base à des formations d'accompagnement et à des formations continues organisées par les inspections sur ce qu'ils pensent être des besoins de formation associés à la mise en place de la réforme. En ce qui concerne le primaire, le processus d'implantation et d'accompagnement est décentralisé tandis qu'au secondaire, il est assuré par la direction générale des inspections et la formation du personnel de l'éducation.

Depuis la réforme de 1991 au secondaire, il n'y a plus de manuel officiel de mathématiques pour le second cycle. Les formations d'accompagnement et (ou) formations continues des enseignants de cet ordre d'enseignement portent essentiellement sur les contenus introduits et la connaissance du programme.

Pour la réforme en cours, les inspecteurs sont toujours responsables de l'implantation et de l'accompagnement mais le processus sera décentralisé, même si le niveau central continuera à avoir un rôle de coordination nationale. En effet, l'élaboration des nouveaux curricula relève de la responsabilité des structures centrales. Ce sont elles qui formeront les inspecteurs affectés dans les directions régionales (pour le secondaire) et dans les circonscriptions d'éducation de base (pour le primaire), inspecteurs chargés de l'implantation et de l'accompagnement de la réforme.

4. *Régulation*

La régulation est toujours assurée par les inspecteurs chargés de l'implantation et de l'accompagnement sur la base des retours du terrain après plusieurs années de mise en œuvre. Ceci devrait pouvoir se traduire par des aménagements légers des programmes. La régulation a en général conduit à formuler des thèmes de formations continues des enseignants.

Concernant les processus de design curriculaire, on reste donc toujours dans une tradition « top-down », avec des possibilités de régulation par des retours du terrain par les inspecteurs et une forte tendance à la décentralisation.

II. VISION DES MATHEMATIQUES DANS LES DIFFERENTES REFORMES CURRICULAIRES

Comme annoncé précédemment, les programmes de mathématiques de 1966 ont été en vigueur jusqu'en 1991. La vision des mathématiques dans un tel contexte était celle des mathématiques modernes. Les apprentissages se faisaient essentiellement à travers des cours magistraux même si dans le discours on prônait de temps en temps la pédagogie active.

Dans la réforme de 1991 au secondaire, dans les intentions, on commence à s'intéresser au lien entre les mathématiques et la société. C'est dans ce sens que la géométrie, les statistiques et les probabilités prennent plus de place tandis que l'algèbre perd beaucoup de son omniprésence dans les programmes. Il faut noter que la réforme des programmes du secondaire de 1991 dépasse le seul cadre du Burkina Faso. Il est question d'harmonisation des programmes de mathématiques dans l'Afrique francophone.

Dans la réforme en cours, théoriquement les mathématiques devraient être plus ancrées dans la culture et les besoins de la société. Les apprentissages devraient prendre appui sur des éléments contextuels (c'est l'une des raisons majeure du choix de l'approche par les compétences). Il s'agit de rapprocher l'école des besoins de la société, de partir de ces besoins pour déterminer ce qui est à prendre en compte dans les curricula; cela donnerait certainement plus de sens aux apprentissages. Va-t-on se donner tous les moyens et tout le temps nécessaire pour le respect de ce principe si on connait la pression des politiques et autres partenaires techniques et financiers ?

Avec la réforme en cours, l'accent ne devrait plus être mis uniquement sur les contenus mais sur des compétences mathématiques. À ce niveau pratiquement tous les acteurs (enseignants, encadreurs) sont encore à sensibiliser, voire à former de façon à avoir leur adhésion à ces évolutions. Il s'agit là d'un défi majeur pour la réussite de la réforme d'autant plus que le processus de construction du curriculum est de type « top-down » et que la majorité des enseignants et des encadreurs se posent des questions sur les choix effectués. Les interrogations sont entre autres : Pourquoi organiser les apprentissages autour des compétences de base et non les compétences transversales ou les situations de vie ? Elaborer les curricula à partir des compétences de base permet-il de résoudre ou d'éviter les problèmes d'éloignement de l'école aux besoins de la société ? Cette approche permet-elle une meilleure insertion socio professionnelle des sortants du système ? Comment les compétences de base sont définies ?

La réforme en cours dans ses intentions devrait conduire vers un nouveau contrat social entre l'école de façon générale et la société et plus particulièrement entre les différentes disciplines scolaires et les besoins de la population. Ici, il est beaucoup question de contextualisation de l'enseignement/apprentissage, du rapprochement des contenus enseignés aux besoins de la société.

Il faudra certainement attendre la mise en œuvre complète de toutes ces intentions pour être sûr qu'il ne s'agit pas que d'un discours. L'insertion de l'éducation en matière de population et des thèmes émergents traduit une volonté plus affichée des autorités à mettre les mathématiques à contribution pour la formation à la citoyenneté et la résolution de problèmes préoccupant la société burkinabè.

III. INSERTION DES THEMES EMERGENTS DANS LES PROGRAMMES DE MATHEMATIQUES DU POST-PRIMAIRE

Le monde actuel est caractérisé par son évolution rapide, les mutations de tout genre et dans divers domaines, l'apparition de nouvelles technologies (Internet), des nouveaux problèmes (environnement, gaz à effet de serre, réchauffement climatique, entre autres), de nouvelles maladies (VIH SIDA).

En principe, les contenus enseignés à l'école sont déterminés et arrêtés par la société et pour ses propres besoins. La conséquence immédiate de ce principe est que les contenus d'enseignement, les programmes et les méthodes d'enseignement sont amenés à être constamment ajustés pour tenir compte de ces évolutions.

L'idée d'introduire dans les programmes d'enseignement, ceci dès le préscolaire, certains thèmes et notions dits « émergents » est en ce sens pertinente. Elle est prend appui sur deux principes :

- celui d'adapter les programmes d'enseignement aux réalités burkinabé et africaines ;
- celui de prendre en compte les évolutions et les mutations intervenues dans la société et de faire face à des problèmes socio-économiques.

L'insertion des thèmes émergents dans les programmes d'études est clairement exprimée dans la Lettre de Politique Educative (LPE) de juillet 2008 (p.5-6) ainsi qu'il suit : « La réforme des curricula est fondée sur l'APC et l'intégration des thèmes émergents dans les programmes du système éducatif : Éducation à l'environnement, Education en matière de Population, Education civique, IST / VIH /SIDA, TIC, Art et Culture etc ».

L'introduction des thèmes émergents dans les programmes actuels d'enseignement doit être considérée comme un enrichissement de ces programmes conformément à ce qui est dit à ce sujet dans le dossier de la réforme globale du système éducatif burkinabè. Il ne s'agit pas juste de la réforme des curricula mais d'une actualisation des programmes en vigueur pour prendre en compte des thèmes dont l'urgence et la prééminence actuelle commandent qu'ils soient renforcés dans ces programmes. Les thèmes émergents traitent des questions « brûlantes et préoccupantes » de l'heure. Il s'agit entre autres de :

- Droits de l'enfant et pires formes de travail des enfants
- Arts et Culture
- Education à la sécurité routière
- L'éducation à la citoyenneté et à l'environnement ;
- L'éducation à la santé, à l'hygiène et à l'assainissement ;
- L'éducation aux IST et au VIH/SIDA ;
- L'éducation au genre ;

Ces thèmes émergents sont pris en compte dans les curricula de chaque ministère en charge de l'éducation (ministère de l'action sociale, ministère de l'éducation nationale, ministère des enseignements secondaire et supérieur)

1. *Insertion plus précise des thèmes émergents dans les programmes de mathématiques*

Selon les programmes de mathématiques en vigueur au Burkina Faso, l'enseignement des mathématiques a pour but, entre autres, de :

- fournir à l'élève un bagage de connaissances pratiques, de techniques usuelles, de méthodes opératoires lui permettant de résoudre des problèmes simples qui se posent à lui dans la vie courante où à l'occasion d'autres enseignements
- contribuer à la formation intellectuelle de l'élève

L'insertion des thèmes émergents a pour but d'amener les élèves à prendre conscience des problèmes qui sont traités afin de parfaire leur éducation. Au-delà de ces thèmes, il s'agit d'amener les apprenants à comprendre leur environnement immédiat, afin de le maîtriser.

L'enseignement des mathématiques ne vise-t-il pas à outiller les apprenants pour qu'ils aient une bonne et juste appréhension du monde, des phénomènes qui s'y déroulent, pour qu'ils connaissent et comprennent leur environnement, le maîtrisent et le dominent ?

La prise en compte du contexte et de la culture peut enrichir l'enseignement des mathématiques, contribuer à donner du sens aux objets enseignés, montrer aux élèves à quoi peuvent servir et leur servir les mathématiques (Traoré, 2009). Il faut rappeler que l'art et la culture font partie des thèmes émergents.

L'insertion des thèmes émergents en mathématiques se réalise en se fondant sur l'objectif général : « l'élève, à la fin de la classe de sixième, devrait « avoir une très bonne pratique des quatre opérations sur les naturels et les décimaux positifs et savoir les appliquer à des situations concrètes diverses ».

Pour l'inspection de mathématiques, traiter des thèmes émergents ne signifie pas les étudier directement, mais poser et résoudre des problèmes où ils interviennent. Les résolutions de ces problèmes devraient être en mesure de susciter une prise de conscience des questions ayant trait aux thèmes émergents.

Ainsi les cours de mathématiques prenant en compte les thèmes émergents devraient outiller l'apprenant pour la résolution des problèmes où interviennent ces thèmes en s'appuyant sur des connaissances mathématiques.

La mise en œuvre de ces insertions par l'inspection dans les programmes de mathématiques est faite de la manière suivante :

- élaboration d'exercices de mathématiques prenant pour base un ou plusieurs thèmes émergents ;
- administration aux élèves suivie de correction et de discussions sur le thème émergent.

Pour l'inspection de mathématiques, il reste entendu que l'objectif premier du cours est bien de faire des mathématiques. Mais les problèmes posés sont un prétexte pour aborder, sommairement les thèmes émergents avec les élèves, avec un renvoi possible à d'autres disciplines comme les Sciences de la Vie et de la Terre et ou l'Histoire Géographie, etc.

Dans le cadre de cette mise en œuvre, l'enseignant est appelé à élaborer des situations problèmes traitant des thèmes émergents et prenant en compte le contexte et l'environnement de l'élève.

2. Les thèmes émergents retenus pour les mathématiques

Les thèmes retenus pour les mathématiques par l'inspection de mathématiques de la $6^{ème}$ à la $3^{ème}$ peuvent être regroupés en trois catégories : éducation en matière de population, art et culture, et sécurité routière

Dans la catégorie « éducation en matière de population », par exemple, il s'agit des problèmes de :

- Population, nutrition et alimentation notamment de la sécheresse, des mesures de prévention contre les pénuries alimentaires ;
- Population Genre et Développement en lien avec l'accroissement de la population et la nécessité du développement, la planification, la croissance démographique et équilibre écologique, l'impact de la croissance démographique sur l'équilibre écologique et la dynamique de population

3. Les points d'insertion des thèmes émergents en mathématiques

Les points d'insertion possibles à titre indicatif sont :

- Sens et technique des opérations.
- Les fractions : Opérations sur les fractions et pourcentages
- Proportionnalité
- Equations dans ID et problèmes
- Statistiques
- Les figures géométriques et solides
- Transformations du plan (symétries, translation, agrandissement -réduction)
- Echelles
- Polygones réguliers
- Relations – Fonctions

Il reste entendu que les enseignants peuvent insérer des thèmes émergents à des endroits non retenus par l'inspection, l'essentiel étant de respecter le principe que le cours de mathématiques vise d'abord à faire apprendre des mathématiques. Les points ci-dessus cités sont un minimum et devraient permettre aux enseignants d'étudier avec les élèves des problèmes relatifs à l'éducation en matière de population, à l'art et culture et à la sécurité routière.

4. Objectifs de l'insertion des thèmes émergents en mathématiques

L'objectif général de l'insertion des thèmes émergents en mathématiques est que les apprenants « appliquent les connaissances acquises en mathématiques pour résoudre des problèmes où interviennent les thèmes émergents ».

Partant de cet objectif général, chaque enseignant pourra concevoir des exercices en fonction du contenu mathématique du cours et du thème qu'il veut discuter avec ses élèves. Les objectifs des exercices proposés par l'inspection de mathématiques sont du type :

- utiliser les connaissances acquises sur les décimaux pour résoudre des problèmes relatifs au thème : « croissance démographique et dégradation de l'environnement »
- utiliser les connaissances acquises sur les fractions et les pourcentages pour résoudre un problème relatif au thème : « mortalité et croissance démographique »
- utiliser les connaissances acquises sur les fractions, les pourcentages et la proportionnalité pour résoudre un problème relatif au thème : « croissance démographique et dégradation de l'environnement »
- utiliser les connaissances acquises sur «calculs dans *D*» pour résoudre des problèmes relatifs au thème : accroissement de la population et accroissement des besoins en éducation et ou en santé.
- utiliser les connaissances acquises sur les fractions, les pourcentages et la comparaison des décimaux pour résoudre un problème relatif au thème « sensibilisation sur le planning familial »
- utiliser les connaissances acquises sur les fractions et les pourcentages pour résoudre des problèmes relatifs à la santé.
- utiliser les connaissances sur les pourcentages pour calculer le nombre de personnes séropositives.
- utiliser le sens et technique des opérations pour résoudre un problème relatif à l'environnement.
- utiliser les connaissances acquises sur la comparaison des nombres pour résoudre des problèmes relatifs au thème « éducation en matière de population »
- utiliser les connaissances acquises sur « comparaison et rangement des nombres » pour résoudre des problèmes relatifs au thème « croissance démographique et évolution des infrastructures de santé »
- utiliser les connaissances sur les fractions et sur les opérations (sens, techniques) pour résoudre un problème relatif au thème à « l'éducation civique et morale »
- utiliser les connaissances sur les fractions, les pourcentages et les opérations (sens et techniques) pour résoudre des problèmes relatifs au thème «Education environnementale.»
- utiliser les connaissances acquises sur le calcul dans D pour résoudre des problèmes relatifs au thème « accroissement de la population et accroissement des besoins en personnels de la santé »
- utiliser les connaissances acquises sur la comparaison et rangement de nombres pour résoudre des problèmes relatifs au thème « santé et population »
- utiliser les connaissances acquises sur sens et techniques des opérations pour résoudre un problème relatif au thème « Population et Santé »
- utiliser les connaissances acquises sur les fractions ; comparaison et pourcentage pour résoudre des problèmes relatifs au thème à « accroissement de la population et accroissement des besoins en personnel de santé »
- utiliser les connaissances acquises sur les fractions et pourcentage pour résoudre des problèmes relatifs au thème de l'éducation en matière de population « santé »
- utiliser les connaissances sur les fractions et calculs pour discuter des problèmes relatifs à « la santé et l'éducation de la population »
- utiliser les connaissances acquises sur les fractions ; comparaison et pourcentage pour résoudre des problèmes relatifs aux « besoins en santé »
- utiliser les connaissances acquises sur comparaison et rangement de nombres puis les fractions et les pourcentages pour résoudre un problème relatif au thème «santé – hygiène- assainissement »

- utiliser les connaissances acquises sur les comparaisons pour résoudre des problèmes relatifs au thème « santé, éducation en matière de population »
- utiliser les connaissances sur les fractions et les pourcentages pour résoudre des problèmes relatifs à la santé.
- utiliser les connaissances acquises sur la proportionnalité et calcul dans D pour résoudre un problème relatif au thème : « population et besoin en santé »
- utiliser les connaissances acquises sur les fractions pour résoudre un problème relatif à « la préservation de l'équilibre écologique par l'homme »
- utiliser les connaissances acquises sur les fractions et les pourcentages pour résoudre des problèmes relatifs au thème « accroissement de la population et accroissement des besoins en éducation ».

Les objectifs des exercices pourraient être mieux adaptés car dans la pratique, il s'agit plus de susciter des débats sur les thèmes émergents, comme nous verrons dans les exercices proposés.

Ces objectifs permettent de voir qu'en introduisant les thèmes émergents, l'inspection de mathématiques reste toujours dans une logique d'utilisation de connaissances, d'application de connaissances de mathématiques. Les thèmes émergents auraient pu servir de base pour la construction de situation d'apprentissage bien ancrée dans le contexte et la culture. On est donc dans une posture d'application plus que de motivation et de questionnement suscitant l'introduction de ces mathématiques.

5. Exemples d'exercices proposés

Exercice1

La formule de calcul de la densité d'une population est donnée par

$$\text{Densité} = \frac{\text{Nombre d'habitants}}{\text{Superficie}}$$

a) Complète le tableau ci-dessous représentant les données globales sur la répartition géographique de la population de 8 provinces du Burkina Faso en 1985.

Province	Bam	Oudalan	Kadiogo	Sourou	Boulkiemdé	Passoré	Soum	Yatenga
Superficie en km²	4 017	10 046	1 169	9 487			13 350	12 292
Nombre d'habitants	162 575	106 194			265 223	223 830	186 812	
Densité en hts/km²			393,3	28,3	64,1	54,9		43,7

b) Quelle est la province dont la densité est la plus faible ?

c) Quelle est la province dont la densité est la plus forte ?

d) On estime que lorsque la densité dépasse 50hts/km², il y a des risques élevés de dégradation de l'environnement. Citer les provinces où ces risques existent. *Justifier votre réponse et que faut-il faire ?*

Exercice 2.

- Le tableau suivant donne la population et le nombre de décès dans cinq provinces du Burkina en 1985.

Provinces	Population	Décès	TBM
BAM	162 575	15 313	
KADIOGO	459 826	26 854	
HOUET	581 722	44 211	
SENO	229152	31 348	
TAPOA	158 859	17 050	

- La formule de calcul du taux brut de mortalité (TBM) est donnée par

$$\text{TBM} = \frac{\text{nombre de décès}}{\text{effectif total de la population}} \times 1000 \quad \text{(On note en pour mille ‰)}$$

1. Recopie et complète le tableau ci-dessus
2. Quelle est la province où le TBM est le plus élevé ? Le plus bas ?
3. Au Burkina Faso le TBM est de 14,8 ‰. Sachant que la population totale est estimée à 14 000 000 de personnes en 2006, quel est le nombre de décès constatés durant cette année ?
4. On estime à 65% le nombre de personnes décédées du fait du paludisme et du Sida. Quelle aurait été la population du Burkina Faso si ces deux maladies avaient été éradiquées en décembre 2005?

Exercice 3

Le taux de prévalence VIH / SIDA est le pourcentage de personnes porteuses du VIH / SIDA.

La population du Burkina Faso en 2004 est de 12 722 520 habitants et le taux de prévalence pour la même année est de 2,7%. La population en 2006 est de 13 944 664 habitants ; le taux de prévalence est de 2%.

Calculer le nombre de personnes porteuses du VIH/SIDA en 2004 puis en 2006.

Que faut-il faire pour diminuer encore plus le taux de prévalence VIH ?

Exercice 4

Dans le CEG de SAMBA dans le Passoré il y a 74 élèves en 6ème, 85 élèves en 5ème, 44 élèves en 4ème et 25 élèves en 3ème.

Dans la cour du CEG on vend de l’eau, du bisap et du zoom-koom en sachets. Par jour chaque élève jette dans la cours du CEG, après consommation, un sachet.

Combien de sachets a-t-on dans la cour par jour ? Combien en aura-t-on à la fin d’une semaine de 5 jours ?

Quelles sont les conséquences de ces sachets sur la nature ? Quelles solutions proposez-vous ?

Exercice 5

On donne le tableau suivant

Districts sanitaires	I. Nombre de CSPS	**% de CSPS avec norme en personnel**
Boromo	27	70,4
Dédougou	24	75
Nouna	27	40,7
Solenzo	21	71,4
Toma	18	72,2
Tougan	22	45,5

Un CSPS est dit avec normes en personnel lorsqu'il y a au moins 1 infirmier, 1 accoucheuse auxiliaire, 1 agent Itinérant de santé ou 1 manœuvre.

1a. Quels sont les districts dont le pourcentage de CSPS avec normes en personnel est inférieur à 50% ?

1b. Quels sont les districts dont le % de CSPS avec normes en personnel est compris entre 46% et 74% ?

2. Combien de CSPS ne sont pas avec normes en personnel dans les districts :
   - de Boromo ?
   - de Solenzo ?
   - de Toma ?

3. A votre avis, quels peuvent être les problèmes des populations vivant dans des localités où les districts sanitaires ne remplissent pas les normes en personnel ?

Exercice 6

Le tableau ci-dessous présente l'évolution du nombre de malades atteints du paludisme, de la rougeole et de la méningite au Burkina Faso entre 2004 et 2006.

Années	**2004**	**2005**	**2006**
Cas de paludisme	1 792 541	1 861 158	2 237 550
Cas de rougeole	2006	1 077	525
Cas de méningite	6 386	9 625	19 62

Dans quel cas le nombre de malades est-il en diminution entre 2004 et 2006 ?

1. Dans quels cas le nombre de malades est-il en augmentation ?
2. Sachant que la population du Burkina Faso était estimée à 14 000 000 habitants en 2006, calculer pour cette même année :
   a) le pourcentage des personnes atteintes de paludisme ;
   b) le pourcentage des personnes atteintes de méningite ;
3. *Selon vous, comment éviter le paludisme et la méningite ? En cas de signes de ces maladies, quel comportement doit-on adopter ?*

Exercice 7

Les images suivantes représentent des panneaux de signalisation du code de la route.

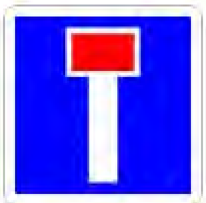
			
Circulation interdite à tout véhicule dans les eux sens	*Voie interdite aux piétons*	*Stationnement interdit*	

			
Interdiction de dépasser	*Rétrécissement de*	*Obligation d'aller tout*	*Obligation de tourner*

la vitesse indiquée sur le panneau	*la voie*	*droit à la prochaine intersection.*	*à droite à la prochaine intersection*

			
Dos d'âne	*Voie obligatoire pour les cycles*		

			
Circulation dans les deux sens.		*Obligation de contourner par la droite*	*Sens interdit à tous les véhicules*

			
Voie sans issue	*Arrêt et stationnement interdit*		

1. Quels sont les panneaux qui possèdent un axe de symétrie ? Indiquer le ou les axes de symétrie s'il y a lieu.
2. Quels sont les panneaux qui possèdent un centre de symétrie ? Indiquer le centre de symétrie s'il y a lieu.
3. *Parmi ces figures, laquelle indique en général un danger ?*

6. *Commentaire sur l'insertion des thèmes émergents en mathématiques*

Les exercices proposés sont en général des exercices classiques comportant une ou deux questions pour susciter des discussions et débats sur les thèmes émergents. Ils ne sont que des exemples et les enseignants peuvent en construire de plus pertinents en fonction des réalités socio-économiques et culturelles de leurs élèves. Les données figurant dans les différents exercices doivent être des informations officielles. Comme indiqué plus haut, le cours de mathématiques n'est qu'un prétexte pour discuter de certains problèmes que vit la société burkinabè en général et une région ou un village en particulier. C'est la cohérence des apprentissages mathématiques qui est la première visée. On peut se poser des questions sur le lien véritable entre certains exercices et les thèmes qu'ils sont sensés traiter. On peut par exemple se demander en quoi le fait de savoir que les panneaux de signalisation ont ou non un axe de symétrie a un intérêt en matière d'éducation à la sécurité routière ?

L'insertion des thèmes émergents en mathématiques n'a pas touché le contenu des programmes. Ainsi elle ne change pas la vision des mathématiques, ni la nature des mathématiques du programme. La volonté de prendre en compte des préoccupations de la société en matière de santé, d'éducation, d'environnement, de citoyenneté, de culture, aurait pu affectée le contenu sinon la vision même des mathématiques. Elle est traduite essentiellement dans le choix des exercices et les questions à discussion.

Même si dans les instructions officielles des programmes en vigueur depuis 1996, il est demandé aux enseignants d'éviter les exemples artificiels, l'insertion des thèmes émergents oblige à ne considérer que des situations réelles vécues dans la société. Cela demande à l'enseignant une connaissance du milieu, de la culture, des problèmes spécifiques de la région. Dans les questions touchant les thèmes émergents, l'enseignant ne « détient plus nécessairement la vérité ». Les apprenants ont leur mot à dire surtout lorsqu'il s'agit d'un problème vécu par certains d'entre eux. Les exercices proposés à titre indicatif par l'inspection de mathématiques laissent voir des questions ouvertes au débat qui peut conduire certainement à une prise de conscience. Ainsi les connaissances mathématiques aideraient à sensibiliser et quelques fois à résoudre certains problèmes liés aux thèmes émergents.

REFERENCES

MASSN/MEBA/MESSRS (2010) *Réforme des programmes d'enseignement selon l'approche par les compétences (APC)* : document conjoint de référence Burkina Faso

Ministère des enseignements secondaire, supérieur et de la recherche scientifique et Ministère de l'éducation de base et de l'alphabétisation du Burkina Faso. (2004). *Rapport national sur le développement de l'éducation au Burkina Faso,* juin. Ouagadougou : Ministère des enseignements secondaire, supérieur et de la recherche scientifique et Ministère de l'éducation de base et de l'alphabétisation.

Ministère des enseignements secondaire, supérieur et de la recherche scientifique du Burkina Faso. (1996). *Programmes et instructions du premier cycle et du second cycle.* Ouagadougou : Ministère des enseignements secondaire, supérieur et de la recherche scientifique, Direction des inspections et de la formation des personnels de l'éducation, Commission nationale des programmes de l'enseignement secondaire.

Traoré K. (2009). Savoirs endogènes et perspectives curriculaires In Ettayébi M., Oppertti R., Jonnaert P. (dir.). (pp. 185-197) *Logique de compétences et développement curriculaire : Débats, perspectives et alternative pour les systèmes éducatifs*. Paris : L'Harmattan. ISBN 2-296-06878-0.

Ministère des enseignements secondaire, supérieur et de la recherche scientifique et Ministère de l'éducation de base et de l'alphabétisation du Burkina Faso (2008). *Lettres de Politique Educative.* Ouagadougou : Ministère des enseignements secondaire, supérieur et de la recherche scientifique et Ministère de l'éducation de base et de l'alphabétisation

ARTICULATION DES CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES ET DIDACTIQUES POUR L'ENSEIGNEMENT
PRATIQUES ET FORMATION

Compte-rendu du Groupe de Travail n°1 – EMF2012

Stéphane CLIVAZ[*] – Jérôme PROULX[**]
Mamadou S. SANGARÉ[***] – Alain KUZNIAK[****]

I. INTRODUCTION

Le thème du groupe de travail n°1, l'articulation des connaissances mathématiques et didactiques pour l'enseignement, était en continuité avec les différents groupes de travail sur la formation des enseignants des colloques précédents, en particulier celui d'EMF2009 à Dakar sur les questions de formation *mathématique* des enseignants. Toutefois l'accent mis sur l'articulation des connaissances mathématiques et didactiques pour l'enseignement en fait un thème nouveau jamais vraiment explicitement abordé sous cet intitulé en groupe de travail dans le cadre de EMF.

Un total de dix heures a été consacré au groupe de travail à travers six séances. Vingt et un participants (des chercheurs, des formateurs, des enseignants) ont participé à ces séances, venant de trois continents et de pays aussi différents que le Brésil et Andorre ! Huit présentations ont été données à l'intérieur de ces dix heures de séances de travail, organisées autour de quatre thèmes spécifiques :

Sous-thème 1. Études empiriques sur les connaissances mathématiques des enseignants [présentations de S. Clivaz, Suisse, et A. Fluckiger et al., Suisse]

Sous-thème 2. Exemples de cours en formation des maîtres sur les connaissances mathématiques des enseignants [présentations de M. Deruaz et S. Clivaz, Suisse, et V. Passaro, Canada]

Sous-thème 3. Articulation entre mathématiques et didactique en formation des enseignants [présentations de M.-P. Morin et al., Canada, et M. Sangaré, Mali]

Sous-thème 4. Savoirs de formation [présentations de N. Sayac, France, et J. Proulx, Canada]

Ces présentations ont été utilisées comme tremplin pour les discussions entre les participants du groupe de travail et ce rapport de synthèse tente de souligner certaines de ces discussions et idées partagées.

II. L'APPEL DU TEXTE INITIAL ET SA CONSTRUCTION

Ce groupe de travail a été, dès le début, pensé et initié en continuité avec le GT1 de EMF2009 qui avait pour titre « Formation mathématique des enseignants: contenus et pratiques ». Et de ce fait, l'aspect « connaissances mathématiques des enseignants » a été central dans

[*] Haute Ecole Pédagogique du canton de Vaud – Suisse – stephane.clivaz@hepl.ch
[**] Université du Québec à Montréal – Québec, Canada – proulx.jerome@uqam.ca
[***] Ecole Normale Supérieure de Bamako Mali. mamadoussangare@yahoo.fr
[****] Université Paris Diderot – France – kuzniak@math.jussieu.fr

© Clivaz S., Proulx J., Sangaré M., Kuzniak A. (2012) Articulation des connaissances mathématiques et didactiques pour l'enseignement : pratiques et formation – *Compte-rendu du Groupe de Travail n°1*. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT1, pp. 155–159). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

l'élaboration de l'appel initial. Toutefois, une demande additionnelle avait été formulée au GT : intégrer la question des connaissances didactiques des enseignants. Face à cette demande, qui paraissait alors nécessiter deux groupes de travail, un pour chacun des types de connaissances, les responsables du GT1 ont décidé de travailler sur l'articulation de ces deux thèmes – cet aspect apparaissait novateur et très intéressant pour discuter de la formation des enseignants tant ces deux thèmes s'entrecroisent durant la formation et la pratique enseignante. Ainsi est née l'idée d'approfondir l'articulation des connaissances mathématiques et didactiques nécessaires pour l'enseignement des mathématiques.

Toutefois le point de départ de la réflexion est resté la question des connaissances mathématiques, mais dans un contexte relié et pertinent à la pratique d'enseignement. Les questions qui ont été proposées pour orienter l'appel à contribution sont les suivantes :

- Qu'entend-on par « connaissances mathématiques pour l'enseignement » ?
- Quels devraient être la nature et le niveau de connaissances mathématiques des enseignants ?
- Quel type de connaissances mobilisent les enseignants dans leurs pratiques ?
- Quelles approches en formation ?

Les auteurs ont été incités, de manière explicite, à travailler et discuter l'articulation entre mathématiques et didactique : « pour tout type de contribution proposée, il est important que les questions d'articulation entre les connaissances mathématiques et les connaissances didactiques soient travaillées et mises au débat ». Suite au processus de relecture des textes soumis, ainsi qu'avec l'effet du temps sur les réflexions, cette question d'articulation est apparue beaucoup plus claire lors du colloque lui-même en février 2012.

Afin de favoriser la qualité et la diversité des contributions, la nature des contributions n'a pas été prescrite ni restreinte à une seule forme. L'appel à contribution a ouvert la possibilité à une diversité de textes, avec leurs exigences spécifiques : des rapports de recherches empiriques, des réflexions/discussions théoriques, et des exemples de formation et de pratiques de formateurs. Dans le cas de rapports de recherche, les contributions devaient établir clairement les fondations théoriques et méthodologiques au cœur de l'étude menée. Les réflexions théoriques devaient être appuyées par des fondements précis et offrir des perspectives justifiées et bien enracinées dans des arguments étayés. Dans le cas d'expériences pratiques ou d'exemples de formation, les contributions ne devaient pas se limiter à des descriptions et devaient réserver une partie importante à l'analyse réflexive, au retour sur ces expériences et à l'explicitation des fondements qui motivent les choix faits. Cette demande s'est avérée fructueuse par la variété de la forme des textes proposés, et elle a permis que des participants très divers assistent et proposent des textes dans le groupe de travail (chercheurs, formateurs, enseignants). Les discussions ont ainsi été stimulantes en évitant une vision unilatérale et simplificatrice sur ces questions. Nous croyons que cette pratique est à retenir pour de futurs GT, dans le but de maintenir l'ouverture des discussions au sein du colloque EMF et attirer l'ensemble de la communauté francophone intéressée par les questions d'enseignement, d'apprentissage et de mobilisation des mathématiques dans différents contextes.

III. LES SEANCES DU GROUPE DE TRAVAIL

Dès le début, deux distinctions ont été précisées et ont orienté une partie des discussions. La première a trait à la distinction entre une connaissance mathématique et une connaissance didactique. Dans les analyses de pratiques d'enseignants, autant en contexte de formation

(Deruaz, Passaro, Proulx) qu'en contexte d'enseignement (Clivaz), il n'était pas toujours facile de distinguer ce qui relevait d'une connaissance didactique ou d'une connaissance mathématique.

À cet égard, les discussions ont fait ressortir l'intérêt de dissocier ces deux types de connaissances pour ensuite les faire fonctionner et les articuler. Il s'agit également de clarifier le rôle de la formation pour permettre cette articulation. Par ailleurs, plusieurs ont souligné que dans certains modèles existant sur les connaissances mathématiques des enseignants, notamment celui de Ball (2008), la composante « didactique » des connaissances des enseignants était moins mise à l'avant, car divisée en plusieurs éléments pédagogiques ou mathématiques ; toutefois tous les participants ne partageaient pas cet avis. De surcroît, le modèle de Ball semble « statique » par rapport à l'étude des questions d'articulation entre connaissances mathématiques et didactiques. D'autres cadres ont été évoqués qui introduisaient une différence entre savoir et connaissances, contrairement à la tradition anglo-saxonne.

La deuxième distinction discutée est celle relative à la différence, au niveau des connaissances mathématiques, entre les (futurs) enseignants du primaire et ceux du secondaire. Alors que souvent on les distingue en disant que les enseignants du secondaire connaissent bien leurs contenus, mais que ce n'est pas le cas de ceux du primaire, les discussions, les commentaires, mais surtout les textes présentés ont eu pour effet de questionner cette différence souvent prise comme allant de soi. Les « critiques » ou « manques » souvent soulignés dans la littérature concernant les difficultés mathématiques vécues chez les enseignants du secondaire, jumelées à certaines perspectives mises en avant dans divers textes présentés (Passaro, Proulx, Sayac), ont permis de souligner que la distinction n'en est pas du type savoir/non-savoir, ou habileté/non-habileté, mais était plus complexe et probablement relative davantage à une question de rapport au savoir (voir le texte de Fluckiger et al.), dans lequel des différences importantes ressortent entre les enseignants du primaire et ceux du secondaire.

Un autre aspect qui a alimenté nombre de discussions est la provenance d'orientations « didactiques » variées entre les différents participants. Des besoins de clarifications de ce qui était entendu par l'expression « didactique » par les différents intervenants se sont faits jour, dans le but de mieux comprendre la provenance des propos et l'ancrage à l'intérieur duquel le tout se situait. À titre d'exemple, voici, tiré du texte de Proulx, un énoncé de la provenance « didactique » du chercheur :

> La didactique des mathématiques est un domaine d'études assez récent. Pour plusieurs didacticiens, elle s'est établie de façon plus officielle durant les années 1970 à plusieurs endroits autour du globe, suite à l'avènement des mathématiques modernes dans le milieu scolaire (voir Moon 1986). La didactique des mathématiques s'est donc développée de façon contextualisée et dépendante de ses divers milieux d'origine en ce qui a trait à ses orientations, mais aussi à la nature des travaux qui y ont été réalisés. Elle porte ainsi, tel que le souligne Bednarz (2007), un caractère multi-référentiel et hautement contextualisé, amenant à parler des didactiques des mathématiques et non d'une seule didactique des mathématiques. À titre d'exemple, comme l'explique Bednarz (2001), alors qu'elle s'est développée en France dans une intention d'en faire une science, elle s'est davantage développée en Italie pour des envies d'innovation des pratiques de classes et aux Pays-Bas en lien avec la vision de Freudenthal des mathématiques comme activité humaine. Ces différents contextes sont importants, car ils ont fait émerger différentes façons de faire et de concevoir les travaux en didactique des mathématiques. Plus près de moi, au Québec et particulièrement à l'UQAM, la didactique des mathématiques s'est développée dès les années 1970 dans une préoccupation de formation des enseignants, orientant de ce fait la nature des travaux et des réflexions qui y ont été menés. C'est ce contexte qui enracine les questions que je pose dans cet article – nées de préoccupations au carrefour de la didactique des mathématiques et de la formation des enseignants – pour aborder la notion d'articulation au cœur du thème du GT1. (Proulx, p. 238)

Cependant, cette idée de multiplicités des didactiques peut être aujourd'hui questionnée depuis l'accroissement des rencontres internationales, comme EMF, qui ont permis d'établir des ponts entre ces différents courants. Le point important de divergence se situe plutôt dans le type de questions réellement étudiées, elles-mêmes situées dans des contextes différents qui supposent des adaptations théoriques.

Dans la rubrique « approches en formation », certaines questions demeurent encore ouvertes ; celles évoquées avec insistance sont les suivantes :

- Au plan méthodologique, l'articulation des connaissances mathématiques et des connaissances didactiques doit-elle être abordée de façon différenciée en fonction du cadre théorique, du système éducatif du pays, du public (chercheurs, formateurs, étudiants-professeurs, formation continue) ? Plusieurs communications écrites de même que les discussions menées au sein du GT1 font apparaître des faits ou des résultats fortement liés au contexte. Dans certains cas, il a été nécessaire de décrire brièvement le système de formation du pays pour rendre la compréhension de ces faits ou de ces résultats.
- L'idée d'outils didactiques pour l'enseignement des mathématiques a été partagée par beaucoup de participants durant les séances du GT1. Cependant une question majeure revenait souvent dans les échanges : quels outils didactiques choisir pour l'enseignement des mathématiques, et comment les utiliser en formation ?
- Quelles devraient être la place et le(s) rôle(s) des ressources pédagogiques (les manuels scolaires en particulier) dans la construction des connaissances de l'enseignant pour l'enseignement des mathématiques ? Cette question semble liée au contexte du système de formation d'enseignants de chaque pays ; elle recouvre également certains aspects du thème étudié par le groupe de travail GT6.

Dans une rencontre où les participants avaient des origines géographiques, théoriques et professionnelles si diverses, ce genre de clarification apparaît porteur pour aider à mieux comprendre les propos tenus, mais surtout pour ouvrir l'étendue des perspectives de chacun et éviter le confinement dans une vision unilatérale de ce qu'est la « didactique ».

IV. VERS EMF-2015

Cette synthèse montre que le thème sur l'articulation des connaissances mathématiques et didactiques a avantage à être poursuivi dans les prochains colloques. Toutefois, à cause des questions profondes provoquées par l'accent mis sur l'articulation mathématique et didactique cette reconduction, nous le croyons, ne doit pas se limiter à un groupe de travail seulement dédié aux pratiques des enseignants et à leur formation. Cette question de l'articulation entre mathématique et didactique intéresse toute la communauté internationale de la didactique des mathématiques. C'est donc une problématique qui mérite attention, tant au niveau des clarifications que du débat.

BIBLIOGRAPHIE
(*de ce texte et de l'appel à contribution*)

Bednarz N., Proulx J. (2009) Connaissance et utilisation des mathématiques dans l'enseignement : Clarifications conceptuelles et épistémologiques prenant leur source dans une analyse de la pratique des enseignants. *For the Learning of Mathematics* 29(3), 11-17. http://flm.educ.ualberta.ca/BednarzProulx.pdf

Bednarz N. (2001) Didactique des mathématiques et formation des enseignants : le cas de l'Université du Québec à Montréal. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies* 1(1), 61-80.

Bednarz N. (2007) Ancrage de la didactique des mathématiques au Québec : à la recherche de sens et d'une cohérence. *Actes du colloque 2007 du Groupe des didacticiens des mathématiques du Québec* (pp. 21-61). UQÀR : GDM.

COPIRELEM (2003) *Concertum Dix ans de formation des professeurs des écoles en mathématiques (Tomes 2-3).* Paris: Arpeme.

Huillet D. (2009) Mathematics for teaching: An anthropological approach and its use in teaching training. *For the Learning of Mathematics* 29(3), 4-10.

Kahane J.-P. et al. (Eds.) (2003) *Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques* – La formation des maîtres en mathématiques. http://www.cfem.asso.fr/Formation_maitres.pdf

Kuzniak A. (2007) Savoir mathématique et enseignement didactique et pédagogique dans les formations initiales du premier et du second degrés. *Recherche et formation* 55, 27-40.

Moon B. (1986) *The 'new maths' curriculum controversy: An international story*. London : Falmer Press.

Morin M.-P. (2008) Les connaissances mathématiques et didactiques chez les futurs maîtres du primaire : quatre études de cas. *Canadian Journal of Education* 31(3), 537-566.

Wood T. (2009) The balance of teacher knowledge : Mathematics and pedagogy. In Ball D. L., Even R. (Eds.) (pp. 211-225) *The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics: The 15th ICMI Study*. New York : Springer.

CONTRIBUTIONS AU GT1

CHERIX P.-A., CONNE F., DAINA A., DORIER J.-L., FLUCKIGER A. – Enseignants du primaire versus du secondaire : faire des mathématiques ensemble.

CLIVAZ S. – Connaissances mathématiques des enseignants et enseignement de l'algorithme de la multiplication.

DERUAZ M., CLIVAZ S. – Un cours de savoirs disciplinaires en mathématiques en formation des maîtres primaires.

MORIN M.-P., THEIS L., ROSA-FRANCOEUR J. – Intégrer les connaissances mathématiques et didactiques : le cas de la formation en enseignement au préscolaire et au primaire de l'université de Sherbrooke.

PASSARO V. – Quelles mathématiques pour les futurs enseignants ? Réflexions et exemples de pratique d'une formatrice.

PROULX J. – De l'existence de mathématiques de la didactique : réflexions sur l'articulation entre mathématique et didactique.

SANGARE M. S. – Formation d'enseignants en mathématiques à l'école normale supérieure de Bamako : quelle articulation entre mathématiques et didactique ?

SAYAC N. – Pratiques de formateurs : la question centrale des savoirs de formation.

ENSEIGNANTS DU PRIMAIRE VERSUS DU SECONDAIRE : FAIRE DES MATHEMATIQUES ENSEMBLE

Pierre-Alain CHERIX*, François CONNE*, Audrey DAINA*,
Jean-Luc DORIER*, Annick FLUCKIGER*

Résumé – Ce texte présente une recherche qui vise à analyser le rapport que des enseignants ou futurs enseignants ont à l'égard des mathématiques. Le dispositif élaboré a permis la confrontation, à propos de questions mathématiques, entre des enseignants généralistes de l'enseignement primaire et des enseignants du secondaire spécialistes des mathématiques du Canton de Genève. Deux types d'analyses ont été faites ; relativement aux thèmes mathématiques traités puis en termes de postures. La conclusion met en évidence les apports et les limites d'un tel dispositif relativement aux connaissances mathématiques et didactiques des enseignants.

Mots-clefs : rapport aux mathématiques, pratiques enseignantes, postures, enseignement primaire, enseignement secondaire

Abstract – This text presents a research work that aims at analysing the relation that teachers or future teachers have towards mathematics. The device elaborated allowed the confrontation, through mathematical questions, between generalist teacher from primary school and specialised teachers from secondary education, in Geneva. A first type of analyses was made relatively to the mathematical subjects at stake in the questionnaire. We give afterwards an analysis in terms of postures. The conclusion allows to put forward the benefits and limitations of such a device relatively to mathematical and didactical knowledge of teachers.

Keywords: relation to mathematics, teachers' practices, postures, primary school, secondary school

I. ORIGINE ET CONTEXTE DE LA RECHERCHE

La recherche présentée ici est une recherche exploratoire amorcée en 2006. À l'origine, un projet soutenu par la région Rhône Alpes[1] dans lequel l'équipe de didactique des mathématiques de Genève (DiMaGe) s'est intéressé à la question de la désaffection des élèves pour les sciences. Une première étude faite sur la base de questionnaires relatifs au savoir savant mathématique et à son enseignement/apprentissage a été exposée lors du colloque EMF 2009 (Cherix et al. 2009). L'absence de résultats significatifs dans le traitement statistique de ces questionnaires nous a conduits à nous intéresser au rapport au savoir que les enseignants entretiennent avec les mathématiques. Une autre visée concernait l'expérimentation de dispositifs susceptibles d'intéresser la formation des enseignants, formation regroupant enseignants du primaire et du secondaire. C'est donc avec cette double perspective que nous avons élaboré le dispositif de questionnaire / entretien décrit ci-après.

Dans ce texte nous exposons successivement les références théoriques qui sont les nôtres, puis le dispositif mis en place et les analyses faites. Celles-ci sont doubles ; après avoir analysé ce qui émerge de chacun des thèmes mathématiques en jeu dans l'entretien il nous a semblé indispensable de faire une deuxième lecture longitudinale de nos données, ce que nous avons fait en termes de « postures ». La conclusion permet de voir l'intérêt et les limites d'un tel dispositif.

* Université de Genève, équipe DiMaGe – Suisse – Pierre-Alain.Cherix@unige.ch, Francois.Conne@unige.ch, audrey.daina@unige.ch, Jean-Luc.Dorier@unige.ch, annick.fluckiger@gmail.com

[1] Cluster 14 « Enjeux et représentations de la science, de la technologie et de leurs usages », axe 4 « Formation scientifique et didactique des sciences », Projet sur « la désaffection des jeunes pour les études scientifiques ».

© Cherix P.A, Conne F., Daina A., Dorier J.-L., Fluckiger A. (2012) Enseignants du primaire versus du secondaire : faire des mathématiques ensemble. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT1, pp. 160–171). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

1. Cadrage théorique

Nous travaillons ici la notion de rapport au savoir dans une perspective proche de celle de Chevallard (2003). La spécificité de notre travail consiste à faire faire des mathématiques à des enseignants en dehors de tout contexte scolaire, pour obtenir des informations sur les opinions et les représentations que les enseignants ont de la discipline mathématique qu'ils enseignent.

Différents travaux anglo-saxons ont travaillé, avec une autre approche, la question des connaissances des enseignants. Shulman (1986) a développé la notion de « pedagogical content knowledge[2] », Ma (1999) ainsi que Ball et al. (2008) se sont attachés à analyser finement la façon dont les connaissances interviennent dans la gestion de la classe de mathématique. En France, Pian (1999) a mis en évidence que les étudiants se destinant à l'enseignement secondaire donnent à voir des connaissances mathématiques atomisées, Grugeon (2008) a relevé la difficulté d'une adaptation pertinente des apports de la formation à la pratique de classe Les recherches conduites par Robert (2001, 2005) montrent la difficulté des enseignants à investir mathématiquement les activités proposées aux élèves.

Notre recherche s'attache à apporter un nouveau type de point de vue sur ces questions. Après avoir présenté le dispositif expérimental nous préciserons lors des analyses par thème mathématique notre ancrage théorique. Les analyses en termes de *posture*, donneront à voir, l'aspect très exploratoire de cette recherche.

2. Dispositif

Pour analyser le rapport au savoir mathématique des enseignants, nous avons choisi de nous intéresser à leurs pratiques mathématiciennes, en faisant l'hypothèse que la confrontation entre des enseignants du primaire et du secondaire autour de questions mathématiques traitées par eux hors champ scolaire est susceptible de rendre visibles certaines dimensions du rapport au savoir entretenu par ces enseignants. De plus, il nous semblait intéressant de tester un dispositif susceptible d'être réinvesti dans la formation des enseignants.

Notre dispositif repose sur la confrontation de deux sujets[3], un de la culture de l'enseignement primaire et l'autre du secondaire (les deux sur la base du volontariat), pour une expérimentation en deux temps sur le même lieu. Les deux sujets de l'expérimentation, présents dans la même salle, doivent tout d'abord répondre par écrit à une série de questions (environ 1h) ; les productions sont alors photocopiées pour servir de base à l'entretien qui suit immédiatement (1h à 2h). Au cours de l'entretien, l'expérimentateur suscite des échanges directs entre les deux protagonistes à propos de leurs réponses au questionnaire et pose éventuellement de nouvelles questions susceptibles de relancer les discussions. Notons que chacun des sujets de l'entretien est informé du statut de ses partenaires.

Nous avons réalisé 14 entretiens: 6 confrontant deux étudiants, 8 deux enseignants plus ou moins expérimentés.

Dans ce texte nous utilisons S pour secondaire, P pour primaire ; Sa et Pa sont des apprenants (étudiants) destinés à enseigner respectivement au secondaire et au primaire; Se et Pe sont des enseignants en poste. Chaque entretien réunit donc trois protagonistes, un expérimentateur (chercheur de l'équipe, Exp) et deux sujets (un S et un P).

---

[2] Ce terme désigne des connaissances disciplinaires spécifiques à l'enseignement

[3] Nous choisissons à dessein le terme de « *sujets* » pour signifier que l'entretien n'est pas focalisé a priori sur la dimension enseignante.

A Genève, la formation des enseignants du primaire se fait à l'université (en sciences de l'éducation) et dure 4 ans ; les étudiants dont il est question ici étaient à la fin de leur 3e année universitaire. Au moment de notre expérimentation, la formation des enseignants destinés au secondaire consistait, après un master de mathématique, en un suivi au cours de la première année d'enseignement par des pairs formateurs sans formation didactique spécifique. Les étudiants Sa de notre expérimentation étaient alors en fin de master de mathématiques. Notons qu'il est fréquent pour de tels étudiants de faire des remplacements et/ou des cours particuliers, ils ont donc tous un peu d'expérience en enseignement.

Le questionnaire écrit (donné en annexe) porte sur quatre thèmes mathématiques : nombres décimaux et réels, constructions géométriques, algorithmes de calculs écrits, et π.

3. Analyses

Le corpus d'analyse est constitué à la fois des questionnaires écrits et des enregistrements vidéo des entretiens. Malgré le nombre important de données, il n'y a que peu de cas (14), ce qui fait de notre recherche une étude plutôt de type clinique.

Les premières analyses faites l'ont été relativement aux thèmes mathématiques abordés. Le dispositif mis en place a permis un double croisement : confrontation primaire versus secondaire, comparaison étudiant versus professionnel. Nous détaillons ci-dessous les analyses a priori et les résultats obtenus.

À la suite de ces analyses et du fait des limites relevées est apparue la nécessité d'un nouveau point de vue en termes de « postures ». Cette nouvelle approche permet une prise en compte de la situation d'entretien en tant que trilogue (incluant l'expérimentateur), de son déroulement temporel, et de l'évolution des positionnements dans la durée.

Nous donnons à voir ci-dessous succinctement et successivement les deux sortes d'analyses faites ; dans la réalité de cette recherche de longue durée (2007-2010) elles se sont bien évidemment enrichies mutuellement.

II. ANALYSES PAR THEME MATHEMATIQUE

1. Questions sur les nombres

La première série de questions concerne les nombres décimaux et réels et les écritures décimales illimitées. Ce sujet a été traité dans de nombreux travaux de didactique. Nous nous sommes appuyés notamment sur les travaux de Bronner (1997), Brousseau (1987), Izorche (1977), Le Thai Baô (2007), Margolinas (1985, 1988) et Neyret (1995) à la fois pour élaborer les questions les plus pertinentes et analyser les réponses recueillies.

Ce thème situé à la charnière primaire - secondaire, nous semblait pouvoir permettre l'émergence d'un rapport aux mathématiques dépassant le cadre strict des enseignements scolaires sans en être déconnecté.

Une première constatation concerne l'opposition nombre comme objet mathématique versus nombre comme écriture. L'appréhension du nombre en tant qu'écriture permet de résoudre de nombreuses questions, mais l'approche du nombre comme objet est une connaissance plus théorique et cette opposition recouvre celle des cultures mathématiques de nos sujets. Dans l'organisation des cursus d'enseignement la conceptualisation des nombres (entiers, décimaux, réels) commence par des actions sur des objets matériels (par exemple, des jetons) puis des écritures chiffrées. Piaget (1977) modélise ces processus en terme d'abstraction réfléchissante qui, portant sur les activités cognitives, transpose et reconstruit à un niveau supérieur (en les réorganisant) les acquis d'un niveau inférieur. Dubinsky (1991) et Sfard (1991), mettent eux aussi en évidence l'appui sur l'action, la répétition de certaines actions et la réflexion permettant l'intériorisation en des processus. C'est bien ce type de phénomène qui peut être identifié dans ce thème ; comprendre que 0,999… est 1 nécessite ce dépassement et ne peut être compris en restant au niveau d'un jeu sur les écritures. Cette dialectique processus–objet est centrale et pertinente pour discriminer les sujets S des sujets P.

Par exemple à la question du prédécesseur de 4, Sa2[4] répond « il n'existe pas ». L'étudiante Pa2 répond $3,\overline{9}$: pour cette étudiante centrée sur le processus d'écriture $3,\overline{9}$ ne peut qu'être différent de 4 puisque les écritures sont différentes

Pa2 : il peut pas y avoir de chiffre… vraiment qui précède 4, vu que c'est infini…

Nous trouvons dans cette réponse l'habituelle confusion faite entre « chiffre » et « nombre ». Dans la conception qui émerge ici, le processus d'écriture n'est pas encore encapsulé - pour reprendre le terme de Dubinsky (1991)- pour créer un objet cognitivement plus complexe.

Ce genre d'opposition est apparu sous une forme ou une autre dans presque tous les binômes entre les sujets P et S. Concernant l'existence d'une infinité de nombres entre deux décimaux, tous les sujets P donnent une explication liée à l'écriture. Les sujets S affirment tous à un moment donné qu'entre deux nombres il y a toujours un autre nombre; les arguments donnés alors portent sur le processus d'intercalage à l'infini des nombres qui sont ainsi traités comme des objets indépendants de leur écriture.

Une deuxième distinction est à faire entre enseignants en formation et enseignants confirmés. Les enseignants confirmés font avant tout référence à leur pratique de classe et moins souvent à une culture mathématique générale. Ils semblent s'être forgés un univers mathématique délimité par ce qu'ils abordent habituellement en classe. Ainsi, il apparaît que la pratique d'enseignement agit comme un filtre important dans le rapport aux mathématiques; ce phénomène non spécifique à la question numérique est identifiable dans de nombreux échanges au cours de l'entretien.

2. *Questions sur les constructions géométriques*

La deuxième série de questions porte sur des constructions géométriques (voir annexe). Notons qu'à Genève l'enseignement de la géométrie a été pendant longtemps très minoré à l'école primaire. Les sujets P de notre expérience peuvent donc avoir une formation plus que sommaire dans ce domaine. Les constructions géométriques à la règle et au compas dont il est question ici sont des objets classiques d'enseignement de l'école secondaire, elles engagent également des expériences spatiales. Les sujets P et S ne sont pas dans la même position *a priori* relativement à ces questions.

Comme précédemment, il s'agit de « faire» des mathématiques, de produire une réponse mais pour cette question, une fois la construction achevée, son auteur sait s'il a ou non réussi : la possibilité d'un feedback immédiat caractérise cette série de questions. Au cours même de l'élaboration de la réponse (la construction) des ajustements perceptifs sont possibles pour obtenir la réponse attendue. Au delà des constructions à réaliser à partir du rappel de la construction de la bissectrice, une question engage la réflexion sur les liens qui peuvent être

[4] Rappelons que Sa correspond à un étudiant (apprenant) en master de mathématique, le 2 correspond au 2ème entretien.

faits entre les différents éléments évoqués (bissectrice, perpendiculaire à une droite passant pas un point dont la position n'est pas précisée) ou une autre construction non mentionnée.

Les résultats différenciant les sujets P et S sont en cohérence avec d'autres observations faites en Suisse Romande ou en France (Celi et Bessot 2008 ; Offre, Perrin-Glorian et Verbaere 2006). Notamment, nous retrouvons chez les sujets P des procédures « à l'œil », telles qu'observées chez des élèves du primaire ou du secondaire inférieur. Les sujets P identifient ces questions comme faisant partie de leur formation scolaire mathématique. Ils reconnaissent (sauf 1) le rappel de construction proposé, mais l'absence de pratique a, chez certains, fortement émoussé le souvenir de ces pratiques de construction.

Le regard porté sur ces questions est différent. Les sujets P ne se sentent pas vraiment concernés, ni dans leur pratique personnelle, ni dans leur enseignement. Ces constructions enseignées par les sujets S sont en général dépréciées parce que considérées comme obsolètes. Ni la question de la difficulté de cet enseignement/apprentissage, ni la question de la place culturelle de ces constructions dans l'édifice mathématique ne sont abordées ; tous savent que cette pratique remonte à Euclide, cela suffit pour en faire un enseignement traditionnel à enseigner. L'enjeu de cet enseignement est rapporté à une technique de dessin nécessitant la maitrise d'instruments particuliers.

L'entretien a permis de questionner l'usage fait des instruments, les liens entre différentes constructions et le rapport à la démonstration. Dans cet échange à trois, certains sujets se sont sentis « retournés à l'école » voire « mal à l'aise » de se sentir observés « en train de faire ». Une sorte de relation didactique s'est souvent développée donnant lieu à des phénomènes de l'ordre d'un contrat didactique alors noué, l'un des protagonistes étant amené à «enseigner» une construction, un concept ; nous retrouverons cet aspect dans les analyses en termes de posture.

Dans ce thème qui a été considéré comme le moins intéressant du questionnaire, on observe que les sujet S, familiers de ces constructions, appliquent les procédures routinières connues; ce n'est pas le cas pour les sujets P moins familiers de ces questions qui traitent ces questions comme des questions ouvertes en engageant des procédures de résolution originales.

Lorsque l'expérimentateur engage la discussion sur le terrain de la démonstration, le clivage est net entre les deux populations ; les sujets S se sentent interpellés et répondent à la demande tandis que les sujets P se mettent alors en retrait.

3. *Questions sur les erreurs dans les algorithmes écrits des opérations*

Une spécificité de cette question réside dans son ancrage dans la pratique professionnelle des enseignants puisqu'il s'agit de commenter des erreurs attribuées à des élèves. Une autre particularité vient de ce que dans cette question les sujets de l'expérience ne produisent pas eux-mêmes une réponse à une question mathématique comme c'est le cas dans les autres groupes de questions. Enfin, cette question est davantage en lien avec l'univers professionnel des sujets P ; cela constitue donc pour les sujets P, une respiration bien venue dans l'entretien. La lecture d'erreurs est un savoir didactique travaillé dans la formation. Il s'agit pour nous dans cette question de discriminer les commentaires faits en termes de connaissances numériques de ceux relatifs aux diagrammes de l'algorithme, distinction faite dans les travaux de Brun, Conne et Flückiger (2003) ou Conne (1988). Nous ne voulions pas que les erreurs de livret (tables d'addition ou multiplication) soient un facteur explicatif de l'erreur d'où un choix de calculs élémentaires non problématiques ; c'est la question de la numération de position qui est centrale dans ces erreurs. L'erreur d'addition a été reprise d'observations faites à l'origine par Kamii et Dominick (1998).

Les analyses des questionnaires et entretiens donnent à voir deux profils différenciés. Ma (1999) différencie ce qu'elle appelle la « compréhension procédurale » centrée sur les questions d'exécution d'algorithme de la « compréhension conceptuelle », faisant appel à un réseau plus étendu de connaissances mathématiques en lien avec la question traitée. Nous retrouvons cette distinction en y adjoignant quelques remarques complémentaires.

Comme prévu, identification et localisation des erreurs ne posent aucun problème. On observe que les sujets Sa ont d'entrée de jeu une approche généralisante des deux erreurs proposées, approche centrée sur les concepts mathématiques, les sujets Pa ont une approche factuelle s'attachant à décrire la production de l'erreur et sa localisation ce qui conduit à différencier les deux calculs.

Le rapport au vocabulaire mathématique est différent. Pour les sujets S, les connaissances mathématiques liées aux algorithmes de calcul sont organisées en réseau et sont formulables aisément: elles agissent comme modèle pour penser les erreurs proposées. Pour les enseignants Pe et les étudiants Pa, ces connaissances existent mais elles n'émergent que sur sollicitation de l'expérimentateur et se manifeste alors un déficit important de vocabulaire[5].

Notons enfin que c'est toujours l'enseignement qui a été à l'origine du questionnement sur les algorithmes, l'objet mathématique « algorithme » n'est jamais questionné pour lui-même.

4. Questions sur π

Cette question se place nettement au niveau culturel. L'idée est de voir si cette notion, abordée par tous au cours de leur propre scolarité, entre dans ce qu'on peut appeler le patrimoine culturel des enseignants. π nous semble un bon candidat pour rester dans la conscience collective (Delahaye 1997).

La nécessité d'une définition ne s'impose manifestement pas, qu'il s'agisse des sujets P mais également de certains enseignants du secondaire Se ou des étudiants en master Sa. Lorsqu'elle est sollicitée, la définition donnée par les sujets S est en général le rapport entre le périmètre d'un cercle et de son rayon, très rarement celui de l'aire d'un disque au carré de son rayon. Le terme de « rapport » pose problème aux sujets P qui entendent « lien vague entre » et non rapport mathématique entre deux grandeurs ; ils rapportent donc plutôt π à son approximation 3,14. Si tous refusent de définir formellement π comme 3,14, c'est de fait cette définition qui émerge dans l'action chez certains sujets. Ce n'est pas le cas chez les étudiants Sa mais c'est quasi systématique chez les sujets P ; certains sujets Se ne sont pas loin de cette position, par exemple ce raccourci significatif d'une identification dans l'action entre π à 3,14 : « Sa : 3,14 est un nombre infini », pour mentionner le développement décimal de π. C'est bien 3,14 qui reste comme le plus significatif de ce qu'est π.

Comme pour les autres questions, pour les enseignants du secondaire c'est bien l'objet enseigné qui est au cœur des propos et non l'objet mathématique dans l'édifice culturel. Ils disent comment il leur a été enseigné et comment eux en parleraient à leurs élèves et quels moyens didactiques ils mettraient en œuvre pour l'aborder en classe.

Les étudiants parlent de la nature mathématique de π, les enseignants de l'objet enseigné : la différence se fait donc plus nettement entre les enseignants et les étudiants qu'entre les sujets S et P. Discuter de la nature arithmétique de π est resté l'apanage des étudiants Se.

---

[5] Selon Vergnaud (1991), l'absence de signifiant signe un déficit de conceptualisation.

Ainsi, π ne semble pas être une notion mathématique aussi emblématique que nous l'avions imaginée et si les échanges entre les sujets S et l'expérimentateur ont été fournis, les sujets P ont souvent été en retrait dans cette partie de l'entretien.

5. Conclusion

Les thèmes mathématiques du questionnaire ont leurs spécificités propres, les analyses portent les traces de ces spécificités et des travaux didactiques s'y rapportant: il ne peut donc y avoir de réelle synthèse. Comme prévu nous avons retrouvé des différences significatives entre les sujets P et S compte tenu de la différence de la formation mathématique. Un résultat peut-être plus frappant est la différence entre les étudiants et les enseignants expérimentés qui semblent ne faire plus référence qu'aux mathématiques qu'ils enseignent. S'ils sortent de cette référence, ils rentrent dans le souvenir de leur vie d'élève. Ceci montre que la culture mathématique des enseignants n'évolue qu'à l'aune du contexte scolaire qu'ils fréquentent dans une rupture avec leur formation universitaire (qu'elle soit disciplinaire ou didactique). Ce point montre l'intérêt de dispositifs de formations initiale et continue permettant un développement professionnel qui inclut une dimension sur la culture disciplinaire.

A l'issue de ces analyses il nous semble indispensable, pour tester le potentiel de ce type de dispositif en termes d'évolution du rapport aux mathématiques, de relire les entretiens avec une grille d'analyse prenant en compte la dynamique de ces entretiens dans la durée ainsi que le rôle non négligeable de l'expérimentateur.

III. ANALYSES EN TERMES DE POSTURES

La notion de *posture,* issue de la sociologie est utilisée ici dans ce qu'elle sous-entend de prise en compte des interactions et de la dynamique de l'entretien. Elle nous semble permettre des analyses nouvelles, non segmentées par les thèmes mathématiques, analyses dont nous donnons les résultats les plus saillants ci-dessous. De plus nous espérons dans un deuxième temps identifier sur la base de ces analyses des ressorts pertinents pour la formation.

De par le dispositif, les sujets volontaires, interrogés hors contexte scolaire, donnent à voir leurs pratiques mathématiques sur différents sujets, mais ils font également référence à leur pratique professionnelle ainsi qu'à leur passé d'élève et d'étudiant. Nous avons pu identifier deux grandes catégories de postures significatives relevées au cours de ces quatorze entretiens : des postures symétriques d'échange d'une part, des postures dissymétriques d'autre part.

Les sujets P et S confrontés dans l'entretien peuvent par moments se mettre en « posture d'échange », l'expérimentateur ne jouant alors que peu de rôle dans les interactions. Par exemple on voit dans la question sur les algorithmes, l'enseignant Pe faire appel à l'enseignement conjoint de la lecture et du calcul écrit pour expliquer l'erreur relevée dans l'addition ; l'enseignant Se découvrant cet argument, il s'ensuit un échange entre deux professionnels qui apprennent l'un de l'autre. Cette posture a été également relevée ponctuellement entre deux étudiants ou entre deux experts lorsque l'expérimentateur a engagé un débat avec le sujet S sur des questions mathématiques excluant de fait le sujet P.

Ce type de postures n'est pas fréquent. Bien plus souvent les postures relatives sont dissymétriques, nous évoquons ci-dessous les plus fréquentes.

Deux types de postures sont fréquentes compte tenu de la situation, celles « d'élève » et celle « d'enseignant ». Elles sont prises à l'initiative d'un des protagonistes ou provoquées en réaction à une prise de position ou une question. Par exemple un des sujets peut contraindre l'autre ou l'expérimentateur à lui enseigner une réponse, l'autre le faisant de plus ou moins bon gré. Certains enseignants du secondaire ont pu refuser cette posture en ramenant systématiquement l'échange dans une forme collaborative. Un seul cas a été relevé de posture ostentatoire d'expert en mathématique prise par un étudiant Sa. Un autre cas particulier de sujet Se a conduit ce dernier à se placer trop systématiquement dans l'entretien en posture de formateur de son alter ego ; ceci a conduit à un rejet de plus en plus net de la part de l'enseignant Pe. Ces cas limites seraient à prendre en compte dans l'optique de la mise en place d'une formation fondée sur ce dispositif.

En tant qu'enseignant, les références peuvent être en lien avec les élèves, mais aussi en lien avec la communauté professionnelle : « nous on travaille jamais avec deux chiffres ». La référence à la communauté apparaît souvent comme un moyen de défense des sujets P lorsqu'ils se sentent en difficulté mathématique, c'est aussi un moyen de justifier un savoir procédural.

Un autre aspect concerne la référence aux tâches familières dans sa pratique professionnelle : « J'ai commencé par 4,01 parce que j'ai l'habitude d'encadrement non strict d'un côté » ou en géométrie « l'énoncé est clair parce que je connais l'exercice ».

Ceci apparaît souvent chez les sujets S pour justifier leur aisance aux yeux de leur collègue P. Pour les sujets P, elle apparaît davantage en lien avec les activités manipulatoires pratiquées en classe.

Cette posture « d'enseignant » est fréquente, y compris chez les étudiants. En contrepoint la deuxième posture massivement relevée est celle « d'élève » :

> Je ne suis pas sûre car je ne me souviens plus trop si au bout d'un moment cela devient 4
>
> Vieux souvenir de démonstration du collège où on devait faire un truc avec les continus et au bout d'un moment ben ça devient…

A la suite de quoi cet enseignant Pe se tourne vers son partenaire pour demander « pourquoi ça vaut 4 ? », mettant ainsi Se en posture d'enseignement et de ce fait adoptant dans l'entretien une posture d'élève qui apprend ici et maintenant. Elève qui se souvient, élève qui apprend ont été des postures fréquemment prises. De fait de nombreux sujets de l'expérience ont fait et appris des mathématiques pendant l'entretien.

Si le dispositif génère souvent une dissymétrie des postures, sauf exception, ceci n'a pas posé de problème d'ascendance mal vécue. Au contraire la confrontation a souvent générée un travail collaboratif portant sur les mathématiques ou sur la pratique professionnelle, ce qui potentiellement peut produire des effets positifs sur l'évolution des rapports aux mathématiques. De plus, dans ce type d'analyse le rôle de l'expérimentateur apparaît de façon évidente et le thème traité génère des postures différentes.

IV. CONCLUSION

Les échanges ont été nombreux, les sujets ont dit avoir été intéressés par cette expérience même si dans un premier temps ils se sentaient un peu déstabilisés. Si notre dispositif laisse entrevoir une piste pour la formation initiale ou continue, la question se pose bien sûr de reproduire ce dispositif avec des populations moins motivées *a priori*[6]. Se pose également la question des contenus à aborder et de la forme des questions. Les contenus proposés ici sont proches de l'enseignement et donc susceptibles de focaliser les réponses sur la pratique professionnelle.

[6] Rappelons que les sujets de notre expérience étaient volontaires.

Notons également que la formation professionnelle, les connaissances didactiques théoriques, sont singulièrement absentes du discours, les sujets ne font référence qu'à leurs savoirs professionnels, les pratiques de classe et leurs souvenirs en tant qu'élèves. Il est clair que la pratique d'enseignement agit comme un filtre important dans le rapport aux mathématiques. Les enseignants avec beaucoup de pratique semblent ainsi s'être forgés un univers mathématique délimité par ce qu'ils ont l'habitude d'aborder en classe. Dans le traitement de l'ensemble des questions le constat peut être fait que l'univers mathématique des enseignants est limité par les sujets abordés en classe et les savoirs qui relèveraient du champ de la didactique des mathématiques acquis en formation semblent inexistants.

REFERENCES

Ball D., Thames M., Phelps G. (2008) Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Bronner A. (1997), *Etude didactique des nombres réels*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier – Grenoble I.

Brousseau G., Brousseau N. (1987) *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*. Document pour les enseignants et pour les formateurs, IREM de Bordeaux.

Brun J., Conne F., Flückiger A. (2003) Algorithmes de division et schèmes numériques, Compétences complexes dans l'éducation et le travail. Qu'est-ce que la pensée? In Vergnaud G. (Ed.) *Actes du colloque Qu'est-ce que la pensée ? 1-4 juillet Suresnes 1998* (CD Rom).

Celi V., Bessot A. (2008) Statut et rôle du dessin dans la formulation d'un programme de construction au collège. *Petit x* 77, 23-46.

Conne F. (1988) Calculs numériques : Quatrième épisode du feuilleton consacré aux activités numériques élémentaires. *Math Ecole* 135, 33-35.

Cherix P.-A., Conne F., Daina A., Dorier J.-L., Fluckiger A. (2010) Analyser le rapport aux mathématiques des enseignants peut-il aider à agir contre la désaffection des jeunes pour les études de mathématiques ? *Actes du Colloque Espace Mathématique Francophone* (spécial n°1, pp. 55-75). http://fastef.ucad.sn/EMF2009/colloque.htm projet.

Chevallard Y. (2003) Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques. In Maury S., Caillot M. (Eds.) *Rapport au savoir et didactiques* (pp. 81-104). Paris : Editions Fabert.

Delahaye J.-L. (1997) *Le fascinant nombre π*. Paris : Belin.

Dubinsky E. (1991) Reflective Abstraction. In Tall D. (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123). Dordrecht : Kluwer.

Grugeon B. (2008) Quelle évolution des pratiques d'un professeur stagiaire de mathématiques pendant son année de formation à l'IUFM. In Vanderbrook F. (Coord.) *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp. 383-419). Toulouse : Octarès éditions.

Izorche M.-L. (1977) *Les réels en classe de seconde*. Mémoire de DEA. Université de Bordeaux 1.

Kamii C., Dominick A. (1998) The harmful effects of algorithms in grades 1-4. In M. Lorna, K. Michael (Eds.) *The teaching and learning of algorithms in school mathematics: 1998 NCTM yearbook* (pp. 130-140). Reston - VA, National Council of Teachers of Mathematics.

Le Thai B. (2007) *Etude didactique des relations entre notions de limite et décimalisation des nombres réels dans un environnement « calculatrice ».* Thèse de doctorat. Université Joseph Fourier – Grenoble 1 et Université Pédagogique de Ho Chi Minh Ville.

Ma L. (1999) *Knowing and Teaching Elementary Mathematics: Teachers' Understanding of Fundamental* Mathematics *in China and the United States*. London: Routldege.

Margolinas C. (1985) *Un bilan des connaissances sur les nombres après la classe de 4e, le nombre dans tous ses états*. Mémoire de DEA. Université de Bordeaux I.

Margolinas Claire (1988) Une étude sur les difficultés d'enseignement des nombres réels. *Petit x*, 16, 51-66.

Neyret R. (1995) *Contraintes et déterminations des processus de formation des enseignants : nombres décimaux, rationnels et réels dans les instituts Universitaire de Formation des Maîtres*. Thèse de doctorat. Université Joseph Fourier – Grenoble I.

Offre B., Perrin-Glorian M.-J., Verbaere O. (2006) Usage des instruments et des propriétés géométriques en fin de CM2. *Petit x*, 72, 6-39.

Piaget J. (1977) *Recherches sur l'abstraction réfléchissante*. Paris: PUF.

Pian J. (1999) Diagnostic des connaissances mathématiques des étudiants de CAPES, vers une interprétation cognitive des apprentissages individuels. *IREM de Paris7, Cahier DIDIREM* 34.

Robert A. (2001) Les recherches sur les pratiques des enseignants et les contraintes de l'exercice du métier d'enseignant. *Recherche en Didactique des Mathématiques* 21(1/29), 57-80.

Robert A. (2005) Recherches en didactique des mathématiques et formations professionnelles des enseignants du second degré en mathématiques – L'exemple d'une formation de formateur. In Castela C., Houdement C. (Eds.) *Actes du Séminaire National de Didactique des* Mathématiques (pp. 137-176). Paris : ARDM et IREM de Paris 7.

Sfard A. (1991) On the dual nature of mathematical conception: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics* 22(1), 1-36.

Shulman L. (1986) Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.

Vergnaud G. (1991) La théorie des champs conceptuels. *Recherche en didactique des mathématiques*, 10(2/3), 281-308.

ANNEXE : QUESTIONNAIRE (3 VERSIONS)[7]

Merci de bien vouloir répondre aux questions qui suivent. Notre but n'est pas de vous évaluer, mais de recueillir des informations qui vont nous servir pour une recherche.

Ne vous censurez pas, écrivez tout ce que vous voulez (si nécessaire utilisez le dos des feuilles), n'effacez pas, si vous devez tracer, faites-le de façon « lisible ».

Questions 1

A1) Existe-t-il un nombre compris entre 2,746 et 2,747 ? Si oui en donnez-en un, sinon justifiez

A1bis) Quels sont les nombres compris entre 2,13 et 2,23 ? (A partir de Ent5)

A2) Donnez le meilleur encadrement possible avec deux chiffres après la virgule :

…………..< 4,157 < …….....

A2bis) Donnez le meilleur encadrement possible avec deux chiffres après la virguleö

…………..< 0,007 < ……..... (A partir de Ent5)

A3) Donnez le meilleur encadrement possible avec trois chiffres après la virgule :

…..... < 4,1 < ……

A3bis) Donnez le meilleur encadrement possible avec quatre chiffres après la virgule :

…..... < 4,01 < …… (A partir de Ent5)

B1) Quel est le nombre qui précède 4 (juste avant 4) ?

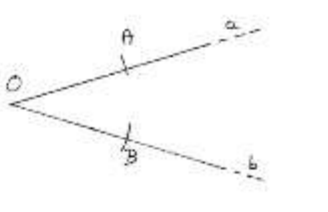
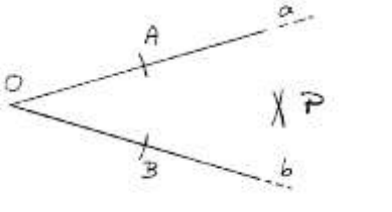
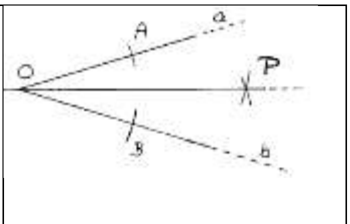
B2) Quel est le résultat de l'opération : $1,\overline{4} + 3,\overline{7}$??

= …….

N.B. la notation $1,\overline{4}$ signifie 1,444… , il y a une infinité de 4 après la virgule

Questions 2

Voici, en guise de rappel, une construction à la règle et au compas de la bissectrice d'un angle :

		
Etape 1	Etape 2	Etape 3

Cette construction aura sans doute ravivé en vous quelques souvenirs de géométrie élémentaire. Nous mettons maintenant à votre disposition du papier, un crayon, une règle et un compas pour effectuer deux constructions que nous vous demandons de faire.

1. Construisez s'il vous plaît la bissectrice d'un angle plat.

2. Construisez s'il vous plaît la perpendiculaire d'un point A à une droite d.

3. Ces rappels vous auront éventuellement suggéré une autre construction géométrique. Si oui, veuillez nous dire laquelle.

Commentaires éventuels :

[7] Le questionnaire original est plus aéré, comprend des espaces pour répondre sur la feuille et est écrit plus gros ! Nous l'avons réduit ici pour gagner de la place. De plus, à partir de Ent7 (c'est-à-dire après les étudiants), le questionnaire était précédé d'une page demandant des renseignements sur le nombre d'années d'expérience, le type de classes et le rapport aux mathématiques.

Questions 3

Voici deux réponses d'élèves effectivement observées. Qu'en pensez-vous ?

1) 1bis) (A partir de Ent5) 2) (inchangé)

```
   12
 · 21
 ----
   12
   24
 ----
   36
```

```
   24
 · 53
 ----
   72
  120
 ----
  192
```

```
  117
 + 18
 + 2
 ----
  497
```

Notez ici vos commentaires sans vous contraindre à une rédaction soignée :

Questions 4

Version 1 (Ent1 à Ent6)

1. Si quelqu'un vous demande la valeur de π, que lui répondez-vous ?

2. Quelles sont pour vous les trois idées les plus importantes à savoir sur π ?

Version 2 (Ent7 à Ent14)

Voici trois énoncés :

a. π est un nombre qui vaut à peu près 3,14.
b. π est le rapport entre le périmètre d'un cercle et son diamètre.
c. π est l'aire du disque de rayon 1.

1. Donnez votre opinion sur ces trois énoncés (pertinence, validité, statut, accessibilité, pouvoir de questionnement, importance,…).

2. Quels liens voyez-vous entre ces trois énoncés ?

CONNAISSANCES MATHEMATIQUES DES ENSEIGNANTS ET ENSEIGNEMENT DE L'ALGORITHME DE LA MULTIPLICATION

Stéphane CLIVAZ*

Résumé – Afin de décrire l'influence des connaissances mathématiques des enseignants primaires sur leur gestion didactique de tâches mathématiques, quatre enseignants ont été observés durant leur enseignement de l'algorithme de la multiplication par un nombre à plusieurs chiffres. Les séquences sont analysées à l'aide de trois cadres : les catégories de connaissances mathématiques pour l'enseignement, les critères de pertinence mathématique du professeur et la structuration du milieu. Les résultats sont considérés à partir d'un niveau d'observation général et se focalisent ensuite sur un grain d'analyse plus fin. Ils font apparaître des liens entre connaissances mathématiques, pertinence et choix didactiques des enseignants.

Mots-clefs : connaissances mathématiques, enseignant, enseignement primaire, algorithme de la multiplication, pertinence

Abstract – In order to describe the influence of primary school teachers' mathematical knowledge on their didactical management of classroom mathematical tasks, four teachers have been observed while teaching multidigit multiplication algorithm. The sequences were analyzed using three frames: categories of mathematical knowledge for teaching, the criteria for mathematical pertinence of the teacher and the structure of the milieu. The results are taken into account from a general perspective and then focused on a finer grained analysis. The analysis shows the links between mathematical knowledge, pertinence and teachers' didactical choices.

Keywords: mathematical knowledge, teacher, elementary teaching, multidigit multiplication, pertinence

I. INTRODUCTION

La recherche présentée ici est une partie d'une recherche doctorale visant à décrire l'influence des connaissances mathématiques des enseignants primaires sur leur gestion didactique de tâches mathématiques (Clivaz 2011).

Au cours des dernières années, les recherches portant sur les connaissances mathématiques pour l'enseignement ont pris de l'ampleur dans la communauté scientifique internationale (Bednarz et Proulx 2009). Ce mouvement s'observe également dans le monde francophone, toutefois plus au Québec qu'en Europe. L'existence d'un groupe de travail lors d'EMF 2009 et d'EMF 2012 est une manifestation supplémentaire de cet essor.

Si de nombreuses recherches, en particulier étatsuniennes, tentent d'établir un lien entre les connaissances mathématiques des enseignants et les performances des élèves, les résultats sont souvent mitigés, voire contradictoires. De plus, même quand un effet est mesuré, les mécanismes permettant de décrire l'influence des connaissances mathématiques des enseignants sur leur enseignement restent mystérieux (Hill, Rowan et Ball 2005, p. 401).

Le cadre théorique de notre recherche s'appuie sur les *catégories de connaissances mathématiques* (Ball, Thames et Phelps 2008), sur les critères de *pertinence mathématique du professeur* élaborés par Bloch (2009) et sur la *structuration du milieu* et sa déclinaison en *niveaux d'activité du professeur* (Margolinas 2002). L'analyse portera sur l'enseignement de l'algorithme de la multiplication par un nombre à deux chiffres dans des classes de 4$^{\text{ème}}$ primaire[1] du canton de Vaud (Suisse). Les résultats seront considérés à partir d'un niveau d'observation général et se focaliseront ensuite sur un grain d'analyse plus fin.

* HEP Vaud – Suisse – stephane.clivaz@hepl.ch

[1] CM1 français, élèves de 10 ans

© Clivaz S. (2012) Connaissances mathématiques des enseignants et enseignement de l'algorithme de la multiplication. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT1, pp. 172–182). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

II. CADRE THEORIQUE ET PROBLEMATIQUE

1. Les Connaissances Mathématiques pour l'Enseignement

Ball, Thames et Phelps (2008) proposent de classifier les différentes *connaissances mathématiques pour l'enseignement* (CME) selon le découpage suivant :

Connaissances du sujet :

– Connaissances mathématiques communes (CMC)
– Connaissance de l'horizon mathématique (CHM)
– Connaissances mathématiques spécifiques à l'enseignement (CMS)

Connaissances pédagogiques du contenu :

– Connaissances du Contenu et de l'enseignement du sujet (CC)
– Connaissances des Elèves et de l'apprentissage du sujet (CE)
– Connaissances des Programmes et des moyens d'enseignement (CP)[2]. (p. 403)

Les CMS sont des connaissances mathématiques dont ne disposent pas d'autres professionnels utilisant les mathématiques. C'est le cas par exemple quand il s'agit d'expliquer pourquoi « pour multiplier par 10, on ajoute un zéro », quand il faut analyser des erreurs d'élèves ou quand il faut décider si une procédure originale proposée par un élève est correcte. Une situation particulière nécessitant ces connaissances mathématiques spécifiques à l'enseignement est celle de l'enseignement de l'algorithme de la multiplication (Ball, Hill et Bass 2005, pp.17–21). Ces CMS se distinguent des CMC, mais aussi des connaissances pédagogiques du contenu :

> Knowing mathematics for teaching demands a kind of depth and detail that goes well beyond what is needed to carry out the algorithm reliably. […] Important to note is that each of these common tasks of teaching involves *mathematical* reasoning as much as it does pedagogical thinking[3]. (Op. cité, p.21)

2. La pertinence mathématique

Afin de distinguer les effets des connaissances mathématiques de l'enseignant, Bloch (2009) propose quant à elle de distinguer divers degrés de *pertinence mathématique des interventions du professeur* selon les trois critères suivants :

> C_1 : […] capacité à interagir avec les élèves sur des éléments mathématiques de la situation et à encourager l'activité des élèves par des interventions et des retours sur leur production mathématique
>
> C_2 : […] tolérance aux formulations provisoires et approximatives, aux expressions dans l'action, et la capacité à reconnaître les idées mathématiques qui sont incluses dans des ostensifs non canoniques
>
> C_3 : […] aptitude à conduire la situation à son terme avec une phase de débat et validation ; ceci inclut la capacité à sélectionner des formulations et à en laisser d'autres de côté, et à gérer la chronologie du débat sans le tuer par l'énoncé immédiat des meilleures productions ou du savoir visé. (Op. cité, p.33)

Ces trois critères permettent ainsi d'évaluer les connaissances de la matière de l'enseignant en fonction de la manière dont elles conduisent à mettre en place une organisation didactique.

---

[2] Ma traduction des termes de (Ball *et al.*, 2008).
[3] « Connaître des mathématiques en vue de les enseigner demande un type de profondeur et de détail qui va bien au delà de ce qui est nécessaire pour effectuer l'algorithme de manière fiable. […] Il est important de remarquer que chacune de ces tâches ordinaires d'enseignement implique un raisonnement *mathématique* autant qu'une pensée pédagogique ». L'italique est de Ball, la traduction est la mienne.

3. La structuration du milieu

En vue d'analyser ces connaissances et leurs effets, tant sur la mise en place d'organisations didactiques que sur les interactions en classe, nous avons utilisé le modèle de structuration du milieu. Ce modèle a été développé par Margolinas (1992) qui a enrichi la structuration de Brousseau (1986) pour analyser les activités usuelles du professeur et *démêler* des pratiques qui sont imbriquées.

M_{+3}: M-Construction		P_{+3}: P-Noosphérien	S_{+3}: Situation noosphérienne
M_{+2}: M-Projet		P_{+2}: P-Constructeur	S_{+2}: Sit. de construction
M_{+1}: M-Didactique	E_{+1}: E-Réflexif	P_{+1}: P-Projeteur	S_{+1}: Sit. de projet
M_0: M-Apprentissage	**E_0: Elève**	**P_0: Professeur**	**S_0: Situation didactique**
M_{-1}: M-Référence	E_{-1}: E-Apprenant	P_{-1}: P-Observateur	S_{-1}: Sit. d'apprentissage
M_{-2}: M-Objectif	E_{-2}: E-Agissant		S_{-2}: Sit. de référence
M_{-3}: M-Matériel	E_{-3}: E-Objectif		S_{-3}: Sit. objective

***Tableau 1** – Structuration du milieu (Margolinas, 2002, p. 145)*

Les niveaux d'activité du professeur et les situations ne sont pas réduits au temps de la leçon en classe, même si certaines phases d'une situation didactique sont partiellement caractérisées par des situations de niveaux différents. Elles ne sont pas non plus temporellement successives (Margolinas 1995, p. 96), et chaque niveau peut être considéré dans le présent de l'action, mais aussi dans le passé ou le futur. Par exemple, durant le travail en classe, le professeur peut travailler au niveau +1 en projetant une future leçon ou en se souvenant de son travail passé de préparation. De la même manière, il est en tension entre son ambition, qu'elle concerne la leçon (niveau +1), le thème (niveau +2) ou plus généralement l'enseignement (niveau +3) et ce qu'il pense que les élèves pourront répondre (niveau 0) ou la façon dont il souhaite les observer (niveau -1) (Margolinas 2004, p. 75).

4. Questions de recherche

Ces trois éléments de cadrage théorique nous permettent de poser plus précisément la question de l'influence des connaissances mathématiques des enseignants sur leur enseignement : quels effets les différents types de connaissances mathématiques pour l'enseignement des enseignants primaires ont-ils sur la pertinence mathématique de leurs interventions et sur l'organisation didactique de leurs cours de mathématiques à l'école primaire ?

III. CORPUS DE DONNEES ET METHODOLOGIE DE RECHERCHE

Afin de répondre à ces questions, nous avons choisi d'observer l'enseignement de l'algorithme de la multiplication. Il s'agit d'un sujet familier permettant particulièrement de mettre en évidence la distinction entre Connaissances Mathématiques Communes et Connaissances Mathématiques Spécifiques et offrant à l'enseignant des choix d'enseignement orientés plutôt vers l'application de procédures ou plutôt vers la compréhension de concepts mathématiques (Ball *et al.* 2005, pp.17–20, Meno 2003, p.1).

Nous avons observé toutes les leçons à propos de l'algorithme de la multiplication par un nombre à deux chiffres chez quatre enseignants de 4$^{\text{ème}}$ primaire : Andrea, Camille, Dominique et Sacha. Le nombre de séances varie entre deux et neuf. Il s'agit d'une observation de type « naturaliste » (Comiti, Grenier et Margolinas 1995, pp.98–99), c'est-à-dire que nous ne sommes pas intervenus sur le choix des activités laissé au libre arbitre de chaque enseignant. Les observations ont été précédées et suivie d'un entretien semi-dirigé. Les leçons ont été filmées (caméra en fond de classe et micro cravate pour l'enseignant) et quelques passages significatifs du point de vue des connaissances mathématiques pour l'enseignement ont été mis en évidence. Les enregistrements des séquences et des entretiens ont été traités à l'aide du logiciel Transana (Fassnacht et Woods 2002–2011) afin de relever pour chaque extrait le niveau d'activité du professeur et, pour les passages où des connaissances mathématiques sont utilisées, leur type et leur pertinence. Les corrélations entre CME, niveaux d'activité et pertinence ont été mises en évidence. Ces extraits peuvent être situés dans la séquence grâce à la réalisation d'un *synopsis* (Schneuwly, Dolz et Ronveaux 2006) et d'une *macrostructure* (Dolz et Toulou 2008). Le moment d'explication de l'algorithme et les choix d'activités des quatre enseignants ont été comparés en fonction de leur connaissance mathématique de l'algorithme. Ce moment d'explication de l'algorithme, mais aussi les explications faisant suite à des difficultés d'élèves, ont été transcrits et analysés avec un grain plus fin.

IV. ANALYSE ET RESULTATS

L'ensemble des données recueillies a été analysé à trois échelles. Le niveau macro analyse l'ensemble des données (1). Un niveau intermédiaire examine le moment d'explication de l'algorithme (2 à 6) et le niveau micro permet l'analyse fine d'un épisode (voir Clivaz, A paraître).

1. Ensemble des données récoltées et combinaisons de catégories

Plus de 17 heures de séances et 11h30 d'entretiens ont été traitées. Environ 80% des données ont fait l'objet d'un découpage en près de 800 épisodes et ont été codées selon le niveau d'activité de l'enseignant, selon les catégories de Connaissances Mathématiques pour l'Enseignement présentes et selon la pertinence mathématique des interventions de l'enseignant. Les parties non codées dans les entretiens correspondent aux moments de salutation ou de rappel des conditions de la recherche. Celles non codées des séances de classe sont des moments durant lesquels l'enseignant n'est pas dans une position didactique, mais dans une pure position de gestion de classe.

Les niveaux d'activité les plus présents dans les entretiens sont les niveaux P_{+2} et P_{+3}. Cette constatation correspond bien à la visée de l'entretien qui était de recueillir, avant et après la séquence, des éléments généraux sur celle-ci.

Pour les parties en classe, le niveau très nettement le plus présent est celui de la situation didactique P_{+0}. Les positions P_{+3} et P_{+2} sont très rarement observables, en revanche un certain nombre d'interventions de l'enseignant au niveau +1 du projet de leçon ont été observées. On peut encore noter que le niveau P_{-1} est assez peu présent. Ceci peut être noté à propos des entretiens durant lesquels les enseignants parlent peu de ce qu'ils vont ou ont observé ou de la manière dont ils vont ou ont effectué la dévolution du problème, mais aussi en classe où les moments durant lesquels l'enseignant observe ou dévolue sans proposer de connaissances sont relativement rares.

Les catégories de connaissances mathématiques ont été attribuées à la quasi totalité des clips déterminés en classe et en entretien. Seuls 7% des épisodes n'ont pas pu se voir déterminer une catégorie de connaissance mathématique. Il s'agit essentiellement de moments d'observation, de moments de gestion de classe avec interactions didactiques (lecture de consigne par exemple) ou de déclarations relativement générales durant les entretiens pour lesquels il n'était pas possible de déterminer, même en questionnant l'enseignant, quel type de connaissance ces déclarations mettaient en jeu. Selon les niveaux d'activités de l'enseignant, les types de connaissances mathématiques sont assez uniformément répartis. On note tout au plus que les Connaissances Mathématiques pour l'Enseignement (CME) de type pédagogique sont plus présentes aux niveaux +3 et +2 alors que les Connaissances Mathématiques Communes (CMC) y sont rares. Les Connaissances Mathématiques Spécifiques (CMS) ne se distinguent en revanche pas des autres types de CME du point de vue de la fréquence de leur manifestation aux divers niveaux d'activité du professeur.

Une première analyse statistique permet de mettre en évidence des corrélations entre la présence des diverses catégories de CME et la pertinence des interventions de l'enseignant. En particulier une corrélation forte apparaît entre la présence dans un épisode d'une Connaissance Mathématique Spécifique correcte et la manifestation de la pertinence mathématique. Ce lien n'existe en revanche pas pour les autres types de CME. En particulier, d'un point de vue statistique, les Connaissances Mathématiques Communes correctes ne sont liées à une manifestation de pertinence que quand elles sont présentes conjointement à d'autres CME correctes ou, dans une moindre mesure, quand elles sont seules présentes. En revanche une Connaissance Mathématique Commune correcte présente en même temps qu'une autre CME erronée, particulièrement d'une Connaissance Mathématique Spécifique erronée, est liée le plus souvent à la non-pertinence mathématique des interventions de l'enseignant. Cela suggère que les Connaissances Mathématiques Communes ne génèrent de la pertinence mathématique que quand elles sont liées à d'autres CME.

2. *Le moment d'explication de l'algorithme*

Les quatre séquences observées comportent toutes un moment bien défini d'explication de l'algorithme de la multiplication par un nombre à deux chiffres. Ce moment est délimité par le choix d'une multiplication à effectuer et par l'annonce de l'enseignant qu'il va montrer ou expliquer la multiplication en colonnes à deux chiffres. Il est caractérisé par une forme de cours dialogué dans lequel l'enseignant décrit les étapes de l'algorithme en posant au groupe classe des questions, et en faisant effectuer les étapes de calcul aux élèves. Il s'achève par le choix d'une nouvelle multiplication à effectuer. Chez les quatre enseignants, ce nouvel exemple ressemble très fortement au premier du point de vue du choix des nombres et il est effectué par un ou plusieurs élèves selon un mode proche de celui utilisé précédemment (tableau noir ou affiche).

Nous allons observer quatre aspects de ce moment d'explication chez les enseignants. La séparation en deux lignes puis l'addition et le lien avec la distributivité chez Camille (3) ; l'alignement, la gestion des retenues et le lien avec la numération décimale de position chez Sacha (4) ; le zéro de la seconde ligne chez Dominique (5) et enfin les représentations de la multiplication chez les quatre enseignants (6).

3. *La séparation en deux lignes puis l'addition : le lien avec la distributivité*

La présentation aux élèves de l'algorithme de la multiplication par un nombre à deux chiffres comporte un « acte » durant lequel l'enseignant dit, montre ou explique qu'il faut *séparer le calcul en deux*, un moment où il *ramène chaque calcul à une multiplication à un chiffre*, et un moment où il *additionne les deux lignes*. Ces trois éléments découlent de la numération décimale de position et surtout de la distributivité de la multiplication sur l'addition.

Aux niveaux P_{+2} et P_{+1}, Camille a décidé de « montrer l'algorithme de la multiplication » par un nombre à deux chiffres de manière « expéditive », sans préparation particulière autre que la révision de l'algorithme à un chiffre. Effectivement, elle démarre directement en posant la multiplication de 2417 par 25. Elle cache immédiatement le 2 de 25 à l'aide d'un morceau de papier :

> Camille : Alors, attention les vélos, regardez bien ce que je vais faire. (Camille pose un cache sur le 2 du second terme). Je cache le 2. Et ce qui nous reste là, c'est ?
> Elève : 5
> Camille : Ouais, c'est une multiplication ?
> Elève : A un chiffre
> Camille : Par 5, comment?
> Elève : A un chiffre
> Camille : A un chiffre, comme vous venez de faire. Alors on va voir, normalement vous devez la maîtriser.

Camille ne donne aucune autre explication ou justification de la première ligne. Arrivée au bout de celle-ci, elle enlève le cache et demande aux élèves comment ils pensent que l'on va continuer : « Formulez des hypothèses. Si c'est pas les bonnes, c'est pas grave ». Ces deux interventions sont non-pertinentes car l'interaction n'est pas au plan mathématique (critère de pertinence C_1). Les effets de ce manque de pertinence mathématiques sont perceptibles dans les réponses des élèves qui se lancent dans un jeu de devinettes. Devant la diversité des réponses (pour la plupart incorrectes), Camille décrit la *règle du zéro* (voir 5). Elle effectue ensuite le calcul de la seconde ligne après avoir placé le cache sur le 5, toujours sans explication. L'addition finale est justifiée par le fait que « on n'a pas vraiment une réponse, là » et par le fait que plusieurs élèves avaient parlé d'une addition au moment des hypothèses à formuler. Là encore l'interaction est non-mathématique et donc, selon C_1, non-pertinente.

Un peu plus tard Camille donne un autre exemple, 583x35, et demande aux élèves d'expliquer chaque passage. Pour la première ligne, l'explication consiste à cacher le 3. Ce qui est à nouveau une intervention mathématiquement non pertinente. Puis, au moment de passer à la seconde ligne d'une multiplication, Camille demande aux élèves pourquoi il faut ajouter un zéro à la seconde ligne. Elle constate que les explications sont confuses et elle décompose le second terme et trace des flèches vers celui-ci (voir **Figure 1**), mais ce n'est pas pour justifier la séparation en deux lignes, mais bien pour dire qu'il s'agit de 30 et que c'est là la raison de l'ajout du zéro.

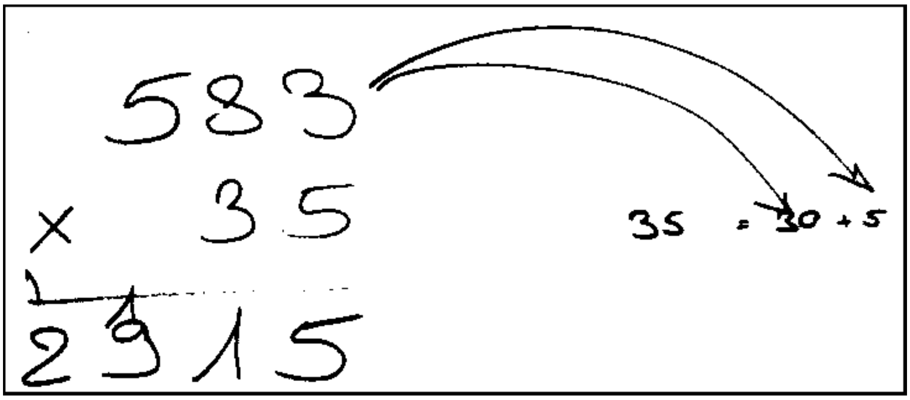


***Figure 1** – Camille, écriture de 35=30+5 et traçage des flèches avant le passage à la seconde ligne.*

Au moment de passer à l'addition, Camille justifie qu'il faut additionner, « parce que c'est pas fini, on n'a pas une réponse, on a deux étages » et que cela ressemble à un calcul donné en devoir. Elle écrit :

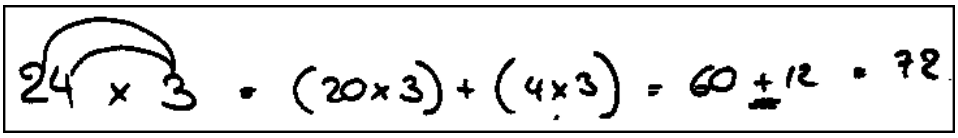


***Figure 2** – Camille, explication du fait qu'il faut additionner les deux lignes de la multiplication 583x35.*

Camille ajoute ensuite que c'est la même chose et qu'il faut donc additionner.

La Connaissance Mathématique Commune de la distributivité est donc présente chez Camille. La Connaissance Mathématique Spécifique que constitue son lien avec l'algorithme de la multiplication est également disponible, mais l'utilisation de cette connaissance n'est pas pertinente pour au moins trois raisons. Tout d'abord la comparaison entre la multiplication 583x35 et 24x3 n'est pas utilisée à bon escient puisqu'il s'agit une fois de « distributivité à gauche » et l'autre fois de « distributivité à droite ». Ensuite cette explication ne vient qu'en appui d'une technique déjà présentée lors de la leçon précédente, un peu comme un truc pour s'en souvenir. Enfin et surtout, même si le lien est fait, il l'est par référence à un calcul déjà effectué et donc pour les élèves, cela se traduit plus par « il faut faire comme dans l'exercice untel » que comme « l'algorithme en colonne revient à effectuer la même décomposition des opérations que le calcul réfléchi ». Autrement dit, là encore, l'interaction n'est pas au niveau mathématique.

4. L'alignement et la gestion des retenues : le lien avec la numération décimale de position

Les quatre enseignants observés présentent à leurs élèves quatre gestions des retenues différentes. Ils gèrent également de façon différenciée l'alignement et verbalisent ou non le lien avec la numération de position.

Lors de l'explication de l'algorithme, Sacha ne dessine pas de colonnes. En revanche, tant durant cette explication que lors des autres algorithmes de multiplication effectués de façon publique, elle désigne la place des chiffres en parlant de « la colonne de unités », ou de la « colonne des dizaines »… Pour ce qui est des retenues, elle choisit, contrairement à ce qui est recommandé dans Cap Math[4], de les noter directement sur la multiplication (et donc dans les colonnes adéquates), en utilisant la même couleur que celle employée pour écrire la ligne correspondante. Ce faisant, elle résout le problème du mélange tout en conservant les sens de la retenue. Ainsi, même si elle n'est pas verbalisée, la CMS des liens entre numération décimale de position, alignement et retenue est manifestée et correcte. De plus, par l'utilisation des couleurs, par une notation et un vocabulaire rigoureux, les interventions de Sacha se situent au plan mathématique et sont donc mathématiquement pertinentes selon le critère C_1.

5. Le zéro de la seconde ligne

Avant la séquence, au niveau P_{+2}, les quatre enseignants estimaient que le zéro de la seconde ligne constituerait la principale difficulté dans l'enseignement de l'algorithme. Tous ont donc prévu pour la leçon concernée, au niveau P_{+1}, une manière de traiter cette difficulté et l'ont utilisée au niveau P_0. Par ailleurs, tous ont affirmé qu'ils souhaitaient que les élèves

[4] Sacha est la seule enseignante à ne pas utiliser les manuels officiels romands COROME (Danalet, Dumas, Studer et Villars-Kneubühler, 1999), mais Cap Math (Charnay, Combier, Dussuc, Madier et Madier, 2007). Ce dernier manuel demande de noter les retenues dans une « boîte à retenue » placée à côté de la multiplication et comportant une ligne d'en tête avec les lettre m, d, c et u et une ligne pour les retenues de chaque produit partiel.

comprennent ce zéro et tous ont appuyé leur explication sur la *règle du zéro* : « pour multiplier par 10, on ajoute un zéro ».

La raison donnée par Dominique pour placer le zéro de la seconde ligne est le fait qu'on travaille avec des dizaines, et que, lorsqu'on travaille avec des dizaines, on ajoute un zéro.

Dominique : C'est 1, ça?
Elève : 10
Dominique : C'est 10 ! Donc attention, quand on travaille avec les dizaines, qu'est-ce qu'on doit rajouter?
Elève : Un zéro.

Dominique s'appuie ici directement sur plusieurs rappels effectués, en particulier durant la leçon précédente, à propos de cette *règle du zéro*. Il avait à ce moment là dit sur plusieurs exemples, « quand on multiplie par 10, on ajoute un zéro ». La formulation devient ici « quand on travaille avec les dizaines ».

Cette formulation, dans ce contexte, est correcte du point de vue des CMC, pour autant qu'on ne la sorte pas de ce contexte et, en particulier, qu'on ne cherche pas à l'appliquer à d'autres moments dans l'algorithme. En effet, si on la prend au pied de la lettre, et c'est ce que font certains élèves, elle conduit à ajouter d'autres zéro à chaque fois que la multiplication concerne un chiffre des dizaines. En fait cette règle, dans le cadre de l'algorithme de la multiplication, est un raccourci de l'associativité de la multiplication et du caractère positionnel décimal du système de numération. Le problème est alors qu'un raccourci efficace, une connaissance encapsulée, ne permet pas une interaction mathématiquement pertinente. Autrement dit la CMS consistant à décortiquer une CMC n'est pas présente ici.

6. Les représentations de la multiplication

Comme illustré dans les exemples ci-dessus, les connaissances mathématiques spécifiques mises en évidence prennent fortement appui sur les ostensifs de la multiplication. Chez les quatre enseignants la représentation de la multiplication comme addition itérée est prédominante, voire unique. Cette constatation avait déjà été faite par Davis et Simmt au Canada (2006, p. 299) ou par Amato (2004, 2005) au Brésil . Dans le cas de Sacha où cette représentation est en accord avec le manuel Cap Math utilisé, et où celui-ci construit les connaissances des élèves sur des bases mathématiques que l'on peut considérer comme adéquates, cela ne pose pas problème. En revanche, quand cet ostensif ne correspond pas aux tâches proposées aux élèves, ou aux explications fournies par l'enseignant, les CMS de l'enseignant apparaissent comme déficientes. De fait, la capacité à varier les points de vues, registres ou cadres est souvent considérée comme la compétence d'un expert. Ce que dit Robert (2008, p. 34) à propos des élèves peut être étendu à l'enseignant : « Un des enjeux de l'apprentissage est d'accéder à une certaine diversité des "représentations" des objets étudiés […], ainsi qu'à une certaine organisation des concepts entre eux permettant d'en acquérir une certaine disponibilité […] ».

Ce point rejoint encore deux des tâches d'enseignement liée aux CMS par l'équipe de Ball : « Recognizing what is involved in using a particular representation ; linking representations to underlying ideas and to other representations »[5] (Ball *et al.* 2008, p.400). Cette CMS fait défaut à propos de la multiplication chez Dominique, Camille et Andrea. L'observation n'a pas permis de savoir si sa manifestation chez Sacha était liée ou non à l'utilisation de Cap Maths.

[5] Etre conscient des implications de l'utilisation d'une représentation particulière ; faire les liens entre une représentation et le concept, entre plusieurs représentations d'un concept. Ma traduction.

L'unique représentation de la multiplication comme addition itérée peut aussi être la cause d'erreurs relevant des CMC. C'est le cas pour Camille qui affirme aux élèves qu'une multiplication agrandit toujours le résultat, alors qu'une division le rend plus petit. Lors de l'entretien *post,* l'enregistrement vidéo de ce moment a été montré à Camille qui n'a remarqué aucun problème. Interrogée plus précisément, elle dit que c'est vrai, « jusqu'en fin de quatrième » et que ça n'est faux que « quand il y a des virgules ». Elle continue d'ailleurs de penser qu'il faut dire aux élèves que multiplier, c'est agrandir et qu'on leur expliquera un jour qu'il y a des cas où cela n'est pas vrai. Cette erreur peut être liée à une représentation purement additive de la multiplication. Cette hypothèse est confirmée par la réaction de Camille lors de l'entretien *post* lorsque la représentation de la multiplication comme aire d'un rectangle lui est présentée : « J'ai jamais fait le lien! J'y ai jamais pensé ». Pourtant, dans la suite de l'entretien, Camille se souvient avoir fait des exercices liant aire et multiplication (La chasse aux rectangles, (Danalet, Dumas, Studer et Villars-Kneubühler 1998, p. 164)), mais en modifiant la donnée de telle sorte que l'exercice serve uniquement à noter les tables de multiplication. Cette erreur sur « la multiplication qui agrandit et la division qui rend plus petit » et son lien avec les représentations additives de la multiplication et partitive de la division a d'ailleurs été relevée par Tirosh et Graeber chez 11% (pour la multiplication) et 52% (pour la division) d'une population de 136 futurs enseignants primaires étatsuniens (Tirosh et Graeber, 1989). La CMS des différentes représentations de la multiplication est donc absente chez Camille et c'est cette absence qui rend possible une erreur mathématique ayant trait aux CMC.

V. CONCLUSION

L'observation de l'enseignement de l'algorithme de la multiplication par un nombre à deux chiffres a permis, à un niveau global, de mettre en évidence une corrélation entre les Connaissances Mathématiques Spécifiques à l'enseignement (CMS) et la pertinence mathématique des intervention de l'enseignant . Elle a également permis de voir que cette corrélation n'est valable pour les Connaissances Mathématiques Communes (CMC) que si elles sont accompagnées d'autres Connaissances Mathématiques pour l'Enseignement (CME), en particulier de CMS. Les analyses à des niveaux de plus en plus fins ont donné des réalisations des liens entre CMS, CMC et pertinence. Ces illustrations montrent que, selon les cas, une CMS peut être liée à des interventions mathématiques qui sont pertinentes ou non-pertinentes. Elles ont également permis d'exhiber des cas où une CMC correcte est liée à une CMS incorrecte. L'exemple d'une CMS absente occasionnant une erreur mathématique commune, alors même que la CMC était présente, a également permis d'affiner la distinction entre les catégories de connaissances. Pour chacune de ces illustrations, les effets sur les choix didactiques des enseignants sont marquants.

Ces résultats incitent tout d'abord à considérer les connaissances mathématiques spécifiques à l'enseignement de manière distincte des connaissances mathématiques communes d'une part et des CME de type pédagogique d'autre part. Mais, du point de vue de la formation, ils incitent surtout à travailler les liens entre ces connaissances afin de permettre une plus grande pertinence mathématique de l'enseignant généraliste.

Les questions que cette recherche nous a amené à nous poser sont plus nombreuses que les réponses apportées. Elles concernent en particulier le développement effectif ou possible des CME, que ce soit en formation initiale, en formation continue ou durant l'exercice de la profession. Elles interrogent également les effets des manuels et des autres ressources sur les CME nécessaires pour enseigner. Enfin la question des points communs et des différences entre enseignants spécialistes et généralistes quant aux CME devrait encore être discutée.

REFERENCES

Amato S. (2004) Improving student teachers mathematical knowledge. *Proceedings of the 10th International Congress on Mathematical Education*. Copenhagen. Consulté le 18 juillet 2011, http://www.icme-organisers.dk/taA/.

Amato S. (2005) *Improving student teachers' understanding of multiplication.* Texte présenté au Conference of the 15th ICMI Study on the Professional Education and Development of Teachers of Mathematics, Águas de Lindóia, Brésil. Consulté le 18 juillet 2011, http://stwww.weizmann.ac.il/G-math/ICMI/SolangeAmato_ICMI15.doc.

Ball D. L., Hill H. C., Bass H. (2005) Knowing mathematics for teaching, who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator* (Fall 2005), 14-22, 43-46. Consulté le 18 juillet 2011, http://deepblue.lib.umich.edu/bitstream/2027.42/65072/4/Ball_F05.pdf.

Ball D. L., Thames M. H., Phelps G. (2008) Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education 59*(5), 389-407. Consulté le 26 décembre 2011, http://jte.sagepub.com/cgi/content/abstract/59/5/389.

Bednarz N., Proulx J. (2009) Connaissance et utilisation des mathématiques dans l'enseignement: Clarifications conceptuelles et épistémologiques prenant leur source dans une analyse de la pratique des enseignants. *For the learning of mathematics, 29*(3), 11-17. Consulté le 18 juillet 2011, http://flm.educ.ualberta.ca/BednarzProulx.pdf.

Bloch I. (2009) Les interactions mathématiques entre professeurs et élèves. Comment travailler leur pertinence en formation? *Petit x 81*, 25-52.

Brousseau G. (1986) La relation didactique: le milieu. In *Actes de la 4e école d'été de didactique des mathématiques* IREM de Paris 7.

Charnay R., Combier G., Dussuc M.-P., Madier D., Madier P. (2007) *Cap Maths CE2, Guide de l'enseignant, manuel de l'élève et matériel photocopiable*. Paris: Hatier.

Clivaz S. (2011) *Des mathématiques pour enseigner, analyse de l'influence des connaissances mathématiques d'enseignants vaudois sur leur enseignement des mathématiques à l'école primaire.* Thèse de doctorat. Université de Genève. Genève. Consulté le 26 décembre 2011, http://archive-ouverte.unige.ch/unige:17047.

Clivaz S. (A paraître) Connaissances mathématiques de l'enseignant et bifurcations didactiques : analyse d'un épisode. *Recherches en didactique.*

Comiti C., Grenier D., Margolinas C. (1995) Niveaux de connaissances en jeu lors d'interactions en situation de classe et modélisation de phénomènes didactiques. Dans G. Arsac, J. Gréa, D. Grenier, A. Tiberghien (Eds.) *Différents types de savoirs et leur articulation* (pp. 91-127). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Danalet C., Dumas J.-P., Studer C., Villars-Kneubühler F. (1998) *Mathématiques 3ème année: Livre du maître, livre de l'élève et fichier de l'élève*. Neuchâtel: COROME.

Danalet C., Dumas J.-P., Studer C., Villars-Kneubühler F. (1999) *Mathématiques 4ème année: Livre du maître, livre de l'élève et fichier de l'élève*. Neuchâtel: COROME.

Davis B., Simmt E. (2006) Mathematics-for-Teaching: an ongoing investigation of the Mathematics that teachers (need to) know. *Educational Studies in Mathematics 61*(3), 293-319. Consulté le 18 juillet 2011, http://dx.doi.org/10.1007/s10649-006-2372-4.

Dolz J., Toulou S. (2008) De la macrostructure de la séquence d'enseignement du texte d'opinion à l'analyse des interactions didactiques. *Travail et formation en éducation*, (1). Consulté le 18 juillet 2011, http://tfe.revues.org/index596.html.

Fassnacht C., Woods D. K. (2002-2011) Transana (Version 2.42) [Mac]. Madison: University of Wisconsin. Consulté le 18 juillet 2011, http://www.transana.org/.

Hill H. C., Rowan B., Ball D. L. (2005). Effects of Teachers' Mathematical Knowledge for Teaching on Student Achievement. *American Educational Research Journa, 42*(2), 371-406.

Margolinas C. (1992) Eléments pour l'analyse du rôle du maître: les phases de conclusion. *Recherches en Didactique des Mathématiques 12*(1), 113–158. Consulté le 24 janvier 2011, http://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00458309/fr/.

Margolinas C. (1995) La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations. In Margolinas C. (Ed.) *Les débats de didactique des mathématiques : actes du Séminaire national 1993-1994*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Margolinas C. (2002) Situations, milieux, connaissances: Analyse de l'activité du professeur. In Dorier J.-L., Artaud M., Artigue M., Berthelot R., Floris R. (Eds.) (pp.141-155) *Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage. Consulté le 18 juillet 2011, http://hal.archives-ouvertes.fr/index.php?halsid=m2hj19vrm34e7osqkidopu67k7etview_this_doc=halshs-00421848etversion=1.

Margolinas C. (2004) *Points de vue de l'élève et du professeur. Essai de développement de la théorie des situations didactiques.* HDR. Université de Provence - Aix-Marseille I. Consulté le 18 juillet 2011, http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00429580/en/.

Menon R. (2003). Exploring preservice teachers' understanding of two-digit multiplication. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*. Consulté le 18 juillet 2011, http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/ramakrishnanmenon.pdf.

Robert A. (2008) Sur les aprentissages des élèves: une problématique inscrite dans les théories de l'activité et du développement In Vandebrouck F. (Ed.) (pp.33-43) *La classe de mathématiques: activités des élèves et pratiques des enseignants*. Toulouse: Octarès.

Schneuwly B., Dolz J., Ronveaux C. (2006) Le synopsis: un outil pour analyser les objets enseignés. In Perrin-Glorian M.-J., Reuter Y. (Eds.) (pp.175-89) *Les méthodes de recherche en didactiques: actes du premier séminaire international sur les méthodes de recherches en didactiques de juin 2005*. Villeneuve d'Ascq: Presses univ. du Septentrion.

Tirosh D. et Graeber A. O. (1989) Preservice elementary teachers' explicit beliefs about multiplication and division. *Educational Studies in Mathematics 20*(1), 79-96. Consulté le 18 juillet 2011, http://dx.doi.org/10.1007/BF00356042.

UN COURS DE SAVOIRS DISCIPLINAIRES EN MATHEMATIQUES EN FORMATION DES MAITRES PRIMAIRES

Michel DERUAZ* – Stéphane CLIVAZ*

Résumé – Dans le cadre de la formation initiale des maîtres primaires vaudois, un cours de savoirs disciplinaires en mathématiques est proposé à un grand nombre d'étudiants. La mise en place de ce cours, tant du point de vue des contenus que de celui de l'organisation des exercices et de celle des examens a conduit à l'utilisation d'une plateforme d'enseignement à distance et à la mise en place d'un examen standardisé à l'aide de questions à choix multiples. Ces solutions sont décrites et soumises à une première analyse critique.

Mots-clefs : savoirs mathématiques, formation des enseignants primaires, évaluation des connaissances, algorithmes, théorie des ensembles

Abstract – As part of primary school teachers' initial training in the canton of Vaud, a course on mathematical knowledge is given to a large number of students. Because of content and organizational (exercises and examination) issues, the implementation of this course led to the use of an e-learning platform and to the elaboration of a standardized test composed of multiple-choice items. These solutions are described and submitted to a first critical analysis.

Keywords: mathematical knowledge, primary teacher training, knowledge's evaluation, algorithms, set theory

I. INTRODUCTION

1. *La formation des maîtres de l'enseignement primaire dans le canton de Vaud*

Dans le canton de Vaud, comme dans la majorité des cantons suisses, la formation des enseignants est confiée à une Haute Ecole Pédagogique (HEP). Pour l'enseignement secondaire, les HEP proposent des formations professionnelles à des titulaires d'un Bachelor ou d'un Master universitaires alors que, pour l'enseignement primaire, les futurs enseignants préparent un Bachelor en trois ans et doivent être titulaires d'une maturité fédérale (baccalauréat) ou d'un titre jugé équivalent pour être admis dans cette formation.

Jusque dans les années 2000, la formation des maîtres primaires était assurée par des écoles normales qui proposaient une formation de type secondaire. Les étudiants étaient regroupés en classes d'une vingtaine d'élèves. Ils suivaient des cours de mathématiques, donnés par des anciens instituteurs ou par des enseignants issus de l'école secondaire, dans lesquels les savoirs disciplinaires s'entremêlaient avec les contenus méthodologiques des moyens d'enseignement imposés par l'institution scolaire. Petit à petit, des contenus de didactique ont été introduits dans ces cours de mathématiques ainsi que dans des cours de didactique générale. La formation des maîtres secondaires ainsi que la recherche étaient confiées à d'autres institutions. Chaque canton avait ses propres établissements de formation et les titres délivrés par un canton, n'étaient pas reconnus par les autres cantons.

A l'heure de la mobilité et des reconnaissances des diplômes au niveau européen, une telle situation n'était plus tenable et la Conférence suisse des Directeurs cantonaux de l'Instruction Publique (CDIP) a décidé de promouvoir la création des Hautes Ecoles Pédagogiques, institutions de niveau tertiaire, responsables de la formation de tous les enseignants ainsi que de la recherche et du développement dans le domaine scolaire. Des critères ont été posés pour

* Haute Ecole Pédagogique du canton de Vaud – Suisse – michel.deruaz@hepl.ch, stephane.clivaz@hepl.ch

© Deruaz M., Clivaz S. (2012) Un cours de savoirs disciplinaires en mathématiques en formation des maîtres primaires. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT1, pp. 183–194). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

que la reconnaissance des titres se fasse au niveau suisse et européen en étant compatible avec les accords de Bologne.

2. L'historique de ce cours de savoirs disciplinaires en mathématiques ?

La Haute Ecole Pédagogique du canton de Vaud (HEP Vaud) a été ouverte en 2001 à Lausanne. La volonté politique de l'époque était de mettre en réseau cette nouvelle école avec l'Université de Lausanne (UNIL) et l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL) pour profiter du rayonnement et de l'expertise académique de ces deux institutions[1]. C'est dans ce contexte que des cours de savoirs disciplinaires dans la formation des futurs maîtres primaires ont été décidés. Pour les mathématiques, l'EPFL a été chargée de donner, dans ses locaux et avec sa propre organisation, un cours de mathématiques. Ce type d'enseignement était nouveau tant pour les professeurs universitaires de l'EPFL qui ne connaissaient pas les enjeux de la formation des maîtres primaires que pour les étudiants qui, le plus souvent, venaient de filières littéraires de l'école secondaire et ne voyaient pas les liens entre les contenus proposés par l'EPFL et les mathématiques qu'ils allaient enseigner plus tard. Les étudiants suivaient, en parallèle, des séminaires de didactique des mathématiques à la HEP Vaud. Au gré des diverses réorganisations des plans d'études de la HEP Vaud et des nouveaux accords avec l'UNIL et l'EPFL, la plupart des cours de savoirs disciplinaires ont été rapatriés à la HEP Vaud, souvent en étant intégrés dans des cours de didactiques. En 2010, l'EPFL a décidé de renoncer à donner le cours de mathématiques et l'Unité d'Enseignement et de Recherche en didactique des Mathématiques et des Sciences de la nature (UER MS) a reçu de la direction de la HEP Vaud le mandat de donner ce cours dès la rentrée de l'année académique 2010-2011.

3. Une première question

Une première question s'est immédiatement posée au sein de l'UER MS : Faut-il maintenir un cours de savoirs disciplinaires en mathématiques ou faut-il intégrer ces savoirs dans les cours de didactique, comme cela se faisait à l'école normale ou comme cela se pratique dans d'autres HEP ?

Une réorganisation de la formation des maîtres primaires annoncée pour la rentrée académique 2012 a incité les formateurs concernés à ne pas modifier pour le moment la répartition entre cours et séminaires. D'autre part, certaines recherches actuellement menées par l'UER MS se font sur le thème des liens entre les connaissances mathématiques des enseignants et leur enseignement (voir par exemple Clivaz 2011). Il a été décidé de tenter de mettre en relation ces recherches avec ce cours de savoirs disciplinaires. Une équipe a ainsi été créée autour du formateur, et premier auteur de cet article, pour construire ce nouveau cours et pour analyser les résultats obtenus dans le but de les intégrer dans la conception du nouveau plan d'études et dans les recherches de l'UER MS.

4. Quelques mots sur ces recherches

Un des objectifs essentiels de ce cours est, pour ses concepteurs, de permettre aux étudiants de percevoir l'impact des savoirs mathématiques appris durant le cours pour leur enseignement futur. Cet objectif, indissociable de l'apprentissage de ces savoirs, s'appuie sur la veine des recherches développées à la suite de l'impulsion de Shulman (1986), en particulier par Ball et son équipe (voir par exemple Ball, Thames et Phelps 2008). La

[1] Historiquement, l'UNIL, puis dans une moindre mesure l'EPFL, avaient le monopole de la formation académique des maîtres de l'école secondaire dans le canton de Vaud.

connaissance pédagogique du contenu (en anglais *Pedagogical Content Knowledge*, PCK) est bien, pour Shulman, d'abord une connaissance du contenu :

> Je parle encore de connaissance du contenu ici, mais de cette forme particulière de connaissance du contenu qui intègre les aspects du contenu les plus liés à son enseignabilité[2]. (Shulman 1986/ 2007, p. 9)

L'adaptation et la catégorisation de ce PCK ont permis à Ball et ses collègues de définir et de catégoriser des *Connaissances Mathématiques pour l'Enseignement* (figure 1).

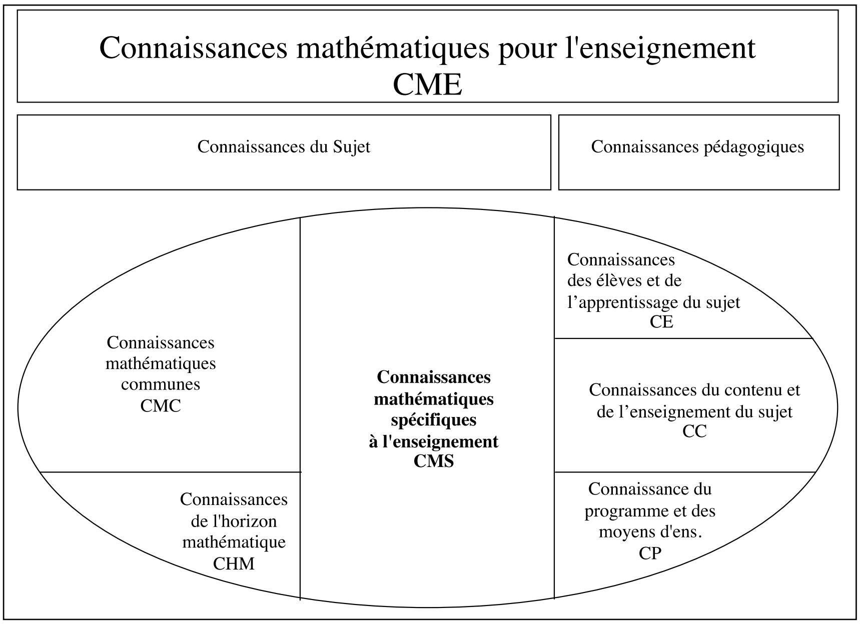


Figure 1 *– Connaissances mathématiques pour l'enseignement (Ball et al. 2008, p. 403)*[3]

La figure 1 a été présentée aux étudiants au début du cours en indiquant que le contenu du cours portait bien sur des connaissances mathématiques *pour l'enseignement*, et plus précisément sur les connaissances considérées comme influençant l'enseignement et l'apprentissage des élèves, les connaissances mathématiques spécifiques à l'enseignement.

5. Quelques autres interrogations apparues pendant la conception du cours

Le cours donné par l'EPFL durait un semestre à raison de 1h30 par semaine. Une séance sur trois était consacrée à des exercices sous la responsabilité d'assistants qui s'occupaient chacun d'une vingtaine d'étudiants. Un examen écrit, corrigé par ces assistants, permettait de certifier ce cours. La réussite était obligatoire pour poursuivre sa formation à la HEP Vaud. Au niveau des contenus mathématiques, L'EPFL avait jugé opportun de travailler essentiellement les méthodes de démonstration appliquées à des résultats élémentaires de théorie des nombres comme la congruence.

L'UER MS n'a pas la possibilité d'engager des assistants et n'a pas le personnel permettant d'animer simultanément huit à dix séances d'exercices. Par ailleurs, le nombre d'étudiants qui suivent ce cours ne cesse d'augmenter, il y avait environ 120 étudiants lors des premières volées et 270 étudiants sont annoncés pour le cours de l'automne 2012 sans que les moyens mis à la disposition de la HEP Vaud et de l'UER MS ne soient augmentés pour autant.

[2] « I still speak of content knowledge here, but of the particular form of content knowledge that embodies the aspects of content most germane to its teachability » (Shulman 1986, p. 9).

[3] Notre traduction des termes de la figure : Mathematical Knowledge for Teaching / Subject Matter Knowledge / Pedagogical Content Knowledge / Common Content Knowledge / Horizon Knowledge / Specialized Content Knowledge / Knowledge of Content and Teaching / Knowledge of Content and Students / Knowledge of Content and Curriculum.

D'autre part, les locaux de l'EPFL sont conçus pour l'enseignement des mathématiques en grands effectifs. Ils sont en particulier pourvus de grandes surfaces de tableaux noirs qui n'existent pas dans les locaux de la HEP.

A la fin de chaque semestre, les étudiants de la HEP doivent remplir des questionnaires pour mesurer la qualité et la pertinence de l'enseignement. Leurs réponses ont permis de relever que la quasi-totalité des étudiants concernés n'ont pas réussi à mettre en évidence des liens entre le cours de l'EPFL et ceux de didactique des mathématiques ou avec leur métier.

Un certain nombre de questions se sont donc posées à l'UER MS :

- Quelles sont les mathématiques utiles aux enseignants de l'école primaire ?
- Peut-on enseigner ces mathématiques dans un cours en grand effectif à ce type d'étudiants ?
- Les infrastructures mises à disposition par la HEP permettent-elles de donner un cours de mathématiques ?
- Comment donner un cours de mathématiques à 200 étudiants sans séances d'exercices en groupes restreints ?
- Comment organiser la certification de ce cours sans une équipe d'assistant ou de formateurs pour corriger les copies ?

Les sections qui suivent nous permettront de décrire quelques-unes des pistes que nous avons explorées lors du premier semestre de l'année 2010-2011 pour essayer de répondre à ces questions. Lors de ce semestre, 163 étudiants étaient inscrits et 154 se sont présentés à la première session d'examens.

II. LE COURS

Notre objectif étant de proposer des outils qui permettent aux futurs enseignants primaires de voir avec un peu de relief les notions qu'ils seront amenés à introduire dans leurs classes, nous avons délibérément choisi de partir des mathématiques de l'école primaire pour proposer à nos étudiants des contenus qui leur offre la possibilité de faire par eux-mêmes des liens, en particulier lors d'analyses *a priori* de tâches mathématiques, entre les mathématiques travaillées dans ce cours et les cours de didactique.

Le programme des quatre premières années de l'école primaire (élèves de 6 à 10 ans) est découpé en six chapitres : *la logique et le raisonnement, le nombre et la numération, les opérations et leurs propriétés mathématiques, les outils de calcul, l'espace et la géométrie, la mesure et le mesurage* (Danalet, Dumas, Studer et Villars-Kneubühler, 1998,1999 ; Ging E., Sauthier M.-H. et Stierli E, 1996, 1997). Nous avons décidé de traiter les quatre premiers chapitres pendant le cours. La géométrie et la mesure n'ont été abordées que par des exemples liés à ces quatre chapitres. En particulier les quadrilatères ont été utilisés pour illustrer les propriétés d'inclusion des ensembles et des exemples de mesurage pour décrire les propriétés de certaines opérations.

Nous observons aussi depuis plusieurs années que nos étudiants ont complètement échappé, dans leur cursus scolaire, aux mathématiques modernes et au vocabulaire spécifique (propriétés des opérations) alors que cette terminologie est beaucoup utilisée dans les livres du maître des manuels officiels romands COROME (Danalet, Dumas, Studer et Villars-Kneubühler, 1998, 1999 ; Ging E., Sauthier M.-H. et Stierli E, 1996, 1997). Il nous a donc paru important d'introduire ce vocabulaire dans le cours.

Afin d'illustrer à la fois les modalités du cours et les sujets abordés, deux exemples sont décrits dans ce qui suit.

1. Une théorie des ensembles à visages humains

Ce chapitre est le premier qui a été traité. Outre les contenus, il doit permettre au formateur de mettre en place les contrats didactiques et pédagogiques pour l'entier du semestre. Il doit aussi convaincre les étudiants que ce cours est intéressant et que la réussite de l'examen ne dépend nullement d'éventuels mauvais résultats en mathématiques à l'école secondaire.

Il a donc été décidé de travailler avec l'ensemble des étudiants du cours comme *univers* et de définir les ensembles A, B et C, comme étant l'ensemble des étudiants qui ont au moins un "a", respectivement un "b" et un "c", dans leur nom ou leur prénom. Cela a permis au formateur de remplir des diagrammes de Venn ou de Carroll animés à partir du trombinoscope des étudiants comme dans la figure 2:

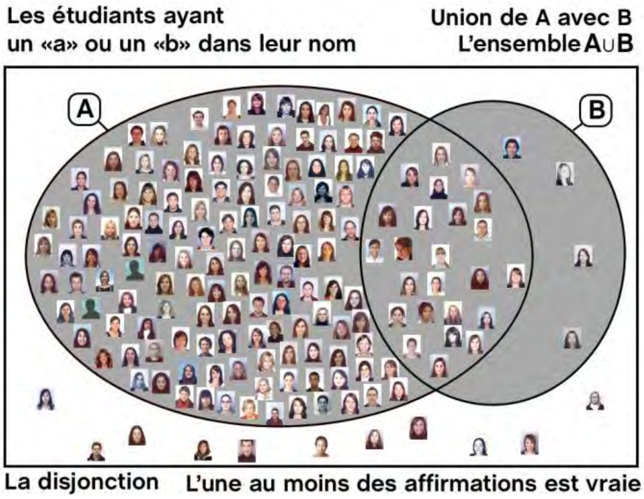


Figure 2–*La disjonction*

En ayant préalablement demandé aux étudiants de venir au cours muni d'un couvre-chef, le travail dans cet *univers*, a permis d'utiliser les étudiants présents au cours pour illustrer quelques démonstrations. Par exemple, pour démontrer que la réunion de deux ensembles est distributive par rapport à l'intersection, les consignes ci-dessous ont été données :

Celles et ceux qui ont un "a" dans leur nom se lèvent.
Celles et ceux qui ont un "b" et un "c" dans leur nom se lèvent.
Celles et ceux qui sont debout mettent un chapeau.
Celles et ceux qui sont debout s'asseyent mais gardent leur chapeau.
Celles et ceux qui ont un "a" ou un "b" dans leur nom se lèvent.
Celles et ceux qui sont debout et qui ont un "a" ou un "c" dans leur nom lèvent la main.
Celles et ceux qui sont debout la main levée sont-ils celles et ceux qui ont un chapeau ?

Les diagrammes de Venn correspondant à chaque étape étaient projetés à l'écran. Ces animations étaient ensuite mises à disposition des étudiants en format papier et en format vidéo pour palier à l'impossibilité de prendre des notes tout en étant acteur dans la construction de la démonstration.

En plus de l'animation, bienvenue lors d'un cours en grand effectif, cette mise en scène était motivée par la constatation de la difficulté éprouvée par les étudiants à se représenter ce qu'est un ensemble[4]. L'utilisation d'un ensemble et de sous-ensembles concrets, tout en utilisant les notations générales habituelles, a permis de faire le lien entre l'ensemble concret des étudiants du cours et l'ensemble général A des éléments qui respectent la propriété "A".

[4] Contrairement à la précédente, la génération actuelle de futurs enseignants n'a pas été baignée dans les mathématiques modernes à l'école primaire.

On fait l'hypothèse que ce point de vue permet aux étudiants de faire le passage du cas particulier au cas général à leur propre rythme. C'est peut-être aussi un moyen de tenir un discours qui permet aux étudiants de le comprendre chacun à son niveau de conceptualisation. Ces hypothèses devront être vérifiées par la suite.

2. *Des algorithmes animés*

Comme nous l'avons déjà précisé plus haut, l'enseignement des algorithmes fait partie des programmes de l'école primaire. Il est donc naturel pour nous de consacrer une partie de ce cours à l'explication de la numération décimale et des algorithmes classiques en insistant sur les liens entre les propriétés des opérations et les justifications de ces algorithmes.

Pour cela, après avoir consacré plusieurs séances à décrire et comparer les systèmes de numération proposés par quelques grandes civilisations, nous avons rappelé le fonctionnement de notre numération décimale en le comparant avec d'autres bases. Cela nous a ensuite permis d'illustrer l'algorithme d'addition, par exemple en base six, à l'aide d'animations comme dans la figure 3, ou celui de la multiplication, par exemple en base cinq, comme dans la figure 4.

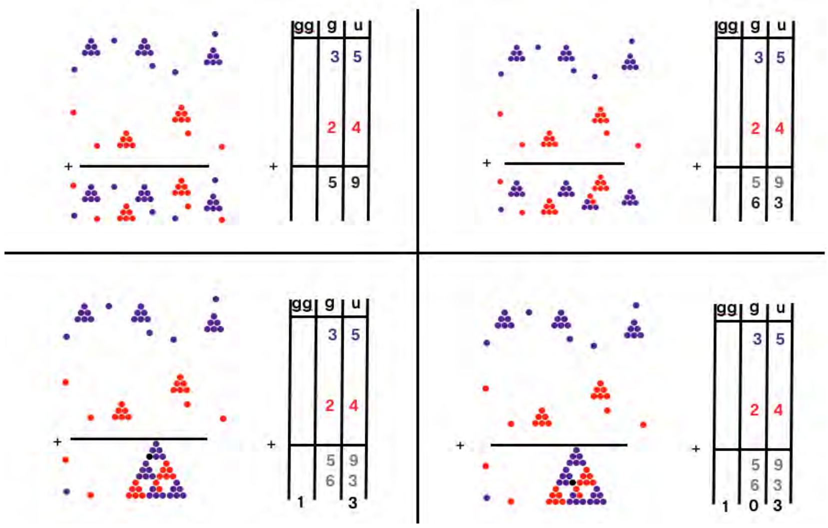


Figure 3*–addition en base six*

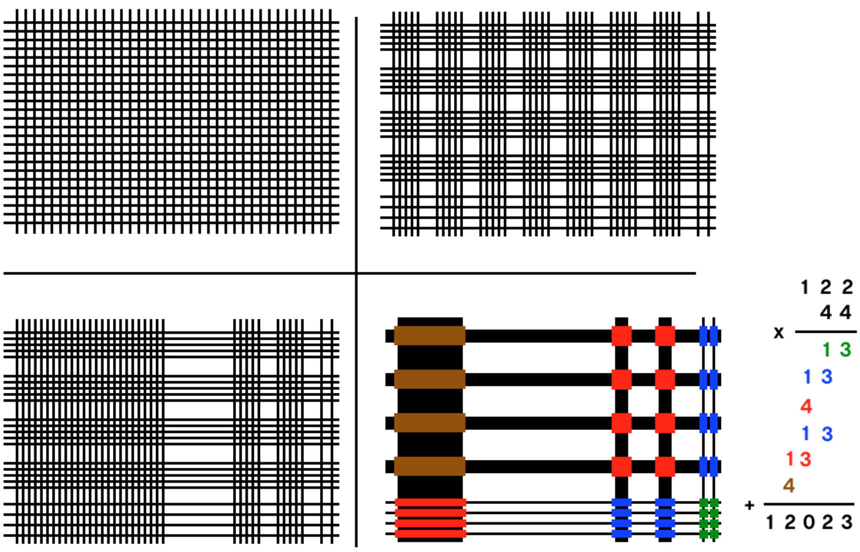


Figure 4*–multiplication en base cinq*

Lors d'observations faites en classe dans le cadre de sa thèse, Clivaz (2011) a pu constater que les enseignants ne font pas le lien entre le produit cartésien et l'algorithme de la multiplication et ont ainsi des difficultés à répondre aux questions de leurs élèves. Là aussi, nous faisons l'hypothèse, encore à vérifier, que le découpage proposé de l'algorithme de la multiplication à partir du produit cartésien permet aux étudiants de faire un pas de côté et de changer de point de vue. Cette représentation pourrait leur permettre de voir cet algorithme comme une conséquence des propriétés de la multiplication et non plus uniquement comme une *recette* efficace.

III. DES SEANCES D'EXERCICES VIRTUELLES

Depuis plusieurs années, la HEP Vaud met à la disposition des formateurs qui en font la demande une plateforme d'enseignement à distance (*Moodle*). Nous avons décidé d'essayer de palier à l'absence d'assistants pour animer des séances d'exercices en proposant des exercices en ligne. Plusieurs modalités ont été testées.

Des exercices complètement en ligne sous forme de *questions à choix multiples* (QCM), de *questions ouvertes à réponses courtes* (QROC), de *glisser-déposer* pour reconstituer des paires et d'un *wiki* permettant aux étudiants de proposer des réponses et de se positionner par rapport aux réponses des autres étudiants. Lors d'une évaluation qualité du module, réalisée la dernière semaine du cours 2010 (avant les examens), 87% des étudiants ont répondu qu'ils ont appris des choses grâce aux exercices en ligne. Quatre tests ont été proposés pendant le semestre pour 1158 passations.

Des exercices *sur feuilles* distribués pendant le cours et avec réponses disponibles sur *Moodle* ont aussi été donnés. Pour une partie de ces exercices nous proposions, soit spontanément, soit à la demande des étudiants, des corrections sous forme de vidéos réalisées à l'aide d'un logiciel d'enregistrement d'écran et d'une tablette graphique. 33 vidéos ont été mises à la disposition des étudiants : 14 comportaient des corrections d'exercices et les autres étaient composées d'exemples pour illustrer le cours ou d'extraits du cours. Il y a eu plus de 4000 consultations de ces vidéos et 85% des étudiants ont répondu qu'ils ont, selon la formulation du questionnaire qualité, appris des choses en visionnant les corrigés vidéo.

Un forum est également à la disposition des étudiants, pour poser des questions, mais aussi pour y répondre. 84 discussions ont été ouvertes pour 186 interventions et plus de 3800 consultations. Il n'y a pas de questions spécifiques sur le forum dans le questionnaire d'évaluation proposé aux étudiants. La quantité importante de données mise à disposition par *Moodle* peut en elle-même faire l'objet de recherches approfondies. Une première lecture permet déjà de relever que les étudiants qui sont intervenus sur ce forum sont les étudiants qui ont obtenu les meilleurs résultats à l'examen. Cela ne signifie pas que leur participation au forum est la cause de ces résultats, ni que ces étudiants sont conscients d'être de «bons étudiants». Une étude plus approfondie sera nécessaire pour voir dans quelle mesure la participation au forum a permis à des étudiants de s'améliorer ou d'augmenter leur confiance. La discussion ci-dessous nous semble bien refléter ce que nous avons pu observer sur ce forum :

> **Arlette (11h11)** : Bonjour tout le monde, pour pouvoir nous entraîner sur le sujet des nombres rationnels, Alice et moi avons inventé des exemples. Mais nous aimerions vous inviter à les faire aussi et à nous partager vos réponses, afin de les comparer.
> Ecrire les nombres ci-dessous en base dix
> a) 2,51 en base six   Notre réponse: 103/36 en base dix ou 2,86111111...
> b)12,444444... en base cinq   Notre réponse: 8 en base dix
> Qu'en pensez-vous? Et vous Monsieur Deruaz ?
> Merci d'avance de votre collaboration.

Nicole (11h34) : Je trouve la même chose pour le a). Par contre pour le b) j'obtiens 11/2 ou 5,5 en base 10...
Albertine (11h59) : Moi j'obtiens tout comme vous (8,861111[5] et 8) mais je ne suis pas sûre d'être une référence.
Nicole (12h26) : Comment un nombre à virgules en base 5 pourrait donner un nombre entier en base 10???? Si on le fait dans l'autre sens, 8 en base 10 donne 13 en base 5...
Janet (12h30) : Je trouve la même chose que vous.
Nicole (12h33) : Comment avez-vous obtenu 8 alors ????
Albertine (12h35) : Alors là c'est une bonne question...
Albertine (12h39) : Avec les formules A= 12, 444, 10 x A= 124,4
10 x A =124,4
1x A =12,4 ici faudrait faire moins
= 112 / 4 on est en base 5=> 112= 32 en base 10
32/4 = 8[6].
Janet (12h38) : C'est aussi ce que j'ai fait!
Nicole (12h46) : C'est moi qui me suis trompée... J'ai utilisé la bonne méthode mais je me suis trompé de base!!!! ^^ Donc oui j'obtiens bien 8!!!!!
Arlette (13h50) : Merci beaucoup pour vos réponse ! On vient de les voir...
Merci Albertine pour l'explication, c'est exactement ce qu'on a fait Alors Nicole, j'espère que ça t'a aidé!
On a toutes les mêmes réponses du coup, donc ce devrait être juste.. Est-ce que M. Deruaz nous confirme cela?....
En tout cas, bonne chance pour demain !
Léa (17h00) : J'vais passer pour une bobette mais quand tu fais 124.4444-12.4444 = 112, tu fais quoi après?
Parce que j'comprends pas ce que tu as écrit la: "= 112 / 4 on est en base 5=> 112= 32 en base 10
32/4 = 8". Merci de m'éclairer.
Léa (17h14) : Pas besoin, j'ai trouvé. Je me suis un peu mélangé les pinceaux !
M. Deruaz (17h42) : Désolé de vous avoir fait attendre mais j'étais en séance jusqu'à maintenant.
Le 103/36 est juste.
Pour le 12,444444... en base cinq, cela donne bien 8 en base dix et vos calculs sont ok.
L'explication du nombre à virgule qui devient un nombre entier est liée au fait qu'en base cinq, 12,444444....=13 comme en base dix, 6.9999....=7 ou plus simplement 0,99999....=1 (1/3=0,333333.... (1/3)*3=1 et 0,33333...*3=0,9999...)
Arlette (21h12) : Merci d'avoir pris du temps pour nous répondre et à demain!

On peut noter que Albertine et Léa introduisent dans leur première intervention une remarque pour préciser qu'elles ne sont pas sûres d'elles, alors que ces deux étudiantes ont obtenus de très bons résultats lors de l'examen qui a eu lieu le lendemain matin (respectivement les 14ème et 44ème résultats sur 154 étudiants qui se sont présentés à l'examen). On peut aussi relever que Léa répond elle-même à sa question quelques minutes après l'avoir posée. Une intervention plus prompte du formateur, soit sur le forum, soit pendant une séance classique d'exercices ne lui aurait peut-être pas permis de prendre conscience qu'elle peut elle-même répondre à sa question. Les interventions de Nicole nous semblent également intéressantes (elle a obtenu le 2ème résultat lors de l'examen). Elle a manifestement commis une erreur pour la question b), par contre sa remarque lors de sa seconde intervention pour remettre en cause la réponse correcte proposée par les autres, bien que judicieuse, n'a pas suscité de véritables réactions. Les interventions qui suivent la sienne se contentent d'expliquer le calcul réalisé en essayant de reproduire les exemples travaillés précédemment mais n'entrent pas dans la démarche critique proposée par Nicole. Une intervention judicieuse d'un modérateur du forum aurait peut-être permis aux autres intervenants de répondre à Nicole.

[5] Probable faute de frappe d'Albertine. Il faut lire 2,861111.
[6] Il est possible que les restrictions du moyen de communication (difficulté à écrire des maths dans le forum) aient incité Albertine à modifier son intervention.

IV. L'EXAMEN

La question de l'examen est assez rapidement apparue comme essentielle. Les forces à la disposition de l'UER MS ne permettaient pas de corriger de manière satisfaisante plus de 150 copies d'un examen écrit traditionnel dans les délais impartis. Nous n'avions en particulier pas la possibilité de faire corriger chaque épreuve par plusieurs correcteurs pour limiter les effets des biais liés à la correction. Pour y arriver, nous aurions dû nous contenter d'un nombre restreint de questions et n'aurions ainsi pas pu évaluer une partie importante de la matière traitée pendant le cours. Nous avons donc opté pour la réalisation d'un examen standardisé en utilisant des Questionnaires à Choix Multiples (QCM).

Pour pallier à une partie des faiblesses liées à l'utilisation des QCM classiques comme les réponses au hasard ou les biais introduits par des questions mal formulées, nous avons eu l'opportunité d'utiliser le Système Méthodologique d'Aide à la Réalisation de Tests (SMART) (Gilles 2010, pp. 57-98) par l'intermédiaire de la plateforme *Exams* (http://psyef-smart13.fapse.ulg.ac.be/examsweb/).

Dans la plateforme *Exams*, pour créer des questions, il faut préalablement construire une table de spécification qui croise les sujets qui feront l'objet de l'évaluation avec une taxonomie. Nous avons utilisé la taxonomie proposée par Bodin (2010).

L'un des reproches souvent faits aux QCM est la difficulté d'évaluer des niveaux taxonomiques élevés. Ce cours de savoirs disciplinaires fait partie d'un module qui comporte aussi des séminaires de didactique des mathématiques qui sont eux évalués par un examen écrit et les deux examens doivent être réussis pour que le module soit validé. Nous avions donc la possibilité d'évaluer la capacité à synthétiser ou à créer lors de cet autre examen. Par ailleurs l'équipe de l'Université de Liège propose l'introduction dans les QCM de Solutions Générales Implicites (SGI) et de Degrés de Certitude (DC). Ces améliorations, proposées entre autres à la suite de Leclercq (1993) et de Gilles (voir par exemple Gilles 2010, pp. 99-112) permettent de palier partiellement à ces faiblesses.

Pour cette première expérience, nous n'avons utilisé qu'un seul type de SGI, *aucune des solutions proposées n'est correcte*. Les trois autres SGI proposées (Leclercq 1993) nous sont apparues comme trop complexes à introduire dans un si bref délai ou peu appropriées aux mathématiques.

« Ce n'est pas ce que nous ignorons qui nous cause des problèmes, mais ce que nous savons … et qui est faux. Reconnaître (…) ses degrés d'incompétence est une habileté fondamentale, une compétence cruciale pour tout apprenant. » (Gilles 2010, p. 101). A la suite des travaux de Gilles, nous estimons qu'il est important voir même essentiel pour un enseignant d'être capable d'estimer son degré de certitude par rapport à une affirmation qu'il peut être amené à faire, en particulier lorsqu'il répond à un élève ou lorsqu'il se positionne par rapport à une proposition d'un élève. *L'ignorance ignorée* est ainsi particulièrement dangereuse. Les DC permettent de tenir compte dans le barème de la certitude avec laquelle l'étudiant a choisi sa réponse parmi les solutions proposées. Nous avons donc utilisé les DC avec l'échelle donnée dans le tableau 1.

Si vous considérez que votre réponse a une probabilité d'être correcte comprise entre	DC N°	Vous obtiendrez les points suivants en cas de réponse	
		correcte	incorrecte
0 % et 25 %	0	+13	+4
25 % et 50 %	1	+16	+3
50 % et 70 %	2	+17	+2
70 % et 85 %	3	+18	+0
85 % et 95 %	4	+19	-6
95 % et 100 %	5	+20	-20

Tableau 1 *– Echelle DC classiques (Gilles 2010, p. 69)*

Le tableau 1 a été présenté lors de la troisième semaine du cours en même temps que les autres modalités de l'examen. Les étudiants ont ensuite eu la possibilité de se familiariser avec ce barème lors d'un examen blanc proposé en ligne quelques semaines avant la fin du cours. L'entraînement des étudiants à l'examen est d'ailleurs l'une des huit étapes du SMART (Gilles 2010, p. 33).

Une autre étape importante du SMART est l'analyse des résultats du test ; globalement en utilisant, par exemple, l'*alpha de Cronbach* mais aussi par question en utilisant des indicateurs comme le coefficient de corrélation bisériale de point classique (rpbis) (voir par exemple Gilles 2010, pp. 171-177). Ceux-ci permettent « de mesurer le pouvoir séparateur d'une question, c'est à dire la capacité à distinguer les étudiants qui réussissent la question des étudiants qui échouent » (Gilles 2010, p. 171). En d'autres termes, ce coefficient permet de déterminer si les étudiants qui ont choisi une solution donnée sont les étudiants qui ont obtenu un bon résultat sur l'ensemble du test. Cela permet éventuellement d'accepter comme correcte une réponse initialement prévue comme un distracteur ou d'annuler une question si ses résultats et une analyse *a posteriori* de cette question et des réponses proposées laissent supposer qu'il y a une ambigüité.

Le tableau 2 montre les résultats obtenus pour la question 20 de l'examen :

	Pas de réponse	Sol 1	Sol 2	Sol 3	**Sol 4**	Sol 5	Aucune
Nombre d'étudiants qui ont choisi cette solution	1 (0,65%)	5 (3,25%)	25 (16,23%)	29 (18,83%)	**38 (24,68%)**	6 (3,9%)	50 (32,47%)
RpBis	-0,45	-0,43	-0,58	-0,58	**0,55**	-0,52	-0,61

Tableau 2 *– Les RpBis de la question 20 de l'examen*

La solution correcte à cette question est la solution 4. Sans les rpbis, le fait qu'un nombre plus élevé d'étudiants aient choisi la SGI *aucune* peut remettre en question la pertinence des solutions proposées mais le rpbis de 0,55 pour la solution 4, largement supérieur au seuil de 0,18 pertinent pour un test de 32 questions ($1/\sqrt{n}$) (Gilles 2010, p. 176) et des rpbis négatifs pour toutes les autres solutions montrent que la majorité des bons étudiants sur l'ensemble de l'examen a répondu correctement à cette question. Elle peut donc être considérée comme pertinente.

La question 7, analysée dans le tableau 3 est nettement moins satisfaisante :

	Pas de réponse	Sol 1	Sol 2	**Sol 3**	Sol 4	Sol 5	Aucune
Nombre d'étudiants qui ont choisi cette solution	0	15 (9,74%)	16 (10,39%)	**54 (35,06%)**	65 (42,21%)	0	4 (2,6%)
RpBis		0,05	-0,18	**0,11**	-0,11		0,07

***Tableau 3** – Les RpBis de la question 7 de l'examen*

La réponse attendue est la solution 3. Comme pour la question 20 (tableau 2), une autre solution (solution 4) a été choisie par un nombre plus élevé d'étudiants. Par contre, dans le cas de cette question 7 (tableau 3), le rpbis de la solution attendue est inférieur au seuil de 0,18 et deux autres solutions (solution 1 et SGI *aucune*) obtiennent des rpbis positifs. Une relecture *a posteriori* de la question et des solutions proposées a montré qu'il y avait une ambigüité possible et cette question a fait l'objet d'un traitement spécifique dans le barème définitif de l'examen.

La plateforme *Exams* propose aussi des résultats individualisés aux étudiants à l'aide de tableaux et de graphiques qui donnent des résultats par chapitre ou par niveau taxonomique et qui analysent la pertinence de l'utilisation des DC. Pour cette première expérience, nous n'avons pas utilisé ces possibilités car nous n'étions pas convaincus de savoir les exploiter correctement. Faute de temps pour les implémenter, nous n'avons pas fourni aux étudiants des feedback en ligne expliquant, après l'examen, pourquoi leur choix, question par question, sont bons ou non. Idéalement, des feedback doivent apparaître, au moins pour les tests formatifs, lors d'une prochaine occurrence de ce cours.

V. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Les aléas du calendrier font que cette contribution a été rédigée immédiatement après la première occurrence de ce cours sans que les auteurs n'aient pu exploiter l'ensemble des données récoltées, tant par la plateforme *Moodle* pour le cours et les exercices, que par la plateforme *Exams* pour les examens. Lors de l'évaluation du cours, à la fin de celui-ci, 60% des étudiants interrogés ont répondu qu'ils avaient trouvé ce cours utile à la pratique d'enseignant. Ce résultat est encourageant mais doit pouvoir être amélioré en mettant encore plus en évidence les liens entre certaines parties du cours et des exercices tirés des manuels officiels utilisés sur le terrain par les enseignants (Danalet, Dumas, Studer et Villars-Kneubühler 1998, 1999; Ging E., Sauthier M.-H. et Stierli E. 1996, 1997). Au niveau de l'utilisation des plateformes *Moodle* et *Exams* pendant le semestre, des pré-tests avant le début de chaque chapitre ainsi que des tests formatifs à la fin de ceux-ci doivent à l'avenir permettre aux étudiants et aux enseignants de mieux mesurer l'impact du cours sur les apprentissages des étudiants, tant au niveau de la réponse que du pourcentage de certitude associé à chaque réponse. On pourra ainsi mesurer un progrès en constatant que les pourcentages de réponses correctes augmentent, ou que les degrés de certitude affectés à des réponses correctes augmentent, ou encore que ceux affectés à des réponses incorrectes diminuent.

Nous allons aussi essayer de comparer les résultats obtenus à une question, en particulier le pourcentage de certitude moyen utilisé par les étudiants avec ceux d'une analyse *a priori* de la question. Pour cela, nous avons l'intention de travailler avec des analyses de tâches en testant l'hypothèse d'un lien entre le nombre d'adaptations de connaissances (Robert 2008, pp. 48-50) et le pourcentage de certitude moyen utilisé par les étudiants. Notre but est de mettre en place une typologie des exercices similaire à celle proposée par Vandebrouck et Cazes (2005).

Plus généralement, nous allons construire progressivement une base de données de questions à choix multiples dans le but de mesurer les connaissances mathématiques des enseignants en utilisant les DC. Base de données que nous pourrons utiliser comme outil de mesure dans de futurs projets de recherche.

REFERENCES

Ball D. L., Thames M. H., Phelps G. (2008) Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407. Consulté le 18 juillet 2011, http://jte.sagepub.com/cgi/content/abstract/59/5/389.

Bodin A. (2010) *Proposition de nouvelle taxonomie pour les énoncés de mathématiques Classement par niveaux hiérarchisés de complexité cognitive*. Consulté le 18 juillet 2011, http://ebookbrowse.com/taxonomie-a-bodin-pdf-d99333161.

Clivaz S. (2011) *Des mathématiques pour enseigner, analyse de l'influence des connaissances mathématiques d'enseignants vaudois sur leur enseignement des mathématiques à l'école primaire.* Thèse de doctorat. Université de Genève. Consulté le 27 septembre 2011, http://archive-ouverte.unige.ch/unige:17047.

Gilles J.-L. (2010) *Qualité spectrale des tests standardisés universitaires*. Sarrebruck: Editions universitaires européennes.

Leclercq D. (1993) Validity, Reliability and Acuity of Self-Assessment in Educational Testing. In Leclercq D., Bruno J. (Eds) (pp. 113-131). *Item Banking: Interactive Testing and Self-Assessment* NATO ASI Series. Heidelberg: Springer Verlag.

Robert A. (2008) Une méthodologie pour analyse les activités (possibles) des élèves en classe. In Vandebrouck F. (Ed.) (pp. 45-57). *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants.* Toulouse: Octarès.

Shulman L. S. (1986) Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher* 15(2), 4-14. Consulté le 18 juillet 2011, http://edr.sagepub.com/cgi/reprint/15/2/4.

Shulman L. S. (2007) Ceux qui comprennent. Le développement de la connaissance dans l'enseignement (G. Sensevy et C. Amade-Escot, trad.). *Éducation et didactique*, 1(1), 97-114. (Original publié 1986). Consulté le 18 juillet 2011, http://educationdidactique.revues.org/121.

Vandebrouck F., Cazes C. (2005) *Analyse de fichiers de traces d'étudiants : aspects didactiques*. Consulté le 18 juillet 2011, http://sticef.univ-lemans.fr/num/vol2005/vandebrouck-06/sticef_2005_vandebrouck_06p.pdf.

MANUELS SCOLAIRES

Danalet C., Dumas J.-P., Studer C., Villars-Kneubühler F. (1998) *Mathématiques 3ème année: Livre du maître, livre de l'élève et fichier de l'élève*. Neuchâtel: COROME.

Danalet C., Dumas J.-P., Studer C., Villars-Kneubühler F. (1999) *Mathématiques 4ème année: Livre du maître, livre de l'élève et fichier de l'élève*. Neuchâtel: COROME.

Ging E., Sauthier M.-H., Stierli E. (1996) *Mathématiques* 1ère *année: Livre du maître, livre de l'élève et fichier de l'élève*. Neuchâtel: COROME.

Ging E., Sauthier M.-H., Stierli E. (1997) *Mathématiques* 2ème *année: Livre du maître, livre de l'élève et fichier de l'élève*. Neuchâtel: COROME.

INTÉGRER LES CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES ET DIDACTIQUES : LE CAS DE LA FORMATION EN ENSEIGNEMENT AU PRÉSCOLAIRE ET AU PRIMAIRE DE L'UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Marie-Pier MORIN* – Laurent THEIS* – Julien ROSA-FRANCOEUR*

Résumé – Il est reconnu que les futurs enseignants du primaire présentent des difficultés importantes dans la maîtrise des connaissances mathématiques qu'ils auront à enseigner aux élèves (Adihou et Arsenault 2012; Adihou, Arsenault et Marchand 2006; Arsenault et Voyer 2003; Morin 2008; Morin et Theis 2006). À l'Université de Sherbrooke, étant donné que la formation mathématique est intégrée à la formation didactique, nous devons amener nos étudiants à surmonter leurs difficultés conceptuelles en mathématiques dans le cadre de nos cours de didactique. Cette communication présente trois activités de formation élaborées à partir de la théorisation des connaissances mobilisées dans l'enseignement des mathématiques (Bednarz et Proulx 2009).

Mots-clefs : Didactique des mathématiques, futurs enseignants, difficultés en mathématiques, imbrication des connaissances mathématiques et didactique, activités d'apprentissage

Abstract – It is known that preservice teachers have difficulty understanding the mathematical concepts that they will need to teach their students (Adihou & Arsenault 2012; Adihou, Arsenault & Marchand 2006; Arsenault & Voyer 2003; Morin 2008; Morin & Theis 2006). At Université de Sherbrooke, because mathematical principles are integrated in didactic courses, we must encourage our students to surmount their conceptual difficulties in mathematics in our didactic classes. This document presents three educational activities based on the theorization of knowledge mobilized in mathematical teaching (Bednarz & Proulx 2009).

Keywords: Didactics, preservice teachers, mathematical difficulties, interconnection between mathematical and didactic knowledge, learning activities

I. INTRODUCTION

Les cours de didactique des mathématiques dans le cadre de la formation des futurs enseignants du préscolaire et du primaire de l'Université de Sherbrooke font ressortir de nombreuses difficultés sur le plan disciplinaire, lesquelles doivent être abordées à l'intérieur des cours de didactique.

II. DIFFICULTES DES FUTURS ENSEIGNANTS DANS L'APPRENTISSAGE DE LA DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

Dans le cadre d'une communication précédente (Morin et Theis 2006), nous avions fait ressortir que les futurs enseignants présentent des difficultés importantes en mathématiques. Nous nous étions alors appuyés sur les résultats à un test de mathématiques de niveau 6[e] année du primaire que nous avions fait passer aux futurs enseignants à leur entrée au baccalauréat (N=204). La moyenne obtenue était alors de 51,69 %, avec un écart-type de 16,4 %. En 2010, nous avons fait passer ce même test aux futurs enseignants qui arrivaient en formation. Rappelons que ce test est composé de 22 questions, réparties en cinq classes : connaissances, sens, propriétés des nombres, opérations et raisonnement. Les résultats à cette nouvelle passation sont encore plus alarmants. En effet, la moyenne est de 46 %, avec un écart-type de 17 %. La note la plus élevée est de 86 % alors que la moins élevée est de 11 %.

* Université de Sherbrooke – Canada – Marie-Pier.Morin@USherbrooke.ca – Laurent.Theis@USherbrooke.ca – Julien.Rosa-Francoeur@USherbrooke.ca

© Morin M-P., Theis L., Rosa- Francoeur J. (2012) Intégrer les connaissances mathématiques et didactiques : le cas de la formation en enseignement au préscolaire et au primaire de l'université de Sherbrooke. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21[e] siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT1, pp. 195–205). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

Ces résultats montrent que les étudiants ont des bagages de connaissances mathématiques très différents les uns des autres lorsqu'ils arrivent en formation des maîtres. Pour certains de ces étudiants, la dernière fois qu'ils ont fait des mathématiques remonte à la quatrième année du secondaire (15 ans) alors que d'autres ont fait des mathématiques tout au long de leur formation collégiale. Nous pourrions croire que les mathématiques faites à ce niveau n'ont pas d'incidence sur les mathématiques de la formation des enseignants, mais les résultats montrent le contraire. En effet, les étudiants qui n'ont pas eu de cours de mathématiques au collégial et pour qui, conséquemment, le dernier cours de mathématiques remonte au secondaire ont obtenu une moyenne de 35 %. À l'opposé, les étudiants qui ont fait des mathématiques au collégial ont obtenu une moyenne de 62 %. Nous faisons ainsi l'hypothèse que, même si ce ne sont pas les mêmes mathématiques que celles faites au primaire, il reste que les étudiants qui ont fait des mathématiques au collégial ont continué leur activité mathématique, ce qui fait qu'ils ont mieux performé à ce test.

Quoi qu'il en soit, dans nos cours de didactique des mathématiques, nous devons composer avec ces étudiants qui ont des niveaux de connaissances très variés en mathématiques. Même si nous offrons des cliniques d'aide ayant principalement pour but d'aider les étudiants à comprendre les erreurs commises dans le test mathématique, ces cliniques d'une durée de deux heures sont trop brèves et ne peuvent agir sur les conceptions erronées des futurs enseignants[1]. Ce travail est plutôt à réaliser dans le cadre des cours de didactique des mathématiques dans lesquels la formation mathématique est intégrée. Dans un texte portant sur les connaissances mathématiques et didactiques des futurs maîtres du primaire, Morin (2008) pose qu'un des aspects fondamentaux de la formation didactique serait d'amener les étudiants à intégrer leurs connaissances mathématiques et didactiques en enseignement. Dans le cadre de notre enseignement à la formation des maîtres, les nombreuses difficultés de nos étudiants sur le plan mathématique font en sorte que nous nous questionnons constamment à savoir comment intégrer ces connaissances mathématiques et didactiques en enseignement.

Ailleurs au Québec, Adihou et Arsenault (2012), Adihou, Arsenault et Marchand (2006) de même qu'Arsenault et Voyer (2003) ont également observé une maîtrise inadéquate des connaissances mathématiques chez les futurs maîtres du primaire. Depuis 2004, ce groupe d'auteurs fait passer un examen de culture et de compétences en mathématiques portant sur des notions du primaire et du premier cycle du secondaire à tous les étudiants de leur université inscrits à la formation des maîtres. En 2010, les résultats montrent que seulement 25 % des étudiants ont atteint le seuil de passage, fixé à 75 %. Malgré ces résultats, il est tout de même encourageant de constater que cette évaluation permet une prise de conscience chez les futurs enseignants du travail à réaliser pour avoir une bonne maîtrise des contenus qu'ils auront à enseigner. En effet, les mesures d'aide et les dispositifs de formation mis en place par l'Université du Québec à Rimouski ont permis à 93,3 % des 163 étudiants inscrits au baccalauréat en 2004 de réussir cette épreuve avant la fin de leur formation. Notons cependant que, pour certains, six passations ont été nécessaires.

D'autres auteurs ont également constaté des lacunes chez les futurs enseignants au regard de leur compréhension des concepts mathématiques (Matthews et Seaman 2007; Pickreign 2007; Stacey, Helme, Steinle, Baturo, Irwin et Bana 2001). Par exemple, Pickreign (2007), qui a étudié la compréhension des propriétés géométriques des parallélogrammes chez 40 futurs enseignants, a constaté que seulement neuf d'entre eux sont arrivés à articuler une

[1] Dans Morin et Theis (2006), nous avions exposé le fait que, dans un premier temps, nous avons offert un dispositif d'aide plus complet à nos étudiants. Toutefois, étant donné que les étudiants qui présentent des difficultés en mathématiques présentent aussi des difficultés en français et qu'une sanction est rattachée à cette dernière discipline, ils la privilégient au détriment des mathématiques. Nous avons ainsi opté pour des cliniques d'aide plus courtes, qui s'insèrent mieux dans l'horaire chargé des étudiants.

définition adéquate de ce qu'est un rectangle, tandis qu'un seul est parvenu à le faire dans le cas d'un losange. Des difficultés à raisonner à l'aide de concepts et de processus en géométrie ont également été observées par Adihou et Arsenault (2012) chez les futurs enseignants qu'ils ont évalués.

III. CONNAISSANCES MATHEMATIQUES NECESSAIRES POUR ENSEIGNER LES MATHEMATIQUES

Ball, Thames et Phelps (2008) et Hill et Ball (2009) distinguent différents types de connaissances mathématiques. Dans le modèle développé par ces auteurs, les connaissances mathématiques sont regroupées en deux catégories principales : les connaissances du contenu (*subject matter knowledge*) et les connaissances didactiques (*pedagogical content knowledge*).

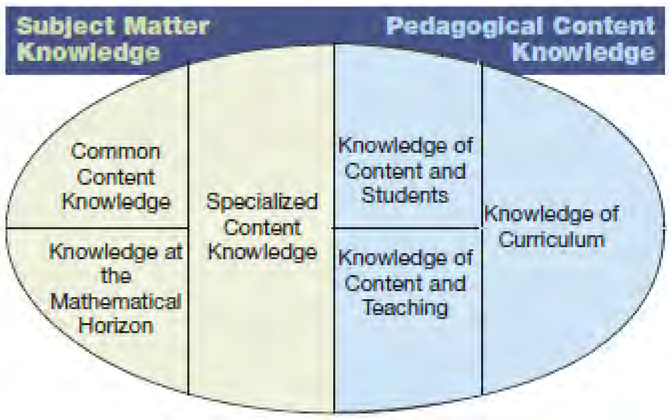


Figure 1 *– Les types de connaissances mathématiques, selon Hill et Ball (2009, p.70)*

Dans la première catégorie se retrouvent trois types de connaissances. La première concerne les connaissances générales du contenu (*common content knowledge*). Cette catégorie est définie comme les connaissances et habiletés mathématiques utilisées dans d'autres domaines que l'enseignement. Elles font référence à la résolution correcte d'un problème et sont nécessaires parce que l'enseignant doit être en mesure de réaliser les tâches qu'il demande à ses élèves. Les connaissances mathématiques spécifiques à l'enseignement *(specialized content knowledge)* constituent une deuxième catégorie et font référence aux connaissances qui sont spécifiques à l'enseignant et qui ne se retrouvent pas dans le travail du mathématicien. Elles interviennent par exemple lorsqu'un enseignant doit déterminer si une stratégie de résolution inhabituelle proposée par un élève est valide ou non ou lorsque l'enseignant essaie de retrouver des régularités dans les erreurs d'un élève. Finalement, un troisième type de connaissances dans cette catégorie implique une connaissance de l'horizon mathématique (*horizon content knowledge*), qui demande à l'enseignant de connecter les mathématiques enseignées à un niveau précis aux mathématiques enseignées à d'autres moments.

Dans les connaissances didactiques, on retrouve d'abord les connaissances sur le contenu en lien avec les élèves (*knowledge of content and students*). Ces connaissances interviennent par exemple pour anticiper les raisonnements des élèves ou le degré de difficulté d'une tâche qui leur est proposée. Les enseignants doivent également être en mesure de reconnaître et d'interpréter les raisonnements émergents des élèves. Pour accomplir ces tâches, les enseignants doivent alors faire interagir leur compréhension mathématique avec leur connaissance des élèves et les raisonnements mathématiques de ces derniers. Ensuite, les connaissances sur le contenu en lien avec l'enseignement (*knowledge of content and teaching*) se situent à l'intersection entre les mathématiques et l'enseignement. Ces connaissances sont nécessaires par exemple lors de la planification du déroulement d'une séquence d'enseignement, du choix des exemples utilisés pour enseigner un concept donné et de l'évaluation des avantages et inconvénients d'une représentation donnée d'un concept. Finalement, les connaissances des programmes constituent une dernière catégorie des connaissances didactiques[2].

Ce cadre nous semble intéressant parce qu'il tient compte de toutes les dimensions de l'enseignement et peut donc nous donner des indications quant aux connaissances mathématiques nécessaires pour l'enseignement. Or, dans notre travail de formateurs d'enseignants, nous concevons que ces composantes sont davantage imbriquées les unes aux autres. C'est pourquoi nous avons aussi choisi de présenter le travail de Bednarz et Proulx (2009) qui, partant du mouvement de recherche sur les connaissances mathématiques pour l'enseignement qui prend sa source dans les travaux de D. Ball et de H. Bass, ont proposé une théorisation de ce que sont les connaissances mobilisées dans l'enseignement des mathématiques. Cette théorisation a été réalisée à partir de recherches collaboratives conduites auprès d'enseignants qui leur ont permis de « mieux comprendre les connaissances [que les enseignants] mettent à contribution dans l'élaboration et la réalisation de situations d'enseignement/apprentissage en mathématiques » (Op. cité, p.1). De même, une réflexion portant sur les interventions réalisées dans le cadre de la formation des futurs enseignants du secondaire de l'Université du Québec à Montréal depuis 1970 est également à la base de cette théorisation.

À travers des exemples tirés de la pratique d'un enseignant du secondaire, Bednarz et Proulx (2009) font ressortir quatre dimensions imbriquées qui sont à la base du travail de l'enseignant de mathématiques :

> une dimension institutionnelle (en référence au programme), une dimension didactique (dans l'analyse de l'activité et de son intérêt, de ce qu'elle force chez les élèves, de ce qu'elle va chercher), une dimension mathématique (à travers les raisonnements et propriétés clés qu'elle travaille, les registres de représentation), une dimension pédagogique (dans la visée « apprendre à fonctionner », à coopérer avec les autres, à travailler ensemble). (Op. cité, p. 2)

Ces dimensions sont à la base des connaissances mathématiques que mobilise l'enseignant dans le cadre de sa pratique : les connaissances institutionnelles, les connaissances didactiques, les connaissances mathématiques et les connaissances pédagogiques. Ces connaissances, toutes imbriquées les unes aux autres, forment le bagage dans lequel l'enseignant puise pour préparer ses interventions, soutenir son action et analyser les diverses situations auxquelles il est confronté. En rappelant le caractère situé des connaissances mathématiques mobilisées par l'enseignant, Bednarz et Proulx (2009) mettent de l'avant que, pour eux, ces connaissances sont toujours ancrées dans un contexte, « dans une situation d'enseignement/apprentissage des mathématiques donnée, en lien avec les tâches effectives de l'enseignant » (Op. cité, p. 6). C'est précisément ce dont nous essayons de nous rapprocher lorsque nous préparons nos futurs enseignants à enseigner les mathématiques aux élèves. En effet, faute de pouvoir amener les élèves à l'université, nous tentons dans nos approches de nous rapprocher le plus possible des tâches effectives de l'enseignant. Aussi, nous adoptons cette façon de faire parce qu'il arrive souvent qu'il y ait un décalage au plan des contenus

---

[2] Dans Ball et al. (2008), cette catégorie de connaissances est la seule à ne pas être définie de manière explicite. Les auteurs se réfèrent cependant, dans la première partie de l'article, à Shulman (1986) qui considère que cette catégorie de connaissances est "représentée par les programmes construits pour l'enseignement d'un sujet particulier à un moment donné, à la variété des matériels didactiques disponibles en relation avec ces programmes et les caractéristiques qui servent d'indicateurs et de contre-indicateurs pour l'utilisation de certain matériels reliés au programmes dans des circonstances particulières". (p. 391, traduction libre)

entre ce qui est vu en classe et ce qui est fait en stage. Ce décalage est présent malgré le fait que les stages de formation soient pensés en fonction d'une approche-programme, dans laquelle les cours et les stages d'une même année réfèrent tous aux mêmes niveaux scolaires. Par exemple, en 2e année de formation, tous les cours réfèrent au préscolaire et au 1er cycle du primaire et les stages sont également réalisés au préscolaire ou au 1er cycle du primaire. Ce faisant, il y a plus de chance que ce qui est vu en classe s'applique aux élèves de stage. Pour ainsi pallier au fait qu'il peut y avoir un décalage entre les contenus vus en classe et ceux vus en stage, nous tentons en quelque sorte d'amener le milieu scolaire dans nos cours de didactique afin que les étudiants travaillent avec des travaux de « vrais » élèves.

Dans le cadre de cette communication, nous présenterons trois tâches développées dans nos cours de didactique des mathématiques, lesquelles ont pour but d'articuler les formations mathématique et didactique. Dans la présentation de ces tâches, nous ferons ressortir de quelle façon nous essayons d'enraciner ces tâches dans la pratique de l'enseignant. D'autre part, nous argumenterons de quelle façon nous tentons d'arrimer ces tâches aux dimensions qui sont à la base des connaissances mathématiques que mobilise l'enseignant dans le cadre de sa pratique (institutionnelles, didactiques, mathématiques et pédagogiques).

Nous mettrons d'abord de l'avant une activité dans laquelle nous abordons l'évaluation en mathématiques. Nous verrons ensuite une activité que nous présentons aux étudiants dans le but de leur exposer la démarche de résolution de situation-problème. Enfin, nous présenterons une dernière activité dans laquelle les étudiants sont invités à se positionner sur la compréhension d'élèves lors de la résolution d'un problème mathématique.

IV. SITUATION 1 :ÉVALUATION

Dans le but d'ancrer les cours de didactique dans la pratique, lorsque nous donnons un cours, nous associons le groupe d'étudiants[3] à la classe d'un enseignant du primaire. Pour l'exercice, nous prendrons l'exemple de l'automne 2010 où nous avons donné un cours de didactique de l'arithmétique qui portait sur des notions abordées aux 2e et 3e cycles du primaire. Nous nous sommes alors associés à un enseignant qui avait une classe d'élèves de 4e année (9−10 ans) et de 6e année (11−12 ans), des élèves de chacun de ces niveaux formant le groupe. Voulant mieux connaître le niveau des élèves de sa nouvelle classe concernant la maîtrise de l'algorithme de multiplication, l'enseignant a demandé aux étudiants de bâtir une évaluation qui lui permettrait d'avoir un portrait juste de sa classe. Cette tâche semblait bien facile pour ces étudiants, qui pensaient ne devoir faire qu'un simple test de multiplications. Toutefois, des questions, tant de notre part que de la part des étudiants, sont rapidement apparues. Comment réaliser ce test ? Sur quelles bases ? Quel est le niveau des élèves ? Tant de questions auxquelles ils ont dû trouver des informations pertinentes pour y répondre.

Au plan mathématique, nous avons amené les étudiants à faire l'analyse conceptuelle de l'algorithme de multiplication en revisitant le sens de la multiplication, la relation avec la numération positionnelle, le nombre de chiffres au multiplicateur, la retenue et le rôle du zéro dans l'algorithme. Cette analyse a amené les étudiants à re-conceptualiser leurs connaissances par rapport à l'algorithme de la multiplication. En effet, à l'instar de Proulx (2010), qui a remarqué que les futurs enseignants du secondaire ont souvent à la fois une « compréhension compressée » des mathématiques ainsi qu'une « compréhension instrumentale » des mathématiques, nous pensons que les futurs enseignants du primaire peuvent avoir une compréhension instrumentale des mathématiques. Une telle compréhension implique que le futur enseignant maîtrise surtout le « comment faire », sans comprendre le « pourquoi le faire

[3] Généralement formé de 40 à 45 étudiants.

ainsi ». Lorsque de tels cas se présentent, Proulx (2010) plaide en faveur d'une re-conceptualisation des mathématiques, travail qui est certainement aussi pertinent pour les enseignants du primaire que pour ceux du secondaire. Différence notable, cependant, le point de départ diffère largement. Si les enseignants au secondaire peuvent s'appuyer sur une formation solide en mathématiques, la re-conceptualisation revêt souvent également le caractère de reconstruction de savoirs mathématiques de base pour les futurs enseignants du primaire.

Sur le plan didactique, cette analyse a permis aux étudiants d'anticiper les difficultés pouvant survenir dans la résolution d'une multiplication et de confronter ces erreurs à celles vues dans la littérature. Ensuite, les étudiants ont eu à se questionner sur le niveau de difficulté des tests. Où devraient être rendus des élèves de 4^{e} et de 6^{e} années en multiplication ? Pour répondre à cette question, les étudiants ont dû mobiliser une ressource institutionnelle en s'appropriant la *Progression des apprentissages* du *Programme de formation de l'école québécoise* (PFEQ) pour cibler ce que devraient savoir ces élèves.

Après avoir répondu à ces questions, nous avons abordé en équipes le sujet des tests. Comment élaborer un test qui mesure bien ce qu'il prétend mesurer ? Cette question renvoie bien sûr à la dimension pédagogique, tout en étant fortement teintée de la dimension didactique, c'est-à-dire, comment construire un test qui tient compte des difficultés conceptuelles énoncées plus haut ? En équipes, les étudiants ont élaboré un test pour les élèves de 4^{e} année et un autre pour les élèves de 6^{e} année. Ensuite, en grand groupe, nous avons pris connaissance de chacun des tests et avons sélectionné les deux qui semblaient les plus intéressants sur le plan didactique. Les étudiants ont ainsi éliminé les épreuves qui présentaient par exemple une ou des multiplications non discriminantes, c'est-à-dire qui contenaient plus d'une difficulté et qui n'auraient pas permis de cerner une difficulté particulière. Sur ce point, nous aurions pu volontairement laisser des épreuves non discriminantes afin que les étudiants puissent constater les conséquences d'une question mal choisie. Toutefois, étant donné que ce test était le point de départ d'un travail d'analyse d'erreurs pour les étudiants, nous voulions qu'il permette une analyse fructueuse, analyse qui aurait peut-être été moins riche si le test avait eu des lacunes évidentes. Nous avons remis les tests choisis à l'enseignant, qui les a administrés aux élèves de sa classe. Par la suite, l'enseignant a redonné les tests aux étudiants qui les ont eux-mêmes corrigés et qui, dans le cadre d'un travail de session, ont fait l'analyse des erreurs des élèves. Pour ce faire, ils ont identifié chacune des erreurs, ont cherché les causes possibles reliées à ces erreurs, ont regroupé les erreurs en catégories et les ont compilées dans une grille de classification permettant de voir d'un coup d'œil les difficultés des élèves de la classe. Pour aller plus loin dans cette situation, nous avons demandé aux étudiants d'élaborer un plan d'interventions correctives pour les élèves de cette classe. Cette partie liée à la correction est selon nous très proche du travail de l'enseignant.

Dans le cadre de ce travail, il y a vraiment imbrication des connaissances mathématiques, didactiques et institutionnelles. Qui plus est, pour se rapprocher du travail de l'enseignant, ce travail de correction et d'analyse est réalisé dans un laps de temps relativement court, c'est-à-dire une période, afin d'aller chercher des connaissances que Bednarz et Proulx (2009) considèrent comme étant « produites sur-le-champ, adaptées et en réponse à la situation » (Op. cité, p.6). Ils pensent ici au savoir que l'enseignant ne peut construire ailleurs qu'en situation, en réaction à une situation donnée et à des élèves donnés. Il est évident toutefois qu'étant en situation d'évaluation nous pouvons difficilement parler de construction de connaissances. Nous pensons quand même qu'un certain type de connaissances en action peut s'élaborer ici. Tel un enseignant dans sa classe, on veut voir quelles connaissances le futur enseignant va mobiliser, dans l'action.

V. SITUATION 2 : UN EXEMPLE D'ACTIVITE COMPLEXE DE RESOLUTION DE PROBLEME

La résolution de situations-problèmes est au centre du PFEQ dans le domaine de l'enseignement des mathématiques. Or, l'élaboration de situations-problèmes signifiantes et leur intégration dans une approche interdisciplinaire ne sont pas toujours faciles à réaliser. Par le biais de l'activité suivante, qui a été vécue dans une classe de troisième cycle du primaire (10−12 ans), nous tentons de faire réfléchir les futurs enseignants sur les conditions de la mise en place de ce type d'activités dans une classe.

Le point de départ de l'activité mathématique[4] est un article paru en première page du journal *La Presse* le 10 novembre 2004, qui titrait qu'une recherche prévoit que l'Arctique allait se réchauffer plus vite que le reste de la planète. L'article contenait des images qui montraient l'étendue prévue de la calotte glaciaire de l'Arctique en 2010, en 2040 et en 2070, et ce sont ces images qui étaient à la base de notre activité mathématique. Les enfants devaient répondre à la question suivante : Quelle sera l'étendue de la calotte glaciaire en 2010, 2040 et 2070 par rapport à aujourd'hui ? Les élèves disposaient d'un agrandissement de la carte présentée à la figure 2 qui contient les prévisions de l'étendue de la calotte glaciaire pour 2010 ainsi que de deux cartes semblables qui contenaient les prévisions pour 2040 et 2070. Sur la figure 2, le trait bleu indique les limites de la calotte glaciaire en 2003 et la surface blanche correspond à l'étendue prévue de la calotte pour 2010.

Figure 2 *– L'étendue prévue de la calotte glaciaire en 2010*[5]

Derrière la question apparemment simple posée aux enfants se cache une activité mathématique fort complexe pour des élèves de troisième cycle : Quelle stratégie vont-ils déployer pour déterminer l'aire de chacune des surfaces irrégulières ? Quelles stratégies vont-ils mettre en place pour exprimer la différence sous forme de rapport, fraction ou pourcentage ?

La richesse de cette activité provient entre autres de la possibilité d'avoir recours à plusieurs stratégies différentes, qu'il est par ailleurs intéressant d'anticiper avec les futurs enseignants. En effet, lors de cette expérimentation avec les élèves du primaire, plusieurs équipes ont utilisé un quadrillage, qu'ils ont superposé sur l'image afin de déterminer le nombre de carrés nécessaire pour recouvrir chacune des aires. D'autres équipes ont eu recours à une stratégie similaire, mais ont entouré les surfaces à mesurer d'un rectangle dont ils ont calculé l'aire et en ont enlevé l'aire de la surface qui dépasse la calotte glaciaire. Enfin, une autre équipe a élaboré une toute autre stratégie très intéressante au plan didactique. Cette stratégie consistait à calculer l'aire de la calotte glaciaire à partir de son périmètre. Pour ce

[4] Nous avons présenté une première fois cette activité dans Theis L., Gagnon, N. (2005) Un exemple d'activité complexe de résolution de problèmes dans une classe de troisième cycle. *Vivre le primaire* 19(1), 22−24.

[5] Cette image est légèrement différente de celle parue dans *La Presse*, afin de faciliter le traitement mathématique de la tâche par les enfants. Source : Arctic Climate Impact Assessment, 2004.

faire, les enfants ont collé une corde sur le pourtour de la calotte glaciaire, en essayant d'être le plus exacts possible. Lorsqu'interrogés sur leur stratégie, ils ont proposé qu'une fois le tour de la surface complété, ils allaient détacher la corde et réaliser un carré à partir de celle-ci. Ils allaient ensuite mesurer la longueur d'un côté du carré et calculer son aire, qu'ils pensaient équivalente à celle de la figure de départ (la calotte glaciaire).

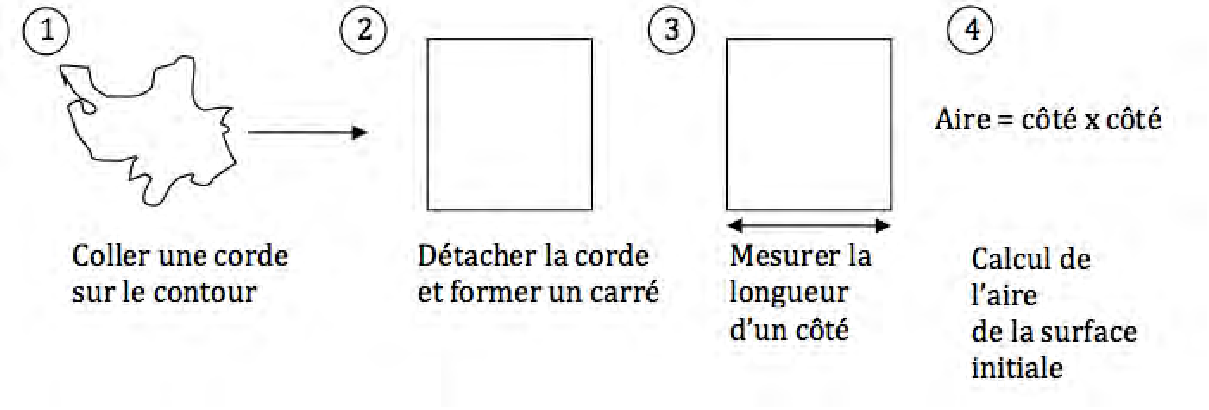


Figure 3 *– Stratégie utilisée pour déterminer l'étendue de la calotte glaciaire en 2010*

Bien sûr, même si elle est très élaborée, cette stratégie ne permet pas de déterminer l'évolution de la surface de la calotte glaciaire. Par contre, elle est un excellent point de départ pour démarrer une discussion mathématique sur le lien entre le périmètre et l'aire d'une figure géométrique.

Cette activité est très riche à exploiter avec nos étudiants, et ce, tant sur les plans institutionnel, mathématique et didactique que pédagogique. En effet, nous mettons d'abord en avant les dimensions institutionnelle et didactique lorsque nous situons la situation-problème par rapport à la définition ministérielle, que nous comparons à la définition que les didacticiens partagent par rapport à la situation-problème. Nous amenons les étudiants à réfléchir et se questionner quant à ces définitions qui vont dans des directions diamétralement opposées. Toujours sur le plan didactique, les étudiants sont amenés à envisager les questionnements des élèves. Ils sont aussi amenés à discuter la gestion didactique du groupe par l'enseignante, qu'ils voient dans le document vidéo. Cette gestion didactique concerne le questionnement de l'enseignante pour faire avancer la résolution dans les équipes, les questions pour relancer et les situations de décontextualisation. Sur le plan pédagogique, les étudiants sont amenés à réfléchir quant à la gestion du travail en sous-groupes et les types de questionnement dans les groupes. Bien que les étudiants ne vivent pas eux-mêmes cette expérimentation, ils voient l'enseignante comme un « modèle » qu'ils devront confronter en classe de stage. Enfin, en ce qui concerne la dimension mathématique, celle-ci est très présente à travers toute l'activité, ne serait-ce que par le questionnement suscité quant à la façon qu'eux-mêmes auraient d'aborder ce problème et tout le questionnement amené entre autres lors de la vérification du domaine de validité de la stratégie de la corde.

D'ailleurs, il est intéressant de constater que, lorsque nous explorons cette activité avec les futurs enseignants, ils se butent fréquemment aux mêmes difficultés que les élèves, notamment en ce qui concerne le lien entre l'aire et le périmètre. Ainsi, en plus de voir avec eux les caractéristiques à mettre en place pour faire vivre de véritables situations-problèmes aux élèves, nous avons l'occasion d'approfondir des contenus mathématiques tout en les étudiant sur le plan didactique.

VI. SITUATION 3 : ANALYSE DE LA COMPREHENSION EN GEOMETRIE ET DE LA DEMARCHE DE RESOLUTION DE PROBLEMES D'UN ELEVE DE 2^E CYCLE DU PRIMAIRE

Dans le cadre du cours de didactique des mathématiques de 1^re année du baccalauréat, nous abordons la résolution de problème avec les étudiants. À cette fin, dans le but de permettre aux étudiants d'approfondir leur compréhension de ce qu'est un problème mathématique, de développer leur habileté à analyser un problème mathématique et d'approfondir leurs connaissances sur des notions de géométrie et de mesure vues au cours, nous présentons aux étudiants la vidéo d'un élève qui résout deux problèmes mathématiques. Dans l'exemple auquel nous référons, le premier porte sur le repérage d'objets dans l'espace et le second sur la mesure de surfaces. Les étudiants doivent analyser les problèmes, tant sur les plans mathématique, didactique qu'institutionnel (identification des savoirs essentiels, des préalables nécessaires et des difficultés anticipées). Dans un deuxième temps, après avoir visionné la vidéo, les étudiants doivent faire l'analyse de la compréhension de l'élève face aux notions mathématiques impliquées dans chacun des problèmes. Dans un troisième temps, ils doivent réaliser l'analyse de la démarche de l'élève dans une résolution de problème. Enfin, ils doivent effectuer un retour critique sur les problèmes en comparant les deux démarches de résolution de problème (plan didactique).

L'avantage de ce type de situation en formation des maîtres est que, en plus de travailler la démarche de résolution de problème, il permet à l'étudiant d'approfondir des contenus mathématiques tout en prévoyant, sur le plan didactique, quels sont les préalables et les difficultés à anticiper pour les élèves. Il est intéressant de constater que les difficultés anticipées sont rarement celles réellement vécues par les élèves. En effet, quand les étudiants savent résoudre un problème, ils ont souvent du mal à anticiper des stratégies erronées.

Prenons le problème de la mesure de surface. Dans ce problème, on présente le cas d'une famille qui hésite entre deux maisons, une étant située sur un terrain rectangulaire de 5 cm par 7 cm et l'autre sur un terrain carré de 6 cm par 6 cm. Finalement, la famille opte pour la maison située sur le terrain le plus grand. L'élève doit donc identifier quel est le terrain choisi. L'élève a devant lui les deux dessins représentant les deux situations. Il est à noter que, dans le problème initial, l'élève devait convertir les mesures en utilisant une échelle (1 cm = 10 m), ce qui n'a pas été demandé pour simplifier le problème.

La résolution de l'élève est très intéressante parce qu'il a commis des erreurs riches sur le plan didactique. Premièrement, l'élève s'est questionné parce que le bas du carré mesurait 5½ cm tandis que le haut du carré mesurait 6 cm. Se basant sur le fait qu'un carré a quatre côtés congrus, il a poussé plus loin son investigation pour se rendre compte que, dans le premier cas, il ne plaçait pas sa règle à 0 : « Je vais regarder pour l'autre *(bas du carré)*. Ce côté-là c'est … 6 cm. Celui-là *(côté droit du carré)* ça doit être 5½ cm également … 6 cm ? … Mais est-ce qu'il faut commencer à mesurer du 0 ou bien de là *(en pointant le bout de la règle)* ? ».

Après avoir mesuré les deux terrains, il en est venu à la réflexion suivante : « Alors moi je dirais que c'est aucun des deux terrains parce qu'ici c'est 6 cm des deux bords *(pointe le carré)* ça fait que si on fait 6 X 4 ça va nous donner 24. Alors 24. Ici *(pointe le rectangle)* si on fait 5 X 7 non, 5 X 7, ça va donner … 35. Alors finalement ce serait ce terrain-là qui serait le plus gros *(en pointant le terrain rectangulaire)* ». Un peu plus loin : « Oui mais, autrement j'aurais juré qu'ils sont de la même grandeur parce que ici *(en pointant le côté droit du rectangle)*, regarde 7 cm, c'est comme si on avait enlevé 1 cm et ajouté 1 cm au 5 ici *(le haut du rectangle)*, alors ça donnerait 6, 6, 6, 6 *(en pointant à tour de rôle les quatre côtés du rectangle)* ». Après avoir refait ses calculs, l'expérimentatrice lui a demandé s'il connaissait une autre façon qui pourrait l'aider, à quoi il a répondu : « Hum … non. Je ne vois pas vraiment. Non ». Après quelques hésitations, il a finalement pris une décision : « Ben moi je vais y aller avec la théorie du j'enlève … » et il a écrit :

> Les deux terrains sont de la même grandeur
> car si on enlève 1 a 7 et qu'on l'ajoute a 5
> cela donne 6x6 comme l'autre terrain.

Cette situation est très riche sur les plans mathématique et didactique, et ce, à divers points de vue. D'une part, même si au final l'élève n'a pas fait d'erreur dans la mesure des côtés, une difficulté très fréquente de mesurage est survenue. Nous avons ici une belle occasion de creuser plus loin avec les étudiants en exploitant les difficultés liées à la mesure de longueur. Sur le plan de la mesure de l'aire, on peut voir que ce concept est en construction chez l'élève. Il sait la formule pour trouver l'aire d'une surface, mais se laisse berner par sa démarche de calcul. Enfin, on peut voir qu'il mélange l'aire et le périmètre. Voilà autant d'occasions pour approfondir ces concepts en classe avec les étudiants.

VII. CONCLUSION

Comme nous l'avons montré au début de ce texte, les étudiants au baccalauréat en enseignement au primaire arrivent en formation avec des niveaux très différents de compréhension en mathématiques. Étant donné que nous n'offrons pas de cours de mise à niveau en mathématiques, cette mise à niveau doit se faire à l'intérieur même des cours de didactique des mathématiques. Par les situations que nous avons présentées, nous avons tenté de montrer comment, à notre façon, nous essayons de former nos étudiants de la formation des enseignants à la didactique des mathématiques tout en approfondissant leur compréhension au plan mathématique. Nous croyons que cette façon de faire, en s'approchant le plus possible de la réalité de la classe et en articulant les dimensions mathématiques, didactiques, pédagogiques et institutionnelles, comme le proposent Bednarz et Proulx (2009), est susceptible d'aider les futurs enseignants. L'articulation d'une même activité autour de différents enjeux (mathématiques, didactiques, pédagogiques et institutionnels) nécessite cependant aussi une certaine vigilance. À vouloir exploiter trop d'enjeux de manière simultanée, il y a un certain risque de ne traiter tous les enjeux qu'en surface ou que les enjeux mathématiques, souvent plus difficiles pour les étudiants qui sont dans les programmes de formation à l'enseignement au primaire, ne prennent le dessus sur les réflexions aux autres niveaux.

Bien que nous considérions notre approche comme étant susceptible d'aider les futurs enseignants, elle ne permet pas de reconstruire entièrement les conditions en place dans une classe véritable. Pour cette raison, une présence des formateurs en didactique lors de la supervision des stages nous semble également essentielle. Lors des rétroactions sur les activités réalisées par les étudiants, il devient alors possible de susciter des réflexions didactiques et mathématiques, en partant de leur pratique effective en milieu de stage.

REFERENCES

Adihou A., Arsenault C. (2012) Dispositif de formation mathématique pour les enseignants du primaire : choix, caractéristiques, résultats et impacts. In Proulx J, Corriveau C, Squalli H. (Eds.) (pp. 225-253) *Formation mathématique des enseignants de mathématiques : pratiques, orientations et recherches*. Québec : Les Presses de l'Université du Québec.

Adihou A., Arsenault C., Marchand P. (2006) Réflexion sur un dispositif de formation pour le développement de compétences en mathématiques chez les futurs maîtres. In Bednarz N., Mary C. (Eds.) *Actes du 3e colloque international Espace mathématique francophone, « L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés »*. [Cédérom]. Sherbrooke : Éditions du CRP.

Arsenault C., Voyer D. (2003) Une démarche d'auto-évaluation au service de l'actualisation des savoirs mathématiques dans le cadre de la formation à l'enseignement. Dans Association francophone internationale de recherche scientifique en éducation (AFIRSE) et Ministère de l'Éducation Nationale (Eds.) *Former les enseignants et les éducateurs – une priorité pour l'enseignement supérieur. Actes du Colloque de l'AFIRSE organisé par la Commission nationale française pour l'UNESCO*.

Ball D., Thames M., Phelps G. (2008) Content knowledge for teachers. What makes it special? *Journal of teacher education* 59, 389-407.

Bednarz N., Proulx J. (2009) Connaissance et utilisation des mathématiques dans l'enseignement : Clarifications conceptuelles et épistémologiques. *For the Learning of Mathematics* 29(3), 1-9.

Hill H., Ball D. (2009) The curious – and crucial – case of mathematical knowledge for teaching. *Phi delta kappan* 91(2), 68-71.

Matthews M., Seaman W. (2007) The effects of different undergraduate mathematics courses on the content knowledge and attitude towards mathematics of pre-service elementary teachers. *Issues in Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers: The Journal* 1, 1-16.

Morin M.-P. (2008). Les connaissances mathématiques et didactiques chez les futurs maîtres du primaire : quatre études de cas. *Canadian Journal of Education* 31(3), 537-566.

Morin M.-P., Theis L. (2006) Mesures d'aide en mathématiques pour soutenir les étudiantes et étudiants de la formation initiale qui présentent des difficultés. In Bednarz N., Mary C. (Eds.) *Actes du 3e colloque international Espace mathématique francophone, « L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés »*. [Cédérom]. Sherbrooke: Éditions du CRP.

Pickreign J. (2007) Rectangles and rhombi: how well do pre-service teachers know them? *Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers: The Journal* 1, 1-7.

Proulx J. (2010). Reconnecter les futurs enseignants avec les mathématiques du secondaire: travailler autour de conceptualisations riches en « faisant » des mathématiques. In Proulx J., Gattuso L. (Eds.) (pp. 129-152) *Formation des enseignants en mathématiques : tendances et perspectives actuelles.* Sherbrooke: Éditions du CRP.

Stacey K., Helme S., Steinle V., Baturo A., Irwin K., Bana J. (2001) Preservice teachers' knowledge of difficulties in decimal numeration. *Journal of Mathematics Teacher Education* 4(3), 205-225.

QUELLES MATHÉMATIQUES POUR LES FUTURS ENSEIGNANTS ? RÉFLEXIONS ET EXEMPLES DE PRATIQUE D'UNE FORMATRICE

Valériane PASSARO*

Résumé – Cette contribution propose d'abord d'expliquer la rupture entre les expériences mathématiques des étudiants en formation initiale en enseignement secondaire et celles des enseignants en pratique en prenant appui sur les notions de « conception opérationnelle » et de « conception structurelle » des objets mathématiques (Sfard 1991). Puis, des exemples de tâches visant le développement d'une conception structurelle chez les futurs enseignants sont présentés. Finalement, les observations faites lors de la réalisation de ces tâches et les réflexions amorcées alimentent la discussion sur la formation mathématique, ainsi que sur l'articulation entre la formation didactique et mathématique des futurs enseignants.

Mots-clefs : expériences mathématiques, formation initiale, conception opérationnelle, conception structurelle

Abstract – This contribution proposes first an explanation of the rupture between the mathematical experiences of pre-service and in-service secondary schoolteachers building on the notions of "operational conception" and "structural conception" of mathematical objects (Sfard 1991). Then, examples of tasks for pre-service teachers' development of a structural conception are presented. Finally, the observations made during the realization of these tasks and the begun reflections feed the discussion on mathematical formation and as well on the articulation between didactical and mathematical formation of the pre-service teachers.

Keywords: mathematical experiences, pre-service education level, operational conception, structural conception

La formation mathématique des enseignants est au cœur de nos préoccupations. Nous savons qu'il existe une rupture entre les expériences mathématiques vécues par les étudiants en formation des maîtres et les expériences mathématiques vécues par les enseignants dans leur travail quotidien (Proulx et Bednarz 2008). Mes expériences diverses en tant qu'étudiante, enseignante, formatrice, superviseure de stage etc. m'ont permis de considérer la question sous plusieurs angles à différents moments de ma pratique. Mon cheminement m'amène aujourd'hui à prendre du recul et à faire le point. Ma contribution consiste donc à présenter une partie de mes plus récentes réflexions sur le sujet.

En partant de l'exemple de la formation initiale des enseignants de mathématiques au secondaire de l'Université du Québec à Montréal (UQÀM), je présente une brève comparaison des expériences mathématiques de l'étudiant et de l'enseignant en pratique telles que je les connais. Puis je propose une analyse des éléments de comparaison ressortis de manière à éclairer la nature de la rupture entre ces deux types d'expériences. Visant une reconnexion de ces dernières, je présente des exemples de ma pratique et la réflexion qui s'ensuit.

Dans cette contribution, je ne présente pas un compte-rendu de recherche mais mon témoignage comme enseignante intervenant dans la formation des maîtres. Les éléments théoriques sont donc abordés uniquement parce qu'ils m'ont permis à un certain moment d'organiser mes idées. Ces dernières sont d'ailleurs fortement influencées par la perspective des didacticiens de l'UQÀM (voir Bednarz, Gattuso et Mary 1995) qui ont été ma première et principale source d'inspiration. Je considère que mes réflexions viennent donc à la fois compléter et diffuser les idées des didacticiens de cette équipe qui ont, pour la plupart, passé le flambeau.

* Université de Montréal – Canada – valeriane.passaro@umontreal.ca

© Passaro V. (2012) Quelles mathématiques pour les futurs enseignants ? Réflexions et exemples de pratique d'une formatrice. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT1, pp. 206–214). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

I. COMPARAISON ET ANALYSE DES DIFFÉRENTES EXPÉRIENCES MATHÉMATIQUES

1. Un premier regard sur la situation : observations et impressions personnelles

D'un côté, les expériences mathématiques vécues par l'étudiant tout au long de sa formation sont diverses. Néanmoins, la formation disciplinaire se fait explicitement dans les cours de mathématiques avancées. Dans ces cours, on s'entend généralement pour dire que les étudiants font des mathématiques de manière à acquérir une expertise dans leur matière ou encore qu'ils développent la compétence à « agir en tant que professionnelle ou professionnel héritier, critique et interprète d'objets de savoirs ou de culture dans l'exercice de ses fonctions »[†]. Ainsi, on y vise l'acquisition de concepts mathématiques dits « avancés ». L'étudiant qui aborde ce contenu nouveau et relativement complexe, travaille principalement à un niveau procédural et devient particulièrement habile à réaliser des tâches routinières.

D'un autre côté, les enseignants en pratique vivent une toute autre expérience des mathématiques. En effet, leur connaissance des mathématiques leur permet principalement de planifier leur enseignement et d'intervenir en classe. Or, comme l'indique Morin (2008), « réagir à une situation mathématique exige une bonne maîtrise des connaissances disciplinaires à enseigner ». Ainsi, l'enseignant doit connaître les concepts mathématiques qu'il enseigne d'une façon approfondie, il doit atteindre un niveau de maîtrise qui dépasse largement l'application d'une procédure. À ce titre, il doit être un expert de sa matière.

Dans les deux cas, il est clair qu'il est question d'une certaine expertise. Par contre, les caractéristiques de cette expertise sont différentes et afin de mieux expliciter cette différence, j'ai choisi d'utiliser le cadre proposé par Sfard (1991).

2. Un cadre d'analyse : conceptions opérationnelle et structurelle de l'objet mathématique

Sfard (1991) parle de deux conceptions complémentaires d'un concept mathématique : la conception opérationnelle, en lien avec les processus, et la conception structurelle, en lien avec l'objet. Elle précise que pour arriver à connaître un objet mathématique, il faut d'abord en développer une conception opérationnelle puis une conception structurelle. Le passage de la première à la seconde se fait en trois étapes :

1. **L'intériorisation** est un niveau de familiarisation avec un nouveau concept de manière procédurale, compartimentée. L'accent est mis sur des processus, on se concentre sur les détails.
2. **La condensation** est une étape à laquelle il y a une première activité de synthèse, de généralisation. Une organisation des processus débute et les détails sont de moins en moins importants.
3. **La réification** est l'étape ultime à laquelle tout s'organise et prend un sens. On sait alors comment et pourquoi, on a une vue d'ensemble. Les détails ne sont plus importants, on comprend que les processus ne sont que des détails, que des outils au service de l'objet. On saisit alors l'objet mathématique.

L'auteur ajoute que la réification est directement en lien avec l'intériorisation de concepts plus complexes. En fait, pour que la réification ait lieu il doit y avoir une motivation. Tant que la conception opérationnelle est suffisante et efficace, il n'y a pas d'intérêt à développer une

[†] Première des 12 compétences professionnelles attendues des enseignants et des enseignantes du secondaire, selon le Ministère de l'éducation, du loisir et du sport du Québec.

conception structurelle. L'intérêt se fait ressentir lorsque vient le temps de travailler sur de nouveaux concepts plus poussés en lien avec le concept de base.

3. *Un second regard sur la situation : approfondissement des idées et source de la rupture*

Ce second regard correspond en fait à une explicitation du premier à l'aide de la théorie précédemment présentée. Il est à noter que je suis consciente que cette théorie ne reflète pas la complexité du processus de compréhension d'un concept mathématique. J'explicite d'ailleurs mes idées à ce sujet dans ma recherche doctorale (voir l'affiche présentée au présent colloque). Néanmoins, je m'en tiendrai ici aux idées de Sfard puisqu'elles me servent uniquement de tremplin pour poursuivre ma réflexion.

Tel que mentionné, dans les cours de mathématiques avancées, l'étudiant-maître aborde de nouveaux concepts mathématiques. Or, la première étape dans le processus d'apprentissage d'un nouveau concept mathématique, selon Sfard, est l'intériorisation. Il est donc normal que le travail effectué se situe d'abord à un niveau procédural. Par la suite, si les concepts sont travaillés en profondeur l'étudiant peut passer aux étapes de condensation et de réification. Cependant, le temps alloué et le type de travail effectué sur les objets mathématiques abordés ne semble pas permettre aux étudiants d'en développer une conception structurelle. Ainsi, selon mes observations, la plupart des étudiants atteignent le stade de la condensation. Leur compréhension des concepts mathématiques est de nature opérationnelle.

L'enseignant en pratique, quant à lui, doit connaître les concepts mathématiques qu'il enseigne de façon approfondie. En fait, l'enseignant, pour pouvoir réagir vite et adéquatement, doit avoir une vue d'ensemble, il doit être flexible et confiant avec les concepts mathématiques qu'il enseigne. Le niveau de maîtrise nécessaire est celui du stade de la réification. Pour l'enseignant, posséder une conception structurelle des concepts mathématiques qu'il enseigne est indispensable.

Ainsi, d'un côté, dans les cours de mathématiques avancées, les étudiants développent une conception opérationnelle de certains concepts mathématiques dits « avancés ». De l'autre, les enseignants en pratique doivent utiliser particulièrement leur conception structurelle des concepts mathématiques de base, sujets de leur enseignement. Il existe donc une rupture évidente entre ces deux expériences. Non seulement les concepts mathématiques utilisés ne sont pas les mêmes, mais en plus ils ne sont pas travaillés de la même façon.

II. TENTATIVES DE RECONNEXION ENTRE LES DIFFÉRENTES EXPÉRIENCES MATHEMATIQUES

1. *Objectif global*

Si on se base sur les caractéristiques de l'expérience mathématique de l'enseignant pour guider la formation initiale des maîtres, alors il faut que les étudiants soient amenés à développer leur conception structurelle des concepts mathématiques qu'ils devront enseigner. Dans la perspective didactique dans laquelle je m'inscris, mathématiques et didactique des mathématiques vont de pair et l'un des objectifs des cours de didactique est de « faire vivre aux futurs enseignants une autre approche des mathématiques » (Bednarz, Gattuso et Mary 1995, p. 20) pour les amener à approfondir leur compréhension des concepts mathématiques qu'ils ont déjà abordés en tant qu'élèves. La piste de reconnexion envisagée est donc de faire faire des mathématiques aux futurs enseignants de façon à stimuler la réification des objets mathématiques qu'ils connaissent, mais desquels ils n'ont développé qu'une conception opérationnelle.

2. Obstacle à la réification et moyen envisagé pour dépasser cet obstacle

Sfard (1991) indique que la réification est une activité difficile dans la mesure où elle nécessite la mise de côté des processus qui jusqu'à présent constituaient le seul et unique sens du concept. Elle voit cette remise en question comme un obstacle à la réification.

Dans le cas des étudiants qui débutent une formation en enseignement des mathématiques, cet obstacle est particulièrement présent. En effet, leur expérience d'élève leur a permis de développer une conception opérationnelle forte et efficace mettant l'accent sur le caractère ordonné, prévisible et sécurisant des mathématiques. Aussi sont-ils confiants quant à leurs connaissances mathématiques et ils s'attendent à ce que leur formation à l'enseignement suive ce modèle opérationnel, c'est-à-dire qu'elle leur apporte des techniques (ou même **la** technique) d'enseignement des mathématiques (Rioux 2011). Finalement, ils ne s'attendent pas à remettre en question leur connaissance des mathématiques car ils n'envisagent pas que cela puisse contribuer à leur formation à l'enseignement.

Dans la mesure où la conception opérationnelle est une connaissance qui s'est avérée optimale dans un certain domaine défini, elle peut devenir un obstacle au sens où Brousseau (1998) l'entend. Ainsi, comme l'indique ce dernier, franchir cet obstacle passe par la déstabilisation.

3. Quelques exemples de tâches

Trois moyens sont envisagés et pour chacun la source de la déstabilisation est différente :

1. **Faire faire des mathématiques autrement.** L'étudiant redevient (ou presque) un élève du secondaire. On lui propose de « jouer » à l'élève en refaisant les activités destinées aux élèves du secondaire. Par contre, on lui indique bien que les activités proposées risquent d'être différentes de ce qu'il a vécu quand il était élève. Ainsi, on l'amène à revoir ses connaissances mathématiques, mais dans des contextes pour lesquels il doit pousser sa réflexion. Une conception opérationnelle est insuffisante pour répondre aux questions posées et l'étudiant doit aborder les objets mathématiques qu'il connait sous un autre angle. La déstabilisation vient du fait qu'on impose de ne pas avoir recourt aux façons de faire familières et opérationnelles. On enlève soudain les processus qui semblaient auparavant à eux seuls définir le concept. Les étudiants ont l'impression d'avoir affaire à une situation qui n'a pas sens.
2. **Créer un choc.** On place l'étudiant en situation d'échec. En fait, on l'amène à prendre conscience que ses connaissances sont limitées et facilement ébranlables. Les limites d'une conception strictement opérationnelle sont mises en évidence. L'étudiant est d'abord confiant lorsqu'il réalise une tâche qu'il pense réussir. Il est par la suite déstabilisé lorsque sa solution ou celles de ses collègues sont présentées et qu'il prend conscience des erreurs commises.
3. **Forcer la réflexion et la métacognition.** Une première étape consiste en ce que l'étudiant réfléchisse et analyse sa réflexion. Il doit prendre conscience de ses actions, de leurs origines et de leurs conséquences lors de la réalisation d'une tâche. Une seconde étape est l'analyse de la réflexion des autres. Le recul nécessaire à la réalisation de ces tâches force l'étudiant à organiser ses connaissances, à faire des mises au point et à prendre conscience du fonctionnement de sa pensée et de celle des autres. La déstabilisation se produit dès le début car l'étudiant n'a pas l'habitude

d'analyser son propre processus de pensée. Il doit se détacher des actions pour passer à un niveau réflexif et cela lui demande un effort intellectuel avec lequel il peut ne pas être à l'aise.

Ces idées peuvent donner lieu à différentes interventions et je présente ici des exemples de tâches que j'ai eu l'occasion d'expérimenter à plusieurs reprises. Pour chacun, je précise le moyen envisagé, le titre du cours duquel provient l'exemple et le sujet abordé, puis je donne mes premières observations sur le déroulement et l'issue de la réalisation de la tâche par les étudiants.

Exemple 1	
Moyen	Faire faire des mathématiques autrement
Cours	Didactique des mathématiques 1
Sujet	La moyenne
Description de la tâche	Les étudiants doivent réaliser une activité en équipe de 4. On leur distribue une enveloppe et donne la consigne suivante : « Dans votre enveloppe, il y a quatre paquets de cure-dents : un paquet de 4 cure-dents, un paquet de 8 cure-dents, un paquet de 14 cure-dents et un paquet de 22 cure-dents. Vous devez trouver le nombre moyen de cure-dents par paquet *de deux manières différentes* en manipulant le matériel. L'usage de la calculatrice est interdit. »
Premières observations	Les étudiants ne saisissent pas au départ ce qu'ils doivent faire, ils veulent calculer, utiliser la formule qu'ils connaissent. Je les ramène à la consigne : ils doivent obtenir le résultat suite à une manipulation. Ils apprécient l'activité et finissent par procéder exactement comme le font les élèves du secondaire. Ils trouvent deux manipulations différentes associées aux raisonnements de « total-répartition » (on met tous les cure-dents ensemble puis on re-distribue équitablement) et de « mise à niveau » (on enlève des cure-dents aux paquets qui en ont le plus pour en donner à ceux qui en ont le moins de manière à obtenir le même nombre de cure-dents dans chaque paquet).

Exemple 2	
Moyen	Créer un choc
Cours	Didactique de l'algèbre
Sujet	Le calcul algébrique
Description de la tâche	Les étudiants doivent répondre rapidement à des questions et noter leurs réponses sur une feuille que je ramasse. L'objectif n'étant pas de les évaluer, les productions sont anonymes. Je compile alors les résultats et effectue une synthèse de manière à présenter aux étudiants les différentes solutions proposées. Voici un exemple de question : Résoudre dans $\mathbb{R}$: 1) $\sqrt{x}+4=2\sqrt{x}$

	2) $\frac{x}{2} + 6 - 3x = 2x + 2 - \frac{9}{2}x + 4$
Premières observations	Les étudiants se prêtent au jeu. Certains sont sûrs d'eux, d'autres moins, mais tous répondent ou essaient de répondre aux questions. La plupart d'entre eux pensent avoir bien « réussi » car ils ont donné une réponse. Lorsque je présente les solutions, je le fais sans jugement, c'est un constat, une synthèse objective. Les étudiants sont particulièrement attentifs, ils reconnaissent leurs solutions et n'en sont pas particulièrement fiers. En effet, il y a beaucoup d'erreurs. Certains semblent vexés et se cherchent des excuses (« l'énoncé n'était pas clair !! » par exemple), d'autres acceptent et même en rient. Il n'y a pas de doute, un choc se produit. Exemples de réponses : 1) $\left(\sqrt{x}+4\right)^2 = \left(2\sqrt{x}\right)^2$ $x + 8\sqrt{x} + 16 = 4x$ $\left(8\sqrt{x}\right)^2 = (4x - x - 16)^2$ $64x = 9x^2 - 96x + 256$ $9x^2 - 160x + 256 = 0$ $x_1 \approx 1{,}78$ et $x_2 = 16$ 2) $\frac{x}{2} + 6 - 3x = 2x + 2 - \frac{9}{2}x + 4$ $\frac{x}{2} + \frac{9}{2}x + 6 - 6 - 3x - 2x = 0$ $\frac{10}{2}x - 5x = 0$ $5x - 5x = 0$ $x = 0$

Exemple 3	
Moyen	Forcer la réflexion et la métacognition
Cours	Didactique de la variable et de la fonction
Sujet	Les fonctions polynomiales du second degré
Description de la tâche	Les étudiants doivent résoudre un problème en étant attentifs à leur façon de raisonner en premier lieu. Ils doivent pouvoir expliquer ce qu'ils font et pourquoi. Ils doivent particulièrement se questionner sur ce qui leur permet d'affirmer que leur solution est correcte. Ensuite, ils doivent trouver au moins une autre façon de résoudre le problème et expliquer cette nouvelle solution. Exemples de problèmes : a) Détermine la règle de la fonction f sachant que sa courbe a pour sommet S(2, 3) et qu'elle passe par le point A(5, 30). b) Détermine la règle de la fonction g sachant que sa courbe passe par A(0, 11), B(1, 25) et C(2, 43).
Premières observations	La résolution des problèmes est assez rapide. Les étudiants commencent la plupart du temps par résoudre puis ils reprennent leur solution et essaient de l'expliquer. L'explication est difficile, elle ressemble plutôt à une description des actions posées sans une réelle réflexion. Ils ne sont clairement pas capables de répondre au « pourquoi ». En fait leurs justifications sont de l'ordre de « j'agis ainsi parce que c'est ce que j'ai appris à faire ». Trouver une autre solution est aussi difficile et souvent ils

	vont remanier simplement leur solution initiale, ils n'envisageront pas un autre raisonnement. Les étudiants trouvent cette activité difficile et ils se découragent rapidement. Le retour est toujours pénible et pauvre. Exemple de solution proposée au problème a) par un étudiant avec ses justifications : C'est une fonction quadratique donc sa règle peut s'écrire sous la forme $f(x) = a(x-h)^2 + k$ (h, k) sont les coordonnées du sommet et ici c'est S(2, 3) donc $f(x) = a(x-2)^2 + 3$ La courbe passe par A(5, 30) donc je peux remplacer x par 5 et y par 30 pour trouver la valeur de a : $a(5-2)^2 + 3 = 30$ $9a + 3 = 30$ $9a = 27$ $a = 3$ $f(x) = 3(x-2)^2 + 3$

4. Sur quoi débouchent ces tâches ?

Comme indiqué précédemment, ces tâches agissent en tant que déclencheur d'un apprentissage. Chacune d'entre elle débouche à la fois sur un travail mathématique et un travail didactique.

La tâche présentée au premier exemple fait ressortir deux raisonnements permettant le calcul de la moyenne arithmétique. Par la suite, les étudiants sont amenés à pousser leur compréhension de ces raisonnements en les travaillant dans divers contextes et dans différents registres de représentation. En parallèle, ils commencent à envisager la planification de l'enseignement de ce concept en prenant appui sur ces raisonnements. Ces derniers peuvent en effet jouer le rôle de fils directeurs autour desquels les autres éléments de l'analyse conceptuelle viennent se greffer (conceptions, difficultés, erreurs etc.).

La tâche proposée dans le deuxième exemple débouche, quant à elle, sur le travail de l'erreur d'un côté et sur des raisonnements permettant de donner du sens aux manipulations algébriques d'un autre côté. En effet, l'analyse des solutions des étudiants permet d'amener le questionnement sur l'origine de ce type d'erreurs et de faire ressortir les limites d'un travail strictement opérationnel. Les raisonnements apparaissent alors comme un moyen de donner du sens aux manipulations.

La tâche du troisième exemple mène au travail sur tous les raisonnements sur lesquels reposent les techniques comme celle utilisée dans l'exemple de solution. Ce travail est particulièrement long puisqu'on se rend vite compte que chaque technique repose sur une autre technique qu'il faut aussi expliciter. Le travail mathématique prend alors beaucoup de place. Évidemment, les raisonnements servent une fois de plus d'assise à la planification de l'enseignement.

Il est à noter que dans ces cours de didactique, on propose aux étudiants des tâches mathématiques comme celles présentées, mais aussi des tâches didactiques (analyse d'une solution d'élève, analyse d'une tâche proposée dans un manuel scolaire etc.). Ces dernières mènent de la même façon à un travail didactique et mathématique. Toutefois, elles ne permettent pas, selon moi, une déstabilisation et c'est pourquoi leur impact sur l'apprentissage des mathématiques me semble moins important.

III. ANALYSE DES RESULTATS

Bien que cette contribution ne porte pas sur une recherche à proprement dite, je pense qu'il est intéressant d'aborder quelques éléments d'analyse des tâches proposées. Je fais donc part de mes observations et réflexions sur la façon dont les étudiants vivent la déstabilisation et sur l'impact de celle-ci sur leur apprentissage.

Plusieurs facteurs influencent la façon de vivre la déstabilisation (assurance, attentes, temps etc.) et ils sont tous liés à la solidité et la stabilité de la conception opérationnelle développée. On peut néanmoins facilement se douter que personne n'apprécie d'être déstabilisé, mais les réactions sont plus ou moins fortes d'un étudiant à l'autre. Ainsi, certains sont plus réceptifs que d'autres et l'impact sur l'apprentissage dépend de cette réceptivité.

En outre, l'impact dépend aussi des tâches proposées puisque pour chacune la source de la déstabilisation n'est pas la même.

Pour le premier exemple, la déstabilisation vient de la perte de sens. On enlève ce qui donnait du sens, on établit les nouvelles règles du jeu et on entre ainsi dans une nouvelle culture mathématique. Le fait de proposer une piste pour entrer dans ce nouveau jeu et le fait qu'on fasse travailler des raisonnements simples et accessibles permettent aux étudiants de retrouver rapidement leur stabilité. C'est pour cette raison qu'ils finissent par apprécier la tâche. Ce nouveau jeu leur apparaît amusant car il ne constitue pas un obstacle trop grand. Toutefois, ils ne comprennent pas vraiment ce qu'ils font.

Dans le second exemple, la déstabilisation dépend de la situation. L'étudiant qui a commis une erreur par exemple sera plus déstabilisé que celui qui observe les erreurs des autres. En général, au moins le tiers du groupe commet des erreurs et la plupart des étudiants se sent concernée. L'analyse de l'erreur fait ressortir le problème d'un travail machinal sans raisonnement. La prise de conscience des limites de cette manière de faire ouvre une porte. Cependant, l'ouverture n'est pas grande et si la nouvelle façon de faire n'est pas rapidement satisfaisante, elle se referme. Les étudiants ont tendance à revenir rapidement à ce qu'ils connaissent.

En ce qui concerne le troisième exemple, la déstabilisation est plus ou moins présente. En fait elle provient surtout de l'explicitation d'un nouveau contrat didactique dont les étudiants ont de la difficulté à cerner les règles et les enjeux. Ils doivent raisonner, mais ils ne savent pas comment faire et pour eux ça n'a pas vraiment de sens. En fait, ils ont développé un sens qui leur convient et ne comprennent pas pourquoi ils doivent en trouver un autre. De plus, cet autre sens semble plus lourd et plus complexe, ils résistent donc fortement au changement.

Finalement, chacune des tâches permet d'ébranler à sa façon la conception opérationnelle des étudiants. Néanmoins, cela ne suffit pas et il faut régulièrement recommencer.

IV. SYNTHÈSE ET RÉFLEXION

À travers mon analyse de la situation de rupture entre les expériences mathématiques de l'étudiant et de l'enseignant, je revendique le fait qu'il y a plusieurs façons de faire des mathématiques. Chacune de ces façons a une raison d'être et est appropriée dans un contexte donné. La question est d'identifier ce qui est approprié pour un futur enseignant. Ce que j'ai tenté de montrer, c'est que le futur enseignant doit particulièrement développer une conception structurelle des concepts mathématiques qu'il devra enseigner. Afin d'alimenter la réflexion sur les moyens de favoriser ce type d'apprentissage, j'ai présenté quelques exemples de ma pratique située dans la perspectives d'une équipe de didacticiens de l'UQÀM et j'ai fait part de mes observations sur les actions et les réactions des étudiants lors de la réalisation de ces tâches.

Il apparaît indispensable de faire travailler les étudiants sur les concepts mathématiques de base pour lesquels ils n'ont développé qu'une conception opérationnelle. Cependant, le passage vers une conception structurelle constitue une rupture qu'il n'est pas facile de provoquer. Les exemples de tâches que j'ai présentés ont pour objectif de forcer cette rupture. Chacune d'entre-elles propose de déstabiliser l'étudiant d'une manière différente, mais elles débouchent toutes sur un travail mathématique et didactique. Le travail mathématique est axé principalement sur le raisonnement et permet d'envisager les concepts autrement. En ce sens les étudiants sont amenés à développer une certaine conception structurelle de ces concepts. Le travail didactique quant à lui s'articule sur le travail mathématique, l'un ne va pas sans l'autre.

Finalement, j'ai choisi d'aborder la formation mathématique qui prend place dans les cours de didactique. Ainsi, le travail sur les concepts mathématiques de base se fait-il par l'intermédiaire d'une réflexion et d'une remise en question des connaissances de ces concepts. Néanmoins, le travail sur les concepts mathématiques avancés a sa place et il faut poursuivre la réflexion de manière à clarifier le rôle de ce travail dans la construction de la conception structurelle des concepts mathématiques de base.

REFERENCES

Bednard N., Gattuso L., Mary C. (1995) Formation à l'intervention d'un futur enseignant en mathématiques au secondaire. *Bulletin de l'Association Mathématique du Québec. Mars, n°1,* 17-30.

Brousseau G. (1998) *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage Editions.

Morin M.-P. (2008) Les connaissances mathématiques et didactiques chez les futurs maîtres du primaire : quatre études de cas. *Canadian Journal of Education* 31(3), 537-566.

Proulx J., Bednarz N. (2008) The mathematical preparation of secondary mathematics schoolteachers: Critiques, difficulties and future directions. Texte présenté à *11th International Congress on Mathematics Education (TSG 29).* Monterey, Mexique. http://tsg.icme11.org/tsg/show/29.

Rioux M. (2011) Que veulent apprendre les futurs enseignants dans leurs cours de didactique et qu'attendent-ils vraiment de vous ? Atelier présenté au *congrès annuel de l'Association Mathématique du Québec.*

Sfard A. (1991) On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin. *Educational Studies in Mathematics* 22(1), 1-36.

DE L'EXISTENCE DE MATHÉMATIQUES DE LA DIDACTIQUE : RÉFLEXIONS SUR L'ARTICULATION ENTRE MATHÉMATIQUE ET DIDACTIQUE

Jérôme PROULX*

Résumé – Pour discuter de l'articulation des connaissances mathématiques et didactiques, j'explore la possibilité de l'existence de mathématiques spécifiques à la didactique des mathématiques, que j'appelle des « mathématiques de la didactique ». En m'inspirant des travaux récents en didactique des mathématiques, j'offre trois entrées pour réfléchir sur ces « mathématiques de la didactique » : le travail conduit à la formation des maîtres en mathématiques, les mathématiques mobilisées à l'intérieur des pratiques enseignantes et les concepts mathématiques tirés des travaux en didactique des mathématiques.

Mots-clefs : articulation mathématique et didactique, mathématiques spécifiques à la didactique, didactiques des mathématiques, légitimité mathématique

Abstract – To discuss the link between mathematical and didactical knowledge, I explore the possibility that specific mathematics exists within the world of didactics, which I call "mathematics of didactics." Delving in recent work in didactics of mathematics, I offer three entry points to engage in reflections about these "mathematics of didactics": work conducted in mathematics teacher education, mathematical knowings mobilized in teachers' practices, and mathematical concepts developed in didactics studies.

Keywords: links between mathematics and didactics, didactics' specific mathematics, mathematics didactics, mathematical legitimacy

I. MISE EN CONTEXTE DU QUESTIONNEMENT

La didactique des mathématiques est un domaine d'études assez récent. Pour plusieurs didacticiens, elle s'est établie de façon plus officielle durant les années 1970 à plusieurs endroits autour du globe, suite à l'avènement des mathématiques modernes dans le milieu scolaire (voir Moon, 1986). La didactique des mathématiques s'est donc développée de façon contextualisée et dépendante de ses divers milieux d'origine en ce qui a trait à ses orientations, mais aussi à la nature des travaux qui y ont été réalisés. Elle porte ainsi, tel que le souligne Bednarz (2007), un caractère multi-référentiel et hautement contextualisé, amenant à parler *des* didactiques des mathématiques et non d'une seule didactique des mathématiques. À titre d'exemple, comme l'explique Bednarz (2001), alors qu'elle s'est développée en France dans une intention d'en faire une science, elle s'est davantage développée en Italie pour des envies d'innovation des pratiques de classes et aux Pays-Bas en lien avec la vision de Freudenthal des mathématiques comme activité humaine. Ces différents contextes sont importants, car ils ont fait émerger différentes façons de faire et de concevoir les travaux en didactique des mathématiques. Plus près de moi, au Québec et particulièrement à l'UQAM, la didactique des mathématiques s'est développée dès les années 1970 dans une préoccupation de formation des enseignants, orientant de ce fait la nature des travaux et des réflexions qui y ont été menés. C'est ce contexte qui enracine les questions que je pose dans cet article – nées de préoccupations au carrefour de la didactique des mathématiques et de la formation des enseignants – pour aborder la notion d'articulation au cœur du thème du GT1.

II. IMBRICATION DES CONNAISSANCES DIDACTIQUES ET MATHÉMATIQUES

Les questions d'articulation sont, du moins au Québec, au cœur des préoccupations de formation des enseignants en mathématiques (voir le collectif Proulx et Gattuso 2010). Ces

* Université du Québec à Montréal – Québec, Canada – proulx.jerome@uqam.ca

© Proulx J. (2012) De l'existence de mathématiques de la didactique. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT1, pp. 215–227). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

questions d'articulation apparaissent importantes, particulièrement face aux questions d'organisation et de la place accordée aux différentes composantes de la formation des enseignants, par exemple les mathématiques, la didactique et la pédagogie (voir Kuzniak 2007), où des choix doivent être faits et où une critique persiste face à la tendance d'atomisation de ces différentes composantes dans la formation (voir Ball 2000). Cette critique est d'autant plus vive que les travaux sur les pratiques enseignantes montrent que l'enseignant mobilise de façon simultanée des connaissances mathématiques, didactiques et pédagogiques dans son enseignement (Bednarz et Proulx 2009; Huillet 2009), questionnant la tendance à dissocier celles-ci à travers des cours distincts de mathématiques, de didactique et de pédagogie. Dans la même veine, dès les années 1990 suite aux travaux de Shulman (1986), des chercheurs comme Even (1990, 1993) ont montré qu'il était difficile, voire impossible, de séparer les connaissances uniquement didactiques de celles uniquement mathématiques chez les enseignants. Ceci soulève plusieurs questions qui ont trait à la nature des « mathématiques » en didactique des mathématiques : Quels sont les liens et les différences entre didactique et mathématiques à la formation des enseignants ? Doit/peut-on les distinguer? Est-ce que cette distinction est importante, particulièrement en formation des enseignants ? Ces questions guident vers une autre, particulièrement centrale ici : S'il existe une (ou des) didactique(s) propre(s) aux mathématiques, donc une didactique des mathématiques, existe-t-il des mathématiques propres à la didactique, donc des mathématiques de la didactique ? J'explore cette question dans cet article.

III. DISCUTER DE DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES ET DE MATHÉMATIQUES DE LA DIDACTIQUE

> Il y a un certain nombre de concepts mathématiques qui n'ont pas d'intérêt pour les mathématiciens – et qui n'ont pas, de ce fait, de statut culturel ou social : par exemple l'énumération d'une collection n'est pas un concept mathématique important et c'est pourtant un concept important pour l'enseignement. Est-ce que la didactique a le droit d'introduire dans le champ des mathématiques des concepts qui lui seraient nécessaires. C'est un sujet dont il va falloir débattre avec la communauté mathématique et avec d'autres. (Brousseau 1998, p. 313)

Le nom de notre domaine d'études, « didactique des mathématiques », est une expression qui vaut la peine d'être regardée de plus près. En effet, lorsqu'on dit didactique *des* mathématiques, on peut penser qu'il y a une certaine possessivité des mathématiques par rapport à la didactique, comme si elle appartenait aux mathématiques, de la même façon qu'on dit une table *de* cuisine, une chaise *de* salon, le crayon *de* Jean, etc. Si on tente l'exercice contraire, cette fois-ci pour les mathématiques, on obtient la possessivité opposée : « mathématiques de la didactique ». Par cette expression, on affirme qu'il existe des mathématiques spécifiques à la didactique, insistant simultanément sur leur existence et sur la prédominance de la didactique (car ce serait elle qui possèderait les mathématiques). Une idée bien bizarre à première vue. Ce jeu sur les mots met toutefois en relief des distinctions qui questionnent le rôle et la signification des termes « didactique » et « mathématiques » dans ces expressions et amène à vouloir mieux les comprendre.

Pour prendre une définition souvent utilisée, on peut dire que la didactique des mathématiques s'intéresse à l'étude des phénomènes d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques. On peut être tenté, avec les nouveaux développements en recherche, de parler aussi d'utilisation des mathématiques dans des cadres autres que scolaires (les études en ethnomathématiques, par exemple). Ainsi, on peut dire que la didactique des mathématiques est le domaine d'études qui s'intéresse à l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques et aux pratiques et mobilisations diverses des mathématiques. Cette définition satisfait peut-être les chercheurs, mais probablement peu les praticiens ou les formateurs. En effet, la définition ci-haut est davantage la définition d'une didactique de recherche, pourrait-on dire, alors qu'un enseignant ou un formateur peut vouloir désigner la didactique en d'autres termes, par exemple sous l'influence de la dénomination de Martinand (1992) de « didactique praticienne ». De cette entrée sur une didactique davantage axée sur des questions de formation, la didactique des mathématiques devient une façon de faire les choses et d'approcher les questions d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques, ainsi qu'une réflexion/sensibilité à rendre communicables ou accessibles les mathématiques pour les faire apprendre, comprendre et mobiliser.

On retrouve dans ces façons de décrire notre domaine des aspects surtout reliés à l'enseignement, l'apprentissage, les pratiques, etc., ceux-ci étant connectés bien évidemment aux mathématiques. Les aspects « didactiques » priment. Toutefois, l'exercice inverse, avec l'expression « mathématiques de la didactique », donne quelque chose du genre : « des mathématiques qui ont une appréhension ou une sensibilité pour l'enseignement, l'apprentissage et les pratiques mobilisées ». Cette entrée fait réfléchir en quelque sorte à un autre champ d'intérêt, dont l'objet d'attention devient les mathématiques (ses connaissances, processus, ses modes de pensée, ses manières de faire, ses pratiques, etc.) et pour l'étude duquel l'entrée privilégiée serait la didactique ; une entrée qui offrirait une couleur particulière aux questions mathématiques abordées. Cet angle possède, d'un point de vue de la formation des enseignants, une entrée intéressante car une partie du travail de formation implique, comme plusieurs auteurs le mentionnent (Ball et Bass 2003 ; Kuzniak 2007 ; Bednarz 2001), un re-travail des mathématiques chez les futurs enseignants pour les aligner davantage aux préoccupations de classe, des élèves et d'enseignement. Ainsi, existe-t-il des mathématiques spécifiques et particulières travaillées à la formation des enseignants, à l'intérieur des « cours de didactique des mathématiques » comme nous les appelons au Québec, et qui sont propres à la didactique et existent uniquement en didactique des mathématiques, comme les mathématiques actuarielles ou celles de l'ingénieur? J'aborde cette idée dans les prochaines sections.

IV. DES MATHÉMATIQUES DE LA DIDACTIQUE : QUELQUES EXEMPLES

Tel que mentionné, plusieurs chercheurs ont souligné les difficultés à dissocier les considérations ou connaissances didactiques de celles mathématiques dans l'acte d'enseigner (voir la synthèse de Huillet 2009). Dans Bednarz et Proulx (2009), nous avons mis de l'avant l'idée que ces composantes de la pratique enseignante sont imbriquées et mobilisées en simultané. Dans la pratique et les choix faits, l'enseignant met parfois une dimension (didactique, mathématique ou pédagogique) plus en avant, mais jamais de façon isolée des autres dimensions : les décisions ne sont jamais « purement » mathématiques, didactiques ou pédagogiques, elles sont les trois en même temps et à différents niveaux. Cette idée d'imbrication peut en fait être poussée plus loin, au point d'en arriver à se demander si les mathématiques mobilisées par l'enseignant ne sont pas liées à la didactique *au point de ne pouvoir être viables sans elle*. Dans ce qui suit, j'offre des exemples permettant de discuter de cette option et d'initier une réflexion. Ces exemples proviennent de différentes sources et sont de différentes natures, tant de la formation des enseignants, de la pratique enseignante, que des travaux de recherche en didactique des mathématiques[1].

[1] Malgré que j'aborde par mes exemples des questions d'enseignement et de formation des enseignants, je ne réfère pas dans cet article aux expressions « mathematics-for-teaching » (voir Davis, 2010) ou « mathématiques pour l'enseignement » (voir Huillet, 2009), qui décrit un courant de recherche très spécifique tentant de comprendre et décortiquer les connaissances et pratiques mathématiques mobilisées par les enseignants lors de l'enseignement des mathématiques (voir le numéro thématique 29(3) de *For the Learning of mathematics,* 2009 ;

1. *Connaissances développées en formation des enseignants : des connaissances didactiques mathématisées*

Les exemples de cette section sont tirés d'un cours de formation des enseignants de mathématiques du secondaire, que j'ai donné dans mon institution. Un travail a été fait sur les questions d'opérations sur les fonctions, dans le but d'initier une réflexion et sensibilité didactique chez les étudiants au niveau de ce contenu mathématique. J'entre ici sur la nature des connaissances mobilisées par les futurs enseignants à travers ces activités.

Après un travail sur l'analyse de solutions d'élèves, autant les difficultés que les raisonnements fructueux, les futurs maîtres ont à produire deux exercices d'opérations sur les fonctions qu'ils auront à proposer à d'autres futurs enseignants, et pour lesquels ils ont à développer les critères qui guident leurs constructions. Cette tâche amène les futurs enseignants à creuser les concepts mathématiques en jeu pour arriver à développer une tâche qui n'est pas triviale et permet de travailler la notion d'opération sur les fonctions. Par cette tâche, il est évident que les futurs maîtres continuent d'approfondir et raffiner leurs compréhensions du concept en fouillant dans des cas d'exception, des difficultés conceptuelles, des cas impossibles, des cas faciles, etc., mais aussi à développer une justification expliquant en quoi un cas est facile, difficile, impossible, intéressant, etc. Les discussions des futurs enseignants sont alors autant sur les notions mathématiques en jeu pour les opérations sur les fonctions que sur l'apprentissage des notions elles-mêmes. Leur fouille « mathématique » est teintée en même temps d'une fouille « pour faire apprendre », qu'on pourrait appeler « didactique », les deux servant de critères pour produire leurs exercices. Voici quelques exemples proposés par les étudiants maîtres :

$f(x) = x^2 - 2$ $g(x) = -x^2 + 2$ $F(x) = f(x) + g(x)$	$f(x) = [2x]$ $g(x) = 2x - 1$ $F(x) = f(x) + g(x)$	$f(x) = \sin x$ $g(x) = -0{,}41(x - 1{,}52)^2 + 1$ $F(x) = f(x) + g(x)$	$f(x) = 2x + 4$ $g(x) = -\frac{1}{2}(x+3)^2 + 1$ $G(x) = f(x) + g(x)$
$f(x) = x^2$ $R \to R$ $g(x) = \sqrt{x}$ $R^+ \to R^+$ $F(x) = f(x) - g(x)$	$f(x) = \frac{1}{x}$ si_x¹ 0 $g(x) = x + 2$ $F(x) = f(x) - g(x)$	$f(x) = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$ $g(x) = -x^2$ $F(x) = f(x) + g(x)$	$f(x) = \lvert x \rvert$ xÎ R $g(x) = -\frac{1}{8}x^2$ xÎ R $G(x) = f(x) - g(x)$
f(x) = ì x + 2 _ - ¥,- 5[È]5,¥ í î 4 ____[- 5,5] $g(x) = \sqrt{x} + 3$ $F(x) = f(x) + g(x)$	$f(x) = -x^2 + 4$ $g(x) = 2^x$ $E(x) = f(x) + g(x)$	$f(x) = [x + 3]$ $g(x) = x + 2$ $F(x) = f(x) + g(x)$	$f(x) = x^2$ $R \to R$ $g(x) = -x$ $Z \to Z$ $E(x) = f(x) - g(x)$

Ces différents exemples sont affichés au mur durant le cours et distribués par la suite à d'autres futurs maîtres pour être solutionnés et discutés. Lors du retour en grand groupe, les exercices sont discutés, critiqués, appréciés et des modifications sont proposées pour les améliorer ou les transformer. De plus, les étudiants qui ont créé les exercices ont à expliquer les critères ayant guidé leurs choix. On en profite alors pour proposer, pour chaque exercice, un autre qui est similaire mais plus simple et un autre plus difficile. Cette activité s'avère une occasion d'approfondir à nouveau les critères, ancrés dans les compréhensions mathématiques

---

Ball et al., 2009). Mon propos se veut plus large et touche la nature des concepts et pratiques mathématiques travaillés en didactique des mathématiques au sens large, soit à travers ses divers travaux de recherche.

des élèves, c'est-à-dire ce que ces exercices peuvent potentiellement provoquer comme compréhensions mathématiques chez les élèves. Les élèves et leurs apprentissages sont donc constamment présents à l'intérieur des critères « mathématiques » émis par les futurs enseignants pour construire ou modifier les exercices. Voici quelques exemples de critères :

- Poser des opérations qui ne sont pas uniquement des additions et faire travailler sur des soustractions, des multiplications et des divisions pour élargir ce que signifie « opérer sur des fonctions » ;
- Proposer des nombres décimaux rend l'opération difficile à calculer avec précision. Toutefois, ceci ne rend pas nécessairement la conceptualisation de l'opération difficile;
- Travailler avec des constantes permet de voir l'effet de la constante sur l'opération (autant comme image que comme multiplicateur) ;
- Travailler avec plus de deux fonctions rend le processus moins technique, une suite d'opérations permet à l'élève de démontrer vraiment sa compréhension ;
- Offrir des opérations pour lesquelles le résultat est nul à quelques endroits [addition de $f(x) = x$ et $f(x) = |x|$] (ou sur l'ensemble de la nouvelle fonction [addition de $f(x) = x$ et $f(x) = -x$]), rendant le résultat surprenant et forçant sa vérification ;
- Même idée pour la variation des images, en proposant des fonctions qui ont des images positives et négatives et pour lesquelles leur combinaison (+,-,´,¸) offrent des réponses positives ou négatives ;
- Travailler avec des fonctions continues et non-continues, ainsi que des fonctions qui ont des indéterminations, pour s'assurer de la compréhension de l'effet de l'indétermination sur l'opération possible et que les opérations ne se font pas sur des « valeurs » mais sur des images (si indéterminé, pas d'image, donc pas d'opération) [ce jeu peut être étendu à 3, 4, 5 fonctions] ;
- Même idée pour les fonctions discrètes (par exemple, N—>N) jumelées avec des fonctions continues ou définies par parties ;
- Poser des exercices pour lesquels les ensembles de départ et d'arrivée ne sont pas les mêmes et ont des restrictions (par exemple, R—>R ou 2—>2) pour s'assurer que les élèves les prennent en compte et soient vigilants ;
- Offrir des fonctions qui offrent un résultat attrayant esthétiquement, soulignant l'attrait que peut avoir les mathématiques au niveau artistique et esthétique ;
- Jouer sur des exercices ou la réponse s'obtient rapidement et d'autres qui demandent un travail plus en profondeur pour varier le type d'exercices à résoudre et aiguiser la compréhension.

Dans ces quelques critères, il est difficile de dissocier les aspects mathématiques des aspects didactiques : les deux semblent aller ensemble et se compléter. On peut se demander si les connaissances développées dans cette activité de formation sont uniquement didactiques ? Il devient rapidement évident que non seulement les étudiants maîtres ont développé leurs connaissances mathématiques à travers cette activité (ce qui est assez habituel à la formation), mais surtout que ces connaissances mathématiques développées sont ancrées dans une réflexion didactique qui les rend difficilement séparables des compréhensions « mathématiques » en soi. Cette dernière idée apparaît particulièrement intéressante à considérer lorsqu'on demande aux étudiants maîtres d'inventer un exercice d'opérations sur les fonctions *qui peut se résoudre mentalement en passant par le graphique*. Les critères développés pour les exemples choisis ne sont alors pas les mêmes que ceux développés pour la tâche précédente et ont une intention différente : développer chez l'élève une image mentale des opérations sur les fonctions, en s'assurant que le problème soit accessible mentalement. Voici quelques exemples des critères proposés :

- Faire additionner ou soustraire des fonctions simples pour développer une familiarité avec le processus d'opération de fonctions, mais aussi pour développer une image mentale sur ce qui se produit au niveau de l'image obtenue [essayer aussi avec plus de deux fonctions, en demeurant accessible mentalement] ;
- Additionner et soustraire une fonction par une fonction constante (par exemple, $f(x) = x$ et $g(x) = 3$) pour voir le résultat rapidement et comprendre l'impact de la fonction à images constantes ;
- Faire la même chose avec la multiplication et la division, en s'assurant que les fonctions soient accessibles mentalement ;
- Offrir des exercices pour lesquels la fonction résultat est la fonction nulle, pour travailler l'opération sur les valeurs d'images (addition de $f(x)$ = x et $f(x) = -x$; et $f(x) = -x^2+2$ et $f(x) = +x^2-2$) ;
- Travailler sur des exemples qui guident intuitivement vers une erreur, forçant une réflexion supplémentaire sur le processus d'opération (par exemple, additionner $f(x) = |x|$ et $g(x) = x$ ou soustraire $f(x) = |x|$ et $g(x) = x$), ainsi que pour permettre de voir mentalement ce qui se produit sur des intervalles donnés ;
- Même idée avec des exercices où certaines parties des deux fonctions sont égales et le résultat de l'opération est nul (par exemple, $f(x) = |x|$ et $g(x) = x$).

Ces exemples servent à illustrer l'idée de travail didactique imbriqué aux mathématiques, le tout se faisant en simultané. Cette simultanéité permet d'entrer dans ce qui peut s'appeler des mathématiques au croisement de la didactique ou de la didactique au croisement des mathématiques. En développant leurs compréhensions mathématiques sur les opérations sur les fonctions, les futurs enseignants développent des mathématiques qui ont un sens parce qu'elles sont riches pour faire apprendre le concept d'opérations sur les fonctions. Ce ne sont pas des connaissances mathématiques en elles-mêmes, par exemple sur l'addition de fonctions uniquement pour additionner des fonctions. Ce sont des connaissances mathématiques qui deviennent pertinentes parce qu'elles sont ancrées didactiquement dans l'apprentissage des élèves. Si on enlève la composante « faire apprendre » dans les compréhensions mathématiques reliées au calcul mental d'opérations de fonctions, peut-être enlève-t-on l'intérêt mathématique à savoir faire ceci pour un enseignant? Distinguer mathématiques et didactique est dans ce cas difficile. On pourrait aussi dire que ce type de travail représente un travail habituel réalisé dans un cours de formation à l'enseignement des mathématiques. Il semble alors important de réaliser que si c'est le rôle de la didactique de travailler à ce type de connaissances didactiques mathématisées, alors l'argument que ce type de connaissances mathématiques appartient à la didactique des mathématiques est justifié…

2. *Rationalité des mathématiques mobilisées dans l'enseignement : des connaissances mathématiques didactisées*

Alors que j'ai préalablement parlé de connaissances didactiques mathématisées, car constamment imbriquées dans un contenu mathématique et prenant sens dans ce contenu, j'aborde ici l'idée de connaissances mathématiques « didactisées ». Cette entrée met de l'avant une certaine légitimité mathématique différente, ancrée dans une rationalité sous-jacente qui leur donne un sens…didactique !

L'exemple utilisé provient de la pratique d'une enseignante répertoriée à l'intérieur de la recherche de Saboya (2010) et avec laquelle ma collègue N.Bednarz et moi-même avons soutiré bon nombre d'analyses sur les questions d'imbrication de didactique et de mathématiques (Bednarz et Proulx 2010, 2011). La vignette qui suit concerne l'écriture exponentielle où Nadia, l'enseignante, travaille avec ses élèves à simplifier l'expression $\frac{10^4+10^5}{10^2+10^3}$.

Nadia : $\frac{10^4+10^5}{10^2+10^3}$, on ne peut rien faire avec ça. Ça reste comme ça, on ne peut rien faire.

Lidia : Pourquoi ça ne…

Nadia : Quand c'est des « plus » qu'il y a entre les deux on laisse ça comme ça, on ne peut rien faire.

France : On peut séparer…

Nadia : Non on ne peut pas séparer ça…

France : Ah non?

Nadia : Là si tu le sépares ça fait $\frac{10^4}{10^2}+\frac{10^5}{10^3}$. Ça veut dire que lorsque tu additionnes des fractions, tu additionnes en haut et en bas. Est-ce qu'on a le droit?

France : Non.

Nadia : Non, donc quand tu sépares ça en deux, c'est ça que tu fais.

Anne-Julie : Mais est-ce qu'on peut faire juste $\frac{10^4}{10^2}$?

Nadia : Non. Qu'est-ce que tu fais quand tu fais ça là $\frac{10^4}{10^2}+\frac{10^5}{10^3}$. C'est ça que tu as fait Anne-Julie?

Anne-Julie : Oui.

Nadia : Ça ne marche pas ça, parce que quand tu me dis que tu additionnes deux fractions, tu additionnes en haut et tu additionnes en bas.

Carmen : Mais elles sont additionnables les fractions.

Nadia : Elles sont additionnables, mais uniquement lorsqu'elles ont le même dénominateur.

Une première réaction à cette discussion est de dire que $\frac{10^4+10^5}{10^2+10^3}$ est simplifiable, donnant $\frac{10000+100000}{100+1000}=\frac{110000}{1100}=100$. Dire que cette expression n'est pas simplifiable est une erreur en fonction du savoir mathématique de référence. Toutefois, Nadia ne commet pas une erreur mathématique. En fait, Nadia sait très bien que cette expression se simplifie encore. À titre d'exemple, dans une rencontre de recherche, elle explique ceci à propos de l'exemple $\frac{a^2+a^3}{a^5+a^2}$:

> Je divise par *a* en haut et en bas mais j'ai a^2+a^3, donc ça va faire $\frac{a+a^2}{a^4+a}$. Et là on regarde est-ce qu'on peut encore simplifier ? Je re-divise encore par *a*. Je vais avoir $\frac{1+a}{a^3+1}$ et là je ne peux plus rien faire. Et

> j'ai toujours le *plus* qui est là, on ne peut plus simplifier. Moi je pense que cette approche permettrait de contourner le problème [des élèves avec la simplification d'expressions].

Dans la vignette de départ, Nadia est en contexte de travail de simplification de notations exponentielles entre elles. D'une certaine façon on peut avancer qu'en contexte de notations exponentielles cette expression ne se simplifie plus au niveau des exposants entre eux sans les transformer en autre chose (comme je l'ai fait ou comme Nadia le propose par la division). Ceci amène une première couche de contexte, qu'on pourrait appeler « scolaire » et reliée à une certaine didactique, qui fait en sorte que le savoir mathématique mobilisé, qui semble fautif ou incomplet, est adéquat dans son contexte d'utilisation. On peut dire que ce savoir a légitimité dans ce contexte, et non dans un contexte général de simplification. Mais il y a plus.

C'est en fait pour éviter les erreurs chez ses élèves que Nadia « invente » cette nouvelle connaissance sur les exposants et sur la simplification. C'est ce qui va amener Nadia à dire que l'on ne peut simplifier l'expression et que cela « reste comme ça », parce qu'elle est sensible aux erreurs d'élèves reliées à séparer l'expression en fractions ou à jumeler ensemble les exposants dans un contexte additif. Est-ce un savoir légitime? Oui, dans ce contexte didactique et d'enseignement. Par contre, il n'est probablement pas légitime en contexte de communauté mathématicienne intéressée à simplifier une expression numérique...

Cet extrait montre une mobilisation de connaissances mathématiques qui ont légitimité en contexte didactique, en fonction de la situation d'enseignement et d'apprentissage. Ce ne sont pas toutefois des connaissances « purement » mathématiques, car, sorties de leur contexte didactique, elles sont difficilement légitimes. Ce sont des compréhensions mathématiques spécifiques qui ont leur source dans une réflexion didactique. Ces mathématiques, pourrait-on dire, sont modulées par les intentions didactiques de cette enseignante. Ces connaissances sont-elles des exemples de mathématiques appartenant à la didactique, de mathématiques de la didactique? Peut-être ceci en fait des « mathématiques didactisées », qui n'existent ou ont un intérêt que dans le champ d'études de la didactique des mathématiques…

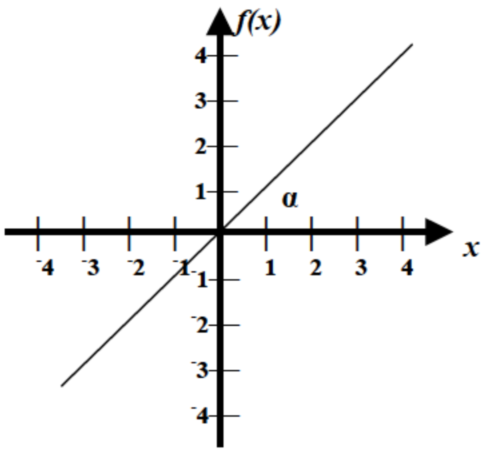
3. Concepts mathématiques développés en didactique

Alors que les deux premiers exemples concernaient des actions ou connaissances mathématiques reliées à la formation des enseignants et la pratique enseignante, les trois exemples suivants concernent des concepts mathématiques qui ont été développés suite à des préoccupations, intérêts ou sensibilités didactiques à l'intérieur de travaux de recherche en didactique des mathématiques. Les trois exemples utilisés pour illustrer cette idée sont le concept d'idécimal, le concept de pente analytique et géométrique et le concept de reste variable de la division.

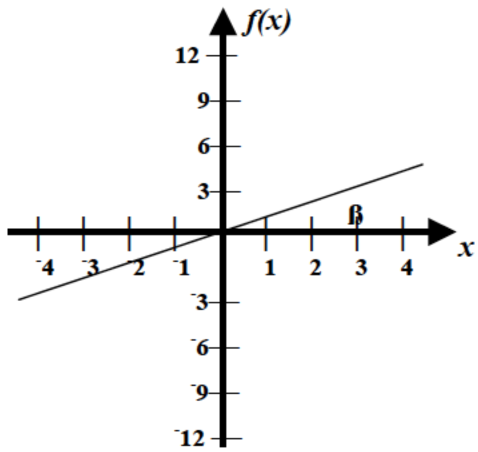
Le concept d'idécimal. Ce concept a été développé par Bronner (1997) pour désigner un nombre qui n'est pas décimal. Par exemple, 1/3 serait *idécimal*, c'est-à-dire non décimal, car 1/3 est une fraction irréductible et son dénominateur n'est pas sous la forme d'un produit de facteurs égaux à 2 et à 5. Cette distinction mathématique entre décimal et idécimal est fort intéressante, particulièrement au niveau didactique alors qu'on voit bien les distinctions qui peuvent être faites pour insister sur certaines propriétés et aspects des nombres rationnels avec lesquels on travaille. Ce type de distinction peut amener à réfléchir en profondeur sur les nombres rationnels, les décimaux, les périodiques, etc., et donc l'invention de ce concept est fort intéressante dans une orientation didactique. Bronner argumente en fait que cette catégorisation est plus pertinente, pour les élèves du secondaire, que la catégorie rationnels/irrationnels. Toutefois, est-ce que ce concept a une légitimité mathématique en dehors de la didactique ? Est-ce un savoir reconnu par la communauté mathématicienne? Une chose certaine est que ce savoir est né en didactique, avec des sensibilités didactiques pour l'apprentissage du concept de nombre rationnel, et il prend légitimité dans ce contexte.

La pente analytique et la pente géométrique. Le concept de pente semble un bon exemple d'un concept qui a été tenu pour acquis comme non problématique assez longtemps et que la didactique (ou les gens sensibilisés aux questions d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques) a révélé comme flou ou problématique. Par exemple, dans leur article, Zaslavsky, Sela et Leron (2002) montrent comment l'idée de pente (*slope* en anglais) peut à la fois être interprétée comme objet géométrique ou objet analytique, voire les deux à la fois, chez différentes personnes travaillant avec les mathématiques (mathématiciens, didacticiens, enseignants, élèves). Voici l'exemple de tâche (traduite) qu'ils ont proposé aux différents participants, leur demandant en premier lieu de résoudre la tâche 1 et ensuite la tâche 2.

Tâche 1:
Le graphique de la figure 1 représente la fonction ***f*** tel que ***f***: $x \to x$



Tâche 2:
Un élève a tracé le graphique de la même fonction ***f*** (tel que ***f***: $x \to x$) dans un environnement informatisé et a obtenu le graphique suivant:



Répondez aux questions suivantes:
1. Quelle est la pente de la fonction ***f*** ? Comment l'avez-vous déterminée?
2. Est-ce que le graphique de ***f*** trace une bissectrice entre les deux axes? Comment le savez-vous?
3. Pouvez-vous trouver la tangente de l'angle entre le tracé du graphique et l'axe des *x*? Si vous le pouvez, quelle est la valeur? Comment l'avez-vous calculée? Si non, pourquoi? Que représente cette donnée, cette tangente?

Pour Zaslavsky et al., ce type de tâche et la diversité des interprétations et réponses recueillies souligne l'intérêt de faire une distinction entre pente (géométrique) et taux de variation (pente analytique) pour éviter les confusions[2]. Toutefois, cette distinction est-elle légitime comme

[2] Je ne peux parler que du Québec, car je ne connais pas assez le contexte ailleurs sur les changements survenus dans les programmes d'études et les pratiques d'enseignement, mais le concept de « taux de variation », étiqueté comme tel, n'était pas vraiment présent dans l'enseignement avant les mi-années 1990 au secondaire, alors

savoir de référence au niveau de la communauté mathématicienne ? Dans l'étude en question, la diversité des réponses fournies par les mathématiciens entre eux (et les didacticiens entre eux, en plus de celle retrouvée chez les enseignants et les élèves) permet de questionner cette légitimité. Peut-être que la légitimité mathématique de la notion de pente et de taux de variation (tel qu'employée au secondaire) se situe dans le cadre de la didactique ou dans les réflexions, préoccupations et sensibilités didactiques qui les accompagnent ?

Le reste variable de la division. Ce troisième exemple illustre un travail didactique pouvant amener au développement de propositions sur des concepts mathématiques, créant une rupture avec les savoirs mathématiques de référence, mais possédant une richesse didactique pour en comprendre ces mêmes concepts.

Tel que l'explique Brown (1981), la définition de la division euclidienne respecte certaines conventions – ou conditions – ainsi le reste r est défini comme étant situé entre 0 et le diviseur[3]. Ainsi, $18 \div 4$ donne $4r2$ et non $3r6$, malgré que les deux sont conceptuellement acceptables au niveau du raisonnement sur le processus de division sous-jacent. Brown s'est en fait intéressé à cette idée suite à l'analyse des compréhensions d'une élève, Sharon, ce qui l'a amené à considérer l'idée de reste variant pour lequel différentes réponses seraient données à la division en fonction du reste. Ainsi, $18 \div 4$ pourrait donner $4r2$, $3r6$, $2r10$, $5r^{-}2$, etc. Cette idée de reste variable de la division, au niveau didactique, permet particulièrement de questionner la présence des conventions et définitions en mathématiques, distinguant alors l'idée de comprendre un concept et celui de connaître la convention, un jeu parfois enfoui à l'intérieur de la procédure souvent tenue pour acquise dans la compréhension mathématique.

Avec une collègue (Proulx et Beisiegel 2009), nous nous sommes intéressés à mieux comprendre l'impact de cette définition et le sens qui peut être donné à la division *avec les nombres négatifs*. Sans vouloir créer un reste de division variable comme le fait Brown, le travail fait ressortir qu'en appliquant la définition de la division avec les nombres négatifs ce sont les réponses elles-mêmes qui sont variables. Ainsi, que vaut $^{-}18 \div 4$? $^{-}5r2$? $^{-}4r^{-}2$? $^{-}6r^{-}6$? Quelle réponse respecte la convention? Doit-on développer une convention de la division pour les nombres négatifs ? Comment la définir ?

La question qui se pose dans le cas de Brown et du nôtre est si ce type de questionnement mathématique a légitimité dans la communauté mathématicienne et si les savoirs qui en sont développés (reste variable, définition de division chez les négatifs) ont légitimité mathématique en dehors de la didactique. Une chose certaine est que ces idées ont été développées à partir d'un intérêt didactique. Ainsi, ces connaissances mathématiques ont légitimité dans le champ de la didactique, parce que tout comme le concept d'idécimal de Bronner, ils ouvrent sur une sensibilité mathématique qui semble porteuse. Il y a en effet dans ces idées un potentiel mathématique, en dehors des créneaux habituels des savoirs de références, pour l'apprentissage mathématique et la compréhension du concept. Est-ce un potentiel « didactisé », c'est-à-dire une façon de rendre communicable les concepts mathématiques? Est-ce que ces mathématiques didactisées représentent des exemples de mathématiques de la didactique?

Ces idées m'apparaissent, comme didacticien des mathématiques (ou mathématicien de la didactique!) fort pertinentes et porteuses pour la formation des enseignants, en ce sens qu'elles aident à développer des « façons de faire ou une réflexion/sensibilité à rendre communicables ou accessibles les mathématiques pour les faire apprendre et comprendre » ou

---

qu'on ne parlait que de pente. À titre d'exemple, des collègues et moi-même avons été initiés à ce concept pour le secondaire uniquement par la didactique lors de nos études universitaires.

[3] Je parle ici de la division euclidienne, mais on retrouve ce principe pour l'algorithme de division, alors qu'il faut continuer à diviser tant que le reste est plus gros que le diviseur.

encore de développer des connaissances « mathématiques qui ont une appréhension ou une sensibilité sur l'enseignement, l'apprentissage et les pratiques mobilisées ». Par contre, en dehors de la communauté didacticienne, on est en droit de se questionner sur l'intérêt, la viabilité ou la pertinence de ces concepts « mathématiques ». Mais, peut-être est-ce là aussi des exemples de mathématiques de la didactique : des savoirs mathématiques qui n'existeraient ou n'auraient légitimité que dans le champ de la didactique des mathématiques…

V. REMARQUES FINALES ET OUVERTURES SUR LA FORMATION

Il m'est arrivé d'affirmer, en conférence, que les enseignants autant du primaire que du secondaire n'ont pas besoin de connaître les mathématiques avant de faire de la didactique (Proulx 2010). Mes propos étaient maladroits, car ils étaient entendus comme si j'affirmais que les mathématiques n'étaient pas importantes en didactique des mathématiques ou pour les enseigner. Par contre, mon argument était plutôt que par la didactique des mathématiques les enseignants arrivent à ré-apprendre les mathématiques qui leur font ou non défaut ; une bien vieille idée s'il en est une. Mes propos voulaient aussi contraster avec la critique fréquemment formulée au fait que les futurs enseignants (secondaire/primaire) connaissent mal ou ne connaissent pas suffisamment les mathématiques et qu'il est impossible de faire de la didactique avec eux sans qu'ils aient fait un « rattrapage mathématique ». Mes travaux de recherche menés sur ces questions à la formation continue des enseignants du primaire et du secondaire, ainsi que mes propres pratiques de formateur à la formation initiale au primaire et au secondaire, m'amènent à être en désaccord avec cette vision linéaire situant les mathématiques comme préalables au travail didactique dans le processus de formation des enseignants ; de plus, je considère que 12 ans de scolarité en mathématiques (au Québec du moins, et parfois jusqu'à 14 ans pour les enseignants du secondaire) avant d'entrer à l'université en formation des enseignants est suffisant comme expérience *préalable* en mathématiques.

Cette intervention maladroite continue toutefois à me faire réfléchir, particulièrement en lien avec les questions et idées avancées ici. Car, s'il existe vraiment des mathématiques spécifiques à la didactique des mathématiques, ou un travail mathématique propre à la didactique (Corriveau 2010), alors il peut paraître normal, dans un premier temps, que les futurs enseignants éprouvent des difficultés mathématiques dans les cours de formation à l'enseignement (que nous appelons au Québec des cours de didactique des mathématiques). En effet, celles-ci représentent de « nouvelles » mathématiques ou de « nouvelles » façons de faire et d'appréhender les concepts et raisonnements en mathématiques, et ils ne les ont pas vraiment rencontrées jusqu'à maintenant dans leur parcours scolaire (les programmes d'études du primaire et du secondaire n'ont pas en effet comme objectif de former des futurs enseignants!). Dans un deuxième temps, le travail simultané de mathématiques et de didactique dans un cours de formation à l'enseignement apparaît pertinent, car les mathématiques à voir sont celles de la didactique et ne peuvent que difficilement être travaillées ailleurs que dans ce type de cours (les mathématiques de la didactique ne sont en effet pas celles du mathématicien, ni de l'ingénieur, etc., et ni celles des programmes d'études !).

Ceci étant dit, une chose demeure certaine : ces réflexions sont importantes pour les questions de formation des enseignants, où on s'affaire souvent à mieux comprendre et mieux penser les contenus de formation. Ces réflexions sur la nature des mathématiques en didactique sont importantes parce que, d'un côté, les critiques vis-à-vis les connaissances mathématiques des futurs enseignants sont nombreuses et que ce contexte se doit sérieusement d'être repensé et nuancé et, d'un autre côté, parce que les questions d'articulation de formation mathématique et de formation didactique en dépendent et seront pensées autrement en fonction de la façon de percevoir et conceptualiser *ces* mathématiques. La question de savoir s'il existe des mathématiques propres à la didactique reste donc entière, peut-être de la même façon que celle de savoir s'il existe réellement une didactique spécifique aux mathématiques. Toutefois, cette question est importante et mérite d'être explorée, particulièrement parce que les mathématiques jouent pour plusieurs un rôle central en didactique des mathématiques et à la formation des enseignants.

REFERENCES

Ball D. L. (2000) Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education, 51*(3), 241-247.

Ball D. L., Bass H. (2003) Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. *Actes de la rencontre 2002 du Groupe Canadien d'étude en didactique des mathématiques* (pp. 3-14). Edmonton, Canada: GCEDM.

Ball D. L., et al. (2009) RF01: Teacher knowledge and teaching. *Proceedings of the 33rd conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 121-150). Thessalonique, Grèce: PME.

Bednarz N. (2001) Didactique des mathématiques et formation des enseignants : le cas de l'Université du Québec à Montréal. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, *1*(1), 61- 80.

Bednarz N. (2007) Ancrage de la didactique des mathématiques au Québec : à la recherche de sens et d'une cohérence. *Actes du colloque 2007 du Groupe des didacticiens des mathématiques du Québec* (pp. 21-61). UQÀR : GDM.

Bednarz N., Perrin-Glorian M.-J. (2003) Formation à l'enseignement des mathématiques et développement de compétences professionnelles: Articulation entre formation mathématique, didactique et pratique. *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone 2003*. Tunis: Éditions CNP.

Bednarz N., Proulx J. (2009) Knowing and using mathematics in teaching: Conceptual and epistemological clarifications. *For the Learning of Mathematics 29*(3), 11-17.

Bednarz N., Proulx J. (2010) De quel contexte parle-t-on ? Une exploitation de mathématiques professionnelles avec les enseignants. *Actes du colloque 2010 du Groupe des Didacticiens de Mathématiques du Québec* (pp. 182-192). Moncton, N.-B.: GDM.

Bednarz N., Proulx J. (2011) An attempt at defining teachers' mathematics through research on mathematics at work. *Actes du colloque CERME-7* (pp. 2569-2579). Rseszow, Poland: University of Rseszow & ERME.

Bronner A. (1997) *Etude didactique des nombres réels, idécimalité et racine carrée.* Thèse de doctorat. Université J. Fourier. Grenoble, France.

Brousseau G. (1998) *Théorie des situation didactiques*. Grenoble : La Pensée sauvage.

Brown S.I. (1981). Sharon's 'Kye'. *Mathematics Teaching 94*, 11-17.

Corriveau C. (2010) Que signifie faire des mathématiques dans un cours de didactique des mathématiques ? In Proulx J., Gattuso L. (dirs.) (pp. 159-163) *Formation des enseignants en mathématiques : Tendances et perspectives actuelles.* Sherbrooke, QC : Éditions du CRP .

Davis B. (2010) Concept studies : designing settings for teachers' disciplinary knowledge. *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol.1, pp. 63-78). PME.

Even R. (1993) Subject-matter knowledge and pedagogical content knowledge: Prospective secondary teachers and the function concept. *Journal for Research in Mathematics Education 24*(2), 94-116.

Even R. (1990) Subject matter knowledge for teaching and the case of functions. *Educational Studies in Mathematics 21*, 521-544.

For the Learning of Mathematics (2009) *Knowing and using mathematics in teaching*, *29*(3) [numéro thématique].

Huillet D. (2009) Mathématiques pour l’enseignement : une approche anthropologique. *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone 2009*. Dakar, Sénégal.

Kuzniak A. (2007) Savoir mathématique et enseignement didactique et pédagogique dans les formations initiales du premier et du second degrés. *Recherche et formation* 55, 27-40.

Martinand J.-L. (1993) Organisation et mise en œuvre des contenus d'enseignement. *Actes de colloque Recherches en didactiques: contribution à la formation des maîtres, 13-15 février 1992* (pp. 25-26). Paris : Éditions Jacques Colomb.

Moon B. (1986) *The ‘new maths’ curriculum controversy: An international story*. London : Falmer Press.

Proulx J. (2010, juin) *Les enseignants du secondaire doivent-ils vraiment connaître et maîtriser les concepts mathématiques à enseigner avant de faire de la didactique des mathématiques ?* Texte présenté lors du colloque 2010 du Groupe des Didacticiens de Mathématiques du Québec. Moncton, N.-B. : GDM.

Proulx J., Beisiegel M. (2009) Mathematical curiosities about division of integers. *The Montana Mathematics Enthusiast 6*(3), 411-422.

Proulx J., Gattuso L. (dirs.). (2010) *Formation des enseignants en mathématiques : Tendances et perspectives actuelles.* Sherbrooke, QC : Éditions du CRP.

Saboya M. (2010) *Élaboration et analyse d’une intervention didactique co-construite entre chercheur et enseignant*. Thèse de doctorat. Université du Québec à Montréal. Montréal, Canada.

Shulman L.S. (1986) Those who understand teach: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher 15*(2), 4-14.

Zaslavsky O., Hagit S., Leron U. (2002) Being sloppy about slope: The effect of changing the scale. *Educational Studies in Mathematics 49*(1), 119-140.

FORMATION D'ENSEIGNANTS EN MATHÉMATIQUES À L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE BAMAKO : QUELLE ARTICULATION ENTRE MATHÉMATIQUES ET DIDACTIQUE?

Mamadou Souleymane SANGARÉ*

Résumé – Dans le cadre de la reforme Licence-Master-Doctorat, nous menons une étude exploratoire sur les rapports qui devraient être établis entre les mathématiques et la didactique des mathématiques, sous le double aspect du contenu et de l'approche de formation. Un questionnaire d'entretien est ainsi élaboré autour de questions contenues dans le texte d'appel à contribution du GT1 ; cinq formateurs de mathématiques et cinq formateurs de didactique des mathématiques se sont prêtés à l'entretien. Une synthèse des réponses recueillies a permis d'identifier quelques pistes pour une restructuration des deux types de formation selon les préconisations liées au LMD.

Mots-clefs : Formation d'enseignants, mathématiques, didactique des mathématiques, articulation, système Licence-Master-Doctorat

Summary – In the framework of Licence-Master-Doctorate reform we undertake an exploratory study on the relations that should be established between mathematics and the didactic of mathematics, under the double aspect of content and training approach. For this purpose, an interview questionnaire is designed around questions stated in the call for contribution of GT1; five math trainers and five trainers of math didactic have been interviewed. An analysis of collected answers allowed us to identify some ways for a restructuring of the two types of training according to the recommendations related to LMD.

Key Words: training of teachers, mathematics, math didactic, articulation, Licence-Master- Doctorate system

I. INTRODUCTION

Le passage du système actuel d'enseignement supérieur au système Licence-Master-Doctorat (LMD[1]) au Mali, est considéré comme un enjeu institutionnel majeur pour améliorer de façon significative la qualité interne et externe des formations effectuées dans cet ordre d'enseignement. L'École Normale Supérieure de Bamako (ENSUP) est au cœur de cette réforme ; celle-ci touche tous les domaines de la formation d'enseignants. De façon récurrente, elle concerne toutes les catégories d'acteurs impliqués dans la formation. Une équipe de formateurs en didactique des mathématiques[2] mène actuellement une étude exploratoire sur la restructuration de la formation au sein du Département d'Enseignement et de Recherche de Mathématiques (DER), de l'École Normale Supérieure de Bamako. Il s'agit d'explorer d'éventuelles pistes pour circonscrire les contenus et les approches de formation d'enseignants en mathématiques, dans une perspective de basculement du système existant vers le système Licence-Master-Doctorat.

La motivation de cette étude résulte de certaines préconisations fortes qui sous-tendent la réforme en cours. Ainsi, les contenus de formation doivent être élaborés en termes d'Unité d'Enseignement (UE), pouvant impliquer plusieurs champs disciplinaires surtout en formation

* Ecole Normale Supérieure de Bamako – Mali – mamadoussangare@yahoo.fr

[1] Le basculement vers le système LMD au Mali, doit se réaliser selon le guide du Réseau pour l'Excellence de l'Enseignement Supérieur en Afrique de l'Ouest- REESAO (2008). *Guide de Formation du LMD*. Consulté le 18 octobre 2011 dans http://www.cames.bf.refer.org/IMG/pdf/LMD_Toolkit_-final_draft_Complete.pdf

[2] Il s'agit de l'Équipe de Didactique des Mathématiques (EDiMath) du Département d'Enseignement et de Recherche (DER) de Mathématiques de École Normale Supérieure de Bamako.

© Sangaré Mamadou Souleymane (2012) Formation d'enseignants en mathématiques à l'École Normale Supérieure de Bamako : quelle articulation entre mathématiques et didactique des mathématiques ? In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT1, pp. 228–239). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

professionnelle. Pour la formation mathématique des enseignants, cette préconisation incite à interroger les contenus actuels des formations mathématique et didactique dont les rapports se caractérisent par un cloisonnement. Aussi, nous tentons d’identifier certaines pistes permettant d’établir un lien entre ces deux contenus de formation.

Par ailleurs, les stratégies préconisées pour une meilleure professionnalisation des formations, doivent se concevoir à travers une double alternance : entre la formation disciplinaire et la formation professionnelle, entre l’établissement de formation et le milieu professionnel en privilégiant un encadrement pédagogique en équipe pluridisciplinaire. En formation d’enseignants en mathématiques, quelle approche préconiser en mathématiques et en didactique? Aussi, l’objectif de cette étude exploratoire est l’élaboration d’un avant-projet en vue d’établir une feuille de route sur les deux types formation dans le cadre du basculement de l’École Normale Supérieure de Bamako vers le système LMD.

L’intérêt accordé aux questions sur la formation mathématique des enseignants s’est considérablement accru ces dernières années ; en particulier on assiste à un développement significatif des recherches liées aux rapports qui devraient exister entre les formations mathématique et didactique de l’enseignant. Cette problématique est souvent abordée à partir de la complexité liée au travail de l’enseignant en mathématiques (Robert 2003 et 2010). Mais elle suscite aussi des points de vue opposés sur l’enseignement des mathématiques, comme ceux soutenus respectivement par Bkouche (2010) et Thomas (2010).

II. CONTEXTE DE L’ÉTUDE

1. Aperçu du système éducatif malien

Le système éducatif au Mali est structuré en trois ordres d’enseignement. La pyramide s’appuie d’abord sur un bloc unique appelé Enseignement Fondamental ; il est composé d’un premier cycle de six ans (correspondant au primaire) et d’un second cycle de trois ans (correspondant à peu près au collège en France). Ce bloc unique est suivi par l’Enseignement Secondaire avec deux composantes : un enseignement secondaire général étalé sur trois ans ; un enseignement technique et professionnel avec une filière courte de deux ans et une filière longue de quatre ans. Enfin, suit l’Enseignement Supérieur qui se compose des universités, des instituts, et des grandes écoles dont l’École Normale Supérieure de Bamako.

2. L’existant sur les formations mathématique et didactique à l’ENSUP de Bamako

La formation d’enseignants à l’École Normale Supérieure de Bamako comporte deux filières.

La première filière est celle des Professeurs d’Enseignement Fondamental (PEF)[3]; elle a une durée de formation de quatre ans. Le recrutement s’effectue sur concours professionnel ; le niveau minimal est celui de maître principal (à peu près le niveau Baccalauréat). Les deux premières années sont consacrées à des renforcements disciplinaires correspondant au niveau du DEUG. La troisième année est réservée à l’enseignement de la pédagogie et de la didactique. La quatrième année comprend un stage pratique avec un volet administratif et un volet pédagogique, en lien étroit avec la préparation d’un rapport de stage. L’option sciences prépare à l’enseignement des mathématiques, des sciences physiques, des sciences de la vie et de la terre ; il n’existe pas de lien entre ces trois disciplines tant au niveau des contenus qu’au niveau des méthodes de formation.

[3] Le Professeur d’Enseignement Fondamental enseigne au Second Cycle Fondamental (équivalent du collège en France).

La deuxième filière, celle des Professeurs d'Enseignement Secondaire (PES)[4], a une durée de formation de deux ans. Le recrutement s'effectue sur concours direct, le niveau minimal requis est la licence. En option mathématiques, objet de cette étude exploratoire, la première année est consacrée aux cours intitulés « compléments de mathématiques » et au cours de didactique (*Tableau 1*).

Compléments de Mathématiques			**Didactique des Mathématiques (DDM)**		
Enseignements	**Nombres d'heures par an**	**Nombres de formateurs**	**Enseignements**	**Nombres d'heures par an**	**Nombres de formateurs**
Algèbre	*75*	*2*	Fondements de la DDM	*30*	*1*
Analyse	*75*	*2*	Élaboration et conduite de situations d'enseignement-apprentissage	*45*	*2*
Logique mathématique	*75*	*2*	Études des Programmes et de Manuels	*75*	*2*
Géométrie	*75*	*2*	Enseignement de la géométrie au secondaire	*75*	*2*
Probabilité & Statistique	*45*	*1*	Mathématiques et Langues	*50*	*1*
Total	***345 h***	***9***	**Total**	***275 h***	***8***

Tableau 1 *– Enseignements de mathématiques et de didactique des mathématiques en 1ère année PES*

Généralement, chaque enseignement est assuré par un enseignant-chercheur spécialiste de la discipline qui en assure la responsabilité; il est secondé par un assistant détenteur d'un DEA dans la même discipline. Les contenus et les dispositifs respectifs de formation sont élaborés et mis en œuvre de façon indépendante. Les contenus de formation mathématique sont considérés comme des compléments de la formation mathématique reçue à l'université.

En plus des enseignements indiqués ci-dessus, la première année comporte l'observation de classes (*50* heures) et les TICE (*25* heures). La deuxième année PES est consacrée essentiellement à la psychopédagogie, (*50* heures/an), à des compléments de didactique (*30* heures), au stage (*75* heures/an) et au mémoire professionnel à travers les séances (*50* heures).

III. MÉTHODOLOGIE

Le choix d'une étude exploratoire se justifie par le fait que le système LMD est nouveau pour toutes les catégories socioprofessionnelles impliquées ou concernées dans sa conception et sa mise en œuvre à l'École Normale Supérieure de Bamako (administration, formateurs, élèves-professeurs, promoteurs d'école, etc.). Deux ateliers de trois journées chacun ont été organisés sur les principaux axes du système LMD et les méthodes d'élaboration des offres de formation. Cependant, cette formation s'est avérée insuffisante ; elle portait le plus souvent sur des généralités qui prenaient rarement en compte les attentes des formateurs liées aux spécificités des contenus de formation dont ils ont la charge. En particulier, les aspects relatifs

[4] Au Mali, le Professeur d'Enseignement Secondaire enseigne au lycée.

aux rapports entre les contenus de formation au niveau des parcours de formation ont été très peu abordés.

Ainsi, la méthodologie élaborée s'appuie sur une collecte initiale d'informations auprès des deux groupes de formateurs, en mathématiques et en didactique ; ensuite, il est procédé à un traitement conséquent de celles-ci afin d'établir dans ses grandes lignes une feuille de route permettant d'étudier de façon systématique les rapports qui devraient exister entre les formations mathématique et didactique, en filière Professeurs d'Enseignement Secondaire, option mathématiques dans le cadre du basculement de l'ENSUP de Bamako vers le système LMD. Cinq formateurs de chaque groupe ont été sélectionnés suivant le critère lié à leur inscription sur les emplois du temps officiels des cinq dernières années au niveau du Département d'Enseignement et de Recherche (DER) de mathématiques de l'ENSUP de Bamako. Ces dix formateurs sont parmi ceux qui ont dans le système actuel de l'ENSUP, une expérience avérée dans le domaine de la formation d'enseignants en mathématiques ; de surcroît, ils sont parmi ceux qui sont retenus pour l'élaboration des contenus de formation dans le cadre du LMD. L'auteur de cette étude exploratoire ne fait pas partie des dix formateurs sélectionnés.

Un questionnaire d'entretien a été élaboré ; il s'appuie essentiellement sur les questions d'orientation du groupe de travail GT1.

Qu'entend-on par « connaissances mathématiques pour l'enseignement au secondaire » ?

Quels devraient être la nature et le niveau de connaissances mathématiques des enseignants du secondaire?

Quel type de connaissances mobilisent les enseignants du secondaire dans leurs pratiques ?

Quelles approches en formation pour la filière PES, option mathématiques?

L'étude de ces questions est au cœur de l'une des plus importantes préconisations pour le passage au LMD de l'ENSUP : l'orientation des formations d'enseignants vers une plus grande professionnalisation. Cette préconisation est explicitement rappelée au début de chaque entretien. Ces questions ont été déclinées en vingt-quatre items ; à chaque item est attribué un objectif. Il s'agit d'accéder aux avis des formateurs interrogés sur certains aspects du système actuel de formation et sur ceux liés aux préconisations du système LMD. Le même questionnaire a été proposé aux deux groupes de formateurs sélectionnés. La durée d'un entretien était d'environ cent minutes.

Avec la taille très réduite de l'échantillon, la technique de traitement adoptée s'appuie sur l'interprétation et la comparaison des discours tenus par les deux groupes de formateurs en faisant ressortir autant que possible leurs avis respectifs sur les questions citées ci-dessus. Une synthèse de ce traitement portera sur l'identification d'éventuelles cohérences et/ou régularités des avis émis, sur d'éventuels points de convergence ou de divergence des deux groupes, à propos certaines questions clés pour l'élaboration des contenus et des stratégies de formation initiale des enseignants en mathématiques et en didactique. Cette synthèse doit être l'objet d'une restitution à l'intention de tous les formateurs de l'ENSUP impliqués dans la formation initiale des enseignants de mathématiques.

IV. PRINCIPALES PISTES IDENTIFIÉES

Nous donnerons dans ce texte certains avis émis sur des items que nous estimons significatifs par rapport aux objectifs de cette étude exploratoire. Les tableaux établis ci-dessous sont donnés uniquement à titre illustratif; ils ne peuvent être l'objet de traitement quantitatif pour en tirer des conclusions.

1. *Qu'entend-on par « connaissances mathématiques pour l'enseignement » ?*

Item$_1$: Les connaissances mathématiques du professeur d'enseignement secondaire sont-elles distinctes de :

celles de l'ingénieur ? Justifiez votre réponse.

celles de l'économiste ? Justifiez votre réponse.

L'objectif de cet item était de recueillir les avis des formateurs concernés sur d'éventuelles distinctions entre les connaissances mathématiques du professeur de mathématiques et celles de ces deux corps de métiers cités. A priori, la quasi-totalité des formateurs répondront par l'affirmative en raison de leur expérience avérée dans la formation d'enseignants en mathématiques et en raison des conséquences constatées sur le terrain du recrutement d'ingénieurs et d'économistes de formation depuis dix ans comme professeurs contractuels de mathématiques au secondaire[5]. Cependant, leurs avis seraient plus significatifs par rapport à nos objectifs, si ceux-ci s'accompagnent de justificatifs faisant intervenir des éléments distinctifs entre les mathématiques du professeur de celles de l'ingénieur ou de l'économiste.

Les dix formateurs ont répondu par l'affirmative. Les justifications avancées sont distinctes, mais elles ne semblent pas antinomiques.

- Pour les formateurs de mathématiques, leur justification se retrouve presque dans celle proposée par l'un des leurs: « L'ingénieur ou l'économiste utilise des recettes, des formules, des algorithmes, des modèles, mais pas de concepts mathématiques.»
- Pour les formateurs de didactique, la justification relève de la distinction entre les Organisations Mathématiques liées respectivement aux contenus de formation en mathématiques des ingénieurs ou des économistes avec celles conçues pour la formation des professeurs de mathématiques du secondaire.

Cependant, les pistes liées à la méthodologie d'élaboration d'une feuille de route pour le passage au LMD seraient mieux éclairées si des avis liés aux spécificités du métier de professeurs de mathématiques étaient émis.

Item$_2$: Les mathématiques à enseigner en première année PES à l'ENSUP devraient-elles être :

des compléments de mathématiques référés aux mathématiques enseignées à la Faculté des Sciences et Techniques ?

des contenus de formation en mathématiques, spécialement élaborés pour la formation de professeurs de mathématiques de l'Enseignement Secondaire ?

des contenus de formation en mathématiques, élaborés en référence aux mathématiques enseignées dans l'enseignement secondaire ?

Les choix ne sont pas exclusifs. Justifiez votre réponse.

L'objectif de cet item est de collecter des avis sur le type de connaissances appelé « Horizon Content Knowledge (HCK) (Ball, Thames et Phelps 2008) », qui exige de l'enseignant de mathématiques une mise en liaison des mathématiques du niveau où il enseigne aux mathématiques des niveaux connexes du système éducatif concerné. Le caractère non exclusif des réponses émises doit permettre de percevoir l'importance accordée à la mise en connexion des niveaux scolaires. Rappelons que dans le système actuel, tous les cours de mathématiques en filière Professeurs d'Enseignement Secondaire s'effectue en première année.

[5]La décision est provisoire dit-on.

Les réponses obtenues sont les suivantes (*Tableau 2*) :

	Réponses des formateurs de mathématiques		**Réponses des formateurs de didactique des mathématiques**	
	Oui	**Non**	**Oui**	**Non**
a)	*5*	*0*	*4*	*1*
b)	*3*	*2*	*5*	*0*
c)	*3*	*2*	*5*	*0*

Tableau 2 *– Réponses des deux groupes à l'item$_2$*

Les avis émis dans les deux groupes de formateurs semblent indiquer que la formation mathématique des enseignants du secondaire doit se référer à la fois aux mathématiques universitaires et aux mathématiques du secondaire. Certains formateurs en mathématiques précisent la nature de la référence aux mathématiques universitaires ; les mathématiques du secondaire sont perçues comme des mathématiques universitaires allégées et les méthodes pour effectuer cet allégement peuvent s'acquérir par expérience ou encore par des sessions de formation continue. L'argument avancé repose sur la disponibilité des textes définissant les programmes du secondaire. Par ailleurs, un formateur en didactique estime que les connaissances acquises pour obtenir la licence à l'université suffisent largement ; un complément de formation en mathématiques n'est pas nécessaire à l'ENSUP.

Cependant, ces divers avis rendent problématique la dénomination compléments de mathématiques pour le contenu de formation en mathématiques. Ces compléments peuvent-ils être conçus comme compléments des seules mathématiques de l'université? L'étude des questions liées à sa définition s'avère nécessaire au regard du passage au LMD.

Item$_8$: En filière Professeurs d'Enseignement Secondaire, option mathématiques, les contenus de formation en mathématiques doivent-ils être élaborés en rapport avec les contenus de formation en didactique des mathématiques ? Justifiez votre réponse.

L'objectif principal est de recueillir les avis justifiés sur l'existence de lien entre les contenus de formation mathématique et didactique. Notons que dans le cadre du passage au LMD, ces contenus sont considérés en formation professionnelle initiale comme des Unités d'Enseignement (UE) majeures, qui peuvent impliquer plusieurs champs disciplinaires. Au cas où l'existence de ce lien est reconnue, il s'agit d'identifier les points de vue respectifs des deux groupes de formateurs sur la nature de l'articulation entre les deux catégories de connaissances pour l'enseignant du secondaire. Rappelons que les contenus de formation en mathématiques enseignés actuellement ont été conçus sans aucune mise en rapport avec la didactique des mathématiques.

Les réponses obtenues à cet item sont les suivantes (*Tableau 3*) :

Réponses des formateurs de mathématiques		**Réponses des formateurs de didactique des mathématiques**	
Oui	**Non**	**Oui**	**Non**
2	*3*	*4*	*1*

Tableau 3 *– Réponses des deux groupes à l'item$_8$*

Pour les formateurs de mathématiques : Les réponses positives sont justifiées par des arguments liés à des constats sur les pratiques de classes au secondaire comme semblent l'attester les propos de l'un des deux formateurs: « [...] souvent on a de la peine à se rabaisser au niveau des lycéens pour leur expliquer la résolution d'un problème [...] ». Par ailleurs, un formateur du même groupe justifie sa réponse négative comme suit : « [...] vouloir élaborer des maths avec la didactique, c'est vouloir faire de l'élève-professeur un didacticien ; or c'est bien les maths et non la didactique qu'il aura à enseigner au lycée [...]».

Pour les formateurs de didactique : Les formateurs en didactique approuvent en général la prise en compte de leur discipline dans l'élaboration des contenus mathématiques de formation. Cependant, certaines justifications sont assez générales comme dans le cas suivant : « [...] l'histoire et l'épistémologie des mathématiques peuvent jouer un rôle dans la formation mathématique des futurs professeurs de mathématiques du secondaire ».

Ces avis soulèvent des questions pertinentes sur la nécessité de concevoir un lien entre les deux contenus de formation et sur les stratégies de son élaboration. On peut en formuler d'autres :

- Comment les deux groupes de formateurs pourraient se convaincre de l'intérêt d'une mise en rapport des deux types de contenu en formation mathématique des futurs professeurs de mathématiques du secondaire dans le cadre du LMD ?
- Le rapport entre les deux contenus doit-il se référer en premier lieu aux mathématiques ? à la didactique?
- Faudrait-il entrer par un point de vue didactique pour aborder la complexité de la formation mathématique à travers les tâches professionnelles que doit accomplir un futur professeur de mathématiques (Robert 2010) ?

2. *Quels devraient être la nature et le niveau de connaissances mathématiques des enseignants ?*

Item$_{14}$: Les connaissances mathématiques du professeur du secondaire devraient-elles être en rapport avec :

les mathématiques du fondamental?

les mathématiques de l'université ?

Les choix ne sont pas exclusifs. Justifiez vos réponses.

Le système éducatif au Mali est marqué par la faiblesse des relations entre les professionnels de ses différents ordres d'enseignement. Cette faiblesse est encore plus accentuée entre l'Enseignement Fondamental et l'Enseignement Supérieur. Nous supposons que l'effectivité (ou non) du rapport entre ces deux ordres d'enseignement est un facteur qui influence de façon significative, la nature et le niveau de connaissances mathématiques du professeur du secondaire. Dans le cas spécifique de l'ENSUP de Bamako, les contenus d'enseignement en mathématiques de l'Enseignement Fondamental constituent un objet de formation ; mais cette formation se réduit à l'étude des programmes ; les connaissances sur le milieu et les pratiques professionnels au niveau de cet ordre d'enseignement sont presque ignorées. Aussi, les connaissances mathématiques du professeur du secondaire seraient a priori perçues en rapport plus étroit avec les mathématiques de l'université qu'avec celles du fondamental.

Les réponses obtenues à cet item sont les suivantes (*Tableau 4*) :

	Réponses des formateurs de mathématiques				**Réponses des formateurs de didactique**		
	Oui	**Non**	**Pas de réponse**		**Oui**	**Non**	**Pas de réponse**
a)	*3*	*0*	*2*		*5*	*0*	*0*
b)	*5*	*0*	*0*		*4*	*0*	*1*

Tableau 4 – *Réponses des deux groupes à l'item$_{14}$*

Pour les formateurs de mathématiques : Cette répartition pourrait être liée aux carrières professionnelles de ce groupe de formateurs. En effet, ceux qui ont émis une réponse positive à la question a) ont une expérience professionnelle de l'enseignement des mathématiques au secondaire ; l'un d'entre eux a en plus une expérience d'enseignement du fondamental qu'il a souvent réinvestie lorsqu'il était en poste au secondaire : « [...] quand j'enseignais au lycée, dès fois je reprenais presqu'entièrement certaines notions du fondamental pour pouvoir commencer mon cours du jour[...] C'est souvent ennuyeux pour le respect des progressions trimestrielles… ». Certains n'ont exercé qu'à l'université et l'un d'eux s'exprime comme suit : « Je sens qu'il faut prendre en compte les maths du fondamental des fois jusqu'au premier cycle, mais ce n'est pas évident [...]».

Pour les formateurs de didactique: La justification qui apparaît pour les cinq réponses positives au *a)* se retrouve dans les propos de l'un d'eux : « les connaissances mathématiques du professeur du secondaire doivent tenir compte des mathématiques du fondamental en termes de contenu ; ce contenu constitue une référence institutionnelle d'accès des apprenants au secondaire. Elles en tiennent compte aussi en termes de pratiques d'enseignement pour s'imprégner de leurs états de connaissances à la sortie du fondamental ». Pour les quatre réponses positives au *b),* l'argument privilégié est que « les connaissances mathématiques du professeur du secondaire doit prendre de la hauteur par rapport aux mathématiques qu'il enseigne » ; mais la nature et le niveau de cette prise de hauteur n'ont pas été définis. Le formateur n'ayant pas répondu au *b)* s'exprime comme suit : « [...] je pense qu'il faut s'appuyer surtout sur la formation en didactique et la formation en pédagogie pour le moment [...] ».

Les deux groupes de formateurs ne semblent pas s'opposer formellement à l'idée que les connaissances mathématiques du professeur du secondaire doivent se construire en rapport avec les mathématiques de l'université et celles du fondamental. Cependant, certains aspects importants de la question sont sous-jacents aux réponses données ; leur explicitation pourrait fournir des éléments pertinents pour une feuille de route relative au passage au LMD.

- Comment élaborer des contenus de formation en mathématiques des professeurs du secondaire en termes de réseaux de connaissances mathématiques relevant de tous les ordres d'enseignement?
- Les compléments de mathématiques à l'état actuel peuvent-ils intégrer ces réseaux de connaissances?

Item$_{16}$: Les connaissances didactiques du professeur de mathématiques du secondaire jouent-elles un rôle dans la mise en rapport de ses connaissances mathématiques avec les mathématiques qu'il enseigne ?

Justifiez votre réponse.

Si oui, quel doit être ce rôle ?

Le cloisonnement des deux types de formation dans le système actuel à l'ENSUP de Bamako, rend diffus et implicite le rôle que doit jouer la didactique dans la mise en rapport des connaissances mathématiques du professeur avec les mathématiques qu'il enseigne. Aussi, nous nous attendons à des avis plutôt contradictoires entre les deux groupes de formateurs. Les arguments avancés pour appuyer ces avis pourraient constituer une première ressource pour mieux formuler les besoins et les tâches à identifier sur cet aspect de la formation. Le tableau ci-dessous (Tableau *5*) indique les réponses par les deux groupes :

Réponses des formateurs de mathématiques				**Réponses des formateurs de didactique**		
Oui	**Non**	**Pas de réponse**		**Oui**	**Non**	**Pas de réponse**
2	*2*	*1*		*5*	*0*	*0*

Tableau 5 – *Réponses des deux groupes à l'item$_{16}$*

Pour les formateurs de mathématiques : Parmi ceux qui disent non, l'un estime que « [...] pratiquement, la didactique ne joue pas de rôle entre ces deux types de connaissances, il suffit d'avoir une maîtrise des maths et des programmes et de la méthodologie [...] ». La justification des réponses positives s'appuie sur la nécessité de tenir compte de « [...] la transposition didactique qui permet au professeur de prendre en compte l'écart entre ses propres connaissances mathématiques et celles qu'il doit enseigner [...] ». Un autre dit qu'il n'est pas en mesure de se prononcer sur cet item : « [...] puisque je n'arrive pas à spécifier ce rôle, mais j'ai senti lors de ma carrière au secondaire que les maths, la méthodologie ne suffisaient pour mener à bien certaines tâches d'enseignement… me fallait-il de la didactique ? [...] Je ne sais pas ! ».

Pour les formateurs de didactique: Les arguments avancés par ce groupe de formateurs peuvent être résumés comme suit : « compréhension et justification de ce qui doit être enseigné à un niveau scolaire donné ; compréhension de l'état des connaissances des apprenants ; construction du sens des concepts mathématiques par les apprenants [...]».

Ces avis différents nous incitent à nous réinterroger sur le rôle de la didactique dans la formation actuelle du futur professeur de mathématiques au secondaire. Les notions de didactique retenues en formation sont introduites à partir de situations, centrées le plus souvent sur le savoir scolaire, les connaissances des apprenants et les stratégies pour les faire évoluer. Par contre, cette formation en didactique propose rarement des situations sur les connaissances mathématiques du professeur. Aussi, les différents usages de ces notions de didactique ne peuvent-elles pas être explorés en tant qu'outils (Douady 1996) de résolution de situations relatives à la mise en rapport des connaissances mathématiques du professeur avec les mathématiques qu'il enseigne? Cette exploration doit s'orienter vers l'identification en formation de ces différents usages, en particulier leur mise à l'épreuve comme facteur pertinent de décloisonnement des deux types de contenus de formation.

3. *Quelles approches en formation pour la filière professeurs d'enseignement secondaire ?*

Les items liés à cette question recouvrent deux aspects principaux dans la perspective du basculement de l'ENSUP de Bamako vers le système Licence-Master-Doctorat. Il s'agit des stratégies pour l'élaboration des deux contenus de formation et des méthodes de réalisation de dispositifs de formation, avec l'objectif spécifique d'obtenir des avis sur une articulation entre les formations mathématique et didactique des futurs professeurs du secondaire.

Item$_{21}$: Pour l'élaboration des contenus de formation en mathématiques des professeurs du secondaire accepterez-vous que :

les formateurs en mathématiques seuls s'en occupent ?

les formateurs en mathématiques et les formateurs en didactique des mathématiques s'en occupent ?

Justifiez votre réponse ?

Dans le système actuel de formation à l'ENSUP, le cloisonnement dans le travail d'élaboration des contenus de formation n'a pas favorisé la collaboration entre les deux groupes de formateurs. L'objectif ici est de faire expliciter les arguments que les uns et les autres pourraient avancer en vue d'un éventuel travail collaboratif sur les contenus de formation en mathématiques des professeurs du secondaire.

Les réponses obtenues sont indiquées dans le tableau (*Tableau 6*) :

Réponses des formateurs de mathématiques					**Réponses des formateurs de didactique des mathématiques**			
Question a)		***Question b)***			***Question a)***		***Question b)***	
Oui	**Non**	**Oui**	**Non**		**Oui**	**Non**	**Oui**	**Non**
3	*1*	*2*	*3*		*3*	*2*	*4*	*1*

Tableau 6 *— Réponses des deux groupes à l'item$_{21}$*

Question a)

Les avis sont partagés au sein de chaque groupe. Ils pourraient a priori être liés au rapport personnel de chacun des formateurs aux mathématiques et à la didactique. Néanmoins, l'argument avancé par le formateur en mathématiques pour justifier sa réponse négative nous semble significatif d'un besoin de collaboration entre les deux groupes : « [...] il est toujours utile et même nécessaire de tenir compte de ce que les autres groupes de formation élaborent, en particulier le groupe de didactique, pour une formation professionnelle véritable [...]». Identifier ces besoins de façon concertée entre les deux groupes pourrait être un moyen significatif pour engager les deux groupes dans un travail collaboratif sur les contenus de formation. De l'autre côté, les formateurs en didactique ayant répondu négativement estiment qu'il revient aux formateurs de l'autre groupe de consolider les connaissances mathématiques des élèves-professeurs avant toute formation en didactique.

Question b)

Pour les formateurs de mathématiques : Les réponses négatives sont justifiées par des arguments qui relèvent de pratiques liées au système actuel comme l'indique cet extrait d'entretien de l'un des formateurs : « [...] les contenus mathématiques ont toujours été proposés par les formateurs de mathématiques ; alors pourquoi les élaborer ensemble maintenant?... c'est vrai que dès fois on a l'impression que certains chapitres sont enseignés pour donner une culture générale aux élèves-professeurs [...] Peut-être il faut réfléchir à consolider leurs besoins immédiats [...] ». Par contre l'un des formateurs ayant répondu oui justifie son adhésion à une collaboration des deux groupes par le fait que « la participation des didacticiens permet de mieux circonscrire les besoins réels en mathématiques du futur professeur de maths».

Pour les formateurs de didactique: Les arguments avancés sont relatifs à l'usage de certains concepts de didactique comme outils d'une approche d'élaboration des contenus de formation en mathématiques ; ces contenus doivent satisfaire à la fois à la rigueur de la discipline et à une organisation mathématique qui se fonde sur un lien étroit avec les grands domaines des mathématiques du secondaire.

Ces avis assez divers renvoient a priori aux questions liées à la spécificité des connaissances mathématiques devant être acquises par le professeur du secondaire; un aspect important de cette spécificité réside dans son caractère professionnel : peut-il être pris en charge par un seul de ces deux groupes de formateurs ?

Item$_{22}$: Selon-vous quels sont les cours de mathématiques lors desquels certaines notions didactiques pourraient être traitées ?

Justifiez votre réponse ?

L'item$_{22}$ a pour objectif d'identifier des cours de mathématiques pouvant servir de point de départ d'une recherche collaborative pour l'articulation des formations mathématique et didactique. Cependant, il faudrait considérer ce travail dans la durée de la formation.

Le Tableau *7* indique les réponses données à l'item$_{22}$:

Réponses des formateurs de mathématiques						**Réponses des formateurs de didactique**				
Algèbre	**Analyse**	**Logique**	**Géométrie**	**Proba/Stat**		**Algèbre**	**Analyse**	**Logique**	**Géométrie**	**Proba/Stat**
2	***3***	***1***	***4***	***4***		***5***	***4***	***3***	***5***	***5***

Tableau 7 *– Réponses des deux groupes à l'item$_{22}$*

On peut observer que les cours de géométrie et ceux de probabilités-statistique semblent être privilégiés comme candidats potentiels à un travail collaboratif entre les deux groupes de formateurs. L'un des formateurs de mathématiques qui a donné une réponse positive pour la probabilité-statistique, justifie son choix : « [...] les problèmes de ce cours renvoient à des situations de la vie qui sont faciles à comprendre par les apprenants, mais dont la résolution exige souvent une réflexion très ardue [...] ». Par ailleurs, deux formateurs de mathématiques ont suggéré d'ajouter à cette liste de cours «…les grands problèmes liés à l'histoire des mathématiques comme ceux relatifs à la construction des nombres et puis... les maths discrètes et le calcul scientifique [...]».

Ces propos semblent questionner à la fois l'appellation et le contenu des cours de mathématiques qui semblent être à l'état actuel plaqués sur ceux de l'université. Néanmoins, l'entrée par les mathématiques comme moyen d'articulation des deux disciplines dans la mise en œuvre des contenus de formation semble avoir l'assentiment des deux groupes de formateurs. Peut-on envisager cette entrée par la didactique des mathématiques?

Item$_{24}$: Pensez-vous que tous les cours de mathématiques devraient être donnés par les seuls formateurs de mathématiques?

Justifiez votre réponse ?

L'objectif était de recueillir les avis des deux groupes de formateurs sur une éventuelle ouverture des cours de mathématiques aux uns et aux autres.

Les réponses obtenues sont indiquées dans le tableau (*Tableau 8*) :

Réponses des formateurs de mathématiques			**Réponses des formateurs de didactique**	
Oui	**Non**		**Oui**	**Non**
4	***1***		***1***	***4***

Tableau 8 *– Réponses des deux groupes à l'item$_{23}$*

Les avis des deux groupes s'opposent ici alors qu'une certaine entente semblait se dégager sur certains cours de mathématiques pouvant servir de moyens d'articulation de certaines notions de didactique avec les cours de mathématiques (tableau 7). Ceci est à relier aux questions sur le statut et les fonctions de la didactique dans la formation mathématique des enseignants et réciproquement. Cependant, dans le cas actuel de l'ENSUP, une des conditions pour faire participer les deux types de formateurs au cours de mathématiques est de convaincre le groupe de formateurs en mathématiques de l'intérêt que peut apporter le formateur de didactique dans les cours de mathématiques. Cette tâche revient dans une large mesure au groupe de formateurs en didactique. De plus, donner ce type de cours de façon magistrale n'est pas une méthode a priori pertinente pour donner une visibilité de cet intérêt ; il faut explorer d'autres méthodes de formation.

V. SYNTHÈSE

Les informations collectées à l'issue de cette étude exploratoire sont parcellaires et suffisamment liées au contexte actuel de formation d'enseignants à l'ENSUP de Bamako. Cependant, elles nous fournissent des indices sur certaines questions dont l'étude est nécessaire pour l'établissement d'une feuille de route relative à la formation mathématique des futurs professeurs du secondaire dans le cadre du passage de l'ENSUP de Bamako au système LMD.

Un premier indice est lié à la restructuration des contenus de formation en mathématiques : ils ont été élaborés dans l'actuel système selon une approche disciplinaire à laquelle a été juxtaposée une formation professionnelle; le passage au LMD préconise une logique fondée sur l'articulation des deux: comment s'y prendre ?

Le second indice est relatif à la place et aux fonctions de la didactique des mathématiques en formation initiale des professeurs de mathématiques du secondaire. La première rencontre de l'élève-professeur du secondaire avec la didactique a lieu après quinze années d'apprentissage et de pratiques des mathématiques. Ce déséquilibre, tant au niveau de la durée de la formation qu'au niveau du contenu des connaissances acquises respectivement dans les deux types de contenu de formation, constitue a priori une source de questions liées à la mise en rapport des formations mathématique et didactique ; une clarification des questions y afférant est nécessaire.

Enfin, le cloisonnement actuel entre les deux types de formation est d'abord institutionnel et il concerne tous les ordres d'enseignement ; il ne favorise pas l'exploration d'une vision de la formation mathématique en termes de réseaux de connaissances mathématiques relevant de tous ces ordres d'enseignement Cette vision nous semble constituer une des particularités des connaissances mathématiques du professeur de mathématiques.

REFERENCES

Ball D. L., Thames M. H., Phelps G. (2008) Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education* 59(5), 389-407. Consulté le 18 juillet 2011, http://jte.sagepub.com/cgi/content/abstract/59/5/389.

Bkouche R. (2010) De la formation des maîtres. *Repère*s 80, 29-48.

Douady R. (1996) Ingénierie didactique et évolution du rapport au savoir. In *L'Enseignement des mathématiques : des Repères entre savoirs Programmes&Pratiques.* Topiques éditions.

Robert A. (2010) Formation professionnelle des enseignants de mathématiques du second degré : un point de vue didactique prenant en compte la complexité des pratiques. *Repère*s 80, 87-102.

Thomas R. (2010) À propos de la Formation des Maîtres. *Repère*s 80, 49-59.

PRATIQUES DE FORMATEURS : LA QUESTION CENTRALE DES SAVOIRS DE FORMATION

Nathalie SAYAC*

Résumé – En France, la formation des enseignants a subi une mutation profonde qui n'est pas sans incidence sur les contenus et les pratiques de formation. A partir d'une recherche centrée sur les pratiques des formateurs en mathématiques des professeurs du primaire, effectuée du temps des IUFM, je vais tenter de mettre en évidence le fait que la question des savoirs, de leur nature et de leur articulation est au cœur de la problématique de la formation des enseignants.

Mots-clefs : pratiques, formateurs, savoirs, postures, masterisation

Abstract – The teachers' training in France has undergone a deep change which had not had any effect on the contents and the practices of the training. From a focused research on the practices of primary teachers' training in mathematics, done in IUFM, I am going to try to put in evidence the fact that the question of knowledge, their nature and their pronunciation is at the core problem of teachers' training.

Keywords: practices, training, knowledge, postures, education

I. INTRODUCTION

Les questions de connaissances mathématiques et didactiques pour l'enseignement sont au cœur de mes problématiques de chercheuse et de formatrice d'enseignants. C'est pourquoi ma contribution s'inscrit pleinement dans la thématique du groupe de travail GT1 « articulation des connaissances mathématiques et didactiques pour l'enseignement : pratiques et formation » du colloque EMF 2012. Je suis, depuis 12 ans, formatrice en mathématiques en France dans un IUFM[1], chargée de la formation initiale et continue des professeurs des écoles (élèves de 3 à 11 ans). Il convient de préciser que depuis la rentrée scolaire 2010-2011, une réforme importante de la formation des enseignants a été mise en application, appelée « Masterisation ». Depuis 1991, la formation des enseignants était assurée dans le cadre des IUFM, instituts uniques et indépendants, qui suivaient un plan de formation national, décliné à un niveau local (académique). Ces formations étaient assurées en grande majorité par des PRAG[2] ou des PRCE[3] et par une minorité d'enseignants chercheurs. Depuis quelques années déjà, les IUFM ont été rattachés à des universités mais restaient maîtres d'œuvre des formations qu'ils dispensaient alors qu'aujourd'hui, toutes les formations d'enseignants doivent s'inscrire impérativement dans des masters universitaires qui peuvent être proposés en dehors des IUFM, par n'importe quelle université qui les programme. Au-delà du changement de cadre dans lequel s'effectue la formation des enseignants, cette réforme adoptée à la hâte, sans réelle concertation avec les différents partenaires concernés, n'est pas sans incidence sur la nature et les contenus de formation dispensés, ainsi que sur les pratiques de formation. Par ailleurs, les concours de recrutement dans l'enseignement primaire et secondaire ont été éclatés et placés de manière arbitraire dans des masters d'enseignement, à des moments inopportuns de l'année universitaire, en début et en fin de M2[4]. En ce qui concerne le concours de recrutement du primaire, la première partie du concours est constituée d'évaluations écrites de connaissances disciplinaires en français et en mathématiques alors que la deuxième partie comprend plusieurs épreuves orales, à visée professionnelle, en français, mathématiques, sciences et arts visuels. La place de ces épreuves

* IUFM de Créteil-U-PEC/LDAR – France – nathalie.sayac@u-pec.fr

[1] IUFM : Institut Universitaire de Formation des Maitres

[2] PRAG : professeur agrégé (ayant passé un concours pour devenir enseignant après une Maitrise universitaire)

[3] PRCE : professeur certifié (ayant passé un concours pour devenir enseignant après une Licence universitaire)

[4] M2 : master, 2ème année

© Sayac N. (2012) Pratiques de formateurs : la question centrale des savoirs de formation. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT1, pp. 240–250). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

perturbe fondamentalement l'équilibre des enseignements qui sont dispensés en vue de la formation professionnelle des futurs enseignants puisque la préparation au concours s'étale sur toute l'année et préoccupe prioritairement les étudiants alors qu'auparavant, la formation initiale des professeurs se déployait sur une année entière, après l'obtention du concours l'année précédente. Quand il a été question d'élaborer les contenus des masters d'enseignement proposés par l'IUFM auquel j'appartiens (première et deuxième année), les différents groupes disciplinaires de l'IUFM ont été sollicités et notamment le groupe mathématiques. L'articulation entre les cours de mathématiques et les cours de didactique a été discutée et pensée pour s'intégrer dans les différentes UE[5] dans lesquelles se trouvait un enseignement de mathématiques. La place de la préparation au concours, au regard de la place de la formation professionnelle, a été âprement discutée car un équilibre devait être trouvé pour satisfaire aussi bien les étudiants et leur aspiration légitime de réussite au concours que les formateurs soucieux de dispenser une formation professionnelle de qualité pour les futurs enseignants. Il va sans dire que cette transformation de la formation des enseignants, qui a introduit utilement de mon point de vue une dimension recherche dans la formation, n'a pas satisfait tous les formateurs car certains ont pensé que la réduction du nombre d'heures de formation disciplinaire était due en partie à l'ajout de ce nouvel enseignement. Un clivage, qui n'existait pas auparavant, s'est alors établi entre les formateurs PRAG ou PRCE et les formateurs chercheurs, rendant difficile les échanges sur les contenus de formation.

Pour essayer de comprendre en quoi cette « Masterisation » de la formation des enseignants a fortement impacté les contenus et la nature des formations dispensées en France aujourd'hui, je vous propose de rendre compte de la recherche que j'ai menée de 2007 à 2011 autour des pratiques des formateurs d'enseignants du primaire en mathématiques, dans un IUFM[6].

Etant à la fois formatrice et chercheuse en didactique des mathématiques, il m'a semblé opportun de vérifier l'hypothèse d'une grande diversité des pratiques des formateurs de mathématiques en formation initiale des professeurs des écoles que j'avais posée à partir des échanges que j'avais eus avec mes collègues et avec les étudiants de l'IUFM. Je me suis donc engagée dans une recherche qui m'a amenée plus loin que ce que j'avais prévu, notamment à cause de la question centrale et complexe des savoirs en formation.

Cette recherche a été menée dans deux cadres théoriques : le premier, « la double approche » est issu de la didactique des mathématiques de Robert et Rogalski (2002), le deuxième se rattache à la didactique professionnelle (Pastré 2006).

Ces deux cadres m'ont paru légitimes à plusieurs niveaux car :

- « La double approche » prend en compte à la fois l'aspect contenu et l'aspect professionnel pour l'analyse des pratiques enseignantes. Elle met en évidence la complexité de ces pratiques et cherche à les reconstituer à travers l'analyse de 5 composantes (institutionnelle, sociale, personnelle, médiative et cognitive).
- La didactique professionnelle se propose d'étudier, de conceptualiser et d'agir sur les phénomènes liés au développement et à la transmission des compétences professionnelles dans les situations de formation et de travail. Elle cherche à comprendre l'activité par son organisation.

Je vais donc tout d'abord donner quelques éléments informatifs sur le contexte de la recherche, puis je préciserai la méthodologie utilisée pour analyser les pratiques de formateurs

[5] Unité d'Enseignement. Le découpage des enseignements dispensés à l'université se fait suivant différentes UE qui se répartissent dans les 2 semestres de l'année universitaire.
[6] L'IUFM de Créteil dans lequel j'exerce mes fonctions de formatrice.

en mathématiques, j'exposerai quelques résultats et je conclurai en essayant de revenir à la thématique du GT1 sur l'articulation des connaissances mathématiques et didactiques pour l'enseignement.

II. CONTEXTE DE LA RECHERCHE

1. Les formateurs en mathématiques

Les formateurs en mathématiques exerçant en IUFM ont, pour la plupart, des parcours professionnels variés. Certains sont d'anciens instituteurs ayant passé le Capes de mathématiques[7], puis intégré la formation des maîtres dans la continuité de leur parcours. D'autres sont d'anciens enseignants du secondaire ayant cherché à se diversifier en devenant formateurs en IUFM dans le primaire. D'autres encore, enseignants-chercheurs, ont un cursus exclusivement universitaire et n'ont jamais été confrontés directement à la réalité du métier d'enseignant. Ces différentes biographies professionnelles se heurtent à la même réalité : il n'existe pas de formation de formateurs d'enseignants, même s'il existe une instance, non institutionnelle, mais reconnue en tant que telle qui la prend en charge en mathématiques depuis une vingtaine d'années dans le premier degré (la COPIRELEM[8]) et quelques années dans le second degré (la CORFEM[9]). Il faut néanmoins préciser que ces formations sont facultatives et s'adressent aux seuls formateurs volontaires.

C'est en partie à partir de ces différences que la question de la singularité des sujets (formateurs en mathématiques) mérite d'être appréhendée.

2. Les stagiaires

La formation des professeurs des écoles telle qu'elle était dispensée dans le cadre des IUFM s'inscrivait dans une logique de professionnalisation qui ne permettait pas toujours de préparer les futurs enseignants à relever les nombreux défis auxquels ils allaient être confrontés (hétérogénéité des classes, difficultés des élèves, gestion des élèves et des apprentissages). Des conflits d'intérêt avaient souvent cours entre les professeurs stagiaires[10], en attente de recettes immédiatement utilisables dans leurs classes et les formateurs qui avaient une vision à plus long terme de la formation. Il faut préciser par ailleurs que le niveau en mathématiques de ces stagiaires était souvent peu élevé du fait qu'ils étaient peu nombreux à avoir suivi un cursus scientifique[11] avant d'intégrer l'IUFM. Outre ce constat, il se trouvait également que de nombreux professeurs des écoles stagiaires témoignaient d'un passé douloureux vis-à-vis des mathématiques et arrivaient en formation avec une réelle angoisse et/ou un manque d'enthousiasme pour enseigner cette discipline. Les formateurs de mathématiques étaient donc souvent navrés d'être confrontés à des étudiants ayant un tel rapport à leur discipline et ne savaient comment combler leurs lacunes car l'enjeu de la formation initiale, telle qu'elle se présentait institutionnellement était clairement un enjeu de professionnalisation dépassant le disciplinaire. Il y avait donc un hiatus difficile à surmonter pour les formateurs de mathématiques entre leur volonté d'élever le niveau disciplinaire des stagiaires et celle de les former professionnellement. La question qui se posait donc pour les

[7] Concours pour devenir professeur dans le secondaire

[8] La COPIRELEM, Commission Permanente des IREM sur l'Enseignement Élémentaire a été créée en 1975. Elle regroupe une vingtaine de représentants des différents IREM qui s'intéressent à l'enseignement élémentaire.

[9] COmmission de Recherche sur la Formation des Enseignants de Mathématiques, créée en 1993.

[10] Les étudiants étaient en fait des « professeurs stagiaires » puisqu'ils avaient réussi l'année précédente le concours de recrutement pour devenir professeur des écoles.

[11] A titre indicatif, seulement 8% à l'IUFM de Créteil (en 2009)

formateurs de mathématiques était de trouver un juste équilibre entre la formation disciplinaire et la formation professionnelle des stagiaires qui leur étaient confiés. Cette question reste d'actualité aujourd'hui, en France comme dans de nombreux autres pays.

3. *Les contenus de formation*

De nombreuses recherches soulignent le fait que le niveau de connaissance disciplinaire d'un enseignant est un élément majeur de sa pratique[12]. La question du niveau de connaissances en mathématiques des étudiants ou stagiaires est donc une question cruciale pour les formateurs d'enseignants. Comment les formateurs en mathématiques à l'IUFM y répondaient-ils et comment cela se traduisait-il au niveau de leur offre de formation ? Existait-il des formateurs qui considéraient que le niveau de connaissances mathématiques de leurs étudiants importait peu et qu'il était prioritaire de les former seulement à des gestes professionnels ? Ou bien est-ce le contraire ? Ces questions en amènent une autre, en étroite corrélation : quelle était la place accordée à la didactique des mathématiques en formation initiale des professeurs ? Les formateurs en mathématiques avaient un parcours qui intégrait, à des degrés très différents, la didactique de cette discipline, certains avaient un doctorat, d'autres n'avaient aucun diplôme dans cette spécialité. Les plans de formation comprenaient tous des éléments de didactique des mathématiques, mais dans la pratique, comment les formateurs les interprétaient-ils ?

III. ÉLÉMENTS THÉORIQUES ET MÉTHODOLOGIQUES

1. *Eléments théoriques*

Bien que les questions de formation et de formateurs d'enseignants aient fait l'objet de nombreux travaux en sciences de l'éducation (Altet, Paquay, Perrenoud, Bucheton, Blanchard-Laville pour ne citer qu'eux), il en existe très peu concernant les pratiques des formateurs. En didactique des mathématiques, Kuzniak et Houdement (1996) ont mis en évidence différentes stratégies[13] de formation utilisées par les formateurs. Butlen, Pézard et Masselot (2010) se sont intéressés, de leur côté, à la question des pratiques des formateurs en mathématiques dans le cadre des dispositifs de formation mis en place pour l'accompagnement des professeurs néo-titulaires affectés en ZEP. Marchive (2006) avait également présenté à EMF 2006 une étude intéressante portant sur la façon dont les travaux de recherche en didactique des mathématiques étaient reçus et diffusés par les formateurs IUFM. Ces différents travaux m'ont été utiles pour défricher ce champ, mais ils se sont tous appuyés sur des éléments de pratiques déclarées ou des reconstitutions de pratiques à partir de diverses ressources (actes de séminaire de la COPIRELEM, entretiens, curriculum de formation).Or je souhaitais travailler à partir de pratiques réelles des formateurs pour être au plus près de la réalité et ainsi appréhender avec plus d'efficacité leur diversité.

Les travaux de DeBlois et Squalli (2002) sur les postures épistémologiques des futurs maîtres (la posture de l'ancien élève, la posture de l'étudiant et la posture de l'enseignant) ont également enrichi mon approche sur la question des pratiques de formateurs d'enseignants.

---

[12] Bucheton (2009) dans « l'agir enseignant : des gestes professionnels ajustés » chapitre 4 qui précise combien la spécificité des savoirs à enseigner et leur maitrise par les enseignants est de première importance.

[13] L'homologie, la monstration et la transposition : ces stratégies ont été identifiées comme des stratégies utilisées de manière variable et contextuelle par les formateurs de mathématiques en IUFM. Elles dépendraient des notions mathématiques traitées durant les séances (homologie pour les notions méconnues des étudiants, transposition et monstration pour des notions plus familières).

2. Eléments méthodologiques

Afin d'explorer la diversité des pratiques des formateurs en mathématiques à l'IUFM, il m'a semblé indispensable de filmer des séances de formation. Six formateurs[14] en mathématiques de l'IUFM de Créteil ont accepté de participer à cette recherche. Par ailleurs, ma démarche impliquait également de mieux connaitre les formateurs qui avaient accepté d'être filmés d'un point de vue professionnel et personnel.

J'ai donc été amenée à récolter deux types de données :

- Un questionnaire

Les formateurs ont dû répondre à un questionnaire pour préciser leur parcours personnel et professionnel, indiquer leurs conceptions de la formation initiale pour les professeurs des écoles, leurs priorités de formation, et les grands axes de leur offre de formation.

- Des vidéos de séances de formation

Une séance de formation a été filmée au cours de l'année de formation initiale des professeurs des écoles stagiaires, avec centration d'une caméra sur le formateur et d'une autre en fond de salle pour avoir une vision globale de ce qui se passait.

Les séances ont été analysées à partir d'une grille d'analyse émanant de la didactique des mathématiques, mais adaptée à des séances de formation. Trois dimensions ont été retenues :

- Une dimension liée au scénario global adopté par le formateur, le contenu de sa séance ainsi que les différentes stratégies de formation adoptées durant la séance.
- Une dimension liée à la variété des tâches (quantité, ordre, nature) à travers les activités proposées.
- Une dimension liée au déroulement global de la séance, à la nature du travail organisé, aux conditions de travail des stagiaires ainsi qu'à la durée des différents moments de la séance.

Très tôt, la question des savoirs de formation s'est avérée complexe et incontournable pour analyser les séances des formateurs et notamment la question de leur nature. En effet, les savoirs de formation se sont avérés extrêmement difficiles à identifier : savoir mathématique, savoir pédagogique, savoir didactique pour Kuzniak (2002), savoirs savants, savoirs de la « science appliquée », savoirs de la « non-science » pour Houdement (2003), savoirs disciplinaires, savoirs curriculaires ou savoirs de formation comme ils sont désignés à l'Université Laval au Québec. Toutes ces dénominations ont leur pertinence dans un cadre d'analyse qui ne se confronte pas à la réalité, mais s'avèrent insuffisantes pour appréhender leur imbrication complexe lors d'une séance de formation. Il a donc fallu approfondir cette question et chercher à rendre compte plus explicitement de la dynamique interne entre ces différents savoirs durant une séance de formation.

Une première piste a été trouvée avec la notion *Pedagogical Content Knowledge* (PCK) proposée par Shulman (1986 - 1987) qui m'a semblée pertinente pour préciser les savoirs en jeu lors de séance de formation en mathématiques ce qui correspondait davantage à ce qui se passait dans la réalité[15]. Dans la continuité du PCK, les travaux de Ball (2005) sur le

[14] Débutants, expérimentés, 2 femmes, 4 hommes, différents parcours professionnels…

[15] Les connaissances travaillées durant les séances disciplinaires ne le sont qu'à des fins d'apprentissage pour les futurs élèves qui seront confiés aux professeurs stagiaires. Les stagiaires doivent opérer une transformation de la connaissance pour passer de sa compréhension pour eux-mêmes à la compréhension pour les autres (le modèle de Shulman décrit six processus nécessaires à cette transformation). En travaillant sous plusieurs angles un

Mathematical Knowledge for Teaching (MKT) m'ont permis d'adapter le PCK au métier de formateur en mathématiques, puisque ce concept émanait d'un questionnement de formateur d'enseignants portant sur la nature des connaissances mathématiques que le professeur doit avoir pour enseigner cette discipline efficacement. Cette approche m'a intéressée dans la mesure où, les savoirs de formation intégraient des éléments constitutifs du métier d'enseignant avec ses volets didactiques, pédagogiques, institutionnels et curriculaires[16].

IV. RÉSULTATS DE LA RECHERCHE

Un des résultats de cette recherche est que la question des **savoirs** dispensés en formation s'est avérée centrale pour distinguer les pratiques des formateurs. Il a donc fallu la repenser pour pouvoir analyser les pratiques des formateurs en mathématiques d'enseignants du primaire, de manière efficiente. Par ailleurs, la question des interactions entre le formateur et ses stagiaires a pu être appréhendée à partir d'un jeu de **postures** adaptées à des séances de formation. Ces deux entrées m'ont permis de différencier les pratiques des formateurs étudiés et de vérifier que la variété supposée des pratiques des formateurs n'était pas une hypothèse oiseuse.

1. Au niveau des savoirs

Je suis donc arrivée à un découpage des savoirs de formation qui distingue deux dimensions : les savoirs disciplinaires (D1, D2, D3) et les savoirs transversaux (T1, T2, T3), tout en les incluant dans un schéma global qui constitue, dans mon approche, les savoirs pour la formation des enseignants.

<table>
<tr><th colspan="2">Savoirs disciplinaires</th><th>Savoirs transversaux</th></tr>
<tr><td rowspan="2">D1 : relatifs aux connaissances mathématiques pures et aux savoirs épistémologiques</td><td rowspan="3">D3 : savoirs relatifs à la didactique des mathématiques</td><td>T1 : relatifs aux gestes professionnels du métier d'enseignant</td></tr>
<tr><td>T2 : relatifs aux connaissances portant sur les élèves et sur les apprentissages</td></tr>
<tr><td>D2 : relatifs à la construction de programmations, de progressions par cycle…</td><td>T3 : relatifs aux programmes et aux instructions officielles</td></tr>
</table>

Figure 1 *– Savoirs de formation*

contenu d'enseignement en formation, les formateurs visent à ce que le stagiaire se l'approprie professionnellement, afin qu'il puisse l'enseigner le plus efficacement possible (" ... *the capacity of a teacher to transform the content knowledgehe or shepossessesintoformsthat are pedagogicallypowerful*") (Shulman 1986)

[16] Voir annexe

La première dimension des savoirs pour la formation professionnelle des enseignants est relative aux savoirs disciplinaires :

D1 correspond aux savoirs travaillés sous un angle strictement mathématique ou épistémologique ;

D2 concerne les mathématiques convoquées dans l'organisation du savoir à enseigner : élaboration de progressions par cycle, de programmation, gestion de situations-problèmes mathématiques, etc. ;

D3 concerne l'approche didactique des savoirs mathématiques, la transposition du savoir prescrit au savoir à enseigner : par exemple quand on étudie des manuels ou des ressources numériques d'un point de vue didactique, ou quand on travaille sur la notion de champ conceptuel, d'invariants opératoires et de signifiants (symboles, désignations) liés à une notion.

Ce dernier type de savoir ne se situe pas au même niveau que les autres dans la mesure où il est central du point de vue de la formation en mathématiques des enseignants.

L'autre dimension des savoirs pour la formation professionnelle des enseignants, plus transversale, comporte également trois entrées spécifiques :

T1 concerne les gestes professionnels élémentaires en classe : comment gérer une classe ? Comment travailler en groupe ? Comment faire des retours au calme ? ;

T2 concerne la connaissance des élèves : approches sociologique, psychologique, cognitive des élèves : par exemple quand on distingue des stades d'apprentissage, quand on s'intéresse aux ZEP[17] ;

T3 concerne les connaissances institutionnelles: instructions officielles, programmes d'enseignement, documents d'accompagnement, grilles de références.

Ces savoirs ne sont pas travaillés en alternance ou l'un après l'autre, mais ils sont souvent fortement imbriqués les uns aux autres et difficilement identifiables. Il convient donc également de rendre compte de la dynamique de ces savoirs en jeu dans la formation pour approcher au plus près la réalité des pratiques des formateurs.

2. *Au niveau des postures*

Pour rendre compte de la façon dont les stagiaires étaient sollicités durant la séance, je me suis inspirée des travaux de DeBlois et Squalli, (2002, 2007) sur les postures épistémologiques des futurs maîtres et j'ai ainsi défini trois postures dans lesquelles le stagiaire pouvait être engagé par le formateur. En effet, en étudiant les différentes activités proposées durant une même séance, j'ai réalisé que suivant ce qu'ils avaient à faire, les stagiaires pouvaient être placés alternativement dans différentes postures et que cela participait de la dynamique de la séance et de la pratique du formateur.

Trois postures ont donc été dégagées :

La posture élève : quand le formateur assigne au stagiaire des tâches qu'il doit résoudre en tant qu'élève d'un système éducatif. Par exemple, quand il le confronte à des activités qu'il doit réaliser au même titre qu'un élève le ferait, quel que soit le niveau (jouer à un jeu mathématiques, reproduire une figure géométrique, résoudre un problème, etc.) ;

---

[17] Zone d'éducation Prioritaire : en France, certaines écoles sont reconnues comme telles par l'éducation nationale et sont dotées de moyens supplémentaires et d'une plus grande autonomie pour faire face aux difficultés d'ordre scolaires et sociales des élèves qui les fréquentent.

La posture étudiant : quand le formateur soumet le stagiaire à des activités qui vont lui permettre de se professionnaliser, de réfléchir à une démarche d'enseignement. Par exemple, quand il lui demande de classer des activités en fonction de leurs difficultés ou quand on étudie les procédures des élèves confrontés à un problème mathématique ;

La posture enseignant : quand le formateur interpelle le stagiaire en tant qu'enseignant. Par exemple, quand il lui demande quels choix d'enseignement il ferait pour telle ou telle notion, ou ce qu'il ferait dans sa classe, etc.

Pour chaque tâche proposée, le formateur s'adresse soit à un élève, soit à un étudiant, soit à un enseignant et il attend que le stagiaire s'installe dans la posture qu'il a choisie pour lui (consciemment ou non). Le stagiaire pouvait accepter ces positionnements ou s'y opposer, ce qui pouvait engendrer des tensions au sens de DeBlois et Squalli (1997) ou des incidents au sens de Roditi (2005).

3. Au niveau des pratiques des formateurs

Les séances de formation filmées ont été retranscrites et analysées en fonction des savoirs convoqués et des postures assignées par le formateur à ses stagiaires. Une catégorisation globale des stratégies de formation utilisées par le formateur durant sa séance a permis de rendre compte de sa pratique au niveau global.

Il en ressort que les savoirs en jeu lors des séances de formation sont, comme nous l'avions prévu, majoritairement issus de l'axe disciplinaire, mais qu'il existe une grande diversité de savoirs spécifiques suivant les formateurs. Pour certains, la grande majorité des savoirs se trouvent en D1 (savoirs travaillés sous un angle strictement mathématique, peu épistémologiques dans les faits), même si les savoirs étiquetés D3 (savoirs didactiques) ne sont pas absents. Pour d'autres, l'essentiel des savoirs dispensés sont de nature didactique D3 et les savoirs D1 sont représentés de manière négligeable. Les savoirs D2 (organisation du savoir à enseigner) sont globalement peu présents voire inexistants, ce qui ne signifie pas qu'ils sont absents de la formation. Les savoirs transversaux sont également pris en charge de manière très diversifiée suivant les formateurs et s'intègrent avec plus ou moins de cohérence dans les activités proposées. Ils dépendent généralement de la stratégie adoptée par les formateurs. Il convient de noter que les savoirs T3, relatifs aux programmes et aux instructions officielles, sont minoritairement traités par les formateurs, de même que les savoirs T2 qui concernent les savoirs relatifs aux élèves qui sont souvent évoqués de manière épisodique.

On peut donc convenir que les contenus de formation dispensés dans le cadre d'un même IUFM étaient extrêmement divers et variés suivant les formateurs. Il est également indéniable que la biographie professionnelle des formateurs n'est pas sans incidence sur les savoirs prioritairement convoqués lors des séances de formation, même s'il n'y a pas automaticité entre un cursus qui intègre une dimension didactique et une pratique qui privilégie des savoirs didactiques[18].

Au niveau des jeux de postures privilégiées par les formateurs, on peut relever que les postures « élèves » et « étudiants » sont largement majoritaires avec des répartitions extrêmement variables. La posture « enseignant » est rarement offerte aux stagiaires, même si on peut relever que c'est à l'initiative de ces derniers qu'elle l'est le plus souvent. Les incidents repérés (ils sont rares dans l'ensemble des séances filmées) le sont d'ailleurs

[18] Un des formateurs ayant une thèse en didactique des mathématiques (datant de 1985) convoque majoritairement des savoirs D1 et très peu de savoirs D3 mais, ce formateur récuse publiquement aujourd'hui les apports de la didactique en formation.

souvent au moment du passage d'une posture à une autre soit que le formateur n'a pas été suivi dans la dynamique qu'il propose, soit que les stagiaires s'inscrivent dans une posture qui ne correspond pas à celle attendue par le formateur.

L'organisation et la gestion des différentes tâches prescrites dans le cadre d'une séance de formation sont généralement liées au projet du formateur et aux stratégies dans lesquelles il s'inscrit. Tous les modes de gestion (individuel, collectif, en groupe) sont présents dans les séances observées, même si leur usage est très différent d'un formateur l'autre. Deux formateurs sont même dans des gestions quasi uniformes de leur séance, strictement collective pour l'un et strictement par groupe pour l'autre. Ces gestions totalement différentes qui, de plus, semblent être un organisateur des pratiques de ces formateurs, témoignent indéniablement de visions de la formation qui s'opposent même si l'on ne peut en mesurer les conséquences pour les professeurs stagiaires.

V. CONCLUSION

Cette recherche a mis en évidence que la question des savoirs mathématiques dispensés en formation initiale, ainsi que celle des pratiques des formateurs en lien avec ces savoirs sont donc au cœur des enjeux de la formation en mathématiques des futurs enseignants. Elle a également montré la diversité des pratiques des formateurs en IUFM, tant au niveau des savoirs qu'au niveau de la dynamique en jeu lors des séances de formation.

Aujourd'hui que le cadre institutionnel de formation des enseignants en France a changé, on peut se demander si cette diversité est toujours effective. Cela parait néanmoins indubitable compte tenu du fait que les formateurs sont toujours les mêmes et qu'il faudra attendre quelques années pour que ce corps de métier évolue en intégrant davantage d'enseignants-chercheurs.

Néanmoins, la restructuration de cette formation va forcément imposer une nouvelle orientation des contenus de formation et redistribuer la carte des savoirs pour s'adapter à cette nouvelle donne. L'éparpillement des enseignements mathématiques en UE va-t-il avoir pour conséquence une différenciation affichée des savoirs : telle UE sera consacrée aux savoirs didactiques, telle autre aux savoirs disciplinaires ? Quelle place sera laissée à la professionnalisation dans ces enseignements ? Quelle place sera laissée à la recherche dans ces parcours ? Il est indéniable que la nature des maquettes de Master témoignera des choix adoptés par les différentes universités et que les étudiants auront surement à choisir entre des parcours qui intègrent de façon plus ou moins prépondérante des cours de didactique ou des cours de mathématiques. Quelles seront les conséquences pour leur entrée dans le métier ? Gageons que cette question restera aussi cruciale qu'elle ne l'était du temps de la formation en IUFM.

REFERENCES

Altet M. (2004) L'intégration des savoirs de sciences de l'éducation dans l'expertise enseignante : représentations et rapports aux savoirs professionnels des enseignants. In Lessard C., Altet M., Paquay L., Perrenoud P. (Eds.) (pp. 159-178) *Entre sens commun et sciences humaines.* Bruxelles : Editions De Boeck.

Baillauques S. (1998) Le travail des représentations dans la formation des enseignants. In Paquay L., Altet M., Charlier E., Perrenoud P. (Eds.) (pp.41-61) *Former des enseignants professionnels*. Bruxelles : Editions De Boeck.

Ball D. L. (2008) *Building professional education for teaching mathematics: Meeting the challenges*. In National Council of Supervisors of Mathematics Salt Lake City, UT.

Ball D. L., Thames, M.H., Phelps, G. (2008) Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education* 59(5), 389-407.

Ball D. L., Hill H.C, Bass H. (2005) Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator* 29(1), p. 14-17, 20-22, 43-46.

Bucheton, D. (Ed.) (2009) *L'agir enseignant : des gestes professionnels ajustés*. Toulouse : Octarès éditions.

Butlen D. (2004) *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire. Des difficultés des élèves de milieux populaires aux stratégies de formation des professeurs des écoles*. HDR, Université Paris 8, Paris.

Blanchard-Laville C. (2000) *Malaise dans la formation des enseignants*. Paris : L'Harmattan.

Cyr S., DeBlois L. (2007) Étude de la compréhension des composantes de la notion de corrélation chez des futurs maîtres du secondaire. *Petit x 75*, 50-73.

Butlen D., Charles-Pézard M., Masselot P. (2010) De l'analyse de pratiques à des scénarios de formation : accompagnement de professeurs des écoles enseignant les mathématiques affectés en première nomination dans des établissements de ZEP. In Goigoux R., Ria L., Toczek-Capelle M.C. (Eds.) *Les parcours de formation des enseignants débutants.* Clermont-Ferrand : Presses Universitaires Blaise Pascal.

DeBlois L., Squalli H. (1997) l'analyse des erreurs des élèves en mathématiques par des étudiantes et des étudiants en formation initiale à l'enseignement. In Tardif M., Ziarko H. (Eds.) *La formation initiale, entre continuité et ruptures* (pp. 125-143). Presses de l'Université de Laval, Québec.

DeBlois L., Squalli H. (2002) Implication de l'analyse de productions d'élèves dans la formation des maîtres. *Educational Studies in Mathematics* 50(2), 212-237.

Delaney S., Ball D. L, Hill H. C., Schilling S.G., Zopf D. (2008) Mathematical knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education* 11(3), 171-197.

Hill H., Ball D. L., Schilling S. (2008) Unpacking "pedagogical content knowledge": Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education* 39 (4), 372-400.

Houdement C. (2003) *Un zoom sur les stratégies de formation des professeurs des écoles utilisées par les formateurs en mathématiques*. Table ronde du « XXX^{ème} colloque national des professeurs et formateurs de mathématiques chargés de la formation des maitres ». Avignon, France.

Houdement C., Kuzniak A. (1996) Autour des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques* 16(3), 289-322.

Lessard C., Tardif M. (1999) *Le travail enseignant au quotidien*. Bruxelles : De Boeck.

Marchive A. (2006) *Recherches en didactique et formation des enseignants : analyse d'entretiens biographiques auprès d'enseignants d'un IUFM français*. In EMF 2006. Sherbrook, Canada.

Pastré P., Mayen P., Vergnaud G. (2006) La didactique professionnelle. *Revue française de pédagogie* 154, 145-198.

Pastré P., Bru M., Vinatier I. (2007) Les organisateurs de l'activité enseignante. Perspectives croisées. *Recherche et Formation 56*. ENS de Lyon, Institut français de l'éducation.

Robert A. et Rogalski J. (2002) Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche, *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies* 2(4), 505-528.

Roditi E. (2005). *Les pratiques enseignantes en mathématiques. Entre contraintes et liberté pédagogique*. Paris : L'Harmattan.

Shulman L. (1986) Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher 15(2)*. American Educational Research Association.
Shulman L. (1987) Knowledge and teaching: Foundation of a new reform. *Harvard Review* 57(1), 1-22.

ANNEXE

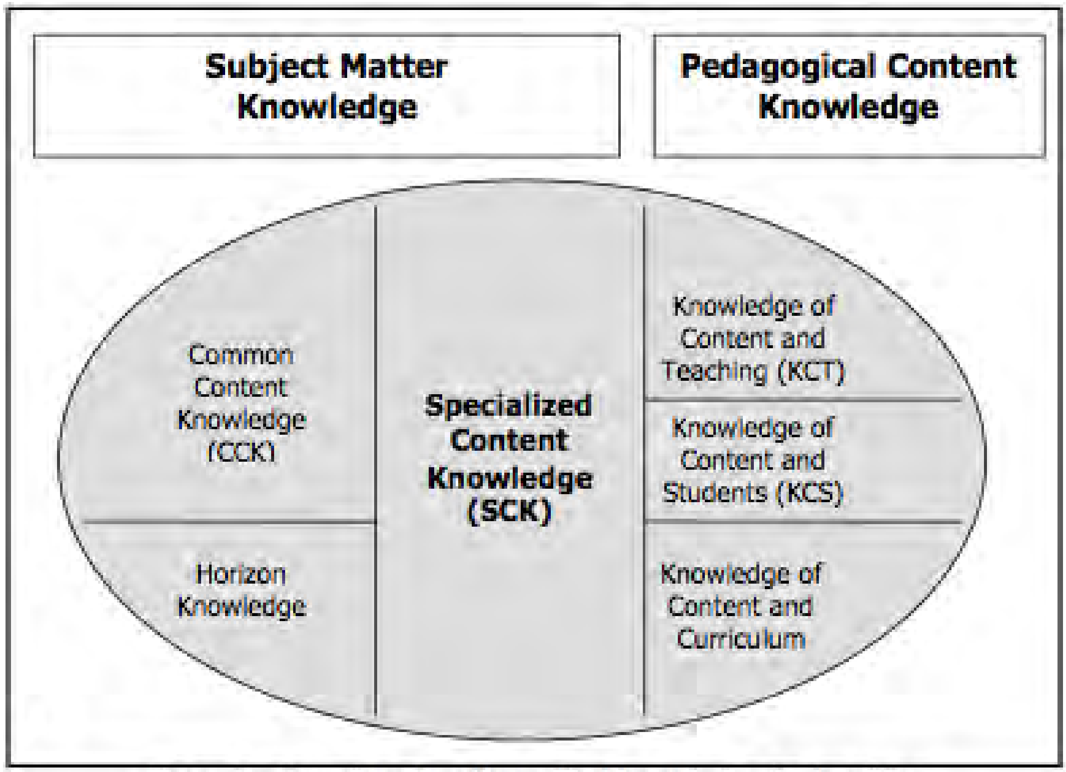


Figure 5. Domains of mathematical knowledge for teaching

ANALYSE DE DISPOSITIFS ET DE STRATEGIES DE FORMATION INITIALE ET CONTINUE DES ENSEIGNANTS

Compte-rendu du Groupe de Travail n°2 – EMF2012

Caroline LAJOIE* – Pascale MASSELOT** – Laura WEISS***

I. INTRODUCTION

Le GT2 s'est intéressé à la thématique de la formation initiale et de la formation continue des enseignants de mathématiques. S'inscrivant dans la continuité des groupes ayant abordé ces thèmes lors des éditions précédentes d'EMF à Tozeur en 2003, Sherbrooke en 2006 et Dakar en 2009, il visait à poursuivre la réflexion sur l'analyse des dispositifs de formation initiale et continue.

En effet, lors du colloque EMF2006 à Sherbrooke, le groupe de travail 2 s'était intéressé aux défis de la formation initiale à l'enseignement. Parmi les participants, certains s'étaient penchés sur la question des dispositifs mis en place pour former des futurs maîtres, d'autres sur la diversité des acteurs qui les gèrent. Ces questions avaient conduit à situer la place de la formation didactique à offrir aux futurs maîtres. En conclusion avait été soulignée l'importance de documenter les caractéristiques du métier d'enseignant, ainsi que les contextes dans lesquels ce métier s'exerce, afin de mieux cerner les besoins des enseignants et de leurs formateurs. Les discussions avaient aussi amené à préciser l'importance des cadres théoriques développés pour interpréter les phénomènes observés dans la classe et pour concevoir des dispositifs de formation. Les recherches montraient une grande diversité, visant parfois l'apprentissage des mathématiques, d'autres fois la compréhension de l'apprentissage des élèves ou encore le contact avec des notions théoriques développées par la recherche.

Lors du colloque EMF2009 à Dakar, les groupes 2 et 9 qui avaient pour thèmes d'une part, « l'analyse de dispositifs de formation initiale et continue » et d'autre part, « les liens entre les pratiques enseignantes et les apprentissages des élèves » avaient été fusionnés. Cette combinaison a induit une réflexion sur la manière dont ces deux thèmes pouvaient s'éclairer et se compléter : comment des résultats sur les pratiques et les apprentissages pouvaient donner des cadres pour les dispositifs de formation et/ou comment les analyses des apprentissages des élèves étaient prises en compte dans les dispositifs de formation.

Avec cet héritage, le GT2 de EMF2012 à Genève, puisant dans la richesse due à la variété des systèmes éducatifs, des institutions et des ressources des dix groupes de contributeurs, sans oublier ceux des autres participants, envisageait d'explorer les cadres théoriques et empiriques auxquels se référer pour concevoir des dispositifs de formation et les analyser. Ainsi, au delà des adaptations locales et de la problématique de la formation initiale versus la formation continue, il s'agissait de rechercher des régularités et des constantes dans la formation des enseignants de mathématiques.

Trois axes avaient été dégagés a priori dans le descriptif de la thématique du groupe :

1) Paradigmes de l'enseignant de mathématiques comme idéal visé par la formation ;
2) Dispositifs de formation ;

* Université du Québec à Montréal – Canada – lajoie.caroline@uqam.ca
** IUFM UCP, LDAR – France – pascale.masselot@iufm.u-cergy.fr
*** Université de Genève – Suisse – laura.weiss@unige.ch

© Lajoie C., Masselot P., Weiss L. (2012) Analyse de dispositifs et de stratégies de formation initiale et continue des enseignants – *Compte-rendu du Groupe de Travail n°2.* In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT2, pp. 251–259). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

3) Effets des recherches en didactique des mathématiques sur la formation des professeurs. Les contributions reçues s'inscrivaient partiellement dans un ou plusieurs de ces axes, tout en amenant à réfléchir à un ensemble d'autres problématiques que nous évoquons ici.

II. LA VARIETE DES THEMES DES CONTRIBUTIONS

Environ 25 personnes provenant de 9 pays et 3 continents (Québec, Mexique, Maroc, Algérie, Côte d'Ivoire, France, Portugal, Belgique et Suisse) ont participé aux sessions du GT2, en enrichissant les débats qui ont suivi les présentations des 10 contributions. Ces dernières, bien que touchant toutes de près ou de loin à des dispositifs de formation, ont balayé plusieurs thèmes. Ainsi la grande variété de contributions se retrouve aussi bien dans les publics cibles des dispositifs de formation que dans les stratégies de formation ou les points de focalisations des contributions.

Se dégagent ainsi 5 catégories de publics cibles des dispositifs : étudiants en mathématiques (Bebbouchi), futurs enseignants du préscolaire, du primaire et du secondaire (Atta et Kouame ; Cirade ; Adihou, Arsenault et Marchand ; Chenevotot, Galisson et Mangiante ; Eysseric et Winder ; Bednarz, Lajoie, Maheux, Proulx et Saboya), professeurs des écoles en début de carrière (Masselot, Butlen et Charles-Pézard), enseignants expérimentés de mathématiques (Parada et Pluvinage), formateurs d'enseignants (Floris, Aymon, Bertoni, Ferrez et Weiss).

Cette catégorisation découpe, en partie seulement, les moments du dispositif de formation dans la carrière enseignante. Ainsi certains contributeurs s'intéressent à la formation académique qui précède la formation à l'enseignement au cours de laquelle peuvent déjà être proposés des éléments de didactique des mathématiques ; d'autres se penchent sur la formation initiale des futurs enseignants, ces derniers étant issus de différents parcours : formation universitaire en mathématiques ou formation pré-universitaire sans spécialisation particulière. D'autres encore se focalisent sur des enseignants novices au moment de leur entrée dans le métier ou sur des enseignants expérimentés auxquels une formation continue peut apporter un complément d'expertise et enfin un groupe discute de la formation et des compétences des formateurs d'enseignants.

Les types de dispositifs analysés par les communications sont des modules universitaire en histoire et didactique des mathématiques (Bebbouchi), des modules de formation à l'enseignement et de didactique des mathématiques (Adihou et al ; Atta et al. ; Chenevotot et al. ; Cirade ; Bednarz et al.), un module de type accompagnement (Masselot et al.), des modules de formation continue des enseignants ou des formateurs en présentiel ou à distance (Parada et al. ; Floris et al ; Eysseric et al.).

Les points de focalisation des contributions sont aussi différents et on peut trouver : l'analyse du travail enseignant ou de formateur (Masselot et al. ; Floris et al.), les raisonnements des futurs enseignants en mathématiques (Adihou et al.), les apports pour les élèves d'activités autres que strictement mathématiques (Eysseric et al.), ou encore les gestes professionnels, routines et prises de décision en fonction du public cible (Masselot et al.) ou la professionnalité des enseignants novices (Chenevotot et al.).

Des pistes ont aussi été ouvertes par certaines contributions concernant des manières de repérer les besoins des futurs enseignants ou des moyens pour identifier la manière dont s'organisent les pratiques des enseignants.

III. L'ESSENTIEL DES CONTRIBUTIONS

Nous reprenons ici les contributions dans l'ordre où elles ont été présentées lors des travaux du GT2 pour en faire ressortir les points saillants.

1. Formation à l'enseignement des mathématiques dans les premières années de scolarité

À partir de l'analyse de documents de préparation de 3 enseignantes à propos de l'enseignement de la couleur jaune au préscolaire ivoirien (notion qui n'est pas anodine au regard de la culture de ce pays), Atta et Kouame ont inféré des déficits de formation initiale des enseignants ivoiriens, qui se répercutent sur la préparation des leçons, et des difficultés à suivre le curriculum prescrit. Ces lacunes, dont les enseignantes concernées sont pleinement conscientes, semblent pouvoir être attribuées au temps limité pour la formation mathématique et didactique, dû à des problèmes structurels.

Envisagée comme intégrée à une formation initiale ou continue, la contribution d'Eysseric, Winder et Simard porte sur la manière d'initier une réflexion à propos de l'utilisation des jeux dans les leçons de mathématiques du primaire : comment « didactifier » les jeux pour qu'au-delà du constat générique que faire des jeux, c'est faire des mathématiques, la pratique du jeu implique l'apprentissage d'un savoir mathématique précis et identifié ? C'est dans ce but qu'Eysseric, Winder et Simard proposent une formation des professeurs des écoles (entre 3 et 6 heures) qui se base sur une analyse fine des différents jeux de société traditionnels. L'explicitation des notions mathématiques impliquées et des transformations des jeux classiques pour travailler d'autres notions devraient permettre une plus grande efficacité de l'utilisation des jeux en classe en partant d'une réflexion sur le savoir. En outre, à travers l'utilisation de jeux traditionnels, la transmission du patrimoine culturel peut également être un enjeu de l'activité en classe. En effet, ces jeux sont présents dans toutes les cultures mais peuvent subir des adaptations locales différentes.

Au-delà de ces « études de cas » (une notion spécifique, une modalité d'apprentissage particulière), se dégage de ces dispositifs l'idée de faire porter l'attention sur le repérage et la « mise en scène » du savoir mathématique dont l'apprentissage est visé, qui apparaît ici plus « masqué », moins « transparent ».

2. Formation initiale à l'enseignement des mathématiques : présentation et analyse de dispositifs

À travers l'analyse d'exemples d'activités de formation initiale développées dans des cours de didactique des mathématiques à l'Université du Québec à Montréal, le GREFEM (Groupe de Recherche sur la Formation à l'Enseignement des Mathématiques, formé de Bednarz, Lajoie, Maheux, Proulx et Saboya) illustre différentes visions d'une formation didactique articulée à la pratique enseignante. À la base, toutes les activités analysées, que ce soit les *jeux de rôles*, les *exposés types*, les *situations d'enseignement sur l'introduction à l'algèbre* ou les *pratiques d'évaluation sous l'angle d'une expérience d'enseignement* visent toutes à former les futurs enseignants à l'enseignement des mathématiques au primaire ou au secondaire, selon le cas. La question sous-jacente reste celle de l'articulation de cette formation à la pratique enseignante dans un contexte où cette formation s'acquiert dans des cours de didactique des mathématiques dits « théoriques », soit en contexte de classe universitaire. Autrement dit, comment prendre en compte la pratique enseignante, et même la faire vivre, à l'intérieur des murs de l'université ? Les approches analysées semblent toutes apporter, chacune à sa manière, une solution viable, et leur analyse permet de penser l'articulation de différentes manières. L'analyse des jeux de rôles propose de penser l'articulation en termes de tensions entre préoccupations pratiques et préoccupations didactiques, en ce sens que cette démarche, qui plonge les futurs enseignants dans un contexte simulé mais réaliste, les amène à faire ni « tout-à-fait » comme le ferait l'enseignant, ni « tout-à-fait » comme le ferait le didacticien-chercheur. Les autres dispositifs permettent de penser l'articulation autrement. À titre d'exemple, l'analyse des situations d'enseignement de l'introduction à l'algèbre, qui amènent le futur enseignant à explorer de multiples pratiques (celles du formateur, du futur enseignant, du stagiaire), propose quant à elle de penser l'articulation en termes de complémentarité des regards possibles et des contextes. Le souci de conceptualisation de « l'articulation » à la pratique semble une piste à retenir pour l'analyse de différents dispositifs de formation.

Adihou, Arsenault et Marchand s'intéressent à un dispositif plus global de formation à l'enseignement des mathématiques au primaire mis en place à l'Université du Québec à Rimouski. Ici la focalisation porte sur une pratique mathématique observée par les auteurs chez les futurs enseignants du primaire, soit le recours à des « trucs » mathématiques, une pratique qu'ils jugent intéressante en particulier pour son potentiel didactique. Au départ, l'intérêt des auteurs s'est porté sur les difficultés des étudiants à réussir un examen d'entrée en mathématiques dans le délai des trois ans autorisés. Pour comprendre, entre autres, pourquoi certains étudiants devaient le passer jusqu'à six, voire neuf fois, les auteurs se sont penchés sur les méthodes de résolution des problèmes utilisées par les étudiants et ont mis en évidence l'utilisation de « trucs » mathématiques à propos desquels les étudiants ne s'interrogent pas (ou plus). Cela met en évidence l'absence d'un rapport au sens (du moins en apparence). Les chercheurs ont ensuite élaboré une activité en lien avec ces « trucs », qui a été expérimentée par plusieurs groupes d'étudiants dans un cours de didactique des mathématiques. Les étudiants y étaient invités à faire ressortir les contenus mathématiques en jeu derrière ces trucs, à donner du sens à ceux-ci et à préciser leur utilité pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. L'idée qui ressort ici n'est pas qu'il faille éliminer les trucs mathématiques des pratiques mathématiques des futurs enseignants, mais plutôt qu'il vaut la peine de travailler sur ceux-ci de manière à expliciter les raisonnements mathématiques sous-jacents.

Le concept de « truc » a fortement mobilisé les participants dans le débat qui a suivi la présentation. Quelle en est la légitimité ? Quel statut faut-il lui donner en formation d'enseignants ? S'il est opératoire, faut-il essayer de le mettre en défaut dans des conduites pour que les personnes qui l'utilisent en connaissent aussi les limites ? Empêche-t-il une vraie compréhension ou au contraire est-il un raccourci intellectuel qui évite la surcharge cognitive ?

3. *Formation initiale à l'enseignement des mathématiques : quels indicateurs de développement professionnel ?*

La recherche de Chenevotot, Mangiante et Galisson concerne des indicateurs permettant d'évaluer les effets de la formation sur le développement professionnel des futurs enseignants. S'appuyant sur la double approche psycho-ergonomique et didactique de Robert et Rogalski, elles analysent les réponses à un questionnaire proposé à des futurs professeurs de Collège et de Lycée sur la base de quatre indicateurs de prise en compte des contraintes du métier : prise en compte des programmes et des attentes institutionnelles, prise en compte des enjeux d'apprentissage, adaptation aux élèves, prise en compte des erreurs des élèves. Elles définissent ainsi trois postures nommées « étudiant », « stagiaire » et « enseignant », qui constitueraient des seuils à franchir pour les quatre indicateurs ce qui fait apparaître différents profils. Ceux-ci pourraient être utiles pour évaluer une formation de professeurs de mathématiques.

Le travail de Cirade s'attache à définir des principes directeurs, plus qu'à envisager des dispositifs, pour la formation des enseignants de mathématiques, professeurs de Collège et de Lycée, cette dernière étant finalisée par les besoins de la profession, en tenant compte des nouvelles contraintes liées à la *mastérisation*. Le cadre dans lequel s'inscrit sa réflexion est la théorie anthropologique du didactique (TAD) dont la chercheure exemplifie l'utilisation par la tâche consistant à trouver la quatrième proportionnelle intégrant un des « trucs » ayant fait l'objet d'une présentation précédente. Ce type d'analyse mobilisant les concepts de la TAD est appliqué dans le cas des tâches professionnelles de l'enseignant. Le problème de la mise en place par le professeur d'une certaine organisation du savoir mathématique dans sa classe répond à l'enjeu de la formation professionnelle, à savoir la diffusion de cette praxéologie. La thèse soutenue se base sur le dispositif des « questions de la semaine » qui amène les enseignants en formation à faire état des difficultés rencontrées dans le cadre de leur formation, de manière à faire émerger des « questions cruciales » à problématiser et étudier en vue d'apporter des outils permettant de concevoir leur enseignement. Un forum des questions recense des matériaux pour les réponses aux « questions de la semaine ». Le lien entre le dispositif et l'effet de promotion nécessite toutefois un certain nombre d'années. Au départ les questions se concentrent essentiellement sur la gestion de classe. On retrouve les mêmes réactions par exemple lorsqu'il est demandé aux étudiants de décrire ce qui se passe dans une vidéo : peu de remarques sont faites sur le savoir. En France, avec la *mastérisation*, la formation est bien plus axée sur les savoirs : l'éloignement de la pratique fait surgir les questions sur le savoir. Ce type de dispositif peut s'appuyer aussi sur un mémoire professionnel intégrant une analyse de séance.

On constate que les traits d'union entre les présentations se trouvent dans les liens et articulations entre la formation et le métier, bien que l'interprétation de la formation professionnelle soit différente selon les institutions. Dans cet ordre d'idées, au-delà du concept d'articulation, se pose la question de la signification donnée à une « formation à visée professionnelle » ? Dépendant des contextes, les réponses apportées à cette question peuvent différer. Ainsi, une piste intéressante serait de s'interroger, dans chaque pays, sur les questions qui émergent de la profession et conséquemment sur les particularités, dans ce contexte, d'une « formation à visée professionnelle ».

Au fil des discussions, plusieurs questions sur les mathématiques que se posent les futurs enseignants et les enseignants sur le terrain ont été évoquées, par exemple celles relatives à la progression et la cohérence entre un niveau (ou même un cycle) d'enseignement et un autre. Nous avons convenu du fait que ces questions sur les mathématiques n'émergent pas toujours par la même entrée et que celle-ci peut dépendre des dispositifs de formation mis en place. Ainsi, par exemple, ces questions pourraient apparaître via une discussion à propos des difficultés de la profession, une analyse des difficultés des élèves ou encore un travail sur les connaissances mathématiques des futurs enseignants et des enseignants eux-mêmes. Certains étudiants peuvent même manifester une sorte de déni des mathématiques, alors que pour d'autres le fait de s'intéresser aux difficultés des élèves leur permet d'évoquer les difficultés de la profession.

4. *De la mise en œuvre de dispositifs de formation continue aux analyses de l'activité des professeurs*

Masselot, Butlen et Charles-Pézard analysent les pratiques des professeurs exerçant dans des écoles de milieux défavorisés rendant compte de deux recherches, l'une basée sur des observations et la seconde de type « accompagnement d'enseignants débutants aux cours de leurs deux premières années d'exercice ». La définition empirique de 3 i-genres, dont relèvent les pratiques observées, montre comment les enseignants négocient différemment entre les contraintes de l'enseignement et de l'apprentissage. L'i-genre majoritaire se caractérise par une baisse des exigences et une individualisation des tâches alors que l'i-genre minoritaire, plus exigeant, correspond à des pratiques se rapprochant de ce qui est valorisé en formation. L'accompagnement des professeurs et l'analyse des effets de ce dispositif ont mis en évidence deux dimensions des pratiques : l'installation de la paix scolaire et l'exercice d'une vigilance didactique suffisante. La première s'appuie sur la paix sociale, mais comporte également l'adhésion au projet de l'enseignant qui donne confiance aux élèves et participe à la dévolution. La seconde comporte une composante cognitive basée sur les connaissances mathématiques et une composante médiative intégrant des concepts provenant de la didactique. Cette recherche offre des perspectives pour la formation au niveau de la formation de formateurs, et cela d'autant mieux si la logique des formés est prise en compte, comme le soulignent les chercheurs.

La formation continue dans un pays des dimensions du Mexique peut poser des problèmes particuliers, entre autres à cause de l'isolement des enseignants. Parada et Pluvinage décrivent un dispositif de formation continue en didactique des mathématiques au sein de communautés de pratique. Cette formation se base sur l'introduction d'une perturbation, à la fois pour provoquer des analyses de faits spécifiques et pour en discuter, et s'accompagne du développement de compétences en technologies de l'information. Le dispositif a été centré sur l'étude des probabilités car, même si elles sont censées être enseignées dès le primaire, elles sont souvent laissées de côté par les enseignants.

Les participants ont évoqué lors de la discussion la difficulté d'intégrer dans la formation initiale des professeurs des cours de didactique et des cours de gestion de classe selon une imbrication semblable à celle qui peut conduire à installer la paix scolaire en classe. C'est dans les classes difficiles, par exemple lors des transitions entre les activités, qu'il est important de s'appuyer sur cette paix scolaire. Il semble que quelque chose de crucial dans le développement professionnel des enseignants se joue au moment de l'insertion dans le métier…

5. La didactique des mathématiques dans la formation des enseignants

Les deux dernières contributions sont concernées par les deux extrémités du parcours, d'une part la formation universitaire initiale en mathématiques et d'autre part, la formation de formateurs de mathématiques. Cependant la focalisation est très différente.

La contribution de Bebbouchi s'intéresse à l'introduction d'un cours d'histoire et de didactique des mathématiques dans la formation académique en mathématiques. Malgré un certain manque d'intérêt initial des étudiants plus attirés par la partie informatique de leur formation, leurs évaluations finales vis-à-vis de ce cours de didactique sont positives et leurs travaux montrent qu'ils se prennent au jeu. Qui plus est, ce sont parfois d'autres étudiants que les plus brillants en mathématiques pures qui réussissent dans ce cours. Le questionnement de l'article porte sur la pertinence d'offrir un tel enseignement à tous les étudiants de mathématiques.

Tout autre est le sujet de la recherche de Floris, Aymon, Ferrez et Weiss qui ont travaillé sur des textes d'analyse de pratiques rédigés par des formateurs d'enseignants de mathématiques dans le cadre d'un cours de formation. Ils ont ainsi mis au point des critères de qualité s'appuyant sur la théorie des niveaux de structuration du milieu de Margolinas. L'enjeu est ici d'amener les formateurs à affiner leurs capacités d'analyse de pratique, en l'objectivant grâce à l'identification, dans les leçons observées, d'éléments comme les organisations mathématiques et didactiques, les types de problèmes ou les phases d'apprentissage potentiel.

La question des différentes échelles (plusieurs séquences, une séquence, une séance, des épisodes…) et des différents grains d'analyse des pratiques et des relations entre eux est soulevée lors de la discussion.

IV. CONCLUSION

Les colloques EMF visent à permettre les échanges d'idées, d'informations, d'expériences, de recherches autour des questions vives de l'enseignement des mathématiques, à renforcer la coopération entre des chercheurs, formateurs, enseignants, vivant dans des contextes sociaux et culturels différents et contribuer au développement, dans la communauté francophone, de la recherche en didactique des mathématiques et de ses retombées, notamment sur les formations initiale et continue des enseignants.

Pour conclure les travaux du GT2, nous avons demandé aux participants, en petits sous-groupes, d'exprimer un point à retenir pour la synthèse de nos travaux et une suggestion pour le prolongement du travail de notre groupe en 2015.

Les participants ont noté la très grande variété des travaux, aussi bien au niveau du public cible (futurs enseignants du primaire et du secondaire, enseignants en début de carrière, enseignants expérimentés, formateurs, étudiants en mathématiques), au niveau des dispositifs de formation et des points de focalisation de ces dispositifs (les élèves à travers leurs erreurs, leurs raisonnements, etc. ; les mathématiques et les raisonnements des futurs enseignants ; les situations à travers des analyses a priori, la préparation, la gestion des séances, des analyses a posteriori ; l'activité du professeur à travers les gestes professionnels, routines, prises de décision…), qu'au niveau des questionnements sur les principes directeurs. Au-delà de cette très grande diversité, toutefois, les participants ont aussi pu dégager un certain nombre de points de convergence et d'intérêts. Ainsi, un certain nombre de préoccupations communes se dégagent, dont en particulier :

- la nécessité de mieux connaître les besoins des étudiants-enseignants dans une visée d'élaboration d'une formation tenant compte de ces besoins, soit en partant des questions qu'ils se posent ou en faisant l'hypothèse des questions qu'ils pourraient se poser ;
- un besoin de réflexion de fond sur la nature de la formation (initiale ou continue) visée, réflexion qui nous a amenés au sein du groupe à réfléchir à différents dispositifs de formation (dont les portes d'entrée peuvent être les élèves à travers leurs raisonnements et erreurs, les mathématiques, les situations, l'articulation à la pratique, le contrat social, …), à des stratégies de formation (homologie, jeux de rôles, analyses de vidéos), aux grands principes qui inspirent les formateurs ; à ce que pourrait être une formation à visée professionnelle, aux manières d'amener les étudiants à passer (dans le cas de la formation initiale) d'une posture d'étudiant à une posture d'enseignant, aux choix de formation et contraintes institutionnelles qui orientent la formation ;
- une interrogation par rapport à ce qui reste de la formation au moment de l'entrée dans le métier, et même bien après ;

Enfin, lors de cette synthèse, le concept d'articulation a été repris, cette fois avec l'idée de mettre l'accent sur l'importance de différents types d'articulations :

- articulations entre formation (pôle formation) et profession (pôle métier), en particulier au moment des transitions (par exemple au moment de l'entrée dans le métier) ;

- articulations à l'intérieur des formations dans le cas des professeurs des écoles ;
- articulations entre les questions et les difficultés ressenties par les enseignants en formation et celles qui surgissent de la profession ;
- articulations entre les problèmes qui remontent du métier (internes) et ceux mis en évidence par les didacticiens (externes) ;
- articulation entre les savoirs détenus par les différents acteurs : savoir étudiant ; savoir des professeurs des écoles ; savoir du professeur secondaire de mathématiques, savoir du formateur ; savoir du professeur des universités…

En ce qui concerne d'éventuelles nouvelles pistes à explorer ou à approfondir, selon le cas, les pistes suivantes ont été proposées :

- Identifier, étudier, mettre en relation les besoins de la formation, les besoins des enseignants et les besoins de la profession. En particulier comment décoder, susciter, transformer les questions qui émergent du terrain ?
- Se pencher sur les pratiques des formateurs et sur l'impact de ces pratiques sur les formés.
- Examiner l'articulation à l'intérieur des formations mais aussi dans le passage de l'une à l'autre (insertion professionnelle, entrée dans le métier).
- Préciser la distinction entre formation du futur enseignant, formation de l'enseignant débutant et formation de l'enseignant expérimenté, en prenant en compte de façon spécifique la logique des formés.
- Comment aider les futurs enseignants de mathématiques à lire des textes mathématiques ?
- Cas paradoxal de la Belgique, où l'enseignement aux futurs instituteurs est donné par des possesseurs de master en maths sans formation pédagogique…
- Prévoir pour EMF2015 un groupe de travail séparé de celui-ci qui porterait sur la formation des enseignants du supérieur et sur la formation des mathématiciens, qui deviendrait un lieu de réflexion sur la formation des professeurs, sur les mathématiques élémentaires d'un point de vue supérieur (en lien possiblement avec le GT1). Dans ce groupe pourraient être abordées deux questions symétriques :
  - quelles mathématiques pour l'enseignant de mathématiques ?
  - quelle didactique pour de futurs mathématiciens ?

CONTRIBUTIONS AU GT2

ADIHOU A., ARSENAULT C., MARCHAND P. – Dispositif de formations mathématiques pour les futurs maîtres.

ATTA K. Y. G., KOUAME K. P. – Formation des enseignants du préscolaire ivoirien et pratiques enseignantes relatives à la conception des projets d'enseignement. Une étude de cas sur l'activité de perception de la couleur jaune dans trois classes de petite section.

BEBBOUCHI R. – Histoire et Didactique des mathématiques : une nécessité pour la formation d'un mathématicien ?

CHENEVOTOT F., GALISSON M.-P., MANGIANTE C. – Le développement professionnel de professeurs débutants : quels indicateurs ? Quels retours vers la formation ?

CIRADE G. – La formation des professeurs : entre analyse de praxéologies professionnelles et étude de problèmes de profession.

EYSSERIC P., WINDER C. – Exemple de dispositif de formation à l'utilisation des jeux à l'école pour les apprentissages mathématiques.

FLORIS R., AYMON H., BERTONI M., FERREZ E., WEISS L. – Qualité d'analyses de leçons de mathématiques : quels critères ?

GREFEM – Formation didactique articulée à la pratique enseignante : illustrations et conceptualisations.

MASSELOT P., BUTLEN D., CHARLES-PEZARD M. – Deux dimensions de l'activité du professeur des écoles exerçant dans des classes de milieux défavorisés : installer la paix scolaire, exercer une vigilance didactique.

PARADA RICO S. E., PLUVINAGE F. – Développement des réflexions de professeurs de mathématiques au sein de communautés de pratique.

DISPOSITIF DE FORMATION MATHEMATIQUE POUR LES FUTURS MAITRES

Adolphe ADIHOU* – Cathy ARSENAULT** – Patricia MARCHAND*

Résumé – Nous présentons le travail réalisé depuis une dizaine d'années au regard de la formation initiale des enseignants du primaire. Nous rappellerons les caractéristiques du dispositif de formation à l'enseignement des mathématiques à l'UQAR[1] et reviendrons sur l'examen de compétences en posant un regard sur les conduites des futurs maîtres caractérisées par l'utilisation de certaines techniques. Nous nous questionnerons sur l'impact de ces conduites dans leur future pratique et décrirons un volet du dispositif de formation élaboré autour de celles-ci. Enfin, nous mènerons une réflexion sur l'impact et les pistes éventuelles de développement d'un tel dispositif de formation.

Mots-clefs : formation, dispositif, enseignement, mathématiques

Abstract – This article report upon ten years of research on a mathematic training device develop for pre-service teachers at UQAR[1]. We first explain the training device main characteristics and outcome for the future primary-level teachers. Next, we focus on the mathematics competency exam with a first-hand glance at a particular mathematical practice by future teachers. We then question ourselves on the impacts of this use of mathematics in their future exercise and describe a component of the training device put into force regarding this mathematical practice. Finally, we reflect on the impacts and the following research development for this training device.

Keywords: training device, teaching, mathematics

I. INTRODUCTION

La thématique de la formation mathématique des futurs maîtres est au cœur de plusieurs événements scientifiques depuis une dizaine d'années, entre autres, les colloques de l'Acfas[2] 1997, 2009 et de l'EMF[3] 2006, 2009. Des réflexions, questionnements, discussions ont amené les chercheurs en didactique des mathématiques à s'interroger sur la spécificité de la formation mathématique des futurs enseignants.

En tant que chercheurs en didactique des mathématiques, nous avons pris une position au regard de la formation initiale en participant à l'élaboration d'un imposant dispositif de formation à l'UQAR (Adihou et Arsenault 2012 ; Arsenault 2010 ; Marchand 2010 ; Adihou, Arsenault et Marchand 2006) composé de trois volets qui s'articulent les uns aux autres, soit le diagnostic des connaissances et compétences mathématiques, la formation mathématique et la formation didactique. Ainsi à travers le premier volet, il est mis en évidence des éléments qui nourrissent des problématiques abordées dans le volet de la formation didactique, telles que les erreurs, les procédures ou les raccourcis mathématiques aussi appelés trucs mathématiques. Ces trucs, moyens ou techniques sont des procédés astucieux, économiques et faciles, destinés à simplifier une opération a priori délicate (Loock 2006). Ils nous servent de porte d'entrée pour illustrer les

* Université de Sherbrooke – Canada – adolphe.adihou@usherbrooke.ca, patricia.marchand@usherbrooke.ca
** Université du Québec à Rimouski, Campus de Lévis – Canada –cathy_arsenault@uqar.ca
[1] UQAR : Université du Québec à Rimouski
[2] ACFAS : Association francophone pour le savoir
[3] EMF : Espace Mathématique Francophone

© Adihou A., Arsenault C., Marchand P. (2012) Dispositif de formation mathématique pour les futurs maîtres. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT2, pp. 260-279). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

articulations plausibles entre les trois volets du dispositif de formation. Ils ne doivent donc pas être pris ici comme objet d'étude, mais davantage comme support servant à l'illustration des interactions pouvant générer d'une réflexion plus globale sur la formation des maîtres.

Nous rappellerons d'abord, les caractéristiques du dispositif de formation à l'enseignement des mathématiques de l'UQAR, accompagnées de quelques résultats significatifs (II). La partie suivante (III) traitera des pratiques mathématiques des étudiants, en lien avec les trucs mathématiques qui ont pu être observées à travers les trois volets du dispositif. L'activité didactique ayant émergé de cette analyse des pratiques mathématiques des étudiants sera présentée par la suite (IV) et enfin, nous questionnerons cette dernière dans un esprit d'analyse et d'évaluation de son efficacité et de son apport au dispositif de formation existant. Ce découpage du texte a pour but de mettre en évidence les apports de l'articulation des trois volets dans la formation par le travail réalisé sur les trucs mathématiques.

II. CARACTERISTIQUES DU DISPOSITIF DE FORMATION A L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES A L'UQAR[4]

Dans le cadre du programme de baccalauréat en éducation préscolaire et en enseignement au primaire (BEPEP), l'UQAR propose une formation à l'enseignement des mathématiques organisée autour de trois volets mentionnés précédemment. Ceux-ci constituent le dispositif de formation et visent à former des maîtres compétents en enseignement des mathématiques.

1. L'examen de culture et de compétences en mathématiques[5]

Pour former des enseignants compétents, il est important d'évaluer les connaissances et les compétences mathématiques des futurs maîtres à leur première année universitaire. L'examen diagnostique auquel sont soumis ces derniers couvre les contenus des programmes de formation en mathématiques du primaire et du premier cycle du secondaire. Ceux qui ne réussissent pas l'examen doivent le reprendre et le réussir avant la fin de leur troisième année universitaire pour obtenir l'autorisation de s'inscrire à leur dernier stage de formation pratique, sinon ils sont suspendus du programme jusqu'à la réussite de l'examen.

Chacune des versions de l'examen comporte 40 questions, réparties en deux parties : la première, composée de 20 questions porte sur l'arithmétique et l'algèbre; la seconde, aussi de 20 questions porte sur la géométrie, la mesure, la statistique et la probabilité. Trois compétences mathématiques sont évaluées au regard de ce contenu. Ainsi, parmi les 40 questions, 20 concernent la maîtrise de la culture mathématique, 10 portent sur le raisonnement à l'aide de concepts et de processus mathématiques et les 10 autres sur la résolution de problèmes (Adihou et Arsenault 2012). La correction de l'examen renvoie un bilan diagnostique orientant l'étudiant dans sa démarche de développement de ces compétences. Par exemple, dans chacune des versions, la question 15 porte sur « *les opérations mathématiques sur les nombres rationnels* » et un message diagnostique lui est associé.

[4] Pour de plus amples informations sur le dispositif de formation à l'enseignement des mathématiques de l'UQAR, nous vous référons aux textes présentés dans le cadre des colloques EMF 2006 (Adihou, Arsenault et Marchand 2006) et Formation mathématique des enseignants de mathématiques, en avril 2010 (Adihou et Arsenault 2012).

[5] Par compétence, nous référons à la définition du ministère de l'Éducation soit : *«Une compétence est la mobilisation de ressources pour faire face aux problèmes de la pratique professionnelle. » (Martinet et al. 2001, 218).*

2. *La formation mathématique*

La formation mathématique proposée aux futurs maîtres se présente sous différentes formules afin de répondre à leurs besoins. Que ce soit les cours thématiques (3 cours de 15 heures chacun) ou généraux (1 cours de 45 heures), non-obligatoires et hors programme, les étudiants y réapprivoisent les savoirs mathématiques de l'école primaire et secondaire dans le contexte d'une approche socioconstructiviste, afin de leur redonner du sens et de susciter leur intérêt à l'égard de la culture mathématique (Adihou et al. 2006, p.5). Des ateliers préparatoires à l'examen, en petits ou grands groupes, sont aussi offerts quelques semaines avant chaque passation. Enfin, avec le bilan diagnostique et la possibilité de consulter son examen lors d'une entrevue d'une heure pour mieux identifier ses erreurs et difficultés, un étudiant peut choisir de travailler de façon autodidacte avec le support d'une personne qu'il aura choisie ou encore avec le conseiller du CAR[6].

La démarche de développement de connaissances et de compétences en mathématiques proposée à l'étudiant vise à susciter une prise de conscience de ses difficultés et la nécessité d'amorcer une démarche personnelle pour améliorer sa compréhension des mathématiques. Cette responsabilisation justifie une liberté de choix qui se manifeste dans la variabilité des activités et du nombre d'heures consacrées à la formation mathématique. Les retombées de ce dispositif sont nombreuses, entre autres, une modification du rapport aux savoirs mathématiques (attitude plus positive quant aux mathématiques et leur enseignement), une plus grande maîtrise des connaissances et compétences en mathématiques, et par conséquent, une meilleure disposition aux aspects didactiques abordés dans la formation (Adihou et Arsenault 2012).

3. *La formation didactique*

La formation didactique à l'UQAR se compose de quatre cours obligatoires de 45 heures chacun. Axés sur le développement des compétences professionnelles à l'enseignement, les trois premiers cours reposent sur des analyses épistémologiques, mathématiques et didactiques des concepts mathématiques visés par une situation d'enseignement-apprentissage, et ce, pour les trois cycles du primaire[7]. Le quatrième repose sur une approche par projets et intègre des savoirs mathématiques, scientifiques et technologiques.

La description des trois volets de ce dispositif de formation met en lumière l'importance de l'articulation des formations mathématique et didactique. En effet, le travail mathématique que les futurs maîtres réalisent soulève une réflexion sur l'apprentissage des concepts et des processus, tandis que le travail didactique favorise, entre autres, la poursuite de cette réflexion vers l'enseignement de ceux-ci. (Adihou et Arsenault 2012).

Selon Marchand (2010, p.25), ce dispositif global semble être le plus bénéfique pour remédier aux difficultés que présentent les futurs maîtres puisqu'il leur permet d'échelonner leur démarche de développement des compétences en mathématiques sur au moins trois ans, et ce, en parallèle à leur formation didactique. Ainsi, les impacts de ce dispositif sont visibles. Nous avons quelques résultats qui témoignent de la progression des étudiants.

---

[6] CAR : Le Centre d'aide à la réussite est un lieu à l'université où l'on retrouve des ressources diverses pour favoriser la réussite des études universitaires. Il y a une personne ressource en mathématiques et en français.

[7] Au Québec, l'enseignement primaire est organisé sur six années, subdivisées en trois cycles de deux ans. Les élèves sont âgés de 6 à 12 ans.

4. *Quelques résultats*

Ce dispositif de formation fonctionne depuis l'automne 2004. Le suivi de chacune des cohortes d'étudiants de 2004 à 2010 met en lumière une lente progression des compétences. En effet, il faut plusieurs passations de l'examen pour que les étudiants atteignent le taux de réussite. Le tableau 1 montre cette progression, mais révèle d'autres informations qu'il faut souligner.

Cohortes→ Passations↓	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Passation 1	3,1%	24,4%	36,4%	35,2%	32,3%	24,0%	26,6%
Passation 2	52,5%	54,0%	51,8%	57,6%	44,1%	43,2%	--
Passation 3	69,6%	67,6%	65,1%	68,5%	58,1%	47,2%	--
Passation 4	79,4%	76,1%	73,5%	74,6%	62,5%	--	--
Passation 5	86,1%	82,4%	79,1%	77,6%	64,7%	--	--
Passation 6	89,8%	84,1%	79,1%	79,4%	--	--	--
Passation 7	90,4%	84,1%	79,8%	80,0%	--	--	--
Passation 8	**91,0%**	**84,1%**	**79,8%**	**80,0%**	--	--	--

Tableau 1 *– Progression du taux de réussite à l'examen de culture et de compétences en mathématiques pour les cohortes 2004-2010*

Pour les cohortes 2004 à 2007, variant entre 143 et 176 étudiants, six passations de l'examen leur ont été proposées au cours des trois premières années du programme. Ainsi, à la fin de leur troisième année, en moyenne, 83 % des étudiants ont atteint le seuil de réussite. Après une suspension du programme, ce taux n'augmente que très peu (83,7 %).

Pour les cohortes 2008 à 2010, cinq passations de l'examen ont été proposées au cours des trois premières années du programme, une seule passation étant permise à présent en première année comparativement à deux pour les cohortes précédentes. On peut observer une baisse du taux de réussite pour chacune des années et des cohortes. Cette diminution correspond également à la mise en place des nouvelles mesures sur les compétences en français en 2008. En effet, les étudiants doivent réussir l'examen de français (TECFÉE[8]) pour effectuer leur troisième stage de formation pratique se déroulant à la troisième année du programme. Ainsi, plusieurs étudiants favorisent d'abord un travail sur les compétences en français[9]. Pour la cohorte 2008, ces nouvelles mesures ont eu un impact important sur la progression du taux de réussite. Mais globalement, comment expliquer la lente progression vers le seuil de réussite? Quels moyens les étudiants mettent-ils en œuvre pour favoriser cette progression? Y aurait-il des moyens d'aide plus efficaces?

Premièrement, chez les étudiants de première année, 34,8 % en moyenne ont une note inférieure à 50 % à l'examen. D'une cohorte à l'autre, les notes les plus basses varient entre 5,7 % et 22,9 %, tandis que les notes les plus élevées varient entre 88,6 % et 100 %. La moyenne

[8] TECFÉE : Test de certification en français écrit pour l'enseignement.
[9] Notons que plusieurs des étudiants qui échouent l'examen de mathématiques échouent également celui en français.

des groupes fluctue entre 46,2 % et 64,7 %. Ainsi, pour certains, il faut plusieurs reprises de l'examen pour atteindre la note de passage fixée à 75 %. Deuxièmement, les difficultés mathématiques qu'éprouvent les étudiants ne sont pas de simples oublis ou erreurs superficielles, mais elles pourraient provenir de lacunes conceptuelles importantes comme le prétend Marchand (2010, p.15). Dans un tel contexte, ils ont besoin de temps pour revisiter, approfondir et surtout, reconstruire leur compréhension des divers concepts mathématiques tirés du programme de formation du primaire et du premier cycle du secondaire. Troisièmement, environ 30 % des étudiants constituant les cohortes 2004 à 2009 recourent aux mesures d'aide pour améliorer leurs compétences. Les ateliers préparatoires à l'examen et la consultation de leur examen sont les mesures les plus populaires. Ainsi, la majorité des étudiants semble travailler de façon autodidacte. Pourrions-nous intervenir autrement pour favoriser une progression plus rapide? Pour répondre à cette question, nous avons décidé de porter une attention particulière aux pratiques mathématiques des étudiants dans les examens et les activités des cours. Certaines d'entre elles nous ont interpellées davantage : celles liées à l'utilisation de trucs mathématiques. Nous avons analysé ces pratiques pour mieux les comprendre et mettre en place une activité de formation s'intégrant au volet didactique du dispositif que nous présentons dans les pages qui suivent.

III. LES PRATIQUES MATHEMATIQUES DES FUTURS MAÎTRES

Les pratiques mathématiques des futurs maîtres révèlent des rapports particuliers aux savoirs, entre autres, celles qui impliquent l'utilisation de trucs mathématiques (Adihou et Marchand 2010, p. 37). Les pratiques mathématiques des étudiants ne se limitent pas uniquement à l'utilisation de trucs mathématiques, mais nous avons choisi de traiter ceux-ci, puisque leur usage semble répandu chez nos étudiants et qu'ils possèdent un potentiel didactique. Nous illustrerons ces pratiques à l'aide d'exemples tirés des trois volets du dispositif de formation et mènerons, par la suite, une réflexion liée aux retombées éventuelles de celles-ci dans leur pratique enseignante.

Dans le cadre de l'examen de culture et de compétences en mathématiques, nous avons observé dans les conduites des étudiants, des manifestations de l'exploitation de ces trucs mathématiques. Deux exemples permettront de les illustrer[10]. Premièrement, nous demandons aux étudiants d'effectuer une multiplication de nombres décimaux (ex. : 8,06 x 5,09 ou 10,01 x 1,10). Trois conduites liées à cette tâche sont présentées à la figure 1.

[10] D'autres conduites d'étudiants pour l'algorithme de division sont présentées en annexe 1.

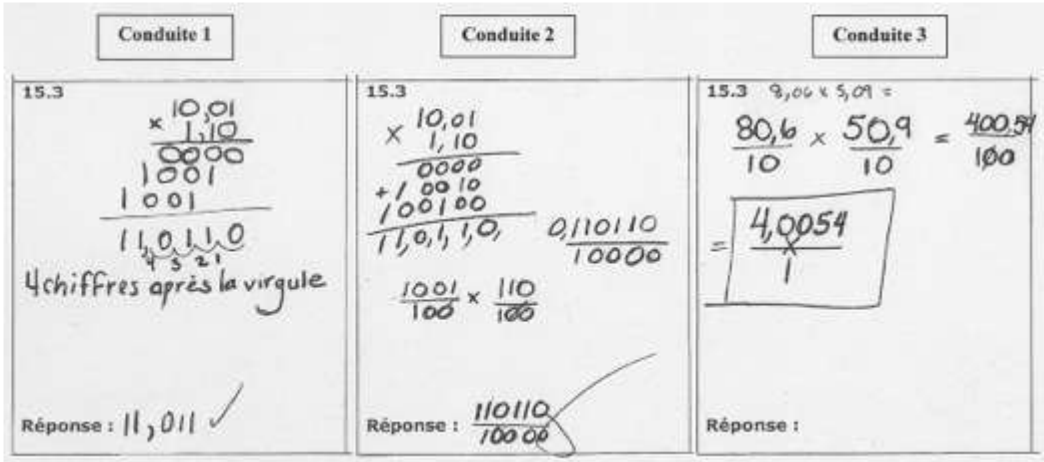


Figure 1 *– Trois conduites d'étudiants liées à la multiplication de nombres décimaux lors de la passation de l'examen de culture et de compétences en mathématiques*

Dans la première conduite, nous observons les traces écrites laissées par un étudiant qui mobilise un truc mathématique pour replacer la virgule dans sa réponse (truc 2, annexe 2). Ce truc semble bien fonctionner pour ce calcul, par contre, les deux autres conduites démontrent qu'il ne semble pas être maîtrisé par tous. À la conduite 2, l'étudiant fait son calcul sans virgule, mais il ne semble pas en mesure d'identifier l'emplacement de celle-ci dans sa réponse. Ses nombreuses tentatives peuvent révéler une absence de contrôle mathématique. Il exprime ensuite son calcul sous forme fractionnaire, mais cette étape ne semble pas l'aider, ne sachant toujours pas où mettre la virgule dans sa réponse. La troisième conduite démontre également un manque de contrôle dans la gestion de la virgule, mais d'autres difficultés conceptuelles surgissent[11].

Ces conduites sont typiques des réponses recueillies à une question de l'examen très peu réussie par les étudiants. Quatre calculs sont présentés : une soustraction et division de fractions ainsi qu'une multiplication et division de décimaux. Sur les 163 étudiants de la cohorte 2004, aucun étudiant n'a réussi plus d'un calcul et seulement 55,8 % ont réussi un des calculs demandés. Ce taux a augmenté légèrement avec les cohortes subséquentes, mais pour la cohorte 2010, seulement 12,6 % des étudiants ont réussi les quatre opérations et encore 20,7 % ne réussissent qu'un des quatre calculs. Le taux de réussite pour cette question demeure faible et nous pouvons émettre l'hypothèse que les étudiants appliquent des trucs mathématiques non maîtrisés.

Des traces de ce type de trucs mathématiques ne se manifestent pas seulement dans les tâches techniques, mais également en résolution de problèmes. Nous reprenons ici un problème mettant en jeu des pourcentages où plusieurs étudiants ont recours à un autre truc mathématique pour le résoudre, soit la règle de trois[12]. Voici ce problème :

[11] L'étudiant semble concevoir le nombre décimal comme deux nombres juxtaposés, conception fréquemment observée chez les élèves du primaire, puisqu'il fait la multiplication des parties entières des deux nombres soit *80 x 50 = 400* (ici, il fait une erreur de calcul) et des parties décimales, soit 6 x 9 = 54. Ainsi, le produit des nombres *80,6 et 50,9 égale 400,54*. Enfin, il ne semble pas maîtriser l'écriture fractionnaire.

[12] La règle de trois est aussi appelée le produit croisé. Elle permet de résoudre les problèmes de quatrième proportionnelle. Dans le contexte québécois, cette règle est trop souvent présentée comme une technique à appliquer sans en questionner le sens ou sans proposer d'alternatives (ex. : retour à l'unité) ; ce qui peut faire émerger diverses interprétations de la règle et surtout des difficultés de compréhension.

> Un homme boit 20 % d'une bouteille de vin qui contient 12 % d'alcool. S'il y avait 30 ml d'alcool dans le vin qu'il a bu, combien de ml de vin y a-t-il dans sa bouteille?

La figure 2 présente trois exemples de conduites pour ce problème :

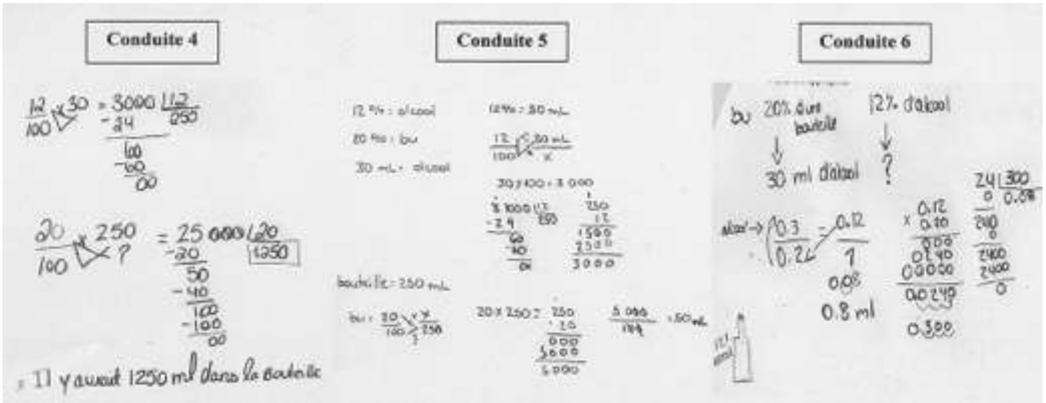


Figure 2 *– Trois conduites d'étudiants liées à la résolution d'un problème de pourcentage lors de la passation de l'examen de culture et de compétences en mathématiques*

Le signe en *forme de petit poisson* (□‹), présent dans la conduite 4 de la figure 2, est une manifestation de ce truc mathématique. Il est bien appliqué dans ce cas, mais nous ne pouvons pas en dire autant dans les autres cas. Dans la conduite 5, nous retrouvons la schématisation du truc sous forme d'un symbole, accompagné des opérations à faire pour chacune des étapes, soit la multiplication suivie de la division. Par contre, la deuxième égalité n'est pas bien établie. L'étudiant n'a pas placé son résultat au bon endroit dans son égalité. En effet, 250 ml représente 20 % et non 100 %. La réponse obtenue est par conséquent erronée, mais il ne semble avoir aucun moyen de contrôle sur ces manipulations opératoires. La réponse obtenue n'est pas remise en cause. Dans la dernière conduite, l'étudiant met en relation les trois données du problème, mais l'égalité formée n'a pas de sens. Il obtient 0,08 ml comme réponse à ses calculs et il répond 0,8 ml. Encore une fois, il semble y avoir une absence de contrôle des actions mathématiques posées pour résoudre ce problème.

Dans le cadre de la formation mathématique et didactique, Marchand (2010, p.14) a repéré chez les mêmes étudiants des difficultés découlant de l'exploitation technique des trucs mathématiques. Nous en présenterons deux exemples. Le premier fait référence à l'algorithme de division. Nous avons demandé à un groupe d'étudiants de réaliser par écrit le calcul suivant : 6315 ÷ 3. Plusieurs ont répondu 215. Dans ce calcul, les étudiants traitent chacun des chiffres qui composent le dividende comme des éléments isolés (perte de la valeur de position) :

> Combien de fois 3 entre dans 6 ? 2 ; combien de fois 3 entre dans 3 ? 1 fois ; combien de fois 3 entre dans 1 ? Je ne peux pas le faire donc je n'écris rien à la réponse et j'abaisse le prochain chiffre ; combien de fois 3 entre dans 15 ? 5 fois ; donc ma réponse est 215.

Il s'agit d'un truc qui fonctionne pourvu que les chiffres du dividende soient plus grands que le diviseur. Ainsi, nous pouvons indiquer au moins un groupement à chacune des positions du quotient[13]. Une fois de plus, nous observons que le truc mathématique fait partie des pratiques

[13] La consigne était de faire ce calcul par écrit, mais la réponse aurait probablement été tout autre si la consigne avait été de faire le calcul mentalement. Le truc qu'ils ont appris s'applique principalement pour le calcul écrit.

mathématiques de ces futurs enseignants, mais que la compréhension mathématique sous-jacente est absente[14].

Le deuxième exemple, tiré d'une expérience de classe universitaire en formation mathématique fait référence à l'addition de fractions : un calcul est fait au tableau par le professeur, mais ses actions sont dictées par les étudiants. La classe lui indique de mettre au même dénominateur les deux fractions pour ensuite les additionner. Lorsque le professeur écrit la réponse, un étudiant lui fait remarquer qu'il a oublié d'additionner les dénominateurs ensemble et il insiste à deux reprises pour que le professeur applique cette addition. Ainsi, nous observons que cet étudiant connaît bien le truc mathématique pour effectuer une addition de fraction, soit de trouver un dénominateur commun, mais il semble le confondre avec le truc mathématique sur la multiplication des fractions, en demandant d'opérer sur les dénominateurs. Le fait qu'il insiste indique une certaine assurance dans l'application de ce truc et une absence de réflexion mathématique sur l'opération réalisée au tableau. Ce dernier exemple révèle ainsi les interférences entre différents trucs mathématiques utilisés par cet étudiant et le peu de sens accordé à leur exploitation.

Ces divers exemples nous mènent à un questionnement plus global sur la formation mathématique de ces futurs enseignants: comment réinvestiront-ils ces trucs mathématiques dans leur pratique d'enseignement ? Valoriseront-ils le truc mathématique dans leur enseignement au détriment du raisonnement mathématique sous-jacent ? Certains ont montré une incompréhension dans l'exploitation technique de ces trucs, est-ce le cas pour la majorité des étudiants ou est-ce des cas isolés ?

IV. ACTIVITE DIDACTIQUE ÉLABOREE AUTOUR DES TRUCS MATHÉMATIQUES

1. Origine

Notre réflexion autour de cette pratique de l'exploitation technique des trucs mathématiques, plus ou moins contrôlée par les étudiants, nous a conduits à identifier certains trucs auxquels ils référaient lors des activités du cours de didactique. Ces trucs sont devenus, pour l'équipe de formateurs, une source de stimulation pour remettre à l'avant-plan les raisonnements sous-jacents à ces derniers. Une pré-expérimentation de l'exploitation de ces trucs en formation initiale a été réalisée lors d'un atelier au colloque en enseignement au Québec[15]. Nous avons sélectionné une vingtaine de trucs mathématiques et avons demandé aux étudiants, venant de diverses universités québécoises, de donner du sens à ceux-ci. Par le biais de cette activité, nous avons validé la reconnaissance de ces trucs dans les pratiques mathématiques des étudiants présents, leur difficulté à les expliquer en ayant recourt aux concepts mathématiques et, par conséquent, nous avons mis en évidence la non-spécificité de ces difficultés aux étudiants de notre université ; il s'agit d'une problématique plus globale de la formation mathématique des futurs maîtres du primaire.

[14] Les exemples décrits en annexe 1 illustrent également ce manque de contrôle mathématique en lien avec la division lors de la passation de l'examen de culture et de compétences en mathématiques.

[15] Le colloque en enseignement au Québec est une activité organisée par les étudiants inscrits au baccalauréat en éducation dans les universités du Québec.

2. Contexte d'expérimentation

Nous avons proposé, aux étudiants de troisième année du BEBEP, une activité didactique en lien avec ces trucs mathématiques. Ils devaient fournir des explications mathématiques à ceux-ci. Nous avons choisi ce groupe d'étudiants parce qu'ils étaient à leur troisième cours de didactique des mathématiques. Ainsi, ils avaient fait des analyses d'activités mathématiques et travaillé les concepts et les processus mathématiques des trois cycles du primaire dans leurs cours de didactique. Afin de faire travailler les étudiants sur divers trucs mathématiques, chaque sous-groupe a travaillé sur quatre trucs différents (voir l'annexe 2 pour des exemples de trucs exploités ici).

Nous avons ainsi réalisé cette activité auprès de six groupes d'étudiants sur une période de deux ans. Les consignes données étaient les suivantes :

> Voici quelques trucs mathématiques véhiculés en classe.
> 1) Faites ressortir les contenus mathématiques qui sous-tendent ces trucs mathématiques.
> 2) Identifiez les contenus mathématiques en vous référant à des propriétés mathématiques connues.
> 3) Quels sens donnez-vous à ces trucs ?
> 4) Quelles sont leur (s) utilité (s) ?
> 5) Sont-ils bénéfiques pour votre enseignement et pour l'apprentissage des élèves ? Justifiez vos réponses.

Ce travail a mené à la création de situations pour les élèves du primaire dans le cadre du cours de didactique, mais dans cet article nous nous centrons sur le volet mathématique de cette tâche.

3. Description et analyse des explications des étudiants en formation des maîtres

Dans cette partie, nous ne prendrons qu'un seul des groupes pour illustrer le type d'explications produites par les étudiants. Par conséquent, des exemples d'explications seront exposés pour les trucs mathématiques 1, 6, 11 et 16 dans le tableau 2[16].

[16] Les explications présentées dans ce tableau sont celles formulées par les étudiants à l'écrit. Les propos sont rapportés tels quels. Il en est de même pour les figures présentées dans les pages suivantes.

TRUC MATHÉMATIQUE 1	
Explication A	Dans la multiplication des nombres naturels, lorsque nous sommes rendus à multiplier au niveau des dizaines du multiplicateur, on indiquera d'un zéro ou d'un tiret le changement de classe d'unités (diz. = 1 zéro, cent.= 2 zéros, mil. = 3 zéros, etc.)
Explication B	Dans une multiplication de nombres naturels, nous indiquons un zéro ou un tiret lorsque nous changeons de lignes, car dans la première ligne nous commençons par multiplier les unités du multiplicateur. Il est donc normal d'écrit le produit sous les unités. Lorsque nous changeons de ligne, on se trouve à multiplier les dizaines de ce même nombre. On doit donc indiquer le premier produit de cette opération sous la colonne des dizaines. Le zéro agit ici comme élément neutre dans la somme des deux produits. C'est en fait un moyen de ne pas confondre les dizaines et les unités dans le produit. Exemple, (378 x45) : on commence par multiplier 5 du multiplicateur avec chaque chiffre du multipliant, puis on change de ligne pour refaire les mêmes opérations, mais cette fois si avec le 4 qui représente 40 unités.
Explication C	Dans une multiplication de nombres naturels, lorsque l'on passe d'un unité à un autre, par exemple de l'unité à la dizaine, on indique un zéro à la position de l'unité et on commence à calculer à la position des dizaines. Il faut décaler, car si on multiplie des dizaines avec des unités, ça donne des dizaines et non des unités. Ex. 1 2 3 → unités x 12 dizaine ↑ dizaine x unité = dizaine 10 1 = 10
TRUC MATHÉMATIQUE 6	
Explication D	Un moins fois un moins donne un plus, car le fait de multiplier par un négatif à comme effet de faire passer un nombre à son opposé. Donc si le premier nombre est négatif, son opposé est donc un positif. Il est donc normal que le résultat de la multiplication soit positif.
Explication E	Afin de fournir une explication claire du fait que la multiplication d'un nombre négatif avec un autre nombre négatif donne comme résultat un positif, on peut utiliser le modèle du postier. On leur explique que le postier viendra chercher x fois le courrier, ce qui correspond à –x. De plus, s'il vient chercher y compte (-y) à chaque fois, on verra la formule (-x)*(-y) apparaître. On peut alors expliquer le résultat positif en leur disant qu'étant donné que le facteur est venu chercher des comptes nous aurons plus d'argent et alors, le résultat sera positif.
Explication F	Pour multiplier deux nombres, on multiplie les distances à partir de zéro et on applique la règle des signes : -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 Le produit de deux nombres de signes négatif est toujours positif : Ex. : (-3)*(-4) = 12
TRUC MATHÉMATIQUE 11	
Explication G	Je ne sais pas du tout comment verbaliser ce problème.
TRUC MATHÉMATIQUE 16	
Explication H	Pour calculer le volume d'une pyramide ou d'un cône, on doit multiplier l'aire de sa base par le tiers de sa hauteur, donc la formule est : $\frac{\text{Aire de la base* hauteur}}{3}$
Explication I	Lorsque l'on veut trouvé le volume d'une pyramide ou d'un cône, on commence par trouver l'aire de la base et on multiplie par la hauteur de celui-ci. La particularité de la pyramide et du cône est que par la suite l'on doit divisé le tout par trois. On fait cela car dans le cas de la pyramide, l'aire de la base fois la hauteur, nous obtenons le volume d'une cube et que dans ce cube on peut entrer trois fois cette même pyramide. Celle-ci représente donc le 1/3 du cube. Le cas du cône est semblable mais cette fois si l'aire de la base fois la hauteur nous donne un cylindre qui est trois fois plus grand que le cône lui-même. Cette explication ce démontre très bien à l'aide de matériel.

Tableau 2 *– Exemples d'explications données par les étudiants pour les trucs 1, 6, 11, et 16.*

Ces neuf exemples d'explications fournies par les étudiants démontrent la variété du traitement de ces trucs. D'ailleurs, en observant l'ensemble des productions, nous avons remarqué qu'il y avait des similarités dans la manière dont ils abordaient ces explications. Des regroupements ont ainsi émergé, caractérisant la nature des explications fournies par les futurs enseignants. Cette liste n'est pas exhaustive, mais elle donne un portrait de ces similarités. Nous y retrouvons huit catégories :

1. Aucune explication ou reprise de la formulation du truc mathématique
2. Cercle vicieux
3. Explication incomplète
4. Explication par analogie ou par contextualisation (sans logique mathématique)
5. Explication à l'aide d'un ou quelques exemples

6. Explication par illustration (correcte ou non)
7. Explication mathématiquement adéquate sans lien avec le truc
8. Explication par une autre propriété

Afin de bien comprendre cette catégorisation, nous donnons dans ce qui suit, des exemples de productions illustrant chacune d'elles. Il faut noter qu'une explication peut reprendre des éléments de différentes catégories, ainsi cette catégorisation n'est pas exclusive.

Dans leur explication, plusieurs étudiants n'apportent aucun éclaircissement ou encore reprennent la verbalisation employée pour l'énonciation du truc mathématique. Les explications A, G et H du tableau 2 sont de bons exemples de cette première catégorie. En effet, ces étudiants semblent être devant un obstacle et ne savent pas comment interpréter le truc ou encore, ils ne font qu'une reformulation du truc sans y apporter d'explication mathématique.

D'autres étudiants tombent dans un cercle vicieux. Ils expliquent le truc mathématique en rappelant le même ou un autre truc, ce qui caractérise la deuxième catégorie d'explications. La figure 3 présente un exemple de ce type d'explication pour traiter du truc 4 (annexe 2).

Prenons par exemple l'opération suivante ($\frac{2}{5} \times \frac{12}{8}$). On peut représenter la fraction $\frac{12}{8}$ comme étant en fait ($12 \times \frac{1}{8}$). De ce fait, on peut donc dire que l'on a comme opération : ($\frac{2}{5} \times 12 \times \frac{1}{8}$) donc ($\frac{2 \times 12}{5} \times \frac{1}{8}$). On peut donc bien voir que les numérateurs sont ainsi multipliés ensemble dans l'opération de la multiplication de fractions. Dans la dernière équation, on remarque la fraction $\frac{1}{8}$ qui doit être multipliée. On sait que multiplier par $\frac{1}{x}$ revient à dire que l'on divise par x (ici, on divise donc par 8). On peut donc ainsi dire que l'on doit multiplier le dénominateur 5 avec le dénominateur 8 ($\frac{2 \times 12}{5 \times 8}$) car on doit diviser par 5 et ensuite diviser par 8 dans l'équation. Voilà pourquoi nous disons simplement qu'il faut multiplier les numérateurs ensemble et les dénominateurs ensemble ($\frac{a \times c}{b \times d}$).

***Figure 3** – Exemple d'explication représentant un cercle vicieux*

Un autre groupe d'étudiants fournissent des explications mathématiques incomplètes. Les explications C et I du tableau 2 illustrent bien cette troisième catégorie. Les étudiants amorcent une explication qui donne du sens au truc mathématique, mais celle-ci n'est pas complétée ou n'est pas approfondie. Par exemple, dans l'explication I, nous observons un début d'explication justifiant la division par trois dans la formule du volume de la pyramide, mais celle-ci n'est pas menée à terme ; plusieurs éléments y demeurent implicites.

D'autres étudiants ont également recours à l'analogie ou à la mise en contexte des trucs mathématiques. Leur raisonnement ne repose pas sur les concepts mathématiques sous-jacents au truc, mais davantage sur une comparaison référant à des concepts externes aux mathématiques. L'explication E du tableau 2, avec le modèle du postier[17] pour illustrer la règle des signes, s'avère un bon exemple de cette quatrième catégorie.

Un autre type d'explication très répandu chez les étudiants, soit la cinquième catégorie, est le recours à un ou des exemples spécifiques de l'application du truc comme support à son explication. Nous retrouvons cette pratique dans les explications B, C et F du tableau 2.

D'autres étudiants exploitent l'illustration pour expliquer les trucs mathématiques. L'explication F du tableau 2 est un exemple de cette sixième catégorie. Elle réfère à la droite numérique pour expliquer la règle des signes. Dans ce cas, l'illustration est juste, mais dans d'autres cas, l'illustration choisie peut mener à une explication erronée, ne pas convenir mathématiquement à l'explication recherchée ou encore revenir à l'illustration d'un exemple spécifique comme le montre l'exemple suivant à la figure 4.

> Pour démontrer pourquoi nous devons multiplier les dénominateurs ensemble et les numérateurs ensemble lors des multiplications de fractions, il est important d'utiliser du matériel concret. Il faut aussi mentionner que le $\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{4}$ est la même chose que si on faisait $\frac{1}{4}$ fois $\frac{3}{4}$. Pour le démontrer à l'aide de matériel, on peut commencer par diviser une bande en 4 et colorer 3 des 4 carrés. Ensuite, on divise ces 4 carrés en 2, ce qui en fait 8 en tout et 6 colorés. Donc, la moitié de $\frac{3}{4}$ équivaut à $\frac{3}{8}$. Il faut aussi expliquer aux jeunes que lorsque nous avons une fraction multipliée par un nombre entier, nous devons mettre le nombre entier sur 1. Par exemple, si nous avons $\frac{3}{4}$ x 4, nous remplaçons cette opération par $\frac{3}{4}$ x 4/1, ce qui est équivalent.

Figure 4 *– Exemple d'explication par illustration*

Il arrive aussi que des étudiants démontrent une certaine maîtrise des concepts mathématiques sous-jacents aux trucs mathématiques, mais ils ne réalisent pas, de manière explicite, le lien entre ces connaissances et le truc qu'ils doivent expliquer. Les deux exemples de la figure 5 illustrent bien la septième catégorie d'explications :

[17] Pour en savoir plus sur le modèle du postier de Robert B. Davis : Hatfield, M, Tanner Edwards N. et Bitter, G., G. (1997). *Mathematics methods for elementary and middle school teachers.* Allyn and Bacon: Boston.

Pour ce qui est de ce concept mathématique des fractions, il n'est pas de toute évidence de comprendre comment fonctionne une division. La division de nombres se fait toujours de la même façon avec les mêmes procédures à l'exception des nombres fractionnaires. C'est très différent les procédures qu'il faut savoir pour pouvoir parvenir à la réponse exacte. La division de nombres fractionnaires est très particulière à comprendre. « Pour diviser des fractions, nous multiplions la première par l'inverse de la deuxième. » Il suffit seulement d'inverser la deuxième fraction et d'en faire la multiplication des numérateurs ensemble et des dénominateurs ensemble également pour arriver à la bonne réponse. Une bonne façon de procéder est de faire la vérification des numérateurs et des dénominateurs s'ils ne sont pas divisibles par le même chiffre avant de procéder à la multiplication de l'inversion. Si les numérateurs et les dénominateurs sont divisibles entre eux, il suffira de les diviser sans passer par la multiplication.

Exemple : $\frac{75}{28} \div \frac{25}{7} = \frac{75 \div 25}{28 \div 7} = \frac{3}{4}$

C'est une situation qui est beaucoup moins fréquente, alors il est nécessaire de savoir la technique de multiplication de l'inverse pour effectuer la division des fractions. Enfin bien que complexes elles soient, ces règles sont importantes à savoir pour pouvoir réussir à diviser des fractions de la bonne façon.

Le produit croisé permet de trouver une égalité, de faire des fractions équivalentes, de trouver un rapport. Ainsi, en faisant le produit croisé de : $\frac{5}{6} = \frac{15}{x}$ $\frac{5}{6} = \frac{15}{18}$

Ainsi, on multiplie ensemble le dénominateur de la première fraction avec le numérateur de la deuxième et on divise le tout par le numérateur de la première. On trouve le résultat 18. Et si on vérifie l'équivalence :

6 x 15 = 90 et 5 x 18 = 90, mais aussi $\frac{5}{6} = 0{,}8\overline{3}$ et $\frac{15}{18} = 0{,}8\overline{3}$.

***Figure 5** – Exemple d'explication mathématiquement adéquate sans lien avec le truc*

Enfin, la dernière catégorie regroupe les explications qui se basent sur des propriétés mathématiques connexes aux trucs mathématiques, mais qui n'expliquent en rien le truc en question. Parfois même, nous sommes dans un cercle vicieux (la deuxième catégorie) ou encore une impasse. La figure 6 en présente deux exemples.

Nous utilisons souvent l'égalité suivante : $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$. Pourquoi?

Pour mieux comprendre, remplaçons la variable par un nombre où a = 10 alors

$10^{-3} = 0{,}001 = \frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3}$

Comme a^{-3} peut aussi s'écrire sous forme d'un rapport : $\frac{a^{-3}}{1} = \frac{1}{a^3}$, on obtient une proportion.

Dans une proportion, le produit des extrêmes égale le produit des moyens.

$\frac{a^{-3}}{1} = \frac{1}{a^3}$ $\quad a^{-3} \times a^3 = 1 \times 1$

$a^0 = 1$ vrai

Un nombre multiplié par son inverse donne 1 (axiome de la multiplication).

Nous avons l'expression : $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$. Pourquoi cette égalité existe-t-elle?

Alors, nous savons que tout nombre a un inverse. Par exemple, l'inverse de 2 est ½. Avec les exposants, il est possible d'écrire l'inverse en utilisant le signe « - ». L'inverse de a^3 est donc a^{-3}. Par contre, nous savons qu'il existe une autre façon d'écrire l'inverse de a^3, soit $1/a^3$. Ces deux expressions sont donc équivalentes.

***Figure 6** – Exemples d'explication par une autre propriété*

Dans cette même catégorie, nous retrouvons des explications qui réfèrent de façon moins centrale à d'autres propriétés mathématiques plus ou moins cohérentes avec le truc à expliquer. Par exemple, nous retrouvons le concept d'élément neutre et de l'opposé d'un nombre dans les explications B et D du tableau 2.

4. *Résultats de l'analyse*

Nous avons ainsi caractérisé les explications fournies par les étudiants selon leur nature afin de mieux les comprendre, mais globalement nous remarquons que peu d'étudiants, même à leur troisième année de formation initiale, sont en mesure de fournir des explications mathématiquement appuyées pour des concepts qu'ils auront à traiter dans leur pratique future d'enseignement. Nous devons, par conséquent, alimenter nos interventions en ce sens en tant que formateurs des maîtres, afin d'élargir leur champ conceptuel et, par ricochet, leurs moyens d'intervention en classe de mathématiques au primaire.

Les analyses de l'ensemble des explications montrent bien la nécessité d'une coordination des informations ostensives et désignatives des nombres impliqués dans les trucs qui traitent des opérations en vue de donner du sens aux opérations et aux relations entre les nombres (Lemoyne, Conne et Brun 1993, p. 345). Les cercles vicieux observés dans certaines explications (catégorie 2) sont un exemple de la non-coordination de ces informations. Ces analyses montrent aussi chez l'étudiant, un rapport mathématique aux écritures plutôt limité, qu'il importe de développer pour qu'ils puissent à leur tour agir ainsi avec les élèves. L'économie et l'efficience en mathématiques dépendent d'un travail sur les nombres, propriétés des opérations, régularités, etc., du moins pour l'arithmétique et l'algèbre.

Ainsi, dans notre pratique de formateur, l'activité didactique élaborée sur les trucs mathématiques nous apparaît pertinente, car elle provoque des questionnements et réflexions qui contribuent au développement des compétences mathématiques et didactiques chez les étudiants.

V. CONCLUSION

En guise de conclusion, nous synthétisons notre réflexion selon deux perspectives centrales à l'article soit l'importance de l'articulation entre les trois volets du dispositif de formation élaboré à l'UQAR et l'apport spécifique des trucs mathématiques comme porte d'entrée dans cet arrimage.

1. L'articulation du travail sur les trucs mathématiques en lien avec le dispositif de formation mathématique

Les diverses activités de ce dispositif visant la formation mathématique des étudiants ont mis en évidence une pratique courante, soit le recours aux trucs mathématiques. La formation didactique faisant partie intégrante du dit dispositif, le travail demandé aux étudiants sur les trucs mathématiques vient ainsi nourrir celui déjà en place, améliorant leurs compétences mathématiques et didactiques. Mais des questions demeurent entières: les étudiants auront-ils une progression plus rapide dans l'acquisition des connaissances et compétences mathématiques lors de leur formation ? Quels impacts cet ajout au dispositif aura-t-il sur les pratiques futures ? Le suivi des cohortes aux différentes activités du dispositif nous permettra d'en vérifier les impacts.

2. La réflexion de cette porte d'entrée pour la formation initiale[18]

En formation, certains étudiants se présentent avec la perception que nous allons leur transmettre des « recettes » qu'ils appliqueront en classe sans saisir la portée mathématique de ces dernières. L'activité sur les trucs mathématiques permet de faire un travail didactique et mathématique en vue de cerner leur pertinence mathématique et par conséquent, d'aller bien au-delà des recettes. Ce travail impose sans aucun doute une centration sur les contenus mathématiques et permet de leur donner plus de sens. En formation initiale, c'est l'occasion d'élargir la vision mathématique des étudiants et d'enrichir leur culture mathématique. Ainsi pour les formateurs, l'activité sur les trucs mathématiques peut être intégrée à des ateliers de jeux de rôles[19] et des situations de verbalisations en classe favorisant une confrontation des différentes postures épistémologiques du futur maître, en tant qu'apprenant des mathématiques, qu'enseignant des mathématiques et qu'étudiant universitaire (Squalli, 2012).

L'exploitation des trucs mathématiques dans la formation didactique favorise également chez le futur maître l'apprentissage d'interventions auprès des élèves qui développent, par eux-mêmes, divers trucs mathématiques adéquats ou non. Notre intention didactique en formation n'est pas de traiter tous les trucs qui existent, car nous pouvons en générer à l'infini, mais plutôt de

[18] Ici, nous nous centrons sur la formation initiale, mais nous croyons que cette discussion pourrait être également vraie pour la formation continue des enseignants.

[19] Voir Chamberland et Provost 1996, Lajoie et Pallascio, 2001 et Lajoie 2010.

développer les compétences des futurs enseignants à chercher et trouver le raisonnement sous-jacent au truc ainsi qu'à valoriser ce type d'approche en classe.[20]

Cet article n'avait pas comme visée d'éliminer les trucs mathématiques des pratiques mathématiques des futurs maîtres, mais plutôt de montrer comment le travail sur ces derniers peut être riche si l'accent est mis sur les raisonnements mathématiques sous-jacents et non à leur simple application comme technique. Le travail proposé aux futurs maîtres sur les trucs mathématiques se justifie donc aisément et vient soutenir chacun des volets du dispositif de formation à l'enseignement des mathématiques. Ainsi, nous croyons que l'interaction entre tous les éléments du dispositif de formation contribue grandement au développement des compétences mathématiques et didactiques des étudiants. Toutefois, d'autres pistes de réflexion peuvent être soulevées. En effet, nous pouvons questionner le rôle d'une telle porte d'entrée dans la formation continue, dans une optique de développement professionnel ; la spécificité des trucs appartenant aux élèves et à l'enseignant (est-ce les mêmes ? ont-ils le même but ?...) ; enfin, nous pouvons également questionner la réflexion didactique sur les trucs en eux-mêmes, mais aussi sur la possibilité de nouvelles portes d'entrée valorisant un arrimage des trois volets du dispositif de formation.

RÉFÉRENCES

Adihou A., Arsenault C. (2012) Dispositif de formation mathématique pour les enseignants du primaire : choix, caractéristiques, résultats et impacts. In Corriveau C., Proulx J., Squalli H. (Eds.) (pp. 225-253) *Formation mathématique des enseignants de mathématiques: pratiques, orientation et recherches*. Québec : Presses de l'Université du Québec.

Adihou A., Marchand P. (2010) Trucs mathématiques. *Bulletin de l'association mathématique du Québec (AMQ)* 50(3), 37-51.

Adihou A., Arsenault C., Marchand P. (2006) Réflexion sur un dispositif de formation pour le développement de compétences en mathématiques chez les futurs maîtres. In Bednarz N., Mary C. (Eds.) (pp. 1-11) *Acte du 3e colloque international Espace mathématique francophone, « L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés ».* [Cédérom]. Sherbrooke : Éditions du CRP.

Arsenault C. (2010) Le spectre de la maîtresse d'école : conceptions et résistances au développement des compétences professionnelles des enseignants en mathématiques, In Proulx J., Gattuso L. (Eds.) (pp. 121-124) *Formation des enseignants en mathématiques: tendances et perspectives actuelles*. Sherbrooke : Éditions du CRP.

Chamberland G., Provost G. (1996) *Jeu, simulation et jeu de rôle*. Sainte-Foy : Les Presses de l'Université du Québec.

Kamii C. (2001) Une arithmétique à l'école primaire basée sur le constructivisme de Piaget. *Proceedings of the conference on constructivisms: Uses and perspectives in education*, 157-167. Genève : Service de la Recherche en Éducation, Département de l'Instruction Publique, République et Canton de Genève.

Lajoie C. (2010) Les jeux de rôles : une place de choix dans la formation des maîtres du primaire en mathématiques à l'UQAM. In Proulx J., Gattuso L. (Eds.) (pp. 101-113). *Formation des*

[20] En formation continue, nous pouvons nous appuyer sur les pratiques enseignantes, ainsi que sur des cas d'élèves qui utilisent des trucs mathématiques afin d'outiller les enseignants pour intervenir auprès de ces élèves.

enseignants en mathématiques : tendances et perspectives actuelles Sherbrooke : Éditions du CRP.

Lajoie C., Pallascio R. (2001) Le jeu de rôle : une situation-problème en didactique des mathématiques pour le développement de compétences professionnelles. In Portugais J. (Ed.) (pp. 120-132) *Actes du colloque des didacticiens et des didacticiennes des mathématiques (GDM)*. Montréal : Université de Montréal.

Lemoyne G., Conne F., Brun J. (1993) Du traitement des formes à celui des contenus d'écritures littérales: une perspective d'enseignement introductif de l'algèbre. *Recherches en didactique des mathématiques* 13(3), 333-384.

Loock M.-F. (2006) *L'encyclopédie des trucs - Des milliers d'astuces de A à Z.* Paris : Édition J'ai lu, Vie quotidienne.

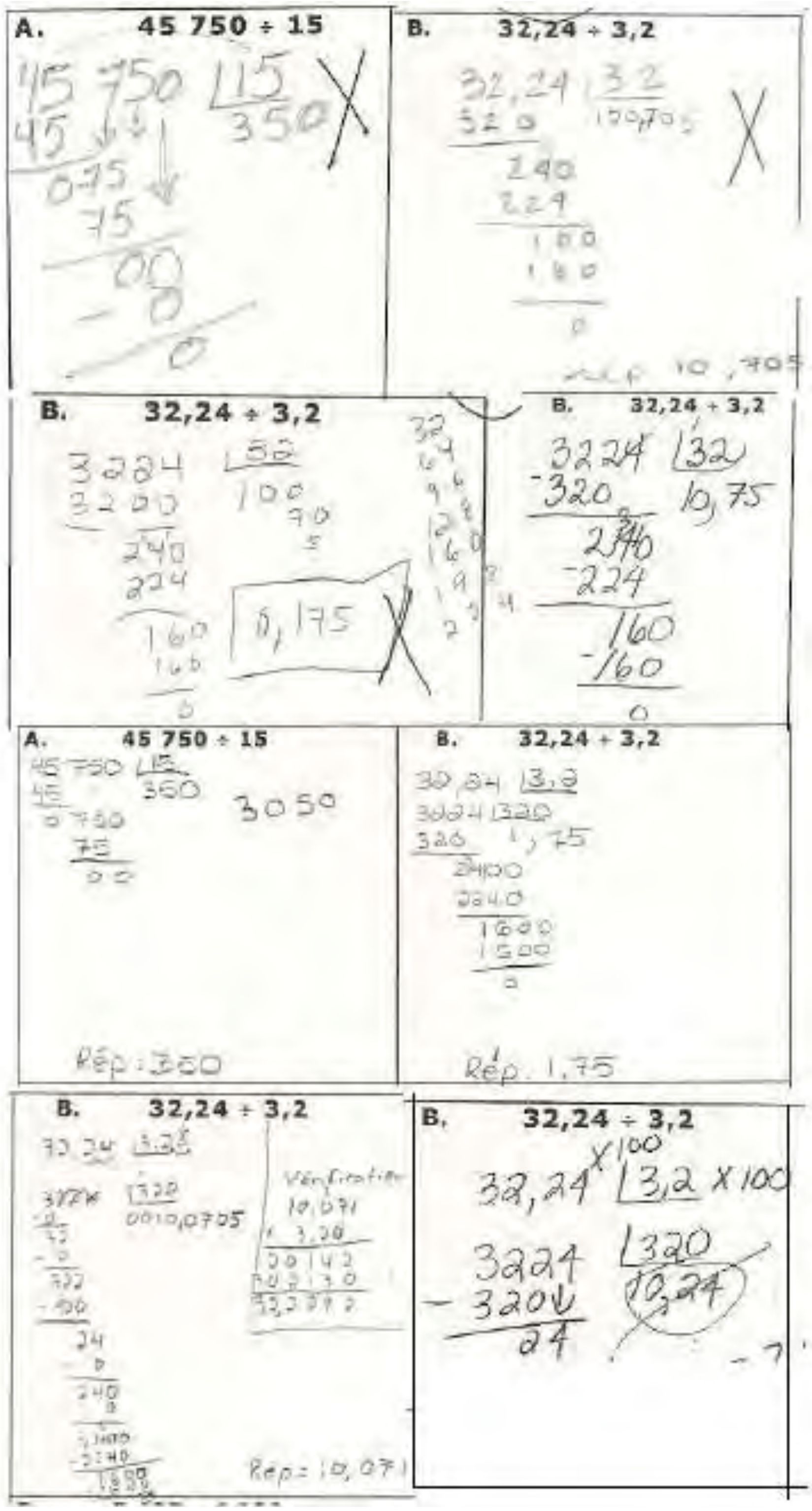
Marchand P. (2010) Quelle formation mathématique en formation des maîtres au primaire et en adaptation scolaire et sociale. In Proulx J., Gattuso L. (Eds.) (pp. 11-30) *Formation des enseignants en mathématiques : tendances et perspectives actuelles*. Sherbrooke : Éditions du CRP.

Martinet M. A., Raymond D., Gauthier C. (2001) *La formation à l'enseignement. Les orientations. Les compétences professionnelles.* Québec : Gouvernement du Québec, ministère de l'Éducation.

Squalli H. (2012) Quelle articulation entre formation mathématique et formation à l'enseignement des mathématiques? Essai d'analyse et point de vue d'un didacticien des mathématiques. In Corriveau C., Proulx J., Squalli H. (Eds.) (pp. 143-157) *Formation mathématique des enseignants de mathématiques : pratiques, orientation et recherches*. Québec : Presses de l'Université du Québec.

ANNEXE 1

Conduites d'étudiants manifestant l'exploitation de trucs mathématiques pour la division lors de l'examen de culture et de compétences en mathématiques



ANNEXE 2

Exemples trucs mathématiques présentés lors de l'atelier de formation

Truc mathématique 1
Dans une multiplication de nombres naturels, nous indiquons un zéro ou un tiret lorsque nous changeons de lignes :

Truc mathématique 2
Lorsque nous multiplions deux nombres décimaux ayant une partie entière et une partie fractionnaire, nous enlevons les virgules pour faire la multiplication et nous la replaçons dans la réponse en fonction du nombre de décimales total, par exemple si le premier nombre avait 2 décimales et le deuxième 3 décimales, nous n'avons qu'à « tasser » la virgule pour avoir 5 décimales.

Truc mathématique 3
Lorsque nous divisons deux nombres décimaux ayant une partie entière et une partie fractionnaire, nous enlevons la virgule au diviseur et nous décalons la virgule du dividende ou nous enlevons les virgules aux deux nombres et nous ajoutons des zéros au besoin au dividende. Par exemple : $2{,}3 \div 4{,}56 \Leftrightarrow 230 \div 456$. *Nous le faisons pour que le diviseur soit un nombre entier. Ensuite nous réalisons la division avec ces nombres.*

Truc mathématique 4
Pour multiplier deux fractions, nous multiplions les numérateurs ensemble et les dénominateurs ensemble.

Truc mathématique 5
Pour diviser des fractions, nous multiplions la première par l'inverse de la deuxième.

Truc mathématique 6
Un moins (-) fois un moins (-) donne un plus (+)

Truc mathématique 7
Pour trouver x dans l'expression suivante, nous faisons un produit croisé ou la règle de trois : $\frac{5}{6} = \frac{15}{x}$ *(15 x 6 ÷ 5)*

Truc mathématique 8
Nous utilisons souvent l'égalité suivante : $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$ *, pourquoi ?*

Truc mathématique 9
Un nombre est divisible par 3 ou par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 3. Par exemple, 24492 est divisible par 3, car 2+4+4+9+2 = 21 est divisible par 3 et 624492 est divisible par 9 et 3 car 6+2+4+4+9+2 = 27 est divisible par 9 et 3.

Truc mathématique 10
Un nombre est divisible par 4 si les deux derniers chiffres du nombre forment un nombre divisible par 4. Par exemple, 332449284 est divisible par 4, car 84 est divisible par 4

Truc mathématique 11
Un nombre est divisible par 11 si la différence entre la somme des chiffres des positions paires et la somme des chiffres des positions impaires est divisible par 11. Par exemple, 45981914 est divisible par 11, car (5+8+9+4) – (4+9+1+1) = 11 et 11 est divisible par 11.

Truc mathématique 12
Soit le trapèze suivant dont la petite base est b et la grande base B. Pourquoi la formule de l'aire du trapèze est
$AIRE_{Tràpèze} = (B+b) \times \frac{h}{2} = \frac{(B+b)}{2} \times h$.

Truc mathématique 13
De m (mètre) à dm (décimètre) nous multiplions par 10, de m^2 *à* dm^2 *nous multiplions par 100, de* m^3 *à* dm^3 *nous multiplions par 1000.*

Truc mathématique 14
L'aire du losange = $\frac{Dxd}{2}$

Truc mathématique 15
La somme des mesures des angles intérieurs d'un polygone à n côté = $(n-2)x180^o$

Truc mathématique 16
Le volume d'une pyramide ou du cône = $\frac{Aire.de.la.base \times hauteur}{3}$

Truc mathématique 17
La circonférence du cercle = $2\Pi R$

Truc mathématique 18
L'aire du disque = ΠR^2

FORMATION DES ENSEIGNANTS DU PRÉSCOLAIRE IVOIRIEN ET PRATIQUES ENSEIGNANTES RELATIVES À LA CONCEPTION DES PROJETS D'ENSEIGNEMENT

Une étude de cas sur l'activité de perception de la couleur jaune dans trois classes de petite section

Kouadio Yeboua Germain ATTA* – Koffi Pierre KOUAME*

Résumé – Notre étude dont la problématique a plusieurs sources prend son ancrage théorique et conceptuel autour des notions de constructivisme, de socioconstructivisme, de transposition didactique, des pratiques enseignantes, des objectifs pédagogiques et de consignes. Elle a été menée à partir d'un questionnaire et d'une grille d'analyse de trois projets d'enseignement sur la perception de la couleur jaune en petite section. Les résultats montrent que la formation initiale incomplète des enseignants est la principale source des difficultés et des insuffisances constatées dans la conception desdits projets.

Mots-clefs : Formation, Pratiques enseignantes, Projet d'enseignement, Objectif pédagogique, Consigne

Abstract – Our study whose problems have many sources takes its theoretical and conceptual anchoring around the concepts of constructivism, socioconstructivism, didactic transposition, the teaching practices, the teaching objectives and instruction. It was carried out starting from a questionnaire and of a grid of analysis of three projects of teaching on the perception of the yellow color in small section. The results show that the incomplete initial formation of teaching is the principal source of the difficulties and the insufficiencies noted in the design of the aforesaid projects.

Keywords: Formation, teaching Practices, Project of teaching, teaching Objectives, instruction

I. INTRODUCTION

Toute institution scolaire se distingue par son système de formation dont les contours sont dictés par plusieurs facteurs. Le niveau de base est le préscolaire dont les composantes sont les petite, moyenne et grande sections. L'âge des élèves de ce cycle varie entre trois et cinq ans et ces derniers évoluent dans un système de prise en charge psycho- didactique particulière. De ce fait, les enseignants doivent être bien formés et bien « outillés » pour développer des pratiques enseignantes adaptées et efficaces. Dans ces conditions, quelle problématique didactique peut-on relever à travers la conception des projets d'enseignement relatifs aux activités de perception en petite section au préscolaire ? Quel est l'impact de cette problématique sur la conception de ces projets d'enseignement ?

II. PROBLEMATIQUE

La problématique de notre étude prend forme sous quatre principaux angles.

1. *Le préscolaire ivoirien, une institution qui tarde à décoller*

Depuis son indépendance, l'état ivoirien a fait beaucoup d'efforts pour développer son système éducatif. Malgré les bonnes intentions affichées à travers les multiples reformes, le système a évolué pendant longtemps avec une institution préscolaire aux contours flous. Ce n'est qu'à partir de l'an 2000 que le gouvernement ivoirien, en collaboration avec la

* LAREDI (Laboratoire de Recherche en Didactique) / ENS – Abidjan – RCI – leroi_yeb@yahoo.com , koffipierrekouame@yahoo.fr

© Atta K. Y. G., Kouame K. P. (2012) Formation des enseignants du préscolaire ivoirien et pratiques enseignantes relatives à la conception des projets d'enseignement. Une étude de cas sur l'activité de perception de la couleur jaune dans trois classes de petite section. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT2, pp. 280-291). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

coopération française, a débuté un projet d'écriture de programmes « propres » au préscolaire ivoirien qui a conduit à l'édition d'un manuel dit « guide des programmes » en 2002. Depuis la crise sociopolitique de 2002, toutes les ressources allouées au système éducatif par l'état ivoirien ont baissé et la coopération française a suspendu son soutien. Ce qui a eu pour effet de contrarier la validation des programmes en cours d'écriture. Dans ce contexte flou, l'état a tout de même autorisé leur généralisation sans tenir compte des exigences structurelles, administratives, pédagogiques et didactiques susceptibles de freiner le « décollage » de l'institution préscolaire.

2. *Des curricula insuffisamment modélisés*

Les curricula en mathématiques au préscolaire ivoirien sont configurés autour de trois types d'activités qui sont les activités de logique, de numération et de géométrie dans le guide des programmes. Les activités de logique sont composées des activités de perception (ou de reconnaissance), des tris, des classements, des rangements, des correspondances, de tableaux à double entrées, etc. L'analyse du descriptif des activités de perception ou de reconnaissance à la page 62 du guide des programmes montre qu'aucun exemple n'est donné comme modèle ou illustration pour que les enseignants puissent être « guidés » dans leurs choix didactiques pour concevoir leurs projets d'enseignement (préparations écrites). Dans ces conditions, cette absence de modèles d'activités à appliquer ou à adapter pourrait être un « facteur limitant » pour les enseignants.

3. *Une formation initiale incomplète des enseignants*

Les enseignants du préscolaire et du primaire en Côte d'Ivoire sont recrutés ensemble par voie de concours sur la base de deux statuts différents. Ceux appelés Instituteurs « Adjoints » sont titulaires du Brevet d'Etudes du Premier Cycle (BEPC) et ceux dits « Ordinaires » sont recrutés avec le Baccalauréat. Ils sont tous formés initialement dans les Centres d'Animation et de Formation Pédagogique (CAFOP). Cette formation se fait en deux phases.

- La première phase (théorique) dure environ vingt-deux semaines ponctuées de deux stages en tutelle de deux semaines chacun.
- La deuxième (pratique) de neuf mois met l'élève- maître (stagiaire) en stage de responsabilité qui consacre sa titularisation à la deuxième année à l'issue d'un examen pratique.

L'analyse des rapports de fin de formation initiale en mathématiques des cinq dernières années d'un CAFOP nous donne les statistiques suivantes :

Années	2006	2007	2008	2009	2010
Taux d'achèvement des programmes de mathématiques (%)	76	82	70	78	72

***Tableau 1** – Statistiques de fin de formation initiale des cinq dernières années*

Ces statistiques montrent que c'est en moyenne 75,6% des curricula en mathématiques qui sont étudiés dans la formation initiale des enseignants du préscolaire. Leur formation initiale reste donc incomplète et insuffisante.

4. Des limites dans la nomenclature des couleurs dans certaines de nos Langues Maternelles

La Côte d'Ivoire est un pays multiethnique (environ soixante ethnies). Aucune d'elles n'est codifiée, ni écrite pour être utilisée comme un outil d'enseignement ou de communication scientifique.

Généralement, celles issues du même grand groupe sont « proches » les unes des autres parce que partageant plusieurs référentiels linguistiques.

Par exemple, les ethnies *Dida, Bété, Godié*, toutes du grand groupe « KROU » (Sud-ouest de la Côte d'Ivoire), utilisent le terme « Ayoka » pour souhaiter la bienvenue.

Les ethnies *Baoulé, Agni, Brong* du grand groupe « AKAN » (Centre et Est de la Côte d'Ivoire), utilisent le terme « Akwaba » pour souhaiter la bienvenue.

Certaines ethnies comme le *Koulango* du grand groupe « GOUR » (Nord-Est de la Côte d'Ivoire) semblent présenter des limites dans la nomenclature des couleurs.

Dans cette dernière ethnie par exemple, les couleurs vives (rouge, orange, jaune) sont toutes assimilées au « rouge ». (Donc pas de distinction formelle entre orange et rouge, entre jaune et rouge). Les couleurs sombres (noire, bleue, grise) sont toutes assimilées au « noir ». (Donc pas de distinction nette entre le bleu et le noir).

Sachant que les classes préscolaires en milieu urbain disposent souvent d'effectifs pluriels (enfants d'ethnies différentes) d'une part, et prenant en compte le fait que certaines de nos langues maternelles présentent des insuffisances linguistico-scientifiques d'autre part, il nous semble pertinent de souligner qu'enseigner la couleur en petite section demande une certaine vigilance dans les choix didactiques pour monter efficacement un projet d'enseignement.

Au total, le préscolaire ivoirien évolue dans un contexte institutionnel et culturel aux contours flous et cet handicap institutionnel et culturel est doublé d'une part d'une absence de modélisation de certaines activités pour servir de « boussole » aux enseignants et d'autre part d'une formation initiale incomplète et insuffisante de ces derniers.

Sachant que les apprenants du préscolaire de par leur âge, leur niveau de raisonnement cognitif, leur développement socio- affectif constituent un public à profil spécifique et particulier, nous pensons que tout enseignant du préscolaire doit être suffisamment outillé dans ses pratiques enseignantes. Dans ce contexte institutionnel, culturel et humain particulier et potentiellement « difficile », les pratiques enseignantes relatives à la conception des projets d'enseignement deviennent un enjeu didactique dont les contours seront élucidés dans la présente étude.

III. QUESTIONS ET OBJECTIFS DE RECHERCHE

Après la problématique, nous nous posons un certain nombre de questions.

- L'enseignant du préscolaire ivoirien éprouve-t-il des difficultés pour concevoir ses projets d'enseignement en mathématiques ?
- A quels niveaux du projet y a-t-il des insuffisances et des difficultés?
- Quelles sont les sources potentielles de ces difficultés et de ces insuffisances?

A travers ces questions, notre objectif est de rendre lisibles les insuffisances dans les pratiques enseignantes liées à la conception des projets d'enseignement en mathématiques relatives aux activités de perception de la couleur jaune d'une part et de relever et de décrire la nature et les sources des difficultés générées éventuellement par projets d'enseignement mal conçus d'autre part.

IV. HYPOTHESE DE RECHERCHE

La formation incomplète des enseignants ivoiriens du préscolaire génère des insuffisances dans les pratiques relatives à la conception des projets d'enseignement.

V. EXPLICATION DU CADRE THEORIQUE ET NOTIONS D'ANCRAGE

Les éléments théoriques et notionnels qui constituent l'ancrage de notre étude sont le Constructivisme, le Socioconstructivisme, la transposition didactique, les pratiques enseignantes, l'objectif pédagogique et la consigne.

1. Cadres théoriques

1.1 Le Constructivisme selon Piaget (1936, 1979)

Piaget (1979) nous enseigne que les progrès dans la connaissance résultent d'une construction dans laquelle le sujet apprenant est acteur de ses apprentissages en réaction avec le monde extérieur. Pour lui, tout n'est pas donné, mais il faut solliciter vivement l'intelligence de l'apprenant par une organisation d'actions successives et permanentes sur les objets, organisation qui est vue comme le moteur du développement de l'intelligence. Ainsi, par le Constructivisme, l'apprentissage devient un processus de construction de connaissances qui se réalise entre le sujet actif et l'environnement où il évolue. Aussi, Piaget (1936) fait savoir que l'évolution scientifique de la connaissance sous-tend la formation des structures opératoires de l'intelligence dans une perspective croissante et évolutive sous forme de stades opératoires à quatre principaux niveaux qui sont le sensori-moteur, le préopératoire, le concret et le formel. Le stade préopératoire qui couvre la tranche d'âge de deux à sept ans (tranche comprenant l'âge au préscolaire) fait référence à l'intelligence symbolique, au développement du langage, à l'égocentrisme, aux opérations mathématiques logiques telles que la perception, le tri, le classement, le rangement et le dénombrement des petites quantités. Le Constructivisme est donc un ancrage en ce sens que pour mener les activités de perception de la couleur, l'enseignant amène ses élèves à être actifs (par la vue) en prenant en compte leur niveau de développement intellectuel.

1.2 Le Socioconstructivisme selon Vygotski (1998) et Bruner (1983)

Au-delà du Constructivisme qui consacre une relation binaire entre le sujet et les objets, Vygotski (1998) et Bruner (1983) pensent qu'il faut inclure la dimension sociale dans le processus d'enseignement/apprentissage. Ainsi, pour Vygotski (1998), l'enseignement/apprentissage doit être envisagé comme un processus de transmission historico- culturelle des œuvres humaines dans laquelle l'apprenant aura toujours besoin du maître ou d'un autre enfant plus « expert » que lui. Dans cette perspective, Bruner (1983) avance que c'est par le langage que l'apprenant communique avec autrui. Pour ce dernier, toutes les interactions autour de la connaissance doivent se faire à travers des relations dites de « tutelle » entre l'adulte et l'apprenant. Le Socioconstructivisme consacre donc une approche ternaire « individu- activité- autrui ». Le Socioconstructivisme présente un intérêt pour notre étude car l'activité demandée à l'enfant pour la perception de la couleur peut s'organiser en un travail de groupe dans lequel il y a des échanges et des interactions sociales entre les apprenants.

1.3 La transposition didactique selon Chevallard (1985, 1991)

Les enseignantes du préscolaire, à l'instar de tous les autres enseignants doivent concevoir, produire, adapter des savoirs tirés d'un programme officiel lui-même dicté par une orientation politique et un savoir de référence. C'est ce travail d'adaptation, de transformation et de création accompli sur les éléments d'un champ conceptuel en vue d'en favoriser l'assimilation par des systèmes cognitifs d'apprenants que Chevallard (1985) appelle transposition didactique et qu'il hiérarchise autour des savoirs savants, savoirs à enseigner et savoirs enseignés. Dans ce travail de transposition didactique, Chevallard et al. (1991) pensent qu'il est important que l'enseignant fasse des choix qui minimisent les pertes et les déviations conceptuelles qui pourraient créer une « distance » entre ce qui est voulu et programmé et ce qui est enseigné et appris effectivement. La transposition didactique est un point d'appui à notre étude car, dans la perception de la couleur, l'enseignant choisit, adapte ou crée ses activités en tenant compte du vocabulaire à utiliser, des tons des couleurs et du contexte socioculturel des ses élèves.

2. Notions d'ancrage

2.1 Les Pratiques enseignantes selon Altet (2004, 2007), Robert (2008), Bru (1994)

Selon Altet (2007), la pratique enseignante est la manière singulière d'un enseignant, sa façon propre d'exécuter l'activité d'enseignement. C'est la pratique reconnue à la fois des actions, des gestes, des procédures, des choix, des stratégies, des buts et normes du groupe professionnel. Chaque pratique doit être « réfléchie » et non routinière ou empirique. C'est pourquoi, Altet (2004) pense que l'analyse des pratiques est de développer une attitude de questionnement permanent et de réflexion pour faire des choix judicieux et responsables. C'est ce qui fait dire à Robert (2008) que la « professionnalité » de l'enseignant est que son activité a pour objet de transformer les compétences et les connaissances des élèves. Mais, les pratiques enseignantes doivent avoir une dynamique plurielle et non singulière, car comme le souligne Bru (1994), un même enseignant n'a pas un profil immuable, mais plutôt une variété de profils.

2.2 L'objectif pédagogique

L'objectif pédagogique est le but à atteindre que l'enseignant se définit en amont de son enseignement. Dans la construction du savoir, les situations de réussite ou d'échec sont fonction du traitement des objectifs par l'enseignant. C'est pourquoi, Hameline (1979) propose de les définir de manière opérationnelle à travers la présence d'un sujet apprenant, d'un verbe d'action manifeste, des conditions de réalisation et des critères de réussite. Pour tenir compte de ce que l'élève saura ou saura faire Bloom et al. (1969) proposent une taxonomie des objectifs pédagogiques en six niveaux de complexité croissante : connaissance, compréhension, application, analyse, synthèse, évaluation. Malgré quelques reproches, le principe de définition des objectifs pédagogiques reste capital car il représente toujours une ligne de lisibilité potentielle dans la conduite d'une séance.

2.3 La consigne

Selon Zakhartchouk (1999), la consigne est « toute injonction donnée à des élèves à l'école pour effectuer telle ou telle tâche… ». Cette injonction s'apparente à un ordre dont le processus d'exécution détermine l'action et la compétence attendues au niveau de l'élève. Sans consigne, il n'y a donc pas d'activité. Ainsi, la consigne peut être assimilée au « moteur » du processus enseignement/apprentissage car facteur de liaison entre les désirs de l'enseignant et la réaction de l'élève. En conséquence, Nebout (2007) propose d'envisager la problématique de la consigne dans une perspective de savoir- faire professionnel à intégrer dans les pratiques enseignantes. Aussi, l'enseignant doit-il être appliqué dans la formulation de la consigne car selon Archer (2009), une consigne mal formulée peut engendrer des obstacles didactiques.

VI. CADRE METHODOLOGIQUE

1. *Présentation du corpus*

Les documents de base à analyser sont les projets d'enseignement (préparations écrites) organisés sur des fiches de préparation en classe de petite section dans trois classes préscolaires publiques. Chaque fiche se structure en quatre grandes parties que sont :

- l'entête (qui donne les références de la séance) ;
- l'objectif pédagogique (qui précise la compétence à installer à la fin de la séance) ;
- le corps de la fiche ou déroulement (qui donne la démarche méthodologique, les consignes et les stratégies d'enseignement/apprentissage) ;
- l'exercice d'évaluation.

2. *Caractéristiques des enseignantes*

Les enseignantes sollicitées sont au nombre de trois, toutes titulaires. Leurs caractéristiques sont décrites dans le tableau ci-après :

Anonymats des enseignantes (E)	Ecole	Diplôme de base	Statut	Ancienneté
E1	Groupe scolaire Lagune de Koumassi	BEPC	Institutrice Adjointe (IA)	4 ans
E2	Groupe scolaire Gabriel Dadié de Koumassi	BAC	Institutrice Ordinaire (IO)	2 ans
E3	Ecole Nord Est de Koumassi	BEPC	Institutrice Adjointe (IA)	6 ans

Tableau 2 *– Caractéristiques des enseignantes sollicitées*

Elles ont été sollicitées à ce nombre réduit parce que c'était les seules à être disponibles à la période de crise post-électorale, période pendant laquelle nous avons entamé notre étude.

3. *Collecte et traitement des données*

Les données à recueillir ont deux sources principales.

- Un questionnaire à trois items pour dégager les rapports au savoir entretenus par les enseignantes relativement à leurs représentations et conceptions sur leurs projets d'enseignement.

1- Avez-vous des difficultés pour concevoir vos projets d'enseignement (préparations écrites) ?

Oui ☐ Non ☐

2- Cochez les rubriques où vous avez des difficultés. A- Exploitation documentaire □ B- Formulation des objectifs pédagogiques □ C- Démarche méthodologique □ D- Formulation des consignes □ E- Conception des situations d'apprentissage □ F- Conception des situations d'évaluation □ G- Autres (Préciser) □……………. **3- Cochez les sources de ces difficultés.** A- Manque de documents didactiques □ B- Déficit de formation initiale □ C- Non maîtrise des contenus □ D- Autres (Préciser) □………………

- Les fiches de préparation dont l'analyse a été faite à partir de la grille (tableau 2) :

Centres d'intérêt (observables)	Indicateurs d'analyse	Appréciations/Commentaires des projets d'enseignement (PE)
Objectifs pédagogiques	Qualité	
Démarche méthodologique	Conformité avec les instructions officielles	
Consignes écrites prévues	Qualité de la formulation	
Situations d'apprentissage	Qualité	
Situations d'évaluation	Qualité	

***Tableau 3** – Grille d'analyse des projets d'enseignement (fiches de préparation)*

4. Méthodes de recherche

Notre démarche est principalement qualitative. Elle a permis d'analyser la qualité des projets d'enseignement en lien avec les cadres théoriques, les notions d'ancrage et les prescriptions officielles.

VII. PRESENTATION DES RESULTATS

1. Résultats du questionnaire

Item 1	Oui	Non
Effectifs	3	0

***Tableau 4** – Résultats de l'item 1*

Les trois enseignantes interrogées avancent toutes qu'elles éprouvent des difficultés pour concevoir leurs projets d'enseignement en mathématiques. Elles développent donc un mauvais rapport relativement à la conception de leurs projets d'enseignement.

Item 2	A	B	C	D	E	F	G
Effectifs	0	3	3	3	3	3	0

***Tableau 5** – Résultats de l'item 2*

Les difficultés rencontrées sont d plusieurs types

Item 3	A	B	C	D
Effectifs	0	3	2	0

***Tableau 6** – Résultats de l'item 3*

Les trois enseignantes pensent que leurs difficultés proviennent de la formation initiale et de la non maîtrise des contenus.

2. *Résultats de l'analyse des projets d'enseignement*

Centres d'intérêts (Observables)	Indicateurs d'analyse	Commentaires/appréciations des projets d'enseignement (PE)		
		PE 1	PE 2	PE 3
Objectifs pédagogiques	Qualité	-Mal défini par manque de conditions de réalisation et de critères de réussite -Absence des sous/objectifs des étapes	-Mal défini par manque de critères de réussite et de la non précision de l'attribut « jaune » -Absence des sous/objectifs des étapes	-Mal défini par manque de critères de réussite -Absence des sous/objectifs des étapes
Démarche méthodologique	Conformité avec les prescriptions officielles	Démarche méthodologique non- conforme avec omission de l'étape « entraînement et maîtrise »	Démarche méthodologique non-conforme avec présence d'une étape non conventionnelle (Découverte de la notion)	-Démarche méthodologique non- conforme avec présence de trois étapes non conventionnelles (motivation, présentation du matériel, leçon du jour) -Omission de l'étape « structuration »
Consignes prévues écrites	Qualité	Libellées à l'infinitif et mal formulées (Ex : amener les enfants à se poser entre eux)	Quelques unes mal formulées (non injonctives) : « fait nommer le matériel, fait observer, fait représenter »	Beaucoup de consignes mal formulées (non injonctives) : « fait nommer, fait répéter, inviter à entourer »
Situations d'enseigne-ment/appren-tissage	Qualité	- Contours illisibles (aucune activité illustrée) -Irréalisables (comparaisons et rangements de la couleur jaune) -Activités non-conformes à l'esprit de l'objectif principal)	-Apprentissage non actif (répétition des modèles de la maîtresse) -Une seule activité illustrée	- Contours illisibles (aucune activité illustrée) -Apprentissage non actif à certaines étapes
Situations d'évaluation	Qualité	-Exercice non illustré et sans référence -Impossibilité de juger la cohérence par rapport à l'objectif -Support d'évaluation non précisé (feuilles ou cahiers d'exercices)	-Exercice non illustré et sans référence -Impossibilité de juger la cohérence par rapport à l'objectif	-Exercice non illustré et sans référence -Support d'évaluation non précisé

***Tableau 7** – Résultats de l'analyse des projets d'enseignement*

Toutes les rubriques présentent des insuffisances et il existe beaucoup de similitudes dans ces insuffisances d'un projet à un autre.

VIII. INTERPRETATION ET DISCUSSION

Nos axes d'interprétation et de discussion vont se faire autour de la mise en relief des insuffisances ou des difficultés dans les grandes rubriques des projets d'enseignement. Ce sont les objectifs pédagogiques, la démarche méthodologique, les consignes écrites prévues, les situations d'enseignement et celles d'évaluation.

Le contenu visé par les trois projets d'enseignement est la couleur « jaune ». Pour chaque rubrique, nous ferons une étude comparative des choix de chaque enseignante de manière à dégager le profil commun à ces choix.

1. Les objectifs pédagogiques

Chaque objectif pédagogique, pour être valide, doit comporter un sujet apprenant, un verbe d'action manifeste, des conditions de réalisation et des critères de réussite. L'analyse des trois objectifs pédagogiques principaux montre qu'ils sont tous mal définis par manque des critères de réussite ou des conditions de réalisation ou par la non précision du contenu à l'étude (la couleur jaune). En plus, aucun sous/objectif n'est précisé au niveau des différentes étapes. Or, dans le projet d'enseignement, c'est l'objectif pédagogique qui détermine et précise ce que l'enseignant veut atteindre comme compétence à chaque étape ou à la fin de la séance. C'est donc par l'objectif qu'un contenu est ciblé pour être traité à travers les stratégies didactiques. D'une part, les conditions de réalisation sont des indicateurs qui rendent lisibles les moyens avec lesquels se réalisent les activités et le contexte dans lequel cette réalisation a lieu. D'autre part les critères de réussite sont pour nous un outil pertinent de jugement qui permettra de voir le niveau à partir duquel la production de l'élève sera jugée « acceptable ». Ignorer ou omettre les critères de réussite ou les conditions de réalisation dans la formulation des objectifs pédagogiques est donc pour nous une insuffisance dans la conception du projet d'enseignement.

2. La démarche méthodologique

Elle constitue l'ensemble des étapes conventionnelles à suivre pour conduire la séance. Celle proposée officiellement dans le système préscolaire ivoirien comporte les étapes de « Rappel, Manipulation, Structuration, Verbalisation, Représentation, Entraînement/Maîtrise, Réinvestissement ». L'analyse des trois démarches proposées fait ressortir qu'aucune d'elles n'est conforme à l'officielle par omission de certaines étapes ou par la création de nouvelles étapes (Motivation, Leçon du jour, Présentation du Matériel, etc.). Il apparaît donc que les enseignantes conçoivent leurs projets d'enseignement en dehors de certaines normes et instructions officielles. Cette inconformité représente pour nous une insuffisance dans la conception de ces projets.

3. Consignes écrites prévues

La consigne selon Zakhartchouk J.M (1999) est « toute injonction donnée à des élèves pour effectuer une tâche …». Cette injonction s'apparente à un ordre qui met l'apprenant en activité conformément à l'objectif fixé. Pour être « opérationnelle », la consigne doit être, selon Archer M. (2009), conjuguée à l'impératif présent aux deuxièmes personnes du singulier ou du pluriel. Par ce mode de conjugaison, l'élève est face à un ordre, une injonction susceptible de provoquer son action. Or, les résultats de l'analyse des consignes prévues dans les trois projets d'enseignement montrent que beaucoup de ces dernières sont mal formulées parce qu'à l'infinitif présent (amener les enfants à entourer) ou du type « fait représenter… ». Ces deux modèles de formulation relèvent à notre avis des intentions et ne peuvent en aucun cas donner un ordre ou une injonction comme le suggèrent Zakhartchouk J.M (1999) et Archer M. (2009). Dans ces conditions, les consignes écrites prévues dans les projets présentent des insuffisances car elles ne pourraient pas mettre convenablement les élèves en action.

4. *Les situations d'apprentissage*

Elles concernent toutes les activités menées par les élèves à l'effet de s'approprier les compétences visées. Mais, l'analyse montre que beaucoup de ces activités ne sont pas illustrées sur la fiche pour être lisibles à première vue. Certains apprentissages proposés semblent non actifs puisqu'ils ont lieu sous un « guidage actif » des enseignantes. Si à cela, on ajoute le fait que certaines tâches proposées semblent irréalisables (comparer ou ranger des couleurs), on pourrait avancer ici qu'il se pose un problème de maîtrise de contenus et d'encadrement pédagogico- didactique ; toutes choses qui constituent pour nous des insuffisances liées aux procédures de didactisation des situations d'apprentissage.

5. *Les situations d'évaluation*

Elles concernent les exercices d'évaluation proposés dans les projets. Tous les exercices proposés sont non illustrés et sans consignes. Dans ces conditions, les enseignantes seront obligées d'improviser des exercices à la fin de leurs séances. Or, la conception d'un exercice en petite section demande du temps et de l'imagination. Avec l'absence d'illustration et de consignes, nous ne pouvons juger la cohérence et la fidélité des situations d'évaluation par rapport aux différents objectifs, encore moins définir le niveau de maîtrise de la compétence visée. Ces résultats de l'analyse des projets viennent conforter les opinions des enseignantes émises dans leurs réponses sur le questionnaire.

Dans l'ensemble, nous notons que les objectifs définis dans les projets sont mal formulés et les évaluations s'en trouvent affectées si bien qu'il est difficile d'établir une cohérence ou une fidélité entre ces deux éléments importants. Les situations d'apprentissage aux contours illisibles découlent de consignes non injonctives doublées d'une mauvaise maîtrise de la démarche méthodologique officielle. Et pourtant, tous ces éléments en question ont une haute portée didactique dans un projet d'enseignement. On retient alors que tous les trois projets analysés sont mal « montés », mal « ficelés » car présentant des « faiblesses » et des insuffisances en beaucoup de points et qui entament leur qualité. Par cette analyse, on note que le rapport aux pratiques enseignantes relatives à la conception des projets d'enseignement confirme toutes les insuffisances et difficultés relevées dans les projets et dont l'une des principales sources probables demeurent le déficit de la formation initiale posée comme problème au départ. Ce qui confirme notre hypothèse selon laquelle la formation incomplète des enseignantes ivoiriennes du préscolaire génère des insuffisances dans les pratiques relatives à la conception des projets d'enseignement.

IX. CONCLUSION

Notre étude dont la problématique a une triple source a été menée à partir d'un questionnaire et d'une grille d'analyse de trois projets d'enseignement sur la perception de la couleur jaune en petite section. Les résultats montrent que la formation initiale incomplète est la principale source des difficultés et des insuffisances constatées dans la conception desdits projets. Et pourtant, tout projet d'enseignement s'assimile à une « boussole » sensée guider l'enseignant dans la mise en œuvre du projet. Mais, la situation de crise post-électorale (décembre 10 à avril 11) qui a occasionné la fermeture de l'école ne nous a pas permis d'avoir l'échantillon escompté et d'observer en situation réelle la mise en œuvre des projets d'enseignement. C'est pourquoi, pour corriger ces limites et au regard des « clichés » dégagés dans cette étude, nous pensons qu'un élargissement de la population d'enseignantes et des observations de classes seraient des perspectives à envisager pour rendre davantage lisibles les invariants dans les pratiques enseignantes au préscolaire en Côte d'Ivoire.

REFERENCES

Altet M. (2004) L'analyse des pratiques : une approche fonctionnelle, réflexive en formation des enseignants. *Education Permanente* 160, 101-111.

Altet M. (2007) Analyse des pratiques et de l'activité des enseignants et des formateurs en situation. *Cren-Crcrie,* 1-39.

Archer M. (2009) *Les verbes de consigne dans l'évaluation*. Thèse de Doctorat. ENS. Abidjan.

Bloom B. et al (1969) *Taxonomie des objectifs pédagogiques*. Montréal : Education Nouvelle.

Bru M. (1994) L'enseignant organisateur des conditions d'apprentissage. *Nouvel Educateur* 66, 1-5.

Chevallard Y. (1985) *La transposition didactique*. Grenoble : Pensée sauvage (1ère édition).

Chevallard Y., Joshua M. A. (1991) *La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné, avec un exemple de la transposition didactique.* Grenoble : Pensée sauvage (2ème édition).

Hameline D. (1979) *Les objectifs pédagogiques en formation initiale et en formation continue*. Paris : ESF.

Ministère de l'Education Nationale (Direction de la Pédagogie et de la Formation Continue) (2002). Programme du préscolaire. Abidjan : Ceda.

Nebout A. P (2007*)* Consigne et Contrat didactique : pour quelles stratégies didactiques en situation d'enseignement/apprentissage. *Kasa Bya Kasa* 12, 96-110.

Robert A. (2008) Le cadre général de nos recherches en didactique des mathématiques. In Vandebrouck F. (Ed.) (pp. 11-22) *La classe de mathématiques : activités d'élèves, pratiques des enseignants*. Toulouse : Octarès.

Zakhartchouk J.-M (1999) *Comprendre énoncés et consignes*. Amiens : CRDP.

HISTOIRE ET DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES : UNE NÉCESSITÉ POUR LA FORMATION D'UN MATHÉMATICIEN ?

Rachid BEBBOUCHI *

Résumé – L'une des nouveautés dans le système Licence-Master-Doctorat (LMD) adopté en Algérie est de prévoir deux modules semestriels de découverte sur l'Histoire des Mathématiques en deuxième année Licence de Mathématiques et deux modules semestriels sur la Didactique des Mathématiques en troisième année de cette même Licence. La conjonction de ces deux enseignements, Histoire et Didactique des Mathématiques, a-t-elle réussi à faire prendre conscience aux étudiants de la puissance des mathématiques et à leur donner envie de s'y investir ? J'essaie non pas de répondre à cette question mais de la cerner un peu plus.

Mots-clefs : formation de mathématiciens, enseignement de l'histoire et la didactique des mathématiques.

Abstract – The new algerian system LMD gives an opportunity to introduce two semestrial courses in History of Mathematics at the second year of the Mathematics License and two semestrial courses in History of Mathematics at the third year. The union of those courses could show to the students the power of Mathematics and push them in this way. My teaching experience could help to understand that.

Keywords: Mathematics teaching, History of Mathematics, Mathematics education

I. INTRODUCTION

Traditionnellement, du moins en Algérie, la formation universitaire d'un mathématicien (au sens large du terme, pas seulement un futur enseignant en mathématiques mais aussi un futur chercheur) se résume en une somme de connaissances à acquérir pour ensuite se spécialiser dans un domaine déterminé et aboutir à une maîtrise de toutes les facettes de ce domaine. Le Doctorat d'Etat était là pour le certifier (il y a même eu un certain moment un second sujet proposé par l'institution pour témoigner de la capacité de l'impétrant à comprendre un autre domaine que le sien).

La formation fondamentale reposait essentiellement sur l'acquisition de connaissances de base en Analyse, en Algèbre, en Topologie et en Géométrie Différentielle. On était fiers de se proclamer « bourbakistes » et on jonglait avec des mathématiques de structures.

Ensuite, les mathématiques dites appliquées firent leur apparition : les Probabilités, les Statistiques, la Recherche Opérationnelle. La noosphère algérienne a introduit la notion d'ingéniorat en Mathématiques (baccalauréat + 5). A la fin de la 5$^{\text{ème}}$ année de cette formation, l'étudiant présentait un mémoire lié si possible à un problème concret au sein d'entreprises étatiques ou non (par exemple le problème de temps de démontage-montage d'un derrick en utilisant le recuit simulé). A côté de cela, existaient des thèses de magister beaucoup plus académiques où les encadreurs évaluaient la capacité d'entamer une recherche en mathématiques.

Mais avions-nous formé pour autant des mathématiciens qui comprenaient ce qu'ils faisaient ? Qui maitrisaient leur domaine suffisamment bien pour pouvoir diffuser leur savoir ? Ou même entamer des recherches pertinentes ?

Ce fameux mémoire d'ingéniorat aurait dû pousser l'apprenant à soigner la transmission de ses connaissances et était tout indiqué pour cela. Or, mises à part des individualités (qui existent et existeront quel que soit le système d'enseignement), la grande masse ne sait ni

* Laboratoire de Systèmes Dynamiques, Faculté de Mathématiques, USTHB – Algérie – rbebbouchi@hotmail.com

© Bebbouchi R. (2012) Histoire et Didactique des Mathématiques : une nécessité pour la formation d'un mathématicien ? In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21*^{e} *siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT2, pp.292-300). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

expliquer ses idées, ni les enchaîner de manière harmonieuse. La plupart manipulent des concepts sans même en saisir le sens profond. Cela transparaît en particulier quand il s'agit de les recruter.

A titre d'exemple, un candidat à un poste d'enseignant à l'Université, ayant soutenu une thèse de magister sur les fonctions de variable complexe, a affirmé lors de son audit qu'il ne voyait aucune différence entre ces fonctions et les fonctions de variable réelle.

II. LE SYSTÈME LMD ET SES NOUVEAUTÉS

Dans la précipitation, le ministère de l'enseignement supérieur a cru qu'il suffisait de copier la réforme européenne, en particulier celle de la France. Il a créé des commissions pour chaque domaine en faisant appel à des professeurs chevronnés (ou habituels). La commission Mathématiques et Informatique (MI) a siégé à Annaba en Janvier 2003 et a clôturé ses travaux en mars 2004 ; les programmes de la première année MI ont été finalisés. Grâce à l'insistance de certains recteurs, le mode de conception des curricula a changé : chaque université propose ses propres programmes en fonction de ses missions au sein de son environnement propre, tout en respectant un minimum de règles communes de base. La première année n'a pas été vraiment modifiée depuis la proposition de la commission ad hoc en MI (le ministère y a été pour beaucoup). Les différentes propositions de curricula des universités sont discutées et acceptées par des conférences régionales (ouest, centre et est) et enfin adoptées par une conférence nationale.

En septembre 2005, sont lancées les premières formations, notamment en MI. Le nouveau bachelier avait le droit de choisir entre ces nouvelles filières et celles de l'ancien système. Comme les filières informatiques sont exagérément demandées, on n'a inscrit en MI que les étudiants ayant eu une moyenne supérieure ou égale à 14/20 entre la note du baccalauréat et les notes aux épreuves de Mathématiques et Physique.

La tendance chez les étudiants (mais aussi les parents et même la société) à vouloir les filières informatiques reste majoritaire, malgré un certain retour à désirer des formations mathématiques, même autres que les formations soi-disant appliquées (Recherche Opérationnelle et Probabilités - Statistiques).

Ce retour devrait être analysé et peut-être canalisé.

A la rentrée de septembre 2006, 65 étudiants ont été orientés vers la licence mathématiques, pratiquement tous contre leur gré. Une étudiante a même clamé haut et fort qu'elle a toujours détesté les mathématiques alors qu'au baccalauréat, elle a eu 18/20 à l'épreuve de mathématiques.

Actuellement, il semble qu'en plus des étudiants de MI, sont inscrits en licence de mathématiques des étudiants redoublants de Sciences et Technologie (ancien système arrêté en 2008) réorientés, des DES (diplôme d'études supérieures, ancien système) Inscrits Administrativement réorientés (un étudiant inscrit administrativement n'a pas le droit de suivre les cours durant l'année et ne peut que passer les examens ; comment alors lui appliquer la note de participation alors qu'il n'a pas le droit de pénétrer dans l'enceinte de l'Université en dehors des examens de fin de semestre ?).

La première année comporte un module de techniques d'expression en français et un autre en anglais, soi-disant pour compenser le manque à gagner dans la formation en français(qui débute théoriquement en 3ème année primaire et se poursuit jusqu'en dernière année de lycée, soit neuf années) et en anglais (qui débute en 2ème année de collège et se poursuit jusqu'au baccalauréat, soit cinq années). La première année comporte aussi un module d'Histoire des

Sciences qui, au dire de certains étudiants, les ennuie plus qu'il ne les passionne (voir en annexe les résultats d'un sondage effectué auprès d'étudiants en master).

Outre le fait que les étudiants connaîtront dans cette Licence de Mathématiques toutes les techniques mathématiques (Analyse, Géométrie, Algèbre, Topologie mais aussi Recherche Opérationnelle, Probabilités et Statistiques, et les logiciels de Calcul Formel), la Commission de programmes de la Faculté de Mathématiques de l'USTHB y a introduit deux modules d'Histoire des Mathématiques en 2ème année et deux modules de Didactique des Mathématiques en 3ème année. Il faut savoir que tous les modules y sont obligatoires.

Cette licence a aussi été adoptée par plus de cinq autres universités. Cette licence n'a pas pour vocation officielle de former des enseignants de mathématiques, l'Ecole Normale Supérieure de Kouba (un quartier d'Alger) étant seule habilitée à fournir le ministère de l'Education Nationale en enseignants hors université. Malheureusement, une année après, la Faculté a ouvert deux autres licences, une de Recherche Opérationnelle et une de Probabilités et Statistiques, répondant plus aux anciennes normes (pas de topologie, moins d'analyse et surtout aucun module de découverte).

Phénomène de société aidant, les étudiants ont classé « naturellement » la licence de mathématiques comme le dernier choix dans leur orientation. C'est à tel point catastrophique que, pour l'année 2010-2011, seulement 8 étudiants sur plus de 400 en première année MI ont choisi la licence de mathématiques. Bref, les étudiants que nous avons dans cette licence ne sont pas vraiment motivés pour se former en mathématiques. Il faut savoir que, dans une formation classique de professeurs de mathématiques du collège et du lycée prévue à l'Ecole Normale Supérieure, l'accent est beaucoup plus mis sur les relations psycho- pédagogiques entre l'enseignant et l'enseigné en tant que préparation au métier d'enseignant. Donc cette Licence de Mathématiques a été une innovation en Algérie.

III. ENSEIGNER L'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

Lors de la campagne d'arabisation des Mathématiques au niveau de l'Education, on a vu des déviations linguistiques dues à une méconnaissance de l'histoire :

– une droite nommée triangle en première année de collège (méconnaissance du Δ grec),

– un tableau pour une multiplication par jalousie très inutilisé par les enseignants dans le livre scolaire de première année de collège (méconnaissance de cet algorithme),

– la « loi du poisson » en statistique en première année de lycée,

– le « point carré » toujours au lycée,

– les chiffres hindous sont devenus par miracle des chiffres arabes dans un petit fascicule qui se voulait d'histoire des nombres vendu aux élèves de plusieurs lycées…

Certains concepts mathématiques ont du mal à être enseignés et le mathématicien ne comprend pas cela. Des erreurs répétées en mathématiques ne sont pas comprises bien que, historiquement, elles se révèleraient naturelles et donc prévisibles : π n'est pas une fraction, une fonction continue peut ne jamais être dérivable, le hasard n'est pas déterministe…

Donc les objectifs d'un enseignement d'Histoire des Mathématiques seront pluriels :

1. Rendre aux mathématiques une dimension plus humaine

A première vue, en suivant un cours de mathématiques, on a l'impression que cela a toujours été, est et sera parfait, rigoureux, sans place au doute. Et pourtant, quand on raconte aux non-mathématiciens (et à plusieurs mathématiciens d'ailleurs) que, pour ce bel édifice qui repose sur la théorie des ensembles de Zermelo et Fraenkel, on ne peut pas en démontrer la consistance (dixit le théorème de Goëdel), quels sont ceux qui vous croiront ? Quand on sait que les géométries non euclidiennes n'ont eu de sens qu'à la fin du XX^{ème} siècle, que π n'est un nombre transcendant qu'à partir de la même époque, que la notion de fonction n'est née qu'au XIX^{ème} siècle, quand on vous raconte tous les tâtonnements qui ont précédé la naissance de chaque concept, la preuve de chaque résultat, les mathématiques vous paraîtront aussi proches qu'une science expérimentale.

2. Donner aux mathématiques une dimension universelle

L'histoire des mathématiques est extrêmement liée à l'histoire des civilisations. L'esprit pratique des Babyloniens et des Egyptiens du temps des pharaons va se retrouver dans leurs mathématiques où on utilisera plus de « monstrations » pour faciliter les calculs de la vie paysanne. La démocratie grecque va engendrer les premières démonstrations rigoureuses en mathématiques. La tradition de récolte d'informations de la civilisation arabe (écriture du Coran, traductions, bibliothèques…) va faire émerger ou consolider des domaines mathématiques, conjonction de plusieurs cultures : l'algèbre, la cryptographie, la musique, la science des héritages. Les différentes révolutions et évolutions européennes vont enfin bouleverser le monde mathématique par l'analyse des infiniment petits, la maîtrise du hasard (Probabilités et Statistiques), la rigueur logique (théorie des ensembles, travaux de Bourbaki,…), la découverte de nouvelles géométries (non euclidiennes, fractales). Chaque pays, chaque peuple a contribué à l'apport des différentes notions mathématiques et à leur développement, à tel point que cette matière ne peut plus paraître une technologie importée pour peu qu'on connaisse sa genèse.

3. Donner aux mathématiques une dimension utilitaire

La plupart des notions mathématiques ont été créées pour expliquer un phénomène naturel (physique ou autre) et aider à agir dessus. Il peut même arriver parfois qu'une notion mathématique est créée avant qu'on ne découvre son utilité : les fibrés vectoriels ont attendu plus de 50 ans avant de constituer les fondements de la théorie de jauge en physique atomique.

Que peut-on faire pour atteindre tous ces objectifs ?

Au Québec, il y a des enseignements spécialisés sur un ou plusieurs concepts. Par exemple, les concepts de limite, continuité, dérivabilité, intégrabilité. L'enseignant choisit des textes de différentes époques (Leibniz, Cauchy, Goursat…) et même contemporains et les décortique, devant et avec ses étudiants. Cela permet de présenter plusieurs approches de ces notions et ainsi fournir aux futurs enseignants suffisamment d'arguments pour mieux introduire ces notions (voir le cours de Fernando Hitt [4]).

L'Histoire des Mathématiques revêt ainsi un caractère didactique. On peut aussi citer le livre Mathématiques au fil des âges de J. Dhombres et al. [3] qui raconte l'histoire des mathématiques et des mathématiciens à travers des extraits choisis de certains traités.

Dans un autre cours [1] au Québec, l'enseignant a proposé à ses étudiants de choisir un instrument de mesure, ancien ou récent (astrolabe…), d'en faire l'épistémologie et d'analyser les mathématiques qui se cachent derrière. Ainsi, par exemple, en comprenant l'astrolabe, on a des idées plus claires sur la projection stéréographique.

Ces deux types d'enseignement nécessitent un travail approfondi et seraient intéressants à placer après une formation plus académique en mathématiques. Mais pour un premier contact des étudiants (très souvent non motivés pour des études de mathématiques, car orientés administrativement et pas selon leur désir) avec l'Histoire des Mathématiques, il est plus prudent de leur donner des lignes de temps et les civilisations paraissent plus indiquées. Pour chaque civilisation, on propose les développements des concepts de l'époque et une présentation des grands noms de mathématiciens ainsi que les liens entre les deux.

Cet enseignement permet de situer dans le temps et l'espace les différentes notions mathématiques et les différents mathématiciens. Il ne faut pas omettre de pimenter le discours par des anecdotes car la mémoire retient plus cela que des dates ou des noms de villes.

Pour illustrer cela, lors d'une épreuve où des enseignants italiens ont donné une question ouverte et ont demandé à des futurs enseignants de coucher sur papier leurs idées au fur et à mesure qu'elles se présentaient, un candidat est tombé sur le calcul de la somme des 100 premiers entiers naturels et a écrit : « *Je me rappelle du jeune Gauss* ». Effectivement, à huit ans, Gauss, turbulent, a été puni ; on lui a demandé de faire ce calcul et sa démonstration, pratiquement immédiate, est encore utilisée jusqu'à nos jours.

Dans mon cours, j'ai écrit un nom sur le tableau : Archimède, et j'ai demandé aux étudiants d'écrire tous les mots qu'ils relient à ce nom : euréka est celui qui revient le plus souvent, avec ses dérivés, l'or, la couronne, la poussée.

IV. ENSEIGNER LA DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

La Réforme de l'Education se base sur l'approche par compétences depuis 2003, les décideurs ayant été convaincus de l'efficacité de cette méthode. En 2010, les bacheliers sont complètement issus de la réforme au niveau du collège et du lycée. Mais les résultats obtenus sont encore loin d'être satisfaisants, pour preuve les chiffres suivants :

<u>Examen de fin de cycle primaire (session juin 2010)</u> :

Pour l'ensemble des candidats à l'examen (admis et non admis) :

- Moyenne générale = 05,50/10 :
- Moyenne en mathématiques = 05,9/10

En considérant l'ensemble des candidats (admis et non admis), la moyenne de mathématiques par wilaya varie entre 04,40/10 à Illizi et 07,12/10 à Annaba.

<u>Examen du B.E.M (session juin 2010)</u> :

- Moyenne générale = 10/20
- Moyenne en mathématiques = 08,38/20

La moyenne de mathématiques par wilaya pour l'ensemble des candidats (admis et non admis), varie entre 06,08/20 à Tamanrasset et 10,21/20 à Jijel.

Elle est inferieure à 10/20 pour l'ensemble des candidats, dans toutes les wilayas sauf à Jijel, Saida et El Bayadh.

La moyenne nationale en mathématiques au bac 2010 pour l'ensemble des candidats (admis et non admis) est inférieure à 10/20 pour toutes les filières à l'exception de la filière mathématique dont la moyenne avoisine 12/20. Cette moyenne est plus faible en technique mathématique et en gestion-économie. La moyenne en mathématiques pour les candidats admis au Baccalauréat est meilleure dans la filière mathématique avec une moyenne avoisinant 14/20, de façon moindre en Sciences (12/20), tout juste pour les Techniques-Mathématiques (10/20) et insuffisante en gestion-économie (09/20).

Il y a donc (toujours) problème concernant l'Education Mathématique. Si on essaie d'analyser les situations d'apprentissage dans les livres scolaires de l'école primaire par exemple :

- Beaucoup de situations ne sont pas adidactiques : c'est plus des problèmes traités.
- Le degré d'abstraction est exagéré dans certains cas : « On se déplace d'une ville A vers une ville B. » Il serait plus intéressant de les nommer et choisir des villes connues des élèves (quitte à choisir selon la région), ce qui les rapprocherait mieux de leur environnement et enrichirait leur culture. « Un citoyen veut construire deux piscines dans son jardin. Il fait appel à deux maçons. Le premier utilise 4/10 des briques et le second 40/100 des briques. » En fin de compte, le propriétaire réalise que les deux maçons ont utilisé le même nombre de briques.
- Le niveau de compréhension est en décalage entre la situation et l'apprenant.

Lors d'une rencontre avec des inspecteurs du primaire :

- Certains intervenants pensent que les enseignants ne sont pas habitués à l'approche par compétences et n'ont pas bien compris les « consignes », encore moins le rôle de l'élève.
- D'autres intervenants ont avoué avoir été obligés de changer les situations de découverte proposées dans les livres afin de les adapter à leurs élèves.

Lors d'une autre rencontre avec une centaine d'instituteurs, mes chercheurs et moi, nous leur avons conseillé de :

- n'enseigner que les concepts qu'ils maîtrisent, donc tout le temps remettre en cause leurs connaissances mathématiques,
- essayer de se mettre à la place de l'apprenant pour mieux transmettre leur message mathématique, ce qui implique implicitement une créativité dans la préparation des situations d'apprentissage, créativité que nous pourrions conseiller, orienter et diffuser,
- ne plus traiter les mathématiques comme une science dure et sèche, mais plutôt comme une science expérimentale qui peut montrer à l'élève son environnement sous un nouvel éclairage.

Tenant compte de tous ces paramètres, et sachant que la population estudiantine à laquelle s'adresse cet enseignement n'est peut-être même pas motivée pour poursuivre des études en mathématiques, encore moins devenir enseignant, je n'ai pas pu me référer aux différents écrits qu'on trouve sur ce sujet dans la littérature. En effet, le principe de base y est de former des futurs enseignants, donc déjà préparés à accepter des situations de classe.

J'ai orienté ainsi le cours de Didactique :

- Le premier semestre, je décortique le triangle didactique, en illustrant à chaque fois par des exemples du vécu. Le programme s'échelonne ainsi : généralités sur la Théorie des Situations Didactiques de Brousseau et la Théorie Anthropologique du Didactique de Chevallard, l'évaluation, les obstacles et des exemples d'études épistémologiques, la transposition didactique et le contrat didactique, le raisonnement mathématique, les techniques de rédaction mathématique.
- Le second semestre, j'essaie de leur apprendre à construire une situation d'apprentissage pour un concept appris en Analyse ou en Algèbre en première année universitaire (ou autre) et choisi par eux. L'objectif de cet enseignement est de préparer l'étudiant à enseigner (ou seulement transmettre) le message mathématique en s'aidant de tous les outils mis à sa disposition par les didacticiens.

Certains étudiants se sont sentis tellement concernés que la préparation de leur situation d'apprentissage les a passionnés. Ils ont réussi à créer des situations adidactiques tirées du vécu algérien (TAD) et à les présenter d'une façon originale (TSD) (avec port d'un tablier et fausses lunettes par certains). Par contre, et c'est là un phénomène à analyser, ce n'est pas forcément les meilleurs étudiants en mathématiques qui ont brillé dans ce cours. Pire, certains l'ont psychologiquement rejeté.

V. CONCLUSION

Un questionnaire a été élaboré pour avoir l'avis des étudiants qui ont subi les enseignements d'Histoire et Didactique des Mathématiques (voir annexe). Plus de 75 % l'ont trouvé intéressant et plus de 65 % pensent avoir amélioré leur rapport avec les mathématiques après cet enseignement. Ce même questionnaire permet aussi de mieux analyser l'impact de l'enseignement de Didactique des Mathématiques. 62 % ont trouvé cet enseignement intéressant et à peu près le même nombre se sont sentis plus confiants pour affronter le métier d'enseignant.

La conjonction de ces deux enseignements, Histoire et Didactique des Mathématiques, a-t-elle réussi à faire prendre conscience aux étudiants de la puissance des mathématiques et du coup leur donner envie de continuer dans cette branche ? On ne le saura que quand ils vont eux-mêmes s'investir.

L'Espace Mathématique Francophone s'est penché sur cet aspect (voir EMF 2006 thème 3 et EMF 2009 GT1) mais surtout dans le cadre de la formation de formateurs. Dans cet article, je pose la problématique de l'intégration d'un enseignement d'Histoire et Didactique des Mathématiques dans toute formation mathématique.

RÉFÉRENCES

Charbonneau L. (2007) Cours MAT 7222 *Histoire des Mathématiques*, U.Q.A.M.

Colette J-P. (1979) *Histoire des mathématiques* (2 tomes). Paris : Vuibert/Erpi.

Dhombres J. et al. (1987) *Les mathématiques au fil des âges*. Paris : Gauthiers- Villars.

Hitt F. (2007) Cours MAT 7191 *Didactique du calcul différentiel et intégral.* U.Q.A.M. www.er.uqam.ca/nobel/r21245

ANNEXE

Ce questionnaire a été distribué auprès de 51 étudiants dans différents masters. 29 ont obtenu la Licence Mathématiques. Les 22 autres ont obtenu une autre Licence (donc sans enseignement d'histoire et didactique de mathématiques) mais leurs réponses sont intéressantes car ils ont subi l'enseignement d'histoire des sciences en première année et ont cru qu'il s'agissait de donner leur avis sur ce cours.

Faculté de Mathématique Année 2010-2011

USTHB

Questionnaire

Répondre sur la feuille et cocher une seule case pour les questions à cases.

Les réponses sont anonymes mais on les préfère sincères et spontanées.

1) Vous avez :

□ la licence de Mathématiques

□ une autre licence (citer laquelle)………….

2) Avez-vous suivi un cours d'Histoire des Mathématiques ?

Si non : aimeriez vous en suivre un ? □ oui □ non

Si oui :

- Avez-vous trouvé cela : □ très intéressant □ intéressant

□ pas tellement intéressant □ ennuyeux

□ inutile

- Quel est votre rapport avec les mathématiques après ce cours ?

□ meilleur □ un peu mieux □ n'a pas changé

□ négatif □ catastrophique

Auriez–vous aimé une autre façon d'apprendre l'histoire des mathématiques ?

□ non □ oui (dites laquelle)……

3) Avez-vous suivi un cours de Didactique des Mathématiques ? □ oui □ non

Si non : aimeriez vous en suivre un ? □ oui □ non

Si oui :

- Avez-vous trouvé cela :

□ très intéressant □ intéressant

□ pas tellement intéressant □ ennuyeux □ inutile

- Pensez-vous qu'après ce cours, comme futur enseignant, vous êtes :
- □ mieux armé □ un peu plus confiant
- □ comme vous étiez avant ce cours □ troublé
- □ démoralisé

Concernant les 29 réponses des étudiants ayant suivi les cours d'histoire et didactique des mathématiques, le résultat est le suivant :

22 ont trouvé le cours d'histoire des mathématiques intéressant ou plus, 19 ont senti une amélioration de leurs rapports avec les mathématiques contre 8 qui n'ont pas été influencés mais aucun n'a trouvé que c'était négatif.

18 étudiants ont trouvé le cours de Didactique des Mathématiques intéressant ou plus. 18 se sentent confiants grâce à ce cours s'ils s'engagent dans le métier d'enseignant, 6 ne se sont pas sentis influencés. Par contre, un seul s'est dit démoralisé.

DÉVELOPPEMENT PROFESSIONNEL DE PROFESSEURS DÉBUTANTS : QUELS INDICATEURS ? QUELS RETOURS VERS LA FORMATION ?

Françoise CHENEVOTOT* – Marie-Pierre GALISSON* – Christine MANGIANTE*

Résumé – Cette contribution rend compte d'une recherche dont le but est de fournir des outils permettant de repérer et de décrire le cheminement d'enseignants débutants pour mieux comprendre comment ceux-ci peuvent à la fois répondre aux exigences de la formation tout en investissant leur nouveau métier. Ces outils devraient permettre, à terme, de définir des critères d'évaluation des formations suivies et d'en étudier les effets sur le développement professionnel de ces étudiants, futurs professeurs.

Mots-clefs : Didactique des mathématiques, Enseignants du secondaire débutants, Développement professionnel, Dispositifs de formation initiale, Effets de la formation

Abstract – This contribution reports a research with which the purpose is to supply tools allowing to locate and to describe the progress of novice teachers to understand better how these can answer at the same time the requirements of the training while investing their new job. These tools should, eventually, allow to define criteria of evaluation of the followed trainings and to study the effects on the professional development of these students, future professors.

Keywords: Mathematics education, High school beginners teachers, Professional development, Devices of initial training, Effects of the training

I. INTRODUCTION

Notre contribution s'appuie sur une recherche soutenue depuis 2009 par l'IUFM Nord – Pas de Calais[1]. Elle s'inscrit dans le groupe de travail n° 2 consacré à l'analyse de dispositifs et de stratégies de formation initiale et continue des enseignants. Plus précisément, nos questions de recherche concernent le 2e axe du groupe puisqu'elles portent sur les indicateurs à prendre en compte dans le cadre de l'évaluation de dispositifs de formation.

En France, les récentes réformes de la formation des enseignants sont source de profonds changements. Auparavant, les futurs professeurs de lycée et de collège recevaient une formation d'une année en alternance, s'appuyant sur l'articulation entre une formation théorique dans les Instituts Universitaires de Formation des Maîtres (IUFM) et une formation pratique consistant en un stage en établissement d'environ six à huit heures par semaine. Depuis 2010, la mastérisation de la formation des enseignants a considérablement modifié l'équilibre entre le temps passé dans les classes et celui passé dans l'institut de formation. Les enseignants n'ont plus l'opportunité de suivre une classe tout au long de l'année. Leur implication dans le métier s'en trouve nécessairement modifiée.

Formatrices d'enseignants en IUFM, nous nous interrogeons sur l'impact de ces changements survenus dans la formation des enseignants sur le développement professionnel des professeurs de mathématiques débutants de collège et de lycée au cours de leur formation puis de leur première année d'exercice en tant qu'enseignants titulaires. Quelles sont les conséquences de ces choix institutionnels ? Comment en mesurer les effets sur l'évolution professionnelle de ces enseignants au moment de leur entrée dans le métier ?

Le but de notre recherche est de fournir des outils permettant de repérer et de décrire le cheminement d'enseignants débutants pour mieux comprendre comment ceux-ci peuvent à la fois répondre aux exigences de la formation tout en investissant leur nouveau métier. Ces

* Université d'Artois, IUFM Nord - Pas de Calais, LDAR – France – francoise.chenevotot@lille.iufm.fr, marie-pierre.galisson@lille.iufm.fr, christine.mangiante@lille.iufm.fr

[1] Participe aussi à cette recherche Régis Leclerc, Inspecteur de l'Education Nationale.

© Chenevotot F., Galisson MP., Mangiante C. (2012) Le développement professionnel de professeurs de mathématiques débutants. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT2, pp. 301–313). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

outils devraient permettre, à terme, de mettre au jour les effets de la formation sur le développement professionnel et ainsi définir des critères d'évaluation possibles des dispositifs proposés.

Après avoir indiqué le cadre théorique auquel nous faisons référence, nous préciserons notre problématique ainsi que la démarche générale de notre recherche. Nous exposerons ensuite la méthodologie d'analyse mise en œuvre pour identifier des indicateurs du développement professionnel et nous l'illustrerons à partir de deux exemples. Nous présenterons alors les résultats obtenus et conclurons en évoquant la possibilité d'utiliser les outils mis au point dans le but d'évaluer les effets de la formation actuelle.

II. CADRE THEORIQUE ET PROBLEMATIQUE

1. Développement professionnel et contraintes du métier

A l'origine de notre questionnement se trouvent des questions générales à propos du développement professionnel. Comment en repérer les traces ? Comment le caractériser ? Est-ce un acquis assuré automatiquement par l'évolution personnelle de chacun, un parcours ponctué par une succession d'étapes, une dynamique qui résulte d'un certain engagement de l'individu dans son métier et qui peut être en tension avec la formation proposée ? Dans le contexte de la mastérisation, la question du passage du statut d'étudiant à celui d'enseignant revêt une importance particulière. Comment rendre compte de cette mutation et comment l'interpréter à la lumière à la fois des attentes universitaires et des contraintes du métier ? Est-il possible d'en identifier des éléments clés et, dans l'affirmative, à partir de quels observables ? Cette contribution s'appuie sur une enquête réalisée dans le cadre de l'ancienne formation dans la perspective d'étudier ensuite les changements apportés par la mastérisation. Nous présentons ici les hypothèses retenues pour notre travail.

Nous nous inscrivons dans la théorie de l'activité et la perspective développementale de la didactique professionnelle (Pastré 2002) qui conçoit le développement professionnel comme

> Un processus d'élaboration de schèmes, d'invariants opératoires, de concepts organisateurs de l'action.

Plus précisément, nous utilisons le cadre de la double approche ergonomique et didactique des pratiques développée par Robert et Rogalski (2005) afin de tenir compte conjointement des contraintes qui pèsent sur les enseignants et de la finalité de leur activité. En tant que professionnels exerçant un métier spécifique qui possède ses propres règles, ils sont soumis à des contraintes. Si une certaine marge de manœuvre existe, chaque enseignant doit toutefois se donner les moyens de prendre en compte et de gérer les plus fortes contraintes du métier. Il existe en effet des normes « dont le respect semble être une valeur en soi » (Cirade 2006, p. 10).

> Tout professeur est ainsi tenu de corriger les travaux de ses élèves et de le faire dans un délai raisonnable. Qui s'affranchirait de cette norme traditionnelle ferait un grand pas vers sa mise au ban professionnel ! (Cirade 2006, p. 10).

Nous retenons donc pour notre recherche l'idée selon laquelle le développement professionnel est révélé par le niveau de prise en charge des contraintes professionnelles. Devenir enseignant suppose de prendre en charge les contraintes les plus fortes du métier, celles qui correspondent aux normes professionnelles.

2. Développement professionnel et processus d'acculturation

Pour le futur enseignant, s'approprier ces normes professionnelles ne va pas de soi. Nous faisons l'hypothèse que ce processus se réalise de façon plus ou moins immédiate selon les individus et qu'il est soumis à de multiples facteurs, comme par exemple les expériences précédemment vécues par l'étudiant (stages, animations auprès d'adolescents…). Deux cultures sont, en effet, mises en présence : celle de l'étudiant et celle des professeurs. Nous empruntons à l'ethnologie (Herskovitz 1967) les concepts d'acculturation et d'enculturation pour rendre compte de ce processus que nous interprétons comme la prise de conscience du passage dans une culture du métier perçue comme plus ou moins proche de la culture d'étudiant. Cette acculturation – en partie favorisée par la formation – peut aussi procéder d'un processus d'enculturation qui révèle une adaptation volontaire de la part de l'individu à un nouveau groupe de référence, celui des professeurs de mathématiques. Comme l'explique Herskovits :

> Lorsque l'enculturation opère au niveau de la conscience, elle ouvre la porte au changement, en permettant l'examen de possibilités diverses et le reconditionnement à de nouveaux modes de pensée et de conduite. (Herskovits 1967, p. 183)

Nous retenons pour notre travail la nécessité de considérer ce passage d'un groupe social à l'autre, ce reconditionnement, plus ou moins conscientisé, à de nouveaux modes de pensée, à de nouvelles règles.

3. Développement professionnel et changement de posture

Afin de rendre compte du développement professionnel à la fois en termes de prise en charge de contraintes professionnelles qui constituent les normes du métier mais aussi en termes de processus d'acculturation, nous faisons le choix d'utiliser la notion de posture. Nous en retenons une définition issue des travaux de Deblois et Squalli (2002), une « certaine façon de prendre en compte et de traiter les erreurs des élèves », pour l'étendre à un certain nombre de problèmes professionnels. La posture rend compte du degré de conscientisation du (ou des) problème(s) et des réponses apportées par les individus (chacun investit plus ou moins la marge de manœuvre dont il dispose). Ces façons d'envisager et de faire, évolutives dans un contexte de formation, nous permettent de différencier trois postures : « étudiant », « stagiaire » et « enseignant ». Ainsi, nous faisons nôtre (dans sa simplicité) une des caractérisations de Bucheton (2009) : la posture comme « une certaine manière de s'emparer de la tâche » tout en l'interprétant dans le cadre de la double approche (Robert et Rogalski 2002).

Nous choisissons, par conséquent, de rendre compte du développement professionnel des futurs enseignants à travers des changements de postures. L'enjeu est donc de mieux comprendre comment ces étudiants deviennent des enseignants, comment ils passent de la posture « je fais mon métier d'étudiant » à celle de « je prends en compte les contraintes du métier d'enseignant et j'y apporte des réponses ».

4. Entre contraintes du métier et contraintes de formation

Les étudiants-professeurs ne sont pas exclusivement soumis aux contraintes du métier. Ils sont aussi soumis aux exigences provenant de la formation universitaire suivie. La validation de leur cursus porte sur leurs premières expériences du métier (rapports de stages, visites…) mais aussi sur des connaissances disciplinaires. Les liens entre les différents modules de formation n'étant pas nécessairement mis au jour par les formateurs, certaines de ces exigences peuvent sembler contradictoires. Se pose donc la question fondamentale des rapports entre ce que propose la formation (des connaissances mathématiques, des connaissances mathématiques pour l'enseignant, des connaissances issues des recherches en didactique des mathématiques...) et la manière dont les étudiants-stagiaires s'emparent de ces ressources dans le but d'investir leur nouveau métier. Dans le cadre de cette formation commune, les cheminements personnels des étudiants diffèrent, car chacun a plus ou moins la capacité d'interroger, de questionner, d'analyser ce qui se passe, de prendre conscience du (ou des) problème(s) rencontré(s) et de problématiser la situation vécue.

Ainsi, notre intention n'est pas seulement d'identifier des outils susceptibles de rendre compte du développement professionnel d'enseignants débutants mais de mieux comprendre les interactions entre la formation suivie et l'évolution professionnelle de chaque individu, plus précisément, d'étudier les rapports que l'étudiant-professeur entretient avec la formation et la façon dont il se projette dans son futur métier.

Précisons, enfin, que nous retenons des travaux déjà menés sur le développement professionnel, la complexité du processus (Wittorski 2007, Wells 1993). Cela nous conduit à nous limiter à l'identification d'un certain nombre d'indicateurs de prise en compte des problèmes professionnels sans viser l'exhaustivité.

II. METHODOLOGIE GENERALE

Notre démarche suit plusieurs étapes. Nous avons, tout d'abord, procédé à une première étude visant à identifier des indicateurs à partir de deux questionnaires soumis à environ quatre-vingt professeurs en formation initiale à l'IUFM du Nord - Pas de Calais au cours de l'année 2009-2010. Ces stagiaires, répartis dans quatre groupes, suivent deux jours de formation par semaine à l'IUFM et doivent assurer entre six et huit heures de cours en établissement (le plus souvent en collège mais parfois en lycée). Chaque groupe est suivi par un formateur référent.

Le premier questionnaire a été conçu à partir de nos hypothèses à propos des postures et vise à en faire émerger des indicateurs au sens de Deblois et Squalli (2002) :

> Un ensemble d'éléments informationnels significatifs perçus, traités et présentés dans l'optique d'évaluer une certaine qualité d'une perspective adoptée par les futurs maîtres.

Nous avons posé des questions ouvertes, fermées, à choix multiples. Certaines questions se recoupent afin de limiter les biais liés à l'usage de questionnaires. Ces questions étaient organisées suivant trois axes : le profil du stagiaire (son vécu, son expérience passée et actuelle en matière d'enseignement), son enseignement au cours des stages, sa formation (celle dispensée à l'IUFM mais aussi celle constituée au cours des stages grâce aux échanges avec le maître de stage, les collègues…).

Le second questionnaire a été conçu après dépouillement et analyse du premier pour identifier et mieux cerner des régularités ou des évolutions en termes de postures. Nous avons notamment cherché à prendre en compte un possible « effet établissement ». Nous nous sommes également intéressées à dégager le « rapport au savoir » des stagiaires et leurs conceptions sur les différents modèles d'apprentissage. C'est pourquoi certaines questions cherchent à préciser l'émergence de schèmes liés à des logiques d'action : logique d'apprentissage versus logique de la réussite immédiate. Enfin, les questions finales ont pour objet d'esquisser les incontournables de la formation pour un stagiaire en fin de formation.

Nous utilisons, actuellement, les résultats obtenus à l'issue de ce premier travail, pour étudier le cheminement d'étudiants-professeurs en cours de formation. L'enjeu pour notre groupe de recherche est de tester les outils d'analyse mis au point à partir des questionnaires en allant observer des pratiques effectives de ces futurs enseignants en formation.

III. UN PREMIER RESULTAT : QUATRE INDICATEURS DE PRISE EN COMPTE DE PROBLEMES PROFESSIONNELS

L'analyse des questionnaires utilisés au cours de la première phase de travail permet de dégager des indicateurs relatifs à la prise en compte des contraintes du métier[2]. Nous entendons par « prise en compte » notre interprétation des éléments informationnels produits par les stagiaires qui témoignent d'une prise en charge des contraintes du métier : une perception du rôle de ces contraintes non seulement en termes de contrat de formation mais aussi en termes d'outils pour concevoir et évaluer son enseignement. Les réponses des stagiaires, en illustrant la manière dont ces contraintes entrent en jeu dans leurs pratiques, nous permettent de distinguer des degrés de prise en charge. Nous retenons donc après dépouillement les informations les plus significatives. Par conséquent, ces indicateurs sont révélateurs de questions importantes qui se posent aux enseignants débutants.[3] Nous illustrons nos résultats à travers l'exemple de deux stagiaires que nous désignons par Léa et Manon. Les quatre indicateurs retenus sont les suivants.

1. Prise en compte des programmes et des attentes institutionnelles

Nous avons interrogé les stagiaires à propos des ressources qu'ils utilisent pour préparer leurs séquences. Les programmes en font-ils partie ? Dans quel but les consultent-ils ? Si tous savent qu'un enseignant doit respecter les programmes, il n'est pas facile pour les débutants d'avoir le recul nécessaire pour envisager leur enseignement dans une certaine continuité des apprentissages. De plus, ils ne prennent pas nécessairement l'initiative de construire leur enseignement à partir de cette référence.

L'analyse des réponses données par Manon montre que la stagiaire se réfère aux programmes pour organiser son enseignement dans une certaine continuité des apprentissages : « pour savoir ce que les élèves ont acquis et ce qu'ils doivent apprendre ». Léa, elle aussi, utilise souvent les programmes. Elle les cite parmi les outils construits ou étudiés en formation les plus souvent utilisés pour organiser son enseignement : « ils me permettent de travailler les objectifs à atteindre ». Toutefois, « connaître les programmes » n'est classé qu'au 7^{e} rang (sur 10) de ses attentes par rapport à la formation.

La comparaison des réponses données par l'ensemble des stagiaires conduit à distinguer trois niveaux de prise en compte des programmes que nous associons à trois postures différentes :

• Posture « étudiant ». S'assure de respecter les programmes (par exemple en utilisant des manuels) mais n'en tire aucune aide particulière pour son enseignement. Son enseignement n'est pas hors programmes.

• Posture « stagiaire ». Connaît les programmes du niveau où il enseigne et les utilise pour construire ses séquences d'enseignement. Se réfère aux programmes et les utilise de façon ponctuelle pour organiser son enseignement.

• Posture « enseignant ». Connaît les programmes du niveau où il enseigne, mais pas seulement et les utilise pour situer, voire pour organiser son enseignement dans une certaine continuité. Se réfère aux programmes de façon non ponctuelle pour évaluer les enjeux des apprentissages, voire pour organiser son enseignement.

---

[2] Ces indicateurs ne correspondent pas exactement aux cinq contraintes de la double approche car les questionnaires ne donnent qu'un accès partiel aux pratiques des enseignants et de plus les questions posées peuvent être marquées par nos propres choix.
[3] Bien évidemment, nous n'en visons pas l'exhaustivité.

Les réponses de Manon révèlent un niveau de prise en charge des programmes et des attentes institutionnelles qui correspond à la posture « enseignant » puisqu'elle connaît les programmes du niveau où elle enseigne mais aussi des niveaux contigus et utilise ces connaissances pour organiser son apprentissage. Les réponses de Léa révèlent un niveau de prise en charge des contraintes qui correspond à la posture « stagiaire » puisque son utilisation des programmes a pour but de fixer les objectifs à atteindre et de lui permettre de morceler la séquence en différentes séances. Contrairement à Manon, elle ne fait pas le lien avec les programmes des niveaux contigus.

2. Prise en compte des enjeux des apprentissages

D'autres questions portaient sur l'organisation des séquences d'apprentissage et sur leur mise en œuvre. Le déroulement envisagé révèle-t-il la prise en compte par l'enseignant des enjeux d'apprentissage ? Le rapport au savoir de l'étudiant de mathématiques n'est pas le même que le rapport au savoir de l'enseignant de mathématiques. Si la maîtrise du contenu mathématique est un préalable nécessaire, les futurs enseignants ont-ils ou non commencé à développer un autre type de rapport au savoir ?

A travers ses réponses, Manon révèle qu'elle organise ses séquences selon un déroulement standard : « activité introductive, trace dans le cours et exercices ». Elle prend en compte les apprentissages réalisés pour s'adapter au niveau des élèves mais rien n'est dit à propos du contenu mathématique. Léa organise, elle aussi, ses séquences selon un découpage standard conforme aux attentes institutionnelles « activité d'introduction + exo d'application, découpage en plusieurs séances, évaluation : devoirs surveillés ou faits à la maison » mais son approche plus globale de la préparation des séquences : « analyse des programmes, conception de la leçon : points importants » témoigne des questions qu'elle se pose à propos des enjeux de la séquence en termes d'apprentissage. Elle estime devoir proposer des activités qui amènent les élèves à se poser des questions. Elle cite parmi les apports majeurs des séances de formation la nécessité d'organiser les séances d'apprentissages, de s'adapter au niveau des élèves.

La comparaison des réponses données par l'ensemble des stagiaires conduit à distinguer trois niveaux de prise en compte des enjeux d'enseignement que nous associons à trois postures différentes :

• Posture « étudiant ». Envisage le savoir mathématique principalement comme objet d'apprentissage (le stagiaire fait implicitement et presque exclusivement référence à la façon dont lui-même a appris tel ou tel contenu mathématique).

• Posture « stagiaire ». S'interroge à propos des démarches d'enseignement et des difficultés d'apprentissage d'un contenu mathématique donné (de façon générale pour la plupart des élèves).

• Posture « enseignant ». Se pose des questions à la fois plus larges mais aussi plus contextualisées : quel est le savoir à enseigner, quels sont ses enjeux, comment l'enseigner à mes élèves ?

Manon adopte une posture de stagiaire en reprenant un modèle standard d'organisation pédagogique. Elle est toutefois capable d'identifier des difficultés d'apprentissage comme en témoigne son analyse de la copie d'un élève. Léa a une posture d'enseignant car elle créé des liens entre les apprentissages, semble avoir réfléchi à l'organisation de son enseignement par rapport aux objectifs fixés. Son analyse est pertinente, met en évidence une réflexion axée sur les savoirs.

3. *Prise en compte de l'activité des élèves*

Le changement de posture suppose aussi la prise en compte de l'activité des élèves. Chaque enseignant est plus ou moins capable de relever des informations sur leur comportement, leur attitude, leurs réactions face aux activités proposées, le niveau de la classe… Est-il de plus capable d'adapter son enseignement, de prévoir des modalités de différenciation ? Certaines questions posées concernent les ajustements envisagés par les stagiaires. Lorsque tout ne se passe pas comme prévu, comment « faire autrement » ? Qui en a la charge ? L'élève ? L'enseignant ? Les deux ?

Les ajustements envisagés par Manon portent à la fois sur le travail des élèves et sur l'enseignant. Elle met en œuvre des modes personnels de prise en compte de l'activité des élèves, prévoit notamment des échanges avec les élèves pour évaluer leurs difficultés : « Parfois pas d'activité écrite mais plutôt une discussion avec les élèves pour voir où ils en sont ». Elle tient compte des performances des élèves pour ajuster l'organisation de son enseignement : « Je prévois des exercices dans les devoirs faits à la maison pour rattraper des choses ratées en classe » ; « Parfois, je change les formulations des propriétés dans la leçon, je change d'activité » ; « Si les élèves n'accrochent pas à un exercice, j'arrête et je passe à autre chose ». Pour Léa, les ajustements portent principalement sur le travail des élèves et peu sur l'enseignant. Elle modifie le déroulement en fonction des évaluations effectuées, réajuste dans la séance suivante mais ne répond pas à la question concernant les difficultés que l'enseignant peut rencontrer lorsqu'il s'éloigne du projet initial. Léa prend en compte les problèmes d'articulation entre temps de l'enseignement et contenus en lien avec l'activité des élèves. Les réajustements proposés renvoient à des modifications techniques : « gestion du temps - difficultés des exercices ».

La comparaison des réponses données par l'ensemble des stagiaires conduit à distinguer trois niveaux de prise en compte de l'activité des élèves que nous associons à trois postures différentes :

• Posture « étudiant ». Prend en compte le comportement de surface des élèves : il souligne le bavardage des élèves, leur manque de concentration.

• Posture « stagiaire ». Prend en compte le comportement et le travail des élèves. Réajuste sa manière de faire à la suite d'un constat de difficulté.

• Posture « enseignant ». Anticipe les activités possibles des élèves. Conçoit son enseignement de diverses façons, différencie.

Nous estimons que le mode de prise en compte de l'activité des élèves de Manon correspond à une posture d'enseignant car la stagiaire est capable d'adaptation, mais Léa a une posture de stagiaire car elle prend conscience d'une gestion du temps en lien avec les tâches proposées aux élèves, donc à leur activité, mais les adaptations sont encore réduites.

4. *Prise en compte des erreurs des élèves*

Nous avons également étudié à travers les réponses données la façon dont l'étudiant-professeur gère les erreurs des élèves. Chaque enseignant, même débutant, repère les erreurs de ses élèves mais qu'en fait-il ? A-t-il ou non mis en place un système de réponses, un mode de gestion des erreurs ? Est-ce qu'il se contente d'évaluer ? Est-ce qu'il fournit une explication à l'élève ?

Manon distribue un corrigé pour gagner du temps au moment de la correction mais prend peu en compte les productions de ses élèves. Elle n'annote la copie que si nécessaire. Léa prend davantage en compte les productions des élèves. Elle cherche à cibler l'erreur et fait référence au cours, aux propriétés utilisées, suscitant peut-être une certaine autonomie de l'élève : « J'essaie de cibler l'endroit exact où l'erreur apparaît » ; « Je fais une référence au cours ou aux propriétés à utiliser ». Parmi les outils construits en formation les plus utilisés pour organiser son enseignement, elle cite : « l'analyse des copies d'élèves pour comprendre leurs erreurs ».

La comparaison des réponses données par l'ensemble des stagiaires conduit à distinguer trois niveaux de prise en compte des erreurs des élèves que nous associons à trois postures différentes.

• Posture « étudiant ». Identifie les erreurs (comme un étudiant repère les erreurs d'un autre étudiant) : il repère ce qui est faux.

• Posture « stagiaire ». Analyse l'origine des erreurs des élèves en termes d'apprentissages non réalisés.

• Posture « enseignant ». Propose un mode (relativement stable) de gestion des erreurs des élèves (par exemple, il peut demander aux élèves de relire leur cours, ou se contenter d'évaluer en fin de séquence, il peut aussi adapter son enseignement aux difficultés des élèves).

Manon a une posture stagiaire car elle ne fait pas le lien avec le savoir, alors que Léa a une posture enseignant car elle cherche l'origine des erreurs et fait le lien avec le savoir en jeu.

IV. UN SECOND RESULTAT : UN PARAMETRE PERSONNEL DU MODE DE GESTION DES CONTRAINTES PROFESSIONNELLES ET DES CONTRAINTES DE LA FORMATION

1. Les attentes des stagiaires par rapport à la formation

Nous cherchons à situer les attentes en début d'année des deux stagiaires Léa et Manon par rapport à celles de l'ensemble des stagiaires soumis aux questionnaires.

Nous nous appuyons notamment sur les réponses à l'une des questions du premier questionnaire. Cette question vise à recueillir l'opinion des stagiaires sur les apports qu'ils jugent prioritaires de la formation IUFM (tableau 1). Plus précisément, il s'agissait de classer 10 items par ordre de priorité.

Question : Quels sont les apports de la formation IUFM qui vous semblent les plus prioritaires ?
Réponse : 10 items à classer par ordre de priorité.
1 Acquérir des techniques. 2 Construire des situations. 3 Apprendre à construire des progressions. 4 Concevoir des dispositifs d'évaluation. 5 S'entraîner à analyser les erreurs des élèves. 6 S'approprier des contenus. 7 S'ouvrir à d'autres pratiques et d'autres niveaux. 8 Etudier les programmes. 9 Initier un développement professionnel. 10 Réduire son anxiété de débutant.

Tableau 1 *– Question sur les apports de la formation IUFM*

L'analyse statistique des réponses données par l'ensemble des stagiaires montre que leurs priorités sont (par ordre décroissant) : s'approprier des contenus, construire des situations, apprendre à construire des progressions, s'entraîner à analyser les erreurs des élèves, acquérir des techniques, réduire son anxiété de débutant, étudier les programmes (cf. Annexe).

Les attentes de Manon et de Léa semblent correspondre à celles de la plupart des stagiaires. Les priorités de Manon (acquérir des techniques, construire des situations, apprendre à construire des progressions) se situent respectivement aux rangs 5, 2 et 3 pour l'ensemble des sujets et celles de Léa (apprendre à construire des progressions, construire des situations, s'approprier des contenus) aux rangs 3, 2 et 1.

2. Les rapports des stagiaires à la formation

Manon est une personne qui n'adhère pas à la formation et privilégie le compagnonnage comme mode d'autoformation. A la question : « Quels sont les outils construits en formation que vous utilisez régulièrement ? », elle répond : « Rien. Les meilleurs conseils que l'on me donne viennent des collègues débutants aussi ou des collègues du collège. » De façon plus générale, Manon exprime des besoins urgents : accompagnement sur la gestion de la classe, des astuces, des conseils pour la notation et les punitions. Ses préoccupations semblent très pragmatiques. Elle entretient un rapport utilitaire à la formation tout en étant très critique.

Léa est un « bon » sujet qui tire parti à la fois des apports de la formation et de ses stages. Concernant ses attentes en matière de formation, Léa attend des conseils pour la préparation des séances et la gestion de classe. Ses préoccupations initiales (découvrir le métier avec des yeux d'enseignant) semblent centrées sur la conception d'un enseignement en conformité avec les exigences institutionnelles. Léa tire parti de façon différenciée du soutien des divers membres de la communauté de formation. Léa (sans anxiété préalable) a appris de la formation : son enseignement lui a vraisemblablement fait découvrir la complexité du métier.

3. Comparaison des profils de Léa et Manon

Même si ce n'est pas pour les mêmes raisons, nous plaçons Manon et Léa au milieu de l'intervalle stagiaire – enseignant. En effet, Manon et Léa prennent, toutes deux, en charge un certain nombre de problèmes professionnels. Les préoccupations de Manon sont très pragmatiques et elle met d'ores et déjà en œuvre des modes de fonctionnement personnels issus de sa réflexion sur sa pratique. Léa semble également avoir identifié et construit des éléments de savoir incontournables dans l'exercice du métier.

Toutefois, les rapports que chacune entretient avec la formation sont très différents. Si leurs attentes, en début d'année, sont conformes à celles de la plupart des stagiaires, elles n'ont pas du tout le même point de vue sur la formation suivie. Manon n'y adhère pas, la rejette même pour privilégier le compagnonnage comme mode d'autoformation tandis que Léa marque son adhésion à la formation tout en tirant aussi parti de son expérience sur le terrain (ressources, conseils).

La comparaison des profils de Manon et Léa nous conduit à considérer un paramètre, lié aux indicateurs précédents. En effet, si nous plaçons Léa et Manon dans l'intervalle stagiaire – enseignant, c'est pour des raisons différentes. Par conséquent, il y a certainement plusieurs façons d'être dans une posture étudiant, stagiaire, ou enseignant.

Plus généralement, nous avons identifié des profils qui correspondent à des étudiants qui exécutent scrupuleusement les tâches qui leur sont prescrites, sans faire de lien avec leur futur métier, sans voir en quoi cela peut leur être profitable dans leur pratique, mais aussi des étudiants qui s'investissent très peu dans leur formation et dans leur futur métier. Au premier abord, nous sommes face à deux types de profils différents, mais ils sont tous étudiants dans la mesure où aucun n'a encore investi son métier, aucun n'a conscience des problèmes professionnels et/ou ne les traite.

Ce paramètre permet donc de prendre en compte la dialectique qui s'installe entre les contraintes du métier et les exigences de la formation au sein du parcours de l'étudiant-professeur. Il dépend de l'attitude du stagiaire face à la formation et à ses collègues, de sa capacité à s'adapter à un nouveau contexte, à l'image qu'il a du métier, de sa capacité à travailler au sein d'une équipe… Il traduit la manière dont le sujet « incorpore » une norme du métier qui peut être fortement liée à la culture de l'institution de formation ou détachée de celle-ci, du moins dans la perception du sujet (comme pour Manon).

V. CONCLUSION PROVISOIRE ET PROLONGEMENTS DE LA RECHERCHE

A l'issue de la première phase de notre recherche, nous distinguons des indicateurs représentatifs du niveau de prise en compte des contraintes du métier (décliné en quatre domaines plus ou moins investis en lien avec des questions professionnelles plus ou moins prises en charge). Parce que nous cherchons à rendre compte du développement professionnel des étudiants-professeurs, nous repérons, pour chacun des indicateurs retenus, des niveaux différents de prise en compte des contraintes professionnelles. Nous faisons l'hypothèse que le développement professionnel se révèle pour chacun des indicateurs à travers le passage d'un niveau associé à une posture à l'autre.

L'analyse des questionnaires permet d'obtenir pour chaque étudiant-professeur un certain profil que nous complétons par un paramètre personnel, fonction des rapports du sujet à la « norme » de l'institution de formation et à celle du métier.

La seconde phase de notre travail consiste à mettre à l'épreuve les résultats obtenus et à analyser les effets de la formation actuelle. Quel est son impact sur le développement professionnel des étudiants-professeurs ? Participant à leur formation, nous avons plus facilement accès à diverses données : rapports de stage, travaux divers, observation de séances en classe, entretiens, questionnaires… et pouvons organiser le suivi de quelques-uns de ces futurs enseignants pour réaliser une étude de cas. Des changements importants ont eu lieu, mais nous faisons l'hypothèse que les indicateurs mis au jour correspondent à de grandes questions qui se posent pour tout enseignant débutant quelque soit la formation suivie. Elles ne se posent probablement pas au même moment, ni de la même façon mais elles se posent aussi. Les premières observations et analyses réalisées tendent à le confirmer[4].

REFERENCES

Bucheton D. (2009) *L'agir enseignant : des gestes professionnels ajustés*. Toulouse : Octarès.

Cirade G. (2006) *Devenir professeur de mathématiques : entre problèmes de la profession et formation en IUFM. Les mathématiques comme problème professionnel*. Thèse de doctorat. Marseille : Université Aix-Marseille I.

Deblois L., Squalli H. (2002) Implication de l'analyse de productions d'élèves dans la formation des maîtres du primaire. *Educational Studies in Mathematics* 50, 213-238.

Herskovits M. J. (1967) *Les bases de l'anthropologie culturelle*. Paris : Payot.

Pastré P. (2002) L'analyse du travail en didactique professionnelle. *Revue Française de Pédagogie* 138, 9-16.

Robert A., Rogalski J. (2002) Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *Revue canadienne de l'enseignement des Sciences, des Mathématiques et de la Technologie* 4(2), 505-528.

Wells G. (1993) Working with teacher in the zone of proximal development: Action research on the learning and teaching of sciences. *Ontario Institute for Studies in education*. www.oise.utoronto.ca/gwells/teacherzpdf.txt

Wittorski R. (2008) *La professionnalisation*. Note de synthèse. http://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00339073/fr/

[4] Nous espérons pouvoir enrichir notre analyse des effets de la formation actuelle d'ici février prochain.

ANNEXE

Analyse statistique des réponses à la question 10 du premier questionnaire

Question : Quels sont les apports de la formation IUFM qui vous semblent les plus prioritaires ?
Réponse : 10 items à classer par ordre de priorité.
1 Acquérir des techniques. 2 Construire des situations. 3 Apprendre à construire des progressions. 4 Concevoir des dispositifs d'évaluation. 5 S'entraîner à analyser les erreurs des élèves. 6 S'approprier des contenus. 7 S'ouvrir à d'autres pratiques et d'autres niveaux. 8 Etudier les programmes. 9 Initier un développement professionnel. 10 Réduire son anxiété de débutant.

***Tableau 1** – Question sur les apports de la formation IUFM*

Le tableau 2 représente l'effet du mot pour l'ensemble des sujets, c'est-à-dire les rangs attribués par les sujets à chacun des 10 mots ou critères proposés.

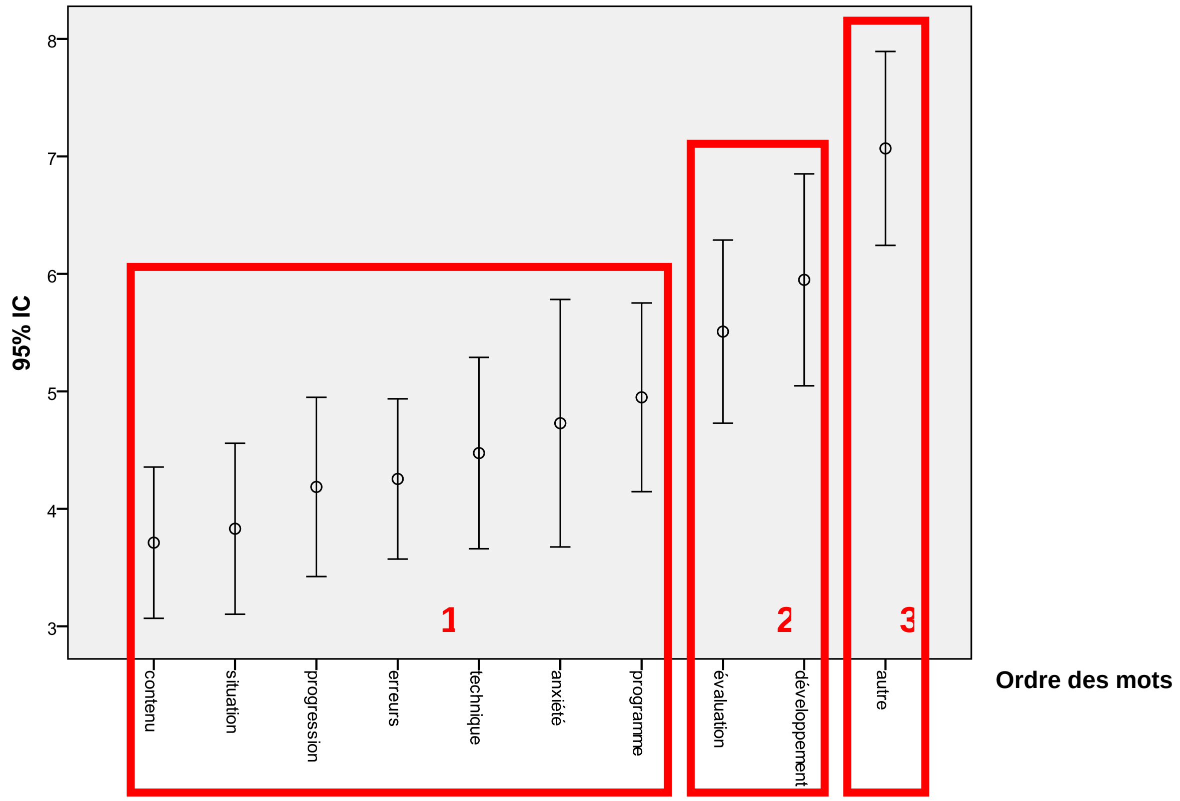


***Tableau 2** – Ordre des mots, par importance décroissante, pour l'ensemble des sujets*

L'ordre des mots est indiqué par importance moyenne décroissante. L'analyse du graphique permet de le décomposer en 3 zones distinctes selon les rangs moyens des mots.

La première zone est caractérisée par un rang inférieur à 5. On y trouve les critères les plus significatifs, tels que les mots « contenu », « situation », « progression », « erreurs », « techniques », « anxiété », « programme ». Notre analyse est que cette zone comprend les mots faisant référence aux préoccupations immédiates des stagiaires.

La deuxième zone est caractérisée par un rang compris entre 5 et 7. Les critères qui s'y trouvent sont moins significatifs. Il s'agit des mots « évaluation », « développement professionnel ». Ils font référence à des préoccupations à plus long terme des stagiaires.

La troisième zone est caractérisée par un rang supérieur à 7. On y trouve un critère peu significatif, le mot « autres pratiques ». Le graphique montre également que le mot « anxiété » est celui qui présente la plus grande dispersion au niveau des réponses (segment le plus long). Les réponses sont de type « tout ou rien ».

Analyse de la réponse de Manon à la question 10

Manon se situe dans la norme (en terme de fréquence) des stagiaires, car l'analyse de ses réponses à la question présentée dans le tableau 1 montre que ses 3 priorités (techniques, situations, progressions) se situent respectivement aux rangs 5, 2 et 3 pour l'ensemble des sujets (tableau 3).

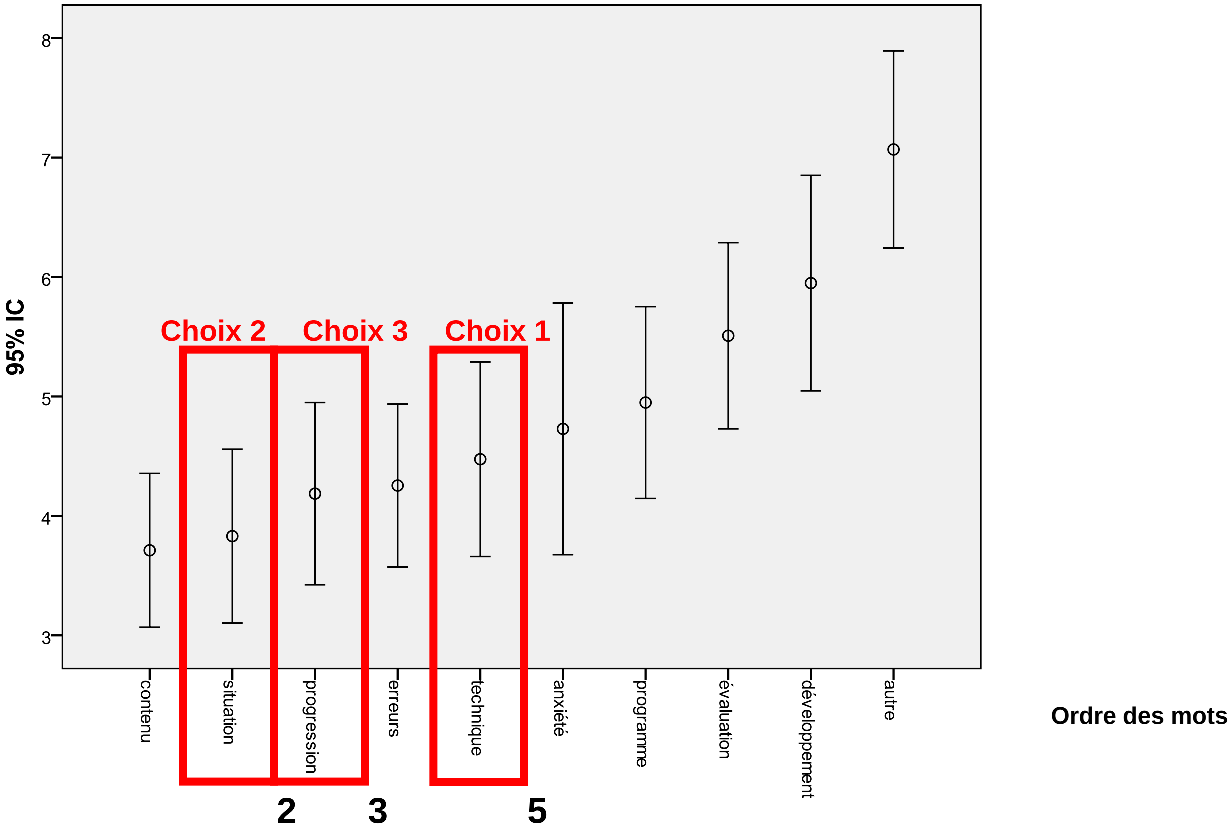


Tableau 3 *– Positionnement de Manon, par rapport à l'ensemble des sujets, pour l'ordre des mots*

Analyse de la réponse de Léa à la question 10

Léa est, elle aussi, dans la norme concernant ses rapports à la formation. Ses 3 priorités (progressions, situations, contenus) se situent respectivement aux rangs 3, 2 et 1 pour l'ensemble des sujets (tableau 4).

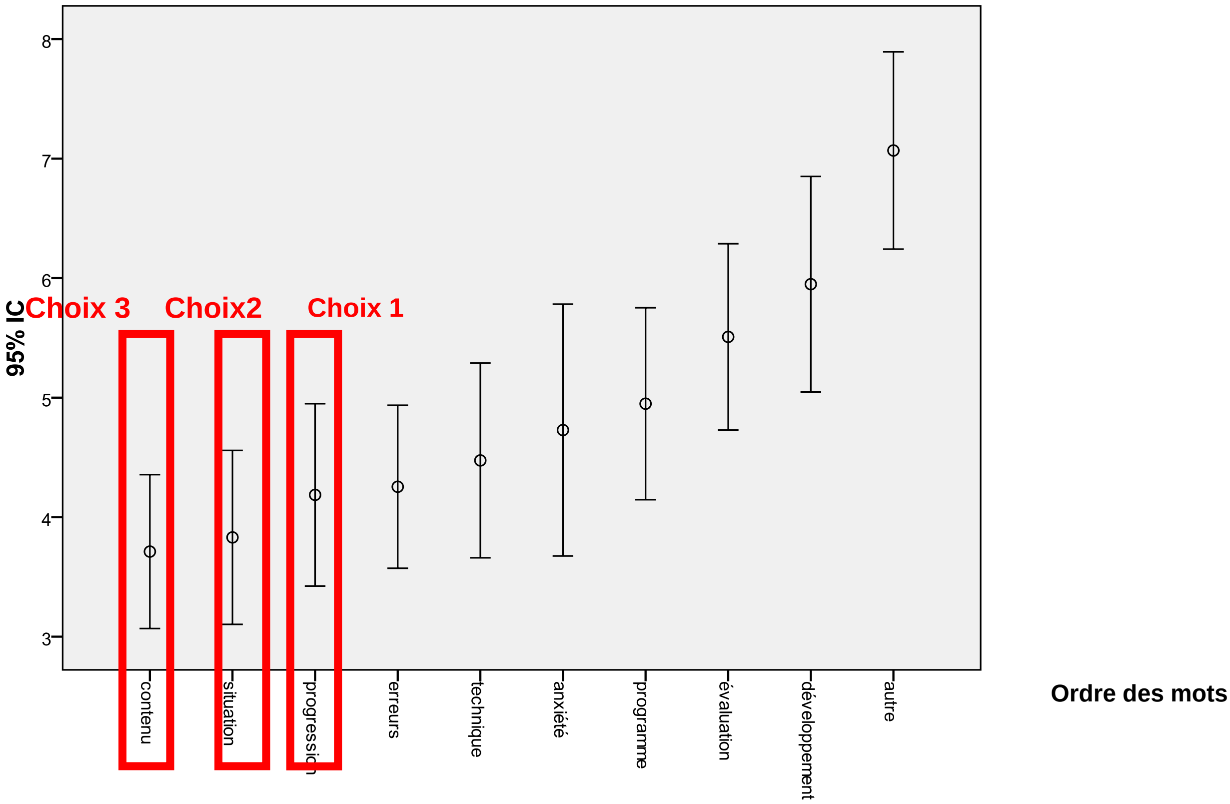


***Tableau 4** – Positionnement de Léa, par rapport à l'ensemble des sujets, pour l'ordre des mots*

LA FORMATION DES PROFESSEURS : ENTRE ANALYSE DE PRAXEOLOGIES PROFESSIONNELLES ET ETUDE DE PROBLEMES DE LA PROFESSION

Gisèle CIRADE*

Résumé – Dans une formation professionnelle, l'analyse des *praxéologies* professionnelles permet de travailler les types de tâches qui sont au cœur du métier : pour le professeur (de mathématiques), il s'agit essentiellement de « mettre en place, dans une classe de collège ou de lycée, une certaine organisation de savoir "mathématique" ». Mais la formation, par-delà l'étude de ces questions, se doit aussi de travailler à identifier les *problèmes de la profession* et à y apporter des *solutions*, toujours partielles et provisoires, qui pourront *percoler* dans la profession à travers les entrants dans le métier.

Mots-clefs : Didactique des mathématiques, Formation initiale des professeurs de mathématiques, Praxéologies professorales, Problèmes de la profession, Théorie anthropologique du didactique (TAD)

Abstract – In professional training, analysis of professional *praxeologies* allows us to work on the types of tasks that are at the heart of the trade: for the teacher of mathematics, they are essentially "set up in a class of college or high school, some organization of mathematical knowledge". But training, beyond the study of these questions, must also work to identify *problems of the profession* and to find *solutions*, always partial and provisional, which will allows the profession to be *spread* thanks to people who are entering the profession.

Keywords: Anthropological Theory of the Didactic (ATD), Didactics of mathematics, Initial training of teachers of mathematics, Problems of the profession, Teaching praxeologies

I. L'EQUIPEMENT PRAXEOLOGIQUE DU PROFESSEUR

Au-delà des formations[1] sur lesquelles nous allons nous appuyer, notamment en leur empruntant quelques corpus, il s'agit ici de dégager, en se plaçant dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique (voir Chevallard 1999, 2010), quelques fondements théoriques qui président à leur organisation et au choix des dispositifs mis en place. On notera d'emblée que l'enseignement de didactique des mathématiques qui est proposé dans le cadre de ces formations est un enseignement à *visée professionnelle*, c'est-à-dire *finalisé par les besoins de la profession*. Mais quels sont les besoins de la profession ? Quels sont les types de tâches que le professeur doit accomplir dans l'exercice de son métier ? Quels sont les problèmes auxquels il doit faire face au quotidien ?

Nous partirons du « type de tâches qui est la raison d'être du professeur de mathématiques : *mettre en place*, dans une classe de collège ou de lycée, une certaine *organisation de savoir* "mathématique" » (Chevallard 2002, p. 5). Bien entendu, par-delà ce type de tâches T_π qui vient d'être dégagé, il faut aussi avoir une *technique* τ_π qui permette d'accomplir ce type de tâches, une technologie θ_π qui vienne *justifier*, *produire*, *rendre intelligible* cette technique et une théorie Θ_π qui, à son tour, vienne *justifier*, *produire*, *rendre intelligible* cette technologie θ_π. C'est ce qu'Yves Chevallard (2002) appelle le *problème praxéologique du professeur* :

> … on dira alors que le problème praxéologique du professeur de mathématiques est de construire une praxéologie $[T_\pi / \tau_\pi / \theta_\pi / \Theta_\pi]$, c'est-à-dire d'apporter une réponse $R_\pi = [T_\pi / \tau_\pi / \theta_\pi / \Theta_\pi]$ à la question Q_π :

* Université Toulouse 2 (IUFM) – France – gisele.cirade@univ-tlse2.fr

[1] Il s'agit de deux formations initiales de professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire, en France, qui sont dispensées l'une à Marseille (Université Aix-Marseille 1) et l'autre à Toulouse (Université Toulouse 3 et Université Toulouse 2).

© Cirade G. (2012) La formation des professeurs : entre analyse de praxéologies professionnelles et étude de problèmes de la profession. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT2, pp. 314–323). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

> comment accomplir une tâche t_π du type T_π ? De même qu'on a parlé d'organisation mathématique, on nomme ici *organisation didactique* une praxéologie de la forme [T_π / τ_π / θ_π / Θ_π]. (p. 5)

L'enjeu est donc la diffusion de cette praxéologie, [T_π / τ_π / θ_π / Θ_π], et les questions du type « Comment mettre en place, dans une classe donnée, telle organisation mathématique ? » seront au cœur de la formation dispensée. Bien entendu, notons que « c'est *en dernière instance* que la *praxis* professorale se ramène à l'unique type de tâches T_π » et que, « en un autre sens, tout au contraire, le type de tâches T_π s*e déploie* en une multiplicité de types de tâches $T_\pi^{(k)}$ » (Chevallard 2002, p. 6). Pour donner quelques exemples de ce déploiement, nous pouvons nous appuyer sur la liste « de 29 "critères", que l'analyse avait permis de dégager d'un corpus de rapports de maîtres de stage étudié dans le cadre d'une recherche [2] récemment conduite à l'époque » (Cirade 2006, p. 297) :

Le métier et l'établissement
« Investissement personnel, dynamisme »
« Intégration »
La classe
– Concevoir l'enseignement à donner
« Préparer ses cours »
« Connaître les programmes »
« Respecter le programme »
« Programmer son enseignement »
« Analyser les mathématiques à enseigner »
« Moduler le traitement du programme selon la classe »
« Bien choisir les techniques »
« Bien choisir les documents distribués »
« Anticiper les difficultés des élèves »
– Les fonctions didactiques à assurer
« Tenir le rythme dans le traitement du programme »
« Donner un enseignement structuré, diversifié, équilibré, adapté »
« Définir des objectifs d'apprentissage »
« Présenter les notions »
« Mettre en forme les contenus enseignés »
« Donner sa place à l'élève dans la gestion de la séance »
« Bien calibrer des travaux personnels diversifiés »
« Corrections et erreurs »
« Contrôler le travail et les connaissances des élèves »
– Gestion de la séance
« Aisance, assurance »
« Avoir le contact avec les élèves, avec une distance adéquate »
« S'adresser à toute la classe »
« Un langage approprié »
« Gestion du tableau »
« Matériel pédagogique »
« Figures géométriques »
« Prise de notes »
– D'une séance à l'autre
« Analyser sa pratique » (Cirade 2006, p. 298)

L'un des objectifs de la formation va donc être de *déployer* ce type de tâches T_π pour étudier les organisations praxéologiques à constituer autour des types de tâches $T_\pi^{(k)}$, sans pour autant oublier de travailler leur amalgamation. C'est cette question que nous allons maintenant examiner, après avoir noté que ce déploiement et cette amalgamation constituent l'un des nombreux problèmes que le professeur devra affronter *tout au long de sa carrière* :

> La « compression » du système ${T_\pi^{(k)}}_{k\in I}$ en l'unique type de tâches T_π et, inversement, le « déploiement » de T_π en le système ${T_\pi^{(k)}}_{k\in I}$ de types de tâches sont, si l'on peut dire, le problème ! Le professeur débutant

[2] Il s'agit d'une recherche menée en 2000 par Yves Chevallard et Michèle Artaud.

ne perçoit guère, au-delà de T_π, le système $T_\pi^{(k)}{}_{k\in I}$, qu'il va découvrir peu à peu. Le professeur averti, lui, connaît par familiarité institutionnelle le système $T_\pi^{(k)}{}_{k\in I}$ qui s'impose à lui ; mais souvent il n'en perçoit qu'imparfaitement la motivation par T_π. Avec le temps, au fil des décennies qui composent une carrière, cette perception risque de s'affaiblir jusqu'à faire recevoir les nouveaux types de tâches qui viennent s'intégrer à $T_\pi^{(k)}{}_{k\in I}$ de loin en loin comme non motivés par T_π, voire comme totalement immotivés. À la limite, le vétéran sert un métier qu'il vit – parfois même qu'il vit bien – comme plus ou moins fortement dissocié, et non comme ordonné – « comme autrefois » – à une mission unique. (Chevallard 2002, p. 6)

II. LA FORMATION

Comme il est par exemple rappelé dans les notes du séminaire de didactique des mathématiques dispensé en 2005-2006 à l'attention des élèves professeurs de mathématiques de deuxième année à l'IUFM d'Aix-Marseille, la problématique *générique* du travail lors de la formation est la suivante.

… face à une question professionnelle Q, l'élaboration d'une réponse R (ou plutôt $R^\heartsuit$) suppose un parcours d'étude et de recherche, collectif et individuel, dont les étapes clés sont les suivantes :
1. *Observer* les réponses $R^\Diamond$ [lire : r poinçon] existantes dans la culture ou les pratiques professionnelles.
2. *Analyser*, au double plan clinique/expérimental et théorique, ces réponses $R^\Diamond$.
3. *Évaluer* ces mêmes réponses $R^\Diamond$.
4. *Développer* une réponse propre $R^\heartsuit$.
5. *Diffuser et défendre* la réponse $R^\heartsuit$ ainsi produite. (Chevallard 2006, p. 170)

Dans cet extrait, on distingue la réponse, notée $R^\heartsuit$, qui sera *élaborée* dans ce parcours d'étude et de recherche en réponse à la question professionnelle Q considérée et les réponses *observées*, notées $R^\Diamond$, qui serviront à *produire* la réponse $R^\heartsuit$. Pour compléter ce tableau, il reste à introduire le collectif X des professeurs en formation, le collectif Y des formateurs et, enfin, le système didactique $S(X ; Y ; Q)$: on peut alors dire qu'il s'agit pour la classe $[X ; Y]$, d'étudier cette question Q afin de produire une réponse $R^\heartsuit$. On a vu que l'élaboration de cette réponse s'appuyait sur des réponses (à la question Q) que l'on peut observer dans la culture ou les pratiques professionnelles : on les notera $R_1^\Diamond, R_2^\Diamond, \ldots, R_m^\Diamond$. Mais ce n'est pas tout. La classe $[X ; Y]$ s'appuiera aussi sur des *œuvres*[3], qui lui permettront d'étudier ces réponses et, *in fine*, de bâtir la réponse $R^\heartsuit$: on les notera $O_{m+1}, O_{m+2}, \ldots, O_n$. On peut maintenant considérer le *milieu didactique*

$$M = \{R_1^\Diamond, R_2^\Diamond, \ldots, R_m^\Diamond, O_{m+1}, O_{m+2}, \ldots, O_n\}$$

constitué par la classe afin de bâtir la réponse $R^\heartsuit$. On vient ici d'expliciter ce qu'on appelle le *schéma herbartien* (Chevallard 2009, p. 20), que l'on présente ici sous sa forme semi-développée :

$$[S(X ; Y ; Q) \rightarrow M] \hookrightarrow R^\heartsuit$$

Notons que, dans ce schéma, on n'impose pas aux œuvres O_j d'être « disponibles » au début de l'étude. Cela sera le cas pour certaines d'entre elles, qu'il faudra alors « convoquer », mais pour d'autres la classe devra envisager de se les rendre disponibles.

La question Q que l'on avait énoncée génériquement ainsi : « Comment mettre en place, dans une classe donnée, telle organisation mathématique ? » motive des questions telles que la suivante : « Comment *réaliser une séance en classe* permettant de mettre en place telle

3. Par œuvre, on entend « tout objet créé et diffusé par l'activité humaine » ; voir, par exemple, le glossaire proposé dans le mémoire de master 1 de Julia Marietti (2009, pp. 96-98). En ce sens les réponses $R_i^\Diamond$ sont elles aussi des œuvres, mais on les distingue parmi toutes les œuvres considérées en raison de la fonction particulière qu'elles occupent dans le processus d'étude.

organisation mathématique ? » Pour étudier ces questions, on peut par exemple convoquer dans le milieu M des réponses $R^\lozenge$ proposant des séances en classe, observées par le biais d'un compte rendu et/ou d'une vidéo de la séance, afin de les analyser, de les évaluer et de proposer un développement ou, du moins, quelques pistes de développement.

Pour étudier une réponse $R^\lozenge$ de ce type, la TAD permet de s'appuyer sur *un système de questions cruciales* (voir Artaud 2007), dont on ne donnera ici que les deux suivantes, qui structurent ce système : « Quelles sont les mathématiques qui constituent l'enjeu de l'étude durant la séance ? » et « Comment leur étude est-elle réalisée ? » La première question motive l'introduction de la notion de *praxéologie* – afin de modéliser l'activité mathématique, ici celle qui est enjeu de l'étude lors de la séance ; la deuxième question, quant à elle, motive l'étude des différents *paradigmes de l'étude scolaire* – de leur évolution, de leur devenir possible, etc. – et l'introduction du modèle des *moments de l'étude*, ainsi que celle de *milieu* (au sens introduit précédemment, par le biais du schéma herbartien), de *topos*, etc.

Bien entendu, d'autres types de réponses $R^\lozenge$ peuvent aussi être introduits dans le milieu. On peut par exemple évoquer les éléments de réponse apportés par les manuels, sous la forme d'énoncés pouvant servir de support à divers dispositifs structurels – activités d'étude et de recherche (AER), exercices et problèmes, travaux notés – ou encore par le biais de la présentation du texte du savoir, permettant par exemple de travailler sur une synthèse possible à réaliser avec la classe. Mais l'étude de séances en classe fournit un bon moyen de préparer les stages en établissement que les étudiants accompliront au cours de leurs deux années de formation en master, et lors desquels ils auront notamment à *observer*, puis à *analyser*, des séances réalisées par leur maître de stage. Sans compter que ces études sont des plus précieuses, aussi bien du point de vue de la recherche que du point de vue de la formation, en ce sens qu'elles donnent à voir des techniques de réalisation des moments de l'étude ainsi que ce qu'elles produisent quant à la mise en place de l'organisation mathématique enjeu de l'étude.

Le travail ainsi réalisé permet de faire émerger des conditions et des contraintes qui pèsent sur la dynamique de professionnalisation. À titre d'exemple, on trouvera ci-après les réponses produites par une équipe d'étudiants de première année de master (Toulouse, 2010-2011), en tout début de formation. La question, posée à l'occasion de la projection de la vidéo d'une séance de géométrie en classe de 4[e] (élèves de 13-14 ans), est la suivante : « Vous devez décrire à un professeur de mathématiques la séance que vous venez d'observer. Quels sont les éléments que vous mettez en avant ? »

> Appel. // Vérification du travail à faire. // Cours interactif. // Rappel du cours. // Application des propriétés vues en cours. // Utilisation des outils mathématiques (équerre, …) par les élèves. // Bonne diction. // Questionnement. // Approche des activités. // Temps de réflexion. // Elle laisse les élèves se tromper : il y a une interaction entre les élèves initiée par le professeur. // Rappel du plan du cours. // Support écrit pour les activités. // Cheminement du résultat voulu. // Bon ton. // Contrôle des activités au tableau et dans les rangs. // Conclusion. // Fait confiance à ses élèves lorsque l'un d'entre eux veut s'asseoir à une autre place que la sienne.

Sur *l'ensemble des réponses* (la promotion comportait une quarantaine d'étudiants répartis en dix équipes), seules les mentions suivantes permettaient de cerner très grossièrement les contours des mathématiques à l'étude durant la séance :

> Utilisation des outils mathématiques (équerre, …) par les élèves. // Compas, règle. // … (figures déjà faites). // … figure à main levée. // … (place du point G). // … (utilisation de la médiatrice pour trouver le milieu). // … (quadrillage, vecteur). // … Elle se sert d'outils (règle, compas). // La professeure rappelle le thème de la séance précédente sur les médianes d'un triangle. // *But de ce cours*. Trouver la propriété de la médiane, à 2/3 du sommet. // But de l'exercice 2 : faire observer la propriété des 2/3 et 1/3 de la médiane. // … illustrations/figures sur les médianes. // … découverte de la nouvelle propriété sur la position du centre de gravité (au 2/3 de chaque médiane). // … une nouvelle propriété sur les médianes ;

> […] tracé du point C. // Cours maths 4e sur médianes. // Supports : polycopiés, compas, règle, figure au tableau. // … les figures sont déjà prêtes.

On retrouve là un phénomène déjà pointé à l'occasion d'une recherche portant sur la formation initiale des professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire (Cirade 2006). L'analyse des rapports rédigés par les maîtres de stage sur l'activité des élèves professeurs de deuxième année a en effet montré que « pour ce qui est des contenus mathématiques […], ce que révèlent les [rapports] étudiés, c'est un *refoulement de la mise en débat* des mathématiques : on n'en parle guère entre gens de métier, pour cette raison définitoire que chacun est censé les bien connaître » (Cirade 2008a, pp. 256-257).

D'autres questions peuvent aussi être étudiées, telles celles du type : « Comment réaliser une *séquence* en classe permettant de mettre en place telle organisation mathématique locale (autour d'un thème donné) ? » Les contraintes sont ici très fortement liées à l'état actuel de la profession, où le paradigme de l'étude scolaire dominant est celui de l'*inventaire des œuvres* : ce qui compte, ce sont les « savoirs », et non les questions.

> … le professeur est jugé sur les œuvres – les savoirs – dont il aura impulsé l'étude dans sa classe. Dans ce que je nomme le paradigme *du questionnement du monde*, le professeur est jugé sur les *questions* dont il aura dirigé l'étude. Selon ce paradigme scolaire à venir, le professeur n'aura pas rempli son contrat vis-à-vis de l'école parce qu'il aura fait étudier le théorème de Pythagore ou le théorème de Thalès, mais bien parce que il aura conduit l'étude de la question de la construction graphique d'une formule ou, à différents niveaux, la question de l'expression d'un réel donné adéquate pour le calcul approché de ce réel à l'aide de moyens de calcul donnés par exemple. (Chevallard 2009, pp. 27-28)

Comme le laisse entendre la citation précédente en mentionnant le théorème de Pythagore et le théorème de Thalès, le professeur se situe au niveau du *thème*, dont l'étude se réalise à travers les *séquences* (ce qui renvoie, sans forcément se superposer, aux *chapitres* des manuels scolaires) ; en quelque sorte, pour le professeur, l'*atome* est l'organisation mathématique *locale* – l'élève se situant, lui, au niveau du *sujet*, c'est-à-dire des organisations mathématiques *ponctuelles* composant cette organisation mathématique locale. On notera, sans développer plus avant, que l'on peut par exemple *observer une séquence* par le biais du recueil des traces écrites de quelques élèves de la classe.

Nous venons d'évoquer dans cette section un *parcours d'étude et de recherche* organisé autour de la question de la mise en place, dans une classe, d'une certaine organisation de savoir. Nous terminerons en mentionnant juste d'autres parcours d'étude et de recherche sur lesquels la formation gagne à s'appuyer, et qui sont a priori centrés sur les mathématiques à étudier dans l'enseignement secondaire : « Enseigner les fonctions », « Enseigner la statistique », « Enseigner les grandeurs et les nombres », « Enseigner l'algèbre », « Enseigner la géométrie », etc.

III. LES PROBLEMES DE LA PROFESSION

Ce travail sur l'analyse de séances ou de séquences permet notamment de mettre en place dans la formation un environnement technologico-théorique – constitué notamment autour de la notion de praxéologie et du modèle des moments de l'étude – qui, en retour, permettra de *produire des techniques de conception* (et de mise en œuvre) de séances et de séquences. Les questions abordées à cette occasion sont nombreuses et une formation professionnelle *universitaire* – en droit, c'est le cas aujourd'hui en France – se doit de construire des réponses appropriées, ce qui

> impose d'élaborer *à nouveaux frais*, sans fausses économies, des *techniques* d'enseignement que l'on éprouvera de mille façons, des *technologies* qui projettent sur elles une intelligibilité adéquate, enracinées dans des *théories* dont on ne saurait attendre qu'elles existent toutes faites, intégralement, dans le royaume des savoirs académiques, et qu'il faudra donc bien continuer de produire. L'université ne doit

> pas se contenter de fournir à la formation des enseignants de sûrs *lectores*. Il est *vital* qu'elle accepte l'aventure exaltante de se muer en *auctor* collectif, sans arrogance, sans forfanterie, avec la générosité due à des professions qui, chaque jour, contribuent vaille que vaille à donner à la société sa propre intelligibilité et à chacun de ses membres l'intelligence des situations vécues. (Chevallard et Cirade 2009, p. 55)

Nous venons d'évoquer la « question des réponses ». Mais il reste encore la « question des questions » qui se posent à la profession, c'est-à-dire la question de l'*origine* des questions. Il s'agit là d'une exigence *cruciale*, car

> une formation de professeurs (ou plus largement une formation à un métier quel qu'il soit) *qui ne saurait pas s'expliquer là-dessus* se qualifierait difficilement en tant que formation *professionnelle*. Encore toute « explication » ne sera-t-elle pas recevable ! Pour cette raison, une formation professionnelle *d'université* doit assumer humblement un postulat d'ignorance ou de quasi-ignorance grâce auquel il devient possible d'identifier peu à peu, collectivement, les principaux *problèmes de la profession* sur lesquels butent non seulement les professionnels en formation mais aussi, presque toujours, *la profession elle-même*. Car une formation de professionnels est nécessairement coextensive à une redéfinition (à prétention méliorative) *de la profession*. (Chevallard et Cirade 2009, p. 56)

L'un des dispositifs permettant ce recueil de « questions ombilicales » consiste à demander chaque semaine aux professionnels en formation d'indiquer par écrit, de manière précise et concise, une difficulté rencontrée dans le cadre de leur formation. Il peut par exemple être présenté de la façon suivante[4] :

> Les questions ainsi formulées sont regardées, sauf exception, comme des questions *qui se posent à la profession* à travers l'un de ses futurs membres, et non comme l'affaire personnelle de tel ou tel. Leur étude éventuelle dans le cadre de la formation concerne donc *tout professionnel de l'enseignement des mathématiques*, et pas seulement celui qui, ayant porté témoignage de la difficulté rencontrée, aura ainsi contribué au *développement de la profession* que ces années de formation (dans le cadre du master et dans celui de l'année de stage) doit promouvoir.
> On notera qu'une réponse digne d'un professionnel de l'enseignement ne peut – sous peine de devenir rapidement inutilisable – consister seulement en un *Oui* ou un *Non*, ou, selon le cas, en l'indication d'une *recette :* elle doit en outre apparaître *justifiée*, ce qui suppose une « théorie de l'enseignement ». Une réponse est donc une réalité *qui se construit*, et dont la construction demande souvent *un temps considérable*. Il faut, par conséquent, apprendre à vivre avec des *questions ouvertes* – au cours des années de formation, et *tout au long de sa carrière*. Il faut aussi accepter de vivre avec des réponses *partielles*, *insuffisantes*, et surtout accepter de *critiquer*, de *déconstruire* des réponses auxquelles on s'était habitué – ce qui est le plus difficile, mais aussi *le plus essentiel*.

Ce dispositif, appelé *les questions de la semaine*, permet, comme nous allons le voir, de mettre au jour des problèmes de la profession. Mais avant cela, notons qu'il est étroitement lié à un autre dispositif, le *forum des questions*, dans lequel seront apportés des *matériaux pour une réponse* à certaines des questions ainsi dégagées. Pour fixer les idées, voici une petite liste de questions qui ont été posées et étudiées dans le cadre de la formation en deuxième année de master à Toulouse, en 2010-2011 :

> 1. Comment répondre à une question d'élève : « Pourquoi sur mon logiciel (GeoGebra), la bissectrice est-elle une droite alors que dans la définition c'est une demi-droite ? »
>
> 2. Est-ce que l'angle plat est un angle obtus ? Si oui, l'angle nul est-il aigu ? Et qu'en est-il pour l'angle droit ?
>
> 3. Comment peut-on faire une AER [activité d'étude et de recherche] introduisant la colinéarité de vecteurs sans utiliser explicitement les trois notions de sens, direction et longueur ?
>
> 4. Lors de ma séquence sur les puissances en classe de 4^{e}, durant une des séances, un élève me pose la question suivante : « Combien fait zéro exposant zéro car la calculatrice écrit ERROR ? » Juste avant, dans

[4] Cette formulation a été utilisée pour présenter le dispositif des questions de la semaine dans la formation réalisée à Toulouse en 2010-2011, mais elle résulte de tout le travail effectué à l'IUFM d'Aix-Marseille pendant de nombreuses années.

le cours, nous avons noté $\forall\ a \in \mathbb{R}$, $a^0 = 1$. J'ai répondu à l'élève que, par convention, on écrit $0^0 = 1$. À savoir, comment on peut expliquer à un élève de 4^e^ que $0^0 = 1$.

5. Comment organiser la prise de notes lors d'une AER ? Lors de mon stage, prise par la réactivité de la classe, tout a été fait à l'oral sauf une figure ; les élèves n'ont gardé aucune trace écrite de l'AER (à part le sujet). Les seules figures qu'ils ont faites, c'est sur leur brouillon.

6. Quel est le lien entre statistique et probabilités ?

7. La médiane est une droite. « Le point G se trouve aux deux tiers de la médiane à partir du sommet. » Alors, dans cet énoncé, ce n'est plus une droite mais le segment [AA'], où A' = mil [BC].

8. Comment expliquer que $a = \pi$ ou $\sqrt{50}$ est une valeur exacte ?

Sans entrer dans le détail des éléments de réponse qui ont été apportés à ces questions, nous citerons deux problèmes de la profession qui ont ainsi pu être dégagés au chevet de la formation et ont donné lieu à des travaux de recherche qui, en retour, peuvent venir nourrir les formations. Le premier d'entre eux révèle un problème d'*infrastructure mathématique* (sur la notion d'infrastructure, voir Chevallard 2009) qui a perduré pendant plus de deux décennies. Au départ, on trouve quelques questions telles la suivante, posée en 2000-2001 par un élève professeur en deuxième année à l'IUFM d'Aix-Marseille.

Quelle définition donner des angles alternes-internes ? (Il y a deux possibilités : le cas où les droites sont parallèles et le cas plus général.)

Dans le cadre de son stage en établissement, cet élève professeur a en responsabilité une classe de 5^e^ (élèves de 12-13 ans) ; la caractérisation angulaire du parallélisme (notamment à l'aide des angles alternes-internes) est au programme de cette classe. Les questions susmentionnées portent sur la *définition* des angles alternes-internes. Une enquête approfondie va révéler une pathologie curriculaire qui a affecté l'enseignement français pendant d'assez longues années, lors desquelles les angles alternes-internes ne sont définis que dans le cas où l'on a deux droites parallèles coupés par un sécante – ce qui, bien évidemment, interdit de *caractériser* le parallélisme à l'aide des angles alternes-internes (voir Cirade 2008b).

Le second, quant à lui, révèle un problème d'*infrastructure didactique* et a été étudié par Michèle Artaud (2011). Le thème mathématique concerné est celui des puissances d'un nombre ; il est abordé en classe de 4^e^ (élèves de 13-14 ans) et est

travaillé dans la formation, mais fait durablement problème, comme en témoigne cette question, posée par un élève professeur [de l'IUFM d'Aix-Marseille] de l'année 2007-2008 […].
« Les puissances en 4^e^ : sur ce chapitre, le séminaire m'a apporté de nombreux éléments mais un point reste encore, pour moi, mystérieux ! Je n'arrive pas à comprendre pourquoi les formules sont données seulement pour les puissances de 10. Mes élèves ont repéré la formule sur les entiers quelconques (alors que les puissances de 10 n'ont pas été encore traitées) et l'utilisent dans les calculs malgré de nombreuses remarques. Je leur ai demandé de ne pas l'utiliser car hors programme mais bien que je leur demande de détailler les étapes de calcul (en revenant à la définition), ils utilisent cette formule. Comment le justifier autrement ? (Je leur ai permis d'utiliser la formule pour vérifier leurs calculs.) » (Artaud 2011, p. 142)

En classe de 4^e^, le programme indique notamment, dans la colonne *Capacités* :

– Comprendre les notations a^n et a^{-n} et savoir les utiliser sur des exemples numériques, pour des exposants très simples et pour des égalités telles que : $a^2 \times a^3 = a^5$; $(ab)^2 = a^2b^2$; $\frac{1}{a^3} = a^{-3}$, où a et b sont des nombres relatifs non nuls.

– Utiliser sur des exemples numériques les égalités : $10^m \times 10^n = 10^{m+n}$; $\frac{1}{10^n} = 10^{-n}$; $(10^m)^n = 10^{m \times n}$ où m et n sont des entiers relatifs.

… alors qu'en classe de 3^e^, il stipule (toujours dans la colonne *Capacités*) :

> Utiliser sur des exemples les égalités : $a^m.a^n = a^{m+n}$; $a^m/a^n = a^{m-n}$; $(a^m)^n = a^{mn}$; $(ab)^n = a^nb^n$; $(a/b)^n = a^n/b^n$ où a et b sont des nombres non nuls et m et n des entiers relatifs.

M. Artaud analyse alors la situation en utilisant le modèle des moments de l'étude, ce dont nous rendons compte très succinctement de la façon suivante :

> On a ainsi une ligne de partage entre la classe de 4^e^ et la classe de 3^e^ qui se dessine grossièrement de la façon suivante : les puissances de 10 sont à l'étude en quatrième du point de vue de la multiplication et de l'inverse et permettent de mettre en place la notation scientifique ; cette étude se poursuit en classe de 3^e^ du point de vue de la division et, plus généralement, ce sont les puissances d'un nombre qui sont à l'étude dans cette classe. […] Ce qui peut rendre viable cette ligne de partage, c'est une gestion adéquate de la dialectique entre le moment exploratoire et le moment technologico-théorique relative aux organisations mathématiques (OM) étudiées. (Artaud 2011, p. 144)

Sans détailler plus avant les deux cas susmentionnés, notons que l'on vient ici de dégager certaines des conditions et des contraintes de la diffusion des praxéologies didactiques dans la profession, en s'attachant à examiner – à partir de questions posées par les professeurs en formation initiale – les problèmes qui se posent à la profession.

IV. CONCLUSION

On notera que, à côté du système didactique principal $S(X ; Y ; Q)$ et afin d'apporter une aide à son fonctionnement, on peut mettre en place des systèmes didactiques auxiliaires – comme par exemple ceux qui sont constitués lors du travail d'étude et de recherche menant à la rédaction et à la soutenance du *mémoire professionnel* dans le cadre de la deuxième année de master. Nous laisserons de côté, dans cette contribution, le travail qui peut être entrepris en liaison avec les autres dispositifs mis en place dans la formation, notamment ceux qui visent à préparer spécifiquement les différentes épreuves du CAPES, qu'il s'agisse des épreuves d'admission ou des épreuves d'admissibilité.

Comme on l'a vu précédemment à l'occasion des *questions de la semaine*, les travaux réalisés autour de différents corpus (rapports de stage, mémoires, recueils de traces écrites d'élèves, etc.), aussi bien dans le cadre de la formation que dans le cadre de la recherche, permettent de dégager des conditions et des contraintes de la diffusion des praxéologies mathématiques dans l'École et des praxéologies didactiques dans la profession. L'un des objectifs du travail réalisé en formation est de faire émerger les problèmes de la profession et de construire des réponses aux questions dégagées, afin de (re)construire des infrastructures didactiques, ce qui passe par l'identification, l'analyse et l'évaluation des réponses $R^\lozenge$ existantes, mais aussi par la recherche et la mise à disposition d'œuvres O outillant le travail de production de $R^\heartsuit$. Il reste ensuite à organiser la *diffusion* et la *réception* dans le « réseau » des formations et, par-delà, dans la profession, tout en sachant que

> construite, la réponse $R^\heartsuit$, n'est pourtant pas un absolu : si elle diffuse dans le réseau que dessinent les formations (initiales et continues) à la profession, si elle « percole » au sein de la profession elle-même, elle apparaîtra bientôt comme une réponse $R^\lozenge$ parmi d'autres, que l'on peut simplement espérer plus proche de l'optimum par rapport à certains ensembles de conditions et de contraintes. (Chevallard et Cirade 2009, p. 59)

La recherche en didactique des mathématiques s'avère ici l'un des moyens clés pour faire évoluer l'institution qui « *devrait* avoir à sa charge d'impulser et de gérer le développement historique du *métier* d'enseignant » (Chevallard sous presse) du statut de *semi-profession* – en empruntant ce terme à Amitai Etzioni (1969) – au statut de *profession*.

REFERENCES

Artaud M. (2007) La TAD comme théorie pour la formation des professeurs. Structures et fonctions. In Ruiz-Higueras L., Estepa A., García F. J. (Eds.) (pp. 241-259) *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD)*. Jaén : Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Artaud M. (2011) Les moments de l'étude : un point d'arrêt de la diffusion ? In Bosch M. et al. (Eds.) (pp. 141-162) *Un panorama de la TAD*. Barcelone : CRM.

Chevallard Y. (1999) Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. In Noirfalise R. (Ed.) (pp. 91-120) *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques*. Clermont-Ferrand : IREM. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=27

Chevallard Y. (2002) Organiser l'étude. Structures & fonctions. In Dorier J.-L., Artaud M., Artigue M., Berthelot R., Floris R. (Eds.) (pp. 3-22) *Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques*. Grenoble : La Pensée sauvage.

Chevallard Y. (2006) *Séminaire de didactique des mathématiques 2005-2006*. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=168

Chevallard Y. (2007) *Séminaire de didactique des mathématiques 2006-2007*. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=168

Chevallard Y. (2009, mai) Remarques sur la notion d'infrastructure didactique et sur le rôle des PER. Conférence prononcée aux *Journées Ampère* tenues à l'INRP, Lyon. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=155&var_recherche=infrastructure+didactique

Chevallard Y. (2010) Où va la didactique ? Perspectives depuis et avec la TAD. In Bronner A., Larguier M., Artaud M., Bosch M., Chevallard Y., Cirade G., Ladage C. (Eds.) *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action* (pp. 923–948). Montpellier : IUFM. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=153

Chevallard Y. (sous presse) L'échec splendide des IUFM et l'interminable passion du pédant. Quel avenir pour le métier de professeur ? Conférence inaugurale du colloque *Regards des didactiques des disciplines sur les pratiques et la formation des enseignants* organisé par le Gridife (Toulouse, France, 20-22 octobre 2010). http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=179&var_recherche=l%27%E9chec+splendide

Chevallard Y., Artaud M. (2000) *L'ordinaire des classes et les novations spontanées*. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=23&var_recherche=L%92ordinaire+des+classes+et+les+novations+spontan%E9es

Chevallard Y., Cirade G. (2009) Pour une formation professionnelle d'université. Éléments d'une problématique de rupture. *Recherche et formation* 60, 51-62. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=149&var_recherche=probl%E9matique+de+rupture

Cirade G. (2006) *Devenir professeur de mathématiques : entre problèmes de la profession et formation en IUFM. Les mathématiques comme problème professionnel*. Thèse de doctorat. http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00120709/fr/

Cirade G. (2008a) Devenir professeur de mathématiques : les mathématiques comme problème professionnel. In Gueudet G., Matheron Y. (Eds.) (pp. 249-277)*Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2007*. Paris : IREM de Paris7/ARDM.

Cirade G. (2008b) Les angles alternes-internes : un problème de la profession. *Petit x* 76, 5-26.

Etzioni E. (1969) *The semi-professions and their organization: Teachers, nurses and social workers*. New York : Free Press.

Marietti J. (2009) *Le concept de PER et sa réception actuelle en mathématiques et ailleurs. Une étude préparatoire*. Mémoire de master 1. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=165

EXEMPLE DE DISPOSITIF DE FORMATION A L'UTILISATION DES JEUX A L'ECOLE POUR LES APPRENTISSAGES MATHEMATIQUES

Pierre EYSSERIC* – Arnaud SIMARD* – Claire WINDER*

Résumé – Les jeux sont souvent utilisés par les professeurs des écoles dans leur pratique professionnelle des mathématiques. Cependant, sans une formation à l'utilisation de ces supports, ils risquent de ne pas déboucher sur de réels apprentissages. Les auteurs présentent dans cette contribution un dispositif de formation de professeurs des écoles sous-tendu par deux questions : 1) En quoi un jeu peut devenir un support d'apprentissage pour les mathématiques ? 2) Comment le mettre en œuvre de façon pertinente dans une classe ?

Mots-clefs : jeu ; apprentissage ; école primaire ; variables ; trace écrite

Abstract – Games are often used by primary school teachers in their professional practice of the mathematics. However, without a formation in the use of these supports, they risk not to result in learnings. In this contribution, the authors present a device of formation of primary school teachers underlain by two questions: 1) How can a game become a support of mathematics studies ? 2) How to implement it in a relevant way in a class?

Keywords : game ; learning ; primary school ; variable ; written trace

Les jeux sont souvent utilisés par les professeurs des écoles dans leur pratique professionnelle des mathématiques ; une directive officielle française récente les y incite même. Cependant, sans une formation à l'utilisation de ces supports, ils risquent de ne pas déboucher sur de réels apprentissages. D'où le double questionnement : en quoi un jeu peut-il servir de support d'apprentissage ? comment le mettre en pratique de façon efficiente dans une classe ?

Pour pouvoir répondre à ces questions, nous avons choisi une méthodologie d'analyse *a priori* consistant à explorer les situations mathématiques liées aux jeux pour en dégager les caractéristiques des jeux, puis de donner des pistes pour transformer ces situations en scénarios didactiques. Dans une première partie, nous dégageons donc « l'architecture mathématique » de quelques jeux de société usuels en mettant en évidence les cadres d'apprentissage dans lesquels ils pourront avoir une place à l'école primaire. Une deuxième partie décline des conditions de mise en œuvre dans une classe.

Enfin la dernière partie présente un module de formation de professeur des écoles dans lequel ces analyses sont intégrées, ainsi que des pistes pour une formation de formateurs.

I. ARCHITECTURE MATHEMATIQUE DE JEUX USUELS

1. Présentation de la démarche d'analyse d'un jeu

Il s'agit de dégager les éléments génériques d'un jeu, c'est-à-dire à la fois la structure mathématique sous-jacente et les modalités caractéristiques du jeu.

Ces éléments conduisent d'abord à identifier les domaines mathématiques dans lesquels le jeu trouve sa place et préciser les notions mathématiques dont la pratique du jeu servira à des fins d'apprentissage.

Ils permettent également d'accéder à la déclinaison de différentes variantes utiles pour adapter ce jeu, en fonction des compétences visées, à divers types de publics.

* COPIRELEM – France – p.eysseric@aix-mrs.iufm.fr, arnaud.simard@univ-fcomte.fr, claire.winder@free.fr

© Eysseric P., Simard A., Winder C. (2012) Exemple de dispositif de formation à l'utilisation des jeux à l'école pour les apprentissages mathématiques. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT2, pp. 324–336). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

Nous illustrons notre démarche à partir des jeux suivants, qui font partie du patrimoine culturel français : le loto, les dominos, le jeu de l'oie, la bataille et le morpion.

2. *Le loto*

Règle et déroulement usuels du jeu

Le jeu de loto est un jeu de société fondé sur le hasard. Le nombre de joueurs n'est pas limité.

Chaque joueur dispose d'un ou plusieurs cartons ainsi que d'un petit sac de graines. Sur chaque carton figure une grille comportant trois lignes et neuf colonnes. Parmi les cellules qui en résultent, quatre, dans chaque ligne, sont vides alors que cinq comportent un nombre (de 1 à 90). Ainsi chaque carton affiche quinze nombres.

Des jetons sur lesquels figurent les nombres sont placés dans un sac opaque. Un meneur de jeu prélève au hasard dans ce sac un jeton désignant l'un des nombres. Si ce nombre est présent sur le carton d'un joueur, celui-ci dépose une graine sur l'emplacement correspondant de son carton.

Le gagnant est celui qui remplit le premier soit une ligne, soit un carton selon la règle choisie. Il remporte alors un lot.

Architecture du jeu

C'est un jeu de mise en relation. Il s'agit d'associer, lorsque c'est possible, un élément d'une première collection à un élément d'une deuxième collection.

- La règle d'association peut être définie mathématiquement par une relation d'équivalence entre les éléments des deux collections
- Les collections peuvent être réelles ou représentées.
- Les éléments de la deuxième collection sont répartis entre les joueurs en sous-collections non forcément disjointes.

Variables du jeu

Organisation : collectif ; petit groupe ; à deux ; individuel.
Statut du meneur : maître ; élève ; pas de meneur.
Tirage des éléments de la première collection : aléatoire ou non.
Exhibition de l'élément de la première collection : montrer ; nommer ; montrer et nommer ; décrire.
Éléments des collections : réels ; représentés.
Nature de la relation d'équivalence : identité ; équipotence ; équivalence de grandeur ; équivalence de forme ; désignation du même objet ;…
Nombre d'éléments par sous-collection (deuxième collection).
Validation : la validation peut se faire par les joueurs, par le maître, par d'autres élèves ; elle peut intervenir en cours de jeu ou en fin de jeu ; plusieurs modalités sont possibles (utilisant ou pas le matériel par exemple). Ces choix sont à expliciter avant la mise en œuvre du jeu pour palier les difficultés et les débats annexes qui peuvent nuire à la qualité des séances.

Domaines mathématiques

Les domaines mathématiques qu'il est envisageable d'aborder avec le jeu de loto sont liés à la nature des éléments des collections et à celle de la relation d'équivalence.

Numérique (nombres et/ou calculs) : les éléments des collections sont des nombres représentés par une constellation, une écriture chiffrée, une écriture utilisant les signes d'opérations, … ou encore des représentations de collections d'objets organisées ou non.

Géométrique : les éléments des collections sont des formes ou des assemblages de formes, des noms de formes, des représentations par le dessin ou par la description, …

Grandeurs : les éléments sont des objets réels ou représentés à comparer par rapport à leurs longueurs, leurs masses, leurs contenances, …

Logique (classements) : les éléments sont des objets réels ou représentés, classés selon un critère (couleur, taille, …).

Un loto additif en début de CE1 – 7-8 ans, 5ème année du primaire (ERMEL, pp. 170-173)

Le maître tire une carte sur laquelle figure un calcul. Si le résultat correspond à un nombre inscrit sur l'un des cartons de l'élève, celui-ci marque un point.

Domaine mathématique : numérique ; sont en jeu les nombres de 1 + 2 à 9 + 9 puisque l'objectif spécifique de ce jeu est l'entraînement à la mémorisation et (ou) la reconstruction rapide des résultats du répertoire additif.

Règle d'association : identité.

	16		13
11		17	
	14		12
9		15	

4 + 1	8 + 2	9 + 2
5 + 4	8 + 7	9 + 7
7 + 3	8 + 8	9 + 8
7 + 6	8 + 9	9 + 9

***Figure 1** – Exemple de carton et de calculs figurant sur les cartes du loto additif*

Un loto des formes – le jeu des doubles au cycle 2 – 6-8 ans, 4ème/5ème années

Il s'agit de trouver 2 pièces superposables qui composent une silhouette. Les pièces sont au centre de la table et chaque joueur, à son tour, observe sa « carte » et prend deux pièces identiques; si elles conviennent, elles sont posées sur le carton, dans l'empreinte correspondante ; sinon, elles sont remises et on passe au joueur suivant.

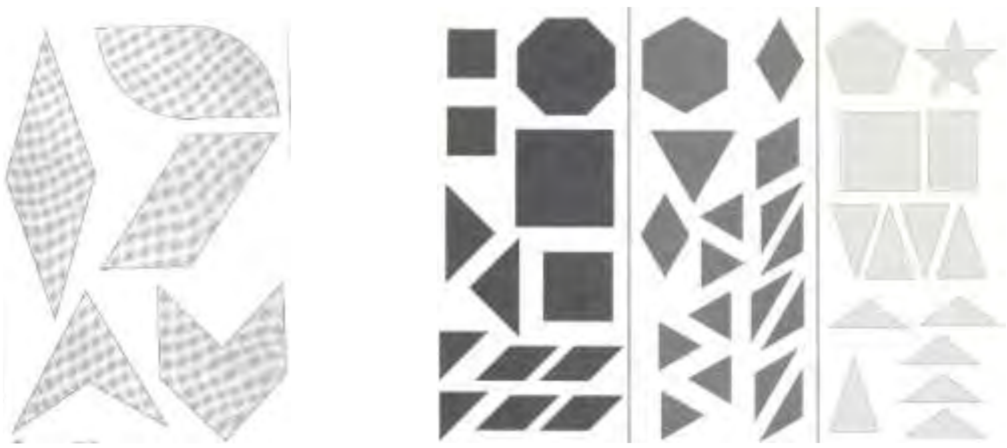


***Figure 2** – Exemple de carton et de formes figurant dans les lotos des formes (Bettinelli 1995)*

3. Les dominos

Règle et déroulement usuels

Le jeu de dominos est un jeu de société d'origine chinoise, mélangeant hasard et stratégie. Il comporte 28 pièces, réparties en nombre égal entre les joueurs (entre deux et sept joueurs). Une pioche est constituée avec les quelques dominos restants après le partage équitable (lorsque le nombre de joueurs n'est pas 4, ni 7).

Les joueurs cherchent à former une ligne en plaçant à tour de rôle un domino. Deux dominos se touchent à la seule condition de représenter la même quantité de points. Quand un joueur ne peut pas poser de domino dans la chaîne, il pioche ou passe son tour.

Le jeu s'arrête lorsque l'un des joueurs a posé tous ses dominos ou lorsque le jeu est complètement bloqué. Le gagnant est le joueur qui totalise le moins de points avec ses dominos restants.

Architecture

C'est un jeu de mise en relation. Il s'agit d'associer, lorsque c'est possible, une représentation à une autre. La règle d'association peut prendre différentes formes.

L'architecture de ce jeu, très proche de celle du jeu de loto, permet une transposition de l'un à l'autre, de la plupart des situations construites. Le loto sera davantage utilisé dans des modalités en collectif ou en petit groupe, alors que les dominos seront plus adaptés à un travail par deux ou en individuel.

Variables

Organisation : collectif ; petit groupe ; à deux ; individuel.
Nature de la règle d'association : équivalence : identité ; équipotence ; équivalence de grandeur ; équivalence de forme ; règle de désignation du même objet ; complémentarité (par exemple compléments à 10) ; relation fonctionnelle (par exemple associer un nombre à son double) ; relation d'ordre ; …
Éléments des collections : réels ; représentés.
Tirage des plaques[1] déposées : aléatoire ou non.
Forme des plaques : dominos (deux possibilités pour associer), « triminos » (trois possibilités pour associer), « quadriminos » (quatre possibilités pour associer), …

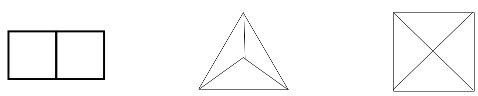


Figure 3 – *Domino, « Trimino », « Quadrimino »*

Validation : qui ? comment ? à quel moment du jeu ?

Domaines mathématiques

De même que pour le jeu de loto, les domaines mathématiques qu'il est envisageable d'aborder avec le jeu de dominos sont liés à la nature des éléments des collections et à la règle d'association : numérique (nombres et/ou calculs), géométrique, grandeurs, logique (classements).

[1] Un domino correspond à un espace support de représentations de plusieurs éléments d'une collection, d'où la dénomination « plaque ».

Les dominos permettent un travail centré sur des relations fonctionnelles entre éléments d'une collection qui n'est pas aussi pertinent avec le loto (par exemple, associer un nombre à son suivant, associer un nombre à son double, …).

Le domino des cartes de Noël en MS – 4-5 ans, 2ème année (Brégéon 1994, p. 13)

16 cartes portent chacune une demi-image. Deux dominos peuvent s'associer si les deux demi-images forment une image complète. La validation s'effectue immédiatement en juxtaposant les deux cartes.

Domaine mathématique : géométrie.

Règle d'association : relation de symétrie.

4. *Le jeu de l'oie*

Règle et déroulement usuels

Traditionnellement, le jeu de l'oie comprend 63 cases disposées en spirale enroulée vers l'intérieur et comportant un certain nombre de pièges.

À tour de rôle, chaque joueur lance les deux dés, et fait le total des points. Il avance alors son pion du nombre de cases correspondant au nombre obtenu, puis doit respecter les consignes de la case sur laquelle il arrive. Le but est d'arriver le premier à la dernière case.

Architecture

Il est considéré comme l'ancêtre des jeux de parcours actuels : il s'agit de déplacer un (ou plusieurs) pion(s) sur une piste orientée, en fonction d'indications données par le jet de dé(s) et/ou par les cases du parcours. Ces indications peuvent prendre différentes formes :

- les constellations des dés indiquent le nombre de cases d'un déplacement ;
- le codage des cases peut indiquer un nouveau déplacement, en avançant ou en reculant, le nombre de cases étant soit défini par le jet de dés (ex : si un joueur arrive sur la case 27, il avance de nouveau du même nombre de cases), soit prédéfini dans le jeu (ex : si un joueur arrive sur la case 42, alors il retourne sur la case 30) ;
- le codage des cases peut également indiquer une action (exemple : si un joueur arrive sur le puits, case 31, alors il devra attendre qu'un autre joueur le délivre en prenant sa place).

Variables

Nombre de pions par joueur : un ou plusieurs.
Nature du(des) pion(s) : le joueur ; une figurine (bonhomme, cheval,…) soulignant l'orientation ; un pion ou un jeton (non orienté).
Nature de la piste : piste simple ou parcours de plusieurs pistes possibles dont le choix est laissé au joueur ; piste orientée ou pas.
Nombre de plans de jeu et partage de la piste de jeu : une seule piste partagée par tous les joueurs sur un unique plan de jeu ; une piste par joueur sur un support de jeu partagé ; une piste et un support de jeu par joueur.
Espace de jeu : micro ou méso espace.
Longueur de la piste : nombre de cases.
Nature des cases : avec ou sans consignes ; avec ou sans codage.
Nature du déplacement : déplacement d'un nombre de cases donné ; déplacement jusqu'à une case contenant un élément déterminé par le jet de dé (par exemple forme présente sur la face supérieure du dé).
Ce qui provoque le déplacement : une consigne du maître ; un ou plusieurs dés ; une ou

plusieurs cartes ; …
Présence ou pas d'un déplacement « blanc » : par exemple le dé tombe sur une face blanche qui oblige à attendre le tour suivant pour se déplacer.
Organisation : collectif ; petit groupe ; à deux ; individuel.
Validation : qui ? comment ? à quel moment du jeu ?

Domaines mathématiques

Quel que soit le domaine mathématique dans lequel on peut proposer ce jeu, des compétences de l'ordre de la structuration de l'espace, liées au déplacement sur une piste orientée, sont mises en œuvre.

Numérique (nombres et/ou calculs) : le déplacement est indiqué par une donnée d'ordre numérique ; les nombres sont énoncés, ou représentés par une constellation, une écriture chiffrée, une écriture utilisant les signes d'opérations, … ou des représentations de collections d'objets organisées ou non sont proposées, … ou enfin des signaux sonores sont donnés.

Géométrique : le déplacement est indiqué par une donnée d'ordre géométrique ; des informations d'ordre géométrique figurent sur les cases du parcours ; ce sont des formes ou des assemblages de formes, des noms de formes, des représentations par le dessin ou des descriptions de forme, …

Logique (classements) : le déplacement est indiqué par un critère ; la case de destination doit être conforme à celui-ci (couleur, taille, ouvert/fermé…).

La mare aux canards en PS – 3-4 ans, 1ère année (Champdavoine 1992, p. 20)

La piste (une par joueur) est formée de cases de couleur (rouge, verte, bleue ou jaune) et mène à une mare dans laquelle s'ébattent trois canards. À tour de rôle, les joueurs déplacent leur bonhomme jusqu'à la prochaine case de la couleur indiquée par le dé. Lorsque le bonhomme se trouve sur la dernière case avant la mare, le joueur prend un canard et replace son bonhomme au départ.

Domaine mathématique : logique

Règle de déplacement : critère de conformité à la couleur.

5. La bataille

Règle et déroulement usuels

Ce jeu de hasard se joue habituellement à deux joueurs (mais le nombre de joueurs peut être supérieur).

On distribue l'ensemble d'un jeu de cartes (52 ou 32) aux joueurs, qui n'en prennent pas connaissance.
À chaque tour, les joueurs retournent la carte du haut de leur tas. Celui qui possède la carte de la plus haute valeur — selon la hiérarchie décroissante : As, Roi, Dame, Valet, 10 ... jusqu'au 2 — gagne les cartes posées sur la table, qu'il place sous son tas. En cas d'égalité de valeurs, les joueurs en ballottage disent « bataille ! », et commencent par placer une première carte face cachée puis une seconde carte face visible pour décider qui gagnera le tour. En cas de nouvelle égalité, la procédure est répétée.
Le gagnant est celui qui a en sa possession toutes les cartes du jeu (ou le plus de cartes du jeu à un instant d'arrêt défini).

Architecture

C’est un jeu de comparaison, dont la règle peut être définie mathématiquement par une relation d’ordre soit entre des grandeurs, soit entre des quantités, soit entre des nombres.

Les collections ou les objets peuvent être réels ou représentés.

Variables

Organisation : collectif ; petit groupe ; à deux ; individuel.
Nature de la relation de comparaison : comparaison de quantités (d’objets quelconques, de sommets pour un polygone ou un solide …); comparaison de grandeurs (longueurs, aires, masses …) ; comparaison de nombres (fractions, entiers, résultants ou pas de calculs…) ou de mesures.
Nature des objets comparés : collections ; formes géométriques planes ; solides ; objets ; désignations ; résultats de calculs.
Collections ou objets : peuvent être réels ou représentés.
Obtention des objets à comparer : choix délibéré ou hasard.
Validation : qui ? comment ? à quel moment du jeu ?

Domaines mathématiques

La bataille est un jeu de comparaison donc, seuls deux domaines mathématiques peuvent être abordés :

Numérique (nombres et/ou calculs) : les nombres sont énoncés, ou représentés par une constellation, une écriture chiffrée, une écriture utilisant les signes d’opérations, … ou encore des représentations de collections d’objets organisées ou non.

Grandeurs et mesure : les éléments sont des objets ou des assemblages d’objets, des représentations de ces objets ou assemblages ; on utilise la comparaison directe ou on a recours à la mesure ; dans ce dernier cas, les mesures peuvent être exprimées dans la même unité ou dans des unités différentes.

La bataille des constellations[2] en CM1 – 9-10 ans, 7ème année

Trois types de cartes sont mélangés : des cartes sur lesquelles figurent des nombres, des cartes sur lesquelles figurent des produits ainsi que des cartes-constellations (rendant possibles plusieurs lectures des collections selon le point de vue adopté).

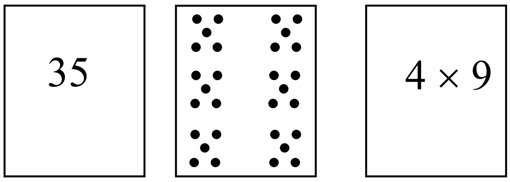


Figure 4 *– Cartes de la « bataille des constellations »*

Domaine mathématique : numérique. Il s’agit de travailler à la fois sur la compréhension de la multiplication (comme addition réitérée ou dans le cadre de la configuration rectangulaire), et à œuvrer à la mémorisation de certains faits numériques.

Relation de comparaison : comparaison de nombres entiers naturels.

6. Le morpion

Règle et déroulement usuels

[2] À partir d’un travail du groupe 1er degré de Draguignan, IREM de Nice, 2009/2010.

Ce jeu de stratégie se joue à deux avec papier et crayon.

À tour de rôle, chaque joueur inscrit son symbole sur les nœuds d'un quadrillage limité seulement par la taille de la feuille.

Le premier qui réussit un alignement de cinq de ses symboles ~~consécutifs~~ (horizontalement, verticalement, ou en diagonale), gagne la partie.

Architecture

C'est un jeu d'alignement.

Variables

Nature des symboles alignés : jetons, formes (comme dans le jeu Quarto[3]), nombres (comme dans le morpion numérique), …
Espace du jeu : plan horizontal ou vertical, espace en trois dimensions (comme dans Tic-tac-toe 3D[4]) ; micro espace ou méso espace.
Nombre de symboles à aligner.
Organisation : collectif ; petit groupe ; à deux ; individuel.
Validation : qui ? comment ? à quel moment du jeu ?

Domaines mathématiques
La notion d'alignement est présente dans le jeu, objet ou outil d'apprentissage selon le choix des variables.

Structuration de l'espace : un type de symbole par joueur, l'enjeu est l'apprentissage de l'alignement.

Numérique (nombres et/ou calculs) : par exemple on doit aligner des nombres donnant une somme donnée ou bien aligner des nombres égaux données par des écritures différentes figurant sur les pions que les joueurs déposent chacun à leur tour sur la grille.

Géométrique : alignement d'objets ayant en commun une caractéristique géométrique.

Logique : alignement d'objets ayant plusieurs critères à prendre en compte (comme par exemple dans une des versions de Quarto).

Le morpion numérique en CE1/CE2 – 7-9 ans, 5ème et 6ème années (Jeux 2, 1985, pp. 30-31)

Il s'agit de réaliser le plus possible d'alignements de trois cases contigües (horizontalement, verticalement ou diagonalement) portant des nombres naturels dont la somme fait 11.
Domaine mathématique : numérique.

II. MISE EN ŒUVRE DANS LA CLASSE

Si on veut que ces jeux deviennent de véritables outils au service des apprentissages à l'école, il est nécessaire de surmonter la contradiction apparente entre le jeu dont la vocation première est le loisir, la distraction, … et l'école centrée sur les apprentissages.

Le simple repérage de savoirs mathématiques associés à un jeu ne garantit pas l'existence d'un apprentissage de savoirs mathématiques en jouant. Tout au plus aura-t-on une mise en œuvre dans le jeu de connaissances mathématiques que l'élève sera ensuite incapable de réutiliser en dehors du contexte de jeu. Il est nécessaire de procéder à un minimum de

---

[3] Jeu créé par Muller, édité par Gigamic (1995) présenté dans Jacquet (1995/1996)
[4] C'est une variante du jeu puissance 4 mais dans l'espace, édité par Goki (2009).

« didactisation » du jeu afin que chacun des acteurs de la situation ait conscience que certes on joue, mais qu'on joue pour apprendre !

Pour cela, il faut dans un premier temps adapter le jeu au temps de la classe (partie d'une dizaine de minutes au maximum), ainsi qu'aux apprentissages visés : partir du savoir mathématique pour proposer un jeu adapté et non l'inverse.

Le jeu pourra être utilisé à différents moments de l'étude : découverte d'une notion au travers d'un jeu dans lequel elle intervient ; entraînement à l'utilisation de certaines techniques ; confrontation au travers d'un jeu à des problèmes ; …

Dans tous les cas, l'efficacité du jeu pour les apprentissages va résider dans la capacité de l'enseignant à faire alterner les moments de jeu « pur » qui vont avoir un impact important dans l'enrôlement des élèves et dans leur motivation pour les apprentissages liés au jeu, et les « exercices de jeu » qui vont permettre à l'élève de prendre de la distance par rapport au jeu, de réfléchir sur le jeu et de s'approprier les savoirs mathématiques qui y sont reliés. Ces exercices de jeu vont se matérialiser dans la classe par des écrits collectifs et/ou individuels que nous qualifierons de « mémoire de jeu ».

1. *La mémoire de jeu.*

Nous reprenons cette expression utilisée par Rodriguez (1993) analysant les conditions pour mettre un jeu au service des apprentissages mathématiques ; cette analyse s'appuyait sur le concept de « trame » par Descaves (1992), pour remplacer, avec un gain de souplesse, celui de progression.

Une mémoire de jeu sera une trace écrite qui rendra compte :

- Soit de tous les instants du jeu ;
- Soit de certains moments décisifs : lorsqu'un choix doit être fait par le joueur, pour décider du gagnant en fin de partie, …

Elle est élaborée par chaque joueur et lui permet de revenir en arrière au cours d'un jeu pour analyser ses choix et leur impact : analyse d'erreurs, comparaison et formulation de stratégies, …

Elle peut s'appuyer dans un premier temps sur des exercices de jeu proposés par l'enseignant, conduisant à mettre en lumière certaines procédures ou certaines stratégies.

Elle peut ensuite déboucher sur des exercices de jeu dont l'objectif est d'améliorer certaines stratégies ou de s'entraîner à la mise en œuvre de techniques dont la maîtrise s'est avérée importante dans le jeu.

Des mémoires de jeux pourront aussi être utilisées en classe comme illustrations lors des phases d'institutionnalisation des savoirs mathématiques rencontrés dans les jeux, mais il faudra penser à la décontextualisation et donner aussi des exemples pris en dehors des jeux.

En maternelle, le recours à des mémoires de jeu sera très limité. En revanche, les exercices de jeu, sous la forme de « jeu interrompu » au sens de Bolon (1994) sont parfaitement adaptés.

2. *Exemples de jeu interrompu, de mémoires de jeu et d'exercices de jeux à partir du jeu de l'oie*

Le jeu de l'oie est un jeu de hasard.

Le *jeu interrompu* consiste à faire parler les enfants, au cours d'une partie, sur ce qui serait favorable ou défavorable, c'est-à-dire leur faire préciser quelle face du dé ils souhaiteraient obtenir et les raisons de ce souhait. Dans le jeu interrompu, le nombre devient un outil qui permet d'anticiper les déplacements.

Un exercice de jeu pourra consister en un jeu durant lequel la mémoire de jeu est constituée.

En cycle 2, une *mémoire de jeu* peut prendre plusieurs formes :

- à partir de la représentation de la piste

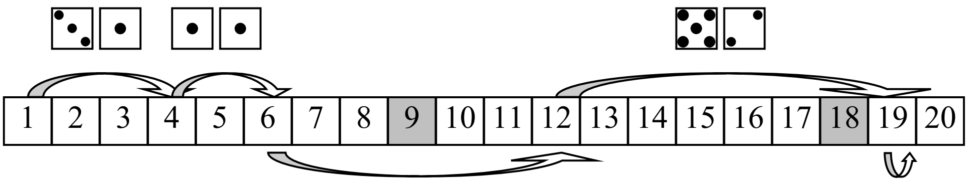


***Figure 5** – Premier exemple d'un début de partie*

- sous forme d'un tableau

Jets de dés obtenus					…
Cases atteintes	D	4	6 → 12	19 – 19	

***Figure 6** – Deuxième exemple d'un début de partie*

D'autres exercices de jeu peuvent s'appuyer sur l'une ou l'autre de ces mémoires de jeu. Par exemple :

- Deux données étant connues (la case sur laquelle se trouve le pion avant le déplacement, celle sur laquelle il se trouve après, ou le jet de dés), il faut trouver la troisième donnée. Il s'agit de problèmes du champ additif, de type transformation d'état (Vergnaud 1986), la transformation étant positive, avec recherche de l'état final, de l'état initial ou de la transformation elle-même.
- On connaît la case sur laquelle se trouve le pion, il s'agit de proposer un jet de dés le plus (ou le moins) favorable possible. Il s'agit ici de mettre en œuvre un raisonnement logique consistant à examiner tous les possibles.

Un autre exercice de jeu peut consister en une variante du jeu de l'oie, par exemple en introduisant un deuxième pion par joueur, le déplacement de l'un ou de l'autre (ou des deux) en fonction des dés étant laissé à la charge du joueur. Dans ce cas, le joueur doit envisager les déplacements possibles de chacun des pions pour décider du plus favorable ou du moins défavorable. Le nombre est alors un outil permettant l'anticipation.

3. *Autres exemples*

Pour le jeu de loto, une mémoire de jeu peut être un tableau de correspondance entre les éléments de la première collection et ceux de la deuxième, ou un extrait de ce tableau.

Tirage	8 + 7	5 + 4	9 + 5	8 + 5	4 + 1
Nombre présent sur mon carton	15	-	-	13	5

Figure 7 *–Exemple d'un extrait de tableau de correspondance entre les deux collections dans le cas d'un loto additif en début de CE1 (7-8 ans)*

Comme exercice de jeu, on peut proposer une grille de jeu partiellement remplie et solliciter l'élève pour anticiper l'élément qui doit être tiré au sort pour qu'il gagne au coup suivant. Dans le cas du loto additif cité ci-dessus, l'élève doit *produire* une décomposition additive du nombre concerné. Production d'un résultat et production d'une décomposition s'enrichissent l'un l'autre grâce à cet exercice de jeu.

Pour le jeu de bataille, les reproductions de différentes situations de jeu avec le résultat de la comparaison serviront de mémoires du jeu ; elles seront aussi utilisées pour proposer aux élèves divers exercices de jeu destinés à renforcer l'appropriation des techniques rencontrées.

III. MISE EN ŒUVRE EN FORMATION

1. En formation initiale et continue de Professeurs des Écoles

En tant que formateurs d'enseignants du premier degré, nous avons décidé de mettre en œuvre une stratégie d'homologie (Kuzniak 1994). Pour cela, nous mettons en scène une situation d'enseignement des mathématiques par le jeu, que nous développons d'une manière conforme à notre conception de l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire. Ce type particulier de stratégie d'imitation nécessite donc une transposition de la part de l'enseignant stagiaire, mais permet également d'apporter simultanément des compléments mathématiques et didactiques sur un temps court.

L'activité se déroule en deux temps. Les stagiaires sont tout d'abord mis dans une situation de jouer, puis de construire des mémoires de jeu et enfin d'être confrontés à des exercices de jeu, ce qui leur permet de percevoir compétences et connaissances concernées par ces activités. L'activité terminée, nous analysons alors avec les stagiaires la situation d'un point de vue didactique, sans oublier le travail de la transposition didactique.

De plus, il nous semble particulièrement fécond, dans le cadre d'une formation initiale et/ou continue, de proposer à des groupes un jeu de société usuel et de leur demander de réaliser le travail exposé en première partie de cet article, à savoir dégager l'architecture mathématique du jeu et les cadres d'apprentissage dans lesquels il pourra être utilisé à l'école. La confrontation des différentes analyses permet alors d'élaborer des scénarios pour la classe adaptés aux différents apprentissages visés.

Les stagiaires s'approprient ainsi l'intégralité de la démarche d'intégration d'un jeu aux apprentissages mathématiques :

- Analyse du jeu et mise en évidence de son architecture mathématique ;
- Exploration des différentes variables pour passer du jeu de société particulier envisagé au départ aux caractéristiques génériques du jeu ;
- Inventaire des cadres mathématiques dans lesquels le jeu générique pourra être décliné ;

- Situation d'homologie autour de certains de ces jeux permettant de construire et de s'approprier mémoires de jeu et exercices de jeu ;
- Construction de nouveaux scénarii pour la classe en utilisant les variables pour des déclinaisons par niveau de classe et des progressions dans l'utilisation d'un jeu.

2. *En formation de formateurs*

Ce type de démarche trouve aussi sa place dans le cadre d'une formation de formateurs ; c'est ce que nous proposons lors d'un atelier du colloque COPIRELEM 2011 afin de provoquer une réflexion sur cette utilisation des jeux dans le cadre des apprentissages mathématiques à l'école.

Après avoir mis les formateurs dans la même situation (jouer, construire des mémoires de jeu, être confrontés à des exercices de jeu, dégager l'architecture du jeu), nous analysons avec eux la situation d'un point de vue didactique, sans oublier le travail de la transposition didactique pour les stagiaires Professeurs des Écoles.

Nous comptons ainsi que les formateurs utiliseront cette situation en l'adaptant au public concerné (formation initiale ou continue)[5].

IV. CONCLUSION

Pour terminer, il semble utile de revenir sur les jeux proposés dans le cadre de ce travail de formation.

Nous avons choisi de privilégier parmi les jeux de société, les grands classiques du patrimoine culturel français. Ces jeux permettent de disposer d'un panorama à peu près complet des structures mathématiques présentes dans le champ des apprentissages mathématiques de l'école[6] :

- Les jeux d'association comme le loto, les dominos ou, plus généralement les jeux de mariages qui conduisent à la constitution de couples dont les éléments sont reliés soit par une relation d'équivalence, soit par une relation fonctionnelle, soit par une relation d'opposition (négation).
- Les jeux de déplacement sur une piste qui permettent la mise en relation entre le nombre, mémoire d'une position sur la piste, et le nombre, mémoire d'une quantité (le nombre de cases du déplacement) ; ce lien, abordé ici dans un contexte discret, préfigure le rôle de la droite numérique dans la compréhension des nombres.
- Les jeux de comparaison comme le jeu de bataille qui mettent en jeu une relation d'ordre total entre les éléments d'une collection.
- Les jeux d'alignement de la famille du morpion en lien avec la structuration spatiale.

D'autre part, ce choix des jeux permet une économie appréciable dans les classes en ce qui concerne le temps nécessaire à l'appropriation des règles qui sont simples et souvent connues d'une partie des élèves. Il facilite un recentrage de l'activité sur les savoirs mathématiques et évite de transformer le jeu, outil d'apprentissage, en un objet d'étude.

---

[5] De nombreux exemples de ce type de situations sont analysés dans l'ouvrage *Concertum* édité par la COPIRELEM (2003).

[6] Dans cet article manquent les jeux qui, comme le jeu des familles mettent en jeu simultanément une relation d'équivalence et une relation d'ordre total ou partiel entre les éléments.

REFERENCES

Ayme Y. et al. (2006) Dossier : Le jeu en classe. *Cahiers pédagogiques* 448, 9-62.
Bettinelli B. (1995) La *moisson des formes : matériel et livret pédagogique*. Lyon : Aléas Éditeur.
Bolon J. (1994) Comment analyser un jeu mathématique. *Documents pour la formation des professeurs des écoles en didactique des mathématiques* tome III. *COPIRELEM*, 57-60.
Boule F. (1985) *Manipuler, organiser, représenter.* Paris : Armand Colin.
Boule F. (2002) *Jeux de calcul à l'école*. Paris : Bordas.
Brégéon J.-L. et al. (1994) *Maths en pousse - 17 jeux mathématiques en MS*. Paris : Nathan.
Brousseau G. (2002) Les doubles jeux de l'enseignement des mathématiques. *Questions éducatives, l'école et ses marges : didactique des mathématiques* 22/23, 83-155.
Champdavoine L. (1992) *Les mathématiques par les jeux : PS*. Paris : Nathan.
De Grandmont N. (1999) *Pédagogie du jeu : jouer pour apprendre*. Québec : Ed Logiques.
Descaves A. (1992) *Comprendre des énoncés, résoudre des problèmes*. Paris : Hachette.
Eysseric P. (1999) Des jeux et des mathématiques de la maternelle au CM2. *Bulletin de l'APMEP* 420, 5-14.
ERMEL (1990) *Apprentissages numériques en Grande Section de maternelle*. Paris : Hatier.
ERMEL (1999) *Apprentissages numériques et résolution de problème en CE1*. Paris : Hatier.
Groupe Jeux APMEP (1985) Jeux 2 : jeux et activités numériques. *Bulletin de l'APMEP* 59.
Groupe Jeux APMEP (2009) Jeux ECOLE. *Bulletin de l'AP.MEP* 187.
Jacquet F. (1995/1996) Quarto. *Grand N* 58, 103-106
Jullemier G. (2005) *Jouer pour apprendre*. Paris : Hachette.
Kryzwanski N. (2004) *Apprendre la numération avec des jeux de cartes*. Paris : Retz.
Kryzwanski N. (2007) *Jeux de dés et numération*. Paris : Bordas.
Kuzniak A. (1994) *Étude des stratégies de formation en mathématiques utilisées par les formateurs des maîtres au premier degré*. Thèse de doctorat. Université Paris 7.
Martin F. (2003) *Apprentissages mathématiques : jeux en maternelle*. CRDP Aquitaine.
Peltier et al. (2000) *Géoloie et autres jeux mathématiques à l'école Clément Maroy*. IREM de Rouen.
Quintric C. (1999/2000) Jeux de société et apprentissages mathématiques au cycle 1. *Grand N spécial maternelle*, 145-168.
Robinet J. (1987) Quelques réflexions sur l'utilisation des jeux en classe de mathématiques. *Cahiers de didactique* 34. IREM Paris 7.
Rodiguez A. (1993) Dossier Mathématiques : jouez le jeu ! *Journal des Instituteurs* 49-63.
Vergnaud G. (1986) Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques. *Grand N* 38 21-40.

QUALITÉ D'ANALYSES DE LECONS DE MATHÉMATIQUES : QUELS CRITÈRES ?

Ruhal FLORIS* – Laura WEISS* – Hedwige AYMON** – Eliane FERREZ***

Résumé – La recherche présentée ici s'est attachée à définir et mettre à l'épreuve des critères permettant de caractériser l'analyse d'un extrait de leçon de mathématiques. Les critères choisis sont d'ordre didactique et distinguent différents niveaux d'analyse : curriculum, thème, leçon, épisode. La qualité de l'argumentation et les références théoriques sont également prises en compte. Le corpus est constitué de vingt textes produits dans le cadre d'un cours de formation de formateurs (pré et post tests). L'utilisation de ces critères a permis de mettre en évidence une évolution des analyses faisant appel à des concepts théoriques.

Mots-clefs : analyse de pratiques, vidéo, didactique des mathématiques, formation d'enseignants, lesson study

Abstract – The research presented here defined and tested criteria to characterize the analysis of an extract of math lesson. The criteria chosen are didactic (content) and distinguish different levels of analysis: curriculum, theme, lesson, episode. The quality of the arguments and theoretical references are also taken in account. The research body consists of twenty texts produced in a training of trainers course (pre and post tests). The result is an increase of the use of theoretical concepts in the trainers analysis.

Keywords: practice analysis, video, mathematics education, teacher training, lesson study

I. INTRODUCTION

Ce texte se propose de travailler deux des questions de l'appel à contributions du GT2, en particulier celle du lien entre formation et recherches en didactique des mathématiques (question 3), mais aussi celle des dispositifs de formation (question 2), dans le cas particulier d'une formation de formateurs d'enseignants de mathématiques.

Parmi les objectifs explicites des formations d'enseignants, on trouve très souvent la capacité d'analyse réflexive. Ainsi, dans le référentiel de compétences de la Haute Ecole Pédagogique VD (canton de Vaud), on peut lire : « Recourir à des savoirs théoriques et réfléchir sur sa pratique pour réinvestir les résultats de sa réflexion dans l'action ».

Ces visées ne sont pas nouvelles. Dewey (1933), d'abord, puis Schön (1983) par exemple, ont étudié les rapports qu'entretiennent 'théorie' et 'pratique' dans le travail d'un professionnel, en développant le concept de praticien réflexif. Mais sur quelle 'théorie' se baser et comment professionnaliser les enseignants ?

Un premier pas vers la professionnalisation pourrait être celui d'utiliser un langage technique précis et partagé. Lortie (1975) remarquait qu'en Amérique l'enseignement était l'une des rares professions dépourvue d'un tel langage. C'est également le cas en Europe, alors qu'au Japon, on trouve des termes extrêmement précis, par exemple le « hatsumon », qui désigne une action ayant pour but de susciter une réflexion approfondie des élèves ; ces termes sont même décrits dans des dictionnaires professionnels (Yoshida 1999).

Le caractère assez grossier, voire caricatural, du vocabulaire dont disposent enseignants et formateurs d'enseignants se retrouve dans la présentation, dans certaines institutions de formation, d'objets tels la leçon « transmissive », « behavioriste » ou « socioconstructiviste »

* IUFE, Université de Genève – Suisse – ruhal.floris@unige.ch, laura.weiss@unige.ch
** HEP-Valais – Suisse – hedwige.aymon@hepvs.ch
*** HEP-Vaud – Suisse – eliane.ferrez@gmail.com

© Floris R., Weiss L., Aymon H., Ferrez E. (2012) Qualité d'analyses de leçons de mathématiques : quels critères ? In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT2, pp. 337–347). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

(Charnay et Mante 2003). Ces caractéristiques permettent difficilement une analyse et un pilotage fin. En effet, certaines observations montrent l'écart entre le répertoire de certains enseignants et celui des experts, dans la prise en considération des mêmes déroulements de leçons (Stigler, Gonzales, Kawanaka, Knoll et Serrano 1999).

A la base de nos travaux, nous faisons nôtre l'hypothèse de Portugais (1995) pour qui la capacité d'objectivation peut être accrue par l'utilisation de catégories judicieusement choisies et précises permettant une organisation des événements observés. Par suite, une capacité améliorée de décrire l'activité pourrait fournir des moyens d'infléchir la pratique en vue d'une meilleure efficacité.

Notre projet s'est appuyé sur le travail effectué dans le cadre de la recherche internationale TIMSS-vidéo (Hiebert et al. 2003) et en particulier sur les caractérisations utilisées pour les comparaisons entre pays, caractérisations étendues par la suite par le groupe CADIVAM, donnant lieu à la réalisation d'une base de données (Bertoni, Floris, Haussler et Weiss 2006 ; Floris, Bertoni, Aymon, Ferrez, et Weiss 2010).

L'idée centrale est que ces caractérisations peuvent contribuer à constituer un milieu pour le développement de savoirs et de connaissances efficaces pour l'action de l'enseignant en classe et hors de la classe et qu'elles peuvent favoriser tout particulièrement le développement d'outils de description précis de cette action, conduisant ainsi à un développement des capacités d'analyse de pratiques.

Mais quelles sont ces capacités et comment les évaluer ?

La difficulté provient de l'absence de normes « objectives », par exemple, indépendantes des différents contextes culturels ou des conceptions des évaluateurs. Ce point est clairement mis en évidence dans Stigler et Hiebert (1999). Dans cette situation, un choix doit donc être fait.

Dans deux études poursuivant un objectif analogue au nôtre, mais dans le cadre d'une formation initiale, Santagata, Zannoni et Stigler (2007) ont utilisé les cinq critères suivants : développement et argumentation, lien avec les faits, contenu mathématique, apprentissage des élèves, aspect critique.

Avec la population plus experte de formateurs d'enseignants de mathématiques concernée par notre travail, il nous a paru judicieux de spécifier différemment ces critères. En effet, les deux premiers critères ci-dessus ne permettent pas d'évaluer ce qui est précisément développé dans un élément d'analyse : le problème proposé aux élèves, un geste de l'enseignant ? Ni de quel point de vue : apprentissage ou enseignement ?

Pour ce faire, nous avons choisi de nous baser sur des concepts provenant des théories de didactique des mathématiques élaborées par Brousseau (1986) et Chevallard (1992).

Nous décrivons ces critères plus en détail après l'exposé de la méthodologie. Nous présentons ensuite le dispositif de formation de formateurs mis en place, puis décrivons et discutons les résultats quantitatifs et qualitatifs obtenus avant de conclure.

II. MÉTHODOLOGIE

L'absence d'instruments de mesure objective de la capacité d'analyse rend très difficile une validation scientifique de notre hypothèse générale (i.e. que la capacité d'objectivation peut être accrue par l'utilisation de catégories judicieusement choisies et précises permettant une organisation des événements observés), de sorte que la recherche s'est justement employée à mettre au point une série de critères, à les expérimenter et à évaluer leur cohérence à travers un dispositif non traditionnel de pré-test/post-test d'analyse de leçons conduites par les participants eux-mêmes. Nous le qualifions de non traditionnel du fait de l'absence d'un groupe contrôle, le nombre réduit de formateurs concernés en Suisse Romande ne le permettant pas. Nous avons considéré que les enseignants-formateurs concernés avaient une expérience stabilisée de l'analyse de pratique et supposé que, sans les apports du cours de formation, il n'y aurait pas eu de forte évolution. Il aurait sans doute été intéressant de comparer avec des enseignants-formateurs n'ayant pas participé à un cours, s'étant filmés et ayant produit deux analyses de leur leçon à huit mois d'intervalle.

L'objet de l'étude n'est donc pas de mesurer la part de l'évolution des formateurs due au cours de formation, mais de mettre au point des éléments d'appréciation des textes produits d'une part et d'évaluer qualitativement l'effet du dispositif et l'appropriation des outils théoriques fournis.

1. Le codage initial

Le cadre théorique dans lequel nous travaillons est un cadre mixte, avec pour concept central celui de milieu, au sens de Brousseau (1988) et de Margolinas et Steinbring (1994), c'est-à-dire avec sa structuration, selon le schéma suivant :

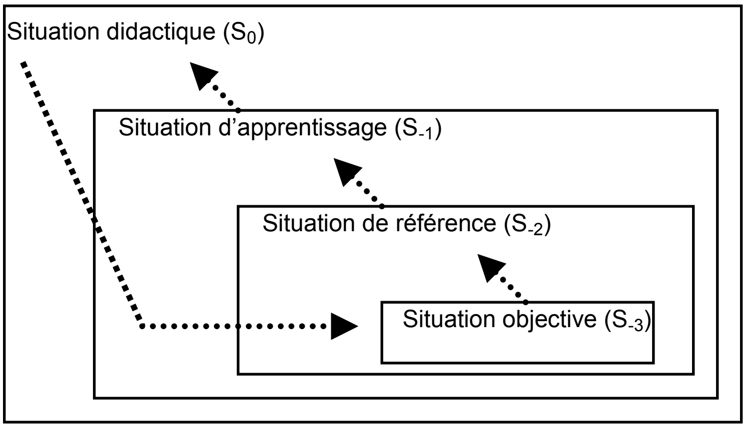


***Figure 1** – Schéma des situations emboîtées*

Le schéma correspond à des situations emboîtées où, à chaque niveau, la situation de niveau inférieur est un milieu pour la situation de niveau supérieur. Un problème proposé par le maître en situation didactique est traité en situation de référence par l'élève en fonction de son interprétation de la situation objective proposée et de ses connaissances mathématiques et didactiques (indications de l'enseignant). C'est dans le cadre de la situation d'apprentissage qu'est débattue la validité des résultats obtenus, puis l'enseignant reprend la main et clôture le cycle en évaluant les résultats, en situation didactique. Cette modélisation permet de prendre en compte les différentes positions de l'élève qui résout un problème en se fondant sur des connaissances et des objets stables et en principe déjà maîtrisés (le milieu objectif) et qui met en œuvre de nouvelles connaissances que la situation d'apprentissage lui permet de valider ou que le professeur évalue dans la situation didactique.

Le modèle de structuration du milieu a été élargi par Margolinas (2002) à des niveaux permettant de prendre en compte le travail de l'enseignant, les trois niveaux sur-didactiques (positifs), correspondant aux contraintes pesant sur l'enseignant. Ces contraintes peuvent relever de la noosphère, avec par exemple l'exigence des plans d'études du rôle important de la résolution de problème (niveau +3). Elles peuvent être liées au savoir et à sa transposition (niveau +2) ou encore aux conditions didactiques de la classe concernée (niveau +1). Nous

nous référons ici aux travaux de Coulange (2001) qui s'appuie sur l'approche anthropologique de Chevallard (1992) pour prendre en compte les contraintes institutionnelles et épistémologiques pesant sur l'enseignant, particulièrement dans les trois situations sur-didactiques.

Milieu	Elève	Professeur	*Situation*
M_{+3} M-Construction		P_{+3} P-Noosphérien	S_{+3} *Situation noosphérienne*
M_{+2} M-Projet		P_{+2} P-Constructeur	S_{+2} *Situation de construction*
M_{+1} M-Didactique	E_{+1} E-Réflexif	P_1 P-Projeteur	S_{+1} *Situation de projet*
M_0 **M-Apprentissage**	**E_0** **Elève**	**P_0** **Professeur**	**S_0** ***Situation didactique***
M_{-1} M-Référence	E_{-1} E-Apprenant	P_{-1} P-Observateur	S_{-1} *Situation d'apprentissage*
M_{-2} M-Objectif	E_{-2} E-Agissant		S_{-2} *Situation de référence*
M_{-3} M-Matériel	E_{-3} E-Objectif		S_{-3} *Situation objective*

***Tableau 1** – Structuration du milieu selon Margolinas (2002)*

C'est à partir de ce cadre (cf. tableau 1) que nous avons défini un découpage des gestes d'enseignement des mathématiques, découpage qui a conduit à définir notre codage des textes d'analyse.

Deux caractéristiques concernent l'analyse des gestes du professeur à chaud, plutôt imprévus, à la différence de ce que l'auteur du texte considère avoir été anticipé lors de la préparation de la leçon ou ce qui fait partie du comportement habituel du professeur. Sachant que ces gestes peuvent viser soit à conclure la phase en cours, soit à favoriser sa prolongation, nous avons défini deux codes différents :

- C1 code l'analyse des liens entre les actions du professeur en situation et les activités mathématiques des élèves (situation didactique niveau 0).
- C2 code l'analyse des possibilités d'apprentissage (aménagement d'éléments du milieu d'apprentissage) offertes aux élèves par l'action du professeur en situation ou par la situation elle-même (situation d'apprentissage niveau -1).

Une troisième caractéristique concerne les gestes s'inscrivant dans la leçon telle que prévue par l'enseignant et concerne le niveau 1, soit le projet de la leçon :

- C3 code l'analyse des liens entre les stratégies prévues par le professeur ou faisant partie de son fonctionnement habituel et les activités mathématiques des élèves. C3 est moins local que C1 et C2, et correspond à des considérations générales relevant de l'organisation d'une leçon.

Une quatrième caractéristique concerne l'étude de l'insertion de la leçon dans un thème d'étude, au niveau +2 qui situe le professeur dans la construction de la séquence d'enseignement dans laquelle s'inscrit la leçon analysée. Il est clair que si la leçon ne fait pas partie d'une séquence, il y aura peu d'occurrence de ce code.

- C4 code ainsi l'analyse des liens entre le contenu mathématique et l'organisation mathématique et didactique.

La cinquième et dernière caractéristique prend en compte le cadre institutionnel :

- C5 code l'analyse des liens entre le contenu mathématique traité et le curriculum, autrement dit les contraintes écologiques.

Le tableau 2 résume les liens entre les codes et la structuration du milieu.

Les 5 critères	C5	C4	C3	C1	C2
Niveau de situation	+3	+2	+1	0	-1

***Tableau 2** – Critères CADIVAM et niveaux de structuration du milieu de Margolinas*

A ce codage de base, reprenant une partie des idées de Santagata et al. (2007), nous avons rajouté un qualificatif noté par un symbole « + » si l'analyse se révélait particulièrement argumentée et détaillée, prévoyant de retrouver dans une certaine mesure le même type de résultats dans les deux textes d'un enseignant-formateur particulier, mais avec un passage dans le post-test à une analyse mieux fondée et argumentée. C'est bien ce que nous avons constaté en travaillant sur ces post-tests. Néanmoins une autre caractéristique est apparue globalement chez tous les auteurs, à savoir un important effort de réflexion théorique, qui a amené une réorganisation du codage avec la prise en considération de cette théorisation à travers un code symbolisé « RT », en lien ou non avec un code Ci.

Les attributs modalisant les codes sont : M (référence aux mathématiques comme élément explicatif), A (proposition alternative concernant la gestion) AM (proposition alternative concernant les mathématiques), J (jugement sur l'action didactique du professeur).

La difficulté principale a été de décider des unités de codage. Une tentative de codage syntaxique (phrase par phrase) s'est révélée insatisfaisante car un commentaire ou une analyse correspond rarement à une seule phrase. Nous avons choisi de nous baser sur des unités sémantiques, regroupement de plusieurs phrases, car la façon d'écrire peut varier beaucoup d'une personne à une autre, certains privilégiant des phrases reprenant parfois à plusieurs reprises la même idée, alors que d'autres concentrent plusieurs idées dans la même phrase. Cependant, pour égaliser au mieux les textes, nous prenons en compte pour le décompte des différents codes non seulement le nombre d'occurrences des codes par texte mais aussi le nombre de mots de chaque unité codée en proportion de la totalité du texte analytique, le reste du texte étant caractérisé par des commentaires « hors sujet » et des éléments purement descriptifs.

III. LE DISPOSITIF DE FORMATION

1. Les choix théoriques

Nous avons décrit dans Floris et al. (2010), les choix didactiques effectués pour élaborer la formation de formateurs mise en place pour permettre la récolte des données. Rappelons que le dispositif a été conçu comme un « milieu » au sens large en nous référant au concept de la Théorie des Situations Didactiques de Brousseau (1988).

Les savoirs et connaissances concernés ici sont ceux de l'enseignant et non plus de l'élève. Ils ne sont pas uniquement d'ordre mathématique, de telle sorte qu'une adaptation du concept de milieu a été nécessaire. Reste néanmoins présente l'idée d'un système dénué d'intention didactique, idée qui est au cœur du concept. Dans une certaine mesure, la base de données CADIVAM (Weiss, Aymon, Floris, et Ferrez 2011), ainsi que les apports théoriques du cours et les « savoirs » d'expérience des formateurs nous semblaient pouvoir fonctionner de cette façon.

Tout notre travail, aussi bien la constitution de la base de données que les apports théoriques du cours, s'appuie sur la Théorie des Situations. La base de données part des leçons TIMSS-vidéo et étudie de manière plus approfondie les interactions entre maître et élèves, qui ne faisaient pas l'objet de la recherche TIMSS-vidéo. Partant de l'idée que ces interactions peuvent jouer un rôle important dans l'apprentissage mathématique des élèves, nous avons élaboré un nouveau type de codage original, les phases d'apprentissage potentiel(les) (PAP), en nous basant sur les travaux de Margolinas (1994) qui clarifie la dynamique de validation/évaluation dans les interactions en classe lors de la résolution de problèmes. Nous avons retenu l'idée que, face à une réponse ou une question d'élève, l'enseignant a la possibilité, si les conditions le permettent, de maintenir une certaine incertitude, que nous postulons potentiellement propice à l'apprentissage. Ce sont ces phases que le codage PAP cherche à identifier, en se référant à la situation d'apprentissage de la structuration du milieu (voir tableau 1). Nous avons défini des critères permettant cette identification et proposé un tableau de synthèse pour chaque occurrence de PAP (voir en annexe).

En étudiant ces PAP dans une vingtaine de leçons du corpus TIMSS-vidéo de Suisse romande, il nous a semblé que cette notion fournit un point d'entrée judicieux pour l'analyse de leçons ordinaires de mathématiques, permettant un approfondissement de la réflexion sur les pratiques, voire sur la possibilité de leur modification. La centration sur les PAP permet à la fois de s'intéresser à l'élève : qu'apprend-il ? que peut-il apprendre ? et au maître : quelles conditions d'apprentissage met-il en place pour le(s) élève(s) ? De ce fait, le cours proposé devait nécessairement prévoir une formation au concept de milieu et à sa structuration.

Suite à la réflexion menée par Floris (2002) au sujet du biais constitué par la comparaison de leçons isolées, il nous a paru également nécessaire de présenter certains aspects de la Théorie Anthropologique du Didactique, en particulier les différents moments d'une organisation didactique, qui permettent de situer certains types de leçons dans le contexte d'une séquence, car on ne peut pas s'attendre à la même dynamique dans une leçon d'introduction d'un thème que dans une leçon de correction d'exercices en fin de chapitre.

En résumé, les connaissances visées par le cours consistaient d'une part dans le repérage et l'analyse de phases de leçons pouvant être des occasions d'apprentissage et d'autre part dans l'identification des différents moments d'une organisation didactique.

En poursuivant notre conception du dispositif comme une situation d'apprentissage, avec une part a-didactique (la base de données) et une part didactique (l'apport de certains concepts), il a fallu définir des moyens de formulation et de validation. Nous avons opté pour des présentations de leurs propres analyses par les formateurs, considérant que le contrat didactique implicite au cours conduirait au résultat recherché. Le paragraphe suivant détaille le dispositif.

2. Le dispositif de formation

Le projet de recherche dans lequel s'est inscrit le dispositif prévoyait une double analyse de pratique, au début et à la fin du cours, dans le but de définir des critères de qualité pour une telle analyse. Nous avons choisi de faire analyser par chaque participant une de ses leçons.

Ce choix s'est avéré délicat à coordonner avec l'objet du cours et avec les conditions de la recherche. En effet, alors que les catégories provenant de TIMSS-vidéo et celles que nous avons développées se révélaient intéressantes lors de leçons habituelles, comportant une part importante d'interactions publiques, les formateurs d'enseignants participant au premier cours ont choisi des leçons plutôt 'modèles', isolées, correspondant par exemple au début ou à la fin d'un chapitre. En phase avec les conceptions socioconstructivistes qui sous-tendent les moyens d'enseignement suisses romands du secondaire inférieur (élèves 12-15 ans), tout se passe comme si, pour ces formateurs, les leçons de travail plus technique (résolution et correction d'exercices) n'existaient pas ou ne devaient pas faire l'objet d'un travail spécifique de formation. Attentifs à ce risque, nous avons demandé aux formateurs de choisir une leçon dans laquelle il y avait au moins 50 % de parties publiques, ce qui a été ressenti par la plupart d'entre eux comme une contrainte forte. Il est cependant à noter que dans l'échantillon, que l'on peut considérer comme représentatif, des leçons TIMSS-vidéo de Suisse romande, plus de trois quarts des leçons sont dans ce cas. La position de la leçon dans une séquence a été déterminée en intégrant quelques questions ad hoc dans le questionnaire que nous leur avons demandé de remplir. Il s'est avéré que plusieurs des participants ont proposé des leçons isolées plutôt que des leçons faisant partie d'une séquence.

Le cours proposé aux participants s'est déroulé en quatre étapes principales. Après une introduction aux codages de la recherche TIMSS-vidéo, il leur a été demandé de sélectionner et analyser un à trois extraits de leur leçon d'une durée totale de 15 minutes (pré-test). Ensuite ils ont bénéficié d'apports théoriques et pris en main la base de données en présence et à distance. Il s'est terminé avec une présentation par les participants d'une analyse de leur leçon. Enfin les participants ont rendu une nouvelle analyse des mêmes extraits (post-test).

Les présentations ont été très diverses étant donné la grande liberté laissée aux participants. Il est possible de les placer dans deux catégories. La plupart des participants ont présenté des situations caractéristiques qui mettaient en évidence une PAP, d'après les indications théoriques données**.** Deux groupes se sont attaqués à des approfondissements théoriques concernant en particulier la structuration du milieu[1].

IV. RÉSULTATS

De premières analyses de type statistique avec les précautions liées au petit nombre de textes analysés (vingt textes) semblent montrer des résultats intéressants, en particulier l'intégration par les participants d'un certain nombre de concepts. En effet, il apparaît que dans les post-tests, les participants portent, sur des leçons observées, un regard plus scientifique car bien davantage basé sur des faits précis et des tentatives de compréhension de ceux-ci à la lumière d'éléments théoriques stables. Le jugement global – et souvent négatif – est moins présent.

[1] Pour une présentation plus détaillée, voir Floris et al., 2010.

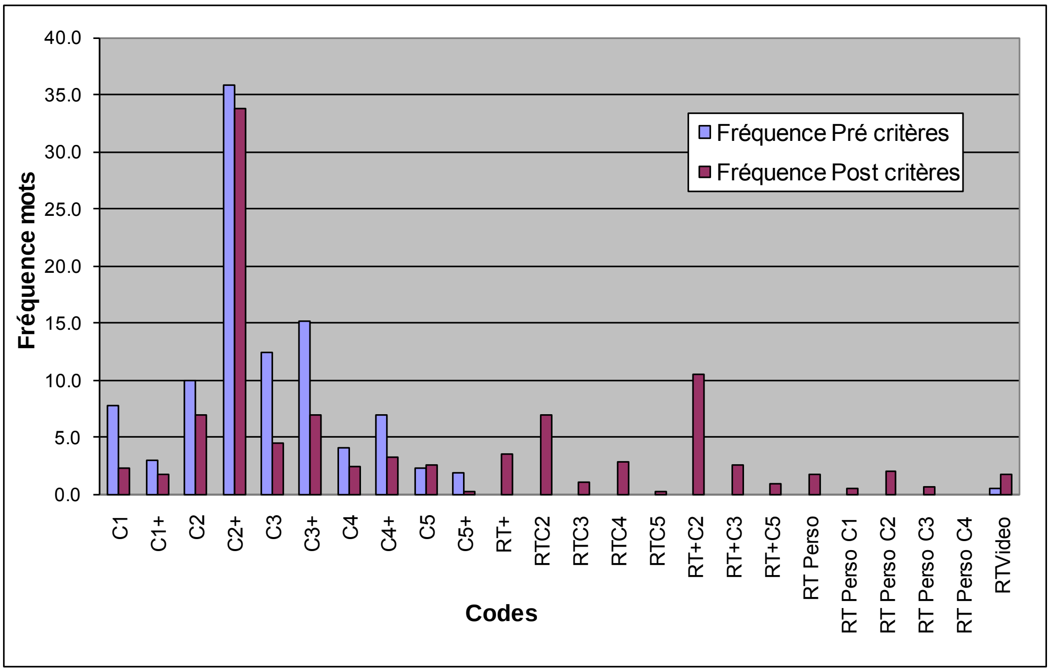


***Tableau 3** – Comparaison Pré Post test Cours 1 critères*

Le tableau 3 présente le pourcentage de mots codés selon les critères explicités plus haut par rapport au nombre total de mots d'analyse. On constate que, dans le pré-test déjà, les analyses sont centrées sur les possibilités d'apprentissage offertes aux élèves (code type C2 correspondant à près de la moitié du texte) et sur les objectifs de la leçon (type C3). Les éléments plus curriculaires ou d'insertion dans un thème sont moins présents. Rappelons ici que plusieurs participants avaient choisi une leçon pas véritablement intégrée dans un chapitre de cours. L'intérêt porté à l'apprentissage des élèves se confirme dans le post-test. Mais l'évolution remarquable, c'est la présence dans ce dernier de références théoriques, celles-ci étant presque totalement absentes dans le pré-test. Quant à la diminution des codes de type C3, concernant l'analyse du projet de la leçon, certains participants ont sans doute estimé qu'il n'était pas nécessaire de le refaire dans leur seconde analyse, ce que l'un d'entre eux a d'ailleurs explicitement écrit.

La présence importante des codes RTC2 et RT+C2 fait ressortir l'appropriation de l'outil PAP dans les post-tests, avec, en conséquence, une réflexion focalisée sur une phase précise de la leçon et une réflexion d'un point de vue de structuration du milieu : dans quelle mesure la phase étudiée favorise-t-elle l'apprentissage des élèves, et pourquoi ?

En examinant plus particulièrement les analyses de certains formateurs, on peut constater une diversité relativement grande, avec présence plus conséquente d'analyses au niveau curriculaire pour certains, par exemple afin de justifier le choix d'un thème de leçon un peu particulier avec un objectif d'enseignement plutôt global (compréhension de l'irrationalité). Un autre formateur n'est pas entré dans le contrat implicite d'utilisation des théories étudiées, mais s'est basé sur des considérations théoriques issues de la didactique spécifique d'une de ses autres disciplines d'enseignement. Cette situation a conduit à l'introduction d'un critère référence théorique personnelle (RTperso).

Tout s'est passé comme si le contrat de formation proposé consistait en une demande d'utilisation d'éléments théoriques dans le post-test, ce qui n'est finalement pas surprenant. Ce qui est remarquable pour certains, c'est le choix d'un approfondissement important de ces éléments.

V. CONCLUSION

Dans le développement de la troisième question de l'appel à contribution du GT2, les responsables du groupe de travail demandent dans quelle mesure les dispositifs de formation doivent s'appuyer sur des résultats de recherche à propos de l'analyse de pratique ou à propos des recherches sur l'apprentissage des élèves. En proposant à des formateurs un travail basé sur une théorisation concernant plutôt l'apprentissage des élèves (celle de la structuration du milieu), nous avons pu amener certains d'entre eux à en faire une exploitation pertinente dans leur analyse de pratiques. De ce fait, on peut considérer que la première étape de la transposition vers la formation initiale est possible, ce que trois cours de formation de ce type ont confirmé. La seconde étape de cette transposition n'a pas fait l'objet de recherches de notre part, bien que des essais soient en cours. La notion de PAP se révèle être un outil permettant de repérer certaines phases de leçons dans lesquelles le travail d'apprentissage des élèves est visible et elle peut être considérée comme la transposition de recherches autour de la notion de milieu. Si cette notion de PAP ne semble pas poser de difficulté particulière dans le cas d'une formation initiale, la structuration du milieu, avec la distinction entre milieu didactique, milieu d'apprentissage et milieu d'action se prête mal à une présentation telle quelle à des enseignants débutants. Néanmoins, la base de données produite dans le cadre de la recherche CADIVAM s'est révélée fonctionnelle comme outil de mise en place d'ateliers d'analyse de pratique en formation initiale.

REFERENCES

Bertoni M., Floris R., Haussler M.-J., Weiss L. (2006) Catégorisation didactique de séquences vidéo pour l'analyse de pratiques d'enseignement des mathématiques. *Communication présentée au congrès Espace Mathématique Francophone tenu à Sherbrooke en mai 2006*. Publication sur cédérom.

Brousseau G. (1986) Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques, 7.2*.

Brousseau G. (1988) Le contrat didactique : le milieu. *Recherches en didactique des mathématiques*, 9.3.

Charnay R., Mante M. (2003) *Préparation à l'épreuve de mathématiques du concours de professeur des écoles* (Vol. 1). Paris: Hatier.

Chevallard Y. (1992) Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques, 12,* 73-122.

Coulange L. (2001) Enseigner les systèmes d'équations en Troisième. Une étude économique et écologique. *Recherches en didactique des mathématiques, 21(3),* 305-354.

Dewey J. (1933) *How we think: A restatement of the relation of reflective thinking to the educative process.* Boston: D. C. Heath.

Floris R (2002) Aspects méthodologiques du projet international Timss-video : Prise en compte la spécificité disciplinaire dans le codage des données. *Actes du congrès ADMEE-SSRE*, Lausanne.

Floris R., Bertoni M., Aymon E., Ferrez E., Weiss L. (2010) Analyse d'un dispositif expérimental de formation de formateurs d'enseignants de mathématiques. In Kuzniak A.., Sokhna M. (Eds.) (pp. 344–356) *Enseignement des mathématiques et développement : enjeux de société et de formation*. *Actes du Colloque Espace Mathématique Francophone EMF2009* (Groupe 2 et 9) (Numéro spécial de la Revue Internationale Francophone). http://fastef.ucad.sn/EMF2009/colloque.htm.

Hiebert J. et al. (2003) *Teaching Mathematics in Seven Countries : Results from the TIMSS 1999 Video Study*. Washington, DC: Department of Education, National Center for Education Statistics.

Lortie D. C. (1975) *Schoolteacher*. Chicago, IL: The University of Chicago Press.
Margolinas C. (2002) Situations, Milieux, Connaissances. In Dorier J.-L., Artaud M., Artigue M., Berthelot R., Floris R. (Eds.) (pp. 141-155) *Actes de la 11ème École d'Été de Didactique des Mathématiques* Cédérom. Corps - 19-30 Août 2001: La Pensée Sauvage.
Margolinas C., Steinbring H. (1994) Double analyse d'un épisode: cercle épistémologique et structuration du milieu. In Artigue M., Gras R., Laborde C., Tavignot P. (Eds.) (pp. 250-257) *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
Portugais J. (1995) *Didactique des mathématiques et formation des enseignants.* Berne: Peter Lang.
Santagata R., Zannoni C, Stigler J.W. (2007) The role of lesson analysis in pre-service teacher education: an empirical investigation of teacher learning from a virtual video-based field experience. *J. Math Teacher Educ 10*, 123-140.
Schön D. A. (1983) *The reflective practitioner: How professionals think in action*. New York: Basic Books.
Stigler J. W., Gonzales P., Kawanaka T., Knoll S., Serrano A. (1999) *The TIMSS Videotape Classroom Study: Methods and Findings From an Exploratory Research Project on Eight-grade Mathematics Instruction in Germany, Japan, and the United States* (No. 1999-074). Washington, DC: U.S. Department of Education, National Center for Education Statistics.
Stigler J., Hiebert J. (1999) *The Teaching Gap*. New York: The Free Press.
Weiss L., Aymon H., Floris R., Ferrez E. (2011) Développement d’un outil d’analyse de pratiques en mathématiques : comment mettre la recherche au service de la formation de formateurs? *Formation et pratiques d’enseignement en questions* 13, 235-256.
Yoshida M. (1999) *Lesson Study A Case Study of a Japanese Approach to Improving Instruction Through School-Based Teacher Development*. Unpublished Doctoral thesis, University Of Chicago. Chicago.

ANNEXE : CRITÈRES POUR LES PAP

<u>Définition</u> : il arrive lors d’une leçon de mathématiques que certains élèves donnent des signes pouvant être interprétés comme manifestation d’une intention d’apprentissage (selon la théorie des situations de Brousseau). Notre but est de déterminer des critères permettant de décrire les caractéristiques de tels épisodes.

Une phase d’apprentissage potentiel (PAP) est une période d’une leçon de mathématiques initiée lorsqu’au moins un élève exprime, à propos d’un problème mathématique, une certaine confusion, une incompréhension, une incertitude, etc., que ce soit par une question, un silence, une réponse inadéquate.

Cela se produit aussi lorsque l’enseignant laisse planer une certaine incertitude en répétant ou relançant une question, en suspendant l’évaluation d’une réponse, en collectant plusieurs réponses possibles sans les évaluer, en retardant une réponse.

Pour chaque PAP, une série de caractéristiques sont repérées, telle que durée, type de début et de fin, contenu mathématique, intentionnalité de la part de l’enseignant, caractère public ou privé, contenu mathématique. En outre, pour chaque PAP a été évaluée la présence ou non d’une situation d’apprentissage, au sens de la structuration du milieu. Voici la liste des caractéristiques utilisées pour le codage des PAP :

1. <u>Minutage début et fin de la PAP</u>
2. <u>La PAP est initiée par</u> : enseignant (T), élève (S), autre élève (Sn), plusieurs élèves (Ss).
3. <u>Caractérisation du début</u> : - demande d’information, d’explication, d’aide,

- demande d'évaluation,
- réponse fausse,
- non-réponse ou silence ou inaudible,
- identification d'une erreur par l'enseignant (ou d'un blocage),
- réponses multiples (contradictoires),
- demande d'autres solutions possibles, de reformulation,
- autre.

4. Contenu de l'apprentissage potentiel : description du sujet mathématique traité.
5. La PAP est-elle intentionnelle ? : oui/non ;

   publique ? : noter privée si elle ne concerne que l'enseignant avec un, voire deux élèves.
6. Y a-t-il bifurcation ? : oui/non (si oui expliquer sur quoi)

   les bifurcations peuvent avoir lieu sur le sens de la question posée, la procédure utilisée, le niveau auquel l'enseignant place son explication, la pertinence des exemples choisis par rapport à la situation.
7. Milieu d'apprentissage : y a-t-il
   - maintien d'un milieu d'apprentissage pour l'élève (si oui, noter éventuellement la durée) ou retour immédiat dans un milieu didactique ?
   - effet Topaze ?
   - enrichissement du milieu par changement de cadre ?
   - une contextualisation riche ?
8. Qui termine la PAP ? : T, S ou Ss
9. Caractérisation de fin :
   - réponse donnée,
   - correction par l'enseignant,
   - évaluation de la réponse de l'élève,
   - vérification de la réponse de l'élève,
   - suggestion, mise en relation,
   - approbation (OK, oui, bien),
   - répétition approbative réponse de l'élève, reformulation,
   - interruption, abandon,
   - suivie par une institutionnalisation,
   - autre.

FORMATION DIDACTIQUE ARTICULEE A LA PRATIQUE ENSEIGNANTE : ILLUSTRATIONS ET CONCEPTUALISATIONS

GREFEM [*]

Résumé – La recherche sur la formation à l'enseignement des mathématiques évoque souvent la nécessité d'articulation entre différentes composantes de cette formation et la pratique enseignante elle-même. Dans ce texte, nous conceptualisons ce que signifie pour nous cette idée « d'articulation » à travers quatre exemples d'activités de formation développées dans nos cours de didactique des mathématiques. À travers une pluralité de sens, dont les nuances constituent la richesse, se dégagent de nos analyses des visions de l'articulation « de l'intérieur même » de la pratique de formation alors que nous tentons de prendre en compte la pratique enseignante et de la faire vivre.

Mots-clefs : pratiques, didactiques, articulation, formations, enseignements des mathématiques

Abstract – Research in mathematics teacher education often evokes relationships between teacher preparation and the teaching practice itself. In this paper, we conceptualize this relationship with the notion of "articulation" as we examine four examples of our *didactique of mathematics* courses developed in our pre-service teacher education program. Our analysis reveals a multiplicity of meanings in the emergence of a rich vision of those articulations *from within* our teacher education practices.

Keywords: practices, didactics of mathematics, articulation, teacher preparation, mathematic teaching

I. INTRODUCTION

Les questions d'articulation sont au cœur des préoccupations contemporaines dans la formation à l'enseignement des mathématiques, que ce soit au niveau de l'arrimage des différentes composantes de cette formation (mathématique, didactique et formation pratique, Bednarz et Perrin-Glorian 2003), au niveau de l'interaction entre les différents intervenants-formateurs de cette formation (CBMS 2001; Gourdeau et Proulx à paraître) ou même au niveau de la relation entre les composantes de la formation et la pratique enseignante elle-même (voir le collectif Proulx et Gattuso 2010). C'est particulièrement cette dernière dimension qui retient notre attention. Nous nous intéressons aux manières dont l'articulation entre formation à l'enseignement des mathématiques et pratique enseignante est conçue à l'intérieur de nos cours de didactique des mathématiques[1].

Une remarque préalable s'impose toutefois lorsqu'il est question de cours de didactique des mathématiques, puisqu'ils renvoient en arrière plan à une certaine conception du travail didactique et de ses orientations. La didactique des mathématiques n'est pas en effet univoque, s'étant développée dans des contextes particuliers qui ont façonné ses orientations, mais aussi la nature des travaux réalisés. Elle porte ainsi, tel que le souligne Bednarz (2007), un caractère multi-référentiel et hautement contextualisé, amenant à parler *des* didactiques des mathématiques, et non d'une seule. À titre d'exemple, alors qu'elle a émergé en France dans une intention d'en faire une science, elle s'est développée en Italie dans une visée d'innovation des pratiques de classes et aux Pays-Bas avec un souci d'élaboration d'un enseignement où les mathématiques sont vues (suivant Freudenthal) comme activité humaine.

[*] Le GREFEM est un collectif formé des auteurs suivants, en ordre alphabétique : Nadine Bednarz, Caroline Lajoie, Jean-François Maheux, Jérôme Proulx et Mireille Saboya.
Groupe de Recherche sur la Formation à l'Enseignement des Mathématiques (GREFEM), Université du Québec à Montréal – Québec, Canada – GREFEM@uqam.ca.

[1] Nous pourrions référer à différents auteurs s'exprimant sur la problématique de l'articulation (e.g. ceux du collectif Proulx, Corriveau et Squalli 2012), ou considérer d'autres approches de formation, mais notre intention ici est plutôt documentaire par rapport au programme dans lequel nous œuvrons.

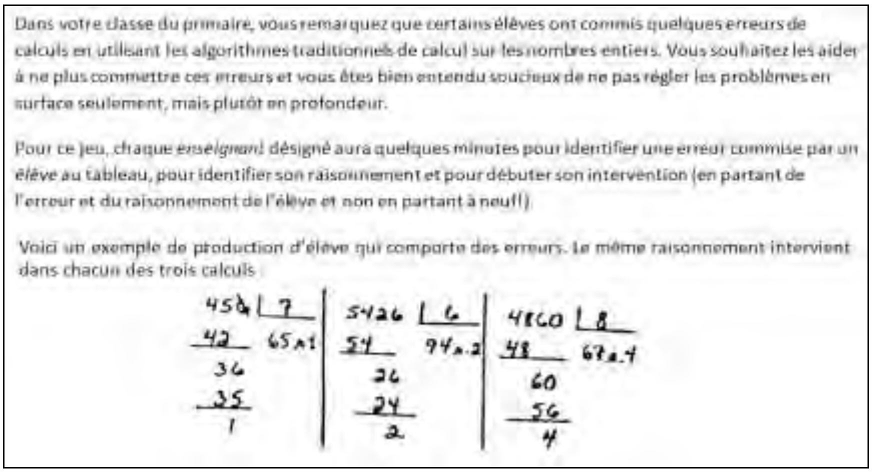
© GREFEM (2012) Formation didactique articulée à la pratique enseignante : exemples et conceptualisations. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT2, pp. 348–361). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

Ces contextes sont essentiels, car ils ont fait émerger différentes façons de faire et de concevoir les travaux en didactique des mathématiques. Chez plusieurs didacticiens au sein du département de mathématiques de notre institution, les travaux de recherche en didactique des mathématiques se sont ainsi développés, dès les années 1970, dans une préoccupation de *formation* des enseignants. Ces préoccupations ont conduit à l'élaboration d'activités de formation se voulant pertinentes et porteuses de sens pour la formation professionnelle des enseignants, dans un désir « d'articulation » à la pratique du métier telle qu'elle se fait ou se conçoit dans les classes.

Dans ce texte, nous nous efforçons de conceptualiser ce que signifie pour nous cette idée « d'articulation », à travers quatre exemples d'activités développées dans les cours de didactique des mathématiques offerts aux futurs enseignants du primaire et du secondaire[2]. Le premier exemple, un « jeu de rôles », est présenté comme point de départ pour nos réflexions, permettant aux trois exemples suivants de développer et d'enrichir cette première conceptualisation. Bien que présentés succinctement (par manque d'espace), les trois autres exemples développent à leur façon une conceptualisation de ce que signifie s'articuler à la pratique enseignante. C'est à partir de ces similitudes et différences entre ces manières d'éclairer l'idée d'articulation que nous abordons la dernière section du texte pour discuter ce qui, de façon plus large, se dégage de l'exercice.

II. UN PREMIER EXEMPLE D'ACTIVITE DE FORMATION ARTICULÉE : LE JEU DE ROLES COMME INTERFACE ENTRE PREOCCUPATIONS PRATIQUES ET DIDACTIQUES

Une formation initiale qui serait une formation « à » la didactique au sens d'une théorie ou d'un champ de recherche (ses objets, ses concepts, ses manières de comprendre et de parler l'enseignement et l'apprentissage) risque de paraître bien loin de ce qui occupe un enseignant en classe au jour le jour. Autour de telles préoccupations a été introduite, dans le cadre d'un cours de Didactique de l'arithmétique au primaire, une activité de formation par « jeux de rôles » (Lajoie 2009 2010 ; Lajoie et Pallascio 2001). Chaque jeu de rôles (voir Figure 1 pour un exemple) débute avec une mise en situation lue et expliquée avec les étudiants. Suit un temps où, en équipe, les étudiants se préparent à jouer les rôles d'enseignants et d'élèves dans la situation donnée. Lors du jeu lui-même, des étudiants d'équipes différentes sont désignés pour jouer ensemble devant la classe. Enfin, on discute lors d'une période de retour en groupe, des bons et moins bons coups et d'autres entrées possibles.



Dans votre classe du primaire, vous remarquez que certains élèves ont commis quelques erreurs de calculs en utilisant les algorithmes traditionnels de calcul sur les nombres entiers. Vous souhaitez les aider à ne plus commettre ces erreurs et vous êtes bien entendu soucieux de ne pas régler les problèmes en surface seulement, mais plutôt en profondeur.

Pour ce jeu, chaque *enseignant* désigné aura quelques minutes pour identifier une erreur commise par un *élève* au tableau, pour identifier son raisonnement et pour débuter son intervention (en partant de l'erreur et du raisonnement de l'élève et non en partant à neuf!)

Voici un exemple de production d'élève qui comporte des erreurs. Le même raisonnement intervient dans chacun des trois calculs :

[2] Voir pour plus de détails Bednarz (2001), Bednarz, Gattuso et Mary (1995), Dufour-Janvier et Hosson (1999), Janvier (1996), Lajoie (2009, 2010), Lajoie et Pallascio (2001), Saboya, (2010), Tanguay (2003).

Figure 1 *– Exemple de mise en situation – jeu de rôles*

En réfléchissant à partir de cet exemple, nous avons dégagé un premier éclairage en ce qui concerne la manière dont on peut concevoir l'articulation avec la (ou les) pratique(s) en contexte de formation, que nous présentons à travers les différents moments du jeu de rôles.

1. La mise en contexte

La mise en situation proposée aux étudiants-maîtres s'articule à la pratique de deux manières différentes. D'abord, sans être une véritable situation d'enseignement au primaire, elle est réaliste : il s'agit d'une situation familière qui pourrait se présenter dans une classe. Les étudiants doivent se l'imaginer à partir de leurs expériences de stagiaires et d'anciens élèves du primaire. D'autre part, cette phase de mise en contexte amène les étudiants à adopter d'entrée de jeu une attitude « didactique », proche de celle du chercheur, face à la situation proposée. En effet, dès cette étape, les étudiants-maîtres comprennent qu'ils devront analyser les calculs proposés en profondeur en vue de dégager le raisonnement de l'élève et qu'ils devront préparer une intervention fortement inspirée de cette analyse. Ainsi, le travail attendu des étudiants-maîtres par cette mise en situation n'est peut-être pas tout à fait celui qu'ils feraient dans la pratique, mais il ne consiste pas non plus en un travail sur des savoirs didactiques pour eux-mêmes. Ensuite, les erreurs sur lesquelles les étudiants-maîtres se penchent et interviendront sont de véritables erreurs d'élèves. La mise en situation les transforme toutefois pour en faire des cas génériques. Ainsi, il ne s'agit plus seulement d'un objet de la pratique, ni seulement d'un objet didactique. Le contexte du jeu se place en tension entre des préoccupations pratiques et didactiques, soit à l'articulation entre ces deux types des préoccupations.

Articuler formation didactique et pratique enseignante signifie ici amener les étudiants-maîtres à imaginer une situation réaliste à partir d'éléments provenant de classes réelles, en lien direct avec le travail de l'enseignant, mais sous un angle didactique faisant de cette situation un cas exemplaire.

2. La préparation

Au cours de la phase de préparation, les étudiants sont réunis en équipe pour analyser les productions d'élèves proposées, et se préparer à jouer deux rôles : celui de l'élève et celui d'un enseignant intervenant auprès de lui. Ils ne savent pas encore, à ce stade, qui seront les personnes choisies pour jouer un rôle, ni lequel. Au cours de cette phase, les étudiants se préparent à jouer un type de situation, et non pas un scénario précis. L'absence de contrôle sur les questions qui seront posées, les réponses fournies, les difficultés rencontrées, etc.[3], nous rapproche ainsi du pôle « pratique » retrouvé en classe réelle. Se projetant en quelque sorte dans la pratique, à la fois comme élève et comme enseignant, ils interprètent les raisonnements d'élèves pour pouvoir les expliquer, les justifier et les défendre comme le ferait un élève, et ils se préparent comme enseignant à conduire l'élève vers un raisonnement différent, à lui faire voir certaines contradictions, à lui proposer une tâche alternative, etc. En ce sens, ce changement de positions (élève/enseignant) fait de l'activité quelque chose de pratique (envisager ce que dirait un enseignant, un élève), et en même temps toujours en distance (il est nécessaire de tenir les deux rôles, de s'imaginer l'interaction). Évidemment, cette préparation n'est pas calquée sur celle d'un enseignant, mais elle y ressemble. Si la

[3] Dans le cas du jeu présenté à la Figure 1, l'erreur de départ est fournie sur papier par le formateur. Cependant, le raisonnement qui sous-tend cette erreur, de même que les autres difficultés et erreurs qui pourraient résulter des échanges entre l'élève et l'enseignant, sont produits par la personne jouant le rôle de l'élève.

présence et le support de collègues ne sont pas totalement absents en pratique, l'enseignant prépare rarement ses interventions avec des collègues (et sous la supervision d'un didacticien). De même, s'il existe une pléiade de ressources accessibles aux enseignants dans le milieu scolaire (matériel, revues, etc.), les étudiants disposent dans ce cas de ressources préalablement *choisies* par le formateur-didacticien (pour leur pertinence).

Articuler formation didactique et pratique enseignante signifie ici rapprocher les étudiants-maîtres des moments qui précèdent l'intervention en classe, mais dans un contexte différent, en leur permettant de s'approprier des ressources qui seront les leurs, mais disposées pour leur permettre, avec leurs pairs, d'anticiper l'inconnu.

3. *Le jeu*

Au cours de la prestation proprement dite (le jeu), l'enseignant et l'élève désignés produisent une série d'actions semblables à celles attendues d'un enseignant et d'un élève du primaire en contexte réel. En même temps, le formateur a des attentes particulières, informées par (sa vision de) la didactique des mathématiques, autour des interventions. Le jeu est « ouvert », comme l'est une véritable situation de classe, mais des éléments de démarche sont attendus (tel que ceux spécifiés dans la mise en situation). Également, le jeu se déroule dans un environnement plus contrôlé que celui de l'enseignant et ses élèves, mais les ressources immédiates (tableau, projecteur, blocs) sont les mêmes. Un autre aspect illustrant la nature articulatoire de l'activité est celui du temps. Le jeu se déroule en « temps réel », même si ce temps n'est qu'une approximation du temps réel d'une classe du primaire (par exemple en ce qui concerne le temps qui serait nécessaire à un « élève » pour saisir telle idée, comme celle de faire des groupements pour illustrer sa division). Et, contrairement à ici, l'enseignant peut en pratique reporter son intervention. Enfin, rappelons que durant le jeu la majorité des étudiants n'incarnent pas de rôles : ils sont des « spectateurs ». Le jeu, de ce point de vue, les convie à un exercice tant pratique que didactique. Leur attention se porte sur une pratique enseignante (l'intervention qu'ils observent), mais aussi sur des éléments didactiques (place donnée à l'élève, prise en compte de ses interventions, utilisation du matériel, clarté des verbalisations, etc.).

Articuler formation didactique et pratique enseignante signifie ici assister (à) la production, aussi réaliste que possible, d'une interaction entre un élève et un enseignant au moment d'une intervention visant à faire progresser l'élève, mais en respectant certaines attentes sur les modalités de cette intervention.

4. *Le retour collectif*

Appelant les étudiants à échanger à propos du jeu, la réflexion à propos de l'action complète l'articulation de manière nouvelle. Cette réflexion, qui s'appuie plus ou moins explicitement sur des concepts didactiques abordés en classe (souvent via des textes à lire)[4], se situe à quelque part entre la réflexion que pourraient avoir des enseignants à propos d'« une » pratique observée (on fait dire ce qui paraît intéressant, on propose des alternatives) et celle que pourraient avoir des didacticiens à son propos. L'observation de pratiques de collègues également en formation (et non de pratiques exemplaires) encourage ainsi un ancrage dans « une » pratique (plutôt que dans « la » pratique vue de manière abstraite) : les étudiants se reconnaissent comme enseignants, mais expriment parfois des réticences envers l'activité. La

---

[4] En lien avec le jeu présenté à la Figure 1, les textes proposés aux étudiants abordent : les sens de la division, les difficultés liées à l'utilisation de l'algorithme, l'intervention face aux erreurs de calcul, etc. Ces textes sont choisis pour alimenter la réflexion des étudiants durant la préparation et le retour collectif. Ils proviennent souvent de revues professionnelles, c'est-à-dire des revues qui s'adressent à des enseignants.

prise de recul et la réflexion sur l'action, familière chez les didacticiens mais moins courante chez les enseignants, est ici forcée.

Articuler formation didactique et pratique enseignante signifie ici accompagner les étudiants-maîtres dans une réflexion sur l'action, dans une prise de recul face à l'action.

5. *Remarques bilan*

Se dégage de notre analyse de l'activité jeu de rôles l'image d'une formation didactique qui se trouve être le lieu même d'une articulation entre préoccupations « pratiques » et « didactiques ». Les jeux de rôles plongent les étudiants dans un contexte simulé mais réaliste qui est, pour emprunter les mots de Perrenoud (1999), une « approximation » d'une situation de classe. L'analyse précédente montre que ce caractère approximatif n'est pas un handicap, mais plutôt une force motrice. On ne fait pas « tout à fait » comme dans les écoles, ni tout à fait comme le ferait le didacticien-chercheur. L'activité de formation sollicite et oriente les étudiants dans les deux directions, leur demandant de faire sens des éléments propres à la pratique et à la formation, de manière à développer des manières de faire qui leur soient propres. Il se crée alors un va-et-vient entre deux « extrêmes » que nous ne tâchons pas de « réconcilier », mais que nous cherchons plutôt à animer parce que c'est là, comme un segment entre deux points, le lieu même de la formation à l'enseignement des mathématiques telle que nous la concevons.

III. TROIS AUTRES EXEMPLES DE FORMATION ARTICULEE

1. *Les exposés types : des ressources à développer chez le futur enseignant*

Les *exposés types* (Dufour-Janvier et Hosson 1999 ; Janvier, Saboya et Passaro 2010) constituent un des volets du cours Didactique I et Laboratoire, un cours en début de formation. Les exposés types sont des enregistrements vidéos plus ou moins courts (variant de cinq à trente minutes) dans lesquels différents formateurs présentent des manières jugées intéressantes d'enseigner les mathématiques. Après avoir visionné la vidéo, une analyse est menée par le didacticien avec les futurs enseignants autour de différents aspects qui y sont travaillés *(préalables, raisonnements, automatismes, habiletés, conceptions, erreurs et difficultés)*, ainsi que des « principes didactiques » utilisés comme points d'ancrage à l'analyse de cette pratique : recours à la verbalisation et la contextualisation, aux représentations visuelles et manipulations de matériel, etc. Voici un exemple en géométrie :

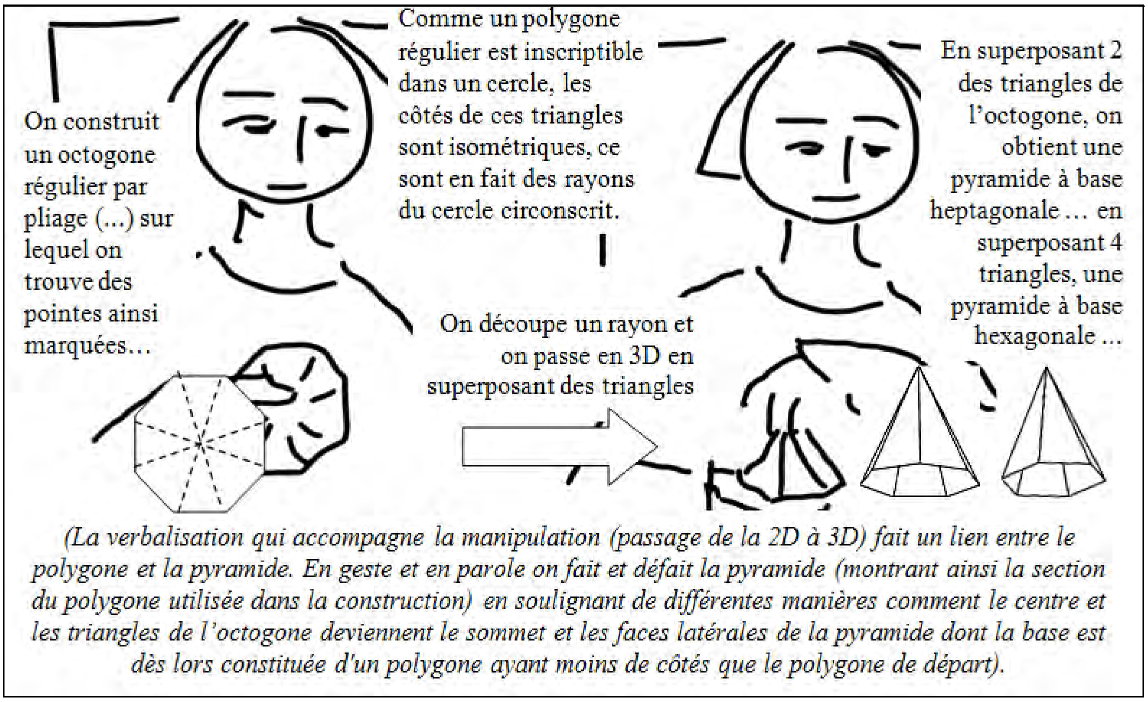


Figure 2 *– Exemple d'un exposé type*

Un document d'accompagnement pour chacun des exposés types est fourni aux étudiants dans lequel on retrouve : une analyse des raisonnements développés, des liens entre les concepts, des verbalisations spécifiques, des conceptions, erreurs et difficultés d'élèves prises en compte, des habiletés à acquérir, des mots clés, des « implicites » pour mieux comprendre les intentions et des principes didactiques privilégiés. Par exemple, dans le document d'accompagnement de l'exposé type présenté ci-dessus, on précise qu'il est important de faire un travail préalable autour de la nomenclature des différents polygones ; de l'importance de coordonner les différents registres de représentation, le visuel et le verbal dans cet exemple. Sont ainsi travaillés, dans ces exposés types, des manières de faire et des réflexions qui interviennent dans la pratique d'un enseignant. Tous ces éléments constituent des ressources porteuses, pour le futur enseignant, de certaines façons de voir et d'un certain savoir-faire pour les élèves. Il est ensuite demandé aux étudiants de s'approprier les idées véhiculées dans la vidéo et de les présenter à leurs pairs, qui commentent, complètent et suggèrent des améliorations. Deux fois pendant le cours, les étudiants sont évalués individuellement sur un des exposés types qu'ils pigent au hasard. La formation didactique s'articule ainsi à la pratique enseignante autour d'une pratique d'explication guidée par des principes didactiques.

Articuler formation didactique et pratique enseignante signifie ici travailler à l'acquisition chez le futur enseignant d'une aisance à s'exprimer en action pour exposer un sujet mathématique de façon dynamique pour lui donner un sens, en prenant en considération la gestuelle, le matériel à utiliser, le visuel, les mots clés et certains principes didactiques.

L'exemple des exposés types amène un autre éclairage sur l'articulation à la pratique enseignante que celle proposée dans les jeux de rôles. Les ressources utilisées ne sont pas du même ordre : alors que dans les jeux de rôles elles s'inscrivent dans une pratique d'intervention, dans les exposés types elles puisent dans une pratique d'explication. Le but des exposés types est de sensibiliser les futurs enseignants à des façons de « parler » et « présenter » les mathématiques, ceci à travers le souci d'approcher et donner un sens au concept mathématique.

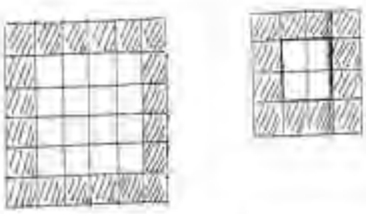
2. *Situation d'enseignement sur l'introduction à l'algèbre : pratiques singulières et multiples, différents contextes et regards*

Cette activité, tirée du cours Didactique de l'algèbre en milieu de formation, vise le développement chez les futurs enseignants de certains potentiels d'action et d'un cadre de référence personnel, comme enseignant, leur permettant d'aborder, concevoir et réaliser des interventions en enseignement de l'algèbre. Dans le cas de l'activité reportée ici, les questions de pertinence d'un passage à l'algèbre et de construction d'un symbolisme significatif sont des enjeux clés. L'analyse *a posteriori* de cette activité permet de voir sous quels angles est pensée l'articulation avec la pratique d'un enseignant de mathématiques.

Temps 1 : Faire vivre une pratique singulière de l'intérieur. Les étudiants sont amenés dans un premier temps à vivre un scénario complet d'exploitation d'une situation, en temps réel, sur une longue période. Le choix qui est fait à cette étape se rapproche de la stratégie d'homologie décrite par Houdement et Kuzniak (1996) sans toutefois en reprendre la visée. Il s'agit en effet moins de faire vivre aux étudiants une activité comme on souhaiterait la voir reprise en classe que de leur faire percevoir, en la vivant de l'intérieur, les possibilités qu'elle offre et ses enjeux. Voici les grandes lignes de cette activité menée par le formateur.

(1) Mise en situation (Figure 3) ; (2) Écriture d'un message en mots, en équipe ; (3) Retour collectif sur les différents messages produits où la verbalisation en contexte avec le support dessin joue un rôle important (différents plans sont considérés, tels la compréhension dans le contexte du message par celui qui va le recevoir, une reformulation possible par leurs auteurs, la validité des messages produits, le caractère équivalent de certains messages ; (4) Passage à la symbolisation justifié par une idée de communication efficace pour rendre compte des multiples messages retenus ; (5) Retour sur les messages produits (quelques critères sont : la compréhension des messages par celui qui les recevra, la nature et le sens des différentes notations utilisées (que l'on pourra préciser ou rejeter), la validité des différents messages produits, leurs équivalences) ; (6) Prolongements (par exemple, quelle fenêtre pourra-t-on fabriquer avec 84 carreaux de couleur ?).

Un manufacturier produit des fenêtres selon un certain modèle, toujours le même : Les fenêtres produites sont carrées, formées au centre de carreaux transparents et autour, en bordure, de carreaux colorés *(on montre simultanément aux étudiants différentes fenêtres construites par le manufacturier).*



L'ouvrier en chef voudrait commander des carreaux de couleur pour réaliser les fenêtres, et il aimerait ne pas avoir à compter à chaque fois le nombre de carreaux de couleur que ça lui prend pour produire une fenêtre. Pouvez-vous l'aider ? Écrivez un message en mots qui lui indiquerait une manière de faire pour trouver rapidement le nombre de carreaux de couleur que ça lui prend pour produire sa fenêtre, et ce, pour n'importe quelle grandeur de fenêtre.

***Figure 3** – Mise en situation – contexte de généralisation*

Cette pratique est orientée pour le formateur par des intentions didactiques : faire voir la pertinence d'un passage à l'algèbre dans un contexte de généralisation, se centrer sur le processus de symbolisation, ouvrir sur une diversité (messages en mots, notations différentes, exploitations, prolongements, etc.). La situation et son exploitation se situent à l'interface entre réflexion didactique et pratique enseignante. L'étudiant en formation est ici amené à se projeter, en la vivant de l'intérieur, dans *une pratique singulière en enseignement des mathématiques prenant place en contexte universitaire*, à travers ce qu'il perçoit du *formateur dans l'action* (comme enseignant) – ses gestes, ses mots, ses actions – mais aussi à travers *ce qu'il vit* lui-même, comme étudiant, dans cette pratique et *la manière dont réagit le groupe classe et les autres étudiants.*

Articuler formation didactique et pratique enseignante signifie ici faire vivre une pratique singulière d'enseignement des mathématiques, en temps réel, avec tout ce que cela implique.

<u>Temps 2 : Une re-lecture de cette pratique singulière vue à travers les élèves</u>. À cette étape, un regard méta est porté sur l'intervention que les étudiants viennent de vivre, sur leurs différentes productions et la manière dont elles ont été exploitées, mais aussi sur une anticipation de ce qui pourrait se passer dans une classe avec des élèves (messages en mots, symbolismes, difficultés et erreurs possibles). On entre aussi sur des productions réelles d'élèves. Il s'agit de faire du sens de ces productions pour pousser plus loin la compréhension de leur engagement, notamment des notations possibles.

Ce regard particulier, celui des élèves, vient éclairer en retour une activité de l'enseignant : si on cherche à « lire » (dans le sens de faire sens) de solutions d'élèves (quelque chose qu'ils auront souvent à faire), c'est pour en voir le potentiel en termes d'exploitation : lesquelles choisir, quelles exploitations possibles ? ; « voir le potentiel » d'une mise en situation en anticipant ce qu'elle pourrait donner. Le formateur partira de ce que voient les étudiants-maîtres pour en repérer le potentiel et revenir sur des enjeux de l'apprentissage de l'algèbre et son enseignement.

Articuler formation didactique et pratique enseignante signifie ici porter un regard particulier sur une pratique en enseignement des mathématiques à travers différents contextes : (1) groupe d'étudiants universitaire et (2) classe d'élèves du secondaire.

<u>Temps 3 : Une re-re-lecture de pratiques multiples vues à travers l'enseignant et ses interventions</u>. Le travail va se faire à partir d'extraits de leçons données par des étudiants en formation en contexte universitaire (cours de Didactique I et Laboratoire) ou en classe de stage autour de différentes régularités conduisant à la construction d'une formule générale. Le regard est ici sur l'activité de l'intervenant dans ces pratiques (sa manière de démarrer la leçon et d'engager les élèves, les questions qu'il pose, la manière dont il reprend les solutions, les enchaînements, etc.). Le formateur va faire jouer dans son intervention les différentes manières d'entrer dans la leçon, de motiver le passage au symbolisme, de rentrer sur le retour, pour ouvrir sur les différents possibles en lien avec une certaine intention.

Articuler formation didactique et pratique enseignante signifie ici « se projeter » (comme enseignant) à travers différentes pratiques singulières exploitées dans différents contextes (contexte universitaire de micro-enseignement; situations exploitées en contexte de stage).

L'analyse de cet exemple met en évidence un jeu sur de multiples pratiques (formateur, futur enseignant à l'université, en stage), contextes (universitaire et secondaire) et regards (élèves, enseignant) pour ouvrir sur différents possibles quant à l'exploitation de situations de généralisation en algèbre.

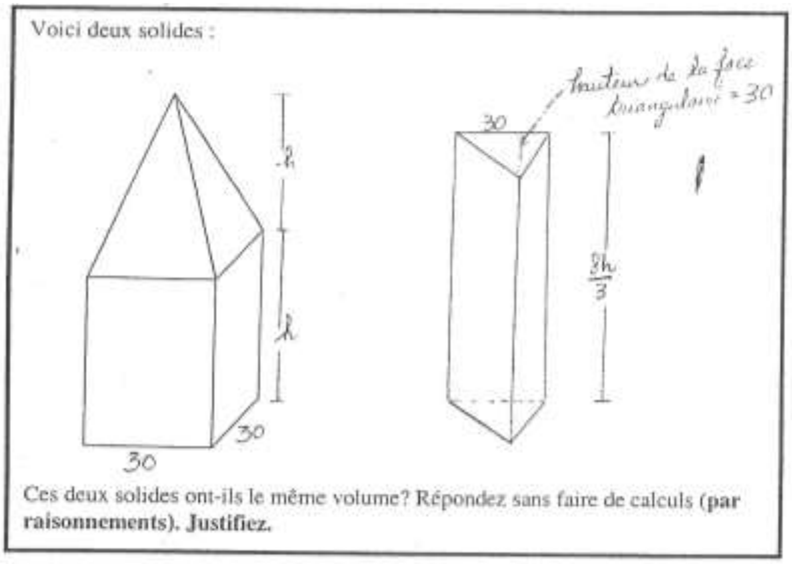
3. *Pratiques d'évaluation sous l'angle d'une expérience d'enseignement des mathématiques*

Une façon alternative de penser les questions d'articulation est de penser que l'articulation se fait avec la *pratique du formé* elle-même. Il n'est pas alors question d'une pratique « de l'école », mais simplement d'une pratique d'enseignement des mathématiques, celle du formé, et c'est elle qu'on veut enrichir. Cette entrée nécessite de voir l'étudiant en formation non pas comme un *futur* enseignant, qui enseignera *plus tard*, mais comme un enseignant en formation : un enseignant qui possède une pratique à lui et qu'on veut continuer à faire avancer par la formation. Pour mieux comprendre cette dernière conceptualisation de l'articulation, regardons un exemple concret tiré du cours Didactique II et Laboratoire, un cours offert en fin de formation.

Dans le volet du cours sur l'évaluation, les étudiants travaillent la construction de barèmes pour des tâches mathématiques. La conception didactique du formateur, qui sous-tend la pratique d'évaluation mise de l'avant, est ancrée dans l'idée d'un barème centré sur les raisonnements mathématiques sollicités par la tâche (souvent tirés d'une analyse *a priori* du concept et de la tâche) et permet de rendre compte d'une diversité d'entrées possibles pour la résolution et de divers degrés de réussite.

Dans un premier temps, les étudiants ont à résoudre deux problèmes sur la notion de volume et d'aire (Figure 4). Ces tâches ne sont évidemment pas choisies au hasard, mais parce qu'elles ouvrent sur différentes solutions et mettent en jeu des raisonnements clés pour les concepts d'aire et de volume (par exemple, pour la première tâche : comparaison qualitative du volume des solides, relation entre pyramides et prisme associés, effet des changements de dimensions [triple, moitié, etc.] sur les volumes).

Problème #1



Problème #2

Voici quatre triangles isocèles. En tant que triangles isocèles, ces triangles ont deux côtés de même longueur. Donc, dans ces triangles, uniquement la longueur de la base est différente. Détermine le triangle qui a la plus grande aire. Explique comment tu le sais. (Inspiré de Avital et Barbeau, 1991).

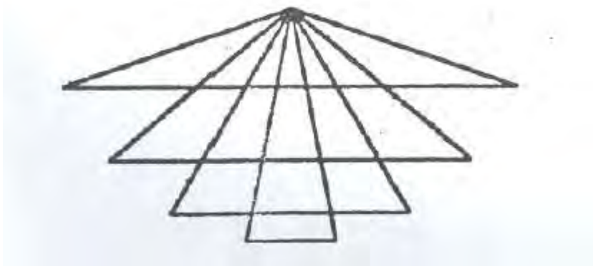


***Figure 4** – Deux problèmes pour l'activité d'évaluation*

Par la suite, pour le premier problème (la même chose sera faite pour le deuxième), le formateur recueille les solutions et répartit les étudiants en groupes de 5 ou 6 pour refléter une diversité d'entrées dans le problème. Toutefois, avant de se placer en équipe, chacun des étudiants doit formuler un barème qui permette de rendre compte et d'apprécier les diverses entrées et solutions possibles dans le problème. Les étudiants regroupés par solutions se placent ensuite en équipe et reçoivent une copie de chacune des solutions des autres membres de l'équipe au même problème. Pour chacune des solutions, les étudiants appliquent leur barème personnel sur la solution proposée, en s'assurant de bien justifier l'évaluation donnée. (Dans certains cas, les étudiants ont rapidement à ajuster leur barème, une limite se faisant rapidement sentir face à leur incapacité d'apprécier adéquatement les solutions.) Par la suite, pour chacune des solutions, chaque étudiant présente son évaluation de la solution en la justifiant. L'étudiant « noté » (par 4-5 évaluateurs) peut ensuite expliquer sa solution. Cette « confrontation » entre évaluateurs et évalué permet aux évaluateurs d'expliquer leurs évaluations et de mieux comprendre la solution évaluée, menant à un débat explicatif concernant l'évaluation à donner à cette solution. Les cas litigieux sont ramenés en classe où ils sont discutés/débattus.

Cette activité de formation fait entrer les étudiants dans une pratique d'évaluation en action, alors qu'ils créent un barème pertinent, l'utilisent, l'ajustent, le justifient, le comparent à d'autres, etc. Ils sont amenés à déployer une pratique d'évaluation, une pratique d'enseignement des mathématiques, qu'ils raffinent, négocient et enrichissent. Celle-ci est aussi confrontée, discutée et questionnée dans l'activité de formation : elle est mise en mouvement et évolue dans sa mise en route et sa confrontation. De plus, alors que leurs solutions sont elles-mêmes évaluées, les formés deviennent sensibilisés à une pratique d'évaluation « de l'extérieur », c'est-à-dire à une pratique d'évaluation déployée par d'autres et à l'impact de celles-ci sur l'appréciation et le jugement de solutions ; la confrontation permet une discussion qui peut s'avérer enrichissante pour la réflexion sur une pratique d'évaluation, son sens en pratique, son potentiel, ses limites, ses subjectivités, etc. Finalement, les cas litigieux ramenés en plénière sont aussi d'autres occasions de confronter les pratiques d'évaluation des formés, alors que les étudiants provenant des autres groupes se mêlent aux discussions. Il faut noter aussi que la présence du formateur, ici un didacticien, est importante tout au long de l'activité alors que celui-ci – ancré dans une vision didactique de l'évaluation tel que décrite plus haut – alimente et provoque diverses discussions en questionnant les formés (évalués/évaluateurs) sur la pertinence des barèmes développés, leur rigidité/flexibilité ou précision/imprécision, leur capacité à rendre compte des solutions et de leur diversité, la place qu'ils accordent aux concepts clés touchés par la question (*versus* aux erreurs de calculs), leur capacité à apprécier les solutions entre les extrêmes, etc. Cette avancée des pratiques est soutenue par les actions et interventions du formateur qui, par son cadre de référence didactique, tente de pousser les réflexions, compréhensions et pratiques des formés. Ce cadre est toutefois celui du formateur et n'est pas exposé de façon explicite aux étudiants durant le cours : il sert de ligne directrice pour son action de formateur, dans le but de faire avancer la pratique d'enseignement des formés. L'activité de formation s'articule donc à la pratique actuelle et en mouvement des formés, pour la faire avancer et l'enrichir par son déploiement et sa confrontation.

Cette conceptualisation de l'articulation de la formation avec la pratique d'enseignement du formé s'éloigne d'une idée de transfert de connaissances ou d'applications dans une pratique future : il est question ici de la pratique elle-même de l'enseignant en formation, du développement de ses habiletés et compétences d'enseignement. On ne tente donc pas de s'articuler avec « une pratique réelle de l'école », mais bien avec la pratique effective, actuelle et en mouvement de l'enseignant en formation.

Articuler formation didactique et pratique enseignante signifie ici travailler sur les pratiques d'enseignement des formés et les faire cheminer à travers des activités de formation qui les forcent à agir comme enseignants et à confronter et justifier leurs pratiques personnelles.

On peut questionner ici l'aspect didactique de la formation proposée. Celle-ci ne joue en effet qu'en arrière plan sur les actions du formateur didacticien, comme cadre de référence guidant ses actions de praticien-formateur : c'est uniquement de façon implicite que les principes didactiques du formateur sont mis de l'avant. Les formés ne sont pas amenés à suivre un cadre ou modèle didactique de l'évaluation, et ils n'y sont jamais explicitement exposés : ils déploient une pratique d'évaluation qui leur est personnelle et c'est dans l'action, face à leurs pratiques personnelles, que le formateur intervient et questionne ces pratiques personnelles pour les faire avancer. D'une certaine façon, dans ce contexte, c'est aussi le formateur qui déploie une pratique enseignante de formation, ancrée dans un cadre qui est le sien et qui est lui aussi, tout comme pour ses formés, mis en mouvement à l'intérieur des interactions continues et des interventions avec ces mêmes formés.

IV. RETOUR SUR LES CONCEPTUALISATIONS DE L'ARTICULATION : COMBINAISONS ET CONFRONTATIONS DES REGARDS

« S'articuler » renvoie, si on retourne à la définition étymologique du terme, à une idée de joindre, unir, lier. Cette expression, prise dans son sens littéral, laisse penser que l'on tente de réunir deux pôles (formation à l'enseignement des mathématiques et pratique enseignante) apparaissant dès lors extérieurs l'un à l'autre. L'analyse des quatre illustrations précédentes met en évidence, au contraire, une articulation de l'intérieur même de la pratique de formation qui tente de prendre en compte la pratique enseignante et de la faire vivre.

Au delà de cette prise de conscience, on observe que l'articulation entre formation à l'enseignement et pratique enseignante prend *une pluralité de sens* dont les nuances et les distinctions forment, précisément, sa richesse. À partir de l'analyse des jeux de rôles proposant de penser l'articulation en termes de *tensions entre préoccupations pratiques et didactiques* (un va-et-vient dans lequel les étudiants travaillent des interventions ponctuelles ni comme le ferait le didacticien-chercheur ni comme le ferait l'enseignant en classe), d'autres conceptualisations émergent. Dans un des cas, on parle de *complémentarité des regards et des contextes* (entre pratiques multiples et singulières). Ailleurs, l'articulation s'évoque dans l'image de *« performances »* (au sens de la métaphore de l'acteur de Goffman, 1987) développant des pratiques d'explication essentielles au travail de l'enseignant. Enfin, l'articulation se présente aussi sous l'angle de l'*agir enseignant*, un point d'entrée (illustré en contexte d'évaluation) où ce qui est mis en jeu n'est pas une « pratique dans l'école », mais des pratiques qui se manifestent dans les activités de formation elles-mêmes : celles de l'enseignant en formation et de ses collègues.

L'analyse, en éclairant cette pluralité de sens portée par des voix multiples, fait ressortir de manière fondamentale l'importance de ces distinctions de l'articulation. Au cours des dernières années, nous en sommes personnellement venus comme didacticiens des mathématiques à concevoir une productive diversité dans ce qu'on appelle « didactique » et « pratique », nous conduisant à opter pour des formes plurielles. Or, c'est aussi ce que nous observons à propos d'articulation. Cette acceptation de la pluralité n'est toutefois pas un refus de clarification. C'est plutôt le résultat d'une coexistence entre différentes voix qui s'expriment, se contrastent, et dont la rencontre (voire la confrontation) est porteuse de visions de l'articulation qui s'enrichissent mutuellement. C'est dans cette polyphonie et les distinctions qu'elle porte que la question même de l'articulation se précise pour nous, tout en demeurant diverse. Comme équipe, nous souhaitons faire de ces enrichissements un des objets de nos travaux futurs.

REFERENCES

Avital S., Barbeau E. J. (1991) Intuitively misconceived solutions to problems. *For the Learning of Mathematics* 11(3), 2-8.

Bednarz N. (2001) Didactique des mathématiques et formation des enseignants : le cas de l'Université du Québec à Montréal. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies* 1(1), 61-80.

Bednarz N. (2007) Ancrage de la didactique des mathématiques au Québec : à la recherche de sens et d'une cohérence. *Actes du colloque 2007 du Groupe des didacticiens des mathématiques du Québec* (pp. 21-61). UQÀR : GDM.

Bednarz N., Gattuso L., Mary C. (1995) Formation à l'intervention d'un futur enseignant en mathématiques au secondaire. *Bulletin de l'Association Mathématique du Québec* 35(1), 17-30.

Bednarz N., Perrin-Glorian M.-J. (2003) Formation à l'enseignement des mathématiques et développement de compétences professionnelles : Articulation entre formation mathématique, didactique et pratique. *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone 2003*. Tunis, Tozeur : Éditions CNP. CD-ROM.

Conference Board of the Mathematical Sciences [CBMS] (2001) *The Mathematical Education of Teachers*. Providence, RI et Washington DC: American Mathematical Society and Mathematical Association of America.

Dufour-Janvier B., Hosson N. (1999) L'étudiant futur enseignant en interaction dans le cadre d'activités géométriques variées : observations et éléments de réflexion. *Actes du colloque 1999 du Groupe des didacticiens des mathématiques du Québec* (pp. 39-53). Montréal : UQÀM.

Goffman E. (1987) *Façons de parler* (trad. : A. Kihm). France : Éditions de Minuit.

Gourdeau F., Proulx J., Maheux J.-F., Hodgson B. (à paraitre) Formation *mathématique* pour les enseignants de mathématiques du secondaire : Croisement des regards du mathématicien et du didacticien. In Proulx J., Corriveau C., Squalli H. (Eds.) *Formation mathématique pour l'enseignement des mathématiques : pratiques, orientations et recherches.* Québec, Qc : Presses de l'Université du Québec.

Janvier B., Saboya M., Passaro V. (2009) Réflexions autour de la créativité mathématique dans le contexte de la formation des futurs enseignants au secondaire : l'exemple de l'Université du Québec à Montréal. *Actes du 61ème colloque de la CIEAEM (Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques)*, publiés dans *Quaderni di Ricerca in Didattica Matematica* (supp. nº2, pp. 476-479).

Janvier C. (1996) Constructivism and its consequences for training teachers. In. Steffe L.P., Nesher P. (Eds.) (pp. 449-463) *Theories of mathematical learning*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Houdement C., Kuzniak A. (1996) Autour des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques* 16(3) 289–322.

Lajoie C. (2009) Le jeu de rôles en formation initiale des maîtres du primaire : une situation-problème visant une réflexion pour, dans et sur l'action. *Actes du 61ème colloque de la CIEAEM (Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques)*, publiés dans *Quaderni di Ricerca in Didattica Matematica* (supp. nº2, pp. 217-222).

Lajoie C. (2010) Les jeux de rôles : une place de choix dans la formation des maîtres du primaire en mathématiques à l,UQAM. In Proulx J., Gattuso L. (Eds.) (pp. 101-113) *Formation des enseignants en mathématiques : tendances et perspectives actuelles*. Sherbrooke, Qc : Éditions du CRP.

Lajoie C., Pallascio R. (2001) Le jeu de rôle : une situation-problème en didactique des mathématiques pour le développement de compétences professionnelles. *Actes du colloque des didacticiens des mathématiques du Québec* (pp. 120-132). Montréal: GDM.

Perrenoud P. (1999) De quelques compétences du formateur-expert. Université de Genève, Faculté de psychologie et des sciences de l'éducation. http://www.afhep.ch/Divers/Documents/Perrenoud1.pdf

Proulx J., Corriveau C., Squalli H. (Eds.) (2012) *Formation* mathématique *à l'enseignement des mathématiques : pratiques, orientations et recherches*. Québec, Qc : Presses de l'Université du Québec.

Proulx J., Gattuso L. (Eds.) (2010). *Formation des enseignants en mathématiques : Tendances et perspectives actuelles.* Sherbrooke, Qc : Éditions du CRP.

Saboya M. (2010) Réflexion autour des différents objectifs poursuivis par l'évaluation diagnostique dans la formation des futurs enseignants de mathématiques au secondaire. In Proulx J., Gattuso L. (Eds.) (pp. 75-87) *Formation des enseignants en mathématiques : tendances et perspecticves actuelles*. Sherbrooke, Qc : Éditions du CRP.

Tanguay D. (2003) Un cours de didactique préparatoire aux stages. Actes du colloque *Espace Mathématique Francophone* 2003. Tunis, Tozeur : Éditions CNP. CD-ROM.

DEUX DIMENSIONS DE L'ACTIVITÉ DU PROFESSEUR DES ÉCOLES EXERÇANT DANS DES CLASSES DE MILIEUX DÉFAVORISÉS : INSTALLER LA PAIX SCOLAIRE, EXERCER UNE VIGILANCE DIDACTIQUE

Pascale MASSELOT* – Denis BUTLEN* – Monique CHARLES-PEZARD**

Résumé – S'inscrivant à la fois dans le cadre de la didactique des mathématiques et dans celui de la théorie de l'activité, nos recherches portent sur les pratiques de professeurs des écoles débutants enseignant les mathématiques dans des écoles socialement défavorisées. Dans un premier temps, nos analyses ont permis de mettre en évidence des contradictions vécues au quotidien par ces professeurs ainsi que les systèmes de réponses apportés. Dans un second temps, pour intervenir sur ces pratiques en visant leur enrichissement, nous avons élaboré une ingénierie de formation sous forme d'un accompagnement. En nous appuyant sur une méthodologie d'analyse en termes de niveaux de l'évolution des pratiques, nous dégageons ici deux dimensions de l'activité des professeurs des écoles enseignant les mathématiques en ZEP : installer la paix scolaire et exercer une vigilance didactique. Ces deux dimensions constituent deux grandes questions de la profession contribuant à son intelligibilité dont la formation initiale et continue des enseignants doit s'emparer.

Mots-clefs : activité du professeur des écoles, mathématiques, paix scolaire, vigilance didactique, formation

Abstract – As part of both mathematics education and theory of activity, our research focuses on the practices of elementary teacher beginning teaching mathematics in schools socially disadvantaged. Initially, our analysis allowed highlighting the contradictions experienced daily by these teachers and the response systems made. In a second step, in order to intervene on these practices by targeting their enrichment, we developed an engineering training in the form of an accompaniment. Building on a methodology of analysis in terms of levels of changes in practices, we have identified here two dimensions of the activity of school teachers teaching mathematics in ZEP: install school peace and practice didactic vigilance. These two dimensions are two major issues of the profession contributing to its intelligibility whose initial and continuing training of teachers must take.

Keywords: elementary teacher's activity, mathematics, school peace, didactic vigilance, teaching training

Après avoir précisé le cadre général de nos recherches ainsi que les cadres théoriques auxquels nous nous référons pour mener les analyses des pratiques des professeurs des écoles enseignant en ZEP, en y incluant les premiers résultats sur lesquels nous nous appuyons, nous présentons les deux questions du métier auxquelles nous nous intéressons et des éléments de la méthodologie d'analyse. A partir des résultats des analyses menées pour cerner les réponses apportées par les professeurs des écoles observés à ces deux questions, nous formulons quelques perspectives pour la formation des professeurs des écoles.

I. ANALYSE DES PRATIQUES DES ENSEIGNANTS DE ZEP EN RELATION AVEC LES ACTIVITÉS DES ÉLÈVES : CADRE THÉORIQUE ET PREMIERS RÉSULTATS

1. Des recherches sur les pratiques des enseignants de ZEP prenant en compte le global et le local

D'un point de vue global, nous nous sommes d'abord intéressés à l'élucidation des multiples contraintes auxquelles sont soumis les professeurs de ZEP et au repérage des marges de

* LDAR Paris IUFM Versailles UCP – France – pmasselot@aol.com, denis.butlen@iufm.u-cergy.fr
** LDAR Paris, IUFM Créteil UPEC – France – monique.pezard-charles@u-pec.fr

© Masselot P., Butlen D., Charles-Pézard M. (2012) Deux dimensions de l'activité du professeur des écoles exerçant dans des classes de milieux défavorisés : installer la paix scolaire, exercer une vigilance didactique. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT2, pp. 362–370). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

manœuvre qu'il leur reste. Ces premiers travaux, exposés lors d'EMF 2009, ont permis de mettre en évidence au moins cinq contradictions vécues au quotidien par ces professeurs, dont la plus importante est la contradiction entre apprentissages scolaires et socialisation : deux projets entrent en concurrence, celui qui vise à éduquer le futur citoyen et celui qui a pour but d'enseigner des savoirs disciplinaires. Cette concurrence concerne aussi bien leur hiérarchie (en termes d'antériorité notamment) que le temps qui leur est consacré. Les professeurs gèrent ces contraintes au quotidien en se construisant des systèmes de réponses relativement cohérents. Prenant en compte la double mission d'instruction et d'éducation du professeur des écoles enseignant les mathématiques en ZEP, nous avons établi une première catégorisation des pratiques effectives en distinguant les i-genres (liés à la mission d'instruction) des e-genres (liés à la mission d'éducation) (Butlen, Peltier etPézard 2002).

Dans ce cadre général, d'un point de vue plus local, nous nous sommes centrés sur les activités des professeurs des écoles constitutives de leurs pratiques : activité de préparation de classe, activité en classe, activité après la classe. Nous prenons ainsi en compte différents niveaux d'organisation des pratiques enseignantes : global, local et micro (Masselot et Robert 2007). Si les grands choix effectués par les professeurs et les stratégies qui en découlent relèvent d'un niveau global, leur mise en œuvre dans les classes se situe à un niveau local, voire micro ; cela nous amène à découper l'activité du professeur en activités élémentaires comme les gestes et routines professionnels (Butlen 2004, Butlen et Masselot 2001).

Les différents points de vue décrits précédemment ne sont pas indépendants et permettent d'avoir des regards à plusieurs niveaux sur l'activité des professeurs des écoles, notamment sur celle des débutants.

2. *Une approche socio-didactique*

Nous étudions les pratiques enseignantes en nous référant au cadre théorique de la « double approche » défini par Robert et Rogalski (Robert et Rogalski 2002, Robert 2008). Afin de prendre en compte les contraintes sociales liées aux élèves de ZEP, nous adaptons ce cadre qui combine une approche utilisant des concepts issus de la didactique des mathématiques et de l'ergonomie. Le développement de ce cadre théorique met davantage l'accent sur les facteurs sociologiques et se caractérise par certaines hypothèses admises ou découlant de nos recherches précédentes.

Nos premières recherches sur les pratiques des professeurs des écoles enseignant les mathématiques en ZEP visaient à évaluer le poids de l'aspect social dans la pratique d'un enseignant de ZEP. Nous nous sommes interrogés sur les influences que pouvaient avoir le passé et le devenir des élèves sur la manière d'enseigner de ces enseignants, en privilégiant l'analyse de trois grands moments de l'activité du professeur que sont les processus de dévolution, de régulation et d'institutionnalisation. Nous empruntons à la théorie des situations didactiques ces trois processus pour décrire l'activité du professeur.

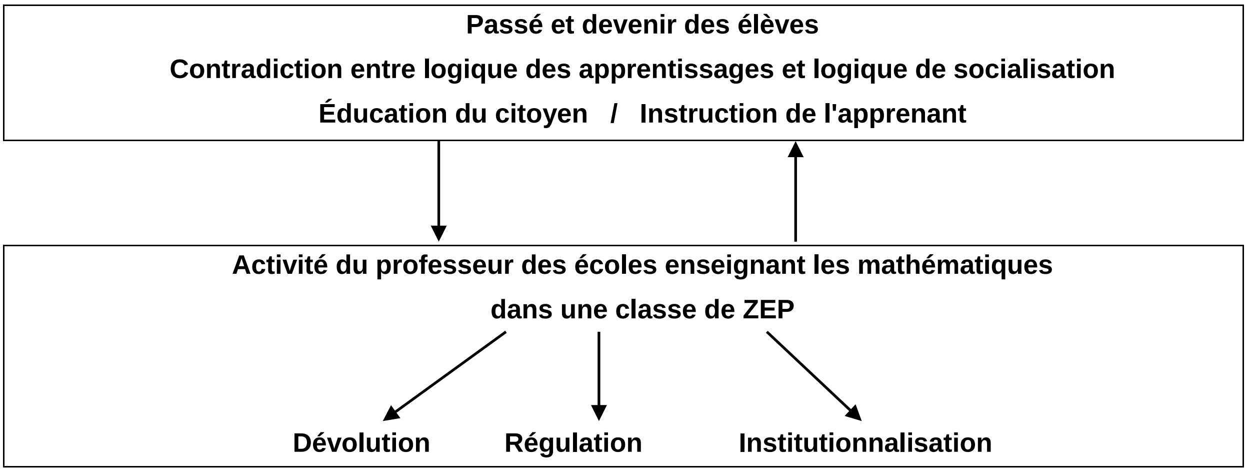


Figure 1 – *Influences du passé et du devenir des élèves sur l'activité du professeur*

Ces influences peuvent notamment se mesurer en étudiant la manière dont les professeurs gèrent la contradiction fondamentale entre logique d'apprentissage et logique de socialisation.

Reprenant de manière métaphorique le concept de genre de Clot (1999) en l'adaptant à notre objet d'étude pour décrire et interpréter les régularités intra et inter-personnelles identifiées dans nos observations, nous avons défini trois i-genres. Si certaines des régularités intra-personnelles relèvent plutôt d'une mémoire personnelle (le style), les secondes renvoient à l'idée d'une mémoire collective des enseignants et à la notion de genre. Cela conduit évidemment à penser que des informations diffusent au sein d'un réseau de professionnels et que les pratiques dépassent pour une part les individus. A l'origine, les indicateurs utilisés pour décrire les trois i-genres relèvent des cinq composantes définies par Robert et Rogalski. Chacun témoigne d'une manière de gérer les contradictions qui pèsent sur les pratiques des enseignants.

Les trois i-genres ont été présentés lors d'EMF 2009. Rappelons ici que deux d'entre eux se caractérisent par des scénarios ne présentant pas (ou très rarement) de problèmes consistants aux élèves, par des temps de recherche très réduits, par une baisse quasi systématique des exigences de la part du professeur, par une individualisation non contrôlée de l'enseignement, par la mise en œuvre d'une certaine forme de pédagogie différenciée rendant le plus souvent impossible l'existence de phases de synthèse et d'institutionnalisation. Ces pratiques se caractérisent aussi par une difficulté pour le professeur à gérer l'avancée du temps didactique. Parmi ces professeurs, se distinguent ceux (en nombre majoritaire, i-genre 2) qui éprouvent des difficultés à négocier une certaine paix sociale (voire définition ci-dessous) des autres (i-genre 1) qui y réussissent mais sans pour autant obtenir l'adhésion des élèves à leur projet d'enseignement.

Le troisième i-genre, très minoritaire, se caractérise par des scénarios proches de ceux privilégiés en formation (problèmes consistants, phase de recherche des élèves, synthèse et institutionnalisation suivies d'activités de réinvestissement, etc.), gestion collective des apprentissages et des comportements, maintien des exigences en termes d'apprentissages.

Centrant notre regard sur les mathématiques proposées à la fréquentation des élèves et sur la manière dont les enseignants gèrent cette fréquentation, nous essayons de cerner l'activité du professeur d'un point de vue global (grands choix effectués en termes d'itinéraire cognitif) et d'un point de vue local (gestes et routines mobilisés pour mettre en œuvre ces choix au quotidien).

Pour analyser les effets du social sur les processus de dévolution, régulation et institutionnalisation dans le contexte d'un enseignement de mathématiques, nous avons été amenés à considérer la manière dont les enseignants répondent à deux grandes questions du métier de professeur des écoles : installer et maintenir la paix scolaire, exercer une vigilance didactique. Ces deux questions sont particulièrement vives en ZEP ; les réponses apportées conditionnent à la fois les apprentissages des élèves et l'exercice du métier. Notons que ces deux questions et la manière d'y répondre ne sont pas indépendantes : les réponses apportées à l'une marquent les réponses apportées à l'autre. Nous verrons dans la suite de cette contribution que la manière dont le professeur négocie la paix scolaire n'est pas sans effet sur son exercice d'une certaine vigilance didactique et réciproquement.

La détermination des réponses apportées à ces deux questions nécessite d'analyser les grands choix pédagogiques et didactiques du professeur et la manière dont ils se réalisent au quotidien. Nos recherches actuelles nous permettent ainsi d'affiner la classification des pratiques en i-genres et d'enrichir les premiers indicateurs retenus en considérant les gestes et les routines professionnels. Le découpage de l'activité du professeur en gestes et routines, considérés comme des schèmes professionnels (Butlen 2004), se révèle pertinent pour décrire une suite d'actions finalisées par un but ainsi que les connaissances mobilisées à cette occasion, et pour les mettre en relation avec l'activité correspondante de l'élève. Pour être efficaces, les gestes et routines doivent pouvoir s'adapter à des conditions locales, de surface, non déterminantes pour le fonctionnement du professeur et des élèves. Cette adaptabilité témoigne pour une grande part de la maîtrise des gestes et renforce leur stabilité. La maîtrise d'un geste ou d'une routine implique la mise en œuvre d'une ou plusieurs techniques qui pourraient être qualifiées de naturalisées en se référant à la théorie anthropologique (Chevallard 1999). Si l'installation de la paix scolaire et l'exercice d'une plus ou moins grande vigilance didactique participent de la stratégie globale de l'enseignant, leur mise en œuvre au quotidien dans la classe est associée à des gestes et routines professionnels de différents types.

II. DEUX QUESTIONS DU MÉTIER DE PROFESSEUR DES ÉCOLES

1. Installer la paix scolaire

Nous définissons la paix scolaire comme le couple « paix sociale » et « adhésion (des élèves) au projet d'enseignement du professeur ».

La paix sociale, premier élément du couple, se caractérise notamment par la mise en place de règles de fonctionnement de la classe acceptées par les élèves et indispensables à la relation didactique. Ces règles visent à instaurer un certain calme, une absence de violence entre les élèves, un respect des personnes, des prises de paroles contrôlées, etc. L'adhésion des élèves au projet d'enseignement du professeur se manifeste par un climat de confiance, voire de complicité, entre les élèves et le professeur ; par un enrôlement rapide, sans trop de résistance, des élèves dans les tâches. Cette adhésion est globale mais se trouve réinitialisée au niveau local dans le quotidien de la classe.

Nous distinguons la paix scolaire de la paix sociale qui ne constitue qu'une partie de la première. D'un point de vue didactique, l'obtention de la paix scolaire n'est pas une fin en soi mais un minimum est nécessaire à l'apprentissage des élèves. Regardant l'activité du professeur en lien avec celle de l'élève, nous nous intéressons au couple « confort de l'enseignant / efficacité en termes d'apprentissage ».

L'installation de la paix scolaire, si elle participe au processus de dévolution, relève aussi de l'ensemble de l'acte d'enseignement.

2. Exercer une vigilance didactique

La maîtrise des contenus mathématiques, bien qu'indispensable, n'assure pas à elle seule leur transmission car le professeur peut rester dans un rapport au savoir soit de type élève, soit de type expert, ce dernier ne garantissant pas la prise en compte des procédures personnelles proposées par les élèves. D'autres connaissances, en particulier didactiques, sont nécessaires à l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire. Cela nous amène à définir ce que nous appelons la « vigilance didactique » comme un ajustement didactique permanent de la part du professeur faisant appel aux deux composantes cognitive et médiative des pratiques et s'exerçant dans les trois niveaux global, local et micro.

Pour exercer une certaine vigilance didactique, des connaissances mathématiques et didactiques sont à mobiliser. Les connaissances mathématiques ne sont pas seulement académiques, elles doivent être finalisées pour l'enseignement. Les connaissances didactiques contribuent à une bonne perception des enjeux d'apprentissage des situations et de leur organisation en vue de l'enseignement de savoirs mathématiques. Elles sont constituées des résultats ou faits didactiques, mis en évidence par la recherche et qui ne sont plus contestés, par exemple les incidences de conceptions erronées des nombres décimaux sur le rangement de tels nombres. Elles comprennent des outils permettant de lire le réel, issus de la didactique des mathématiques mais transformés en vue de l'action d'enseigner. Ces outils consistent par exemple en la mise en œuvre d'un minimum d'analyse *a priori* pour identifier le savoir mathématique en jeu dans la situation, les variables didactiques et l'incidence de leurs valeurs sur les procédures et les résultats des élèves, pour mieux anticiper la mise en actes du projet. Pendant la classe, ces outils aident au repérage des procédures effectives, à l'identification, parmi la diversité des productions des élèves, de celles sur lesquelles s'appuyer pour les faire évoluer vers une procédure de réussite. Une meilleure exploitation des procédures, leur hiérarchisation, la mise en œuvre d'une institutionnalisation s'appuyant sur le travail des élèves mobilisent de telles connaissances, finalisées par l'action d'enseigner et liées aux grandes étapes du cheminement cognitif des élèves.

Ces différentes connaissances mathématiques et didactiques s'opérationnalisent dans l'action du professeur pour réaliser des tâches. La vigilance didactique est liée aux différentes tâches d'enseignement de contenus mathématiques situées en amont, pendant ou après la classe ainsi qu'aux différentes manières de les réaliser ; ces dernières relèvent de la composante médiative et des niveaux local et micro des pratiques. Elles concernent en particulier les routines de type 3 selon la classification établie par Butlen et Masselot (2001) qui sont en relation avec les contenus mathématiques enseignés.

La vigilance didactique est donc à la fois du côté du savoir mathématique, des connaissances didactiques et de leur mise en fonctionnement dans l'acte d'enseigner. Elle se distingue de la vigilance épistémologique car elle n'est pas uniquement centrée sur le contenu, mais aussi sur l'action du professeur, notamment en classe. Exercer une vigilance didactique suffisante assure un déroulement de classe piloté prioritairement par les mathématiques, « au plus près » des apprentissages visés.

Comme la paix scolaire, la vigilance didactique ne concerne pas uniquement l'enseignement en ZEP. La notion s'étend aux classes ordinaires. Toutefois, il semble qu'en ZEP son insuffisance peut être plus grave, car source de différenciation.

Nous avons décrit, en lien avec les i-genres, des modes d'installation de la paix scolaire. Dans le paragraphe suivant, nous expliquons comment une méthodologie d'analyse en quatre niveaux nous permet de cerner dans les pratiques la manière dont peut être réalisé l'exercice de la vigilance didactique.

3. *Exercer une vigilance didactique : quatre niveaux pour analyser les réponses apportées par les enseignants*

Prendre une référence nous a paru indispensable pour situer les différentes pratiques observées et les comparer. Notre choix des pratiques relevant du i-genre 3 se justifie essentiellement par deux critères. D'une part, un enseignant dont la pratique relève de cet i-genre propose à la fréquentation de ses élèves des problèmes plus consistants, donnant davantage de sens aux notions, et donc *a priori* meilleurs vecteurs d'apprentissages. D'autre part, ces pratiques existent, nous les avons observées, même dans des ZEP très difficiles ; elles sont donc viables.

En référence au i-genre 3, nous avons défini une échelle comportant quatre niveaux qui, s'ils sont atteints, pourraient favoriser les apprentissages mathématiques des élèves. Pour chaque niveau, nous apprécions la plus ou moins grande proximité entre la pratique étudiée et celle de référence[1] (i-genre 3).

– Premier niveau : proposition de problèmes consistants et aménagement de temps de recherche

Ce niveau est atteint lorsque le professeur propose aux élèves fréquemment, voire systématiquement, des problèmes mathématiques consistants, porteurs de sens, les engageant dans une réelle recherche. Des situations issues de manuels sont adaptées sans remettre en cause les enjeux en termes de savoir et d'apprentissage. Un autre indicateur de ce premier niveau concerne l'existence et la gestion du temps de recherche accordé aux élèves : d'une part, ce dernier est relativement significatif, d'autre part, les aides éventuelles apportées ne s'accompagnent pas d'une réduction des exigences.

– Deuxième niveau : explicitation des procédures

Ce niveau concerne la place donnée aux élèves et à leurs productions effectives dans les moments de mise en commun des réponses, de validation de celles-ci et d'explicitation des procédures (menant ou non à la réussite). Le professeur atteint ce niveau lorsqu'il permet aux élèves d'exposer leurs procédures au cours d'une phase collective. Ce travail d'explicitation se fait d'autant plus facilement que le professeur a instauré un climat de communication dans la classe.

— Troisième niveau : hiérarchisation des procédures et synthèse

Ce niveau est atteint lorsque le professeur procède à la hiérarchisation des productions des élèves et ménage des phases de synthèse contextualisées. Selon la situation proposée, cette hiérarchisation peut prendre en compte différents facteurs : l'efficacité et la validité de la procédure, son économie en termes de temps de résolution, de coût cognitif, la nature et le degré d'expertise des savoirs mobilisés. Plusieurs élèves peuvent s'être engagés dans la même procédure sans être tous parvenus au résultat correct. L'enseignant ayant atteint ce niveau est capable de distinguer procédure, manière de la mettre en œuvre et réponse.

– Quatrième niveau : institutionnalisation

Ce niveau se caractérise par le fait de proposer une institutionnalisation des savoirs ou méthodes en jeu dans la situation, par une décontextualisation et une dépersonnalisation mais aussi par une réorganisation des savoirs visités, notamment en termes d'ancrage du nouveau dans l'ancien.

---

[1] Référence ne signifie pas « modèle »

Nous utilisons le terme de niveau sans pour autant proposer un modèle totalement ordonné. Certaines caractéristiques d'un niveau peuvent être présentes sans que le niveau qui le précède soit totalement atteint.

Comment la vigilance didactique s'exerce-t-elle par rapport à ces différents niveaux ?

Pour estimer le degré de vigilance didactique du professeur des écoles, nous définissons des indicateurs correspondant à son activité avant, pendant et après la classe, indicateurs liés à ces quatre niveaux.

En amont de la classe, ils concernent la consistance des problèmes proposés ainsi que la qualité de l'analyse *a priori* du professeur, qualité appréciée de plusieurs points de vue : adéquation du problème avec la (les) connaissance(s) visée(s), gestion a priori de la séance mettant en relation choix au niveau de chacune des variables didactiques, anticipation des procédures et performances des élèves, prévision des aides en cas de difficultés. Nous regardons aussi comment le professeur situe les connaissances nouvelles par rapport aux anciennes et comment il situe sa séance (niveau local) dans un projet global sur le thème mathématique travaillé. En amont de la classe, la vigilance didactique intervient dans la qualité des anticipations de chacun des niveaux.

Pendant la classe, outre un maintien de ses exigences, la vigilance didactique du professeur des écoles s'exerce dans sa capacité à décoder les cheminements cognitifs des élèves par rapport à son projet initial. Cela suppose de savoir lire et interpréter leurs productions et d'ajuster en conséquence ses décisions d'enseignant. Elle est aussi liée aux gestes visant à faire expliciter les procédures, à les hiérarchiser, à identifier celles sur lesquelles s'appuyer et à en faire une synthèse. Les indicateurs se situent dans le temps de recherche qui correspond au niveau 1, et également dans les niveaux 2 et 3.

La capacité du professeur à institutionnaliser à partir de la synthèse et à dérouler le « bon » texte du savoir, conforme à la fois au projet d'enseignement, aux exigences institutionnelles et aux cheminements cognitifs effectifs des élèves, relève de la vigilance didactique. Une institutionnalisation utilisant le vocabulaire adéquat, assurant l'ancrage du nouveau dans l'ancien et apportant une certaine décontextualisation nécessite de mobiliser des connaissances relevant de la vigilance didactique.

Après la classe, elle s'exerce dans la régulation des activités proposées, dans les adaptations de la progression aux réussites ou aux difficultés des élèves, en particulier dans le choix des exercices de réinvestissement, voire d'évaluation.

III. RETOUR SUR LES RÉPONSES APPORTÉES À CES DEUX QUESTIONS

Pour un professeur des écoles enseignant en ZEP, installer la paix scolaire constitue une réponse à des contraintes sociales et institutionnelles, toutefois pas indépendante des trois autres composantes (personnelle, cognitive et médiative). Les gestes professionnels permettant d'installer un minimum de paix scolaire ne sont pas indépendants du contenu disciplinaire. Par ailleurs, l'installation de la paix scolaire est liée à la prise de risque mathématique que s'autorise l'enseignant dans sa classe à différents moments de son enseignement. Considérant l'incertitude générale qu'un enseignant doit gérer en classe, la réduction de celle-ci concernant les comportements des élèves va lui permettre, par une sorte de compensation, d'en accepter davantage du point de vue mathématique et donc de prendre plus de risque dans ce domaine.

Ces deux questions présentent un point commun dans la mesure où elles sont posées de façon permanente, particulièrement pendant la classe. Les réponses apportées sont complémentaires. La vigilance didactique est plutôt du côté des connaissances mathématiques et didactiques et des tâches liées à l'enseignement de contenus. Toutefois, en garantissant un enseignement au plus près des notions mathématiques visées, elle contribue à installer la paix scolaire.

Mais ce n'est pas forcément suffisant et il n'y a pas de lien mécanique entre les réponses pour installer la paix scolaire et celles pour exercer une vigilance didactique. Elles peuvent même entrer en contradiction. Le i-genre 1 témoigne d'une installation de la paix scolaire qui se fait au détriment de la vigilance didactique. Les enseignants obtiennent la paix sociale grâce au respect rigoureux d'une certaine discipline, sans pour autant obtenir vraiment l'adhésion des élèves à leur projet d'enseignement. Si apparemment le professeur semble maîtriser l'avancée du temps didactique, c'est parce qu'il anticipe sur la lassitude des élèves en réduisant ses exigences ou en réduisant le temps des activités qu'il leur propose.

A contrario, le i-genre 3 apparaît comme une réponse optimale observée prenant en compte simultanément et de manière complémentaire les deux grandes questions du métier auxquelles nous nous intéressons.

IV. CONCLUSION ET PERSPECTIVES POUR LA FORMATION

1. Des questions fondamentales du métier de professeur des écoles

Les réponses apportées aux deux questions du métier - installer la paix scolaire, exercer une vigilance didactique - conditionnent des déroulements de classe « les plus proches possibles » des apprentissages visés. Ces questions apparaissent fondamentales pour les apprentissages des élèves, notamment ceux issus de milieux socialement défavorisés et l'analyse des réponses apportées à ces questions constitue une entrée pour analyser l'activité du professeur des écoles. Elles peuvent être qualifiées de grandes questions posées à la profession dans la mesure où elles ne sont pas liées à un individu mais à l'ensemble du collectif enseignant, notamment du premier degré.

2. Perspectives pour la formation

Nos observations montrent que les gestes et routines associées aux pratiques relevant du i-genre 3, qui apparaît comme une réponse optimale à ces deux questions, s'avèrent difficiles à acquérir par les professeurs des écoles débutants. Il semble incontournable que la formation s'en empare : comment peut-elle prendre en compte les résultats de la recherche ? Comment transposer ces résultats en terme de formation ? Quelles ingénieries construire ?

Notre recherche a mis en évidence une routine, décrite sous forme d'un enchaînement de gestes professionnels, pour installer la paix scolaire : maintenir un rythme de travail soutenu, une « pression » constante sur les élèves, maintenir leur adhésion en cherchant à les valoriser, rester proche de leurs formulations pour « garder le contact ».

Par ailleurs, l'acquisition de certains gestes professionnels par les futurs professeurs des écoles devrait permettre de développer leur vigilance didactique en amont, pendant et après la classe. En amont, on peut faire l'hypothèse qu'il serait nécessaire de travailler davantage en formation l'analyse *a priori* des situations, en particulier pour en identifier les enjeux d'apprentissage, ainsi que le jeu sur les variables pour influer sur les procédures et performances des élèves. Pendant la classe, il s'agit d'apprendre à bien choisir, au cours de la recherche des élèves, les procédures à expliciter et par la suite à les hiérarchiser pour construire une synthèse à partir des productions souvent très partielles des élèves de façon à « accrocher » même ceux qui n'ont pas réussi.

La description des pratiques enseignantes en termes de routines et de gestes professionnels semble constituer un outil efficace à la fois pour analyser les pratiques existantes comme le montrent nos recherches mais aussi pour la formation. En effet, si la formation se fixe pour but d'enrichir les pratiques existantes en présentant des alternatives possibles, en élargissant les marges de manœuvre des enseignants, il est nécessaire pour l'atteindre, notamment en ZEP, que le discours dispensé par le formateur rencontre un écho chez le formé. En effet dans le cas contraire, compte tenu des conditions difficiles dans lesquelles le professeur exerce, le risque de déstabilisation est trop important pour un professeur enseignant dans ces écoles ; ce qui peut le conduire à rejeter l'alternative proposée dans sa totalité.

Intervenir au niveau de la routine permet au contraire au formateur de montrer des changements suffisamment limités pour ne pas trop déstabiliser les pratiques existantes mais suffisamment importants pour les interroger en termes d'efficacité à la fois pour le confort du professeur et pour les apprentissages des élèves.

RÉFÉRENCES

Butlen D., Masselot P. (2001) Exemples de routines au CP : pratiques en mathématiques d'un professeur des écoles en première nomination. In Dorier J.-L., Artaud M., Artigue M., Berthelot R., Floris R. (Eds.) (pp. 226-230) *Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage

Butlen D., Peltier M.-L., Pézard M. (2002) Nommé(s) en REP, comment font-ils ? Pratiques de professeurs des écoles enseignant les mathématiques en ZEP : cohérence et contradictions. *Revue Française de Pédagogie* 140, 41-52.

Butlen D. (2004) *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire. Des difficultés des élèves de milieux populaires aux stratégies de formation des Professeurs des Ecoles*. HDR Paris : Université Paris 8.

Butlen D., Charles-Pézard M., Masselot P. (2009) Pratiques de professeurs des écoles débutants enseignant les mathématiques à des élèves issus de milieux socialement très défavorisés, entre contraintes et marges de manœuvre. In *Actes du colloque « Espace Mathématique Francophone »*. Dakar, Sénégal.

Butlen D., Charles-Pezard M., Masselot P. (2010) De l'analyse de pratiques à des scénarios de formation : accompagnement de professeurs des écoles enseignant les mathématiques affectés en première nomination dans des établissements de ZEP. In Goigoux R., Ria L., Toczek-Capelle M.-C. (Eds.) (pp. 81-99) *Les parcours de formation des enseignants débutants*. Clermont-Ferrand : Presses Universitaires Blaise Pascal.

Chevallard Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 19(2) 221-266.

Clot Y. (1999) *La fonction psychologique du travail.* Paris : PUF.

Masselot P., Robert A. (2007) Le rôle des organisateurs dans nos analyses didactiques de pratiques de professeurs enseignant les mathématiques. *Recherche et Formation* 56, 15-31.

Peltier M.-L. (Ed) (2004) *Dur, dur, dur d'enseigner en ZEP*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Robert A, Rogalski J. (2002) Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *La revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies,* 2(4), 505-528.

Robert A. (2008) La double approche didactique et ergonomique pour l'analyse des pratiques d'enseignants de mathématiques. In Vandebrouck F. (Ed.) (pp. 45-52) *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*. Toulouse : Octarès.

DÉVELOPPEMENT DES RÉFLEXIONS DE PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES AU SEIN DE COMMUNAUTÉS DE PRATIQUE

Sandra Evely PARADA RICO[*] – François PLUVINAGE [*]

Résumé – Les communautés de pratique constituent un cadre possible d'une formation permanente des enseignants de mathématiques, autre que la formation continue institutionnelle. Nous avons expérimenté un modèle théorique de réflexion dans deux communautés de pratique. Les thèmes retenus ont été choisis parmi ceux qui, traditionnellement, génèrent d'importantes difficultés dans l'enseignement secondaire : aires et périmètres, nombres négatifs. Les processus de réflexion organisés ont notamment permis aux professeurs de dépasser, pour la préparation de leurs classes, la simple anticipation de l'application des documents officiels (manuels et instructions pour enseignants). Et des forums de discussion ont servi pour une reconstruction *a posteriori* d'activités.

Mots-clefs : Enseignement mathématique, Formation continue des enseignants, Communauté de pratique, Processus de réflexion, Forums

Abstract – Communities of practice provide a possible framework for organizing a permanent training of teachers of mathematics, other than the training institutionally programmed. We had the opportunity to test, for teaching math topics, a theoretical model of thinking in two communities of practice. The topics were selected from those for which the teaching at secondary level traditionally faces significant challenges: Areas and perimeters, negative numbers. Thought processes organized in communities have enabled teachers to pass the mere anticipation of the implementation of official documents (manuals and instructions for teachers) for the preparation of their classes. And discussion forums were used for subsequent reconstruction activities.

Keywords: Mathematics teaching, In-service training, Community of practice, Thought processes, Forums

I. INTRODUCTION

Il est connu que, lorsque la pratique enseignante est le fait de professeurs isolés devant leurs classes, elle tend à devenir routinière, donc à affaiblir leur sens critique et à les amener à dispenser un programme scolaire sans se poser de question à son propos. Nous avons pour notre part souhaité conduire des recherches concernant la formation des professeurs de mathématiques dans un contexte différent : celui de communautés de pratique.

Il nous a semblé qu'un tel contexte était favorable à un renforcement des réflexions sur l'enseignement des mathématiques. Mais il nous a également semblé qu'un tel renforcement pourrait gagner à être guidé, notamment par la conduite méthodique de ces réflexions : avant, pendant et après une séquence de classe.

Il était normal, dans un tel contexte, de nous orienter vers la pratique d'une recherche-action telle que la précise par exemple l'ouvrage de Liu (1997), et plus précisément d'une recherche-action participative. Dans ce cadre, il s'agit pour le chercheur de se livrer à une recherche avec les participants de la communauté de pratique. Le chercheur se veut l'un des acteurs d'un groupe de travail, mais ne veut pas apparaître comme un membre permanent du groupe, souhaitant au contraire limiter dans le temps sa participation. Donc, pour apprécier l'activité que le chercheur contribuera à impulser dans ce groupe, les questions à se poser sont : Y a-t-il ou non transformation ? Y a-t-il ou non innovation ?, auxquelles nous ajouterons : La communauté des professeurs aura-t-elle acquis suffisamment de ressources propres pour perdurer sans besoin de la présence du chercheur ?

[*] Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav del I.P.N. – Mexique – saevpa@gmail.com, pluvin@math.unistra.fr

© Parada Rico S. E., Pluvinage F. (2012) Développement de réflexions de professeurs de mathématiques au sein de communautés de pratique. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT2, pp. 371–383). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

II. ASPECTS THÉORIQUES ET MÉTHODOLOGIQUES DE LA RECHERCHE

Notre questionnement de recherche portant sur la réflexion en communauté de pratique de professeurs de mathématiques, nous nous rapportons d'une part, à la définition que Wenger (2001) donne des communautés de pratique : groupe de personnes partageant une préoccupation, un intérêt commun autour d'un thème et qui approfondissent leur connaissance et leur savoir-faire dans ce domaine, au sein d'une structure sociale fondée sur la construction collaborative d'un savoir (...) d'autre part, aux sept formes caractéristiques de l'activité professionnelle des enseignants signalées par Ponte et Serrazina (2004) : i) l'impulsion de l'activité mathématique dans la classe ; ii) le choix et la confection de matériel didactique ; iii) la communication dans la classe ; iv) la prise en compte des programmes d'enseignement ; v) l'évaluation ; vi) la collaboration avec la communauté éducative ; vii) l'actualisation professionnelle.

1. Notre modèle pour la réflexion des professeurs au sein d'une communauté

Par réflexion menée par les professeurs, nous entendrons, à la suite de Dewey (1989), un processus de résolution de conflits et de doutes, en même temps qu'une disposition à réviser leurs manières de faire. La réflexion gagne en efficacité lorsqu'elle bénéficie d'un certain suivi. Ainsi l'ingénierie didactique de Artigue (1989) s'appuie-t-elle sur la comparaison des observations avec une analyse *a priori*. Nous proposons, en conséquence, d'organiser la réflexion propre à une séquence d'enseignement selon les trois étapes suivantes, décrites dans le document pré-doctoral de Parada (2010).

a) *Réflexion pour l'action* (avant). Nous proposons de nous inspirer de certaines idées de Dewey (1989), reliant processus éducatif et pensée réflexive. Dans l'étape de préparation de séquences d'enseignement, on schématise l'articulation des contenus et objets mathématiques, on sélectionne les instruments à mettre en œuvre pour atteindre les objectifs d'apprentissage, on prévoit les difficultés et de possibles alternatives.

b) *Réflexion dans l'action (pendant)*. Nous retenons certaines idées de Schön (1992), selon lesquelles la réflexion pendant le déroulement de l'enseignement se manifeste notamment dans l'interaction entre le professeur et sa classe, lors de situations inattendues susceptibles de mettre à l'épreuve son savoir sur le sujet.

c) *Réflexion sur l'action (après)*. Dans cette étape, le rôle incitatif de la communauté est évident, car il y a besoin d'échanges avec des interlocuteurs pour que s'exerce pleinement une réflexion critique. Par la compréhension de situations problématiques rencontrées dans les classes, cette réflexion permettra de restructurer les stratégies d'action.

Pour Treffers (1987), un des fondateurs du mouvement « Realistic Mathematics Education » (RME), l'activité mathématique implique l'organisation et la structuration de l'information qui apparaît dans un problème, l'identification des aspects mathématiques pertinents, la découverte de régularités, de relations et de structures. Ce sont tous ces processus qu'il englobe dans le mot « mathématisation », et que le professeur doit amener ses élèves à pratiquer dans leur production mathématique. Nous avons souhaité centrer la réflexion plus particulièrement sur quatre aspects, qui constituent des détonateurs de l'activité mathématique dans une classe :

i) Les connaissances mathématiques que demandent l'enseignement du programme et la réalisation des objectifs d'apprentissage *ii)* Les connaissances pédagogiques et didactiques relatives à la mathématique enseignée, notamment celles qui concernent les représentations de ses objets et leurs conversions

iii) La sélection et l'usage d'outils, tant immatériels que concrets, au service de la communication et l'expression

iv) L'évaluation formative de l'activité mathématique attendue, impliquant le choix et l'élaboration d'instruments qui stimulent le recours à la métacognition, au service de la résolution de problèmes et de la communication mathématique.

2. *La forme de travail mise en place dans deux communautés de pratique*

L'expérimentation en cours, que nous présentons ici, concerne deux communautés de pratique regroupant des professeurs de mathématiques enseignant au niveau secondaire.

La communauté de pratique « Alianzas Educativas » de Ciudad Juárez (Chihuahua) s'est constituée en 2007 à l'initiative d'un groupe de professeurs, pour se mettre à jour sur l'usage des technologies. Une entreprise informatique leur avait accordé son appui pour l'équipement de laboratoires de mathématiques, mais ils ne disposaient pas des ressources didactiques leur permettant d'en faire bon usage.

Nous avons nous-mêmes été les instigateurs de la création, dans l'État de Mexico (figure 1) qui entoure la ville de Mexico, d'une seconde communauté de pratique, à laquelle furent conviés des professeurs du système mexicain de télé-enseignement, qui s'intitule « telesecundaria ». Ce système s'adresse notamment à de petites communautés rurales et fonctionne sur un modèle d'enseignement à distance grâce à la télévision. Les professeurs se trouvent ainsi assez isolés géographiquement.

Figure 1 – *Carte de l'État de Mexico*

Nous avons mis en place les ressources nécessaires aux réflexions des communautés de pratique : moyens matériels, à savoir organisation de séances de travail et création d'un site Internet, et moyens humains, sous forme de participation ponctuelle de chercheurs et d'étudiants-chercheurs du Département de Mathématique Educative du Cinvestav, qui présentent des conférences et encadrent des ateliers lors des séances de travail, et d'un accompagnement théorique et méthodologique par des enseignants d'universités locales, pour répondre aux questions et inquiétudes des professeurs. Ci-après, nous précisons le fonctionnement de toutes ces ressources.

Pour chacune des deux communautés de pratique, les séances de travail sont organisées mensuellement. Elles durent trois heures et comportent : conférences de spécialistes, échanges sur les processus de réflexion des professeurs, ateliers par niveaux scolaires et mises en commun des expériences conduites en classe. Pour ces dernières, est proposé le plan de réflexion qui aborde les quatre aspects contenus dans notre modèle (voir 2.1 ci-dessus), à mener durant douze séances adaptées au rythme de travail de chaque communauté. Pour les activités organisées dans les classes, la méthodologie suivie est celle du travail collaboratif proposée par Hitt (2007) sous le nom d'ACODESA (pour : Apprentissage en COllaboration, DÉbat Scientifique et Autoréflexion).

Le site Internet <http://imat.cinvestav.mx/> met à disposition de chaque communauté de pratique des outils de développement professionnel tels que banques de ressources, réserve d'activités, présentations puis compte-rendu de séances de travail, lien vers d'autres sites Web de mathématique éducative et d'autres communautés, adresses pour des téléchargements de logiciels, etc., et enfin des outils de communication (forums de discussion et blogs).

Les activités virtuelles sont programmées de telle sorte qu'au cours du mois qui sépare deux séances de travail consécutives, se poursuive la réflexion sur les pratiques enseignantes et s'engagent des discussions centrées sur l'étude de thèmes mathématiques particuliers. Deux types d'activités méritent d'être distingués : la résolution de problèmes qui conduisent à approfondir l'analyse d'un thème, la réflexion pour l'élaboration d'une séquence d'enseignement qui doit être ultérieurement appliquée et doit provoquer la mise en commun d'expérience, de doutes, de commentaires.

Les forums de discussion sont bien alimentés à partir de la mise en ligne de fichiers de géométrie dynamique et de feuilles de calcul. De tels fichiers permettent de montrer la diversité des approches possibles de contenus mathématiques et conduisent à s'interroger sur les forces et les faiblesses des ressources mises à disposition dans les classes. De plus, les enseignants sont d'autant plus intéressés qu'ils doivent eux-mêmes réfléchir pour leurs classes à l'élaboration de situations dans lesquelles s'utilisent les technologies digitales.

III. RÉFLEXIONS DE PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES

Nous présentons dans ce qui suit des exemples significatifs des réflexions conduites dans chacune des deux communautés sur certains contenus mathématiques. Ces contenus ont spontanément surgi dès les premières séances, comme étant difficiles à enseigner. La communauté de pratique de Ciudad Juárez a arrêté son choix sur « aires et périmètres des figures planes » et celle de l'État de Mexico sur « nombres avec signe » (nombres positifs et négatifs). Les exemples présentés sont destinés à illustrer les trois étapes de la réflexion proposée et la manière dont les professeurs ont réagi aux différentes activités, tant lors des séances que sur le site Internet.

1. Réflexions à propos du thème des aires et périmètres

Ce thème a donné lieu à une feuille de travail proposée au groupe sur le thème (la figure 2 est réduite et traduite en français de la feuille originale en espagnol), suivie d'adaptations, d'élaboration de sa mise en œuvre pédagogique et d'échanges de commentaires sur le site Internet. Nous présenterons son application, faite pour deux classes distinctes.

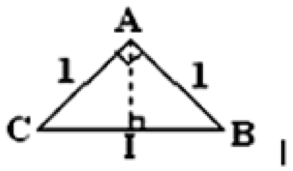
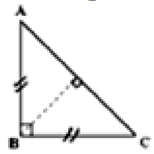
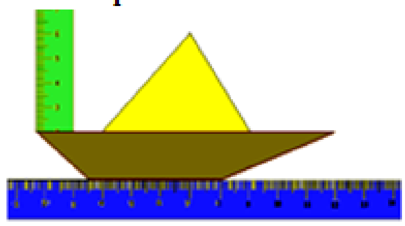
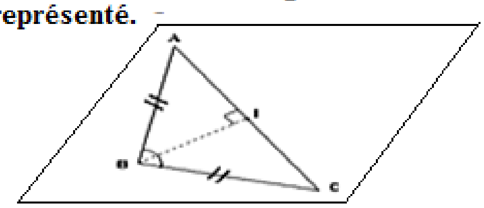
Activités **1. Exercice individuel** **Explique la procédure à suivre pour obtenir l'aire du triangle ci-dessous** 	**4. Exercice en équipes** **a. Télécharger et explorer le fichier AIRES** (triangles ABC ayant des longueurs données de côtés AB et AC). **Répondre aux questions** **- Quand l'aire est-elle maximale ?** **- Quand le périmètre est-il maximal ?** **b. Aligner les trois sommets de chaque triangle,** **- que se passe-t-il pour les aires ?** **- que se passe-t-il pour les périmètres ?**
2. Exercice en équipes **a. Partage avec tes coéquipiers les réponses à l'exercice 1.** **b. Discute dans l'équipe sur l'expression algébrique du calcul d'aire du triangle ci-dessous. Décrire les procédures utilisées.** 	**5. Exercice individuel** **En utilisant les techniques précédemment élaborées, indique** **- quelle est l'aire de la figure du bateau ;** **- quel est son périmètre.** 
3. Exercice en groupe au complet **a. Faire la synthèse des procédures employées dans les exercices 1 et 2.** **b. Discuter sur la procédure à suivre pour obtenir l'aire d'un triangle comme celui représenté.** 	**6. Exercice en groupe au complet et conclusions individuelles** **Echanger sur ce qui a été appris lors du déroulement de l'atelier.** **Rédiger individuellement des conclusions.**

Figure 2 *– La feuille de travail sur aires et périmètres*

Processus de réflexion pour l'action

Deux enseignantes travaillèrent ensemble, à partir de la feuille de travail que nous avons reproduite en figure 2, sur les adaptations de l'activité selon le niveau auquel chacune enseignait : Isabel en première année du second degré (élèves de 12 ans) et Nancy en troisième année (élèves de 14 ans). Elles signalèrent qu'elles désiraient présenter par la suite une comparaison de l'adaptation d'une même activité à des niveaux scolaires différents. C'est pourquoi, dirent-elles, nous nous sommes d'emblée confrontées à l'insertion des activités dans nos programmes respectifs. Pour la troisième année, elles s'inséraient bien, mais nous avons dû beaucoup batailler pour la première année.

Isabel réduisit la feuille de travail pour ses élèves de première année aux deux premiers exercices. Nancy changea (figure 3) l'en-tête de la feuille de travail en insérant l'intitulé et l'emplacement dans son programme, en conformité avec les documents officiels de la troisième année, tout en la limitant aux activités 1 à 4 pour raison de durée.

Cours : Mathématiques III Paragraphe : 4.2 Axes thématiques : F, E y M
Connaissances et savoir-faire : Appliquer le théorème de Pythagore à la résolution de problèmes
Intentions didactiques : Il s'agit pour les élèves d'utiliser et d'accroître leurs connaissances sur la justification de formules d'aires et de périmètres de triangles en appliquant le théorème de Pythagore

Figure 3 *– Adaptations de la feuille de travail réalisée par Nancy*

Processus de réflexion dans l'action

Les enseignantes mirent chacune en œuvre sa version de feuille de travail et rendirent compte du déroulement de leur classe. De plus, Nancy transmit l'enregistrement vidéo de sa classe. S'en dégagent quelques constats sur ses réflexions durant la classe.

Isabel a appliqué l'activité à ses trois groupes de première année et, sur les réponses données aux deux premiers exercices, elle a pu observer que ses élèves :

1º- n'ont vu dans le triangle que la forme dessinée et ont eu beaucoup de mal à reconnaître la base et la hauteur ; j'ai alors pensé à dessiner un autre triangle, dit Isabel, que j'ai découpé et leur ai donné ;

2º- ont déclaré, à propos de la figure du problème 2, qu'ils ne savaient pas ce que signifient les deux petits traits barrant les côtés, pas plus que le petit carré dans le coin ni les lettres. Ils ne sont pas familiarisés avec l'interprétation des symboles.

La conduite de classe par Nancy apparaît sur l'enregistrement vidéo. Dans les deux premiers exercices, elle incite ses élèves à explorer et à mettre en pratique leurs connaissances sur les triangles, comme la formule de l'aire et l'importance du symbole représentant un angle droit. Elle met en avant la similitude entre les deux exercices. Dans le troisième exercice, elle insiste sur le fait qu'il s'agit d'une situation différente puisque le triangle n'est pas rectangle comme dans les deux premiers exercices ; elle propose de diviser le triangle de cet exercice en deux triangles rectangles, de manière à utiliser le théorème de Pythagore. Au total, l'enseignante a enrichi l'application de l'activité par sa façon de mener l'activité de ses élèves à travers un jeu de questions.

Processus de réflexion sur l'action

Isabel indique qu'elle a ramassé les feuilles de travail des élèves pour les analyser. Cette pratique n'est pas habituelle pour elle, mais elle était curieuse de connaître les réponses des élèves. Elle a pu remarquer dans cette expérience que les élèves ont eu tendance à résoudre les exercices en quadrillant les intérieurs des triangles, stratégie de résolution courante pour des élèves du primaire. De même, elle remarqua qu'une majorité d'élèves a tendance à écrire la formule, puis à la relier avec le problème posé. Pour notre part, nous pensons que la façon dont les programmes insistent sur les formules peut aussi jouer en faveur d'une telle tendance.

Dans la phase d'échanges, Nancy fit les commentaires suivants :

- Mes élèves ont répondu seuls sur la feuille de travail que je leur ai distribuée, car je les ai en cours depuis la première année de secondaire et ils sont habitués à l'usage du langage mathématique.
- Je trouve très important qu'ils arrivent eux-mêmes à construire le concept visé.

- Il me semble indispensable que le professeur maîtrise bien le concept, parce qu'il faut pouvoir donner des explications en réponse aux préoccupations des élèves et adapter les activités au groupe.

A la suite des réactions rapportées d'Isabel et Nancy, nous reproduisons également les opinions formulées par d'autres participants à la communauté :

- Les différences entre la première et la troisième année sont nombreuses. En première année, les élèves continuent à fonctionner sur les bases du primaire. Ils se jettent toujours sur les résultats, ils veulent toujours trouver des nombres et utiliser des formules.
- Cela m'a beaucoup plu de voir comment la maîtresse les interrogeait et qu'eux-mêmes allaient jusqu'où ils étaient capables de résoudre les exercices en exploitant l'information donnée.
- Ce n'est pas la fiche de travail qui fait la méthodologie de la classe, mais la manière dont l'enseignant conduit sa classe.
- On aurait pu s'appuyer sur les nouvelles technologies pour observer certaines choses qui sont difficiles sur le papier. Par exemple, le fait qu'on parle de la base et la hauteur comme d'une seule chose.

Quelques commentaires

La réflexion proposée et les échanges, notamment sur le forum, montrent une certaine prise de conscience, par exemple du recours des élèves à des stratégies de résolution (comme le quadrillage de triangles) autres que celles prévues. L'idée, au départ assez répandue, d'élaborer pour l'enseignement de nouveaux matériels, a évolué vers celle de l'utilisation ou l'adaptation de l'existant en fonction des caractéristiques des élèves et des objectifs d'apprentissage. Un accroissement de la prise de conscience des enseignants sur leurs propres conceptions a également été observé. Mais des progrès d'enseignement restent encore à faire, sur lesquels nous reviendrons en conclusion.

2. Réflexions sur les nombres négatifs

Les besoins exprimés par les professeurs de la communauté de l'État de Mexico et les résultats auxquels donnèrent lieu le test national nommé « Enlace » ont amené des demandes pressantes d'élaboration de ressources. Nous présentons ici les processus de réflexion des maîtres issus des forums de discussion sur les nombres négatifs.

Ces forums ont été engagés suite à un premier processus de réflexion résultant :

- d'échanges consécutifs à la vision de l'enregistrement vidéo d'une classe qui avait été préalablement planifiée par le groupe sur le thème des nombres négatifs à partir des documents de la « telesecundaria »,
- de conférences imparties par des chercheurs du Département de Mathématique Éducative, sur l'apparition des négatifs dans les mathématiques et dans leur enseignement.

L'analyse proposée pour un premier forum de discussion suggérait de distinguer les trois dimensions des connaissances sur les nombres suggérées par Bruno (2001) : 1º- la dimension abstraite, 2º- la dimension de la droite graduée, 3º- le contexte. Deux autres forums furent ensuite organisés autour de questions touchant à l'analyse et à la rédaction de situations problèmes en accord avec la classification exposée par Bruno et Martinón (1997). En effet Bruno (2001), citant Rudnitsky et al. (1995), relève que la rédaction d'un énoncé favorise la résolution du problème. Une discussion du forum présentait quelques données, la tâche étant alors de rédiger un énoncé de problème incluant ces données ; des outils, notamment des Applets, étaient mis à disposition pour l'élaboration de matériel et la rédaction d'énoncés.

L’énoncé initialement présenté au forum était celui de l’ascenseur, un type de questions que Regina Flemming Damm avait représenté et analysé dans sa thèse (Damm, 1992). *Analyser et résoudre le problème : Un immeuble a 15 niveaux, dont 5 sont en sous-sol. Un ascenseur va du huitième étage de l’immeuble jusqu’au troisième sous-sol. Quel est le déplacement de l’ascenseur ? Envisager plusieurs méthodes de résolution.*

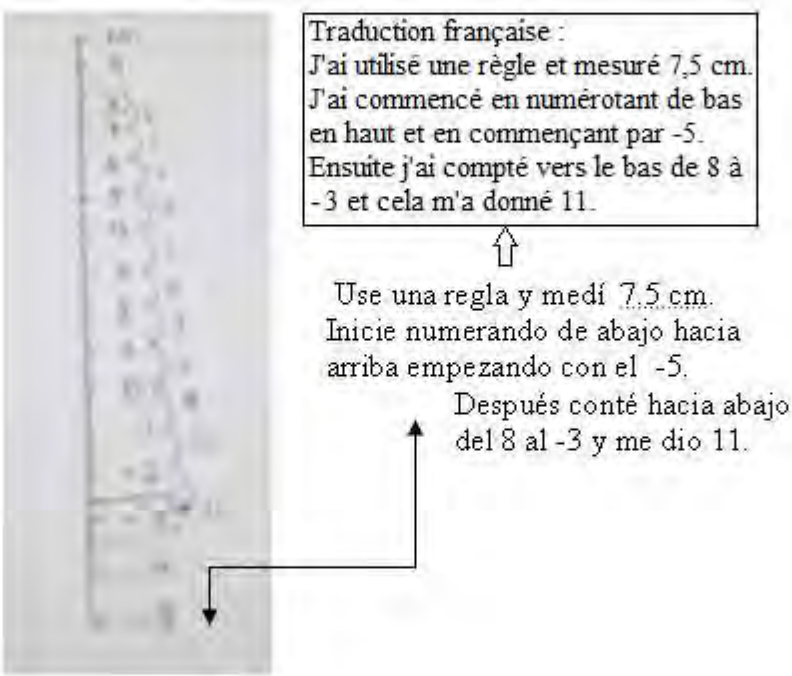


Figure 4 *– Réponse de Maria à la première session de forum*

La figure 4 montre une réponse typique, celle de l’enseignante Maria. Elle a tracé un segment vertical, dont elle a fixé la longueur à 7,5 cm. A propos de la représentation par une droite graduée, Bruno (2001) dit qu’elle est plus tributaire du contexte concret que de la structure ou de la position de l’inconnue, ce qui explique qu’une majorité des enseignants y a eu recours pour la compréhension des situations additives. La procédure algébrique a également été employée ainsi que nous l’attendions : 8 - (-3) = 11 provient de 8 + 3 = 11 par inversion de l’addition et recours au symétrique de -3. Notons qu’il serait préférable dans ce cas d’écrire : (-3) – 8 = -11, mais que deux obstacles compliquent cette dernière écriture : la non congruence avec l’écoulement du temps indiqué par l’énoncé, où 8 vient en premier, et la présence d’un nombre négatif isolé.

Nous avons également proposé de réfléchir au travail avec un tableur tel Excel et avons fourni, en point de départ, la description très détaillée qui suit, en pensant à ceux des enseignants qui n’avaient que très peu de pratique du tableur.

III. Réalisons le processus suivant avec Excel. Ouvre un nouveau document. Dans la cellule A1, écris 10, nombre qui représente les 10 étages de l’immeuble. Dans la cellule A2, qui représente l’étage inférieur, introduis « = A1 – 1 ». Place le curseur en A2, sélectionne le petit carré noir et glisse le jusqu’en A16. Colorie en gris le nombre de niveaux que l’ascenseur a descendu. Sélectionne les cellules grisées et copie leur format en colonne B. Jusqu’à quelle ligne est grisée la colonne B ? Décris tes observations.

Figure5 *– Énoncé III de l’activité du premier forum*

La réponse attendue est illustrée en figure 6a. Mais nous avons également obtenu la représentation de la figure 6b, où tout le contenu des cellules a été copié en B3 et où apparaît le classique problème du point de départ qu’il ne faudrait pas compter, ce qui n’empêche pas par ailleurs une réponse numérique correcte.

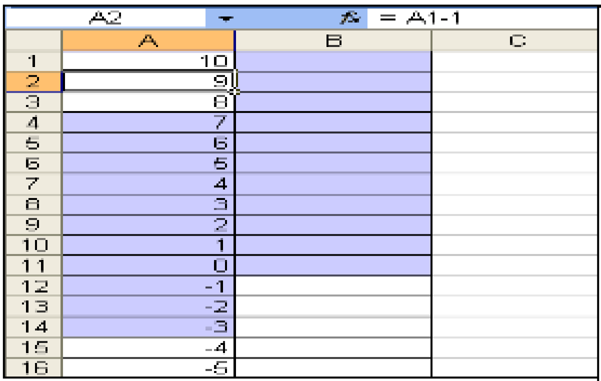


Figure 6a – *Réponse attendue*

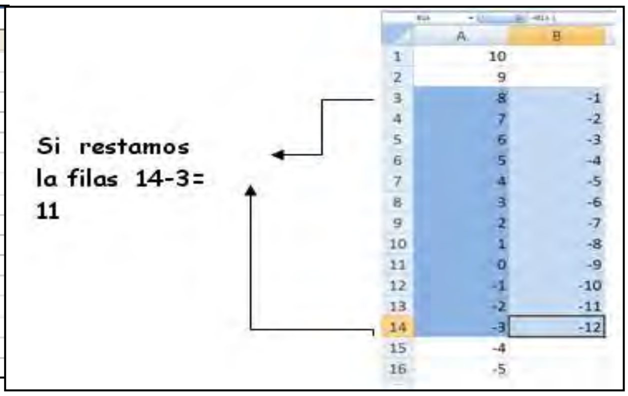


Figure 6b – *Réponse d’un professeur*

« Si nous retranchons les lignes 14 – 3 = 11 »

La réflexion sur ce problème a aussi été proposée à l’aide d’un Applet Cabri (figure 7). Dans la discussion autour de la description de ce qui apparaît, Marisela a répondu : « J’observe que l’on attribue des valeurs négatives aux niveaux du sous-sol. Quand le niveau d’arrivée glisse, le calcul s’effectue ainsi e + v = état initial + variation = état final. ». Cette réponse manifeste une identification du type de problème, qui est due à la présentation au groupe de la classification citée plus haut de Bruno et Martinon (1997).

Pour ce qui est de la question b de l’énoncé accompagnant l’Applet de l’ascenseur, les réponses montrent, en confirmation de notre hypothèse, que la ressource la plus utilisée pour les problèmes amenant l’usage de nombres négatifs est la droite graduée. Les professeurs disent que c’est à la fois ce qui est le plus utilisé par les élèves et ce qu’ils emploient eux-mêmes pour résoudre ce type de problèmes :

- *Je n’ai vu que le traitement numérique et l’emploi de la droite.*
- *L’usage de la droite graduée est la manière la plus utilisée par les élèves pour comprendre les positions entre les positifs et les négatifs.*
- *La droite graduée et ensuite l’opération 8 – (-3), parce que c’était un ascenseur et je l’ai simulé en haut et en bas en utilisant le zéro comme référence.*

De plus, l’enseignante qui donna cette ultime réponse expliqua que la droite graduée a un avantage visuel.

Explore l'Applet Cabri intitulé "L'ascenseur".

a. Décris ce que tu vois.

b. Réponds aux questions suivantes :

- Selon toi, quelle est la manière la plus utilisée par les élèves pour répondre ? Pourquoi ?
- Laquelle as-tu toi-même utilisée pour comprendre et résoudre le problème ?
- Considères-tu une manière comme la meilleure ? Si tu réponds oui, indique laquelle et pourquoi ?

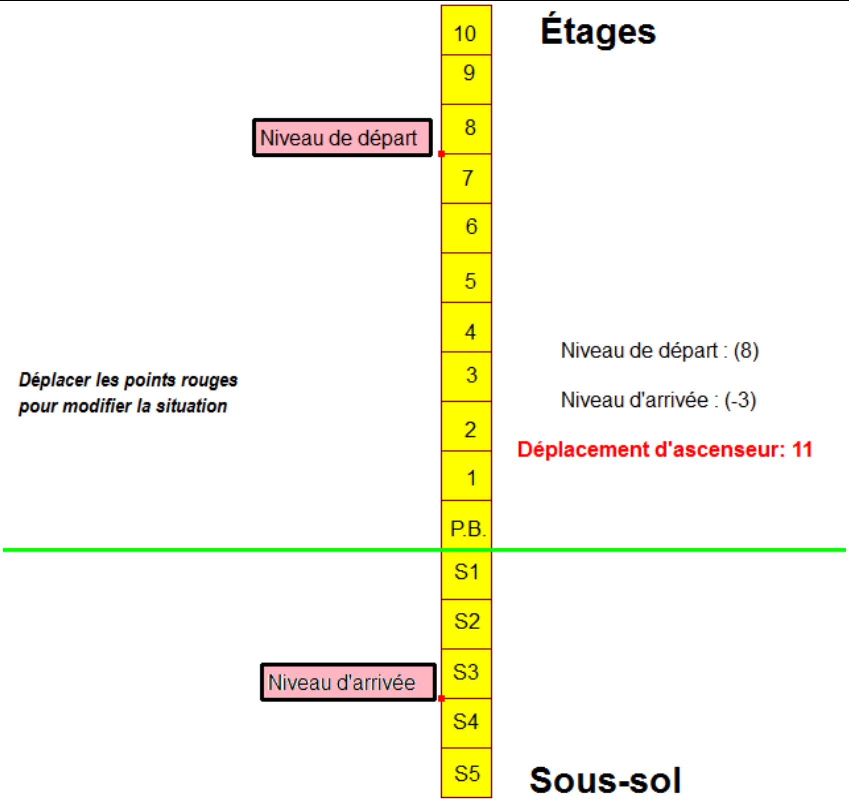


Figure 7 *– Applet de l'ascenseur*

Dans la discussion du forum 2, l'analyse des problèmes fut intéressante, car les professeurs résolurent les problèmes tout en pensant aux réponses possibles des élèves et à la forme de travail. Ils ne reprirent cependant pas les problèmes suggérés, mais en posèrent de chaque type. Ci-après, nous présentons un exemple : un problème élaboré par une enseignante, son énoncé étant suivi de ses observations.

> *Voici un énoncé du type (e + v = e). Dans le football américain, une faute se traduit par un recul de 5 yards. L'équipe de Dallas se trouvait au niveau des 55 yards quand elle lança le ballon en avant de 20 yards, mais les arbitres lui comptèrent deux fautes pour avoir retenu des adversaires par le maillot. Où doit alors être placé le ballon ?*

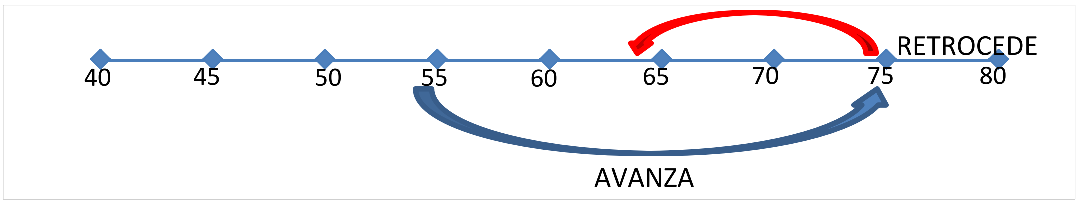


Figure 8 *– Illustration par l'enseignante du problème qu'elle a proposé*

Le ballon devra être aux 65 yards, puisque 55 + 20 = 75 et 75 + (-10) = 65. Certains élèves ou même la majorité ont l'habitude de faire pour un tel problème une représentation sur une droite (voir la figure 8). Il arrive qu'ils n'identifient pas bien de combien il y a avancée ou reculée, et cependant ils obtiennent le résultat. Il convient donc de profiter de ces situations pour mettre en avant l'usage de négatifs, ici pour écrire quand il y a recul, à côté des positifs qui représentent une avancée, pour ainsi pouvoir énoncer le problème sous forme arithmétique ou abstraite.

Cet exemple illustre que quand un problème est rédigé par un professeur pour être destiné à sa classe, celui-ci prévoit les comportements des élèves et pense à une manière d'orienter la classe. Il y a une différence avec l'exercice tiré du manuel, qu'il aura pu ne pas résoudre et dont l'étude en classe lui provoquera les mêmes difficultés qu'aux élèves.

IV. QUELQUES PISTES DE RÉFLEXION EN GUISE DE CONCLUSION

Nous avons pu nous rendre compte de résultats encourageants issus des réflexions guidées, tant celles menées lors des séances que celles poursuivies lors des échanges par Internet. Le tableau suivant récapitule les orientations et les points d'appui de telles réflexions.

TABLEAU D'AIDE À LA RÉFLEXION

Réflexion du prof.	Produits	Références théoriques	Rôles possibles du chercheur
pour l'action	Choix d'activités Adaptation d'activités Gestion et planification Ressources d'apprentissage	Mathématiques Epistémologie (*genetisch*) Socio-épistémologie (Cantoral) Théorie des situations (Brousseau) Analyse cognitive (Duval) *Exemplarisch* (Wagenschein) ACODESA (Hitt)	Transmission de savoirs math. et did. Perturbations Propositions d'enseignement Prototypes d'instruments
dans l'action	Conduite de classe Médiation Décision/incidents Enregistrements son et vidéo	Maïeutique socratique Développement proximal (Vygotski) ETG (Houdement et Kuzniak)	Observateur neutre de classe ou d'élèves
sur l'action	Compte-rendu et rapports Evaluation	Analyse cognitive (Duval) Communication (Habermas) Approche anthropologique (Chevallard) Analyse de données	Analyses et interprétations Diffusion

Toutefois, il nous apparaît que du chemin reste encore à parcourir pour passer d'observations de surface à des analyses plus approfondies. Par exemple si, pour des raisonnements sur des triangles, le rôle du registre des figures codées a été perçu, le rôle lui-même des triangles pour la mesure des aires, ainsi que le concept d'aire comme grandeur, restaient encore à approfondir tant du point de vue mathématique que didactique. La communauté de pratique elle-même peut-elle générer une dynamique en ce sens ?

Dans le cas des nombres relatifs, notre présentation s'en est tenue aux opérations additives, qui a constitué le premier sujet de réflexion du groupe. Bruno (2001), à la suite de Vergnaud (1982) distinguant état et transformation, utilise la représentation non conforme à l'emploi des lettres en algèbre : e + v = e (état initial + variation = état final). Nous avons vu cette écriture reprise par les professeurs. Mais pour des élèves, l'écriture e + v = e' lui serait préférable.

Une question plus délicate se pose pour la présentation du produit de nombres relatifs (la règle des signes). Les documents officiels de la « telesecundaria » présentent plusieurs défauts pour l'enseignement de ce sujet. On sait que c'est la distributivité du produit sur la somme : a (b + c) = ab + ac qui justifie la règle des signes pour le produit de nombres. Or, dans le manuel, cette distributivité est présentée à l'aide de blocs rectangulaires qui soulèvent un problème de grandeurs, les facteurs apparaissant comme des longueurs et les produits comme des aires. Ainsi le produit ne serait pas une opération interne, sans parler de la difficulté de considérer des signes dans cette optique. Si l'on veut exploiter la droite graduée dans la continuité de ce qui a été fait pour les traitements additifs, il convient de passer au plan cartésien et à la représentation de y = ax. En effet, le produit ab est dans ce contexte la valeur que prend y lorsque x = b. L'homogénéité en termes de grandeurs est assurée si a est interprété non pas comme un rapport, mais comme l'ordonnée à l'unité (la valeur que prend y lorsque x = 1). Le fait que y = ax représente une droite du plan cartésien est à relier au résultat de Thalès. Tous ces éléments (Thalès, représentation d'une droite dans le plan cartésien, distributivité) se trouvent dans le même manuel qui présente le produit des nombres relatifs, mais ils sont dispersés, sans qu'aucune relation entre eux ne soit établie. Nous avons déjà commencé à travailler la question avec la communauté de pratique de l'Etat de Mexico, mais il reste à voir comment cela se traduira dans ses futures réflexions.

REFERENCES

Artigue M. (1989) Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 9.3*, 281-308.

Bruno A. (2001) Algunas investigaciones sobre la enseñanza de los números negativos. In Contreras LC, Carrillo J., Climnet N., Sierra M. (Eds.) (pp. 119-130) *Actas del IV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. Universidad de Huelva, Huelva.

Bruno A., Martinón A. (1997a) Clasificación funcional y semántica de problemas aditivos. *Educación Matemática*, *9*(1), 33-46.

Damm R. (1992). *Apprentissage des problèmes additifs et compréhension de texte*. Thèse de l'Université Louis Pasteur. Strasbourg : IREM.

Dewey J. (1989) *Cómo pensamos. Nueva exposición de la relación entre pensamiento reflexivo y proceso educativo*. Barcelona: Paidós.

Hitt F. (2007) Utilisation de calculatrices symboliques dans le cadre d'une méthode d'apprentissage collaboratif, de débat scientifique et d'autoréflexion. In Baron M., Guin D., Trouche L. (Eds.) *Environnements informatisés pour l'éducation et la formation scientifique et technique : modèles, dispositifs et pratiques*. Paris : Hermes.

Liu M. (1997) *Fondements et pratiques de la recherche action*. Paris: L'Harmattan.

Parada S. (2010) Conformación de comunidades de práctica de profesores de matemáticas para la reflexión sobre su práctica profesional. *Documento predoctoral no publicado*. Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados del IPN, México.

Ponte J., Serrazina L. (2004) Práticas profissionais dos professores de Matemática. *Quadrante*, 13 (2), 51-74.

Schön D (1992). *La formación de profesionales reflexivos*. Buenos Aires: Paidós.

Treffers A. (1987) *Three dimensions: A model of goal and theory description in mathematics education: The Wiskobas project*. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

Vergnaud G. (1982) A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. In Carpenter T., Moser J., Romberg T. (Eds.) *Addition and subtraction: A cognitive perspective.* LEA. New Jersey.

Wenger E. (2001) *Comunidades de práctica: aprendizaje, significado e identidad*. Barcelona: Paidós.

LES DIFFÉRENTES PENSÉES MATHÉMATIQUES ET LEUR DÉVELOPPEMENT DANS LE CURRICULUM

Compte-rendu du Groupe de Travail n°3 – EMF2012

Pablo CARRANZA[*] – Stéphane CYR[**]
Viviane DURAND-GUERRIER[***] – Maria POLO[****]

La problématique initiale du GT3 envisageait trois axes principaux : épistémologique, didactique et curriculaire.

L'axe épistémologique visait à dégager la nécessité, ou à défaut la pertinence, d'une distinction explicite entre différentes pensées mathématiques, en explorant cette question depuis plusieurs points de vue : mathématiciens professionnels ; utilisateurs professionnels de mathématiques ; philosophes et épistémologues ; historien des mathématiques ; psychologues ; anthropologues ; etc…

L'axe didactique concernait la pertinence de cette distinction pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques en examinant ce qu'il en est du point de vue de l'histoire de l'enseignement ; des enseignants d'une part, des élèves et des étudiants d'autre part, de tous ordres (primaire, secondaire, supérieur) et de tout type d'enseignement général, technique, professionnel ; des relations entre les mathématiques et la réalité, les mathématiques et les autres champs de la connaissance humaine, et plus généralement entre mathématiques et société, mathématiques et citoyenneté, etc.

Le troisième axe concernait la prise en compte ou non de cette distinction dans le curriculum dans les différents pays de l'espace mathématique francophone et au-delà, dans les programmes, les manuels, les ressources pour les enseignants et dans les pratiques effectives des enseignants, et les effets sur les apprentissages.

Notre groupe a accueilli une vingtaine de participants venant d'Algérie, d'Argentine, de France, d'Italie, du Québec, de Suisse et de Tunisie. Les textes reçus concernaient tous les ordres d'enseignement, et comportaient pour la plupart une dimension épistémologique et une dimension didactique renvoyant au formalisme, au structuralisme, à la logique, à l'algorithmique, à la statistique et à l'approximation, et à la pensée réflexive. Dans quelques textes, des éléments relevant du curriculum sont également abordés.

Ce qui suit est une invitation à la lecture des textes présentés dans le groupe, éclairée par les échanges lors des différentes sessions. Nous avons regroupé les textes sous quatre entrées thématiques qui visent à aider le lecteur à organiser son propre parcours. Nous proposons ensuite quelques pistes qui nous semblent se dégager pour les congrès EMF à venir. Nous terminons par quelques références pertinentes pour notre thème.

[*] Universidad de Río Negro – Argentine – pcarranza@unrn.edu.ar
[**] Université du Québec à Montréal – Canada – cyr.stephane@uqam.ca
[***] Université Montpellier 2 – France – vdurand@math.univ-montp2.fr
[****] Université de Cagliari– Italie – mpolo@unica.it

© Carranza P., Cyr S., Durand-Guerrier V., Polo M. (2012) Les différentes pensées mathématiques et leur développement dans le curriculum – *Compte-rendu du Groupe de Travail n°3.* In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT3, pp. 384–391). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

I. INVITATION A LA LECTURE

1. Modes de pensées génériques en mathématiques (formalisme, structuralisme, axiomatiques, construction de définitions)

Thomas HAUSBERGER a présenté une approche épistémologique pour aborder « le challenge de la pensée structuraliste dans l'apprentissage de l'algèbre abstraite ». Le travail présenté et discuté est une première ébauche d'analyse épistémologique de la pensée structuraliste en « algèbre moderne » dont l'apprentissage est reconnu comme étant particulièrement difficile. Une hypothèse didactique est que ces difficultés pourraient être liées à des formes nouvelles d'abstraction qui ne sont pas toutes de même niveau (définition par axiomes, approche combinatoire, isomorphisme, groupe quotient, groupe opérant sur un ensemble), ainsi qu'à la dimension FUGS de ces savoirs (Formalisateurs, Unificateurs, Généralisateurs et Simplificateurs), ce qui modifie profondément les pratiques mathématiques. L'étude épistémologique proposée met en évidence le fait que l'axiomatique ne suffit pas pour caractériser la pensée structuraliste, ce qui invite à reconsidérer la manière traditionnelle dont les structures abstraites sont enseignées consistant à présenter l'axiomatique des structures et à l'exemplifier. Des premières pistes sont ébauchées dans le texte de la communication.

Marc ROGALSKI quant à lui propose des « approches épistémologique et didactique de l'activité de formalisation en mathématiques ». En s'appuyant sur des exemples historiques et sur des exemples issues des « mathématiques de tous les jours », il nous invite à analyser les formes que prennent en mathématiques les processus de formalisation, et les raisons qui peuvent conduire à s'engager dans un tel processus pouvant déboucher sur des axiomatiques locales, en appui sur plusieurs exemples mettant en valeur le jeu entre simplifier et généraliser. L'auteur soutient la nécessité de développer des théories qu'on peut unifier et propose de faire faire un peu d'épistémologie aux étudiants, pour leur permettre de développer des problématiques et pas seulement des problèmes. L'auteur invite à prendre en compte dans l'enseignement le processus de formalisation qui permet de faire apparaître des formes sur lesquelles on va pouvoir opérer (syntaxe) afin d'obtenir des pistes de résolution et des développements d'autres problèmes connexes ou plus généraux. Ceci permet également de développer chez les étudiants une culture d'unification et de simplification. Ceci conduit l'auteur à proposer de se pencher sur les pratiques expertes des mathématiciens pour en étudier de possibles transpositions, ce qui invite à une épistémologie contemporaine.

Slim MRABET présente une étude sur « les axiomatiques autour du théorème de Thalès dans les programmes et manuels tunisiens ». Il s'intéresse principalement ici au changement de point de vue dans la résolution de problèmes de géométrie qui se produit lors de la transition collège-lycée, avec l'introduction de l'outil vectoriel. Pour éclairer cette question, il propose un retour à l'histoire de la géométrie et de son enseignement, ce qui lui permet de dégager des axiomatiques différentes et les modèles d'organisation des connaissances associés. L'auteur identifie deux axiomatiques : l'axiomatique euclidienne que l'on rencontre sous deux points de vue —le point de vue classique qui correspond à un point de vue statique sur les figures et le point de vue des transformations— et l'axiomatique de l'algèbre linéaire dans laquelle la figure a perdu sa place centrale. Les résultats de cette étude épistémologique servent de référence pour analyser l'enseignement actuel du théorème de Thalès en Tunisie. L'auteur montre que les transitions de la 9$^{\text{ème}}$ année de base (dernière année du collège, secondaire 1) à la 1$^{\text{ère}}$ année secondaire (première année du lycée, secondaire 2), puis de la 1$^{\text{ère}}$ année à la 2$^{\text{ème}}$ année secondaire sont accompagnées de changement d'axiomatiques.

Cécile OUVRIER-BUFFET se demande si « l'activité de définition met en jeu un mode de pensée spécifique ». Rappelant que l'activité de définition commence à être considérée en tant que telle dans les travaux internationaux, elle souligne que ce type d'activité permet d'accéder aux concepts et plus précisément de « penser » les concepts mathématiques. Dans sa communication, l'auteure s'attache à définir « l'activité de définition », qui renvoie à tout processus impliquant la construction de définitions, de l'amorce de la résolution d'un problème à la construction formelle de théories, et conduit une étude épistémologique critique de celle-ci, plaçant les définitions au centre d'une activité mathématique de construction de connaissances et de preuve. Elle s'appuie pour cela sur les travaux existants sur le sujet et se penche plus particulièrement sur les types de situations impliquant une activité de définition. De nouvelles questions de recherche se posent telles que : peut-on caractériser un mode de pensée transversal aux mathématiques concernant l'activité de définition ? Si oui, est-il implémentable de manière pertinente dans l'enseignement, et avec quels objectifs ? Quelle contribution de ce type de recherche à l'élaboration de situations pour travailler la preuve ?

2. Pensée logique, syntaxe, sémantique

Zoé MESNIL s'intéresse à la place de la logique dans l'enseignement des mathématiques en France. Pour l'auteure, la logique ne doit pas être seulement associée au raisonnement ; elle est également liée à l'apprentissage du langage mathématique. On peut dès lors s'interroger sur le rôle que la logique peut avoir dans l'enseignement des mathématiques au lycée. L'étude présentée ici a pour but de proposer des éléments de réponse à cette question à travers l'analyse écologique des programmes et des manuels de différentes époques en France. Un regard sur l'histoire de la logique permet à l'auteure d'élaborer une référence par rapport à laquelle elle essaie de comprendre les processus de la transposition didactique. L'analyse comparative des programmes lui permet d'identifier deux niches principales pour la logique mathématique au lycée : une niche langage (travail sur les énoncés mathématiques et leurs formulations), et une niche raisonnement (travail sur les démonstrations et leur validité), qui sont de fait totalement imbriquées. Les analyses présentées dans cette communication montre la complexité d'un enseignement de ce qui relève de la logique, et ouvrent sur la question qui reste largement ouverte de son apport au développement de leur pensée logique et de sa mise en action dans leur activité mathématique ?

Viviane DURAND-GUERRIER défend l'importance de la prise en compte dans une perspective sémantique des relations entre « vérité mathématique et validité logique » dans l'activité mathématique, relations qui sont peu, voire pas travaillées dans le secondaire, mais sont supposées être acquises dans le supérieur. Dans un premier volet, l'auteur rappelle brièvement ce qu'est le point de vue sémantique en logique : son essor à partir de Frege ; les apports de Wittgenstein et Tarski sur l'articulation entre validité logique et vérité dans une interprétation ; la déduction naturelle de Copi, qui offre un système de règles permettant de rester au plus près des modes de raisonnement en mathématiques. Le second volet est consacré à l'analyse logique et mathématique de quatre preuves du point de vue de l'articulation entre vérité et validité, afin de mettre en lumière la pertinence des analyses logiques pour les études didactiques. La logique apparaît ainsi comme un moyen de rendre explicite ce qui est habituellement implicite dans le travail du mathématicien, et par là même permet de comprendre, plutôt que de fonder les mathématiques.

Rahim KOUKI et Imène GHEDAMSI posent la question de la « limite des méthodes syntaxiques en algèbre du secondaire ». L'apprentissage de techniques opératoires est un objectif fondamental de l'enseignement des notions d'équations, inéquations et fonctions algébriques au secondaire. Du côté des élèves, une prépondérance est accordée à une application automatique des techniques. Dans leur communication les auteurs présentent une investigation didactique prenant appui sur un croisement de la sémantique logique avec les praxéologies mathématiques et les registres de représentations sémiotiques. Cette étude vise à montrer qu'en l'absence de la mobilisation de techniques sémantiques articulant différents modes d'interprétations inter-registre et intra-registres, les techniques syntaxiques de résolution s'avèrent dans certains cas inopérantes et peuvent mettre les apprenants en échec. Les auteurs font l'hypothèse que ces difficultés loin de reculer vont s'amplifier au niveau de l'université, où le travail algébrique sur les fonctions, les développements limités, les équations différentielles se complexifient. Ils considèrent par ailleurs qu'à ce niveau d'enseignement, la pensée sémantique et la rationalité mathématique occupent une place importante pour réussir le traitement des objets mathématiques.

3. *Articulations entre différents modes de pensées (algébrique versus analytique, informatique versus mathématique, statistique versus probabiliste, exactitude versus approximation)*

Isabelle BLOCH s'intéresse au « rôle et statut des savoirs dans la pratique mathématique ». Au début de l'enseignement supérieur, le curriculum prévoit l'étude d'objets déjà explorés auparavant, comme les fonctions et les limites. Cependant, derrière ce qui paraît de simples modifications techniques, le statut des objets et les outils de validation se trouve profondément bouleversé. L'auteure analyse ce basculement épistémologique en considérant dans un premier temps, la modification de variables macro-didactiques déterminantes dans la transition. Les variables identifiées permettent de pointer l'ampleur du décalage entre les savoirs mathématiques du secondaire et ceux qui sont mis en œuvre au début du cursus universitaire et en examinant le travail algébrique entrepris lors d'un exercice. Ce travail montre le décalage entre le statut des objets pour le professeur et le statut perçu par les élèves. Les élèves montrent une conception « algébrique » de la continuité, conception liée à leur perception des fonctions comme ne présentant pas d'« accidents de parcours ». Le statut d'une notion comme la continuité a manifestement basculé d'un point de vue algébrique (« Toutes les bonnes fonctions sont continues et 'recollables' ») à une nécessité de disposer d'outils pour travailler et penser analytiquement.

Simon MODESTE aborde la question de « la pensée algorithmique » et des « apports d'un point de vue extérieur aux mathématiques », en l'occurrence l'informatique. Dans sa communication, l'auteur propose d'aborder l'algorithmique sous deux points de vue. Le premier consiste à regarder la pensée algorithmique comme une pensée des mathématiques (parmi d'autres pensées), l'algorithme étant depuis des siècles, outil et objet des mathématiques. Le second consiste à la voir comme la pensée de la science algorithmique (ou informatique), car de fait l'algorithme y est l'objet central. La pensée algorithmique est ici conçue comme activité de l'esprit humain et non comme son produit ; la pensée algorithmique avancée renvoie à l'activité des chercheurs. En accord avec Rasmussen, l'auteur soutient que l'activité algorithmique ne se résume pas à l'apprentissage et la mise en œuvre d'algorithmes mais englobe aussi leur production, leur compréhension et leur étude, en particulier les questions liées à la complexité, et qu'il est possible d'aborder l'algorithme et l'algorithmique dans l'enseignement secondaire en tant qu'objet et pas uniquement en tant qu'outil, ce qui met en jeu des interactions entre pensée algorithmique et pensée mathématique.

Pablo CARRANZA soutient dans son texte que l'on peut introduire une « sensibilisation à l'abduction en statistique » dans la classe de mathématiques. Il propose pour cela de mettre en relation l'abduction et le théorème de Bayes d'un point de vue statistique, et s'intéresse plus précisément aux questions liées à l'enseignement et l'apprentissage de ce théorème en tant qu'outil modélisant le raisonnement par abduction, en centrant le travail dans un premier temps sur les aspects sémantiques de l'expression de Bayes. Ceci conduit l'auteur à prendre en compte la dualité entre probabilité et statistique dont il dit qu'elle peut également être introduite en classe. L'auteur précise que l'approche retenue est celle pour laquelle la valeur d'une probabilité représente une mesure de la certitude partielle portée par un individu sur une proposition donnée et souligne que cette introduction du théorème de Bayes est directement en lien avec le développement de la pensée stochastique, et ouvre des pistes pour son enseignement. Les résultats expérimentaux montre qu'un tel travail en classe est possible, mais qu'il soulève de nombreuses questions : sur la validation, sur le changement de contrat didactique et sur d'autres conflits provenant du changement de paradigme épistémologique lors du traitement en classe de notions statistiques.

Carlo MARCHINI quant à lui pointe dans son texte « les résistances des enseignants face à l'approximation », cette dernière notion ayant été introduite comme sujet d'étude dans les programmes italiens en 2007. L'article rend compte d'une enquête conduite auprès d'enseignants pour voir si le thème de l'approximation trouve effectivement une place dans l'enseignement ; en effet, l'analyse des caractéristiques de cette introduction dans les programmes laisse penser que la culture des professeurs pourrait rendre difficile sa mise en œuvre. Les résultats montrent une certaine résistance chez les professeurs de collège et de lycée, qui pourrait être liée à un manque de connaissance, ainsi qu'à la nécessité de passer d'un point de vue ponctuel à un point de vue local au sens de Vandebrouck. L'auteur souligne que des évolutions semblent se produire dans les dernières années du secondaire où certains sujets nécessitent intrinsèquement d'adopter un point de vue local, mais devrait et pourrait être travaillé graduellement et ceci dès l'école primaire, les recherches conduites montrant qu'il y a des intuitions chez les élèves de l'école primaire qui doivent être valorisées et exploitées ensuite au niveau de toute la scolarité.

4. *Pensée réflexive*

Anne ROY étudie le « développement d'une pensée réflexive chez des futurs enseignants du primaire en mathématique ». L'approche retenue par l'auteur est une adaptation à la formation des maîtres de la Philosophie pour enfants en mathématiques développée au Québec dans les années quatre-vingt-dix, et s'appuie sur le modèle épistémologique des idéologies de l'éducation mathématique de Paul Ernest, ainsi que sur une adaptation des modes de pensée complexe développé par Matthew Lipman : le mode critique qui facilite la recherche de validité ; le mode créatif qui contribue à la recherche du sens ; le mode responsable qui s'attarde à la recherche éthique et le mode métacognitif qui s'attarde à la prise de conscience des actes mentaux. L'étude porte sur la mobilisation d'une pensée réflexive chez des futurs enseignants lorsqu'ils participent à des discussions à visée philosophique relatives à l'éducation mathématique. L'objectif consiste à vérifier si les interventions lors de ces discussions amènent les futurs enseignants à mobiliser des habiletés de pensée réflexive de niveau supérieur en regard de l'éducation mathématique. À l'aide d'une typologie sur les types de pensée réflexive qu'elle a développée, l'auteur analyse les habiletés de pensée émergentes des discussions et des entrevues en appui sur des extraits de protocoles.

5. *Une affiche autour de la notion de compétence*

Baghdad BENMIA aborde dans son affiche la question des « origines et fondements de compétence » dans le cas des mathématiques en s'appuyant sur l'œuvre de philosophes mathématiciens arabes du 7$^{\text{ème}}$ siècle, en particulier sur leur rapport au concept de « *compétence* » afin de répondre au problème *social de l'héritage.* Cet exemple permet à l'auteur d'illustrer l'intérêt de considérer deux niveaux praxéologiques essentiels permettant d'articuler deux traits saillants de la théorie anthropologique du didactique : d'une part, la modélisation d'une compétence en termes de praxéologies et, d'autre part, l'importance accordée au processus de modélisation d'une activité mathématique au sein de cette compétence. Pour les philosophes arabes du 7ème siècle *le langage* contribue à construire le savoir et non seulement à le communiquer. La réflexion proposée est guider par les questions suivantes : Comment peut-ont décrire la contribution du langage à la construction du savoir ? Quelles sont les caractéristiques du fonctionnement du langage favorisant cette construction ? Quel est le type du sujet qui porte en lui des compétences ?

II. QUELQUES PISTES DE TRAVAIL POUR LES CONGRES A VENIR

Les riches échanges lors des différentes sessions ont fait émerger plusieurs points qui mériteraient selon nous d'être développés et approfondis.

Le premier concerne l'importance pour l'étude des différentes pensées mathématiques de la prise en compte l'activité du sujet, de la nature des objets avec lesquels il travaille, des méthodes qu'il met en œuvre, et de ce que cela nous apprend sur les processus de conceptualisation. Ceci conduit également à prendre en compte la dimension pragmatique (i.e. reconnaissance de forme, principe d'économie, situation d'énonciation, prise en compte des intentions d'autrui etc.) et ses effets sur la mise en œuvre de l'activité et sur les modes de pensée à l'œuvre.

Il est apparu un chantier à ouvrir sur les modes de pensées « spécifiques » par rapport à des modes de pensées plus transversaux (i.e. axiomatique, formelle, logique, structuraliste) ; sur les relations entre différents modes de pensée spécifiques, entre différents modes de pensées transversaux, sur les déclinaisons spécifiques des modes de pensée transversaux et ce que cela ouvre comme champ des possibles pour les développements curriculaires et les organisations mathématiques.

Enfin, plusieurs textes on mis en évidence l'importance de l'articulation entre syntaxe (forme des énoncés, règles de transformation (réécriture) et règles de déduction formelle) et sémantique (dans une interprétation donnée, prise en compte des objets et des opérations naturalisées sur ces objets, signification des formes et des énoncés ; vérité des énoncés interprétés), et sa prise en compte dans les organisations didactiques, et cela au-delà des seuls textes que nous avons placés dans la section Pensée logique, syntaxe et sémantique.

Enfin, les études sur les questions liées à la prise en compte des différentes pensées mathématiques dans le curriculum, ainsi que sur celles liées à la formation des enseignants, qui constituaient le troisième axe de l'appel à communication, ont besoin d'être développées.

REFERENCES

Artigue M. (1991) Epistémologie et Didactique. *Recherche en didactique des mathématiques* 10(2/3) 241–286.

Bednarz N., Mary C. (Eds.) (2009) *Actes du colloque EMF 2006*. Recueil de textes : L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés, Thème 8 « Développement de la rationalité mathématique au fil du secondaire ». Canada : Editions du CRP Sherbrooke. ISBN : 2-89474-070-0 EAN : 9782894740705.

Borba M. (1997) Mathematics, Culture and Authority. In Powell A. B., Frankenstein M. (Eds) *Ethnomathematics: Challenging eurocentrism in mathematics education*. Albany : State University of New York Press.

Bouveresse J. (2008) *Mathématiques et expérience – L'empirisme logique à l'épreuve (1918-1940)*. Paris : Odile Jacob.

Cavaillès J. (1994) *Œuvres complètes de philosophie des sciences*. Paris : Hermann.

Châtelet G. (1993) *Les enjeux du mobile*. Paris : Seuil.

Crombie A. C. (Ed.) (1994) *Styles of scientific thinking in the european tradition*. Londres : Duckworth.

Dieudonné J., Thom R., Guénard F., Lelièvre G. (1982) *Penser les mathématiques*. Paris : Seuil.

Duval R. (1995) *Sémiosis et pensée humaine*. Berne : Peter Lang.

Gardies J.-L. (2004) *Du mode d'existence des objets de la mathématique*. Paris : Vrin.

Granger G. G. (1992) *Formes, opérations, objets*, Paris : Vrin.

Gerdes P. (2003) Pensée mathématique et exploration géométrique en Afrique et ailleurs. *Diogène* 202 126–144. http://www.cairn.info/article.php?ID_REVUE=DIO&ID_NUMPUBLIE=DIO_202&ID_ARTICLE=DIO_202_0126

Hacking I. (1965) *Logic of statistical inference*. New York : Cambridge at The University Press.

Parrochia D. (1992) *Qu'est-ce que penser / calculer ?* Paris : Vrin.

Patras F. (2001) *La Pensée mathématique contemporaine*. Paris : Presses Universitaires de France.

Quine W.V.O. (2003) *Du point de vue logique*. Paris : Vrin.

Peirce C. S. (1974) *Collected papers of Charles Sanders Peirce.* Cambridge Mass : Harvard University Press.

Rasmussen C., Zandieh M., King K., Teppo A. (2005) Advancing mathematical activity : A view of advanced mathematical thinking. *Mathematical Thinking and Learning* 7 51–73.

Schoenfeld A. H. (1992) Learning to think mathematically: problem-solving, metacognition and sense making in mathematics. In Grouws D. A. (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334–370). New York: Macmillan.

Sierpienska A., Lerman S. (1996) Epistemologies of mathematics and of mathematics education. In Bishop A. & al. (Eds.) *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 827–876). Dordrecht: Kluwer.

Skovsmose O., Borba M. (2004) Research Methodology and Critical Mathematics Education. In Valero P., Zevenbergen R. (Eds.) *Researching the Socio-Political dimensions of mathematics education: issues of power in theory and methodology* (pp. 2007–2026). Dordrecht: Kluwer.

CONTRIBUTIONS AU GT3[1]

BLOCH I. – Rôle et statut des savoirs dans la pratique mathématique : l'exemple d'un basculement épistémologique dans l'enseignement de l'analyse.
CARRANZA P. – Sensibilisation à l'Abduction en statistique.
DURAND-GUERRIER V. – Vérité mathématique et validité logique. Perspectives épistémologique et didactique.
HAUSBERGER T. – Le challenge de la pensée structuraliste dans l'apprentissage de l'algèbre abstraite : une approche épistémologique.
KOUKI R., GHEDAMSI I. – Limite des méthodes syntaxiques en algèbre du secondaire.
MARCHINI C. – Les résistances des enseignants face à l'approximation.
MESNIL Z. – La place de la logique dans l'enseignement des mathématiques au lycée en France.
MODESTE S. – La pensée algorithmique : apports d'un point de vue extérieur aux mathématiques.
MRABET S. – Les axiomatiques autour du théorème de Thalès dans les programmes et les manuels tunisiens.
OUVRIER-BUFFET C. – L'activité de définition : vers un mode de pensée spécifique ?
ROGALSKI M. – Approches épistémologique et didactique de l'activité de formalisation en mathématiques.
ROY A. – Développement d'une pensée réflexive chez des futurs enseignants du primaire en éducation mathématique.

[1] Voir aussi l'affiche de BENMIA B. – Les origines et fondements de compétences : la compétence mathématique et ses signifiants.

ROLE ET STATUT DES SAVOIRS DANS LA PRATIQUE MATHEMATIQUE : L'EXEMPLE D'UN BASCULEMENT EPISTEMOLOGIQUE DANS L'ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE

Isabelle BLOCH*

Résumé – Au début de l'enseignement supérieur, le curriculum prévoit l'étude d'objets déjà explorés auparavant, comme les fonctions et les limites. Cependant, derrière ce qui paraît de simples modifications techniques, le statut des objets et les outils de validation se trouvent profondément bouleversés. Nous analysons ce basculement épistémologique suivant deux dimensions : la première considère la modification de variables macro-didactiques déterminantes dans cette transition. Dans un deuxième temps, nous examinons le travail algébrique entrepris lors d'un exercice, travail qui montre le décalage entre le statut des objets pour le professeur et le statut perçu par les élèves.

Mots-clefs : enseignement de l'analyse, statut des concepts, outils du travail mathématique

Abstract – At the beginning of University, the maths curriculum studies functions and limits, objects that have been already seen by students. Although the new organization seems to introduce plain modifications of techniques, we provide evidence that the status of objects and methods of proof are deeply transformed. We present some explanations of how this epistemological shift occurs: first we show the deep revision of some macro-didactic variables in this transition. Then we examine the solution of an exercise in a class of scientific students, which illustrates the gap between the status of mathematical objects for the teacher and for the students.

Keywords: the teaching of calculus, status of the concepts, tools of mathematical work

I. INTRODUCTION

Dans un contexte de transition entre deux ordres d'enseignement (ici le secondaire et le supérieur), certaines tâches données aux élèves dans l'apprentissage d'une nouvelle théorie comme l'Analyse ne peuvent être réalisées par des techniques relevant de routines algébriques du niveau antérieur : il en résulte que les connaissances présidant à leur réalisation deviennent visibles à travers des procédures heuristiques non expertes. Ces observations nous aident à comprendre les connaissances en jeu, l'adéquation ou non de celles-ci au nouveau curriculum, et le travail du professeur aux prises avec l'enseignement du nouveau concept ou d'une forme nouvelle d'un concept déjà rencontré.

Cependant, les effets de ce décalage peuvent être plus importants, et certains concepts mathématiques subissent une transformation telle que leur statut et leur mode de fonctionnement s'en trouvent complètement bouleversés. Dans la transition secondaire/supérieur, ce basculement épistémologique est rendu inévitable par la configuration actuelle des contenus des programmes du secondaire : en effet, nous avions montré (Bloch 2003) que les objets qui y étaient étudiés l'étaient de façon descriptive et non relativement à leur nécessité et leur rôle d'outil dans la construction de situations mathématiques. Il en résulte que l'usage fait de ces objets – réputés pourtant déjà fréquentés – dans la suite du cursus ne peut être que profondément déstabilisant pour les étudiants : des travaux nombreux ont fait état de cette déstabilisation et des évolutions du curriculum (cf. Artigue 1998), et plusieurs ont proposé des ingénieries pour surmonter ce bouleversement dans les notions et les conceptions des étudiants lors de ce passage (cf. Dubinsky 1996 ; Castela 2000 ; Durand-Guerrier, 2003 ; Chellougui 2007 ; Schneider 2001a et 2001b ; Maurel et Sackur 2002 ; Praslon 2000…), avec TICE éventuellement (Vandebrouck et Cazes 2004).

* Université de Bordeaux – France, LACES E3D – isabelle.bloch@u-bordeaux4.fr

© Bloch I. (2012) Rôle et statut des savoirs dans la pratique mathématique : l'exemple d'un basculement épistémologique dans l'enseignement de l'analyse. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT3, pp. 392–403). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

La bibliographie jointe, si elle ne peut être exhaustive, propose un panel de travaux sur cette question très débattue.

Pour notre part, nous nous appuyons sur le travail que I. Ghedamsi a conduit sur l'enseignement supérieur tunisien (Ghedamsi 2008) pour reprendre des variables macro-didactiques permettant de caractériser ces modifications. Nous donnons ensuite un exemple de cette rupture, et des modifications des valeurs des variables, dans une séance de mathématiques en classe préparatoire PTSI (France, niveau première année de l'enseignement supérieur, section Physique, Technologie et Sciences de l'Ingénieur).

II. LE CHANGEMENT DE STATUT DES OBJETS MATHEMATIQUES : VARIABLES MACRO-DIDACTIQUES

1. *Définition de variables macro- didactiques*

Les variables que nous avons retenues concernent une organisation relativement globale de l'enseignement et non une situation locale d'enseignement d'un nouveau savoir. Pour les définir et déterminer leur variation, nous avons étudié :

- Pour l'enseignement secondaire, un corpus important de programmes, de manuels, de textes d'exercices, en France et en Tunisie ;
- Pour l'enseignement supérieur, essentiellement des textes de TD (travaux dirigés) de l'Université, en France et en Tunisie.

Les variables finalement retenues sont au nombre de onze ; les six premières variables (VD0 à VD5) concernent le statut des savoirs ; les variables VD6 à VD11 s'attachent à mesurer la façon dont les savoirs interviennent dans les pratiques mathématiques, telles que ces dernières sont configurées en fin de secondaire ou au début de l'enseignement universitaire. Nous avons d'ailleurs observé que les paramètres de la transition secondaire/ supérieur sont sensiblement les mêmes en France et en Tunisie.

La première variable VD0 définit le mode d'introduction des notions : dans l'enseignement secondaire, il s'agit souvent d'une introduction par des métaphores culturelles, alors que dans le supérieur, c'est par une définition formelle. Les autres variables quantifient les modalités sous lesquelles apparaissent les objets mathématiques, ainsi :

- VD1 : le degré de formalisation, et tout particulièrement dans les définitions des concepts ;
- VD2 : le registre de validation, soit l'algèbre, soit le raisonnement analytique ;
- VD3 : le degré de généralisation requis dans les énoncés : faible ou fort ;
- VD4 : le nombre de nouvelles notions introduites, comme les développements limités, etc ;
- VD5 : le type de tâches, soit heuristique, graphique, algorithmique.

Les variables suivantes visent à paramétrer la façon dont les notions sont travaillées en classe, du point de vue des techniques, de l'autonomie requise des élèves, et de leur degré de responsabilité dans le savoir :

- VD6 : le choix des techniques et leur routinisation ou non : usage d'une même technique ou amalgame de techniques dont la responsabilité revient à l'étudiant ;
- VD7 : le degré d'autonomie sollicité : faible ou élevé ;
- VD8 : le mode d'intervention de la notion, comme processus ou objet ou outil/objet ;
- VD9 : le type de conversions sollicitées entre registres de représentation ;

- VD10 : le statut des tâches demandées aux étudiants, soit simple exercice d'application, soit démonstration d'un énoncé auxiliaire mais général. Cette variable est représentative du *contrat didactique* de l'institution, dans la mesure où elle contribue à préciser la nature de la responsabilité mathématique dévolue aux étudiants.

Le choix de ces variables didactiques détermine le contrat didactique potentiel régissant le travail en classe ; en particulier, les valeurs que prennent ces variables nous permettent de dégager la nature du partage des responsabilités mathématiques entre professeur et étudiants. Les modifications constatées des valeurs des variables correspondent à des ruptures entre les deux ordres d'enseignement. Nous avons pu ainsi catégoriser les tâches proposées dans un certain nombre de domaines de l'étude, ce qui nous a permis de disposer d'information – qualitative ou quantitative – sur la continuité du travail des étudiants entre le secondaire et le supérieur, et sur la nature des ruptures : celles-ci sont-elles relativement anodines ou constituent-elles une transition globale difficile à gérer par les étudiants ?

Remarquons que cette classification constitue, en quelque sorte, une généralisation et une extension des variables relatives à la familiarisation avec le savoir introduites par A. Robert : connaissances techniques, mobilisables, disponibles (Robert 1998). Cependant nous nous focalisons davantage sur l'introduction de nouvelles notions au supérieur.

2. *Les valeurs prises par les variables didactiques et leurs conséquences : évolution des valeurs des variables*

Le tableau ci-dessous montre à l'évidence, au passage enseignement secondaire/ enseignement universitaire, une modification importante des valeurs prises par les variables, ce qui ne peut que s'accompagner d'une profonde mutation dans le travail mathématique demandé. Nous commentons plus loin cette évolution, et donnons quelques exemples.

	Enseignement secondaire	***Début de l'Université***
Nature des objets		
0. Introduction d'un concept	Métaphore	Définition
1. Degré de formalisation	Faible	Elevé
2. Registre de validation	Algèbre	Analyse
3. Degré de généralisation	Aucun	Elevé
4. Introduction de notions nouvelles	Importante (mais *sans* outils théoriques spécifiques de validation)	Importante (*avec* des outils théoriques spécifiques de validation)
5. Type de tâches	Algorithme, tracé de graphiques, calcul	Recherche et démonstration
Travail en classe		
6. Choix des techniques	Transparent	Amalgame
7. Degré d'autonomie sollicité	Routines	Peu de routine
8. Mode d'intervention d'une notion	Processus	Objet
9. Conversions entre registres	Alg/Graphique	Alg/Analytique
10. Statut des énoncés d'exercices	Application, instanciation	Théorème, énoncé général

L'analyse du seul tableau permet de noter que le passage de l'enseignement secondaire à l'Université s'accompagne de modifications majeures : presque toutes les variables sont modifiées, avec un taux de changement considérable. Les valeurs prises ne montrent presque aucun recouvrement : les étudiants sont confrontés à une révolution globale, aussi bien du travail demandé que des moyens de ce travail.

3. *D'un travail algorithmique à des techniques complexes*

VD0 : L'introduction des notions au secondaire (par exemple la limite) est supposée s'appuyer sur l'intuition et des métaphores culturelles, alors qu'à l'Université la question de l'existence ou non d'une limite n'est plus philosophique mais entièrement déterminée par la cohérence de la théorie et la puissance du formalisme comme outil de preuve.

VD1 : A l'Université le registre formel est introduit d'emblée et les étudiants sont supposés avoir compris son utilité et se mouvoir aisément dans ce registre.

VD2 : A l'entrée à l'Université l'usage de la définition des notions de l'Analyse est général, et considéré comme un moyen de preuve habituel ; ceci contraste avec le travail usuel au secondaire, qui porte exclusivement sur des fonctions ou des suites particulières, données algébriquement, si bien qu'aucun travail n'est demandé sur des énoncés généraux. Dans l'enseignement secondaire, on ne procède qu'à des instanciations de théorèmes sur des fonctions simples ; et encore faut-il remarquer que les théorèmes ont été le plus souvent admis – conformément au programme.

VD2, VD3, VD5 : A l'Université les étudiants sont supposés tenir des raisonnements analytiques : ces raisonnements portent très souvent sur des résultats généraux, faisant intervenir la définition de la notion de limite en (ε,η), ou des fonctions possédant telle ou telle propriété. Ces raisonnements comportent une dimension heuristique – recherche d'une solution non évidente – et l'usage de définitions formelles, ou de raisonnement par l'absurde, ou de recherche de contre-exemples ; ou encore, utiliser des développements limités ou des intégrales à constituer, en suivant les théorèmes connus, à partir de fonctions de base. Il n'en est pas de même dans l'enseignement secondaire où l'on constate que les applications demandées concernent très généralement une fonction bien précise, que le résultat ne fait pas de doute et que le moyen de sa démonstration est algorithmique, ou bien le recours à un résultat connu (et d'ailleurs qui n'a pas été forcément démontré).

VD4 : Il pourrait sembler que la variable VD4 ait subi peu de modifications entre l'enseignement secondaire et l'Université. L'introduction de l'Analyse s'accompagne, dans les deux cas, d'une augmentation significative des notions nouvelles étudiées. Cependant la nature de cette augmentation est différente dans les deux institutions :

- Dans l'enseignement secondaire, les notions sont présentées à l'aide de métaphores culturelles, et les notions sont donc introduites essentiellement par, a) un nouveau vocabulaire, b) des analogies ou des métaphores, ce qui est pointé comme devant reposer sur "l'intuition" par les programmes et les manuels. Ainsi une notion comme celle de limite est réduite à son nom, quelques occurrences (limites finies, infinies, en x_0 ou à l'infini, sur des fonctions polynômes et rationnelles simples, puis sans démonstration sur les fonctions sinus, cosinus, logarithme et exponentielle) et quelques exemples.
- Dans l'enseignement supérieur, les notions sont introduites avec tout l'arsenal formel de définition et de preuve. Le statut d'un concept introduit est de ce fait très différent : outil général, relié à d'autres notions, susceptible d'être remis en jeu pour accéder à un nouveau concept ou un autre niveau de validation.

VD6, VD7 : Les manuels du secondaire proposent des exercices et des problèmes usant la plupart du temps de la même (ou des deux ou trois mêmes) technique, techniques qui deviennent ainsi des routines pour l'élève. De plus un même exercice est en général consacré à *une* technique. A l'Université il en va tout autrement : les ensembles d'exercices analysés révèlent l'usage de nombreuses techniques, de plusieurs techniques dans un même problème. Les étudiants sont supposés pouvoir faire usage de ce que nous avons appelé un *amalgame de techniques*, cette expression signifiant qu'il/elle doit être capable d'articuler plusieurs aspects d'un concept, ceci dans un même exercice.

VD8 : à l'Université, par exemple la notion de limite est en soi un objet de la théorie « Analyse », étudié en tant que tel. On observe donc un travail sur la conception structurelle de la notion de limite, ses fonctionnalités dans des problèmes, ses relations avec d'autres objets de la théorie (développements limités, séries, intégrales…), et la validation dans le cadre du système de preuve de l'analyse : représentation par un voisin (Bloch 2000), condition suffisante, usage du formalisme en (ε,η) et des quantificateurs. Dans l'enseignement secondaire, cet aspect est explicitement absent et le travail demandé met essentiellement en jeu l'aspect "processus" de la notion de limite, c'est-à-dire le cheminement intuitif pour obtenir, par exemple, les asymptotes d'une courbe.

Les résultats de cette recherche viennent ainsi à l'appui de celle que nous avions menée sur la nature du travail mathématique demandé dans le secondaire (Bloch 2003) : ce travail ne permet presque jamais la mise en évidence de propriétés mathématiques, au sens où l'on pourrait interroger leur validité, trouver leur domaine d'efficacité, énoncer la propriété 'non p' et en déduire des relations entre propriétés 'voisines' (par exemple sur l'ordre et la continuité…), et insérer les différentes propriétés dans une théorie.

Remarquons que cette recherche rejoint le travail fait dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique (TAD) par Bosch, Fonseca et Gascon (2004). En effet ces auteurs pointent la faible possibilité ouverte, dans l'enseignement secondaire, de transformer des *organisations mathématiques ponctuelles* (OMP, comme l'étude des limites d'une fonction donnée algébriquement) en *organisations mathématiques locales* (OML) où les notions sont reliées entre elles par les règles de la théorie. Les travaux s'avèrent donc convergents dans la TSD et la TAD : l'organisation actuelle de l'enseignement mathématique au secondaire n'autorise qu'une « visite guidée » d'un certain nombre de propriétés vues comme contingentes et ne permet pas de mettre en évidence les liens entre propriétés, entre concepts et la cohérence de l'édifice théorique, même de façon embryonnaire.

VD7, VD9 : Au lycée, les étudiants n'ont presque aucune opportunité de décider de l'usage d'un diagramme ou d'un graphique pour aborder une situation de recherche (dimension heuristique), et ceci quelle que puisse être l'utilité d'un tel usage dans les problèmes analytiques. Ainsi Maschietto (2001) a pointé la fonctionnalité des représentations graphiques pour la résolution de problèmes d'analyse au début de l'Université. Elle relève les difficultés des étudiants à se saisir de diagrammes, schémas, graphiques, comme supports de recherche. Il faut noter que les étudiants doivent manifester une certaine autonomie s'ils veulent développer ce type de compétences et en poursuivre l'usage à leur entrée à l'Université : en effet si l'institution (en France) encourage le développement des compétences heuristiques graphiques, souvent elle ne prend pas en charge l'organisation de cette capacité en fournissant des outils spécifiques, et les professeurs manquent de moyens didactiques pour rendre les étudiants performants dans la dimension heuristique du graphique. Cependant les travaux de Vandebrouck et Cazes (2004) exposent des expériences prometteuses. Pour certains enseignants de l'Université néanmoins, les étudiants sont supposés fonctionner très rapidement dans le registre formel, et les étudiants sont invités, dès leur premiers pas à l'Université, à saisir le sens des concepts dans ce registre et pratiquer tout à la fois la recherche et la formulation de solutions correctes dans ce cadre. Le travail de Bridoux (2005) est cependant un témoignage des interrogations de la communauté des enseignants universitaires[1].

VD9 : l'Université n'exploite pas non plus les possibilités ouvertes par les changements de registres de représentation, et on note même la disparition de tâches de conversion entre registre algébrique et registre graphique, qui étaient pourtant relativement courantes au secondaire, même si elles avaient tendance à n'être exploitées que dans un sens : de l'algébrique vers le graphique.

VD10 : enfin, l'analyse des énoncés de ce qui est considéré comme des exercices à faire par les étudiants, au secondaire et à l'Université, montre qu'au lycée les élèves n'ont à résoudre que des tâches ponctuelles portant sur des fonctions particulières, données par des formules algébriques, ce qui situe clairement le travail des élèves dans le domaine de l'application à des exemples. A Tunis, les exercices des séries de travaux dirigés de l'Université consistent fréquemment à démontrer des corollaires de théorèmes du cours, dans des cas de propriétés particulières éventuellement (suite majorée, alternée, à valeurs dans **Z**…) mais non dans le cas d'une suite donnée par sa formule. Ceci porte clairement la responsabilité mathématique des étudiants vers l'établissement de résultats de cours, supposés réutilisables dans d'autres cas ; or ce type de responsabilité ne fait partie à aucun moment du contrat habituel de l'élève du secondaire. Voici quelques exemples pris dans les énoncés de TD de mathématiques de l'Université de Tunis :

Série 3, Exercice 3 : Soit $(u_n)_n$ une suite à termes dans **Z**. Montrer que (u_n) converge si et seulement si elle est stationnaire.

Exercice 4 : Vérifier si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse :

a) Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$:
b) Toute suite non majorée admet une suite extraite qui tend vers $+\infty$;
c) Toute suite convergente est bornée.

Série 4, exercice 1 : En raisonnant par l'absurde montrer que toute fonction continue sur un intervalle fermé borné est uniformément continue sur cet intervalle.

Il faut noter que ceci ne se retrouve pas à l'identique dans l'analyse des TD de l'université française : ce qui peut y être demandé est de l'ordre de la reprise de démonstrations faites en cours par l'enseignant. L'objectif est de ne pas cantonner les étudiants à des tâches uniquement calculatoires ou d'application, et donc de leur faire rencontrer et utiliser des méthodes générales de résolution, mais dans une situation où le risque est nul. De fait, l'alternative parfois rencontrée est de ne jamais organiser de dévolution aux étudiants de ces méthodes générales, mais bien plutôt de ne leur laisser que des tâches algorithmiques, ce qui assure peu la conceptualisation.

Les modifications dans les valeurs prises par VD5 s'observent particulièrement bien sur des pourcentages : au lycée 52% des tâches sont algorithmiques, et 33% concernent des réalisations graphiques ; seules 14% des exercices figurant dans les manuels comportent une dimension heuristique, encore peut-on douter s'ils sont effectivement donnés à faire aux élèves. Au début de l'enseignement supérieur, nous avons identifié 37% de tâches algorithmiques, pas d'occurrence de tâches graphiques, et 63% de tâches de recherche, avec l'usage de nouvelles techniques ou technologies.

---

[1] Il n'incite pas à l'optimisme car il montre des étudiants de troisième année d'université usant du registre formel de façon quelque peu fantaisiste…

Notons qu'à ce niveau, différencier technique et technologie se fait en référant à la définition donnée dans la TAD : une technique est le moyen d'accomplir une tâche, tandis que la technologie correspondante est ce qui justifie la technique. Ainsi, utiliser le théorème des accroissements finis par exemple pour calculer une variation, $[f(b) - f(a)]/(b - a) = f'(c)$, est une technique, alors que la technologie correspondante consiste à justifier que les conditions du théorème sont remplies, et à connaître les raisons qui justifient ce théorème, son utilité globale, et (au moins) certaines occurrences de son application.

Relativement à VD6, nous avons remarqué que le travail demandé aux étudiants à l'Université comporte de nombreuses techniques ; du fait de leur nombre, ces techniques ont chacune une faible occurrence d'apparition, et cependant les étudiants doivent les maîtriser toutes. De plus, les étudiants sont responsables du choix de la technique ; de nombreux exercices demandent d'ailleurs d'enchaîner les techniques afin de parvenir au résultat. Cette situation est à l'opposé de ce qui prévaut dans le secondaire, où les techniques sont peu nombreuses, et chacune d'elles est soigneusement rodée dans un grand nombre d'exercices d'application sous la direction du professeur avant d'être laissée sous le seul contrôle mathématique de l'élève.

Cet état de fait contribue bien évidemment à une importante variation de VD7. De plus, les exemples abondent de la très grande variation qui est opérée d'un cycle à l'autre dans la responsabilité mathématique laissée aux étudiants : ainsi dans l'étude de suites récurrentes, la détermination de l'intervalle où la fonction décroît est systématiquement prise en charge par l'énoncé au secondaire, alors qu'elle est laissée à l'étudiant au supérieur.

A l'Université on observe de nombreux exercices portant sur l'aspect objet d'un concept, alors que le secondaire met l'accent exclusivement sur l'aspect outil, processus : étudier une fonction ou une suite spécifiée pour en déduire ses propriétés quant aux limites ou la dérivabilité. La transition processus/objet s'est aussi révélée un modèle efficace pour notre classification, car elle a permis de décrire et de catégoriser les tâches usuelles au secondaire/ à l'Université, en saisissant le 'saut conceptuel' auquel les étudiants sont contraints :

- s'emparer du formalisme unificateur via une définition en (ε,η) ou intégrales, etc. et généraliser ainsi l'usage d'une notion, en réalisant une économie de pensée et de moyens heuristiques dans un grand nombre de tâches ;
- s'engager ainsi dans la réification d'un concept comme celui de limite et mettre ce concept en relation avec d'autres (développement limité, dérivée, intégrales…) ;
- prendre la responsabilité d'énoncer des propriétés générales relatives aux concepts, c'est-à-dire des théorèmes de l'Analyse.

Dans le paragraphe suivant, nous exposons l'analyse d'une leçon sur la continuité, en classe de mathématiques supérieures PTSI. Cette étude met en évidence le fait que les résultats de l'analyse micro-didactique sont convergents avec ceux de l'analyse macro-didactique et montrent le changement de statut épistémologique des objets mathématiques manipulés.

III. ETUDE D'UNE SITUATION D'ENSEIGNEMENT SUR LA CONTINUITE : QUELQUES PHENOMENES MICRO DIDACTIQUES

1. Le changement de statut des objets

La leçon observée est une leçon sur les fonctions, le 19/03/2002, au lycée général et technologique Saint-Cricq à Pau (prise de notes par deux chercheures). La leçon porte sur fonction réciproque, et continuité. Le but est ensuite de travailler sur les théorèmes de dérivation des fonctions quotient et composée (ceci sera fait dans une séance deux jours plus tard). Il s'agit des premières leçons sur les fonctions, réciproques, continuité…

Le professeur corrige un exercice : il s'agissait de montrer que la fonction *f*, définie par : $f(x)=2x-\frac{3x+9}{x-2}$ est une bijection de]2, +∞[dans **R**. Le professeur avait demandé la bijection réciproque. Les commentaires de l'observateur sont en italique.

1- Un élève : pour trouver f^{-1} on pose : $y = f(x)$ avec $x\in]2, +\infty[$ d'où $x = f^{-1}(y)$

2- P : personne ne l'a fait ? *(Mathilde, la seule fille de la classe, est la seule à l'avoir fait…)*

3- M (au tableau, écrit) : $y = 2x - \frac{3x+9}{x-2} \Leftrightarrow y(x-2) = 2x\,(x-2) - (3x+9)$

4- P : est-ce qu'il y a vraiment équivalence dans tout ce que tu écris… En fait c'est équivalent si x>2, donc on va supposer que tu écris tout pour x>2. *(? ? ? pourquoi pas pour x ≠ 2 ?)*

5- M développe l'expression écrite au tableau.

6- P : en fait, on a une équation du second degré où *x* est l'inconnue, *y* est un paramètre. *(Les élèves n'ont jamais étudié d'équation avec paramètre dans l'enseignement secondaire).*

7- M arrive à : $2x^2 - 4x - 3x - 9 = y(x-2)$ puis $2x^2 + x\,(-7-y) - 9 + 2y = 0$

(Le calcul est alors fortement guidé par le professeur)

8- P : on calcule $\Delta = (-7-y)^2 - 8(-9+2y) = y^2 + 14y + 49 + 72 - 16y = y^2 - 2y + 121$ qui a son discriminant négatif, et son signe ? *Les élèves semblent n'avoir aucune idée de la façon dont on pourrait le déterminer.*

9- P : je peux vous dessiner des paraboles qui n'ont pas de racines, (P dessine au tableau, deux paraboles, l'une positive à concavité vers y>0, l'autre négative à concavité vers y<0), donc pourquoi Δ > 0 ?

10- Es : ???

Les élèves semblent découvrir avec difficulté ce basculement de Δ, de discriminant – outil pour chercher les racines d'une équation – à fonction représentée par une parabole, d'autant que le professeur n'a pas représenté la fonction qui à *y* associe $y^2 - 2y + 121$, mais deux paraboles 'génériques', supports du raisonnement. On observe ici un basculement de VD2 et VD3 : le raisonnement algébrique, calcul de x en fonction de y, ne suffit pas. On note aussi une utilisation du discriminant d'abord comme outil, puis comme objet à étudier pour revenir ensuite à l'équation qu'il détermine, ce qui constitue une modification de VD8 ; puis un recours à un graphique générique – usage non routinier au secondaire, d'où basculement de VD9 – pour penser la nature des fonctions du second degré, ce qui, de plus, sollicite une mise en relation équation – fonction – graphique là encore déstabilisatrice.

11- Mathilde écrit alors les solutions, $x_1 = \frac{1}{4}(7+y+\sqrt{y^2-2y+121}$

$x_2 = \frac{1}{4}(7+y-\sqrt{y^2-2y+121})$

12- P : laquelle de ces solutions convient ?

Les élèves semblent très indécis.

13- Le professeur demande alors si x_2 peut être négatif et un élève affirme que oui ; P fait alors préciser pour quelle valeur : pour $y = 0$.

14- P : donc la réciproque est donnée par la formule x_1 *(Ceci est une condition nécessaire, non suffisante. Pourquoi est-on sûr que x_1 est supérieur à 2 ??? En fait il faut, pour le prouver, comparer les racines à 2 : la comparaison de la deuxième racine a été faite par contre-exemple – x_2 peut être négative donc n'est pas toujours supérieure à 2 – mais quid de la première x_1 ?)*

15- E : et comment on sait que ça ne peut pas être tantôt l'un, tantôt l'autre ?

16- P : donne un argument de continuité *(Comment cet argument peut-il être reçu par les élèves ???).*

2. Variables didactiques, milieux disponibles et connaissances

Cet extrait met clairement en évidence la complexité du travail demandé par rapport au niveau d'expertise atteint au secondaire sur les mêmes concepts, ainsi que la faible conscience qu'a le professeur des sauts conceptuels qu'il impose aux élèves de façon totalement implicite. En effet, la résolution d'une équation est connue : mais là, on cherche ses solutions dans un intervalle donné, et avec une valeur y quelconque et non numérique (ce qui est inexprimé dans le discours du professeur). De ce fait, la variable VD5 bascule car le traitement algorithmique numérique usuel n'est plus possible. VD3 est aussi modifiée car le degré de généralisation n'est plus le même, comme le prouve le passage où le professeur fait résoudre l'équation du second degré avec paramètres. Il s'ensuit que VD6 se complexifie également : le choix des techniques s'élargit, puisqu'il faut, à chaque étape du raisonnement, adapter la technique au nouveau résultat à prouver. On peut remarquer que VD7, sur les objets présents, change aussi : ainsi une équation du second degré devient un objet en soi, à référer à des courbes possibles pour donner des résultats généraux sur le signe d'une expression du second degré. Par ailleurs les types de raisonnement utilisés s'adaptent tout au long de la séance : détermination du signe de Δ que l'on saisit alors, non plus comme le discriminant de l'équation mais comme une fonction de y (VD8) ; on trouve ensuite un raisonnement par contre-exemple : x_2 peut prendre des valeurs négatives et ne peut donc convenir comme la réciproque de f de $\mathbb{R}$ dans $]2, +\infty[$; puis un raisonnement par condition nécessaire où la condition suffisante, qui seule complète pourtant le raisonnement, n'est pas explicitée.

On voit dans cet extrait comment le statut des objets bascule entre l'enseignement secondaire et l'enseignement supérieur : ainsi une banale équation du second degré donne-t-elle, par l'adjonction d'un paramètre, un discriminant Δ qui est lui même une fonction de y ; et pour trouver le signe de Δ on calcule à son tour son discriminant, puis on considère Δ comme une fonction dont il faut déterminer le signe…avec aide (?) du graphique. Cette itération de procédés, banale en mathématiques dès que l'on atteint un certain niveau, n'est absolument pas familière aux élèves du secondaire. De même le fait de pouvoir considérer un objet mathématique depuis des points de vue variables, ce qui est l'une des bases du calcul algébrique, n'est pas introduit avant l'enseignement supérieur.

Quel milieu les enseignants peuvent-ils mobiliser pour assurer le réinvestissement des connaissances antérieures des élèves et les conduire à une étape plus complexe du travail mathématique ? Dans Bloch (2000) nous avions remarqué que des professeurs de classes comparables (Mathématiques Supérieures option PCSI[2]) avaient recours, pour introduire les élèves au nouveau mode de travail exigé, à des stratégies variées, comme le recours à des explications "métamathématiques", ou le renvoi à la classe de questions sur la nature des

[2] Physique, chimie et sciences de l'ingénieur.

objets trouvés, et leur signification dans l'avancée du problème. Ces stratégies ne réussissaient à mobiliser qu'un petit nombre d'élèves – les meilleurs.

Ce qui pose problème, c'est donc :

- de savoir quand appliquer un théorème, et quelles sont les opérations préliminaires à faire pour que le théorème s'applique (VD6, VD7) ;
- de pouvoir itérer un théorème, en changeant le statut des objets successifs considérés dans la résolution, de façon à ce qu'ils puissent devenir à leur tour objets des prémisses du théorème ; il s'agit d'une propriété remarquable des objets mathématiques, qui leur permet d'être remis en jeu dans de nouveaux énoncés, mais qui n'est pas maîtrisée par les étudiants au début du cursus universitaire, et fait intervenir VD8 et VD9 ;
- de contrôler la complexité de ces opérations, sans perdre de vue le but à atteindre ;
- de s'assurer de la validité des théorèmes et propriétés utilisés, dans les cas particuliers concernés ;
- et durant tout ce processus, de ne pas perdre la maîtrise des calculs (VD1, VD2, VD3).

Les travaux que nous avons menés sur des corpus de cours d'enseignants de classes préparatoires montrent à l'évidence les mêmes problèmes de contrôle du sens des opérations successives faites en mathématiques dans des résolutions d'exercices (Bloch 2000). Ils montrent aussi l'absence fréquente d'un milieu pertinent pour enseigner ce contrôle et la nouvelle complexité en jeu.

3. Un problème de continuité

L'analyse de la deuxième partie de la leçon confirme les malentendus entre le professeur et les élèves : le professeur demande l'étude de la fonction définie par :

Si $x \neq 0, f(x) = \dfrac{|x|}{x}\sqrt{|x|}$, et $f(0) = 0$

Sont demandés sa continuité, son sens de variations, et une fonction réciproque. Les élèves considèrent majoritairement que f est définie en zéro donc continue en zéro (contrat didactique de l'enseignement secondaire). De plus la formule donnant la fonction pose manifestement problème à certains élèves : si $x > 0$, les élèves pensent que $f(x)$ est égal à $\sqrt{x}$, mais si $x < 0$, ils l'écrivent $-\sqrt{x}$. Pour ces élèves, comme l'exprime l'un d'eux : "$|x|$ ça ne peut pas être $-x$". Le professeur rectifie en $-\sqrt{-x}$ mais manifestement certains des élèves utilisent encore le signe 'moins' arithmétique : 'moins' signifiant 'négatif' et non 'opposé'.

Les élèves pensent ensuite que *f* est continue en zéro car sûrement dérivable, si bien que le professeur est amené à prendre position sur le fait qu'une fonction de ce type n'est pas, ou du moins pas de façon certaine, dérivable. La variable didactique relative à cette propriété n'est pas choisie de façon optimale car certes la fonction n'est pas dérivable mais la courbe admet bien une tangente (l'axe des *y*).

Le professeur propose en tant qu'aide de regarder la question suivante : celle-ci demande de montrer que la fonction est monotone sur IR. Des élèves annoncent alors que *f* est décroissante sur]-∞, 0 [, car $x \longmapsto -x$ est décroissante et racine carrée croissante ; à quoi le professeur répond que c'est ennuyeux, vue la formulation de la question, et le fait que f soit croissante sur] 0, +∞[! Le professeur aura beaucoup de mal à dévoluer la question de la continuité de *f* en zéro. Les élèves affirment ensuite que, si une fonction est continue sur une réunion d'intervalles, alors elle est continue sur l'intervalle entier… Dans le bref extrait qui est ici présenté, on peut faire l'hypothèse que le professeur chemine vers la résolution de son exercice par réfutations successives de propositions incorrectes basées sur les conceptions antérieures des élèves, et contre lesquelles il peine à construire un milieu efficace, qui amorcerait une modification du statut des objets.

Les élèves montrent ici une conception « algébrique » de la continuité, conception liée à leur perception des fonctions comme ne présentant pas d'« accidents de parcours ». Il y a là un passage délicat de la pensée algébrique à la pensée analytique, avec une remise en jeu également problématique des connaissances sur les nombres (Bloch et al. 2008).

IV. CONCLUSION

Les variables identifiées nous ont donc permis de pointer l'ampleur du décalage entre les savoirs mathématiques du secondaire et ceux qui sont mis en œuvre au début du cursus universitaire, que ce soit en France ou en Tunisie (avec un peu plus de formalisme en Tunisie). Le statut d'une notion comme la continuité a manifestement basculé d'un point de vue algébrique (« Toutes les bonnes fonctions sont continues et 'recollables' ») à une nécessité de disposer d'outils pour travailler et penser analytiquement.

En observant la modification des valeurs des variables, nous notons que les difficultés persistantes des élèves relativement au statut des objets en jeu ne peuvent être résolues par des déclarations du professeur, et nécessiteraient la construction de situations questionnant réellement la nature des objets et des énoncés. Quel milieu serait adéquat pour l'enseignement de ce contrôle épistémologique ? On peut ainsi imaginer de construire des exercices où le double statut des objets – d'outils du problème à objets d'étude donnant lieu à démonstration puis reconfiguration dans le problème posé – serait posé clairement comme enjeu de la pensée mathématique. Les autres enjeux n'en disparaitraient pas pour autant, comme l'accent mis sur les types de validation et la formalisation, et l'importance de travailler la différence entre pensée algébrique et pensée analytique.

REFERENCES

Artigue M. (1998) L'évolution des problématiques en didactique de l'analyse. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 18/2, 231-262. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Bloch I. (2000) *L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée / Université*. Bordeaux : Université Bordeaux I.

Bloch I. (2003) Teaching functions in a graphic milieu: What forms of knowledge enable students to conjecture and prove? *ESM* 52, 3-28.

Bloch I., Chiocca C.-M., Job P., Schneider M. (2008) Du numérique aux limites : quelle forme prend la transition secondaire/supérieur dans le champ des nombres et de l'analyse ? *Perspectives en didactique des mathématiques.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Bloch I., Schneider M. (2004) A various milieu for the concept of limit : from determination of magnitudes to a graphic milieu allowing proof. *ICME 10, Introduction to Topic Study Group 12 on Teaching Analysis*. Copenhagen (International Congress on Mathematics Education).

Bloch I., Ghedamsi I. (2004) The teaching of calculus at the transition between Upper Secondary School and University. *ICME 10, Communication to Topic Study Group 12.* Copenhagen (International Congress on Mathematics Education).

Bloch I., Ghedamsi I. (2005) Comment le cursus secondaire prépare-t-il les élèves aux études universitaires ? Le cas de l'enseignement de l'analyse en Tunisie. *Petit x* 69.

Bosch M., Fonseca C., Gascon J. (2004) Incompletitud de las organizaciones matematicas locales en las instituciones escolares. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 24/2.3, 205-250. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Bridoux S. (2005) *Analyse d'un enseignement de topologie en première année* d'université. Mémoire de DEA. Université Paris 7.

Castela C. (2000) Un objet de savoir spécifique en jeu dans la résolution de problèmes : le fonctionnement mathématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 20/3, 331-380. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chellougui F. (2007) Les paradoxes de la formalisation dans l'élaboration d'un concept clef dans la transition lycée/université. *Proceedings of EMF 2006*, University of Sherbrooke.

Dubinsky E. (1996) Reflective Abstraction in Advanced Mathematical thinking. In Tall (Ed) *(pp. 95-126) Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht : Kluwer.

Durand-Guerrier V. (2003) Which notion of implication is the right one? From logical considerations to didactical perspective. *Educational Studies in Mathematics* 53, 5-34.

Ghedamsi I. (2008) *Enseignement du début de l'analyse réelle à l'entrée à l'université*. Thèse de doctorat. Université Bordeaux 2.

Gueudet G. (2008) Investigating the secondary-tertiary transition. *Educational Studies in Mathematics* 67, 237-254.

Mamona-Downs J. (2001) Letting the intuitive bear on the formal; a didactical approach for the understanding of the limit of a sequence. *ESM*, 48, 259-288.

Maschietto M. (2001) Fonctionnalité des représentations graphiques dans la résolution de problèmes d'analyse à l'Université. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 21/1.2, 123-156. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Maurel M (2001) Derrière la droite, l'hyperplan. *Repères IREM* 42, 83-114.

Maurel M, Sackur C. (2002) La presqu'île - Une introduction aux fonctions de deux variables en DEUG. In Dorier J.-L. et al. (Eds) (pp. 167-175) *Actes de la XIème Ecole d'été de didactique des mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Maurel M., Sackur C., Drouhard J.-P. (2001) Le symbolisme de l'algèbre dans l'approche de l'analyse. In Drouhard J.-P., Maurel M. (Eds) *Actes du XVIème Séminaire Franco-italien de Didactique de l'Algèbre*. Nice : Université de Nice.

Praslon F. (2000) Continuités et ruptures dans la transition entre Terminale S et DEUG Sciences en Analyse. L'exemple de la notion de dérivée et son environnement. Thèse de doctorat. Université Paris 7.

Robert A. (1998) Outils d'analyse des contenus à enseigner au lycée et à l'Université. *RDM* 18-2, 139-189.

Sackur C. (2000) Experiencing the necessity of the mathematical statements. *Proceedings of the 24th Conference of PME,* Hiroshima, Japan, IV 105-112.

Sackur C., Assude T., Maurel M., Drouhard J.-P., Paquelier Y. (2005) L'expérience de la nécessité épistémique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 25/1, 57-90.

Schneider M. (2001a) Praxéologies didactiques et praxéologies mathématiques: à propos d'un enseignement des limites au secondaire. *Recherches en didactique des mathématiques*, 21/1.2, 7-56. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Schneider M. (2001b) Un exemple d'ingénierie didactique relative à l'analyse mathématique, passée au crible de concepts de la didactique. In Mercier A., Lemoyne G., Rouchier A. (Eds) (pp. 179-208) *Le génie didactique.* Bruxelles : De Boeck.

Vandebrouck F, Cazes C. (2004) *Actes du colloque TICE* :
http://archive-edutice.ccsd.cnrs.fr/docs/00/02/75/92/PDF/Vandebrouck_Cazes.pdf

SENSIBILISATION A L'ABDUCTION EN STATISTIQUE

Pablo CARRANZA*

Résumé – Dans cette synthèse nous nous intéressons à l'abduction et sa relation avec le théorème de Bayes, et ceci d'un point de vue statistique. Plus précisément, nous aborderons quelques questions liées à l'enseignement (et à l'apprentissage) de ce théorème en tant qu'outil modélisant le raisonnement par abduction.

Mots-clefs : enseignement, statistique, abduction, bayes, probabilité

Abstract – In this article we focus on the abduction and its relationship to the Bayes theorem, always from a statistical point of view. Specifically, we discuss some issues related to education (and training) of this theorem as a tool for modeling the reasoning by abduction.

Keywords: education, statistics, abduction, bayes, probability

I. INTRODUCTION

Pour mieux développer le sujet de l'abduction et le thèoreme de Bayes (et quelques possibilités de sa sensibilisation en classe, nous trouvons nécessaire de commencer par présenter l'approche statistique encadrant cette question. En effet, en Statistique inferentielle existe une approche connue comme inférence bayésienne pour laquelle le théorème de Bayes devient une méthode permettant de formaliser une inférence abductive. Nous esquisserons quelques éléments de cette approche pour après nous centrer sur plusieurs potentialités et difficultés rencontrées lors de nos successives expérimentations sur le théorème de Bayes en tant que modèle de raisonnement par abduction (étudiants âgés de 18 à 22 ans).

Pour résumer l'approche bayesiénne, nous allons consacrer quelques lignes à la pierre angulaire de l'inférence statistique : la probabilité. Nous proposons au lecteur non familiarisé avec le sujet, de penser la probabilité comme étant un objet à deux dimensions, l'une calculatoire, l'autre sémantique (**Figure 1**).

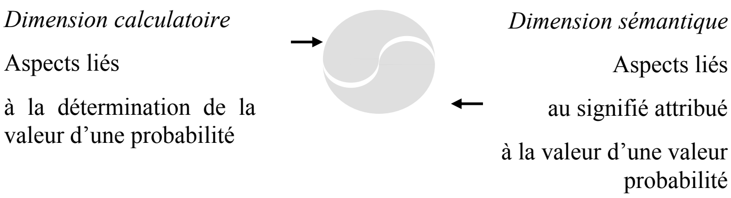


***Figure 1** – Dimensions de la probabilité*

Dans la dimension calculatoire nous plaçons les aspects liés à la détermination de la valeur d'une probabilité. Dans la dimension sémantique, ceux agissant sur son signifié. Bien que les deux dimensions soient constitutives du concept de probabilité, la deuxième détermine les possibilités de la première. Cette sorte de dépendance de la dimension calculatoire à la dimension sémantique met en évidence l'importance de cette dernière. Tout de suite, nous ferons donc une sommaire présentation de la dimension sémantique.

Il est assez admis en Statistique qu'il existe deux grands groupes interprétatifs pour la probabilité, l'un connu comme frequentiste, l'autre comme bayésien (Dale 1999; de Finetti 1937; Hacking 2002; Jeffreys 1939; Jordan 1926; Neyman 1977; Popper 1959; von Mises 1966). Le premier nous parle d'une caractéristique d'une série infinie de répétitions d'une

* Universidad Nacional de Río Negro – Argentine – pfcarranza@gmail.com

© CARRANZA, Pablo (2012) Sensibilisation à l'abduction en Statistique. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT3, pp. 404–413). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

épreuve, le deuxième d'une mesure d'une certitude partielle. Cette caractéristique de la probabilité d'admettre deux interprétations a existée depuis son émergence même et elle est connue comme « dualité de la probabilité » (Dale 1999; Hacking 2002).

Il devient parfois difficile de séparer ces deux interprétations, et ceci à cause de leur forte relation sur la dimension calculatoire (Carranza 2009; Gärdenfors et al. 1988; Hacking et Dufour 2004; Keynes 1921). Malgré cette difficulté, nous allons retenir ici juste l'approche bayésienne de la probabilité, dont nous proposons ci-dessous une brève description.

II. PROBABILITÉ BAYESIENNE

Pour cette approche, la valeur d'une probabilité représente donc une mesure de la certitude partielle portée par un individu sur une proposition donnée. De cette manière si par exemple Mademoiselle Camila attribue une valeur de probabilité de 70% à la proposition « ma vache laitière aura un accouchement normal ce printemps », c'est parce qu'elle croit plutôt que tout se passera assez bien pour sa vache, même si elle garde ses réserves devant des possibles complications. On comprend mieux l'appréciation de Camila sur la nature de ce futur événement si l'on se rappelle les deux valeurs extrêmes de probabilités : le zéro et le un. Le premier représentant ici la certitude que rien n'ira bien, le deuxième celle qu'il sera impossible que quelque chose se passe mal.

Cette présentation ne constitue pas une définition de la probabilité bayésienne. Pour cela, nous renvoyons au lecteur à s'intéresser à des travaux consacrés au sujet (Cox 1946; de Finetti 1937; Hacking 2002; Jaynes 1995; Keynes 1921; Shafer 1994). Bien que nous admettions les limites d'une définition de la probabilité bayésienne comme étant une mesure de certitude partielle, elle nous semble suffire pour au moins mettre en évidence deux aspects qui nous intéressent retenir ici : l'un concerne le caractère subjectif de la valeur d'une probabilité bayésienne, l'autre, sa dépendance à l'information disponible.

En effet, il n'est pas nécessaire que Camila porte le même degré de certitude que, par exemple, le vétérinaire responsable du soin de sa vache. Il n'est pas nécessaire non plus que Camila garde la même appréciation lorsque l'accouchement s'approche. Pour la probabilité bayésienne, il est possible tant des variations interpersonnelles que des variations intra personnelles. Tout cela s'explique car la mesure de certitude est précisément une appréciation personnelle, au même temps qu'elle est conditionnée à l'information disponible.

Ces possibles différences lors de l'évaluation d'une probabilité sont d'importance dans le contexte bayésien. Elles nous renvoient à deux questions: Comment fait-on alors pour quantifier une probabilité ? Et quels critères pour son évolution lors de l'arrivée d'une nouvelle information? Nous aborderons maintenant la première question. Pour ce qui concerne la deuxième, c'est précisément le théorème de Bayes qui apporte une possible réponse.

La quantification d'une certitude partielle prend en compte des stratégies différentes selon la nature de la proposition en question. Nous avons identifié deux grandes sortes de propositions. L'une nous l'avons appelé « événement générique », l'autre « hypothèse » (Carranza 2009). Les événements génériques se caractérisent par la facilité avec laquelle il nous est possible de nous représenter la répétition de l'épreuve sous des conditions relativement similaires. Un cas typique est constitué par le lancer d'un dé équilibré ou celui d'une punaise. De cette manière, le fait qu'il puisse être facile de concevoir la répétition du lancer nous permet de trouver un ensemble dans lequel inscrire le résultat. Et vu qu'il n'y a aucune information spécifique sur ce lancer, il devient un lancer générique. De cette manière, cet ensemble devenant référence, il nous permet de quantifier notre degré de certitude.

Par exemple, et pour le cas du dé équilibré, on peut trouver un ensemble de référence même avant le lancer du dé. En effet, en l'admettant équilibré, on peut déduire l'équiprobabilité des ses faces, de cette manière, l'ensemble de référence permettant la quantification est celui de cas possibles (et des favorables).

Dans le cas du dé équilibré, l'ensemble de référence est fini. Mais il y en a d'autres qui sont infinis (en théorie). C'est le cas de la punaise dont, pour évaluer la probabilité de « pointe », on fait appel à la fréquence avec laquelle apparaît cet événement lorsque l'on la lance un nombre infini de fois (ou un grand nombre de fois, le cas échéant).

Pour des raisons d'espace il nous est impossible rentrer en détails sur ce sujet, mais nous voudrions quand même retenir deux idées: a) un événement générique se constitue lorsqu'il est aisément possible de concevoir la répétition de l'épreuve sous des conditions similaires, b) cette possibilité de répétition renvoie immédiatement à un ensemble de référence aidant à la « mise en nombre » de la certitude partielle d'un individu. Ce procédé d'évaluation est largement utilisé en probabilité, et ceci depuis longtemps (Condorcet 1805; Laplace 1795; Leibniz 1765; Nicole et Arnaud 1662).

L'autre type de propositions sur lequel on peut probabiliser est celui que nous avons appelé « hypothèse ». Ce genre de propositions se caractérise comme étant le complément des « événements génériques ». En d'autres termes, lorsqu'il n'est pas possible de se représenter aisément la plausibilité de la répétition de l'épreuve, au moins sous des conditions acceptablement similaires. C'est précisément cette impossibilité de concevoir sa répétition qui écarte l'existence d'un ensemble de référence aidant à la mise en nombre de la mesure de certitude partielle. Ainsi, sans une référence universelle, diverses sources d'évaluation apparaissent : l'expertise personnelle, l'information disponible autour du sujet, etc.

Plusieurs auteurs ont essayé de formaliser ces démarches de quantification en proposant des critères d'évaluation générale. Un de ces critères est connu comme le principe de raison insuffisante (Keynes 1921), dont les origines remontent très probablement aux travaux de Leibnitz (Leibniz 1765). Ce principe propose d'attribuer la même probabilité à chacune des hypothèses si l'on ne dispose pas d'information permettant de privilégier l'une sur les autres.

C'est précisément ce genre de situations que nous avons considéré pour aborder la question du théorème de Bayes en tant que modèle pour une démarche abductive. Il s'est agi alors d'un problème pouvant se caractériser comme du type « hypothèse » dont les étudiants ont été invités à reconsidérer les mesures de certitude en fonction de l'arrivée de nouvelle information sur le système.

C'est précisément lorsque les étudiants ont dû reconsidérer leurs mesures de certitude que l'abduction émergeait. Le théorème de Bayes est apparu alors comme un modèle normatif pour aborder une démarche abductive. Mais avant de rentrer dans les expérimentations effectuées, nous allons pointer sur quelques éléments de ce genre de raisonnement et de sa relation avec le théorème de Bayes.

III. ABDUCTION ET THEOREME DE BAYES

La littérature semble accorder à Charles Senders Peirce (Peirce 1932) le terme « abduction ». Il y a néanmoins quelques controverses sur les idées que Pierce a souhaité réunir sous ce mot (Engel-Tiercelin 1992; Fann 1970). Nous retiendrons ici une des acceptions les plus répandues actuellement, même si Peirce ne s'y voyait pas entièrement représenté. Cette acception nous parle d'un type de raisonnement caractérisé par une inférence à la meilleure explication (Harman 1965; Schield 1997). En autres termes, un procédé argumentatif pour lequel une (ou plusieurs) hypothèses se voient renforcées par leurs pouvoirs explicatifs d'une évidence constatée.

Dans ce raisonnement interviennent alors deux types de propositions, les évidences (E) et les hypothèses (H), les dernières devenant des possibles modèles d'une partie du monde, les premières représentant les indices ou observables de ce monde (Kapitan 1992). Cette question intéresse beaucoup les statisticiens (Hacking 1965), et ceci depuis long temps (Bayes 1763; Jeffreys 1963; Jordan 1926; Laplace 1771; Robert 2006).

Tout semble indiquer que c'est à partir du théorème de Bayes (Bayes 1763) que les statisticiens ont trouvée une manière d'aborder cette question historique. Même plus, les partisans de cette approche affirment que devant l'ampleur des contradictions constatées lorsque les individus entreprennent une démarche abductive, le théorème de Bayes devient un procédé objectif, une sorte de modèle normatif pour l'abduction (Cox 1946; Iversen 2001; Jaynes, 1980). Nous essayerons de résumer de quelle manière le théorème de Bayes modélise le raisonnement par abduction, pour l'illustrer nous nous servirons du problème proposé à nos étudiants.

Imaginez un professeur de mathématique mettant des pièces de monnaie de vingt cinq centimes sur une des tables de la classe. En Argentine en particulier, ces pièces pouvant être, soit de couleur « bronze » (B) soit de couleur « aluminium » (A). Imaginez aussi que cet enseignant en prend quatre et qu'il les introduit dans un gobelet. Le professeur, ayant empêché les élèves de voir les pièces de monnaie choisies, il leur pose la question sur les couleurs de ces pièces de monnaie[1].

Cinq hypothèses se présentent comme possibles : H_1 :BBBB, H_2 :BBBA, H_3 :BBAA, H_4 :BAAA, H_5 :AAAA. L'enseignant propose aux élèves d'analyser combien ils croient en chacune de ces hypothèses. Pour exprimer leurs appréciations, chaque élève (ou binôme...) pourra se servir de, par exemple, 20 morceaux de papier. De cette manière, s'ils croient plus en une composition qu'en une autre, ils doivent assigner plus de morceaux de papier à l'une qu'à l'autre. Imaginez alors qu'après que les élèves se soient exprimés à travers leurs 20 morceaux de papier, l'enseignant remue le gobelet et sans regarder à l'intérieur, il prend une pièce de monnaie. Puis il montre aux élèves la pièce en question (admettons du type A) et après il la remet dans le gobelet.

Apres cela, l'enseignant relance la question sur les « chances » que chaque élève attribue aux compositions possibles, maintenant que l'on a appris que dans le gobelet il y a une pièce du type A. De cette manière, les élèves concluent une sorte de cycle, dont ce qu'ils croyaient à un moment donné (probabilités *a priori*), est révisé en fonction de l'évidence constatée. Cette révision conduit a une (éventuellement) nouvelle distribution des degrés de certitude (probabilité *a posteriori*).

Imaginez que ce cycle se répète, et que l'enseignant prend pour la deuxième fois une pièce de monnaie (admettons B). Voilà donc un nouveau cycle qui démarre, dont les probabilités *a priori* sont celle de l'*a posteriori* du cycle précédant. De cette manière, l'arrivée de la nouvelle information (B) interpelle les probabilités *a priori*. Cette interpellation est résolue par des arguments abductifs, dont les hypothèses expliquant au mieux les évidences se voient renforcées, de la même manière que celles de moindre pouvoir explicatif se voient affaiblies.

[1] Le lecteur trouvera des ressemblances entre ce problème et un autre largement connu dans la littérature didactique française (Brousseau, Brousseau, & Warfield, 2001). Néanmoins ils sont quelque part différents, celui de ces auteurs a pour intention le traitement de la probabilité fréquentiste, tandis que le nôtre vise la notion bayésienne de la probabilité.

Dans un contexte bayésien, les « états de connaissance partielle » ou degrés de certitude, se représentent par des probabilités : celles qui précèdent l'information ($P(H_i)$, probabilités *a priori*) et celles qui la suivent ($P_{\inf}(H_i)$, probabilités *a posteriori*).

Le passage de l'une vers l'autre est donné par un rapport, celui du pouvoir explicatif de l'hypothèse en question ($P_{H_k}(\inf)$) sur l'attente moyenne de cette information ($P(\inf)$). De cette manière, si l'évidence (inf) est plus probable sous une hypothèse donnée (H_k) que sous une autre (H_j), alors la première devient plus crédible que la deuxième ($P_{\inf}(H_k) > P_{\inf}(H_j)$) . En résumé, le modèle normatif de Bayes pourrait se représenter comme suit :

$$\boxed{P_{\inf}(H_i)} = \frac{P_{H_i}(\inf)}{P(\inf)} \times \boxed{P(H_i)}$$

Probabilité *a posteriori* (Après l'evidence)	Probabilité *a priori* (Avant l'évidence)

***Figure 2** – Cycle bayésien*

A chaque cycle de révision de mesures de certitudes un procédé abductif est convoqué. Il permet le passage de l'avant vers l'après de l'évidence. De cette manière, l'algorithme de Bayes devient un procédé objectif pour ce passage. C'est précisément avec cette intention que nous l'avons présenté à nos étudiants : devant la diversité d'arguments possibles et même parfois contradictoires justifiant les modifications des distributions de probabilités, l'expression de Bayes devient une méthode objectivant cette démarche, méthode qui se base sur le pouvoir explicatif de chacune des hypothèses.

Nous venons de résumer la manière pour laquelle le théorème de Bayes règle le passage d'une distribution de probabilités *a priori* vers une autre *a posteriori* et ceci par des arguments abductifs. Nous présenterons maintenant quelques conclusions autour de nos expérimentations successives du problème en différents cours de Statistique (étudiants âgés de 18 à 22 ans) pour apprès en proposer quelques conclusions.

IV. SUR LE PROBLÈME EXPERIMENTÉ

Le problème proposé aux étudiants a été déjà esquissé dans les sections précédentes : l'enseignant prend quatre pièces de monnaie (les possibilités étant en bronze (B) ou en aluminium (A)) et en cachant la action aux étudiants, les introduit dans un gobelet. Puis, il demande leurs avis sur la proportion de pièces à l'intérieur du gobelet. L'enseignant donne ensuite des « aides » aux étudiants : après leur avoir demandé leurs premiers avis sur la composition possible, il prend au hasard une pièce de monnaie du gobelet et la montre à la classe, puis il la remet dans le gobelet. A chaque fois qu'il montre une pièce il relance la question à la classe sur les possibles hypothèses et leurs probabilités. Après un certain nombre de cycles, le problème finit avec un bilan centré en général sur deux axes, l'un agissant sur les arguments évoqués par les étudiants et le théorème de Bayes en tant que modèle pour l'évolution des probabilités ; l'autre sur l'incertitude et les prises de décisions sous des critères rationnels.

Les expérimentations nous servant de référence à cette synthèse se sont menées les unes en France, les autres en Argentine. Dans le premier cas, une a été l'objet d'une analyse dans le cadre de notre thèse doctorale (Carranza 2009), elle s'est menée l'année 2007 dans un BTS Èlectrotechnique, l'autre à mode de pre-expérimentation de la précédente dans un lycée (dernière année, orientation Scientifique) de la région parisienne. Dans le deuxième cas (Argentine), les expérimentations ont eu lieu dans un contexte universitaire (Licence en Commerce internationnale et Ingénierie en Aliments), les étudiants âgés en général de 18 à 22 ans. Dans la plupart de cas, les principes des approches tant frequentiste que bayésienne de la probabilité déjà avaient été abordés. Par la suite, nous développerons quelques parties importantes du problème accompagnées d'un ensemble de conclusions tirées de nos expérimentations. Nous commencerons par la première distribution *a priori.*

Pour la première distribution *a priori* nous avons expérimenté deux grandes voies. Dans l'une, l'enseignant pouvait voir l'ensemble de pièces de monnaie duquel il en prend quatre. Dans l'autre, les pièces restaient cachées. Dans le premier cas, les pièces de monnaie étaient sur une des tables de la salle, éloignée des étudiants[2] ; dans le deuxième, à l'intérieur d'un sac opaque. Ces deux grandes possibilités agissent comme une sorte de variable didactique. La première facilite chez les étudiants des arguments plus « subjectifs » que la deuxième.

Lorsque les étudiants sont interpellés sur les raisons des choix de la première distribution *a priori*, les réponses en général se polarisent sur trois axes :

a) Principe de raison insuffisante. Dans ce cas, les étudiants expliquent manquer des éléments pour privilégier une ou plusieurs hypothèses. La distribution de probabilités est ici équi-répartie.

b) Principe de l'entropie maximale. Quelques étudiants n'assignaient pas les mêmes probabilités à toutes les hypothèses. Bien au contraire, les unes leurs semblaient plus probables (AABB) que les autres (AAAA, BBBB) car « dans la première il y a plus de hasard » que dans les autres. De cette manière des arguments proches à l'entropie de la série sembleraient avoir été évoqués (Bretthorst 1990; D'Agostini 2003; Gärdenfors et al. 1988; Hacking 2002; Jaynes 1980; Jaynes 1995). Dans ce cas, la distribution de probabilités est du type pyramidale, dont l'hypothèse plus probable est celle contenant 2 pièces du type A et deux du type B.

c) Intentionnalité de l'enseignant. Ces étudiants pensent que l'enseignant est intéressé à la composition (AABB) et non pas par exemple a la composition (AAAA), ceci leur mène à proposer une distribution de probabilités *a priori* du type pyramidal. Ces appréciations des étudiants, pertinentes d'ailleurs, ont été fréquentes dans les cas dont l'enseignant prend les pièces sur la table, et elles mettent en évidence les conditions complexes entourant l'évaluation d'une probabilité bayésienne.

Une fois la première distribution *a priori* terminée, l'enseignant, rappelons-le, fournit la première « aide » : il remoue le gobelet et prend une pièce de monnaie pour après la montrer à la classe. Dans toutes nos expérimentations l'enseignant a bien mis en évidence le caractère aléatoire de l'extraction de la pièce du gobelet. En d'autres termes, il a toujours évité de donner des indices permettant aux étudiants de soupçonner un possible contrôle sur la couleur

[2] Les pièces de monnaie éloignées empêchaient les élèves de connaître la proportion de chaque couleur. Ceci cherchait à bloquer la possibilité d'estimer la probabilité de chaque composition possible fondée sur cette proportion (estimations de loi binomiale ou hypergéométrique selon le cas).

obtenue. Ceci constitue une autre variable didactique, et dans notre cas, nous avons eu l'intention de ne pas interpeller chez les étudiants les probabilités de l'évidence ($P_{H_k}(\inf)$)[3].

Après la pièce montrée à la classe, l'enseignant invite les étudiants à éventuellement reconsidérer leurs distributions *a priori*. Pour n'importe quelle couleur obtenue, une des hypothèses monochromatiques devient impossible. Le reconnaître ne leur pose pas des problèmes, c'est en fait la manière de redistribuer les morceaux de papiers (probabilités des hypothèses) qui ne fait pas l'unanimité. Deux questions nourrissent les débats : d'une part ils s'interrogent sur la relocalisation des morceaux de papier enlevés de l'hypothèse devenue impossible, d'autre part ils ne se sentent pas sûrs de vouloir modifier le nombre de morceaux assignés aux hypothèses encore possibles. Ces questions sont essentielles, elles mettent en évidence en tout cas l'émergence d'arguments abductifs. Par exemple, admettons que la pièce montrée à la clase soit du type A, cette information devrait non seulement permettre d'écarter l'hypothèse (BBBB) mais aussi elle devrait renforcer celles dont A est plus présente, en particulier l'hypothèse (AAAA). Les arguments permettant d'arriver à cette conclusion sont du type abductif. En effet, l'évidence A est plus probable sous l'hypothèse (AAAA) que sous toutes les autres, de cette manière la constatation d'A la renforce. La première partie de cet enchaînement argumentatif est largement partagé par les étudiants en général ($P_{AAAA}(A) > P_{AAAB}(A) > ...$), c'est la deuxième partie la plus coûteuse à être acceptée ($P_A(AAAA) > P_A(AAAB) > ...$). Cette résistance devient plus évidente chez les étudiants ayant choisi une première distribution de probabilités équi-répartie. En d'autres termes, ceux qui se sont basé sur le principe de raison insuffisante trouvent des difficultés à trancher devant l'évidence. Tout semble indiquer que la position de neutralité atteinte par les arguments du principe de raison insuffisante a du mal à être quittée.

Pour que l'évidence interpelle cette position de neutralité accompagnant le principe de raison insuffisante, il nous a fallu en général attendre la troisième évidence ou même la quatrième dans certains cas. C'est à ce moment-là que les informations successives fournies finissent par débloquer les étudiants : en se voyant obligés de les prendre en compte, par la force de l'évidence, ils modifient leurs probabilités accompagnant les choix par des arguments abductifs. Cette résistance chez les étudiants s'étant servi du principe de raison insuffisante a été généralisée tout au long de nos expérimentations. Ce phénomène n'a pas été observé avec la même persistance chez ceux s'étant servi d'autres arguments (et d'autres distributions de probabilité).

D'ailleurs, notre objectif principal pour ces séances a été de sensibiliser les étudiants au théorème de Bayes en tant que procédé normé du raisonnement par abduction. Les détails concernant les calculs, même si fondamentaux, n'étaient pas visés dans ces expérimentations. Travailler avec les étudiants les aspects sémantiques et calculatoires du théorème de Bayes dans une seule (et première séance) nous a toujours paru excessif. Nous avons donc renvoyé ces derniers à un deuxième moment que nous n'aborderons pas ici. C'est précisément le choix de centrer le travail sur les aspects sémantiques de l'expression de Bayes qui nous a mené à proposer les morceaux de papier comme moyen représentant les mesures de certitudes. En effet, l'imprécision du moyen de representation des mesures de certitude (morceaux de papier) cherche à ecarter l'eleve de l'intérêt pour la représentation numérique de la probabilité, au moins dans un premier moment. De toutes manières, et tel que nous l'avons prévu, après la troisième extraction d'une pièce du gobelet, les morceaux de papier

[3] Si les étudiants avaient perçu une intentionnalité de la part de l'enseignant à choisir une couleur ou une autre lors de l'extraction de la pièce, le critère d'évaluation de la probabilité de cette couleur aurait été interpellé. Nous avons préféré ne pas le faire et laisser cette probabilité sans la remettre en question. Les étudiants l'ont évaluée donc par le rapport de cas favorables sur les cas possibles (Laplace 1795).

deviennent insuffisants pour représenter les petits changements de degré de certitude souhaités par les étudiants.

A ce moment, et toujours sans l'intervention de l'enseignant, les étudiants changent progressivement de moyen de représentation et choisissent en général des fractions pour leurs probabilités. Ce terme d'ailleurs, est largement utilisé par les étudiants à ce stage de la séance. Lorsque le passage au nombre est assuré (troisième extraction dans la plupart des cas), l'enseignant propose un bilan partiel du travail effectué. De cette manière des sujets tels que les probabilités *a priori* et *a posteriori* sont discutés. Ce moment de bilan sert aussi à aborder les principes du raisonnement par abduction émergés lors des débats, ainsi qu'une brève présentation du théorème de Bayes en tant que méthode normant ce procédé argumentatif.

Ceci fait, l'enseignant invite la classe à continuer la discussion en se servant de l'ordinateur. Pour cela, un fichier du type feuille de calcul a été préparé à l'avance. La **Figure 2** montre une capture d'écran du fichier proposé aux étudiants.

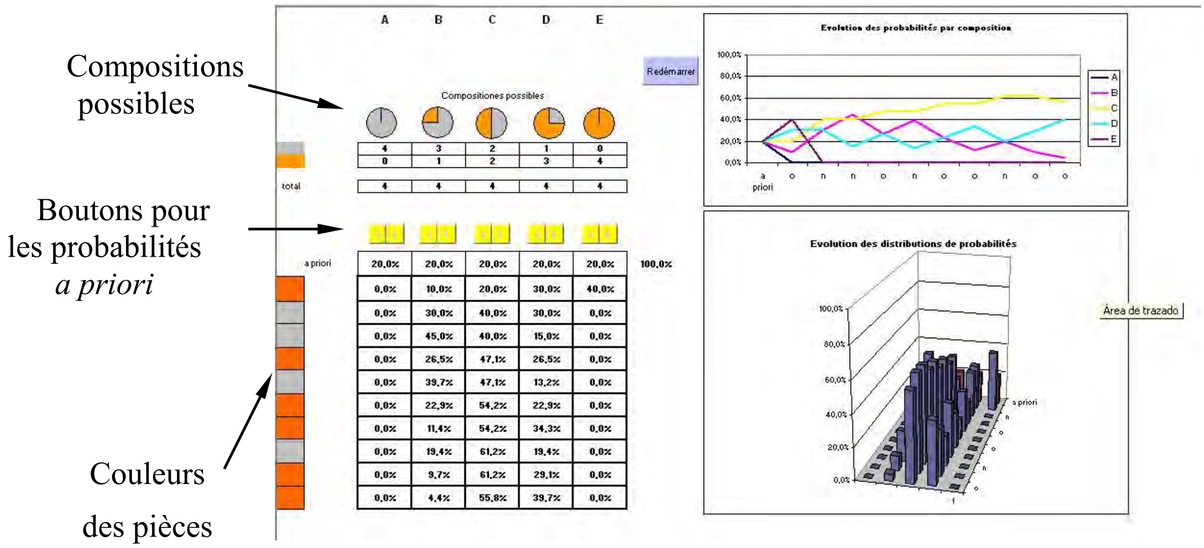


Figure 2 *- Capture d'écran de la feuille de calcul*

La feuille montre les cinq compositions possibles (en haut à gauche). Pour l'activer les étudiants doivent indiquer leurs premières distributions *a priori* (boutons) et puis préciser une par une les couleurs des pièces de monnaie observées (colonne à gauche). A chaque fois qu'ils ajoutent l'information de la couleur, l'algorithme rend les respectives probabilités *a posteriori*. L'évolution de ces probabilités est automatiquement graphiquée en deux vues différentes. La **Figure 2** montre l'image projetée sur l'ordinateur lorsque l'on a introduit une première distribution de probabilités équi-répartie (principe de raison insuffisante) avec la série de couleurs B, A, A, B, A, B, B, A, B, B. Avec cette information fournie, l'‘expression de Bayes donne les probabilités suivantes :

	Hypothèses possibles		
	BAAA	BBAA	BBBA
Probabilités *a posteriori*	4,4 %	55,8 %	39,7%

Table 1 *- Dernière distribution de probabilité a posteriori*

En amont de l'enjeu principal du problème proposé aux étudiants, la feuille permet de discuter sur d'autres aspects importants liés au modèle inférentiel bayésien. Par exemple, il est possible à tout moment de modifier les premières probabilités *a priori*. Une fois que la feuille a vérifié que cette première distribution satisfait les axiomes de Kolmogorov, elle calcule les successives distributions de probabilités *a posteriori*. Ceci permet de mettre en évidence l'importance de cette première distribution de probabilités. Lors de nos expérimentations, les étudiants ont introduit leurs propres données et observés les effets sur les successives distributions. Dans ce sens, ceci a permis de constater la proximité des distributions finales de probabilités, malgré les différences dans les premières distributions *a priori* (Cox 1946; Jaynes 1995).

Il est possible aussi d'interagir sur les couleurs, de cette manière, en les changeant, les étudiants observent les effets sur les probabilités. Lors de nos expérimentations, nous nous en sommes servis pour resignifier avec les étudiants des concepts tels que la probabilité conditionnelle, la probabilité totale et l'indépendance et dépendance entre événements. Il est possible d'observer cette dernière en comparant les cellules successives sur une même colonne.

Enfin, les conclusions tirées de nos experimentations autour du sujet nous ont permis de constater d'une part que la dualité de la probabilité est un sujet plausible d'être sensibilisé en classe. Et d'autre part, que l'association du thèoreme de Bayes à une modelisation du raisonnement par abduction est un choix possible permettant de donner de sens Statistique à cette expression mathématique.

Dans ce sens, le sujet nous semble pertinent aux preocupations du GT3. En particulier aux deux des trois principaux axes de travail de ce groupe. En effet, l'approche donnée ici à l'expresion de Bayes agit directement sur un type general de pensée mathématique (le stocastique) mais aussi sur les possibilités de son enseignement.

D'ailleurs, nos experimentations nous ont renseignés que si bien un tel travail en classe est possible, il pose des nombreusses questions sur l'enseignement en classe de mathématiques, telles que celle la validation, le changement de contrat didactique et d'autres conflits provenant du changement de paradigme epistemologique implicant le traitement en classe de Mathématiques de notions de Statistique.

REFERENCES

Bayes T. (1763) An essay towards solving a problem in the doctrine of chances. *Philosophical Transactions of The Royal Society*.

Bretthorst G. L. (1990) An introduction to parameter estimation using bayesian probability theory. *Maximum entropy and bayesian methods*, 53-79.

Brousseau G., Brousseau N., Warfield V. (2001) An experiment on the teaching of statistics and probability. *The Journal of Mathematical Behavior* 20(3), 363-411.

Carranza P. (2009) *La dualité de la probabilité et enseignement de la statistique. Une experience en bts.* Paris VII Denis Diderot, Savoirs Scientifiques: Epistemologie, histoire des sciences, didactique des disciplines.

Condorcet J.-A.-N. (1805) *Eléments du calcul des probabilités* (F.-J.-M. Fayolle, Trans.). Paris: Fayolle F.-J.-M.

Cox R. T. (1946) Probability, frequency, and reasonable expectation. *American Journal of Physics* 14, 1-13.

D'Agostini G. (2003) Bayesian inference in processing experiemtal data. *Progress in physics* 66.

Dale A. (1999) *A history of inverse probability: From Thomas Bayes to Karl Pearson*. New York: Springer-Verlag.

De Finetti B. (1937) La prévision: Ses lois logiques, ses sources subjectives. *Annales de l'I.H.P,* Vol. 7, 1-68. Numdam.
Engel-Tiercelin C. (1992) Vagueness and the unity of c. S. Peirce's realism. *Transactions of the C. S. Peirce Society* 28, 51-82.
Fann K. T. (1970) *Peirce's theory of abduction*. La Haya: Martinus Nijhoff.
Gärdenfors P., Sahlin N.-E., Ramsey F., Luce D., Raiffa H., Savage L. et al. (1988). *Decision, probability and utility*. Cambridge: Cambridge University Press.
Hacking I. (1965) *The logic of statistical inference*. New York: Cambridge University Press.
Hacking I. (2002) *L'émergence de la probabilité*. Paris: Seuil.
Hacking I., Dufour M. (2004) *L'ouverture au probable*. Paris: Armand Colin.
Harman G. (1965. The inference to the best explanation. *The Philosophical Review* 74(1), 88–95.
Iversen G. (2001) Bayesian models and world constructs. *Training Researchers in the Use of Statistics*, 103-112.
Jaynes E. (1980) What is the question in bayesian statistics? In Bernardo J. M,. deGroot M. H,. Lindly D. V,. Smith A. F. M (Eds) (ch.13) *Bayesian Statistics*. Valencia: Valencia Univ. Press.
Jaynes E. (1995) *Probability theory: The logic of science* (2003 ed.) St. Louis U. S. A.: Washington University.
Jeffreys H. (1939) *Theory of probability* (1960 ed.). Oxford: University Press.
Jeffreys H. (1963) Review of the foundations of statistical inference by l. J. Savage. *Technometrics* 5, 407-410.
Jordan C. (1926) Sur la probabilité des épreuves répétées, le théorème de Bernoulli et son inversion. *Bulletin de la S.M.F.* 54, 101-137.
Kapitan T. (1992) Peirce and the autonomy of abductive reasoning. *Erkenntnis 37*, 1-26.
Keynes J. M. (1921) *A treatise on probability*. London: MacMillan and Co.
Laplace P. S. (1771) Mémoire sur la probabilité des causes par les événements. *Mémoires de l'Academie royale des sciences de Paris, VI*.
Laplace P. S. (1795) *Essai philosophique sur les probabilités* (1816 éd.). Paris: Pour les mathématiques et la Marine.
Leibniz G. W. (1765) *New essays concerning human understanding* (A. Langley, Trans. 1916 -d. Vol. 1). Chicago: The Open Court Publishing Company.
Neyman J. (1977) Frequentist probability and frequentist statistics. *Synthese 36*, 97-131.
Nicole P., Arnaud A. (1662) *La logique de Port Royal* (A. Fouillée, Trans. 1878 ed.). Paris: Librairie Classique d'Eugène Belin.
Peirce C. S. (1932) *Collected papers*. Cambridge Mass.
Popper K. R. (1959) *The logic of scientific discovery*. London: Hutchinson.
Robert C. (2006) *Le choix bayesien. Principes et pratique*. Paris: Springer.
Schield M. (1997) Interpreting statistical confidence. *American Statistical Association*.
Shafer G. (1994) The subjective aspects of probability. In Wiley G., Ayton W., Ayton P. (pp. 53-73) *Subjective probability*.
Von Mises L. (1966) *Human action: A treatise on economics* (4° ed.). Chicago: Contemporary Books.

VERITE MATHEMATIQUE ET VALIDITE LOGIQUE PERSPECTIVES EPISTEMOLOGIQUE ET DIDACTIQUE

Viviane DURAND-GUERRIER*

Résumé – Dans cette communication, nous défendons l'importance de la prise en compte des relations entre vérité mathématique et validité logique dans l'activité mathématique. Dans un premier volet nous présentons brièvement le point de vue sémantique en logique : son essor à partir de Frege ; les apports de Wittgenstein et Tarski sur l'articulation entre validité logique et vérité dans une interprétation ; la déduction naturelle de Copi. Le second volet est consacré à l'analyse logique et mathématique de quatre preuves du point de vue de l'articulation entre vérité et validité, afin de mettre en lumière la pertinence des analyses logiques pour les études didactiques.

Mots-clefs : sémantique logique, vérité, validité, analyse épistémologique, analyse didactique

Abstract – In this paper, we support the importance of taking in account the relationship between mathematical truth and logical validity in mathematics. In a first part, we prsent briefly the semantic point of view in logic: its development from Frege ; the contributions from Wittgenstein et Tarski on the articulation between logical validity and truth in an interpretation ; Copi's natural deduction. The second part is devoted to logical and mathematical analysis of four proofs through the relationship between truth and validity, in order to shed light on the relevance of logical analysis for didactical studies.

Keywords: logical semantics, truth, validity, epistemological analysis, didactical analysis

I. INTRODUCTION

Dans son ouvrage « Pour l'honneur de l'esprit humain », Dieudonné (1987) déclare que les logiciens s'imaginent que leurs travaux intéressent les mathématiciens, mais que ce n'est pas le cas. Ceci est *a priori* en contradiction avec le point de vue de logiciens comme Frege, Russell, Wittgenstein, Tarski ou Quine, pour ne citer que les principaux auteurs ayant contribué au renouveau de la logique à partir de la fin du dix-neuvième siècle et au début du vingtième siècle. Si les logicistes qui, comme Frege et Russell, pensaient que l'on pouvait réduire les mathématiques à la logique ont dû abandonner leur projet, il n'en reste pas moins que leurs apports ont été repris et développés dans le courant de la sémantique logique, qui a abouti à la Théorie des modèles, dont la fécondité pour les mathématiques n'est plus à prouver. Cette communication comporte deux volets. Un volet épistémologique dans lequel nous présenterons brièvement le point de vue sémantique en logique : son essor à partir de Frege et les liens avec la logique d'Aristote ; les apports de Wittgenstein et Tarski sur l'articulation entre validité logique et vérité dans une interprétation ; le système de déduction naturelle de Copi. Le second volet est consacré à l'analyse de quatre preuves mathématiques du point de vue de l'articulation entre vérité et validité, afin de mettre en lumière la pertinence des analyses logiques pour les études didactiques.

II. L'ESSOR DU POINT DE VUE SEMANTIQUE EN LOGIQUE

L'essor du point de vue sémantique en logique est porté par Frege, qui se propose de développer une idéographie permettant de statuer sur la validité des preuves mathématiques, de rendre visible tout ce qui y était implicite (Frege 1971). Comme Russell (1903), il met en avant le rôle de l'inférence et insiste sur la distinction entre affirmer un énoncé conditionnel, comme « Si B, alors A » et faire une inférence comme « si B, alors A ; or B ; donc A ». Il insiste sur le fait que l'affirmation « si B, alors A » n'est pas l'affirmation de «B » ; il est

* Université Montpellier 2, I3M, UMR 5149 CNRS, équipe ACSIOM –France – vdurand@math.univ-montp2.fr

© Durand-Guerrier, V. (2012) Vérité mathématique et validité logique. Perspectives épistémologique et didactique. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT3, pp. 414–424). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

possible que B soit faux, sans que cela ne remette en cause la vérité de « si B, alors A ». Frege défend que ce choix n'a pas à se plier à l'usage courant, lequel tend à ne considérer que les conditionnels à antécédent vrai. Cette distinction, sur laquelle Aristote déjà met l'accent dans les Premiers Analytiques, reste problématique aujourd'hui. Gochet et Gribomont (1990) insistent à leur tour sur l'importance de cette distinction qui ne va pas de soi. Ainsi, si l'on demande à des étudiants ou des enseignants en formation de déterminer tous les entiers compris entre 1 et 20 vérifiant la propriété « si *n* est pair, alors son successeur est premier », la plupart des personnes interrogées répondent en ne donnant que les nombres pairs à successeur premiers, alors que les impairs satisfont également cet énoncé (cf. Durand-Guerrier 2003). Tant chez Aristote, que chez Frege et Russell, les théorèmes logiques reposent sur un certain nombre de lois de conclusion posées comme valides *a priori*. Ces systèmes logiques sont de type axiomatique, et les énoncés valides sont obtenus par l'application de règles posées comme préservant la validité (Par exemple le Modus Ponens ou règle du détachement dans le calcul des propositions, ou chez Aristote, la règle de conversion de « A est affirmé de nul B » en « B est affirmé de nul A »). L'établissement de la validité logique d'énoncés autres que les axiomes ressort dans ce cas de procédures syntaxiques, telles que l'on peut les rencontrer en Théorie de la démonstration. Ces procédures syntaxiques sont assez éloignées des modes habituels de raisonnement mathématique, et entretiennent l'idée d'une stérilité des déductions logiques soutenue par exemple par Kant (Laz 1993, p.9). C'est la formalisation d'un point de vue sémantique sur la validité et sur son articulation avec la vérité dans les interprétations qui va permettre de rapprocher les méthodes logiques et les pratiques mathématiques.

III. VALIDITE LOGIQUE ET VERITE DANS UNE INTERPRETATION

Les travaux de Wittgenstein (1921) pour le calcul des propositions, et de Tarski (1936a, 1936b) pour la logique des classes et le calcul des prédicats, vont constituer un progrès décisif pour clarifier les relations entre logique et mathématique. Ces deux auteurs proposent en effet un point de vue sémantique sur la validité en introduisant la notion d'interprétation des formules logiques dans un fragment de discours, un domaine de réalité ou une théorie. Nous en présentons les éléments essentiels ci-dessous.

1. Une version sémantique du calcul des propositions

Le Tractatus logico-philosophicus (Wittgenstein 1921) est un recueil d'aphorismes dont la construction est complexe et qui aborde de nombreuses questions difficiles. Je ne m'intéresse ici qu'à ce qui se dégage de l'ouvrage concernant la construction sémantique du calcul des propositions[1]. Wittgenstein qui a été l'élève de Russell à Cambridge et de Frege à Iéna se propose dans le Tractatus de dépasser les difficultés théoriques qu'il a identifiées chez ces deux auteurs. En particulier, il va montrer que l'on n'a pas besoin de lois de conclusions pour établir les théorèmes logiques du calcul des propositions. Pour cela, il introduit deux principes:

- *le principe de bivalence stricte* pour les variables propositionnelles : une variable propositionnelle modélise une proposition ; les propositions sont les entités linguistiques susceptibles d'être soit vraies soit fausses (point de vue déjà présent chez Aristote et les Stoïciens) – un variable propositionnelle peut prendre exclusivement deux valeurs de vérité, V ou F ;

[1] Voir Marion (2004) et pour une lecture dans une perspective didactique Durand-Guerrier (2006)

- *le principe d'extensionalité* : la valeur de vérité d'un énoncé complexe dépend exclusivement de la valeur de vérité des énoncés élémentaires qui le composent.

Les connecteurs logiques sont définis de manière combinatoire par leurs tables de vérité. Il y a ainsi 16 connecteurs logiques binaires, qui *« (...) ne renvoient à aucun objet de pensée*, *mais évoquent des systèmes de possibilités pour la vérité et la fausseté des propositions qu'elles connectent* » (Granger 1990). Parmi ces connecteurs, on reconnaît les connecteurs classiques de la langue et du travail mathématique : négation (connecteur unaire), conjonction, disjonction, implication, équivalence (connecteurs binaires). En combinant ces deux principes, étant donné un énoncé du système formel bien construit (respectant la syntaxe du calcul des propositions), on peut construire sa table de vérité.

Deux types d'énoncés jouent un rôle particulier au sein du système : les tautologies et les contradictions. Les tautologies sont les énoncés du système vrais pour toutes les distributions de valeurs de vérité. Exemples : « $p \vee \neg p$ » ou « $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$». Le premier correspond au principe du tiers exclu dans le calcul des propositions ; le second exprime la transitivité de la relation d'antécédent à conséquent. Les tautologies sont les théorèmes du système (au sens de la validité universelle telle que définie par Quine 1950). Les contradictions sont les énoncés du système qui prennent la valeur « faux » pour toute distribution de valeur de vérité. Exemple : « $p \wedge \neg p$ ».

Pour ces deux types d'énoncés, la valeur de vérité est indépendante de l'interprétation des lettres. Ce sont des lois logiques. Les tautologies jouent un rôle essentiel dans le système ; ce sont elles qui permettent de définir la notion de déduction logique et de se passer des lois de conclusion :

> Si p suit de q, je puis déduire p de q : tirer de q la conséquence p.
>
> La manière de déduire ne peut être tirée que des deux propositions.
>
> Elles seules peuvent justifier la déduction.
>
> Des " lois de la déduction ", qui — comme chez Frege et Russell — doivent justifier les déductions, sont vides de sens et seraient superflues. (5.132)

Les énoncés dont la table de vérité contient à la fois des V et des F sont interprétés par des propositions non logiques :

> « Les propositions non logiques (i.e. qui ne sont ni des tautologies, ni des contradictions) permettent de parler des faits du monde, de décrire des états de choses.
>
> Elle [la proposition non logique] est vraie si les états de choses sont tels que nous le disons par son moyen (4.062) ».

Cette élaboration se conclut par un résultat essentiel qui explicite la distinction entre validité logique (propriété des tautologies) et vérité dans une interprétation.

> La marque particulière des propositions logiques est que l'on peut reconnaître sur le seul symbole qu'elles sont vraies, et ce fait clôt sur elle-même toute la philosophie de la logique. Et c'est de même un des faits les plus importants que la vérité ou la fausseté des propositions non logiques *ne* se laisse *pas* reconnaître sur la seule proposition. (6.113.)

Wittgenstein en tire la conséquence immédiate que

> Il est clair d'emblée que la démonstration logique d'une proposition pourvue de sens et la démonstration *en logique* doivent être deux choses totalement différentes. (6.1263)

Ceci permet de comprendre pourquoi l'aptitude à établir des preuves logiques par les tables de vérité, ne permet pas d'améliorer les aptitudes pour raisonner en mathématiques.

Ce travail de Wittgenstein dans le Tractacus permet ainsi de clarifier la relation entre vérité et validité en ce qui concerne le calcul des propositions. Cependant, bien qu'il aborde dans cet ouvrage les questions de quantification, il ne fait pas ce travail pour le calcul des prédicats. C'est à Tarski que l'on doit cette avancée.

2. Le concept de vérité dans les langages formalisés et la notion de conséquence logique

Dans Tarski (1936a, 1972) l'auteur se propose de « construire une définition de l'expression " proposition vraie" ; définition qui soit matériellement adéquate et formellement correcte » (p.159). Il s'inscrit pour cela dans une tradition qui remonte à Aristote et qui fait écho au point de vue de Wittgenstein :

> Dans cette étude, je ne cherche qu'à saisir les intuitions exprimées par la théorie dite « classique » de vérité, c'est-à-dire par cette conception selon laquelle *« vraiment »* signifie la même chose que *« conformément à la réalité.* (Op. cité, p.160)

Pour réaliser cette construction, il introduit une notion simple mais féconde, la notion de satisfaction d'une phrase ouverte par un élément :

> « Pour tout *a*, *a* satisfait la fonction propositionnelle « *x* est blanc » si et seulement si *a* est blanc. » (op. cit., p.193)

Les fonctions propositionnelles sont interprétées par des phrases ouvertes qui n'ont pas de valeur de vérité. En substituant l'élément « *a »* à la variable « *x* », qui joue le rôle de marque place, on obtient une proposition « *a* est blanc » qui est soit vraie, soit fausse. D'après la définition générale de la vérité « *La proposition « a est blanc » est vraie si et seulement si a est blanc ».* Cette notion de satisfaction conduit à considérer une extension des connecteurs logiques propositionnels classiques : dans un domaine d'objets donné, la négation d'une fonction propositionnelle est satisfaite exactement par les éléments qui ne satisfont pas cette fonction propositionnelle ; une implication ($p(x) \Rightarrow q(x)$) entre deux fonctions propositionnelles est satisfaite exactement par les éléments qui soit satisfont « $p(x)$ » et « $q(x)$ », soit ne satisfont pas « $p(x)$ ».

Une deuxième idée simple et féconde introduite par Tarski est celle de la notion de modèle d'une formule (i.e. d'un énoncé du système formel). Un domaine d'interprétation est un modèle d'une formule si l'interprétation de cette formule est une proposition vraie du domaine. Ceci permet à Tarski de définir la notion de conséquence logique d'un point de vue sémantique :

> La proposition *X* suit logiquement de la classe de propositions *K* si tout modèle de *K* est un modèle de *X*. (Tarski 1936b, 1972)

En outre, ceci généralise ce qui a été réalisé par Wittgenstein et permet de définir la notion d'énoncé universellement valide ; un énoncé est universellement valide si toute interprétation de ses lettres dans tout univers non vide est un modèle de cette formule (Quine 1950).

Le développement de ces travaux conduit Tarski à introduire la méthodologie des sciences déductives, puis la Théorie des modèles que nous n'aborderons pas ici[2]. Les apports de Tarski pour les mathématiques sont soulignés par Hourya Sinaceur (1991a) qui montre la fécondité de cette approche pour les mathématiques.

Ce projet peut aussi être reconnu chez les auteurs ayant introduit les systèmes de déduction naturelle (Gentzen 1934 ; Quine 1950 ; Copi 1954). Il s'agit pour ces auteurs de proposer des systèmes formels de preuves qui restent au plus près des modes de raisonnement habituel des mathématiciens. Nous présentons ci-dessous le système de Copi que nous utiliserons dans la partie V pour analyser des preuves afin de mettre en lumière l'articulation entre validité logique et vérité mathématique.

---

[2] Pour une présentation, voir Durand-Guerrier (2005, 2008)

IV. LA DEMONSTRATION NATURELLE DE COPI (1954)

Un système de déduction naturelle se caractérise par des règles permettant de gérer l'introduction et l'élimination des connecteurs logiques et des quantificateurs. Pour les connecteurs, on connaît bien la règle du Modus Ponens qui est la règle d'élimination de l'Implication ; on reconnaît moins bien, et ce quoique qu'on l'utilise constamment en mathématiques, la règle d'introduction de l'implication : sous l'hypothèse A, on prouve B ; on en déduit « $A \Rightarrow B$ ». Pour les quantificateurs, le système développé par Copi (1954) présente la particularité d'introduire des lettres pour désigner des éléments génériques d'un univers du discours non vide lui-même générique et d'expliciter les restrictions qui doivent s'appliquer lors de la manipulation de ces lettres.

Nous présentons ci-dessous les principales règles d'introduction et d'élimination des deux quantificateurs.

« de $\forall x\ P(x)$, on déduit $P(a)$, où *a est une constante individuelle quelconque substituée à x. »*
Cette règle est associée à la formule universellement valide « $\forall x\ P(x) \Rightarrow P(y)$ ».

Règle 1 *– Règle d'élimination du quantificateur universel* : Instantiation Universelle *(IU)*

de $P(a)$, on déduit $\forall x\ P(x)$, avec *a constante d'objet absolument quelconque choisie dans le domaine (de x), c'est-à-dire considérée uniquement du point de vue de son appartenance à ce domaine*
Cette règle est associée à la formule non universellement valide : «$P(y) \Rightarrow \forall x\ P(x)$ ». Ceci nécessite que l'on contrôle soigneusement le fait que a est bien un élément générique.

Règle 2 *– Règle d'introduction du quantificateur universel : Généralisation Universelle (GU)*

de $P(a)$, on déduit $\exists x\ P(x)$, avec *a constante d'objet quelconque.*
Ceci est associé à la formule universellement valide « $P(y) \Rightarrow \exists x\ P(x)$ ».

Règle 3 *– Règle d'introduction du quantificateur existentiel* : Généralisation Existentielle *(GE)*

de $\exists x\ P(x)$ on déduit $P(w)$; *w est une constante d'objet, mais dont on retient seulement qu'elle est le nom de l'un des objets qui, par hypothèse, doivent, (ou doit) vérifier* $\exists x P(x)$. *Le plus souvent, on ne sait rien de plus, c'est-à-dire qu'on en «ignore l'identité. »*
Ceci est associée à la formule non universellement valide « $\exists x\ P(x) \Rightarrow P(y)$ » et nécessite par conséquent que l'on contrôle soigneusement le fait que w n'a pas déjà été introduite.

Règle 4 *– Règle d'élimination du quantificateur existentiel* : Instantiation Existentielle *(IE)*

La règle IE est la plus délicate à utiliser ; elle est une source fréquente d'erreurs lorsqu'elle est utilisée sans précaution avec des énoncés de la forme $\forall x \exists y\ P(x,y)$, comme nous le verrons au paragraphe V. Dans ce cas, il faut ajouter des *règles de restriction*, concernant le respect de l'ordre d'introduction des lettres : si une instantiation existentielle se fait après une instantiation universelle, la généralisation existentielle devra se faire avant la généralisation universelle correspondante.

Comme l'écrit Hottois (1989)

> Ce système offre l'intérêt de proposer des démonstrations qui restent au plus près de l'aspect familier des syllogismes. Cette présentation correspond à la volonté de formaliser et d'axiomatiser en ne rompant pas avec la rationalité discursive naturelle. (p.100)

On peut le voir en observant à la lumière de ce modèle la preuve par élément générique, qui est très fréquente en mathématiques :

Soit à prouver un énoncé de la forme « $\forall x\ (P(x) \Rightarrow Q(x))$ » dans une théorie donnée.	
Preuve	
[$P(a)$	*prémisse auxiliaire*
travail au sein de la théorie avec un objet générique vérifiant l'antécédent	
$Q(a)$]	
$P(a) \Rightarrow Q(a)$	*introduction de l'implication*
$\forall x\ (P(x) \Rightarrow Q(x))$	*Généralisation universelle*

***Figure 1** – Preuve par élément générique – Analyse à la manière de Copi*

Un système de déduction naturelle permet d'établir des théorèmes de logique, c'est-à-dire permet de prouver qu'une formule du calcul des prédicats est universellement valide, comme dans l'exemple ci-dessous :

$$« \forall x\ \forall y\ (P(x) \Rightarrow Q(x,y)) \Rightarrow \forall x\ (P(x) \Rightarrow \forall y\ Q(x, y)) » \text{ (T)}$$

T est une formule universellement valide du calcul des prédicats ; nous en donnons ci-dessous une preuve à la manière de Copi.

$[\forall x\ \forall y\ (P(x) \Rightarrow Q(x, y))$	(1)	Prémisse auxiliaire
$\forall y\ (P(a) \Rightarrow Q(a,y))$	(2)	IU sur (1) pour x
$P(a) \Rightarrow Q(a,\mathrm{b}))$	(3)	IU sur (2) pour y
$[P(a)$	(4)	Prémisse auxiliaire
Q(a,b)	(5)	Modus Ponens sur (3) & (4)
$\forall y\ Q(a,y)]$	(6)	GU sur (5) pour y
$P(a) \Rightarrow \forall y\ Q(a, y))$	(7)	Introduction de l'implication sur (4) & (6)
$\forall x\ (P(x) \Rightarrow \forall y\ Q(x, y))]$	(8)	GU sur (7) pour x
T	(9)	Introduction de l'implication sur (1) & (8)

***Figure 2** – Preuve de « $\forall x\ \forall y\ (P(x) \Rightarrow Q(x, y)) \Rightarrow \forall x\ (P(x) \Rightarrow \forall y\ Q(x, y))$ »*

Le système de Copi peut également être utilisé pour contrôler localement la validité de preuves mathématiques, sans recourir à une formalisation complète dans le Calcul des Prédicats, et propose de ce fait un moyen terme entre une position formaliste extrême s'appuyant sur la théorie de la démonstration de Hilbert, inaccessible de fait, et la position inverse qui consiste à dire que les démonstrations mathématiques n'obéissent à aucune règle. Dans ce qui suit, nous allons utiliser ce système pour l'analyse logique et mathématique de quatre preuves rencontrées en première année d'université en France.

V. ANALYSES LOGIQUE ET MATHEMATIQUE DE QUATRE PREUVES METTANT EN JEU DES QUANTIFICATIONS MULTIPLES

1. *Présentation des preuves*

Les trois premières preuves ci-dessous ont été rédigées par des étudiants scientifiques de première année d'université et sont rencontrées classiquement dans les copies d'étudiants ; la quatrième est issu d'un manuel s'adressant à ces même étudiants. Le lecteur est invité à se faire sa propre idée en ce qui concerne la validité ou non de ces preuves et la valeur de vérité des énoncés conjecturés.

Preuve n°1 - Suites numériques

Conjecture - Toute suite numérique telle que les suites extraites des termes de rang pair et de rang impair convergent vers une même limite est convergente et admet comme limite la limite commune à ces deux suites extraites.

Preuve - Soit u une telle suite numérique ; notons $\boldsymbol{v}$ la suite extraite des termes de rang pair et $\boldsymbol{w}$ la suite extraite des termes de rang impair et a leur limite commune.

v et w convergent vers a donc il existe un entier N tel que pour tout n supérieur à N, on ait $|\mathbf{v}_n - a| < \varepsilon$ et $|\boldsymbol{w}_n - a| < \varepsilon$

Tout entier est soit pair soit impair ; soit n un entier supérieur à N

si n est pair, $\boldsymbol{u}_n = \boldsymbol{v}_n$ donc $|\boldsymbol{u}_n - a| < \varepsilon$

si n est impair, $\boldsymbol{u}_n = \boldsymbol{w}_n$ donc $|\boldsymbol{u}_n - a| < \varepsilon$

On a donc prouvé qu'il existe un entier N tel que pour tout n supérieur à N, on ait $|u_n - a| < \varepsilon$ On en déduit que la suite u converge vers a.

Preuve n°2 - Accroissements finis généralisés

Conjecture - Soient deux réels a et b tels que $a < b$ et deux fonctions f et g définies et continues sur l'intervalle fermé $[a ; b]$, dérivables sur l'intervalle ouvert $]a ; b[$. Montrer que si la dérivée g' de la fonction g ne s'annule pas sur l'intervalle $]a ; b[$, alors il existe un réel c dans l'intervalle $]a ; b[$ tel que

$$\frac{\boldsymbol{f}'(c)}{g'c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Preuve - La fonction f vérifie les conditions d'application du théorème des accroissements finis, donc il existe c dans $]a ; b[$ tel que $\boldsymbol{f}'(c)\ (b-a) = f(b) - f(a)$. De même g vérifie les conditions d'application du théorème des accroissements finis, donc il existe c dans $]a ; b[$ tel que $g'(c)\ (b - a) = g(b) - \mathrm{g}(a))$. Comme g' ne s'annule pas sur $]a ; b[$, $g'(c) \neq 0$ et donc $g(b) - g(a) \neq 0$. On peut donc faire le quotient des deux égalités, on obtient alors l'égalité cherchée.

Preuve n°3 - Image directe et intersection

Conjecture - Soit $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{F}$ deux ensembles et soit $\boldsymbol{f}$ une application de $\boldsymbol{E}$ dans $\boldsymbol{F}$. Quelles que soient les parties A et B de E, on a $\boldsymbol{f}(A \cap B) = \boldsymbol{f}(A) \cap f(B)$.

Preuve - Montrons tout d'abord que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$: si x est un élément de $\boldsymbol{f}(\ (A \cap B)$, il existe $y \in A \cap B$ tel que $f(y) = x$; comme $y \in A$, $x \in \boldsymbol{f}(A)$; de même, comme $y \in B$, $x \in f(B)$ et donc $x \in f(A) \cap f(B)$. Montrons maintenant que $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$: si x est un élément de $\boldsymbol{f}(A) \cap f(B)$, $x \in f(A)$ donc il existe y dans A tel que $x = \boldsymbol{f}(y)$; de même $x \in \boldsymbol{f}(B)$ donc il existe y dans B tel que $\boldsymbol{f}(y) = x$; comme $y \in A$ et $y \in B$, $y \in A \cap B$ et donc $x \in f(A \cap B)$.

Preuve n° 4 - Limite d'une somme de deux fonctions

Conjecture - Soient f et g deux fonctions numériques définies dans une partie A de R et a un élément adhérent à A ; si $f(t)$ et $g(t)$ ont des limites respectives h et k lorsque t tend vers a en restant dans A, alors $f(t)+ g(t)$ tend vers la limite $h + k$.

Preuve - Par hypothèse, quel que soit $\varepsilon>0$, il existe $\eta>0$ tel que $t \in A$ et $\mid t–a \mid\leq\eta$ implique

$\mid f(t) - h\mid \leq \varepsilon$ et $\mid g(t) - k\mid \leq \varepsilon$; on a alors $\mid f(t) + g(t) - (h + k) \mid = \mid f(t) - h + g(t) - k\mid \leq \mid f(t) - h\mid + \mid g(t) - k \mid \leq 2\varepsilon$

2. Une structure logique commune

Pour chacune des quatre preuves proposées, on a une structure commune :

Deux prémisses de la forme

$\forall x \exists y\ P(x, y)$

$\forall x \exists y\ Q(x, y)$

Une conclusion de la forme

$\forall x \exists y\ (P(x, y) \wedge Q(x, y))$

La modélisation dans la déduction naturelle de Copi permet d'identifier les opérations logiques et mathématiques permettant d'étudier la possibilité de déduire, ou non, la conclusion à partir des prémisses :

Prémisses	$\forall x \exists y\ P(x, y)$ $\forall x \exists y\ Q(x, y)$	(1) (2)
$\exists y\ P(a, y)$	(3)	I.U sur (1)
$\exists y$ Q(a, y)	(4)	I.U. sur (2)
$P(a, b)$	(5)	I.E. sur (3)
$Q(a, c)$	(6)	I.E. sur (4)

Arrivé à l'étape (6), il n'est pas possible d'obtenir la conclusion cherchée par les seuls moyens de la logique. En effet, pour obtenir cette conclusion, il faut pouvoir faire une généralisation existentielle (G.E.), suivie d'une généralisation universelle (G.U) à partir d'un énoncé de la forme $P(a,d) \wedge Q(a, d)$. Or précisément, le contrôle logique de la validité rend nécessaire de ne pas réutiliser en (6) la lettre choisie pour instancier dans (5) ; on ne peut donc pas aller plus loin dans la preuve avec les seules ressources de la logique. Il est facile de trouver des contre-exemples montrant que cette inférence n'est pas valide. Or, précisément, dans chacune des quatre preuves, tout se passe comme si les auteurs utilisaient cette inférence non valide pour faire une déduction. Par conséquent, au sens strict du terme, aucune des quatre preuves ne vérifie les critères de validité logique. Pour poursuivre l'analyse de ces preuves, on doit donc considérer à la fois les aspects logiques et mathématiques.

3. Analyse logique et mathématique des preuves 1 et 4

Dans la preuve n°4, les étapes 3, 4, 5 et 6 n'apparaissent pas ; l'auteur de la preuve utilise directement la conclusion « $\forall x \exists y\ R(x, y)$ ». Cependant, la preuve 4 peut-être complétée en une preuve valide en utilisant le fait que R est un ensemble totalement ordonné, si bien que deux éléments notés b et c satisfaisant les énoncés correspondant à (5) et (6) ayant été introduits, l'élément $d = \min(b, c)$ satisfait simultanément $P(a, y)$ et $Q(a, y)$.

On peut alors reprendre la preuve logique interrompue. On a en effet

$P(a, d)$ et $Q(a, d)$	(7)	résultat du travail mathématique
$\exists y\, (P(a, y) \wedge Q(a, y))$	(8)	G.E. sur (7)
$\forall x \exists y\, (P(x, y) \wedge Q(x, y))$	(9)	G.U. sur (8)

On peut de même compléter la preuve n°1 en considérant $d = \max(b, c)$; ceci permet de prouver le résultat intermédiaire suivant :

« Il existe un entier N tel que pour tout n supérieur à N, on ait $|\mathbf{v}_n - a| < \varepsilon$ et $|\boldsymbol{w}_n - a| < \varepsilon$ »

Rappelons que dans la preuve n°1, ce résultat est énoncé comme une inférence immédiate sous la forme *« v et w convergent vers a donc* il existe un entier N tel que pour tout n supérieur à N, on ait $|\mathbf{v}_n - a| < \varepsilon$ et $|\boldsymbol{w}_n - a| < \varepsilon$ ».

La preuve n'est cependant pas encore satisfaisante; on peut en effet noter que la définition des suites extraites utilisée n'est pas correcte ; en effet lorsque n est pair, il peut s'écrire sous la forme $2p$ et on a « $u_n = u_{2p} = v_p$ » ; de même lorsque n est impair, n peut s'écrire $2p+1$ et $u_n = u_{2p+1} = w_p$. Par suite, l'entier que nous venons de définir ne convient pas nécessairement. Pour garantir les deux inégalités, il faut choisir $N_3 = \max(2N_1, 2N_{2+1})$ où N_1 et N_2 sont respectivement les interprétations de b et c. Cette fois, la reprise à (7) où d est interprété par N_3 permet de finir la preuve.

La preuve n°1 est une preuve proposée par un (bon) étudiant de première année d'université ; la preuve n°4 est une preuve proposée dans un manuel universitaire français qui s'adresse à des étudiants en première année post baccalauréat (Houzel 1996, p. 27).

On pourrait penser que finalement, puisqu'on peut compléter la preuve en une preuve valide, il est légitime d'utiliser le raccourci. Cependant, comme nous allons voir, les deux autres preuves, qui sont produites par des étudiants de début d'université, ne peuvent pas être complétées en des preuves valides.

4. *Analyse logique et mathématique des preuves n°2 et n°3*

Pour ces deux preuves, comme pour les deux précédentes, une fois arrivé à l'étape (6), on doit revenir au travail mathématique. Pour la preuve n°2, on peut trouver des fonctions pour lesquelles il n'est pas possible de trouver une valeur commune de sorte que les interprétations de (5) et (6) soient satisfaites. La preuve proposée ne peut donc pas être complétée en une preuve valide. Conformément à ce qu'avait déjà bien vu Aristote, ceci ne signifie pas nécessairement que la conclusion soit fausse. De fait ici la conclusion est vraie ; ce qui peut être démontré en utilisant une fonction auxiliaire à laquelle on applique le théorème de Rolle. Ce n'est pas le cas pour la preuve n° 3. C'est la preuve de la deuxième inclusion qui relève du modèle commun aux quatre preuves. Ici, de nouveau on ne peut pas en général construire un élément commun, mais contrairement à ce qui se passe pour la preuve n°2, la vérité de la conclusion suppose l'existence d'un tel élément commun. La conjecture proposée est fausse. Pour assurer en toute généralité l'existence d'un élément commun, il est nécessaire et suffisant que la fonction f soit injective. La différence entre les deux preuves n'est pas toujours perçue par les étudiants, mêmes avancés ; par exemple en avril 2011, un groupe de trois doctorants en mathématiques travaillant sur ces preuves dans le cadre d'un module d'initiation à l'enseignement supérieur ont déclaré que la conjecture n°2 était fausse puisqu'on ne pouvait pas prendre un élément commun pour f et g. Ceci montre selon nous que la pratique mathématique ne permet pas nécessairement de clarifier les relations entre vérité d'un énoncé et validité d'une preuve supposée de cet énoncé.

Les analyses de ces quatre preuves illustrent en outre le fait que même dans des preuves relativement élémentaires les aspects logiques et mathématiques sont étroitement imbriqués. On peut comprendre alors que si l'on ne dispose ni d'un contrôle logique, ni d'un contrôle mathématique (ce qui est le cas lorsque l'on étudie un nouveau domaine), on ne soit démuni pour contrôler la validité des preuves. Notons que dans ces preuves, se conjuguent deux risques d'erreur, l'un de type logique qui consiste à ne pas prendre en compte la restriction sur les instantiations existentielles, l'autre de type mathématique qui consiste à inférer l'unicité de l'existence, ce qui peut expliquer la fréquence des erreurs rencontrées en début d'université sur les preuves de ce type.

VI. CONCLUSION

Nous pensons avoir montré dans cette communication qu'il n'y a pas lieu d'accréditer le divorce entre logique et mathématique, à condition de prendre en considération le point de vue sémantique en logique, et les apports d'une clarification entre vérité mathématique et validité logique. L'analyse logique des énoncés et des preuves nous semble devoir jouer un rôle important en didactique des mathématiques : pour les analyses *a priori* des activités de preuve proposées aux élèves et aux étudiants ; pour comprendre l'activité des sujets en situation de résolution de problèmes ; pour favoriser le développement des compétences liées à la preuve (Durand-Guerrier et Arsac 2003, 2009).

Nous laisserons pour conclure la parole à Hourya Sinaceur :

> La logique semble bien, contrairement à ce que pensait Wittgenstein, un indispensable moyen, non de « fonder » mais de *comprendre* l'activité mathématique. C'est-à-dire pour une part, explorer la relation de l'implicite à l'explicite d'une théorie.(…) Une part essentielle de l'analyse épistémologique est ainsi ouvertement prise en charge par l'analyse logique. (…) En même temps elle apparaît comme une épistémologie *effective* dans la mesure où la réflexion est orientée vers et investie dans l'agir. (Sinaceur H. 1991b)

REFERENCES

Copi I. (1954) *Symbolic Logic* (2nd edition 1965). NewYork :The Macmillan Company.

Dieudonne J. (1987) *Pour l'honneur de l'esprit humain, les mathématiques aujourd'hui.* Paris : Hachette.

Durand-Guerier, V. (2008) Truth versus validity in mathelatical proof. *ZDM Mathematics education* 40, 373-384.

Durand-Guerrier V. (2006) Lire le Tractatus dans une perspective didactique. In Ouelbani M. (dir.) *Thèmes de philosophie analytique*. Université de Tunis, faculté des Sciences humaines et sociales.

Durand-Guerrier V. (2005) *Recherches sur l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique dans une perspective didactique. Un cas exemplaire de l'interaction entre analyses épistémologique et didactique. Apports de la théorie élémentaire des modèles pour une analyse didactique du raisonnement mathématique*. Note de synthèse pour l'habilitation à Diriger les Recherches (HDR). Université Lyon 1, I.R.E.M. de Lyon.

Durand-Guerrier V. (2003) Which notion of implication is the right one? From logical considerations to a didactic perspective. *Educational Studies in Mathematics* 53, 5-34.

Durand-Guerrier V., Arsac G. (2009) Analyze of mathematical proofs. Some questions and first answers. In Lin F.-L., Hsieh F.-J., Hanna G., de Villiers M. (Eds.) (Vol. 1, pp. 83-88).

Proof and proving in mathematics education. ICMI study conference proceedings Taiwan :Tapei.

Durand-Guerrier V., Arsac G. (2003) Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. Le cas de l'analyse. Quelles implications didactiques ? *Recherches en Didactique des Mathématiques* 23/3, 295-342.

Frege G (1971) *Ecrits logiques et philosophiques*. Paris : Le Seuil.

Gentzen G. (1935) Untersuchungen über das logische Schliessen. *Math. Zeitschr* 39.

Gochet P., Gribomont P. (1990) *Logique, méthodes pour l'informatique fondamentale* vol. 1. Paris : Hermès.

Granger G.G. (1990) *Invitation à la lecture de Wittgenstein*. Aix en Provence : Alinea.

Hottois G. *Penser la logique, une introduction technique, théorique et philosophique à la logique formelle*. Bruxelles : De Boeck – Wesmael.

Houzel C. (1996) *Analyse mathématique. Cours et exercices*. Paris : Belin.

Laz J. (1993) *Bolzano critique de Kant*. Paris : Vrin.

Marion M. (2004) *Ludwig Wittgenstein, Introduction* au *Tractatus* logico-philosophicus. Paris : Presses Universitaires de France.

Quine W.V.O (1950) *Methods of logic*. New-York: Holy, Rinehart & Winston.

Russel B. (1903) *Les principes de la mathématique*, traduction française in Russel B. *Ecrits de logique philosophique* (1989). Paris : PUF.

Sinaceur H. (1991a) *Corps et Modèles*. Paris : Vrin

Sinaceur H. (1991b) Logique : mathématique ordinaire ou épistémologie effective ? In *Hommage à Jean Toussaint Desanti*, TER.

Tarski A. (1936a) Le concept de vérité dans les langages formalisés. *Logique, sémantique et métamathématique* 1972/1, 157-269.

Tarski A. (1936b) Sur le concept de conséquence. *Logique, sémantique et métamathématique,* 1974/2, 141-152.

Wittgenstein L. (1921) Tractatus logico-philosophicus. *Annalen der naturphilosophie*, Leipzig. Traduction française par G.G. Granger (1993). Paris : Gallimard.

LE CHALLENGE DE LA PENSEE STRUCTURALISTE DANS L'APPRENTISSAGE DE L'ALGEBRE ABSTRAITE : UNE APPROCHE EPISTEMOLOGIQUE

Thomas HAUSBERGER*

Résumé – Cette communication fournit une première ébauche d'analyse épistémologique de la pensée structuraliste en « algèbre moderne » (selon la terminologie de van der Waerden 1930) dans l'optique d'un travail didactique destiné à élucider les difficultés liées à l'apprentissage des structures algébriques abstraites (groupes, anneaux, corps, idéaux,...). On s'intéresse à la question des origines du structuralisme mathématique, des obstacles liés à son émergence, de ses caractéristiques en tant que style nouveau et catégorie de pensée mathématique, de ses techniques dans la pratique mathématique, de ses enjeux (mathématiques, épistémologiques, philosophiques, didactiques).

Mots-clefs : algèbre (abstraite, moderne), structures algébriques, épistémologie, philosophie des concepts, enseignement supérieur

Abstract – This communication contributes to a first draft of an epistemological analysis of structuralist thought in « modern algebra » (as denominated by van der Waerden 1930) with a view towards a didactic work aiming at clarifying the difficulties connected to learning abstract algebraic structures (groups, rings, fields, ideals,...). We focus on the question of the origins of mathematical structuralism, the obstacles connected with its emergence, its characteristics as a new style and a mathematical category of thought, its techniques in mathematical practice, its scope and challenges (on a mathematical, epistemological, philosophical and didactic point of view).

Keywords: algebra (abstract, modern), algebraic structures, epistemology, philosophy of concepts, higher education

Ce travail est basé sur les analyses des historiens (Cory 2004, Grattan-Guiness 2005, Wussing 2007) et des philosophes (Cavaillès 2008, Granger 1994, Lautmann 2006, Sinaceur 2005 et 2010) ainsi que sur l'expérience professionnelle de l'auteur en tant qu'algébriste-théoricien des nombres et enseignant d'algèbre en L3 à l'Université (Guin et Hausberger 2008). Certains points restent à développer (travail en cours) : la version actuelle de ce document tient alors lieu de programme de recherches. Ce travail débouchera ultimement sur une ingénierie qui se donne pour objectif une remédiation aux difficultés identifiées au niveau des apprentissages, remédiation utilisant le « levier méta » dans l'esprit des travaux de Dorier et al. (1997) sur l'enseignement de l'algèbre linéaire. Un tel choix est justifié par l'analyse épistémologique et discuté en fin d'article.

QUESTIONNEMENT EPISTEMOLOGIQUE

1. Sources et méthodologie

La première étude sur une structure algébrique est le fait de Wussing qui publia en 1969 son travail sur la génèse de la structure abstraite de groupe (voir Wussing 2007 pour une traduction en langue anglaise). Le livre de Cory *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures*, publié en 1996, constitue la synthèse la plus complète à ce jour.

Dans l'étude de l'évolution du visage de l'algèbre au tournant du XX^e^ siècle, les grands traités d'algèbre à examiner et comparer sont ceux de Serret, Jordan, Weber et van der Waerden (les références exactes sont données en fin d'article). L'évolution de certains de ces traités au cours de leurs différentes rééditions témoigne également des transformations en

*Institut de Mathématiques et de Modélisation de Montpellier, Université Montpellier 2, Case Courrier 051, Place Eugène Bataillon, 34095 Montpellier Cedex – France – thomas.hausberger@univ-montp2.fr

© Hausberger T. (2012) Le challenge de la pensée structuraliste dans l'apprentissage de l'algèbre abstraite. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21^e^ siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT3, pp. 425–434). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

cours au sein de ce domaine des mathématiques. L'examen du Jahrbuch est un autre indicateur de cette évolution.

La synthèse de Cory comporte les défauts habituels du panorama : histoire un peu naïve et simpliste décrivant un grand mouvement vers les structures algébriques abstraites. Or sur cette « autoroute du structuralisme », on souhaiterait observer les petits chemins de traverse révélateurs de la science en acte, que seule une historiographie fine peut révéler. C'est un travail considérable que d'appliquer à la littérature mathématique de ce vaste champ de l'algèbre au tournant du XX^{e} siècle les méthodes historiques actuelles qui visent une échelle plus fine sous la forme d'une microhistoire des textes mathématiques. Dans l'attente des premiers résultats utilisant une telle méthodologie, nous ferons notre analyse épistémologique sur la base des synthèses historiques disponibles mais nous garderons à l'esprit que des choix ont opéré, présidant à la sélection des textes. Enfin, nos motivations ne sont pas celles de l'historien. Comme le dit Bachelard :

> C'est l'effort de rationalité et de construction qui doit retenir l'attention de l'épistémologue. On peut voir ici ce qui distingue le métier de l'épistémologue de celui de l'historien des sciences. L'historien des sciences doit prendre les idées comme des faits. L'épistémologue doit prendre les faits comme des idées, en les insérant dans un système de pensées. Un fait mal interprété par une époque reste un *fait* pour l'historien. C'est au gré de l'épistémologue un *obstacle* ou une *contre-pensée*. (Bachelard 1938, p. 17)

L'histoire des structures algébriques est sans conteste une histoire de concepts (groupes, anneaux, corps,...), les notions se situent dans une élaboration théorique standardisée au sein des manuels. Les questions que l'on se pose naturellement sont :

- Quels problèmes ou classes de problèmes ont présidé à l'élaboration de ces concepts ? Quels objets concrets et quelles méthodes sont liés à ces concepts ?
- Comment ces concepts ont-ils évolué ? Quels obstacles éventuels a-t-il fallu franchir ?
- Comment s'articulent-ils avec les concepts voisins ? Quelle place ont-ils au sein de l'élaboration théorique dans laquelle ils se situent ?

On peut alors espérer cerner la dynamique historique et la dynamique interne du domaine. Cependant, l'histoire des structures algébriques est une histoire de concepts à double titre : il s'agit d'une « mathématique conceptuelle » selon les termes des mathématiciens eux-mêmes qui font preuve d'un recul réflexif et prônent un nouveau mode de pensée pour aborder les problèmes. En définitive, il s'agira également d'aborder les questions suivantes :

- Qu'est-ce qui caractérise ce mode d'élaboration théorique ? En quoi est-il nouveau ? Quelles sont ses origines et qu'est-ce qui a motivé sa mise en place ?
- Quelle est la place et la portée effective de la pensée structuraliste dans la pratique mathématique ?

2. *Quelques repères historiques et épistémologiques sur les structures algébriques*

L'algèbre désigne traditionnellement un ensemble d'idées et de techniques mathématiques associés à la manipulation formelle de symboles abstraits, en lien avec la résolution des équations. L'algèbre moderne est née de ce terreau mais se caractérise par un changement de perspective (de paradigme ?) qui se traduit par une restructuration-refondation mathématique de son champ et une diffusion de ses méthodes à d'autres branches des mathématiques. Ces dernières se trouvent ainsi unifiées et participent de la filiation de l'algèbre moderne (arithmétique et géométrie notamment, plus tardivement en topologie). C'est le résultat d'un processus d'abstraction qui historiquement présente différentes étapes identifiables.

Les groupes de substitution apparaissent comme des outils pour décider de la résolubilité par radicaux des équations et mettre en œuvre cette résolution par extraction successive de racines (travaux de Galois). Le premier emploi du mot groupe est proche de son sens commun de regroupement d'éléments, aucune définition n'est donnée. Les groupes s'autonomisent progressivement en tant qu'objets d'étude indépendamment du contexte de la résolution des équations, mais un grand nombre de notions de théorie des groupes (groupe distingué, groupe simple, suite de décomposition) sont directement reliés à cette application. Pour Jordan, les groupes de substitution et leurs quotients ne font pas partie de la même théorie (c'est Hölder qui mettra au point les groupes quotients et montrera que les groupes distingués sont la bonne notion pour faire des quotients, aboutissant au résultat connu actuellement sous la dénomination « théorème de Jordan-Hölder »).

L'origine des groupes abéliens se situe en arithmétique avec les travaux de Gauss sur la composition des formes présentés dans ses *Disquisitiones arithmeticae*. Une chaine logique de développement conduit jusqu'à l'axiomatisation (implicite) par Kronecker des groupes abéliens finis (sans prononcer le mot groupe, Kronecker ne faisant pas le lien avec les groupes de substitutions ; cependant, cela ne tardera pas et sera réalisé par son étudiant Netto) et la démonstration de leur théorème de structure.

L'évolution historique du concept de groupe s'est faite en relation avec ses domaines d'application. La communauté mathématique ne s'est emparée du concept de groupe abstrait, issu des travaux de Cayley autour de la notion de générateur, qu'après l'apparition des groupes dans d'autres contextes : outre en arithmétique, celle des groupes de transformation et la reconnaissance du rôle des groupes dans l'unification des géométries (programme d'Erlangen de Klein). Un facteur favorable est à trouver dans les papiers de Boole sur l'algèbre formelle qui contribue à installer un point de vue abstrait sur l'algèbre. L'idée que deux groupes isomorphes sont essentiellement les mêmes a pu alors émerger et van Dyck met au point la présentation par générateurs et relations (en quotientant le groupe libre) dans le but d'unifier les trois sources historiques des groupes autour d'une même présentation. La reconnaissance de son rôle central en mathématiques a permis le développement de la structure de groupe, première structure algébrique abstraite, ceci avant le début du XX^{e} siècle.

Cette transition vers la structure abstraite de groupe est l'une des causes et également l'une des conséquences de la méthode axiomatique en mathématiques prônée par Hilbert : d'une part, l'acceptation de la présentation axiomatique des mathématiques en relation avec la question des fondements, la théorie des ensembles fournissant la base de l'édifice ; d'autre part, l'utilisation de l'axiomatique comme un outil pour une présentation plus commode et intelligible d'un contenu structuré, à même d'isoler de l'ensemble des propriétés des objets étudiés celles qui découlent du fait que ces derniers vérifient les axiomes de groupe. Kronecker n'a pas fait le lien entre les groupes de permutation et sa présentation des classes modulo un entier car il ne poursuivait pas un tel objectif.

L'unification produite a lieu sous différents niveaux : au premier niveau une même théorie (la théorie des groupes) s'applique à des objets de nature différentes. A un niveau supérieur, la présentation axiomatique des structures algébriques permet un traitement unifié de ces différentes structures, mettant en avant les ponts entre ces structures, sans même développer une méta-théorie de ces structures. C'est le point de vue novateur du traité de van der Waerden, par rapport aux traités antérieurs, hérité du style de Emmy Noether. C'est ce traitement unifié des structures qui marque l'avènement de la pensée structuraliste et transforme l'algèbre en une discipline dédiée à l'investigation de ces structures (à propos desquelles l'on se pose le même type de questions que l'on cherche à résoudre avec le même type d'outils. Les origines de la pensée structuraliste remontent à Galois, dont la mise en forme des idées a été l'un des moteurs comme le montre le traité de Weber. Cependant, sa mise en forme jusqu'à la présentation actuelle est le fruit d'un long processus de conceptualisation.

« Mathématique conceptuelle » est le terme utilisé par un certain nombre de mathématiciens allemands des XIX^{e} et XX^{e} siècles (Riemann, Hasse, Dedekind, Hilbert, Emmy Noether) pour caractériser leur méthode de travail, focalisée sur les formations de concept, et que certains historiens font remonter à Gauss. La pensée structuraliste se caractérise donc, plus que par le type d'objet étudié, par une méthodologie et un style spécifique, qui font école (d'où également des aspects sociologiques) à Göttingen autour de Noether. Sinaceur (2010) montre que l'œuvre d'Emmy Noether remplit les critères, formulés par Hacking, d'un style au sens des historiens et philosophes. Cette école change la manière de prouver en privilégiant les preuves générales limitant les calculs et mettant en avant les concepts. Définir des concepts a pour objectif de reconstruire un domaine sur une nouvelle base, sur la base de concepts plus fondamentaux, plus généraux et plus « simples ».

> Il faut s'appliquer à réduire un domaine mathématique à ses concepts fondamentaux les plus généraux, donc les plus simples, puis à construire et à reconstruire à l'aide de ces seuls concepts. (Hasse 1930)

Il s'agit donc d'une refondation mathématique (et non philosophique). Cette reconstruction apporte une vision nouvelle de la matière mathématique et ouvre la voie à des constructions inédites, de nouveaux objets. Ces concepts permettent de constituer la théorie d'un domaine, c'est-à-dire de distinguer les propriétés transférables ou généralisables à d'autres domaines de celles qui ne le sont pas. Sous la plume de Noether, concepts et structures souvent se confondent. Les structures algébriques sont donc le fruit d'un projet mené par des mathématiciens portant une conception particulière des mathématiques adoptée suite à une réflexion sur leur propre activité. La pensée structuraliste va de paire avec un questionnement méta-mathématique, dont l'on peut trouver des traces, outre au sein des correspondances entre mathématiciens, au niveau des préfaces des traités et manuels[1].

Le mot corps apparaît pour la première fois sous la plume de Dedekind (consulter Dedekind 2008, *Sur la Théorie des nombres entiers algébriques*), pour désigner un corps de nombres, c'est-à-dire une extension finie des rationnels, simultanément avec la définition axiomatique d'un idéal. Il prolonge ainsi les travaux de Kummer qui a introduit des « nombres idéaux » afin de pallier la non-unicité de la décomposition en produit de nombres premiers dans le cas de certaines extensions cyclotomiques. Dedekind montre et souligne le parallèle avec le concept de coupure. Les corps finis ont une origine, double, de provenances très différentes : d'une part les congruences polynomiales de Gauss et d'autre part les travaux de Galois (d'où la notation GF pour Galois Fields). C'est Weber qui en 1891 fait le premier le

[1] Ceux de l'époque, bien sûr, les manuels actuels ont en général totalement naturalisé le style bourbakiste et se gardent de tout commentaire méta-mathématique. A propos de ce que les mathématiciens laissent transparaitre des idées non formelles ou formalisées qui guident parfois leurs démarches, il est intéressant de citer André Weil, un des membres fondateurs de Bourbaki : « Les lois non écrites de la mathématique moderne interdisent en effet de publier des vues métaphysiques de cette espèce. Sans doute est-ce mieux ainsi ; autrement, on serait accablé d'articles plus stupides, sinon plus inutiles, que tous ceux qui encombrent à présent nos périodiques. » (*De la métaphysique aux mathématiques*, Œuvres t. II, p. 410). Weil regrette en fait que Hilbert n'ait publié ses résultats sur l'analogie entre ce que nous appelons de nos jours corps de fonctions et corps de nombres. « Rien n'est plus fécond, tous les mathématiciens le savent, que ces obscures analogies, ces troubles reflets d'une théorie à une autre, ces furtives caresses, ces brouilleries inexplicables ; rien aussi ne donne plus de plaisir au chercheur. Un jour vient où l'illusion se dissipe ; le pressentiment se change en certitude ; les théories jumelles révèlent leur source commune avant de disparaitre ; comme l'enseigne la Gita, on atteint à la connaissance et à l'indifférence en même temps. La métaphysique est devenue mathématique, prête à former la matière d'un traité dont la beauté froide ne saurait plus nous émouvoir. » (loc. Cit. p.408). Depuis Bourbaki, la règle est suivie : la méta-mathématique non mathématique semble réservée aux philosophes.

lien entre les corps finis et les corps de nombres. Pour autant, la théorie abstraite des corps sera investiguée par Steinitz en 1910, influencé par l'arrivée d'une nouvelle sorte de corps : les corps p-adiques issus des travaux de Hensel. Steinitz classifie les corps à l'aide de la notion de caractéristique et de corps premier. Le terme anneau est introduit par Hilbert en 1900, synonyme (à la suite de Dedekind qui parle plutôt d'ordre) d'anneau des entiers des corps de nombres, sans lien avec la notion de groupe ou de corps, et sans dresser de parallèle avec les anneaux de polynômes. Cette étape sera franchie par Noether en 1921 dans un article sur la factorisation des idéaux dans les anneaux abstraits, mettant en avant le rôle de la condition de chaines. L'idée des structures algébriques comme principe unificateur est absent des écrits de Hilbert et coïncide bien avec l'apport de Noether.

Les Elements de Bourbaki peuvent être regardés comme une tentative d'étendre à l'ensemble des mathématiques la vision unificatrice de van der Waerden autour de la notion de structure, comme en témoigne le manifeste *L'architecture des mathématiques* (Bourbaki 1948). Il définit mathématiquement la notion de structure mais n'en fait aucun usage mathématique : en quelque sorte, Bourbaki a « loupé le coche » de la théorie des catégories, introduite par Mac Lane et Eilenberg, qui constitue une véritable méta-théorie mathématique des structures. Mais l'influence de Bourbaki est indéniable dans le développement d'une conception structuraliste des mathématiques.

QUESTIONNEMENT DIDACTIQUE

1. *Une situation où les outils didactiques classiques sont inopérants*

Si l'on se réfère à la théorie des situations de Brousseau (1986), il est important d'introduire une situation-problème à même de faire émerger le nouveau concept. Ce dernier apparaît comme l'outil approprié pour résoudre le problème et son étude comme objet peut se poursuivre selon une dialectique outil-objet (Douady 1986) à même de montrer que les mathématiciens construisent leurs concepts et ceci afin de répondre à des problèmes précis.

Dans le cas de la structure de groupes, le problème de la résolution des équations est très complexe : la théorie de Galois ne fait pas partie du programme officiel des connaissances exigibles à l'Agrégation de Mathématiques en France. C'est dommage car cette belle théorie met clairement en évidence l'apport d'une présentation unifiée des structures, justifiant des notations similaires dans des contextes a priori différents (par exemple, l'indice d'un sous-groupe et le degré d'une extension de corps). D'autre part, la géométrie est présentée en adoptant une axiomatique à base d'espaces vectoriels et non comme l'étude des invariants sous l'action d'un groupe dans l'esprit du programme d'Erlangen. En définitive, si des exemples de groupes sont donnés dans les différents domaines mathématiques dont les groupes sont issus, la force du concept de groupe n'est pas illustrée par un enseignement même introductif aux deux grandes théories qui ont motivé dans l'histoire l'introduction du concept de groupe abstrait. L'introduction d'une situation-problème appropriée s'avère difficile, d'autant plus que les contextes d'émergence de la structure de groupe sont multiples et que c'est justement son pouvoir unificateur qui en fait la force. A l'issue d'un cours de théorie des groupes, les étudiants se posent toujours la question : « à quoi ça sert ? » et ne comprennent pas les enjeux de cette montée vers l'abstraction.

Au sein d'un cours d'histoire et épistémologie en Master, contexte approprié à un recul réflexif, l'auteur de cet article a posé les questions suivantes aux étudiants :

a) Donner des exemples de groupes qui sont isomorphes mais proviennent de domaines différents et variés des mathématiques. Comment démontrez-vous qu'ils sont isomorphes ?
b) Qu'est-ce qu'un « groupe abstrait » ? En quoi est-il abstrait ? Donner des exemples ainsi que des réalisations concrètes de ces groupes abstraits.
c) Citer des applications de la théorie des groupes qui sont extérieurs à la théorie des groupes.
d) A votre avis, quelles motivations conduisirent les mathématiciens à développer une théorie abstraite des groupes ?

Parmi les réponses obtenues à la première question figurent le théorème chinois et un isomorphisme via la fonction exponentielle entre les structures additives et multiplicatives sur les réels, deux exemples relevant du même domaine, celui des nombres. Les quelques élèves qui ont fourni une des réponses attendues, à savoir un isomorphisme entre le groupe des isométries du rectangle et Z/2ZxZ/2Z, sont incapables de le justifier en avançant une caractérisation abstraite de ce groupe par la propriété d'être engendré par deux éléments d'ordre deux qui commutent. Aucun étudiant ne s'est révélé capable de fournir une réponse aux trois autres questions, à part mentionner qu'un corps est un groupe.

Ce cas de figure n'est pas nouveau : les structures algébriques font partie des savoirs identifiés par les didacticiens, sur un plan épistémologique, comme des FUGS[2], c'est-à-dire des concepts formalisateurs, unificateurs, généralisateurs, simplificateurs (Robert 1987). Les difficultés liées à l'apprentissage de ces concepts peuvent être analysées comme une conséquence de leur nature FUGS (Rogalski 1995) :

Du point de vue de la dialectique outil-objet, les savoirs FUGS sont objets avant d'être outils. L'enseignement classique de ces savoirs, que ce soit l'algèbre linéaire (pris pour exemple par Rogalski en s'appuyant sur les travaux de Dorier et al. 1997) ou l'algèbre générale qui nous occupe ici, débute ainsi par une présentation axiomatique. Les tentatives de mise en place de problèmes à même de faire apparaître les concepts d'algèbre linéaire comme des outils pertinents échouent car il existe toujours des méthodes de résolution plus simples et plus directes, au cas par cas. Bref, les domaines unifiés par l'algèbre linéaire s'étudient indépendamment, de manière élémentaire, sans algèbre abstraite. L'aspect outil de l'algèbre linéaire apparaît tardivement dans l'exposition de la théorie, lorsque ressortent les caractéristiques FUGS de cette dernière.

En ce qui concerne les situations fondamentales, à même de donner du sens aux concepts FUGS, elles seront nécessairement très riches, impliquant différents domaines, différents points de vue. Il en résulte de grandes difficultés didactiques à les mettre en œuvre et l'on peut douter qu'elles réussissent vraiment à jouer le rôle attendu pour l'apprentissage. De plus, la construction de situations se heurte à l'obstacle déjà soulevé : la majorité des problèmes d'un niveau raisonnable peuvent être résolus sans algèbre linéaire abstraite. On ne comprend pas pourquoi les savoirs FUGS constituent une meilleure solution que les méthodes élémentaires sans se placer à un niveau supérieur d'organisation (de la théorie et des activités dédiées à l'apprentissage : ce ne sont pas des situations d'introduction mais des « situations réflexives » a posteriori permettant de cerner le caractère FUGS de ces concepts qui pourront être porteuses de sens et motiver auprès de l'apprenant la montée vers l'abstraction. Voir paragraphe suivant).

[2] Certains auteurs enlèvent le S ; sans doute la citation de Hasse en p. 4 de ce texte ne convainc pas tout le monde...

Quant à la dévolution, Rogalski fait l'hypothèse que c'est « une problématique plus qu'un problème qu'il s'agit de dévoluer à l'étudiant » afin que celui-ci soit « en état de comprendre – et d'accepter – le rôle du détour théorique formel et généralisateur comme une réponse à tout un champ de problèmes et de questionnements qui se ressemblent... alors qu'ils ne le savent pas ». C'est une rupture culturelle et un changement du contrat didactique, étant donné que les activités mathématiques antérieures sont souvent menées dans l'esprit de la dialectique outil-objet. Se pose alors la question de l'organisation didactique de la dévolution de cette problématique. Nous discuterons plus loin des choix opérés concernant l'enseignement de l'algèbre linéaire.

Si l'importance de la prise en compte du caractère FUGS de certains savoirs est soulignée par les didacticiens, les travaux didactiques dans le supérieur se limitent essentiellement à l'algèbre linéaire[3]. Nous allons évoquer les expérimentations menées et proposer des angles d'approche pour le cas des structures algébriques.

2. *L'apport du levier méta et autres stratégies en synergie*

Dorier, Robert, Robinet et Rogalski (Rogalski 1995, Dorier et al. 1997) ont construit leur expérimentation sur trois piliers :

- le recours au levier « méta » (introduit dans Robert et Robinet 1993) par la création de situations réflexives mêlant activités mathématiques et réflexions de nature plus épistémologique, dans le but de déclencher une prise de conscience de l'utilité de ces concepts abstraits et généraux (rôle des axiomes, etc.), d'en éclairer la nature particulière et d'en faciliter l'appropriation par un recul réflexif sur les méthodes en jeu dans les résolutions de problèmes-types ;
- la construction d'ingénieries longues, se donnant le temps de construire des savoirs préalables à unifier (consolidant également les prérequis), de les relire dans la théorie unifiée, enfin de mettre en avant des nouveaux problèmes inaccessibles auparavant (noter le caractère non-linéaire, par rapport à un enseignement classique, à travers les reprises et changements de point de vue) ;
- l'utilisation des changements de points de vue comme moteurs d'unification. Par exemple, la notion de rang peut concerner une famille de vecteurs, une application linéaire, une matrice ou un système d'équations linéaires. Le passage de l'un à l'autre est un changement de point de vue qui s'exprime à travers un théorème. L'algèbre linéaire fourmille de tels procédés qui mettent souvent en jeu des changements de cadre (géométrique, algébrique, numérique,...) ou de sous-cadre (géométrie élémentaire, géométrie vectorielle, théorie des matrices,...) ainsi que des changements de registre de représentation sémiotique (Duval 1993) que l'étudiant doit mettre en œuvre pour appréhender les tâches complexes qui lui sont proposées. L'articulation subtile entre cadres, registres et points de vue est analysée plus en détail dans Rogalski 2002. On peut également, dans l'esprit du thème de ce GT3 et à la suite de Sierpinska (Dorier 1997, Chap. VII), analyser la situation en terme de modes de pensée qui coexistent en algèbre linéaire : le synthétique-géométrique, l'analytique-arithmétique et l'analytique-structurel.

Qu'en est-il des résultats obtenus ? Évaluer le « méta » est particulièrement délicat. Pour autant, ce changement de contrat semble produire une écoute accrue de la part des étudiants qui prennent d'eux-mêmes en cours des notes sur le discours méta de l'enseignant en plus des

[3] Marc Rogalski me signale également la thèse récente de Stéphanie Bridoux sur l'enseignement des premières notions de topologie (thèse non publiée à ce jour).

traces écrites au tableau. Quiconque enseigne les mathématiques à l'Université percevra déjà cela comme une victoire. Certaines méthodes semblent assez bien dominées par les étudiants, même si l'algèbre linéaire continue d'être un sujet difficile. Des résultats précis sont donnés dans les comptes-rendus d'expérimentation. Tel que nous le percevons, les difficultés majeures à faire vivre un tel dispositif résident dans le fort investissement pédagogique requis et la difficulté matérielle à mettre en place une ingénierie longue dans le contexte actuel du LMD qui a provoqué en France l'émiettement des modules d'enseignement[4].

Que pouvons-nous transférer de cette expérimentation ?

Notre analyse épistémologique a montré que l'émergence des structures algébriques est liée à celle d'un nouveau mode de pensée et d'un nouvel usage de la méthode axiomatique, reconnus en tant que tels au sein de la communauté mathématique qui prend du recul pour définir ses concepts et modes opératoires. Cet argument et la nature FUGS du savoir en question permettent de soutenir que la dévolution à l'étudiant d'une réflexion méta de nature épistémologique sur les concepts en jeu serait approprié pour favoriser l'apprentissage des structures algébriques. Cet argument induit également la nécessité d'un nouveau contrat didactique. Les activités réflexives, comme pour tout savoir de type FUGS, pourront être organisées autour de trois types de situations (qui s'enchainent éventuellement dans le temps de l'apprentissage comme c'est le cas dans Rogalski 1995) :

- une convergence entre les domaines à unifier ;
- des situations où il apparaît clairement a posteriori aux étudiants que, sans la nouvelle théorie unifiée, elles seraient très difficiles à étudier ;
- des situations de transfert d'un domaine à un autre, permises par une théorie unifiée.

Nous retenons également l'idée d'un travail par petits groupes lors de ces séances méta ponctuant les séances classiques. Dans le cas des structures algébriques, on peut rajouter des situations qui font apparaître des structures qui « fonctionnent » moins bien que les structures classiques de façon à motiver ces dernières par la mise en avant de leurs bonnes propriétés.

Mais si nous avons décrit ici une stratégie globale qui nous paraît particulièrement pertinente, on n'échappera pas à des travaux plus locaux qui nécessitent une analyse didactique fine des différentes notions en jeu dans chaque théorie structurale et des difficultés rencontrées dans leur apprentissage. La mise en œuvre de ce programme local/global pour la structure de groupe, avec des choix encore à préciser et une mise en relation avec la théorie des modèles, fait l'objet d'une thèse qui vient de débuter, co-encadrée à Montpellier par l'auteur de ce texte et Viviane Durand-Guerrier.

Un fait nouveau par rapport à l'algèbre linéaire est le suivant : comme l'a souligné l'analyse épistémologique, l'unification se situe à plusieurs niveaux :

- le niveau 1 : une même théorie s'applique à des objets de nature différente ;
- le niveau 2 : la présentation axiomatique des structures en permet un traitement unifié (on se pose à propos des différentes structures le même type de questions que l'on cherche à résoudre avec le même type d'outils) mettant en avant les ponts entre ces structures ;
- le niveau 3 : ce qui était forme (les structures) devient pleinement objet à un niveau supérieur d'organisation, la théorie des catégories ou autre méta-théorie des structures.

[4] Tendance que l'on s'efforce actuellement d'inverser...

Si le niveau 3 ne peut guère être abordé de façon réaliste avant le M2, l'enjeu de la pensée structuraliste se situe au niveau 2, les manuels d'algèbre moderne le mettent clairement en exergue à la suite de l'ouvrage de van der Waerden. Le traitement unifié se caractérise par des méthodes ensemblistes (un sous-ensemble hérite de propriétés, le produit direct, l'étude du comportement des structures vis à vis des opérations ensemblistes, l'étude de la conservation des propriétés par image directe et image réciproque, ainsi que des résultats plus fins comme la caractérisation de la noethérianité par une condition de chaîne, etc.) et par la mise en avant de la notion de morphisme (les théorèmes d'isomorphisme, le rôle du noyau, les classifications à isomorphisme près, les caractérisations par des propriétés universelles, etc.). On peut relever parmi les ponts entre structures que la présentation structuraliste permet de dégager : le groupe multiplicatif d'un corps (qui, agissant sur lui-même par conjugaison, permet de démontrer le théorème de Wedderburn sur la commutativité des corps finis), le groupe des automorphismes d'un corps (ou des K-automorphismes d'une extension, point de départ d'une présentation moderne de la théorie de Galois), la théorie vectorielle des corps (qui met un terme à des problèmes de constructibilité à la règle et au compas posés par les Grecs et montre la puissance d'un formalisme somme toute assez simple), les corps finis comme quotient d'un anneau de polynômes, les groupes abéliens comme module sur les entiers (qui permet de dresser un parallèle avec la Jordanisation), etc. On peut même parler de viaducs : la théorie de Galois, la théorie des représentations des groupes finis, etc. (pour rester dans l'algèbre, la pensée structuraliste mixant également des structures de nature différente : topologique, algébrique, métrique, différentielle, etc.). Ces énumérations un peu longues donneront au lecteur une idée des enjeux de l'unification de niveau 2 et de son caractère architectural pour la matière mathématique.

Van der Waereden et Emmy Noether ont inauguré un style nouveau. Malgré la mise en place du vocabulaire ensembliste à l'entrée de l'Université et la présentation axiomatique de l'algèbre linéaire au cours des deux premières années de licence, ce style apparaît hermétique à la majorité de nos étudiants de L3. La formalisation revêt, plus que jamais dans l'algèbre moderne, un rôle *fondationnel* qui est incompris par les étudiants et n'a pas encore été pris en charge dans les recherches en didactique autour des savoirs FUGS (le F pour formalisation et non fondation). Nous faisons l'hypothèse qu'une ingénierie introduisant des situations réflexives de niveau méta 2 montrerait les bénéfices d'une telle formalisation. Un approfondissement de l'analyse épistémologique et mathématique, un questionnement philosophique et cognitif sur le processus de conceptualisation et de construction de concepts en mathématiques, de reconstruction autour de concepts, ainsi qu'une adaptation de la théorie de Brousseau prenant en compte le méta sont des points essentiels à creuser. L'auteur se fixe comme objectif de mener une expérimentation testant notre hypothèse dans le cadre de l'enseignement des structures d'anneaux et de corps qu'il assure à l'Université Montpellier 2. C'est aussi l'occasion d'approches plus « locales », par exemple un travail problématisant par la coloration arithmétique l'étude des anneaux, en relation avec l'apparition dans l'histoire des notions d'anneau, idéal, d'éléments irréductible et premier, etc.

REFERENCES

Artigue M. (1991) Epistémologie et Didactique. *Recherche en Didactique des Mathématiques* 10-2/3, 241-286.

Bachelard G. (1938) La formation de l'esprit scientifique (13e éd. 1986). Paris : Vrin.

Bourbaki (1948) *L'architecture des mathématiques.* In Le Lionnais F. (Ed.) (1948, rééd. 1997) *Les grands courants de la pensée mathématique*. Paris : Hermann.

Brousseau (1986) Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 7(2), 33-55.

Cavaillès J. (2008) *Œuvres complètes de Philosophie des Sciences*. Paris : Hermann.

Cory L. (1996) *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures* (2e éd. 2004). Basel : Birkhäuser.

Douady R (1986) Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques* 7(2), 5-31.

Dedekind R. (2008) *La création des nombres*. Paris : Vrin.

Dorier J.-L. (Ed.) (1997) L'algèbre linéaire en question. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Duval R. (1993) Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives* 5, IREM de Strasbourg.

Granger G. G. (1994) *Formes, opérations, objets*. Paris : Vrin.

Grattan-Guiness I. (Eds.) (2005) *Landmark Writings in Western Mathematics 1640-1940*. Amsterdam : Elsevier Science.

Guin D., Hausberger T. (2008) *Algèbre – Tome 1 : groupes, corps et théorie de Galois*. Paris : EDP Sciences.

Hasse H. (1930) Die moderne algebraische Methode. *Jahresbericht der DMV* 39, 22-34.

Jordan C. (1870). *Traité des substitutions et des équations algébriques*. Paris.

Lautmann A. (2006) *Les mathématiques, les idées et le réel physique*. Paris : Vrin.

Patras F. (2001) *La pensée mathématique contemporaine*. Paris : PUF.

Robert A. (1987) De quelques spécificités de l''enseignement des mathématiques dans l'enseignement post-obligatoire. *Cahier de didactique des mathématiques* 47. IREM de Paris 7.

Robert A., Robinet J. (1993) Prise en compte du « méta » en didactique des mathématiques. *Cahier de DIDIREM* 21. IREM de Paris 7.

Rogalski M. (1995) *Que faire quand on veut enseigner un type de connaissances tel que la dialectique outil-objet ne semble pas marcher et qu'il n'y a apparemment pas de situation fondamentale ? L'exemple de l'algèbre linéaire*. Séminaire DidaTech n°169, 127-162. Université Joseph Fourier. Grenoble.

Rogalski M. (2002) Les changements de cadre dans la pratique des mathématiques et le jeu de cadres de Régine Douady. *Actes de la journée en hommage à Régine Douady* (juin 2001) (pp. 13-30), IREM de Paris 7.

Serret J. (1849) *Cours d'algèbre supérieure*. Paris.

Sinaceur H. B. (2010) *Emmy Noether et l'école algébrique allemande dans le premier tiers du XXe siècle : mathématiques, style de pensée et philosophie*. Prépublication.

Sinaceur H. B. (2005). From Kant to Hilbert : French philosophy of concepts in the beginning of the twentieth century. In Ferreiros J., Gray J.J. (Eds.) (2006) *Architecture of Modern Mathematics: Essays in History and Philosophy*. Oxford :Oxford University Press.

Vuillemin J. (1993) La philosophie de l'algèbre(2e éd.) Paris : PUF.

Van der Waerden B. L. (1930) *Moderne Algebra*. Berlin : Springer.

Weber H. (1895) *Lehrbuch des Algebra*. Braunschweig.

Wussing H (2007) *The Genesis of the Abstract Group Concept: A Contribution to the History of the Origin of Abstract Group Theory*. Mineola N. Y: Dover Publications.

LIMITE DES MÉTHODES SYNTAXIQUES EN ALGÈBRE DU SECONDAIRE

Rahim KOUKI* – Imène GHEDAMSI*

Résumé – L'apprentissage de techniques opératoires est un objectif fondamental de l'enseignement des notions d'équations, inéquations et fonctions algébriques au secondaire. Du côté des élèves, une prépondérance est accordée à une application automatique des techniques. Dans cette communication nous présentons une investigation didactique prenant appui sur un croisement de la sémantique logique avec les praxéologies mathématiques et les registres de représentations sémiotiques. Cette étude vise à montrer qu'en absence de la mobilisation de techniques sémantiques articulant différents modes d'interprétations inter-registre et intra-registres, les techniques syntaxiques de résolution s'avèrent inopérantes et mettent les apprenants en échec.

Mots-clefs : syntaxe, sémantique, algèbre élémentaire, praxéologies, registres sémiotiques

Abstract – The teaching of algebra, in the secondary school, focus on the learning of operating skills which are often automatically used by pupils without any control. In this paper, we present a didactic investigation according to logical and anthropology theories. This study aims to show that the automatic mobilization of syntactical skills, in certain cases, put students in check.

Keywords: syntax, semantic, elementary algebra, anthropology, semiotic

I. INTRODUCTION

Dans cette communication, nous essayerons de monter que la référence à la théorie sémantique de la vérité introduite par Frege (1971) et Russell (1961, 1989) et développée par Tarski (1960, 1972 et 1974) et Quine (1972), permettrait de mieux expliciter les aspects épistémologiques des notions d'égalité, d'inégalité, le statut des lettres … et pourrait enrichir les analyses didactiques autour des objets équations, inéquations et fonctions au secondaire.

Pour cela, nous avons conduit une double analyse en terme de transposition didactique des programmes et des manuels de l'enseignement secondaire en Tunisie en croisant la théorie anthropologique du didactique et en particulier la notion de praxéologies mathématiques (Chevallard 1989, 1992) avec la catégorisation syntaxe / sémantique dont nous avons montré qu'elles ne prennent pas explicitement en compte cette articulation qui relève d'un niveau métamathématique (au sens logique du terme).

Les résultats de ces analyses ont été appuyés par des entretiens semi-directifs en direction des enseignants et de questionnaire auprès d'élèves du secondaire et d'étudiants de classes préparatoires.

II. APPORTS DE LA SÉMANTIQUE LOGIQUE DANS L'INTERPRETATION DES ÉQUATIONS ET DES INÉQUATIONS

Chevallard (1989) a souligné la dialectique entre l'arithmétique et le calcul algébrique en l'interprétant en terme d'articulation syntaxe / sémantique et explique que

> Lorsqu'en classe de sixième, l'enseignant passe de l'observation que $2+3=5$ et $3+2=5$, à l'écriture de la relation générale $a+b=b+a$, il passe alors du calcul sur les nombres (entier naturel) à un calcul algébrique (à coefficient entiers naturels). En d'autres termes, un calcul algébrique, que nous ne définirons pas plus précisément ici, rend manifeste une syntaxe à laquelle le domaine de calcul associé fournit une sémantique. (Chevallard 1989, p. 50)

* Institut Préparatoire aux Etudes d'Ingénieurs El Manar, LAMSIN-ENIT – Tunisie – kouki_ra@yahoo.fr, ighedamsi@yahoo.fr

© Kouki R., Ghedamsi I. (2012) Limite des méthodes syntaxiques en algèbre du secondaire. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT3, pp. 435–444). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

Nous pensons que la question de l'articulation des deux points de vue sémantique et syntaxique est un champ vaste encore à explorer notamment dans l'enseignement de l'algèbre au secondaire[1].

Dans notre travail de recherche, nous avons montré que, d'une manière générale, la question de l'articulation des deux points de vue sémantique et syntaxique est peu prise en compte dans les travaux de recherche en didactique des mathématiques, ainsi que dans les programmes et les manuels du secondaire en ce qui concerne l'enseignement de l'algèbre au secondaire.

Nous faisons l'hypothèse, que la conception sémantique de la vérité développée dans la théorie des modèles de Tarski (1960, 1972 et 1974), en appui sur la notion de satisfaction d'une phrase ouverte par un élément, peut nous offrir un cadre de référence permettant de traiter certaines questions liées à l'articulation syntaxe / sémantique dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques.

*Dans un langage formalisé, comme l*e calcul des prédicats, la sémantique logique étudie les interprétations possibles des symboles et les relations entre les diverses interprétations des formules utilisées. Elle permet d'établir la notion de vérité à partir de la notion de satisfaction d'une formule. Rivenc (1989), explique que

> (…) le concept de vérité est définissable à partir de la notion de satisfaction. En lui-même, un énoncé σ d'un langage *L* n'est ni vrai, ni faux faute de signification. Pour lui donner un sens, il faut associer aux symboles non logiques de *L* une interprétation.» (Rivenc 1989, p. 173)

L'application d'un prédicat à un terme général, ou à plusieurs termes donne ce que Quine appelle une phrase ouverte (cf. Durand-Guerrier et al 2000) ou une fonction propositionnelle (cf. Tarski 1960). Une phrase ouverte n'est pas susceptible de recevoir une valeur de vérité ; étant donné un domaine d'interprétation, elle peut être satisfaite par certains éléments et pas par d'autre ; ou éventuellement satisfaite par tous les éléments du domaine, ou par aucun. Par exemple la phrase « x *est pair* » où x est une variable libre n'a pas de valeur de vérité ; dans les entiers naturels, elle est satisfaite par 4, mais pas par 3.

Les notions de phrases ouvertes et de satisfaction permettent de dire que dans le langage de l'algèbre, une équation ou une inéquation peut ainsi avoir une définition non ambiguë de phrase ouverte, au sens de Quine (1972), pouvant comporter une ou plusieurs variables libres.

Une équation est considérée comme une phrase ouverte comportant une ou plusieurs variables libres. Étant donné un domaine d'objets, un élément de ce domaine est solution de l'équation ou de l'inéquation s'il satisfait la phrase ouverte, c'est à dire si et seulement si la proposition obtenue en assignant cet objet à la variable devient une proposition vraie dans le domaine considéré. Ainsi, résoudre une équation ou inéquation dans un domaine donné (appelé en logique univers du discours), revient à déterminer tous les objets de ce domaine qui satisfont cette phrase ouverte. Ce point de vue sur la résolution des équations est ce que l'on appelle en logique le point de vue sémantique. C'est la première définition que vont rencontrer les élèves.

D'un autre côté, le terme de syntaxe est utilisé en logique dans un sens large englobant ce qui relève de la théorie de la démonstration au sens formel du terme, en opposition avec la sémantique, qui prend en compte les interprétations.

> Carnap parle d'une syntaxe logique du langage scientifique. Par logique de la science, il entend essentiellement une théorie formelle de ce langage, c'est-à-dire l'établissement systématique des règles

[1] Selden etSelden (1995), Durand-Guerrier (1999), Durand-Guerrier et al (2000), Chellougui (2004) et Alcock (2009).

> valant pour ce langage et le développement des conséquences de ces règles. Cette théorie est formelle, elle ne considère donc ni la signification des termes, ni le sens des expressions. (Ouelbani 1992, p. 183)

Dans l'environnement équation, inéquation et fonction, on peut définir deux types d'équivalence : une équivalence sémantique : deux équations sont équivalentes si et seulement si elles sont satisfaites exactement par les mêmes éléments ; une équivalence syntaxique caractérisée par des règles de transformation algébriques. Cependant, bien que les transformations algébriques permettent de travailler essentiellement au niveau de la syntaxe au moment de conclure, il est parfois nécessaire de revenir aux objets du domaine d'interprétation. En effet, certaines transformations ne préservent pas la satisfaction, ce qui nécessite un contrôle sémantique. À titre d'exemple, l'application de certaines règles de transformations syntaxiques et en absence d'un contrôle sémantique, l'équation $x^2 - 1 = |x+1|$ aurait pour ensemble de solutions $\{-1,0,2\}$ qui contient des éléments qui ne satisfont pas l'équation de départ. Ceci illustre la nécessité de pouvoir articuler les points de vue sémantique et syntaxique pour la résolution des équations ou inéquations.

III. CROISEMENT DES PRAXÉOLOGIES MATHÉMATIQUES ET DE LA DIALECTIQUE SYNTAXE / SÉMANTIQUE : RÉSULTATS SUCCINTS D'UNE ÉTUDE DU PROGRAMME ET DE MANUELS TUNISIENS

Le modèle d'analyse praxéologique (Chevallard 1998) décrit une organisation pouvant se construire en classe de mathématique. Le bloc (tâche, technique) représente le savoir faire et ce dernier fait appel au savoir restreint formé par une technologie justifiant la technique, qui à son tour est éclairée par une théorie, ce qui constitue le bloc (technologie, théorie).

Afin de s'inscrire dans le cadre de notre problématique, nous avons procédé à l'étude des programmes et des manuels scolaires[2] dans l'environnement équation, inéquation et fonction, en articulant l'analyse praxéologique avec les dimensions syntaxe / sémantique, registres de représentations sémiotiques (Duval 1991) et le niveau de mise en fonctionnement des connaissances (Robert 1998).

Ce qui nous a conduit à utiliser une grille d'analyse bidimensionnelle, telle que présentée ci- dessous.

Technique /Tâche[3] / ***NMFK***[4]	***Sémantique***	***Syntaxique***	***Mixte***[5]
Elémentaire	Vérifier/ numérique-graphique	Factoriser/algébrique	Résoudre/numérique-algébrique
Mobilisable	Interpréter/graphique-algébrique	Montrer/graphique	Etudier et représenter / algébrique-analytique-graphique
Disponible	Existence/analytique-graphique	Discuter/algébrique	Conjecturer/numérique-algébrique-graphique

Tableau 1 *– Grille d'analyse*

---

[2] Remarquons qu'il n'y a qu'un seul manuel pour chaque section d'un niveau d'enseignement.
[3] Nous entendons par type de technique correspondant à un type de tâche bien déterminé.
[4] Niveau de mise en fonctionnement des connaissances.
[5] Les techniques sont supposées mixtes lorsqu'elles mobilisent, dans le traitement des objets mathématiques, à la fois les deux points de vue syntaxique et sémantique.

En dépit du fait que le bloc (technologie, théorie) n'apparaît pas explicitement dans cette grille, nous avons fait le choix de l'entendre comme étant un ensemble de résultats généraux permettant de justifier et d'entreprendre le contrôle sémantique.

A l'issus de l'étude, il s'avère que :

- Le traitement des équations, inéquations dans les rubriques exercice d'application et problèmes de synthèse, sollicite le plus souvent l'usage de techniques d'ordre syntaxique. En revanche, les activités d'introduction (souvent données sous forme de problèmes de modélisation ou de situations graphiques) prennent en compte d'une façon quasi-totale, l'articulation syntaxe/sémantique.
- L'articulation entre équation d'une courbe / représentation graphique et notion de fonction $y = f(x)$ / Courbe associée à f d'une part, et la notion de relation $R(x,y) = 0$ / conique, d'autre part n'est pas clairement explicitée. On pourrait se demander si les élèves seront en mesure de procéder, d'une manière autonome, au contrôle sémantique souhaité dans l'exemple introductif.
- L'introduction des fonctions s'appuie sur des techniques d'ordre sémantique de substitution, interprétation, etc. (Chevallard 1989)

IV. COMPLEMENT D'INVESTIGATION

Afin de tenter de mieux cerner le rapport implicite des enseignants et des élèves à l'articulation syntaxe / sémantique, nous avons conduit une étude du terrain via d'une part, des entretiens semi-directifs en direction des enseignants et d'autre part, d'un questionnaire[6] à destination d'élèves du secondaire et d'étudiants des classes préparatoires.

1. Entretiens avec des enseignants

Une partie des entretiens semi-directifs, réalisée avec six enseignants[7], vise à dégager ce que les enseignants pensent de la mobilisation des points de vue sémantiques et syntaxiques dans le processus enseignement et apprentissage des savoirs mathématiques dans l'environnement équation, inéquation et fonction.

Les questions posées dans cette partie des entretiens étaient d'ordre professionnel et ont été construites à partir des résultats de l'analyse des programmes et des manuels scolaires pour voir ce que les enseignants utilisent comme outils pour traiter les équations du premier et du second degré.

Nous présentons ci-dessous des extraits de réponses, aux différentes questions posées aux enseignants interviewés[8].

---

[6] Ce questionnaire a été élaboré dans le cadre d'une recherche que nous avons conduit dans notre travail de thèse et a été proposé à 105 élèves du secondaire et à 38 étudiants des classes préparatoires aux études d'ingénieurs (Kouki, 2008).

[7] Ces entretiens ont été réalisés au laboratoire de l'audio-visuel, à l'Institut Supérieur de l'Education et de la Formation Continue à Tunis, qui nous semble être un lieu qui permet de préserver la convivialité et la confidentialité.

[8] Les enseignants étaient interviewés suivant un guide d'entretiens dont la première partie vise à dégager le point de vue du praticien sur les enjeux et les spécificités d'une situation d'enseignement proposée à un groupe d'élèves et qui ne fait pas partie de l'objet de cette communication.

Question / Enseignant	**Quelles sont les règles de résolutions que vous énoncez aux élèves ?**	**Comment introduisez-vous le second degré ?**	**Comment amener les élèves à ne pas se lancer automatiquement dans un travail algorithmique ?**	**Explicitez-vous les vérifications ?**
Ens 1	*... avant tout, il faut chercher le domaine de validité*	*... des équations du second degré qu'on factorise ... faire la forme canonique pour delta*	*...dans l'exemple $x^2-5=0$ ce n'est pas la peine de faire delta*	*...bien sûr ils doivent vérifier !*
Ens 2	*... s'assurer que chaque solution est bien dans le domaine*	*... je ne peux pas vous répondre*	*... à la fin euh ! la vérification…*	*... ah ! oui, oui*
Ens 3	*... il faudra ramener l'équation au type $ax=b$ par exemple ...*	*... écrire sous la forme canonique pour delta*	*... phrases mathématiques avec sens*	*... pas tout le temps*
Ens 4	*... ne pas apprendre des algorithmes*	*... il vaut mieux le faire à l'aide de cas particuliers*	*... lorsqu'on donne $\|x-5\|=-2$ là on travaille sur le sens de l'équation*	*... logiquement c'est à la dernière étape*
Ens 5	*... savoir comment manipuler les techniques de résolution !*	*... introduit le second degré en en utilisant la factorisation…*	*... des problèmes de la vie courante*	*... vérifier à la fin de la résolution*
Ens 6	*... faire attention à l'univers*	*... on introduit par exemple la surface d'un rectangle dont les côtés vérifient une relation bien particulière.*	*... interpréter correctement*	*... pas de manière systématique*

Tableau 2 – *Extraits de réponses des enseignants*

Nous pouvons dire que certains enseignants favorisent l'outil syntaxique de résolution au profit de l'outil sémantique. Ces enseignants déclarent recourir aux techniques de contrôle et de vérification qu'ils appliquent parfois à la fin de la résolution. D'autres, appuient la mobilisation de l'outil sémantique et son articulation avec le syntaxique, dans les résolutions. Ces derniers ont soulevé les questions d'interprétation des écritures mathématiques et de l'univers du discours, cette interprétation pouvant faire appel à un travail dans un ou plusieurs registres.

La question de sens semble être une notion assez complexe et les réponses des enseignants sont totalement différentes. En effet, il y a ceux qui pensent que le sens est intra-mathématique et se justifie par un travail sur la vérification, contrôle, contres exemples etc. D'un autre côté, il y a ceux qui pensent que le sens se donne aux objets mathématiques en travaillant dans un niveau extra-mathématiques par l'introduction de situations faisant intervenir des savoirs issus d'autres champs disciplinaires.

2. Cas de résolution d'une inéquation produit

Afin de dégager dans quelle mesure les deux aspects syntaxique et sémantique cohabitent, lorsque les élèves du secondaire et les étudiants de classes préparatoires sont en situation de résolution, nous avons proposé un questionnaire[9] dans lequel nous avons introduit quatre exercices faisant référence à des objets mathématiques croisant des écritures fonctionnelles et équationnelles, des résolutions graphiques et numériques.

L'analyse mathématique et didactique des différentes stratégies de résolution, dans le traitement des tâches proposées, s'est appuyée sur la grille mentionnée précédemment, aussi bien au niveau a priori qu'a posteriori.

Dans le cadre de cette communication, nous avons fait le choix de se limiter à présenter les résultats concernant l'exercice n°4.

Cet exercice vise à déterminer l'ensemble des solutions de l'inéquation produit de deux variables réelles $(y-x)(y-x^2+3x)>0$, dont voici l'énoncé détaillé.

Soient f et g les fonctions définies sur IR par : $f(x)=x$ et $g(x)=x^2-3x$.

Soient Γ_f et Γ_g les courbes représentatives de f et g dans un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Représenter Γ_f et Γ_g dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

2) Déterminer le signe de $h(x,y)=(y-x)(y-x^2+3x)$ dans chacun des cas suivants :

$$(x,y)=(2,1);(x,y)=(1,3);(x,y)=(5,4);(x,y)=(-2,-1);(x,y)=(-1,-2);(x,y)=(6,7)$$

3) Placer, dans $(O,\vec{i},\vec{j})$, les points A,B,C,D et F de coordonnées respectives : $(2,1)$, $(1,3)$, $(5,4)$, $(-2,-1)$, $(-1,-2)$ et $(6,7)$.

4) Déterminer, par le calcul ou graphiquement, l'ensemble des solutions de l'inéquation : $(y-x)(y-x^2+3x)>0$.

Seules les questions 1 et 4 ont été proposées aux étudiants des classes préparatoires. Effet, les question 2 et 3 visent à enrichir le milieu matériel des élèves du secondaire par des éléments indicateurs qui pourraient les conduire à changer du registre algébrique au registre graphique afin de visualiser les différentes régions du plan déterminées par les deux représentations graphiques Γ_f et Γ_g d'un côté, et d'interpréter la masse des différents points A,B,C,D et F dans chaque région du plan considéré afin de répondre à la quatrième question, d'un autre côté. Par ailleurs, les étudiants des classes préparatoires, nous estimons qu'ils disposent d'acquis leurs permettant de résoudre l'inéquation en s'appuyant uniquement sur les graphes Γ_f et Γ_g qui partagent le plan considéré.

L'analyse a priori des trois premières questions montre que les élèves peuvent mobiliser différents types de techniques articulant différents registres algébriques, analytiques numériques et graphiques pour répondre aux tâches intermédiaires.

Cependant, la réponse à la quatrième question, soit la résolution de l'inéquation $(y-x)(y-x^2+3x)>0$ ne peut se faire qu'en associant les équations de droite $y-x=0$ et de la parabole $y-x^2+3x=0$ aux graphes Γ_f et Γ_g (ces graphes se coupant à l'origine du repère orthonormée $(O,\vec{i},\vec{j})$ et au point de coordonnées $(4,4)$).

[9] Ce questionnaire d'une durée d'une heure et demie a été réalisé dans quatre établissements de l'enseignement secondaire tunisien et un institut préparatoire aux études d'ingénieurs.

La droite d'équation $y-x=0$ partage le plan en deux demi-plans dont le demi plan ouvert supérieur est celui des points $M(x,y)$ tels que : $y-x>0$ et l'intérieur de la parabole est l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $y-x^2+3x>0$. Le signe de la relation $(y-x)(y-x^2+3x)$ est déterminé dans la figure ci-dessous.

Régions	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
$y-x$	-	-	+	+	+
$y-x^2+3x$	-	+	+	-	-
$(y-x)(y-x^2+3x)$	+	-	+	-	-

Signe de $(y-x)(y-x^2+3x)$ dans différentes régions du plan

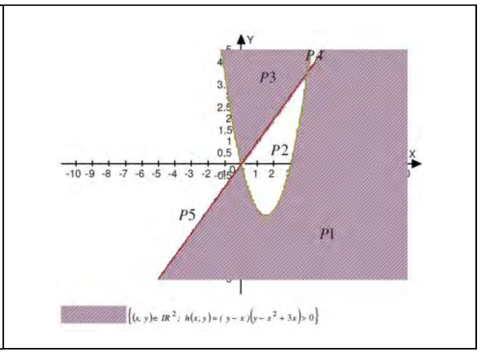


***Figure 1** – Ensemble des solutions*

En conclusion, l'ensemble des solutions de l'inéquation est la région $P_1 \cup P_3$ (Figure 1).

L'analyse a priori de la quatrième question montre que les élèves et les étudiants disposent de trois types de techniques :

- La première technique t_1 du type mixte consiste à interpréter graphiquement le signe des deux expressions algébriques $y-x$ et $y-x^2+3x$ et à conclure que le produit est strictement positif dans la région $P_1 \cup P_3$.
- La deuxième technique t_2 du type sémantique articulant les registres graphique et algébrique consiste à affecter le signe de $h(x,y)$ à chaque point placé dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ et de déduire par la suite qu'ils sont les points de la région $P_1 \cup P_3$.
- La troisième technique t_3 est une technique purement syntaxique du registre algébrique qui consiste à faire des tentatives de développement et de transformation de la forme de l'inéquation $(y-x)(y-x^2+3x)>0$ qui s'avère inopérantes.

L'analyse du corpus formé de 105 copies d'élèves montre que dans les trois premières questions, les élèves ont recours à différents types de techniques sémantiques, syntaxiques et mixtes dans les registres algébrique, graphique et numérique. Ceci montre qu'une bonne partie des élèves articulent les objets fonction linéaire, fonction trinôme et courbe.

D'un autre côté, la quasi-totalité des 38 copies d'étudiants présentent des réponses correctes à la première question.

Concernant la réponse à la dernière question, les résultats du dépouillement montrent que 76 copies, soit environ 53,1% de la population n'ont pas donné de réponses. En particulier, les élèves qui mobilisent prioritairement des techniques syntaxiques ne donnent le plus souvent pas de réponses.

Les techniques syntaxiques du registre algébrique sont majoritairement dominantes avec 28 réponses parmi 67 et ne contiennent aucune réponse exacte. Les techniques du type sémantique du registre graphique sont au nombre de 18 et contiennent 4 bonnes réponses et les deux techniques mixtes mobilisées étaient correctes. Enfin les réponses qui n'ont aucun lien avec l'exercice sont classées dans les autres types de réponses.

Le travail sur les trois exercices conforte ces résultats et montre que les élèves mobilisent les techniques syntaxiques de résolution dès qu'elles sont disponibles même si le milieu est enrichi par des questions intermédiaires faisant appel à des traitements graphiques ou numériques du type sémantique. D'autre part, nous avons remarqué qu'un pourcentage assez élevé d'élèves et d'étudiants ne mobilise l'outil sémantique de résolution que si le type de tâche demandé l'impose. D'un autre côté, une différence assez remarquable entre les procédures de résolution des exercices du questionnaire entre les élèves du même niveau nous fait penser qu'elle pourrait être liée à la pratique des enseignants en classe.

V. CONCLUSION

L'approche logique via la référence à la notion de phrase ouverte et sa satisfaction permet de cerner les difficultés que pourraient rencontrer les élèves dans l'environnement équation, inéquation et fonction.

Les analyses didactiques ont montré, du côté institutionnel, la pertinence de la prise en compte de l'articulation entre le point de vue sémantique et syntaxique, qui relève d'un niveau logico-mathématique, pour enrichir les catégorisations d'analyse proposées par Chevallard d'une part, et la place du point de vue sémantique dans des situations où le raisonnement purement syntaxique est inopérant.

L'articulation entre les équations, courbes et fonctions, étant un moyen de prendre en charge la nécessité du recours sémantique, n'est pas explicitement pris en charge par les programmes, les manuels.

Une étude articulant les éléments de notre réflexion en didactique, et principalement en matière de raisonnement mathématique, avec les pratiques enseignantes pourrait nous renseigner davantage sur les priorités des apprentissages, les manques ainsi que les opportunités qui pourraient s'offrir.

Enfin, nous pensons que l'investigation des mêmes notions d'équation, inéquation et fonction dans des domaines autres que le domaine numérique, qui apparaissent dans l'avancée du cursus serait prometteuse pour les analyses didactiques. Nous faisons l'hypothèse que les difficultés s'amplifient au niveau de l'université (Ghedamsi, 2008), où le travail algébrique sur les fonctions, développements limités, équations différentielles se complexifient. À ce niveau d'enseignement, la pensée sémantique et la rationalité mathématique occupent une place importante pour réussir le traitement des objets mathématiques.

RÉFÉRENCES

Akkus O., Cakiroglu E. (2010) The effects of multiple representations-based instruction on seventh grade students' algebra performance. *Proceedings CERME* 6, 420 – 429.

Alcock L. (2009) Teaching Proof to Undergraduates: Semantic and Syntactic Approaches. *ICMI Study* 19, 29-35.

Back R.-J., Mannila L., Wallin, S. (2010) Student justifications in high school mathematics. *Proceedings CERME* 6, 291-300.

Chellougui F. (2004) *L'utilisation des quantificateurs universel et existentiel en première année universitaire entre l'explicite et l'implicite*. Thèse de doctorat. Université Lyon 1.

Chevallard Y. (1989) Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège – deuxième partie : perspectives curriculaires : La notion de modélisation. *Petit x* 12, 43-72.

Chevallard Y. (1992) Concepts fondamentaux de la didactique : Perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 12 (1), 73-112.

Chevallard Y. (1998) Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. In Noirfalise R. (Ed.) (pp. 91-120) *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques* – Acte de l'Université d'été de la Rochelle. Ed IREM de Clermont-Ferrand.

Durand-Guerrier V. (1999) L'élève, le professeur et le labyrinthe. *Petit x* 50, 57-79.

Durand-Guerrier V. et al. (2000) *Le statut logique des énoncés dans la classe de mathématiques : éléments d'analyse pour les enseignants*. Lyon : IREM.

Durand-Guerrier V., Arsac G. (2003) Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. Spécificité de l'analyse. Quelles implications didactiques ? *Recherche en didactique des mathématiques* 23(3), 295-342.

Durand-Guerrier V., Arsac G. (2005) An epistemological and didactic study of a specific calculus reasoning rule. *Educational Studies in Mathematics* 60 (2), 149-172.

Durand-Guerrier V. (2008) Truth versus validity in mathematical proof. *ZDM The International Journal on Mathematics Education* 40/3, 373-384.

Duval R. (1991) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives* 5, 37-65.

Duval R. (1998) Écarts sémantiques et cohérence mathématique. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 1, 7-25.

Frege G. (1971) *Ecrits de logique et philosophiques*. Paris : Seuil.

Ghedamsi I. (2008) *Enseignement du début de l'analyse réelle à l'entrée à l'université : Articuler contrôles pragmatique et formel dans des situations à dimension a-didactique.* Thèse de doctorat. Université Bordeaux 2.

Kouki R. (2006) L'articulation syntaxe / sémantique au cœur des analyses didactique au niveau de l'algèbre élémentaire. In Bedard N., Mary C. (Eds) (cédérom) *L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés.* Sherbrooke: Éditions du CRP.

Kouki R. (2006) Équations et inéquations au secondaire entre syntaxe et sémantique. *Petit x* 71, 7-28.

Kouki R. (2008) *Enseignement et apprentissage des équations, inéquations et fonctions au secondaire : entre syntaxe et sémantique*. Thèse de doctorat. Université Claude Bernard Lyon1.

Kouki R. (2009) Le raisonnement logique pour assurer un enseignement de la pensée mathématique : Le cas des équations et des fonctions algébriques. In Kuzniak A, Sokhna M (Eds.) (pp. 1221-1240) *Enseignement des mathématiques et développement: enjeux de société et de formation*. Dakar : Revue internationale francophone.

Ouelbani M. (1992) *Le projet constructionniste de Carnap*. Tunis : Faculté des Sciences Humaines et Sociales de Tunis.

Quine W. V. O. (1972) *Methods of logic*. New York : Harvard University Press.

Quine W. V. O. (1977) *Le mot et la chose*. Paris : Flammarion.

Rivenc F. (1989) *Introduction à la logique*. Paris : Payot.

Robert A. (1998) Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherche en Didactique des Mathématiques* 18 (2), 139-190.

Russell B. (1961) *Histoire de mes idées philosophiques*. Paris: Gallimard.

Selden J., Selden A. (1995) Unpacking the logic of mathematical statements. *Educational Studies in Mathematics* 29, 123-151.

Selden J., Selden A. (2011) The role of procedural knowledge in mathematical reasoning. In *Proceedings PME* 35 (Ed.) (pp. 145-152).

Tarski A. (1960) *Introduction à la logique*. Paris : Gauthier-Villars.

Tarski A. (1972) *Logique, sémantique, mathématique* : 1923-1944 (vol. 1). Paris : Armand Colin.

Tarski A. (1974) *Logique, sémantique, mathématique* : 1923-1944 (vol. 2). Paris : Armand Colin.

Vanderbrouck F. (2011) Students' conceptions of functions at the transition between secondary school and university. In *Proceedings CERME* 7 (sous presse).

LES RESISTANCES DES ENSEIGNANTS FACE A L'APPROXIMATION[1]

Carlo MARCHINI – Groupe de Recherche ZEROALLAZERO[*]

Résumé – Il s'agit d'analyser les caractéristiques importantes de l'approximation en tant que sujet prévu par les programmes italiens à partir de 2007. Nous avons voulu constater, à l'aide d'un questionnaire, si aujourd'hui ce thème a la place qu'il mérite dans l'enseignement. Nous avons perçu une certaine résistance face à l'argument, surtout chez les professeurs du collège et du lycée. À notre avis, cela peut être une conséquence du manque de connaissance à ce sujet chez les professeurs et de la nécessité de changer de 'point de vue', dans le sens de Vandebrouck (2011).

Mots-clefs : Approximation, croyances, aires, point de vue local, point de vue ponctuel

Abstract – The features of approximation as a topic of Italian programmes from 2007 on are presented and their relevance is emphasised. For investigating if today the topic is customary we administered a questionnaire. It showed us that the topic is not 'popular' mainly among teachers of higher secondary school. We suppose that it is a consequence of a teachers' scarce knowledge the topic and the necessity of a change of 'point of view' in the meaning of Vandebrouck (2011).

Keywords: Approximation, beliefs, areas, local point of view, punctual point of view

I. INTRODUCTION

Dans les documents officiels de l'école italienne du premier cycle : c'est-à-dire les élèves de 3 à 13 ans (MPI 2007), une place importante est donnée à l'approximation. Il s'agit d'une nouveauté qui est présentée dans les textes officiels mais aujourd'hui la culture des enseignants ne semble pas permettre de la gérer en classe. Nous pensons que le Ministère Italien de l'Education a inséré l'approximation dans les programmes à cause de la présence significative de ce thème dans les programmes des autres pays, par exemple en France (Kahane 2002) et à Singapour (Dindyal 2005), et aussi en raison des tendances vers une école plus attentive aux nécessités sociales.

Nous avons essayé, en publiant des articles scientifiques et des ouvrages (cf. références), d'introduire cette « culture de l'approximation », mais la pénétration des idées chez les maîtres ne semble pas avoir abouti à des résultats positifs. Des rencontres avec les enseignants titulaires dans des stages de formation continue nous ont confirmé, à l'aide d'un questionnaire, cet état des choses par rapport à l'approximation. Nous allons présenter un choix des questions et de réponses au questionnaire en appui à cette thèse.

II. LES RAISONS DE L'APPROXIMATION

Nous voyons dans l'approximation des aspects importants pour l'enseignement des mathématiques. En effet, si l'on voit dans les concepts de nombre réel et de limite un but de la culture mathématique et de ses applications pour le lycée, comme c'est le cas dans de nombreux pays, il nous semble que c'est une erreur de traiter ces sujets seulement dans les

---

[1] Recherche soutenue par le projet Prin 2008PBBWNT auprès de l'Unité Locale de Recherche en Didactique des Mathématiques de l'Université de Parme.
[*] Carlo Marchini, Département de Mathématiques de l'Université de Parme – Italie - carlo.marchini@unipr.it
Le Groupe de Recherche ZEROALLAZERO est un collectif d'enseignants (et instituteurs) qui couvre tous les niveaux scolaires, du cours préparatoire à l'université. Il est né au début de l'année 1996 pour montrer la possibilité de construire un parcours vertical sur les concepts d'approximation et de limite. Au fil du temps, sa composition a changé. Les plus 'résistants' d'aujourd'hui sont: M.F. Andriani, C. Bisso, S. Foglia, S. Gregori, L. Grugnetti, A. Maffini, C. Marchini, M. Rapuano, A. Rizza, A. Speroni, V. Vannucci.

© Marchini C., Groupe de Recherche ZEROALLAZERO (2012) Les résistances des enseignants face à l'approximation. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT3, pp. 445–456). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

dernières années d'école, car on a la possibilité de les introduire graduellement (Andriani et al. 2009) par l'approximation qui est considérée (dans les programmes officiels) à la portée des élèves de l'école primaire. D'autre part, la première approche de l'approximation donne une bonne possibilité d'activer la discussion mathématique en classe (Diakoumopoulos, 2010, p. 1126) ; de plus Kouropatov et Dreyfus suggèrent :

> Approximation is […] a complex, multi-faceted issue. It does relate to the definite integral, but it also relates many other notions in mathematics such as differentiation, estimation of large numbers, probability and measurement. Hence, approximation is, in our opinion, an excellent candidate to start with. […] The process-nature of approximation (e.g., calculating the area of a circle by using circumscribed polygons with progressively more sides) and the concept (object)-nature of approximation (e.g., an area estimate for the circle) seem to be intuitively clear for students. The idea of approximation allows for developing didactical tools, with which a student's work may become observable. (Kouropatov et Dreyfus 2011, pp. 3-98)

Le groupe Zeroallazero a proposé des activités de classe sur l'approximation à tous les niveaux scolaires, puisqu'il est certain que si un élève travaille sur un sujet à l'école primaire et qu'il le retrouve seulement à la fin du cycle de ses études, il lui sera bien difficile de reconnaître les liens entre ce qu'il a vu à des périodes aussi distantes l'une de l'autre (par exemple, entre approximation et nombres réels ou entre estimation d'une aire par quadrillage et intégration). Donc, notre avis est qu'on doit donner une place à l'approximation dans l'enseignement et la proposition de ces activités peut attirer l'attention des maitres puisque :

> if teachers are not confident in their mathematical knowledge, they may find it difficult to ensure that their students gain confidence and competence. (Southwell et Penglase 2005, pp. 4-209)

Les raisons qui conduisent à recommander aux enseignants la familiarité avec le sujet et aux étudiants l'apprentissage de l'approximation, outre l'intérêt pour l'enseignement des mathématiques, résident aussi dans les exigences de la société et de la vie pratique et tout cela se rencontre aussi dans Kahane (2002). On trouve chez Kahane l'hypothèse qu'une des résistances à l'adoption de l'approximation est l'idée que le calcul exact est plus 'noble' que celui approximé, mais ce point de vue peut avoir seulement pour effet de séparer la culture de l'école de celle de la vie.

Dans Girnat nous trouvons une affirmation semblable très explicite d'une professeure, qui dit :

> Mrs. D. - The beauty of mathematics is the fact that everything is logical and dignified. […] Everywhere else, there are approximations, but not in mathematics. There is everything in this status it has ideally to be in. (Girnat 2011, p. 632)

Une des nouveautés les plus importantes des programmes scolaires italiens (à partir de 2007) est qu'ils attribuent à l'approximation le rôle d'une notion ayant des aspects (et des effets) métacognitifs qu'ils recommandent. Ils suggèrent qu'à l'école primaire (élèves de 6 à 10 ans), l'habitude d'estimer les résultats des opérations, de choisir des représentations significatives de relations et de données (avec aussi des logiciels) incite l'élève à en tirer des indications, à formuler des jugements et à prendre des décisions. Ils suggèrent des tâches sur la mesure de figures 'irrégulières' et des problèmes numériques.

Pour le collège (élèves de 11 à 13 ans), les mêmes programmes affirment que le sujet de l'approximation peut aider l'élève à développer la conscience des avantages et des désavantages de ses choix par rapport aux objectifs que l'on considère. Et nous retrouvons ici ce que Haspekian et Bruillard (2010, p. 523) appellent « experimental mathematical culture ».

Nous ne trouvons pas, dans d'autres sujets présentés par les programmes italiens du premier cycle, ces caractéristiques métacognitives ; l'approximation joue ainsi un rôle particulier, qui n'est pas seulement celui de donner des nouvelles informations.

En outre, dans les indications pour le lycée italien nous retrouvons le même sujet (en peu de mots et sans références aux aspects métacognitifs) en montrant ainsi qu'il devient une sorte de fil rouge de tout le parcours didactique.

Tout cela donne à l'approximation le statut d'une activité qui se poursuit au fur et à mesure du développement des connaissances mathématiques nécessaires pour obtenir des résultats avec différents degrés de précision. Ce sujet présente des aspects que l'on peut assimiler à une sorte d'expérimentation « continue ». Et l'expérimentation en classe est considérée (Papadopoulos et Iatridou 2010 p. 209) comme une aide valable pour impliquer les élèves dans la construction du savoir.

Finalement, Kouropatov et Dreyfus posent deux questions :

> Question 1. What is the structure of the approximation concept in terms of elements of knowledge and what are suitable operational definitions for these elements that allow the researcher to identify concept construction? Question 2. How does the process of knowledge construction occur during an instructional intervention? (Kouropatov et Dreyfus 2011, pp. 3-98)

Pour enrichir la proposition de Kouropatov et Dreyfus qu'une solution aux problèmes de l'approximation soit de gérer le cadre du « Abstraction in Content », nous ajoutons que l'on peut accorder aussi à l'apprentissage de l'approximation la nécessité d'un changement de point de vue, de ponctuel à local. Vandebrouck introduit ces notions à propos des fonctions :

> Indeed, the balance from conceptual embodied world to the formal axiomatic one is accompanied by the development of local properties about functions: limit, continuity, derivability, equivalent expressions, Taylor' s local expansions near some points which are the basic notions of calculus. We claim that working at university level on functions implies that students can adopt a local point of view on functions whereas only the punctual and global points of view are constructed at the secondary school. (Vanderbrouck 2011, p. 2095)

Du point de vue ponctuel

> […] functions are considered as correspondences between two sets of real numbers, an element of the first set being associated with a unique element of the second set. […]. At this level, functions are represented by arithmetic formulas that operate as a program for calculation, such as calculus programming. (Op. cité, p. 2095)

Notre proposition est que cette théorie des points de vue s'applique très bien aussi à la gestion des résultats numériques et aussi à l'école. Nous pouvons établir une sorte de parallèle entre le couple calcul 'noble' - calcul approché de Kahane avec ce que Vandebrouck suggère entre les points de vue ponctuel - local. L'enjeu de ce dernier point de vue est d'approcher graduellement tous les concepts qui sont intrinsèquement locaux et l'approximation est parmi eux. La familiarité avec ce point de vue et avec l'approximation pourrait être valable pour l'apprentissage des nombres réels (González-Martín et al. 2011, p. 2-453).

Dans l'histoire des mathématiques nous trouvons des exemples d'approximation à propos des questions de mesure des grandeurs. Archimède dans *La mesure du cercle* dit :

> Proposition 2. Un cercle est au carré construit sur son diamètre, à très peu de chose près, comme 11 est à 14.
>
> Proposition 3. La circonférence d'un cercle quelconque est égale au triple du diamètre réuni à une certaine portion du diamètre, qui est plus petite que le septième de ce diamètre, et plus grande que les 10/71^{e} de ce même diamètre.

Ici le Syracusain semble affirmer qu'il y a une 'vraie' valeur qu'il connait d'une façon approximée.

Une affirmation claire (et un exemple important) de ce qu'est l'approximation (en latin *latitudo*) se trouve dans l'œuvre de Jacob Bernoulli (1654 – 1705), *Ars Conjectandi* (1713) :

> Mais pour que cela ne soit pas compris autrement qu'il ne convient, il faut bien noter ce qui suit ; je voudrais que le rapport entre les nombres de cas, que nous entreprenons de déterminer expérimentalement, ne fût pas pris de façon nette et sans partage (car ainsi c'est tout le contraire qui arriverait et il deviendrait d'autant moins probable de découvrir le vrai rapport qu'on ferait de plus nombreuses observations), mais je voudrais que le rapport fût admis avec une certaine latitude, c'est-à-dire compris entre une paire de limites, pouvant être prises aussi approchées qu'on voudra.

Dans cette citation, donc, Bernoulli propose un théorème dans lequel une donnée qui n'appartient pas au domaine de la géométrie, ni de l'algèbre, est connue seulement d'une façon approximée, c'est-à-dire, qu'elle se trouve entre deux bornes. Et la démonstration réside justement dans l'identification de ces limites et dans la probabilité que la donnée se trouve justement entre eux. Bernoulli montre, ainsi, un exemple conscient du point de vue local.

Nous pouvons remarquer que le point de vue ponctuel l'emporte souvent dans les classes. Deux exemples : dans le cas de l'aire d'une figure dessinée sur un quadrillage, cf. figure 2, les élèves souvent comptent le nombre de carrés contenus et le nombre de ceux qui sont partiellement contenus. L'aire est donnée par la somme du nombre de carrés du premier type et la moitié du nombre de ceux du second type. Du point de vue local, l'aire est le couple du nombre des carrés contenus et la somme des nombres des carrés du premier et second type, en préparant, de cette façon, la théorie de l'intégration selon Riemann. Deuxième exemple : dans la recherche d'une limite d'une fonction, habituellement les élèves calculent la fonction sur le point d'accumulation même si la fonction n'est pas continue, si le point d'accumulation n'appartient pas au domaine de la fonction et aussi s'il s'agit d'un infini. Et il s'avère que souvent les exercices d'analyse sont posés d'une telle manière que cette approche suggère les solutions correctes, cache la nécessité du point de vue locale avec les conséquences dont parle Vandebrouck.

Les expériences du groupe de recherche Zeroallazero (cf. références) montrent néanmoins que les élèves portent une attention à l'approximation.

III. LA RECHERCHE

Notre recherche a pour but de voir si dans l'enseignement l'approximation a trouvé la place que les programmes prévoient et que selon nous elle mérite. Le modèle des praxéologies selon Castela (2008) nous procure un outil pour évaluer quels aspects de l'approximation sont présents dans l'enseignement. Chevallard (1999) introduit pour toute activité humaine une praxéologie dénotée par $[T, \tau, \theta, \Theta]$ où T est un type de tâches, τ est une technique, θ est une technologie et Θ est une théorie. La proposition de Castela d'une organisation praxéologique mathématique (OM) vise à mieux articuler la praxéologie dans le cas spécifique d'un apprentissage en mathématiques. Elle propose d'y reconnaitre deux types de technologie : la composante pratique θ^p et, la composante théorique θ^{th} de la technologie. Pour l'approximation, on peut indiquer une organisation praxéologique mathématique dans la quelle T sont des questions relatives à « L'aire d'une figure (La longueur d'une courbe) » ou bien à « Calcul approximé avec des données expérimentales » (qui sont indiqué dans les programmes). Les techniques dépendent du problème spécifique mais sont liées, en tous cas, à l'acquisition de données qui s'adaptent mieux aux problèmes. La technologie a une composante pratique θ^p, celle des logiciels ou d'un 'arpenteur/constructeur' [2] et une composante théorique θ^{th} liée à la théorie des suites (convergence) et de l'intégration. La théorie est celle des nombres réels et de la mesure.

[2] Arpenteur :Mesurer les bords d'une surface sur un terrain ou sur un dessin. Constructeur : Décomposer une forme en traces constructibles à l'aide d'un instrument (Duval 2005, p. 9 – Figure 1).

À l'occasion de stages de formation, nous avons eu la possibilité de proposer aux enseignants qui y participaient de brefs questionnaires ouverts, sous forme écrite, pour vérifier quels aspects de l'organisation praxéologique mathématique - approximation étaient acceptés. Nous avons présenté une question ouverte générale sur les programmes d'enseignement (QP) et quatre questions qualitatives ouvertes sur l'approximation (QA1 – QA4).

La proposition de QP analyse si l'organisation mathématique de l'approximation est présente et comprise dans ses aspects et ses effets sur les enseignants de l'échantillon.

Les questions QA sont en rapport avec la technique τ et les technologies θ de l'organisation mathématique, sous la forme d'interrogations indirectes, du genre « Selon votre expérience, quelles pourraient être les réactions de vos élèves face à…. », au lieu de demander « Comment faites vous ? ». Notre proposition est le résultat d'un choix : nous pensons que les enseignants ont répondu personnellement sur la base de leurs croyances (beliefs) à propos de l'approximation. Les « beliefs » des enseignants peuvent être identifiées de façons différentes, nous acceptons ici ce que Phillip propose :

> psychologically held understandings, premises, or propositions about the world that are thought to be true. (Phillip 2007, p. 259)

Une partie du système de croyances abouti à la création d'un programme personnel (personal curriculum) qui se substitue au curriculum officiel et qui

> it is used to structure lessons and to guide the instructional practice through various steps of contents and methods to goals of education. (Girnat 2011, p. 628)

Pour cela les « beliefs » peuvent prévaloir sur le texte des programmes officiels et déterminer la didactique. Nous considérons que les réponses à nos questions reflètent les représentations de l'enseignant de ses buts et des résultats de son travail. En effet, les QA peuvent être considérées comme étant proches des questions directes : « Comment agiriez-vous s'il fallait présenter la notion … ? » et l'escamotage consistant à se référer à des réponses d'élèves a constitué une sorte d'écran sur lequel chaque enseignant a projeté ses croyances.

En adoptant ce point de vue, nous pouvons tirer des indications intéressantes sur le thème de l'approximation, puisque ce que les enseignantes présentent comme réponses possibles des élèves sont pour partie les effets de la didactique mise en œuvre par eux-mêmes.

On a proposé dans les QA l'utilisation de la connaissance commune du contenu (« CCK » dans le sens de Ball, Thames et Phelps (2008)), puisque les mêmes QA avaient été employées pour des expériences en classe et nous avions choisi un langage et des contenus présentés de façon élémentaire. Nous avons eu aussi la possibilité de comparer les réponses des enseignants avec celles des élèves que nous avions collectées dans des expériences précédentes.

Notre échantillon était composé de 45 instituteurs et professeurs des différents stages. Ce petit nombre ne peut pas être considéré comme représentatif du point de vue statistique ; donc il faut plutôt parler d'une étude de cas. Les participants aux stages n'étaient pas préparés à cela et ils ont eu peu de temps pour répondre à chaque question. La limitation du temps pourrait avoir un effet positif sur les réponses, dans le sens qu'on peut considérer que la « répartie » est la première chose (donc la plus immédiate) à laquelle on a pensé.

IV. LES QUESTIONS ET LEUR REPONSES

Nous avons eu la « preuve », par les questionnaires, que, généralement, l'approximation n'est pas prise en considération par les enseignants (de notre échantillon).

Le but de cette section est descriptif. Ici, nous présentons QP, QA1 et QA2 et nos analyses des réponses que nous avons obtenues pendant les stages. Les questions QA étaient associées à une présentation pour les introduire d'une façon opportune. Les autres questions QA3 et QA4 ne changent pas le panorama des réponses ; nous avons donc décidé de les omettre ici par manque de place.

1. QP

La QP est : « Dans votre expérience, indiquez une notion mathématique pour laquelle vous pensez que l'élève aurait envie de prendre à sa charge son apprentissage (Indiquez à quelle classe vous vous référez) ».

Il s'agit d'une question très (ou trop) générique. Une bonne connaissance des programmes de 2007 et de l'organisation mathématique – approximation aurait pu aider à répondre, étant donné le rôle unique que le sujet a dans les documents officiels. Nous avons cependant une variété de réponses. Remarquons que le titre du stage ne parlait pas d'approximation, mais suggérait que l'on parle de stratégies didactiques pour impliquer les élèves dans leur propre construction du savoir. Étant donné ce que disent les programmes, nous avions estimé que le sujet pouvait être clair. Nous avons tiré de cette question des réponses qui indiquent surtout le « problem solving » comme le sujet le plus cité pour impliquer les élèves. Cette proposition n'est pas surprenante, mais on peut considérer le « problem solving » une méthodologie, plutôt qu'une notion mathématique.

A côté de cette réponse il y a une liste de notions scolaires, qui indiquent, à la fois, des praxéologies ou des types de problèmes ou de techniques. Par exemple :

- compléter la table de multiplication
- trouver les aires latérales et totales des solides
- exponentielles et logarithmes
- les graphiques des fonctions
- application du théorème de Pythagore
- transformations géométriques
- constructions géométriques
- calcul des probabilités
- usage de l'Euro.

Peut-être que le temps laissé pour répondre n'a pas permis d'obtenir une argumentation plus articulée des enseignants. Nous avons pu interroger oralement une professeure qui nous a expliqué que sa suggestion des constructions géométriques voulait indiquer que l'utilisation des outils graphiques classiques ou bien des ordinateurs (technologies) place les élèves dans une situation d'expérimentation qui présente les aspects de motivation qu'on avait demandés.

Notre question se rapportait à des notions mathématiques, mais nous avons reçu aussi des indications méthodologiques ou psychologiques, par exemple sur

- la correction des devoirs en classe,
- l'aide aux camarades d'école en difficulté.

D'autres réponses suggèrent que pour certains enseignants il n'est pas possible de trouver une notion répondant à notre première question ; ce qui laisse penser à une sorte de « défaite scolaire ». Par exemple, des enseignantes (de l'école primaire et de l'école secondaire) ont écrit que les seules choses qui intéressent leurs élèves sont :

- les images de joueurs de football
- les bracelets et colliers de petites perles

- une chanson des 'Muse'.

Parmi toutes ces réponses, nous remarquons que personne n'a indiqué l'approximation comme thème possible, même si elle représente une nouveauté dont la présence est importante et continuelle dans les programmes scolaires (depuis 2007). Notre conclusion est que les enseignants ne tiennent pas compte des changements des programmes de manière visible ou consciente, ou bien n'ont pas perçu les aspects métacognitifs de ce thème. On peut aussi penser que l'approximation soit vécue comment un objet nouveau.

En plus il est possible que dans leur formation professionnelle, les enseignants de l'école secondaire même s'ils ont eu une expérience du point de vue local à l'Université, n'ont pas eu l'occasion de réfléchir sur ces aspects et que leur pratique professionnelle dans le cadre du programme précédent (sans l'approximation) joue le rôle le plus important dans la construction du curriculum personnel, dans le sens de Girnat.

Après avoir ramassé les copies de réponses à la QP, nous avons présenté le texte des programmes italiens du premier cycle, là où on parle d'approximation et aussi les propositions des programmes français et de Singapour. Cette présentation a provoqué une sorte de réprobation. Une enseignante a pris la parole et a affirmé que c'était, encore une fois, un amas de bonnes intentions qui n'auront pas d'effets sur l'école. Tout cela parce qu'il n'y a pas d'instruments permettant de les faire passer dans la réalité. Cette réponse nous a confirmé que l'organisation mathématique de l'approximation, même si la théorie sur laquelle elle se base peut être connue, rencontre des difficultés de pénétration dans le système de croyances des enseignants présents.

2. QA1 – Le petit lac

Pour montrer qu'on disposait déjà d'éléments suggérant une voie d'approche du thème, nous avons commencé à poser des problèmes sur l'approximation à partir de QA1. Ce problème est emprunté à Falcade et Rizza (2003), donc antérieur aux programmes du MPI (2007).

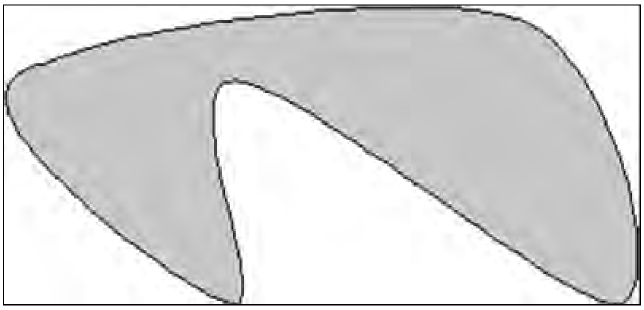


Figure 1 *– Le petit lac*

L'énoncé du problème est le suivant :

> « Imagine un petit lac de montagne vu du dessus tel qu'il est dessiné en Figure 1. Peux-tu mesurer l'aire de la part grise ? Si oui, comment ? Si non, pourquoi ? »

QA1 pour les enseignants est « Selon votre expérience quelles pourraient être les réactions de vos élèves face au problème du petit lac ?».

Dans la question il n'y a pas de mesures de longueur, c'est plutôt de s'interroger sur l'existence de l'aire et non pas sur l'existence des formules 'exactes' pour la calculer, donc une question de la théorie de la mesure Θ. Il s'agit aussi de la technique τ qui est liée à θ^p, la composante pratique de la technologie : les approches à la mesure sur le dessin par quadrillage ou par décomposition en polygones. Mais son résultat n'est pas possible en gardant le point de vue ponctuel, on doit le changer en adoptant le point de vue local, comme couples d'aires des raffinage obtenus par décompositions intérieures et extérieures, donc en prenant en compte la technologie théorique θ^{th} des suites.

Les réponses des enseignants sont cohérentes avec les réponses des élèves qui ont été récoltées dans l'expérience de Falcade et Rizza (2003) et sont en majorité négatives : *non, je ne peux pas mesurer, parce que je n'ai pas de formule qui convient*. De plus, une institutrice a observé que les enfants imaginent que le maître connaît **la** réponse. Cette observation est importante, du point du vue du contrat didactique, mais l'usage de l'article défini, comme la « chasse à la formule » précédente, révèle la présence d'un point de vue ponctuel. La plupart des personnes interrogées ont confirmé ce point de vue.

Très peu d'entre eux (surtout les instituteurs) ont répondu que leurs élèves utiliseraient des quadrillages.

3. QA2 – La belle figure.

La question QA2 est plus explicite dans la direction de l'approximation puisque elle suggère une technique τ appuyée sur le quadrillage, la composante pratique θ^{p} de la technologie pratique. Elle est empruntée à Dalla Noce et al. (2000), mais, ici, nous la présentons dans la traduction de Andriani *et al*. (2009). Dans ce dernier texte, on trouve l'analyse a posteriori de cette expérience de caractère diagnostique.

Lors du stage, nous avons présenté le problème

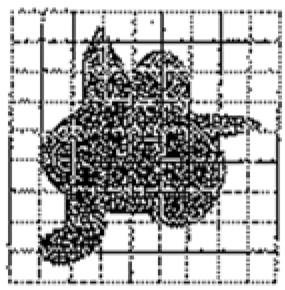
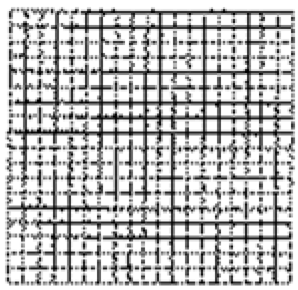
Quelle belle figure ! Mario et Giovanna doivent trouver l'aire de cette figure :	
Mario propose de mesurer l'aire avec du papier quadrillé de ce type :	
Giovanna avec du papier quadrillé de ce type : Et toi, que ferais-tu ? As-tu d'autres idées ? Combien mesure la figure d'après toi ? Explique comment tu as trouvé.	

Figure 2 *– Quelle belle figure !*

La question pour les enseignants est : « En vous aidant de votre expérience quelles pourraient être les réactions de vos élèves face au problème la belle figure ? ».

Dans le problème la théorie de la mesure Θ est évidente, de même la proposition de la technologie pratique θ^p, par quadrillage, mais la présence du second quadrillage introduit la technologie théorique θ^{th} avec la possibilité d'améliorer les résultats par raffinages. La technique est toujours le comptage, avec l'idée de continuité. En tout cas le point de vue ponctuel n'est pas gagnant. Donc nous avons demandé de comparer deux méthodes ; tous les deux s'appuient à la technique τ, mais leur comparaison fait appel à la technologie théorique θ^{th} et au point de vue local.

La réaction de 15 personnes interrogées sur 35 a été dans le sens que Giovanna propose une solution plus approchée, mais seulement deux (une pour les classes terminale de l'école secondaire et une pour l'école moyenne) ont parlé de deux bornes. L'expression « plus approchée » n'a pas été expliquée. Une seule réponse a proposé une décomposition avec d'autres polygones. Pour les autres, les réactions passent de la complète indifférence à la gêne. En particulier chez les professeurs (qui enseignent l'analyse mathématique) :

- S'ils répondaient, je pense qu'ils opteraient pour Giovanna.
- Ils répondraient « Giovanna » mais après ils ne continueraient pas.
- Dans la classe de terminale, les lycéens diraient que les deux choix sont indifférents, puisque l'aire ne change pas.
- Les élèves de l'école supérieure ne seraient pas particulièrement intéressés puisque le problème a peu d'importance pratique.
- D'accord sur l'usage d'un problème concret, mais un problème de ce type susciterait beaucoup d'hilarité.

Donc, quand on est aux prises avec l'intégration, on fait preuve de suffisance et d'incompréhension pour un problème proche de l'intégration et qui mêle continuité et limite. Dans ces réponses on perçoit avec une certaine évidence l'apport du professeur et le cadre de ses croyances.

On peut aussi comparer ces réponses avec celles des instituteurs :

- Mes élèves (de 8 ans), bien qu'ils n'aient pas abordé ce sujet, choisiraient probablement le quadrillage du second type.
- Les élèves de (8 à 10 ans) ne montreraient pas de réactions particulières, ils essaieraient de compter les petits carrés internes (avec le quadrillage plus grand) et ensuite, compteraient les « moitiés », mais ils rencontreraient des difficultés avec les lignes courbes.

Dans ces mots, on fait confiance à l'intuition des petits et l'on considère qu'une activité de ce genre est possible et importante à l'école primaire (et d'autres réponses disent qu'elle est possible aussi au collège). Les plus petits présentent

> the ability to create wealthy images that individuals can handle mentally, can pass through different representations of the concept and, if necessary, can provide the mathematic ideas on a paper or computer screen (Lois et Milevicich 2010, p. 1060)

Les réponses des professeurs semblent dire que ce sujet n'est pas adapté aux dernières années de scolarité. Nous supposons que cette réponse soit motivée par la nécessité d'utiliser une technique de comptage qui semble peu mathématique. Ceci met en évidence un hiatus profond entre les différents niveaux scolaires, avec la possible perte de l'intuition.

Cependant, la majorité des personnes interrogées adoptent un point de vue ponctuel car il n'est pas question de couple du nombre des carrés contenus et du nombre des carrés contenants.

V. CONCLUSIONS

Les réponses à nos questions font apparaître une mésestimation générale des documents officiels italiens qui sont considérés comme étant éloignés de l'école réelle (italienne) et de ses problèmes et, aussi, la force de l'expérience de ceux qui se sont formés avant la promulgation des nouveaux programmes et qui risquent de continuer à gérer l'école loin des exigences d'aujourd'hui.

Il n'y a pas le 'courage' d'aborder « les tâches où la technique est mise en œuvre avec des objets nouveaux » (Castela 2008). À notre avis, il est évident que le processus de formation des enseignants n'avait pas pu tenir compte des changements introduits par les programmes et que les enseignants manifestaient une simple réalité : sans formation, il est difficile de s'adapter aux changements, même s'ils sont profitables. Les efforts des groupes de recherche et des sociétés scientifiques peuvent donner des suggestions valables au gouvernement, à propos de l'école, mais elles n'atteignent qu'une minorité d'enseignants dans leur formation en service pour changer, avec le temps les paradigmes reçus en formation initiale.

En Italie, il y a eu peu de changements de programmes scolaires et tous sont « tombés du ciel » sur la tête des enseignants. Les efforts pour une diffusion préalable de nouveaux contenus parmi les enseignants titulaires et en formation, n'ont pas été suffisants. Ils ne peuvent pas être seulement des épisodes, mais ils doivent faire partie d'un processus durable. Nous savons que toute cette évolution se heurte aux difficultés économiques, à la sous-estimation de la culture, etc. c'est-à-dire, à tout ce qui paraît une des réponses caractéristiques de notre pays à ce moment historique.

Pour revenir à l'approximation, notre avis est qu'il faut que les enseignants se familiarisent avec les techniques et technologies de l'organisation mathématique approximation et aussi qu'ils changent de point de vue de ponctuel à local. Actuellement, quelque chose semble arriver (peut-être) seulement au niveau de l'enseignement des dernières années de scolarité avec des sujets qui demandent intrinsèquement un point de vue local, mais il serait important que ce sujet soit préparé graduellement à partir de l'école primaire. Nos recherches dans ce domaine nous confortent dans cette idée et nous disent qu'il y a des intuitions chez les élèves de l'école primaire qui doivent être valorisées et exploitées ensuite au niveau de toute la scolarité.

REFERENCES

Alberti N., Andriani M. F., Bedulli M., Dallanoce S., Falcade R., Foglia S., Gregori S., Grugnetti L., Marchini C., Molinari F., Pezzi F., Rizza A., Valenti C. (2001) Sulle difficoltà di apprendimento del concetto di limite. *Riv. Mat. Univ. Parm,* (6) 3*, 1-21.

Andriani M.F, Dallanoce S., Falcade R., Foglia S., Gregori S., Grugnetti L., Maffini A., Marchini C., Rizza A., Vannucci V. (2009) *Au-delà de toute limite - Parcours didactiques pour enseignants audacieux*. Nivelles: CREM a.s.b.l.

Archimède (1807) *Oeuvres* (traduction F. Peyrard). Paris : François Buisson.http://remacle.org/bloodwolf/erudits/archimede/cercle.htm.

Ball D. L., Thames M.H., Phelps G. (2008) Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education* 59, 389-408. http://jte.sagepub.com/content/59/5/389 DOI: 10.1177/0022487108324554.

.Bernoulli Jacob (1713) *Ars conjectandi*. Basileæ : Thurnisiorum Fratrum (traduction en Français dans Meusnier N. (1987) *Jacques Bernoulli et l'ars conjectandi*. Rouen : IREM).

Bisso C., Foglia S., Grugnetti L., Maffini A., Marchini C., Rapuano M., Rizza A., Vannucci V. (2009) *Il sogno di Cirillo e la sfida della Tartaruga*. Bologna: Pitagora Editrice.

Bisso C., Grugnetti L., Maffini C., Marchini C., Rapuano M., Speroni A., Vannucci V., ARMT. (2011) *Alla ricerca del segmento perduto*. Bologna: Pitagora Editrice.

Castela C. (2008) Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignorés par les institutions d'enseignement. *Recherche en Didactique des Mathématiques* 28(2), 135-182.

Chevallard Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherche en Didactique des Mathématiques* 19(2), 221-226.

Dallanoce S., Grugnetti L., Molinari F., Rizza A., Andriani M.F., Foglia S., Gregori S., Marchini C., Pezzi F. (2000) A cognitive cooperation across different sectors of education, In Ahmed A., Kraemer J. M., Williams H. (Eds.) (pp. 297-303) *Proceedings of CIEAEM 5.* Chichester: Horwood Publishing

Diakoumopoulos D. I. (2010) How can digital artefacts enhance mathematical analysis teaching and learning. In Durand-Guerrier V., Soury-Lavergne S., Arzarell F. (Eds.) (pp. 1121-1130) *Proceedings of CERME 6, January 28th-February 1st 2009.* Lyon: INRP.

Dindyal J. (2005) An overview of the Singapore mathematics curriculum framework and the NCTM Standards. Paper presented at Topic Study Group 3 at the *Third East Asia Regional Conference on Mathematics Education, Shangai, Nanjing, and Hangzhou, China* http://math.ecnu.edu.cn/earcome3/TSG3.htm.

Duval R. (2005) Les conditions cognitives de l'apprentissage de la Géométrie : développement de la visualisation, Différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et Sciences cognitives* 10, 5-53.

Falcade R., Rizza A. (2003) Approccio intuitivo al concetto di limite/Approche intuitive du concept de limite. *L'educazione Matematica* Anno XXIV, Serie VII, 1(2), 15-37.

Girnat B. (2011) Geometry as propaedeutic to model building – a reflection on secondary school teachers' beliefs. In Pytlak M., Rowland T., Swoboda E. (Eds.) (pp. 628-637) *Proceedings CERME 7*. Rzeszów, Poland: University of Rzeszów.

González-Martín A.S., Giraldo V., Souto A.M. (2011) Representations and tasks involving real numbers in school textbooks. In Ubuz B. (Ed.) (pp. 449-456) *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Ankara, Turquie: PME 2.

Grugnetti L., Rizza A., Marchini C. (2007) A lengthy process for the establishment of the concept of limit starting from pupils' pre-conceptions. *Far East Journal of Mathematical Education* 1(1), 1-32.

Grugnetti L., Maffini A., Marchini C., Groupe Zeroallazero (2006) Activités didactiques à caractère vertical pour la construction du concept de limite. *Annales de didactique et de Sciences cognitives* 11, 229-250.

Haspekian M., Bruillard E. (2010) Behind students' spreadsheet competencies: their achievement in algebra? A case study in a French vocational school. In Durand-Guerrier V., Soury-Lavergne S., Arzarello F. (Eds.) (pp. 519-528) *Proceedings of CERME 6, January 28th-February 1st 2009.* Lyon: INRP.

Kahane J.-P. (2003) *Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques – La formation des maîtres en mathématiques*. http://www.cfem.asso.fr/Formation_maitres.pdf

Kouropatov A., Dreyfus T. (2011) Constructing the concept of approximation. In Ubuz, B. (Ed.). (pp. 97-104) *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Ankara, Turkey : PME 3.

Lois A., Milevicich L. (2010) The impact of technological tools in the teaching and learning of integral calculus. In Durand-Guerrier V., Soury-Lavergne S., Arzarello F. (Eds.) (pp. 1060–1068) *Proceedings of CERME 6, January 28th-February 1st 2009*. Lyon: INRP.

MPI (2007) *Indicazioni per il curricolo per la scuola dell'infanzia e per il primo ciclo d'istruzione*. Roma : Ministero della Pubblica Istruzione.

Papadopoulos I., Iatridou M. (2010) Systematic approaches to experimentation: The case of Pick's theorem. *Journal of Mathematical Behavior* 29. 207-217.

Philipp R. A. (2007) Mathematics Teachers' Beliefs and Affect. In F. K. Lester (Ed.) (pp. 257-315) *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Charlotte: Information Age Publishing.

Southwell B., Penglase M. (2005) Mathematical knowledge of pre-service primary teachers. In Chick H. L., Vincent J. L. (Eds.) (pp. 209-216) *Proceedings 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Melbourne: PME 4.

Vandebrouck F. (2011) Students conceptions of functions at the transition between secondary school and university. In Pytlak M., Rowland T., Swoboda E. (Eds.) (pp. 2093-2102) *Proceedings CERME 7*. Rzeszów, Poland: University of Rzeszów.

LA PLACE DE LA LOGIQUE DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES AU LYCEE EN FRANCE

Zoé MESNIL*

Résumé – Souvent associée au raisonnement, la logique me paraît également liée à l'apprentissage du langage mathématique. Quel rôle peut-elle avoir dans l'enseignement des mathématiques au lycée ? L'étude présentée ici a pour but de proposer des éléments de réponses à cette question à travers l'analyse écologique des programmes et des manuels de différentes époques en France. Un regard sur l'histoire de la logique me permet d'élaborer une référence par rapport à laquelle j'essaie de comprendre les processus de la transposition didactique.

Mots-clefs : logique, langage, raisonnement, transposition, écologie des savoirs

Abstract – Logic, which is often associated with reasoning, also seems to be related to the learning of mathematical language. What role could logic have in the teaching of mathematics in high school ? The present study aims at exploring possible answers to the previous question through an ecological analysis of curricula and textbooks relating to different eras in France. Looking at the history of logic allows me to elaborate a reference to which I relate the process of didactic transposition in an attempt to understand them.

Keywords: logic, language, reasoning, transposition, ecology of knowledge

I. INTRODUCTION

Le nouveau programme pour la classe de seconde (première année du lycée, 14-15 ans) de 2009[1] comporte dans son introduction un chapeau « Raisonnement et langage mathématiques », et un tableau donnant une liste d'objectifs pour le lycée concernant notamment des notions de logique. Les nouveaux manuels utilisent alors un logo pour repérer les exercices censés travailler la logique, et la plupart proposent même des pages qui en précisent le vocabulaire et les notations. Il n'est bien sûr pas question de faire un cours de logique mathématique avec définitions formelles et théorèmes. Ceci est bien rappelé dans le programme qui précise qu'il s'agit de permettre à l'élève d'acquérir « une expérience lui permettant de commencer à distinguer les principes de la logique mathématique de ceux de la logique du langage courant ». Le programme de mathématiques pour la classe de Seconde de 1960 proposait déjà de « poursuivre une initiation plus complète aux modes élémentaires de la pensée logique et à ses moyens d'expression ». L'acquisition d'une expérience peut être vue comme le développement d'une certaine façon de penser en fonction de cette expérience, et les deux injonctions curriculaires citées présentent ainsi une certaine continuité. Qu'est-ce qui caractérise alors cette pensée logique qu'il s'agit de développer chez les élèves ? Qu'est-ce qui, dans la pratique des mathématiques, relève de la mise en action d'une pensée logique ? Et quel est le rôle de la logique mathématique en tant que discipline mathématique dans cet apprentissage ? Les rédacteurs des programmes et les auteurs de manuels sont forcés de trouver des éléments de réponse à ces questions. Le début de mon travail de thèse en didactique des mathématiques a consisté en une analyse des notions de logique présentes dans des programmes et manuels de Seconde de différentes époques, analyse qui révèle diverses prises de positions sur ces questions.

* Laboratoire de Didactique André Revuz - Université Paris Diderot – France – zoe.mesnil@univ-paris-diderot.fr

[1] Publié au BO du 23 juillet 2009 : http://media.education.gouv.fr/file/30/52/3/programme_mathematiques_seconde_65523.pdf

© MESNIL Z. (2012) La place de la logique dans l'enseignement des mathématiques au lycée en France. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT3, pp. 457–466). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

Plusieurs travaux de didactique présentent une étude épistémologique de certains concepts de la logique mathématique (Durand-Guerrier 1996, 2005; Deloustal-Jorrand 2004, pour l'implication, Chellougui 2004, pour les quantificateurs, Ben Kilani 2005, pour la négation). Ces travaux montrent la complexité du processus qui a conduit à en faire des objets de la logique mathématique moderne qui nait avec les travaux de Frege à la fin du XIX^{ème} siècle. Mais quels ont été les fins et les moyens de la logique ? Et finalement, qu'est-ce qu'on appelle aujourd'hui la logique mathématique ? Une analyse épistémologique me permet de constituer une référence par rapport à laquelle situer les choix de l'enseignement. Les outils de l'approche écologique sont ensuite utilisés pour analyser plus finement le processus de transposition et tenter de répondre à ces nouvelles questions : quel rôle programmes et auteurs de manuels attribuent-ils à la logique dans l'apprentissage des mathématiques au lycée ? Quelles sont les contraintes culturelles et institutionnelles qui pèsent sur leurs choix ? L'étude comparée de différents programmes et manuels pour la classe de Seconde depuis 1960, année qui correspond à une première introduction de notions de logique mathématique au lycée, permet de prendre en compte l'histoire de l'enseignement de la logique au lycée comme un élément éclairant ce qui est proposé actuellement.

II. APPROCHE EPISTEMOLOGIQUE

Je commencerai donc par un résumé succinct de l'histoire de la logique en faisant ressortir dans chaque période ce qui illustre différentes conceptions de la logique et de son rôle.

La logique d'Aristote, et parallèlement celle des mégariques puis des stoïciens, est une logique au service du raisonnement. À partir de certains raisonnements de base considérés comme évidents, il s'agit de se donner des méthodes permettant de justifier la validité des autres. Du point de vue du langage, la logique d'Aristote est traditionnellement décrite comme une logique des termes, alors que celle des stoïciens est une logique des propositions. C'est cette conception de la logique comme science du raisonnement qui se poursuit dans la tradition scolastique du Moyen Âge. Elle est aussi plus globalement vue comme l'une des sciences du langage, à côté de la grammaire et de la rhétorique, qui « apprend à parler véridiquement » (Blanché 1970, p 137). Vers la fin de cette période, les *moderni* tentent de dégager la logique de ses préoccupations métaphysiques, s'attachant plutôt à la forme, travail dans lequel on peut voir une anticipation de notre logique moderne.

La Renaissance est une période de mise en sommeil pour la logique, celle-ci étant délaissée au profit de la recherche d'une méthode. C'est par exemple la position de Descartes qui critique ce traitement formel des raisonnements qui n'en assure que la cohérence et pas la vérité. C'est également dans cette période qu'est rédigée la *Logique de Port-Royal* (1662) dans laquelle les schémas formels sont réduits au strict minimum au profit de nombreux exemples servant à exercer la perception. On retrouve ici une conception de la logique liée à un excès de formalisme empêchant alors le fonctionnement de l'intuition.

C'est dans les idées de Leibniz que plusieurs logiciens d'aujourd'hui s'accordent à retrouver celles de la logique moderne, même si celle-ci s'est développée dans l'ignorance des travaux de ce philosophe-mathématicien. Contrairement à Descartes, Leibniz voit dans la formalisation de la logique un moyen d'atteindre des vérités de manière indiscutablement valide. Dans le sillage de Viète et de Descartes, il apporte sa contribution aux progrès en algèbre, notamment en matière de symbolisation, avec l'ambition de constituer une algèbre de la pensée. Ceci signifie une mathématisation de la logique, par la constitution d'un langage universel permettant un *calculus ratiocinator*, c'est-à-dire un remplacement des raisonnements par un calcul.

Un siècle plus tard, Boole propose une construction formelle qui lui servira pour un traitement algébrique de la pensée. En cela, il peut être vu comme l'initiateur du développement de la logique comme discipline mathématique, mais ici ce sont les mathématiques, et plus particulièrement l'algèbre, qui viennent prêter leurs méthodes à la logique. C'est donc plutôt Frege qui est aujourd'hui considéré comme le père de la logique mathématique contemporaine. A travers un important travail de formalisation et de symbolisation, il envisage de fonder les mathématiques sur la logique. Il voit dans ce travail non pas une fin mais un moyen, nécessaire pour atteindre son but d'une parfaite rigueur. Ce but est également celui poursuivi par le courant logiciste dont fait partie Russell, mais la découverte de paradoxes rend la tâche difficile au point de provoquer ce qu'on a appelé la « crise des fondements ». Ce début du XX^{ème} siècle est aussi l'époque du courant axiomatique, et du rêve de Hilbert d'un système axiomatique formel « universel » permettant pour tout énoncé de le démontrer ou de démontrer sa négation. Cet espoir est ruiné par le théorème d'incomplétude de Gödel, ce qui n'empêche pas la logique mathématique de continuer ses recherches, dégagée de cette question des fondements, comme une branche des mathématiques parmi d'autres. On retrouve dans l'œuvre du groupe de mathématiciens Bourbaki cette conception de la logique mathématique qui, associée à la théorie des ensembles, permet d'asseoir l'édifice mathématique. Sa présentation axiomatique des mathématiques et de ses structures a eu une grande influence sur les mathématiques françaises du XX^{ème} siècle.

La logique mathématique actuelle est une modélisation, « non pas des mathématiques, mais de ce que nous faisons lorsque nous faisons des mathématiques » (Lacombe 2007). Elle est donc une branche des mathématiques, qui s'applique aux mathématiques. Un des outils de base de la logique mathématique moderne est la formule, du calcul propositionnel ou du calcul des prédicats. Une formule peut s'interpréter par un énoncé mathématique dont elle met la structure formelle en évidence. Le langage des prédicats n'est pas devenu la langue universelle dans laquelle s'expriment les mathématiciens, mais un langage de référence, et en fonction de la nature de leur activité (recherche, rédaction d'une communication, cours...), ils se placent là où cela leurs semble nécessaire entre un langage complétement relâché et ce langage formel. La syntaxe donne les règles de formation des formules, la sémantique s'occupe de leurs interprétations. La sémantique du calcul propositionnel est basée sur l'idée de valeur de vérité, celle du calcul des prédicats y ajoute la notion de modèle, structure mathématique (un ensemble muni de relations et de fonctions) dans laquelle sont interprétées les formules. Cette sémantique permet de définir les notions de formules équivalentes et de formules universellement valides, ce qui fournit des règles de manipulation des formules, de la même manière que le font par exemple les identités remarquables pour le calcul algébrique. Ainsi, la logique mathématique ne se divise pas en un axe syntaxique et un axe sémantique séparés l'un de l'autre, mais est constituée des allers retours possibles de l'un à l'autre. R. Kouki (2008) a étudié dans sa thèse cette articulation syntaxe/sémantique dans le domaine des équations, inéquations et fonctions : cette articulation est très peu mobilisée par les élèves, voire par les professeurs.

L'étude épistémologique montre que, si la logique est fortement liée à la validité des raisonnements, il n'y a pas consensus sur les moyens nécessaires pour parvenir à la garantir. Et si une réflexion sur le langage a toujours soutenu le travail des logiciens des différentes époques, ils n'ont pas tous eu la même position sur le niveau de formalisation du langage nécessaire et suffisant pour une logique rigoureuse, puisqu'ils n'assignaient pas tous le même but à la logique. Le traitement de l'algèbre permis par le travail de symbolisation initié par Viète a donné un nouvel aspect à la dimension syntaxique de la logique, en interaction avec une sémantique qui se devait de préciser la notion de vérité en mathématiques en la dégageant de son aspect métaphysique. Aujourd'hui la logique mathématique est une branche des mathématiques, et la présence de certains de ses objets d'étude dans les programmes de mathématiques pour le lycée signifie la présence d'une transposition de ce savoir savant vers un savoir enseigné. Nous pouvons cependant douter du fait que ce savoir savant constitue une référence pour les concepteurs des programmes, la logique mathématique étant une discipline mathématique peu connue même chez les mathématiciens.

Mes questions de recherche concernent plus précisément les professeurs : le nouveau programme de mathématiques pour la classe de Seconde de 2009 leur fixe des objectifs concernant des objets de la logique mathématique (connecteurs, quantificateurs, types de raisonnement). Mais plusieurs éléments ne facilitent pas la mise en place d'un enseignement permettant d'atteindre ces objectifs ; d'abord le format proposé pour cet enseignement est inhabituel : la logique doit être enseignée sans faire de cours spécifique, à l'occasion du travail sur d'autres notions. Ensuite, il n'y a pas clairement d'objets mathématiques de référence pour cet enseignement : la formation à la logique mathématique ne fait pas partie du cursus obligatoire des professeurs, mais s'ils ne connaissent pas forcément les objets dont il est question dans le programme en tant qu'objets mathématiques définis par la logique, ils les connaissent parce qu'ils les ont manipulés dans leur activité mathématique. Auxquelles de leurs connaissances vont alors se référer les professeurs ? Quel enseignement vont-ils mettre en place pour atteindre les objectifs fixés par le programme ? Comment les éléments cités ci-dessus vont influencer leurs choix ? L'étude épistémologique permet un premier éclairage sur les réponses des professeurs à ces questions. Dans la suite de cet article je propose de la compléter par une analyse de programmes et de manuels. Les programmes (et leur évolution) agissent comme contrainte pour l'enseignant. Les manuels ont un double aspect : ils sont également une contrainte puisqu'ils font partie des ressources sur lesquelles l'enseignant peut s'appuyer, mais ils sont aussi un révélateur de choix fait par les enseignants qui les écrivent.

III. HISTOIRE DE L'ENSEIGNEMENT DE LA LOGIQUE MATHEMATIQUE AU LYCEE EN FRANCE DES PROGRAMMES DE 1960 A CEUX DE 2008

Je commencerai par souligner une ressemblance frappante entre les programmes de 1960 et ceux de 2008. On trouve dans le programme de 1960, sous le titre « L'initiation au raisonnement logique » :

> C'est donc à l'enseignant du second cycle qu'incombe la tâche d'entreprendre et de poursuivre une initiation plus complète aux modes élémentaires de la pensée logique et à ses moyens d'expression, étant bien entendu que ces notions ne doivent pas faire l'objet d'un exposé systématique, théorique et abstrait; elles doivent être dégagées et précisées peu à peu, puis être mises à l'épreuve à l'occasion de l'étude méthodique et réfléchie des diverses théories et des nombreux problèmes que comporte chacune d'elles.

Et dans ceux de 2008, sous le titre « Raisonnement et langage mathématiques » :

> Le développement de l'argumentation et **l'entraînement à la logique** font partie intégrante des exigences des classes de lycée. A l'issue de la seconde, l'élève devra avoir acquis une expérience lui permettant de commencer à détacher les principes de la logique mathématique de ceux de la logique du langage courant, et, par exemple, à dissocier implication mathématique et causalité. Les concepts et méthodes relevant de la logique mathématique **ne doivent pas faire l'objet de cours spécifiques** mais doivent prendre place naturellement dans tous les chapitres du programme.

Mais derrière cette ressemblance il y a deux contextes d'enseignement très différents.

Le programme de 1960 marque le début de la présence de la logique mathématique dans l'enseignement mathématique au lycée. Elle n'est pas explicitement mentionnée, mais est présente à travers l'introduction des flèches d'implication et d'équivalence, et des symboles des quantificateurs. Ces symboles sont déjà utilisés dans les mathématiques universitaires, les instructions du 19 juillet 1960 incitent à la plus grande prudence quant à leur utilisation au lycée:

> Cependant, qu'il s'agisse du vocabulaire ou des symboles, il faut toujours prendre garde au double danger du verbalisme et du formalisme, aux méfaits que l'un et l'autre peuvent commettre ; les mots et les signes et, particulièrement, ceux qui ont, pour le néophyte, l'attrait de la nouveauté ou du pittoresque, risquent souvent de masquer la pensée.

Pour les partisans des mathématiques modernes, il faut enseigner aux élèves un langage mathématique spécifique permettant de proposer une vision unifiée de la mathématique qui joue ainsi « un rôle privilégié pour l'intelligence de ce que nous nommons le réel, réel physique comme réel social » (rapport préliminaire de la commission ministérielle 1967[2]). La logique, associée à la théorie des ensembles, est un élément essentiel de l'apprentissage de ce langage et les programmes de 1969 comportent un chapitre intitulé « Langage des ensembles » dont la première partie étudie le vocabulaire de la logique, et qui demande de faire le lien entre le langage des ensembles et le langage de la logique. Des instructions parues en 1970 proposent un rapide cours concernant ces notions qui sont nouvelles pour beaucoup de professeurs ayant eu une formation universitaire « classique ».

Le programme de la contre-réforme de 1981 pour la classe de seconde prend une position radicalement opposée : « Il convient de souligner les formes diverses de *raisonnement* mathématique mises en jeu dans les situations étudiées; mais *on évitera tout exposé de logique mathématique*. ». L'activité de l'élève est mise au cœur de l'enseignement, celui-ci doit être acteur de ses apprentissages. C'en est donc fini de « l'illusion langagière » (Bkouche, 1992) associée aux mathématiques modernes. On peut voir des traces de la logique aristotélicienne dans l'étude des formes de raisonnements, mais la logique mathématique a été rejetée avec tout ce qui paraissait trop formel et trop abstrait dans les mathématiques modernes. Ce bannissement perdure dans le programme de 1990, qui précise que tout exposé de logique est exclu.

C'est dans le programme de 2001 que l'on voit une timide réapparition de la logique :

> A l'issue de la seconde, l'élève devra avoir acquis une expérience lui permettant de commencer à détacher les principes de la logique formelle de ceux de la logique du langage courant, et, par exemple, à dissocier implication mathématique et causalité.

De nouveau, la logique est utilisée pour éclaircir des spécificités de la pratique des mathématiques. Il ne s'agit cependant pas, comme au temps des mathématiques modernes, d'utiliser les définitions et les théorèmes de la logique mathématique pour la mise en place d'un langage, mais plutôt d'attribuer à la logique un rôle dans l'apprentissage du raisonnement parce que c'est elle qui en donne les principes.

Le programme de 2008 reprend ces intentions, mais va plus loin en affichant des objectifs en matière de notations et raisonnement (figure 2) :

[2] Commission ministérielle chargée de réfléchir à la modernisation de l'enseignement des mathématiques, connue sous le nom de commission Lichnérowicz.

Notations et raisonnement mathématiques (objectifs pour le lycée)

Cette rubrique, consacrée à l'apprentissage des notations mathématiques et à la logique, ne doit pas faire l'objet de séances de cours spécifiques mais doit être répartie sur toute l'année scolaire.

Notations mathématiques

Les élèves doivent connaître les notions d'élément d'un ensemble, de sous-ensemble, d'appartenance et d'inclusion, de réunion, d'intersection et de complémentaire et savoir utiliser les symboles de base correspondant : $\in$, $\subset$, $\cup$, $\cap$ ainsi que la notation des ensembles de nombres et des intervalles.

Pour le complémentaire d'un ensemble A, on utilise la notation des probabilités $\overline{A}$.

Pour ce qui concerne le raisonnement logique, les élèves sont entraînés, sur des exemples :

- à utiliser correctement les connecteurs logiques « et », « ou » et à distinguer leur sens des sens courants de « et », « ou » dans le langage usuel ;
- à utiliser à bon escient les quantificateurs universel, existentiel (les symboles $\forall$, $\exists$ ne sont pas exigibles) et à repérer les quantifications implicites dans certaines propositions et, particulièrement, dans les propositions conditionnelles ;
- à distinguer, dans le cas d'une proposition conditionnelle, la proposition directe, sa réciproque, sa contraposée et sa négation ;
- à utiliser à bon escient les expressions « condition nécessaire », « condition suffisante » ;
- à formuler la négation d'une proposition ;
- à utiliser un contre-exemple pour infirmer une proposition universelle ;
- à reconnaître et à utiliser des types de raisonnement spécifiques : raisonnement par disjonction des cas, recours à la contraposée, raisonnement par l'absurde.

***Figure 2** – extrait du programme de seconde de 2008*

Par l'utilisation d'un certain vocabulaire relevant de son champ d'étude, la logique mathématique pourrait constituer ici une référence savante. Mais elle n'a comme fonction que de fournir des outils pour l'expression et le raisonnement dont les professeurs doivent apprendre le maniement à leurs élèves.

L'enseignement de la logique au lycée aujourd'hui n'est donc pas le produit d'une réflexion continue depuis les années 1960, mais vient à la suite de deux positions extrêmes : elle est présente comme une base nécessaire à l'apprentissage des mathématiques de 1969 à 1981, mais est ensuite exclue de 1981 à 2001 avant de revenir timidement. Comme au cours de l'histoire, c'est sur l'aspect formel de la logique que se focalisent les controverses : il est vu comme permettant de garantir aux mathématiques un fonctionnement simple et clair puisqu'explicitement décrit ou au contraire comme entravant une compréhension du sens des mathématiques.

Ce regard, nourri par l'analyse épistémologique, sur l'histoire de l'enseignement de la logique au lycée permet d'en préciser le contexte actuel. Il donne un premier aperçu des enjeux d'un tel enseignement, en reliant la logique à l'apprentissage de l'expression et du raisonnement en mathématiques. Je vais maintenant préciser ces enjeux, et ajouter à l'analyse des programmes celle de manuels car, ceux-ci constituant une référence pour les professeurs, leurs choix de contenus sont déterminants.

IV. APPROCHE ECOLOGIQUE

Les outils de l'analyse écologique me permettent d'étudier les contraintes qui pèsent sur les rédacteurs des manuels, puis comment les choix qu'ils font influent à leur tour sur les activités proposées par les professeurs dans leurs classes. Voici comment Michèle Artaud propose de procéder pour cette étude :

> … un objet ne pouvant pas vivre isolé, il sera nécessaire de faire vivre un complexe d'objets autour [de lui]. Il convient donc d'examiner les différents lieux où on [le] trouve et les objets avec lesquels [il] entre

> en association, ce qu'on appellera les habitats. Puis regarder en chacun de leurs habitats, la niche écologique qu'[il] occupe, c'est-à-dire en quelque sorte, la fonction qui est la [sienne]. Nous pourrons alors envisager la transposition de ces complexes d'objets dans l'enseignement secondaire. (Artaud, 1997)

J'ai d'abord étudié les textes des programmes afin d'examiner niches et habitats de la logique d'une manière générale. J'ai ensuite dressé une liste des objets présents dans l'enseignement des mathématiques au lycée et appartenant au domaine de la logique mathématique - les variables, les propositions, les connecteurs logiques, les quantificateurs - et regardé comment ils étaient présentés dans les manuels, en classant les propos selon qu'ils relèvent d'un aspect syntaxique ou sémantique.

L'étude épistémologique présentée en première partie montre que l'habitat de la logique mathématique est l'ensemble des mathématiques. Cet habitat diffus correspond à une volonté institutionnelle bien marquée dans les programmes de 1960 et de 2008 qui préconisent de travailler la logique à travers l'étude des différents chapitres du programme, mais aussi dans celui de 1969 qui précise que le chapitre « langage des ensembles » « fera beaucoup moins l'objet d'un préambule dogmatique que d'une insertion pratique, *à tout moment*, dans la suite du cours ». Ceci agit comme une contrainte institutionnelle forte : les concepts relevant de la logique mathématique sont des outils destinés à être disponibles à tout moment de l'activité mathématique. En 1969, ces concepts sont également liés à des objets dont les propriétés sont étudiées. Cela est beaucoup moins vrai dans les programmes actuels.

L'analyse comparative des programmes des années 1960, 1969, et 2008 permet d'identifier deux niches principales pour la logique mathématique au lycée :

- une niche langage : la logique mathématique sert à travailler sur les énoncés mathématiques et leurs formulations.
- une niche raisonnement : la logique sert à travailler sur les démonstrations et leur validité.

Mais ces deux niches sont complètement imbriquées. D'une part parce que le raisonnement est indissociable de la manière dont il est exprimé. Nous retrouvons ainsi cette imbrication dans des phrases telles que « poursuivre une initiation plus complète aux modes élémentaires de la pensée logique et à ses moyens d'expressions. » (programme de 1960), « exprimer les raisonnements et les résultats dans une présentation plus méthodique » (programmes de 1969). Cette volonté de raisonnements bien mis en forme ne se retrouve que plus discrètement dans le programme actuel, l'objectif fixé par celui-ci étant de rendre les élèves capables de « conduire un raisonnement, une démonstration » sans préciser d'exigences de forme. Réciproquement, conclure sur la valeur de vérité d'un énoncé demande bien sûr d'abord de le comprendre, mais aussi ensuite de démontrer ce que l'on affirme concernant sa vérité ou sa fausseté, c'est-à-dire produire un raisonnement.

D'autre part, l'imbrication des deux niches se fait autour de ce qui est parfois appelé « logique naturelle », logique qui se dégage des raisonnements que nous sommes amenés à faire dans des situations de la vie courante et que des élèves appliquent parfois dans des activités de mathématiques. C'est elle qui est évoquée dans les instructions de 1970 :

> Les élèves qui arrivent en Seconde ont déjà fait bien des raisonnements et appliqué ainsi des règles de logique, d'une manière peut-être plus spontanée que réfléchie; il convient de leur apprendre désormais, sur des exemples, à exprimer les raisonnements et les résultats dans une présentation plus méthodique.

Il y a un basculement de cette conception d'une certaine continuité entre la logique naturelle et la logique mathématique, à l'idée qu'il peut y avoir au contraire des obstacles dus à la confusion entre ces deux cadres de raisonnement puisque l'élève de 2008 doit « apprendre à distinguer les principes de la logique mathématique de ceux de la logique du langage courant ».

Cet habitat diffus et ces niches imbriquées agissent comme contraintes institutionnelles complexes sur les rédacteurs des manuels. J'examine ce que les manuels proposent dans leurs pages de logique en posant en particulier deux questions : dans quelle niche situer les fonctions occupées par les notions de logique qui sont présentées ? Dans quelles mesures sont présents leurs deux aspects syntaxiques et sémantiques ? Je présente ici les résultats de l'analyse comparée de trois manuels de 1969 et des dix manuels sortis en 2010.

Le programme de 1969, parce qu'il place les connaissances relatives à la logique mathématique à l'intérieur d'un chapitre du programme, impose ainsi une certaine unité dans l'organisation de la présentation de celles-ci : les manuels de cette époque commencent tous par un chapitre « langage des ensembles » qui commence lui-même par une partie logique. Dans les manuels de 2010 on trouve chez certains des pages concernant la logique mathématique en début ou en fin de livre, pages traitant uniquement de raisonnement ou également du vocabulaire ensembliste, chez d'autres des pages ou des encarts disséminés tout au long du livre, cette dernière organisation répondant mieux à la contrainte d'étudier la logique à travers tous les chapitres.

Les manuels de 1969 commencent tous par définir ce qu'est une proposition : c'est une affirmation de faits concernant des objets, qui peut être vraie ou fausse. Cette notion de proposition est essentielle à un travail d'analyse d'un énoncé mathématique articulant syntaxe et sémantique : être capable d'analyser la structure d'un énoncé permet de dégager les propositions élémentaires (ne pouvant être scindées) à partir desquelles il est construit, puis de déduire sa valeur de vérité de celles de ces propositions élémentaires. Dans les manuels de 2010, seuls trois manuels sur les dix étudiés définissent ce qu'est une proposition, quatre autres utilisent ce terme sans le définir. La dimension syntaxique d'opérateur sur les propositions des connecteurs est alors beaucoup moins présente dans les manuels actuels. De plus, si les manuel de 1969 énonçaient les règles qui régissent les manipulations formelles des énoncés (lois de Morgan, négation des énoncés quantifiés, forme disjonctive d'une implication et même en exercice la délicate question de sa négation, ces règles sont données sous formes de lois logiques ou de propositions équivalentes), ceux de 2010, sous la contrainte de ne pas faire de cours spécifiques, soit ne parlent pas de ces énoncés équivalents, soit ne donne pas à ces résultats le statut de propriété. Tout un travail de nature syntaxique, qui ancre la logique dans sa niche langage, proposé dans les manuels de 1969, est donc absent des manuels de 2010 pour lesquels le travail sur les énoncés se situe directement à l'intersection des niches langage et raisonnement. Ceci est encore renforcé par l'utilisation massive des symboles dans les manuels de 1969, qui par exemple oblige à séparer la quantification de la proposition ouverte sur laquelle elle porte. En 2010, seul un manuel utilise les symboles de quantificateurs.

C'est autour de l'implication que les deux niches langage et raisonnement sont les plus imbriquées. Dans deux des trois manuels de 1969 que j'ai étudiés, l'implication est présentée comme connecteur. Le troisième manuel de 1969 propose comme définition de l'implication : « écrire $h \Longrightarrow t$, c'est dire que, quand h se produit (quand h est vrai), t se produit (t est vrai) ». C'est cette approche que l'on retrouve dans les manuels de 2010, approche qui place l'implication dans la niche raisonnement, car l'énoncé « si A alors B » est alors lu comme « lorsque A est vrai, alors B est vrai », et réduit à son utilisation dans un raisonnement pour déduire B de A. Cela n'est jamais explicité, mais il s'agit là de l'implication universellement quantifiée, puisque les valeurs de vérité de A et de B varient. Mais un autre aspect du travail autour de l'implication se situe plutôt dans la niche langage : deux manuels de 2010 évoquent les implications « masquées » sous d'autres formulations, réciproque et contraposée sont présentées à partir de leurs formes par rapport à une implication « si P alors Q ». L'implication est également présente dans la niche raisonnement à travers la règle du modus-ponens (elle est aussi parfois appelée règle d'élimination de $\Rightarrow$), mais il est essentiel de distinguer les deux énoncés « si P alors Q » et « P donc Q ». On trouve malheureusement certains manuels de 2010 présentant ces deux expressions comme synonymes. Les règles du modus-ponens et du modus-tollens sont explicitées dans les manuels de 1969, elles sont associées à des schémas de raisonnement. Mais l'analyse de la structure d'un raisonnement montre que bien d'autres règles de déductions sont utilisées, notamment concernant les quantificateurs. Dans les manuels de 2010, aucune règle de déduction n'est explicitement mentionnée.

Ainsi, si les programmes affichent une volonté d'inscrire la logique mathématique dans une niche raisonnement, ce que l'on trouve à son propos dans les pages « logique » des manuels c'est essentiellement une présentation des différents types de raisonnement, présentation qui ne fait pas vraiment de lien avec la logique mathématique. Ceci n'est pas étonnant car si l'on peut considérer que variables, connecteurs, quantificateurs sont des objets que le mathématicien peut identifier dans sa pratique comme appartenant à un langage formel qui lui sert de référence, il associe rarement les déductions qu'il fait à des règles formalisées dans un système mais plutôt à un ensemble de savoir-faire. La logique est également présente dans les programmes et manuels dans une niche langage mais pour ce qui est des programmes et manuels actuels, l'absence des notions de variable et de propositions empêche une articulation des dimensions syntaxiques et sémantiques du travail sur les énoncés.

V. CONCLUSION

Les pistes que j'ai décrites ici constituent pour moi une base théorique permettant de mieux cerner les enjeux d'un enseignement de la logique mathématique au lycée. Si la logique est depuis toujours liée au raisonnement, son utilisation pour l'apprentissage de celui-ci n'a rien d'évident et c'est plutôt en liaison avec le langage que les manuels présentent les objets de la logique mathématique. Par ailleurs, les auteurs des manuels actuels doivent composer avec la contrainte de ne surtout pas faire de cours spécifiques. Cette contrainte a été légèrement allégée dans les programmes pour la classe de première d'août 2010 puisque ceux-ci conviennent que l'on peut prévoir des « temps de synthèse ». Cette étude des programmes et des manuels est un élément à prendre en compte dans ma recherche centrée sur les professeurs. Quelles sont les pratiques des professeurs de lycée par rapport à l'enseignement de la logique ? Comment tiennent-ils compte dans leur enseignement des prescriptions du programme ? Trouvent-ils dans leur formation initiale un bagage suffisant pour se constituer un savoir de référence pour l'enseignement de la logique au lycée ? Quels peuvent être les effets de quelques jours de formation continue ? La suite de mon travail consiste à mettre en place des observations me permettant de répondre à ces questions.

Par ailleurs, les analyses présentées ici montre la complexité d'un enseignement de ce qui relève de la pensée logique. Tous les mathématiciens semblent capables de mettre en œuvre cette pensée logique, montrant ainsi qu'ils ont su se forger les connaissances en logique nécessaires à leur activité. Que pourrait leurs apporter en plus des connaissances en logique mathématique ? Et pour des élèves dont on constate les difficultés de raisonnement et d'expression, la logique mathématique peut-elle participer au développement de leur pensée logique et de sa mise en action dans leur activité mathématique ?

REFERENCES

Artaud M. (1997) Introduction à l'approche écologique du didactique. L'écologie des organisations mathématiques et didactiques. *Actes de la IXe école d'été de didactique des mathématiques*, 101-139

Ben Kilani I. (2005) *Les effets didactiques des différences de fonctionnement de la négation dans la langue arabe, la langue française et le langage mathématique.* Thèse de doctorat. Université Claude Bernard Lyon 1.

Bkouche R. (1992) L'enseignement scientifique entre l'illusion langagière et l'activisme pédagogique. *Repères-IREM* 9, 5-14.

Blanché R. (1970) *La logique et son histoire.* Paris : Armand Colin.

Chellougui F. (2004) *L'utilisation des quantificateurs universels et existentiels en première année universitaire entre l'explicite et l'implicite.* Thèse de doctorat. Université Claude Bernard Lyon 1.

Deloustal-Jorrand V. (2004) *L'implication mathématique : étude épistémologique et didactique.* Thèse de doctorat. Université Joseph Fourier Grenoble I.

Durand-Guerrier V. (1996) *Logique et raisonnement mathématique. Défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication.* Thèse de doctorat. Université Claude Bernard Lyon 1.

Durand-Guerrier V. (2005) *Recherches sur l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique dans une perspective didactique.* Habilitation à diriger des recherches. Université Claude Bernard Lyon 1.

Kouki R. (2008) *Enseignement et apprentissage des équations, inéquations et fonctions au secondaire : entre syntaxe et sémantique.* Thèse de doctorat. Université Claude Bernard-Lyon 1.

Lacombe D. (2007) *Tout ce que vous avez toujours voulu savoir sur la logique et qu'on n'a jamais voulu vous révéler.* Conférence au séminaire de l'IREM de Paris 7.

MANUELS SCOLAIRES

Programme de 1969 :

Algèbre, 2e ACT, collection ALEPH'0, Classiques Hachette, 1969.

Mathématique 2e CT, collection QUEYSANNE-REVUZ, Fernand Nathan, 1969.

Mathématique, 2e A, V.LESPINARD, André Desvigne, 1969.

Programme de 2009 :

Maths 2nd, collection Indice, BORDAS, 2009.

Mathématiques 2nd, collection Hyperbole, NATHAN, 2010.

2nd, collection Math'x, DIDER, 2010.

Maths 2nd repères, HACHETTE EDUCATION, 2010.

Math 2nd, Travailler en confiance, NATHAN, 2010.

Odyssée mathématiques 2nd, HATIER, 2010.

Transmath 2nd, NATHAN, 2010.

Symbole maths 2nd, BELIN, 2010.

Déclic, Mathématiques 2nd, HACHETTE EDUCATION, 2010.

Maths 2nd , collection Pixel, BORDAS, 2010.

LA PENSEE ALGORITHMIQUE : APPORTS D'UN POINT DE VUE EXTERIEUR AUX MATHEMATIQUES

Simon MODESTE*

Résumé – Nous abordons ici la question de la *pensée algorithmique*. Nous adoptons deux points de vue. Le premier consiste à regarder la pensée algorithmique comme *une* pensée des mathématiques, l'algorithme étant depuis des siècles, outil et objet des mathématiques. Le second consiste à la voir comme *la* pensée de la science algorithmique (ou informatique). L'algorithme est l'objet central de l'informatique, et c'est en informatique que son étude a été largement développée, avec un impact fort sur les mathématiques. Nous montrons que cette deuxième approche enrichit la première, dans l'objectif d'une caractérisation de la pensée algorithmique, mais aussi pour des perspectives d'enseignement.

Mots-clefs : algorithme, pensée algorithmique, pensée mathématique, activité, enseignement

Abstract – We deal here with the question of *algorithmic thinking*. We study it from two points of view. First, algorithmic thinking can be seen as *a particular* mathematical thinking, since algorithm has been a tool and an object of mathematics for centuries. Second, algorithmic thinking can be seen as *the* thinking of algorithmic science (or computer science). Algorithm is the most important concept in computer science, and computer science made it deeply evolve with a strong impact on mathematics. We show that the second point of view can enrich the first one, both for epistemological perspectives on algorithmic thinking and for educational issues.

Keywords: algorithm, algorithmic thinking, mathematical thinking, activity, teaching

Depuis plusieurs années, l'outil informatique et les questions qui lui sont liées font leur apparition dans l'enseignement secondaire. Le cours de mathématiques n'échappe pas à cela. Cependant, il est indéniable qu'un lien particulier unit mathématique et informatique et qu'en mathématique, la science informatique apporte bien plus que des outils. L'algorithme, objet central de l'informatique, mais aussi objet des mathématiques depuis des siècles, prend maintenant une nouvelle place dans les mathématiques et nécessairement dans leur enseignement. Les mathématiques s'en trouvent interrogées et leur enseignement aussi. Par exemple, le *National Council of Teachers of Mathematics* a consacré en 1998, son « Yearbook » à l'enseignement et l'apprentissage des algorithmes dans la classe de mathématiques (NCTM 1998). Depuis 2009, en France, une part d'algorithmique a été introduite dans les programmes du lycée.

Il n'est pas impossible que l'algorithmique accède dans les années à venir au même statut que l'algèbre, la géométrie, l'analyse ou les probabilités et statistiques dans les programmes et manuels du secondaire.

Un tel changement demande un approfondissement des liens qu'entretiennent mathématiques et algorithmique. Quelles relations et différences existe-t-il entre pensée mathématique et pensée algorithmique ? En quoi la pensée algorithmique diffère-t-elle des autres pensées mathématiques ?

I. CADRE DU QUESTIONNEMENT

1. *Algorithme et algorithmique*

Pour commencer, il nous semble indispensable de décrire ce qu'est l'algorithmique, dans son sens le plus répandu. Pour cela il nous faut préciser ce que constitue le concept d'algorithme,

* Institut Fourier, Équipe combinatoire et didactique, Grenoble – France – simon.modeste@ujf-grenoble.fr

© Modeste S. (2012) La pensée algorithmique : apports d'un point de vue extérieur aux mathématiques. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement Des Mathématiques et Contrat Social : Enjeux et Défis pour le 21e Siècle – Actes du Colloque EMF 2012* (GT3, pp. 467–479). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

au sens mathématique (et informatique) du terme, afin de lever toute ambiguïté, et de le distinguer de termes plus vagues (auquel il est souvent associé, voire substitué[1]) tels que procédé, méthode, technique, heuristique ou même programme. C'est toujours dans le sens de cette définition que nous entendrons le terme algorithme, notamment nous éviterons de parler d'algorithmes concernant les techniques ou méthodes (créées ou apprises) mises en œuvre pour résoudre un problème.

Définition[2] : Un algorithme est une procédure systématique permettant de résoudre une classe de problèmes. À partir d'une entrée (représentant une instance du problème), un algorithme suit un ensemble déterminé de règles et, en un nombre fini d'étapes, produit une sortie (représentant une réponse à l'instance donnée).

L'algorithmique est donc l'étude des algorithmes, de leur conception et de leurs propriétés. Knuth (1985) quant à lui, perçoit l'algorithmique comme étant l'informatique toute entière.

> For many years I have been convinced that computer science is primarily the study of algorithms. My colleagues don't all agree with me, but it turns out that the source of our disagreement is simply that my definition of algorithms is much broader than theirs: I tend to think of algorithms as encompassing the whole range of concepts dealing with well-defined processes, including the structure of data that is being acted upon as well as the structure of the sequence of operations being performed […] In the U.S.A., the sorts of things my colleagues and I do is called Computer Science, emphasizing the fact that algorithms are performed by machines. But if I lived in Germany or emphasizing the stuff that France, the field I work in would be called Informatik or Informatique, algorithms work on more than the processes themselves. In the Soviet Union, the same field is now known as either Kibernetika (Cybernetics), emphasizing the control of a process, or Prikladnaîa Matematika(Applied Mathematics),emphasizing the utility of the subject and its ties to mathematics in general. (Knuth 1985, p. 170)

Selon lui, l'algorithmique doit être vue comme l'étude de ce qui est automatisable. Une telle vision de l'algorithmique s'étend au-delà des mathématiques.

Du point de vue de l'enseignement, l'idée de concevoir l'algorithmique dans un sens large semble importante. Comme le souligne Maurer (1998) concernant l'enseignement de l'algorithmique :

> In any event, algorithmics does not mean performing algorithms over and over by hand. Algorithms will be carried out more and more by machines or by person-machine combinations. Algorithmics is thinking about algorithms, not thinking like algorithms (Op. cité, p. 24)

2. Exemples d'interactions entre pensées mathématique et algorithmique

Dans l'ouvrage *Thinking mathematically* (Mason et al. 1985), les auteurs proposent une initiation au raisonnement mathématique grâce à une heuristique, développée à travers une série de problèmes mathématiques et de réflexions. Parmi les problèmes proposés, nous avons relevé trois exemples permettant d'illustrer et d'initier un questionnement sur la nature de la pensée algorithmique.

Patchwork

Take a square and draw a straight line right across it. Draw several more lines in any arrangement so that the lines all cross the square, and the square is divided into several regions. The task is to colour the regions in such a way that adjacent regions are never coloured the same. (Regions having only one point in common are not considered adjacent.) How few different colours are needed to colour any such arrangement?

[1] Pouvant induire, selon nous, beaucoup de conceptions erronées concernant algorithme et algorithmique.

[2] Cette définition s'inspire de (Knuth, 1985) et (Maurer, 1998), les termes en gras mettent en avant les caractéristiques importantes de l'algorithme.

Figure 1 *– Exemple 1 (Mason et al. 1985, p. 11)*

Exemple 1 : La solution à ce problème est que l'on peut toujours colorier les différentes zones avec seulement deux couleurs (ici blanc et noir). La méthode proposée pour réaliser une telle coloration et pour montrer que cela est toujours possible est algorithmique :

```
On part du carré vide colorié en blanc.
On ajoute les droites de l'arrangement une par une et à chaque fois :
      On inverse les couleurs des zones se situant d'un côté de la droite.
```

Cette méthode est illustrée sur un cas précis :

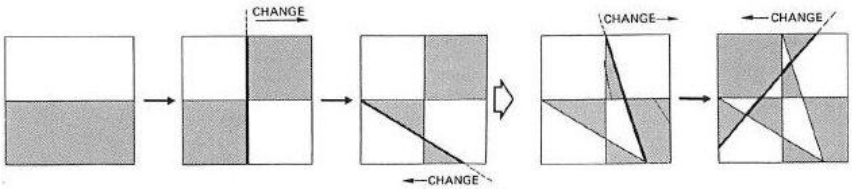
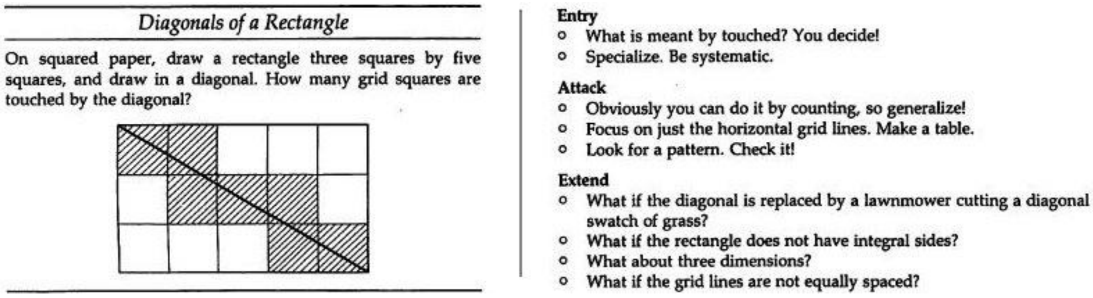


Figure 2 *– Illustration de l'algorithme de résolution de l'exemple 1(Mason et al. 1985, pp. 15-16)*

Une preuve de cette méthode est avancée :

> Each side of the new line is properly coloured because adjacent regions were coloured differently by the old colouring; regions which are adjacent along the new line are also coloured differently. (Op. Cité, p.16)

Ce problème amène à une résolution via un algorithme et à la preuve de cet algorithme. Il semble donc qu'une pensée algorithmique soit en jeu avec ce problème.



Diagonals of a Rectangle

On squared paper, draw a rectangle three squares by five squares, and draw in a diagonal. How many grid squares are touched by the diagonal?

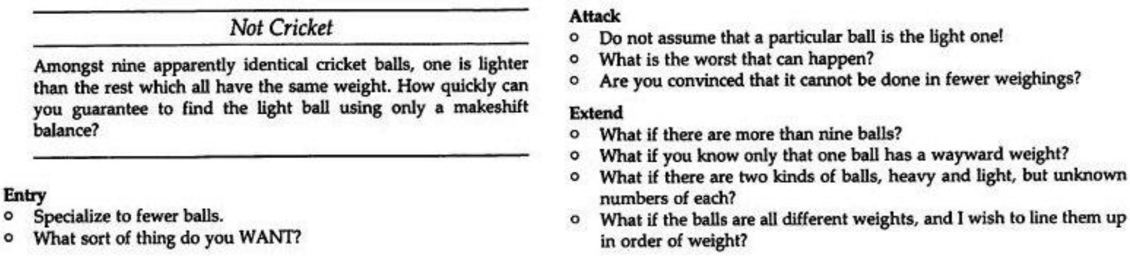
Entry
- What is meant by touched? You decide!
- Specialize. Be systematic.

Attack
- Obviously you can do it by counting, so generalize!
- Focus on just the horizontal grid lines. Make a table.
- Look for a pattern. Check it!

Extend
- What if the diagonal is replaced by a lawnmower cutting a diagonal swatch of grass?
- What if the rectangle does not have integral sides?
- What about three dimensions?
- What if the grid lines are not equally spaced?

Figure 3 *– Exemple 2 (Mason et al. 1985, p. 166)*

Exemple 2 : Ce problème et les extensions proposées évoquent l'étude des droites discrètes, question algorithmique encore très vive en informatique et en mathématiques.



Not Cricket

Amongst nine apparently identical cricket balls, one is lighter than the rest which all have the same weight. How quickly can you guarantee to find the light ball using only a makeshift balance?

Entry
- Specialize to fewer balls.
- What sort of thing do you WANT?

Attack
- Do not assume that a particular ball is the light one!
- What is the worst that can happen?
- Are you convinced that it cannot be done in fewer weighings?

Extend
- What if there are more than nine balls?
- What if you know only that one ball has a wayward weight?
- What if there are two kinds of balls, heavy and light, but unknown numbers of each?
- What if the balls are all different weights, and I wish to line them up in order of weight?

Figure 4 *– Exemple 3 (Mason et al., 1985, p. 183)*

Exemple 3 : Nous avons étudié ce problème dans un contexte didactique (Modeste et *al.* 2010) et nous avons montré son intérêt pour aborder les questions d'algorithmique.

Ces trois problèmes, utilisés par Mason et al. pour développer le raisonnement mathématique, sont fortement imprégnés d'algorithmique. Le deuxième est même en lien direct avec de réelles problématiques d'informatique. Il semble donc qu'une activité algorithmique soit présente dans les mathématiques. Cependant, certains problèmes algorithmiques, comme l'exemple 2, montrent que des questions mathématiques proviennent de l'informatique. Il pourrait donc être enrichissant de s'intéresser à la pensée algorithmique en elle-même, sans nécessairement la plonger dans l'activité mathématique.

3. L'algorithmique dans les programmes du secondaire en France

Dans les programmes du lycée, l'algorithmique fait depuis 2009 l'objet d'un paragraphe à part (figure 5).

Les quelques lignes que constitue ce paragraphe attribuent à l'algorithmique un rôle important dans l'activité mathématique et transversal aux différents champs des mathématiques. Cependant, l'accent est mis essentiellement sur la programmation, la mise en œuvre d'algorithmes et la description d'algorithmes, les différents objectifs attendus des élèves le montrent bien. À aucun moment le lien entre algorithme et résolution de problèmes n'est abordé et il semble que l'objectif principal d'un enseignement d'algorithmique soit l'apprentissage de la rigueur.

Dans une perspective d'enseignement, il est fondamental de ne pas réduire les questions d'algorithmiques à des questions de programmation, de rédaction, et d'exécution d'algorithmes.

Les algorithmes et leur étude jouent un rôle important dans la pensée mathématique, et la pensée algorithmique demande d'être analysée de manière détaillée afin de lui donner sa place dans l'activité mathématique en classe. Dans cette optique, il est important de savoir quels sont les problèmes qui mettent réellement en jeu une activité algorithmique.

Algorithmique (objectifs pour le lycée)

La démarche algorithmique est, depuis les origines, une composante essentielle de l'activité mathématique. Au collège, les élèves ont rencontré des algorithmes (algorithmes opératoires, algorithme des différences, algorithme d'Euclide, algorithmes de construction en géométrie). Ce qui est proposé dans le programme est une formalisation en langage naturel propre à donner lieu à traduction sur une calculatrice ou à l'aide d'un logiciel. Il s'agit de familiariser les élèves avec les grands principes d'organisation d'un algorithme : gestion des entrées-sorties, affectation d'une valeur et mise en forme d'un calcul.

Dans le cadre de cette activité algorithmique, les élèves sont entraînés :
- à décrire certains algorithmes en langage naturel ou dans un langage symbolique ;
- à en réaliser quelques uns à l'aide d'un tableur ou d'un petit programme réalisé sur une calculatrice ou avec un logiciel adapté ;
- à interpréter des algorithmes plus complexes.

Aucun langage, aucun logiciel n'est imposé.

L'algorithmique a une place naturelle dans tous les champs des mathématiques et les problèmes posés doivent être en relation avec les autres parties du programme (fonctions, géométrie, statistiques et probabilité, logique) mais aussi avec les autres disciplines ou la vie courante.

À l'occasion de l'écriture d'algorithmes et de petits programmes, il convient de donner aux élèves de bonnes habitudes de rigueur et de les entraîner aux pratiques systématiques de vérification et de contrôle.

Instructions élémentaires (affectation, calcul, entrée, sortie). Les élèves, dans le cadre d'une résolution de problèmes, doivent être capables : • d'écrire une formule permettant un calcul ; • d'écrire un programme calculant et donnant la valeur d'une fonction ; ainsi que les instructions d'entrées et sorties nécessaires au traitement.
Boucle et itérateur, instruction conditionnelle Les élèves, dans le cadre d'une résolution de problèmes, doivent être capables : • de programmer un calcul itératif, le nombre d'itérations étant donné ; • de programmer une instruction conditionnelle, un calcul itératif, avec une fin de boucle conditionnelle.

Figure 5 *– Extrait des programmes du lycée en France, passage concernant l'algorithmique*

4. Problématique et organisation de l'article

Il nous semble important de se questionner sur la place et le rôle de l'algorithme en mathématiques.

Q1 : Qu'est-ce que la pensée algorithmique et quelles sont ses caractéristiques ?

Q2 : Quelles relations entretiennent la pensée mathématique et la pensée algorithmique ? La pensée algorithmique et les diverses pensées mathématiques ?

Q3 : Quels intérêts didactiques à distinguer la pensée algorithmique de/dans la pensée mathématique ?

Nous nous focaliserons essentiellement sur la relation entre pensée mathématique et algorithmique d'un point de vue épistémologique et nous soulèverons certains aspects importants pour la mise en œuvre et l'apprentissage de ces pensées. Nous articulerons ces questions suivant deux visions de l'algorithmique : la première comme branche des mathématiques, la seconde dans un cadre plus général comme science à part, l'informatique.

5. La « Pensée » ?

Commençons par préciser ce que nous entendons par pensée (mathématique ou algorithmique). Le terme provient des recherches anglo-saxonnes sur le *mathematical thinking*. Concernant le sens des termes *thinking* ou pensée nous nous référons notamment à Tall (1991) et Rasmussen et al. (2005) :

> [We] take a critical look at advanced mathematical thinking as part of the living process of human thought rather than the immutable final product of logical deduction. (Tall 1991, p.21)

Nous faisons donc référence à la pensée (mathématique, algorithmique, etc.) comme activité de l'esprit humain et non comme son produit. D'autre part, nous utiliserons, comme le font Rasmussen et *al.* (2005), le terme d'activité (mathématique, algorithmique...) de manière équivalente au terme pensée, afin d'insister sur le fait que nous n'opposons pas ici la pensée à l'action, mais que nous parlons de pensée en tant qu'activité globale, à la fois intellectuelle et pratique :

> We also use the term activity, rather than thinking. This shift in language reflects our characterization of progression in mathematical thinking as acts of participation in a variety of different socially or culturally situated mathematical practices. […] We view the relationship between doing and thinking to be reflexive in nature, not dichotomous. (Rasmussen et al. 2005, p. 51)

On retrouve aussi souvent le terme de « advanced mathematical thinking », qu'il faut comprendre au sens de la pensée (ou l'activité) du chercheur en mathématiques. Nous nous placerons par rapport à cela dans la même optique que Harel et Sowder (2005) :

> Advanced mathematical thinking, usually conceived as thinking in advanced mathematics, might profitably be viewed as advanced thinking in mathematics (advanced mathematical-thinking). (Op. cité, p.1)

Nous concevrons l'*advanced mathemetical thinking* de cette façon, comme la pensée avancée en mathématique. Nous donnerons un sens équivalent à un « advanced algorithmic thinking ».

II. LA PENSEE ALGORITHMIQUE EN TANT QUE PENSEE MATHEMATIQUE

1. Considérations épistémologiques

La pensée algorithmique, contrairement à la pensée mathématique, n'a été que très peu étudiée. Dans les travaux où on la rencontre, elle est souvent abordée comme une pensée mathématique en particulier. C'est ce point de vue que nous allons adopter dans un premier temps.

Mingus et Grassl (1998), étudient la vision d'enseignants de mathématiques en activité et en formation concernant la pensée algorithmique, la pensée récursive et le *problem-solving*. Ils se placent implicitement à l'intérieur de la pensée mathématique et définissent l'*algorithmic thinking* de la manière suivante :

> Algorithmic thinking is a method of thinking and guiding thought processes that uses step-by-step procedures, requires inputs and produces outputs, requires decisions about the quality and appropriateness of information coming and information going out, and monitors the thought processes as a means of controlling and directing the thinking process. In essence, algorithmic thinking is simultaneously a method of thinking and a means for thinking about one's thinking. (Op. Cité, p. 34)

Les auteurs donnent comme modèle (au sens de modélisation) de la pensée algorithmique, l'heuristique de résolution de problèmes proposée par Pólya (1945). Ceci pose la question de la différence entre problem-solving et pensée algorithmique, ainsi que la différence avec l'activité mathématique en générale (l'heuristique de Pólya concernant la résolution de n'importe quel problème mathématique). Il nous semble que les auteurs font plutôt référence ici à ce que l'on pourrait traduire par une pensée « algorithmisée », c'est-à-dire un effort pour forcer sa pensée, en mathématique par exemple, à suivre un cheminement établi, systématique, avec un contrôle sur son produit.

Nous nous distinguons d'une telle approche. Nous nous intéressons ici, non pas à rendre la pensée algorithmique (à l' « algorithmiser »), mais bien à l'étude de la pensée (ou l'activité) **en** algorithmique[3]. Dans cette optique, la définition précédente nous semble trop ambigüe et non effective pour notre questionnement.

Hart (1998) parle, quant à lui, d'*algorithm problem solving*, un thème central dans toutes les branches des mathématiques discrètes, qu'il définit comme l'étude de la question : une solution peut-elle être construite de manière effective ? On trouve ici encore le problem-solving et l'algorithmique mêlés. La pensée algorithmique serait alors une façon d'aborder un problème en essayant de systématiser sa résolution, de se questionner sur la façon dont des algorithmes pourraient ou non le résoudre. On peut rapprocher cette définition de la vision constructiviste des mathématiques.

Notre vision de la pensée algorithmique se rapproche de celle de Hart (1998). L'activité mathématique étant centrée sur la résolution de problèmes, la pensée algorithmique, en tant que pensée mathématique parmi d'autres, serait une approche particulière des problèmes mathématiques (de certains en tout cas).

Ces problèmes sont généralement issus d'une branche particulière des mathématiques, les mathématiques discrètes ou bien d'une discrétisation d'objets du continu (problèmes d'approximation en analyse, etc.).

---

[3] De même que les pensées algébriques ou statistiques ne sont pas la conduite de sa pensée de manière algébrique ou statistique mais les modes de pensée en jeu dans les branches concernées.

2. *Perspectives pour l'enseignement*

Rasmussen et al. (2005) s'intéressent à l'*advanced mathematical thinking* dans une perspective éducative. Dans une description de ce qu'ils nomment *advancing mathematical activity*, ils se focalisent sur trois grandes pratiques dans l'activité mathématique :

> Students' symbolizing, algorithmatizing, and defining activities are three examples of such social or cultural practices. These three mathematical practices are not meant to be exhaustive, but represent a useful set of core practices that cut across all mathematical domains. Another significant mathematical practice, one that we leave to later analysis, is justifying. (Op. cité, p. 52)

Attardons-nous sur ce qu'ils nomment l'*algorithmatizing*. Bien qu'ils utilisent le terme algorithme dans un sens plus large que le nôtre, « as a reference for a generalized procedure that is effective across a wide range of tasks » (Op. Cité, p. 63), leur approche nous paraît enrichissante :

> Keeping this activity perspective of algorithms in the forefront suggests that instead of focusing on the acquisition of these algorithms, we can characterize learning to use and understand algorithms as participating in the practice of algorithmatizing. By examining the activity that leads to the creation and use of artifacts, as opposed to the acquisition of the artifacts, we view mathematical learning of and in reference to algorithms through a different lens. (Op. cité, p.63)

L'activité algorithmique ne se résume donc pas à l'apprentissage et la mise en œuvre d'algorithmes mais englobe aussi leur production, leur compréhension et leur étude. Rasmussen et *al.* (2005) montrent ensuite qu'il est possible et pertinent de mettre des étudiants en situation d'*algorithmitazing*.

Dans de précédents travaux (Modeste et al. 2010), nous avions montré qu'aborder l'algorithme et l'algorithmique en tant qu'objet et pas uniquement en tant qu'outil était possible en classe :

> On peut questionner les différents aspects de ce concept [l'algorithme] dans certaines situations, et tenter de faire apparaître l'algorithme comme un véritable objet mathématique. (Op. cité, p. 71)

En mathématiques, l'activité algorithmique peut se définir comme une étape dans la résolution d'une certaine catégorie de problèmes dans laquelle on recherche un procédé systématique et effectif de résolution. Il est possible d'aborder de manière utile l'objet algorithme et la pensée algorithmique en classe dans le cadre d'une réelle activité mathématique (résolution de problèmes, preuve de solutions, etc).

Cependant, il est peut-être restrictif de voir la pensée algorithmique comme une pensée des mathématiques et il nous semble que l'étude de la pensée algorithmique comme la pensée en jeu dans la science informatique (l'*algorithmics* de Knuth) peut enrichir notre approche.

III. PENSEE ALGORITHMIQUE VERSUS PENSEE MATHEMATIQUE

1. *Considérations épistémologiques*

Donald Knuth, mathématicien de formation, devenu l'un des pionniers de l'informatique et auteur des ouvrages de références *The Art of Computer Programming*, s'est beaucoup intéressé aux liens qu'entretiennent mathématiques et informatique. Dans l'article *Algorithmic thinking and mathematical thinking* (Knuth 1985), il aborde la question du rôle de l'algorithmique dans les sciences mathématiques et se demande ce qui différencie *algorithmic* *thinking* et *mathematical thinking*[4]. Il formule « Do most mathematicians have an essentially different thinking process from that of most computer scientists? »

Knuth s'intéresse donc à la pensée algorithmique comme étant celle de l'informatique. Il s'appuie sur des ouvrages de mathématiques et sur des preuves qui y sont présentées pour analyser la pensée mathématique et la comparer à la pensée algorithmique. Il divise la pensée mathématique en neuf « modes de pensée » qu'il résume dans le tableau de la figure 6.

Précisons que Knuth ne considère pas ce découpage comme parfait ou immuable : « Thus, I am not all certain of the categories; they are simply put forward as a basis for discussion » (Knuth 1985, p.180).

En s'appuyant sur ce découpage, il analyse ce qu'il considère comme la pensée algorithmique, laquelle englobe parmi les manières de raisonner précédentes : la représentation de la réalité, la réduction à des problèmes plus simples, le raisonnement abstrait, les structures d'information, le recours à des algorithmes et, dans une moindre mesure, la manipulation de formules.

(Two ⋆'s means a strong use of some reasoning mode, while one ⋆ indicates a mild connection).

	Formula manipulation	Representation of reality	Behavior of function values	Reduction to simpler problems	Dealing with infinity	Generalization	Abstract reasoning	Information structures	Algorithms
1 (Thomas)	⋆⋆	⋆⋆	⋆⋆						
2 (Lavrent'ev/Nikol'skiĭ)	⋆⋆		⋆		⋆⋆				
3 (Kelley)	⋆					⋆⋆	⋆⋆		
4 (Euler)	⋆⋆		⋆⋆	⋆		⋆⋆			⋆
5 (Zariski/Samuel)	⋆			⋆	⋆⋆	⋆	⋆⋆	⋆⋆	
6 (Kleene)	⋆					⋆⋆	⋆⋆		⋆
7 (Knuth)	⋆⋆	⋆		⋆					
8 (Pólya/Szegő)	⋆⋆		⋆⋆	⋆⋆	⋆⋆				
9 (Bishop)	⋆⋆		⋆⋆	⋆⋆		⋆	⋆⋆	⋆⋆	⋆
"Algorithmic thinking"	⋆	⋆⋆		⋆⋆			⋆⋆	⋆⋆	⋆⋆

Figure 6 *– Les différentes pensées mathématiques selon Knuth (1985)*

On pourrait reprocher à Knuth de mélanger pensée (algorithmique ou mathématique) et les questions auxquelles cette pensée s'applique ou les objets dont elle traite. Cependant, son analyse peut enrichir notre questionnement : est-ce que ce ne sont pas plus le type de questionnement et les objets étudiés qui distinguent mathématique et algorithmique ?

Wilf (1982) semble aller dans ce sens : dans un article intitulé *What is an Answer*, il analyse ce qui est une réponse acceptable dans un problème de dénombrement et montre notamment qu'une formule de dénombrement peut être parfois plus complexe[5] à évaluer que l'ensemble étudié à énumérer. Dans un tel cas, peut-on considérer la réponse produite comme une réponse acceptable du point de vue mathématique ? Du point de vue algorithmique ?

De tels exemples ne sont pas uniquement liés aux mathématiques discrètes. Par exemple, une formule exacte donnant la valeur d'une intégrale est-elle toujours plus simple à évaluer que l'intégrale elle-même ? Un tel exemple est développé par Maurer (1998).

Il semblerait que ce qui caractérise la pensée algorithmique soit plutôt une préoccupation quant à l'effectivité des résultats recherchés qu'une réelle différence dans l'activité.

[4] Comme nous l'avons dit plus haut, pour Knuth, *algorithmics* prend le sens d'informatique (*computer science*).
[5] Au sens de la complexité algorithmique.

Cependant, Knuth (1985) note aussi que deux aspects fondamentaux de la pensée algorithmique ne sont pas présent dans sa liste des modes de pensée mathématiques : la notion de complexité et l'opération d'assignation qu'il symbolise par « := ».

Selon lui, ces deux aspects pourraient être ce qui différencie les pensées mathématiques et algorithmiques.

La notion de **complexité** est relative à l'efficacité d'un algorithme ou d'une procédure effective. Elle englobe toutes les questions se rapportant au nombre d'étape de calcul, au temps, ou à l'espace mémoire, nécessaires à l'exécution d'un algorithme, dans le pire des cas ou en moyenne. La notion de complexité est clairement liée à des problématiques de mathématiques constructives ou effectives, cependant elle précise ces notions et permet une hiérarchisation des algorithmes selon certains critères d'effectivité réelle, ou d'efficacité.

La notion d'**assignation** évoque ici le concept de variable informatique, par opposition à variable mathématique. Une variable informatique désigne un emplacement dans la mémoire et son contenu peut changer. L'opération d'affectation d'une valeur à une variable est une opération non-symétrique, contrairement à l'égalité. Cependant, la notion d'affectation (ainsi que le concept de variable informatique) est en lien étroit avec la notion de complexité. En effet, c'est l'utilisation de variables informatiques qui permet la production d'algorithmes efficaces en termes de complexité en espace.

L'absence de ces deux aspects dans la pensée mathématique peut se résumer par les remarques de Knuth concernant Bishop :

> Bishop's mathematics is constructive, but it does not have all the ingredients of an algorithm because it ignores the "cost" of the constructions. […] The assignement operation in Bishop's constructions aren't really assignements, they are simply definitions of quantities, and those definitions won't be changed. (Knuth 1985, p.181)

En d'autres termes, la pensée des mathématiques constructives diffère de la pensée algorithmique par le fait qu'elle ne questionne pas l'efficacité des algorithmes qu'elle produit, et qu'elle ne cherche pas toujours à décrire ces algorithmes.

Dans un autre article, traitant des mêmes questions, Knuth (1974) aborde les interactions entre informatique et mathématiques et évoque les diverses façons dont l'informatique influence les mathématiques. Il note que l'informatique permet d'effectuer certains calculs inaccessibles et de valider ou d'invalider certaines conjectures, que l'informatique a entraîné une certaine insistance sur les constructions en mathématiques (notamment par le remplacement de preuves constructives par des algorithmes), que l'informatique permet la construction de certaines bijections et que l'informatique a complètement étendu et enrichi le champs des mathématiques discrètes. Cependant, l'impact le plus notable selon Knuth (1974), est que l'informatique apporte de nouveaux problèmes.

> The most significant thing is that the study of algorithms themselves has opened up a fertile vein of interesting new mathematical problems; it provides a breath of life for many areas of mathematics that had been suffering from a lack of new ideas. (Op. Cité)

Le mathématicien Herbert S. Wilf, dans l'article *Mathematics: An Experimental Science* (Wilf 2005), évoque lui aussi les changements apportés par l'informatique aux mathématiques. Il se concentre principalement sur les interactions possibles lors des phases d'expérimentation et de conjecture dans l'activité mathématique. La pensée mathématique se trouve donc changée par l'informatique, et son aspect expérimental s'en trouve renforcé :

> A mathematician can act in concert with a computer to explore a world within mathematics. From such explorations there can grow understanding, and conjectures, and roads to proofs, and phenomena that would not have been imaginable in the pre-computer era. (Wilf 2005)

Finalement, l'informatique est source de questions d'ordre mathématiques mais aussi de questions sur l'essence des mathématiques. Ces questionnements doivent aussi atteindre l'enseignement des mathématiques, dans ses pratiques mais aussi dans ses contenus.

> The most surprising thing to me, in my own experiences with applications of mathematics to computer science, has been the fact that so much of the mathematics has been of a particular discrete type. […] Such mathematics was almost entirely absent from my own training, although I had a reasonably good undergraduate and graduate education mathematics. Nearly all of my encounters with such techniques during my student days occurred when working problems from the *American Mathematical Monthly*. I have naturally been wondering whether or not the traditional curriculum – the calculus courses, etc. – should be revised in order to include more of these discrete mathematical manipulations, or whether computer science is exceptional in its frequent application of them. (Knuth 1974, p.329)

2. Perspectives pour l'enseignement

Une vision de la pensée algorithmique, non seulement comme *une* pensée mathématique mais aussi comme *la* pensée informatique semble élargir les perspectives pour son enseignement.

Les aspects que Knuth présente comme absents de la pensée mathématique - description effective d'algorithmes et étude de leur complexité - nous paraissent être propices à une véritable mise en œuvre de la pensée algorithmique. De plus, ces aspects sont de plus en plus pris en compte par les mathématiciens qui travaillent avec des algorithmes, et la frontière entre pensée algorithmique et pensée mathématique n'en devient que plus floue.

Selon le mathématicien Lovász (1988, 2007), l'activité mathématique a subi des changements importants durant les cinquante dernières années et le développement de l'informatique en est la source la plus importante. Il résume son questionnement ainsi :

> Is algorithmic mathematics of higher value than classical, structure-oriented, theorem-proof mathematics, or does it just hide the essence of things by making them more complicated then necessary? Does teaching of an algorithm lead to a better understanding of the underlying structure, or is it a more abstract, more elegant setting that does so? (Lovász 1988, p.1)

Il insiste sur le fait que l'algorithmique peut apporter un regard nouveau sur des problèmes anciens et se base sur divers exemples. Il s'interroge alors sur les implications de tels changement sur l'enseignement des mathématiques, et propose des pistes pour faire entrer l'algorithmique dans l'enseignement des mathématiques. Lovász insiste sur le fait que la création d'algorithmes devrait être abordée avant l'apprentissage de leur exécution. Dans un deuxième temps, il considère que l'étude d'algorithmes et de leur analyse devrait être abordée au même titre que celle de théorèmes et de leurs preuves. Il met aussi en garde contre une utilisation trop rapide de l'ordinateur dans l'étude des algorithmes.

> The route from the mathematical idea of an algorithm to a computer program is long. It takes the careful design of the algorithm; analysis and improvements of running time and space requirements; selection of (sometimes mathematically very involved) data structures; and programming. In college, to follow this route is very instructive for the students. But even in secondary school mathematics, at least the mathematics and implementation of an algorithm should be distinguished. (Lovász, 1988, p.10)

D'autre part, il insiste sur le fait que l'activité mathématique est en plein changement pour plusieurs autres raisons et insiste sur le fait que l'enseignement des mathématiques doit suivre cette évolution :

> In addition, as we will see, we should put more emphasis on (which also means giving more teaching time to) some non-traditional mathematical activities like algorithm design, modeling, experimentation and exposition. I also have to emphasize the necessity of preserving problem solving as a major feature of teaching mathematics. (Lovász 2007, p.3)

Il semble donc important que la pensée algorithmique prenne une place dans l'enseignement des mathématiques. Certaines branches des mathématiques paraissent plus favorables que d'autres au développement de cette pensée. Les mathématiques discrètes, qui se situent à la frontière entre mathématiques et informatique, peuvent être un champ fertile pour développer la pensée algorithmique et sont un domaine favorable à l'expérimentation, à la modélisation, au problem-solving et la preuve (Ouvrier-Buffet 2009).

Des expérimentations ont été menées en classe avec des résultats convaincants, concernant l'algorithmique en théorie des graphes, optimisation combinatoire ou dans d'autres branches des mathématiques discrètes (Schuster 2004 ; Hart 1998 ; Modeste et al. 2010).

IV. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

La pensée algorithmique peut être vue comme faisant partie de la pensée mathématique et nous avons évoqué certaines de ses caractéristiques. Cependant, voir la pensée algorithmique comme pensée majeure de l'informatique permet un réel enrichissement de son analyse. Nous avons montré en quoi cette pensée algorithmique influe sur la pensée mathématique. Il nous semble donc que, pour aborder la pensée algorithmique, il soit indispensable d'appréhender simultanément les deux points de vue, intra-mathématique mais aussi extra-mathématique.

Dans ce contexte, une étude détaillée des différences et similarités entre pensée mathématique et algorithmique reste à développer et nous l'avons vu, ce sont plus les objets et les questions en jeux que l'activité elle-même qui diffèrent. Notamment, il nous semblerait approprié d'étudier en quoi les modèles pour la pensée mathématique et son enseignement (par exemple ceux de Rasmussen et al. (2005) ou de Dreyfus (1991)) peuvent se différencier de modèles pour la pensée algorithmique.

L'apparition dans les curricula de l'algorithmique, n'est pas liée à un simple effet de mode et doit être accompagnée d'une réelle réflexion sur les liens entre pensée algorithmique et pensée mathématique. En effet, une certaine méconnaissance de l'objet algorithme par les enseignants est à envisager :

> We can assume that this lack of knowledge about algorithm is shared by teachers of mathematics (at least in France) and their training curriculum has to be questioned. (Modeste et Ouvrier-Buffet 2011)

L'étude des conceptions des enseignants et de leur rapport à la pensée algorithmique nous semble être d'une grande importance pour l'avenir, afin d'adapter les formations initiale et continue[6] aux évolutions des mathématiques et de leur enseignement évoquées ici.

Dans cette optique, l'étude de problèmes mettant en jeu la pensée algorithmique, dans un premier temps, permettrait la caractérisation de cette pensée. Dans un second temps, elle permettrait le développement de ressources pour les enseignants.

Avant cela, une analyse détaillée de ce qu'est l'activité algorithmique est nécessaire et doit tenir compte de la relation des mathématiques à l'informatique. Une caractérisation des problèmes et des champs dans lesquelles la pensée algorithmique est pleinement à l'œuvre est alors indispensable. Les analyses présentées ici amorcent une telle étude et constituent selon nous, une base théorique nécessaire pour construire un ensemble de situations pour l'algorithmique. Le champ des mathématiques discrètes représente une bonne piste pour cela.

Ajoutons qu'un enseignement d'informatique est sur le point d'être introduit dans l'enseignement secondaire en France[7]. Il est alors intéressant de retourner la question que nous nous posions au départ : celle de la pensée mathématique dans la pensée informatique. En

[6] La majorité des enseignants de mathématiques n'ont reçu aucune formation en algorithmique dans leur cursus.

[7] Un enseignement de spécialité intitulé « Informatique et sciences du numérique » fera son apparition en terminale scientifique dès la rentrée 2012.

effet, la proximité entre ces deux disciplines laisse à penser qu'un enseignement d'informatique peut être l'occasion de développer une certaine pensée mathématique. Comme le note Knuth :

> However, I believe that a similar argument can be made for the proposition that mathematics is a part of computer science! (Knuth 1974, p.325)

REFERENCES

Dreyfus T. (1991) Advanced Mathematical Thinking Processes. In Tall D. O. (Ed.) (pp. 25-41) *Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer: Holland.

Harel G., Sowder L. (2005) Advanced Mathematical-Thinking at Any Age: Its Nature and Its Development *Mathematical Thinking and Learning* 7, 27–50.

Hart E. W. (1998) Algorithmic Problem Solving in Discrete Mathematics. In Morrow L. J., Kenney M. J. (Eds.) (pp.251–267). *The teaching and learning of Algorithm in school mathematics*. NCTM 1998 Yearbook. Reston, VA : National Council of Teacher of Mathematics.

Knuth D. E. (1974) Computer Science and its Relation to Mathematics. *The American Mathematical Monthly* 81(4), 323-343. Rééd. avec corrections (1996) In *Selected Papers on Computer Science*, Stanford : Center for the Study of Language and Information, 5-29.

Knuth D. E. (1985) Algorithmic thinking and mathematical thinking. *The American Mathematical Monthly* 92(1), 170-181. Rééd. avec corrections (1996) Algorithms in Modern Mathematics and Computer Science. In *Selected Papers on Computer Science*, Stanford : Center for the Study of Language and Information, 87-114.

Lovász L. (1988) Algorithmic mathematics: an old aspect with a new emphasis. In *Proc. of the Sixth International Congress on Math. Education, Budapest, 1988, J. Bolyai Math. Soc.* (pp. 67-78).

Lovász L. (2007) Trends in Mathematics: How they could Change Education ? Conférence Européenne « The Future of Mathematics Education in Europe Lisbonne ». http://www.cs.elte.hu/~%20lovasz/lisbon.pdf

Mason J., Burton L., Stacey K. (1985) *Thinking Mathematically*. Workingham : Addison-Wesley publications.

Maurer S. B. (1998) What is an algorithm? What is an answer? In Morrow L. J., Kenney M. J. (Eds.) (pp.21-31) *The teaching and learning of Algorithm in school mathematics.* NCTM 1998 Yearbook. Reston,VA: National Council of Teacher of Mathematics.

Mingus T. T. Y., Grassl R. M. (1998) Algorithmic and Recursive Thinking - Current Beliefs and Their Implications for the Future. In Morrow L. J., Kenney M. J. (Eds.) (pp.32-43). *The teaching and learning of Algorithm in school mathematics*. NCTM 1998 Yearbook. Reston, VA: National Council of Teacher of Mathematics.

Modeste S., Gravier S., Ouvrier-Buffet C. (2010) Algorithmique et apprentissage de la preuve. *Repères IREM* (79), 51-72.

Modeste S., Ouvrier-Buffet C. (2011) The appearance of algorithms in curricula, a new opportunity to deal with proof? A paraître dans *Proc. of the sixth conference of the European Society for Research in Mathematics Education*. http://www.cerme7.univ.rzeszow.pl/index.php?id=wg1

NCTM (1998) *The Teaching and Learning of Algorithms in School Mathematics*. In Morow L. J., Kenney M. J. (Eds) *The Teaching and Learning of Algorithms in School Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Ouvrier-Buffet C. (2009) Mathématiques discrètes : un champ d'expérimentation mais aussi un champ des mathématiques. *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques* (pp. 31-45). Université Paris 7. Édité par l'ARDM.

Pólya G. (1945) *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method*. Princeton, NJ : Princeton University Press.

Rasmussen C., Zandieh M., King K., Teppo, A. (2005) Advancing mathematical activity: A view of advanced mathematical thinking. *Mathematical Thinking and Learning* 7, 51-73.

Schuster A. (2004) About traveling salesmen and telephone networks - combinatorial optimization problems at high school, *ZDM* 36(2), 77-81.

Tall D. O. (1991) The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. In Tall D. O. (Ed.) (pp. 3-21) *Advanced Mathematical Thinking.* Kluwer: Holland.

Wilf H. S. (1982) What Is An Answer ? *The American Mathematical Monthly* 89(5), 289-292.

Wilf H. S. (2005) Mathematics: an experimental science.A paraître in *Princeton Companion to Mathematics*, W.T. Gowers Ed., Princeton University Press. http://www.math.upenn.edu/~wilf/reprints.html

LES AXIOMATIQUES AUTOUR DU THÉORÈME DE THALÈS DANS LES PROGRAMMES ET LES MANUELS TUNISIENS

Slim MRABET*

Résumé – Dans l'enseignement tunisien, la transition collège-lycée en géométrie est marquée par un changement de point de vue dans la résolution des problèmes : les outils traditionnels de la géométrie rencontrés au collège seront accompagnés par le nouvel outil vectoriel. A partir de l'exemple du théorème de Thalès, nous comptons soulever la question de la continuité-rupture dans le découpage actuel des programmes de l'enseignement tunisien. Un retour à l'histoire de la géométrie et de son enseignement nous a permis de dégager des axiomatiques différentes qui donnent des modèles d'agencement des connaissances, et qui nous servent de référence pour analyser l'enseignement actuel.

Mots-clefs : théorème de Thalès, axiomatique euclidienne, transformation, algèbre linéaire, vecteurs

Abstract – In the Tunisian teaching, the transition college-high school in geometry is marked by a change of point of view in the resolution of the problems: the traditional tools of the geometry met at college will be accompanied by the new vectoriel tool. From the example of Thales theorem, we plan to study the question of the continuity-break in the current division of the programs of the Tunisian teaching. A return in the history of the geometry and its teaching allowed us to have different axiomatic which give models of organization of the knowledge, and which serve us as reference to analyze the current teaching.

Keywords: Thales theorem, Euclidian axiomatic, transformation, linear algebra, vectors

INTRODUCTION

A l'intérieur d'un système scolaire, une question fondamentale se pose aux différents acteurs de ce système : comment découper le texte du savoir à enseigner ? Il s'agit de décider, dans ce découpage, d'une progression particulière parmi d'autres possibles dans l'enchaînement des connaissances. Cette progression est en gros fixée par les programmes, mais pour l'enseignant, il reste toujours des choix à faire.

Dans ce travail, nous nous interrogeons sur la cohérence dans le découpage actuel des programmes de l'enseignement tunisien. Nous nous intéressons particulièrement à la transition collège-lycée en géométrie. Cette période est marquée par un changement de point de vue dans la résolution des problèmes qui consiste en une algébrisation de plus en plus manifeste de la géométrie : les outils traditionnels de la géométrie, rencontrés au collège, seront accompagnés par le nouvel outil vectoriel ce qui suppose un changement dans la « boite à outils » disponible chez les élèves pour résoudre les problèmes. Nous tentons, par conséquent, de contribuer à l'étude de la problématique de l'enseignement de la géométrie dans cette transition en nous centrant sur un concept particulier qui caractérise ce niveau : le théorème de Thalès, ainsi que sur certains concepts qui l'entourent.

I. LES ENONCES DU THEOREME DE THALES

Pour fixer les idées, nous désignons par théorème de Thalès le théorème qui satisfait aux classifications de Brousseau (1995) ou celle de Duperret (1995). Nous nous contentons donc des énoncés plans et rappelons qu'il s'agit de deux approches essentielles : l' « homothétie » et la « projection ». Dans une figure formée de deux sécantes coupées par des parallèles, la deuxième approche se sépare en deux aspects : la « conservation des abscisses » et la

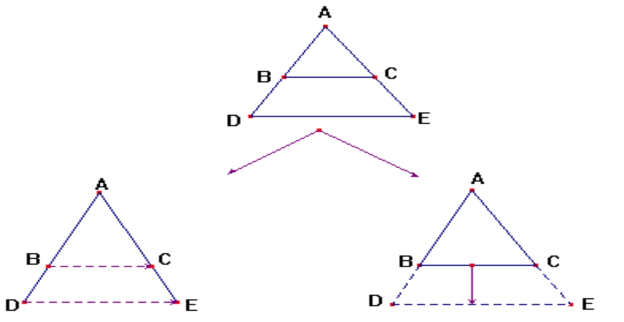
* Institut Supérieur de l'Education de la Formation Continue – Tunisie – mrabet_slim@yahoo.fr

© Mrabet S. (2012) Les axiomatiques autour du théorème de Thalès dans les programmes et les manuels tunisiens. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT3, pp. 480–491). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

« conservation du rapport de projection » suivant que, dans l'écriture de chaque rapport, nous considérons les segments choisis sur la même sécante ou sur les deux sécantes.

- Figure « triangle »

La figure caractéristique de Thalès dans un triangle semble être statique alors qu'elle cache deux dynamiques qui ont pu la faire naître (Duperret 1995) :



Approche "projection" **Approche "homothétie"**

Figure 1 *– Figure « triangle »*

L'approche "homothétie" propose des égalités de rapports relatives à deux triangles semblables : $\frac{\text{AB}}{\text{AD}} = \frac{\text{AC}}{\text{AE}} = \frac{\text{BC}}{\text{DE}}$. En écriture vectorielle, elle est définie par la relation Si $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AD}$ alors $\overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{DE}$.

Brousseau (1995) distingue deux cas dans l'aspect « projection » suivant que dans chaque rapport, on choisit les longueurs des segments d'une même droite ou celles d'une droite et de leurs images sur l'autre droite (Fig 2 et 3) :

- « La conservation des abscisses sur les sécantes»

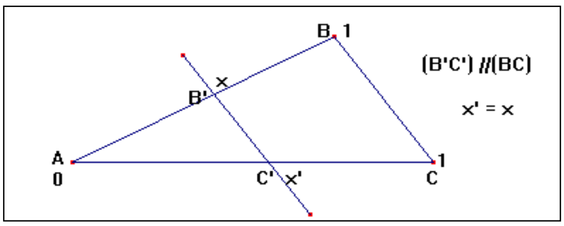


Figure 2 *– Conservation des abscisses sur les sécantes*

Nous avons $\frac{\overline{AB}}{\overline{AB'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AC'}}$; en écriture vectorielle : Si $\overrightarrow{AB'} = k\overrightarrow{AB}$ alors $\overrightarrow{AC'} = k\overrightarrow{AC}$

- « La conservation du rapport de projection »

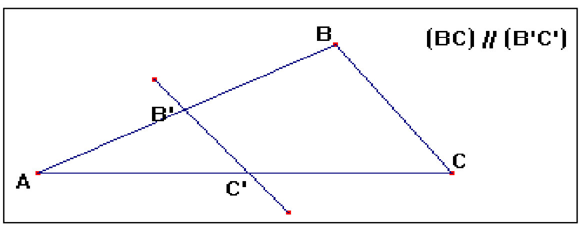


Figure 3*- Conservation du rapport de projection*

Nous avons $\frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'}$.

- Figure « parallèles et sécantes »

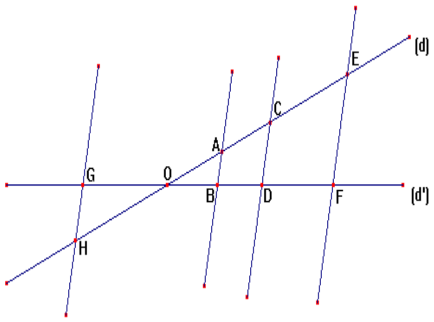


Figure 4 – Figure "parallèles et sécantes"

Figure « triangle étendu »

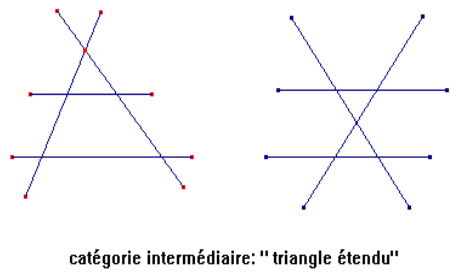


Figure 5 – Figure "triangle étendu"

Nous pouvons avoir des écritures de type « conservation des abscisses » ou conservation du rapport de projection.

II. LES AXIOMATIQUES AUTOUR DU THEOREME DE THALES DANS L'HISTOIRE

Dans l'histoire, le théorème de Thalès a évolué dans des niches écologiques différentes, avec des énoncés différents. Une analyse historique[1] nous a permis de dégager deux axiomatiques qui relèvent de deux types de pensée différents autour de cette notion :

1. L'axiomatique euclidienne

Cette axiomatique, adoptée depuis Euclide et jusqu'à Hadamard, est essentiellement caractérisée par la grande place qu'occupe la figure et par la dominance du raisonnement qui l'emporte sur l'aspect calculatoire. Elle est relative à la géométrie classique à laquelle est ajouté un outil qui la modernise et qui permet une nouvelle perception des figures : les transformations. L'efficacité de cet outil provient du fait que les figures qui apparaissent figées chez Euclide, et qui ne peuvent qu'être découpées, superposées ou reconstruites, vont avoir un aspect *dynamique* et sont considérées dans leur mouvement. Dans cette axiomatique nous pouvons distinguer **deux points de vue** différents :

- Le point de vue classique

L'aspect « homothétie » du théorème de Thalès est privilégié par rapport à la « projection ». L'énoncé général se base sur les triangles en montrant l'idée de passage d'un triangle à l'autre et il n'apparaît pas comme une fin en soi : le lien avec les triangles semblables qui le suivent immédiatement et plus généralement avec les figures semblables est un point caractéristique de ce point de vue.

Dans le point de vue classique de l'axiomatique euclidienne, l'idée des figures semblables est une idée intuitive qui permet de décider si deux figures sont de même forme. Chez certains auteurs, trouver une figure semblable à une figure donnée de grandeur quelconque, plus grande ou plus petite est une notion de première évidence, aussi claire que le principe par superposition : John Wallis (1656) et Lazare Carnot (1803) traitent l'idée de figures semblables comme un postulat de la géométrie euclidienne vu sa clarté et son évidence (Abdeljaouad 2001). Dans ce point de vue, la cohésion Thalès-triangles semblables prend appui sur les cas d'égalité des triangles et donc sur le principe d'égalité par superposition qui

[1] Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à notre thèse : *Le théorème de Thalès dans l'enseignement tunisien : conceptions et pratiques des élèves, pratiques des enseignants*.

est un principe fondateur de la géométrie chez les Grecs. Ce principe qui se base sur un déplacement de figure pour assurer la superposition, fixe des critères d'égalités à partir desquels le mouvement des figures n'est plus utile :

> « Si, dans l'ouvrage d'Euclide, la démonstration du premier cas d'égalité des triangles fait appel explicitement au principe de l'égalité par superposition et par conséquent au mouvement, l'énoncé de ce premier cas d'égalité permet de se débarrasser du mouvement. » (Bkouche 2000)

- Le point de vue des transformations

Dans la deuxième moitié du XIXe siècle, la notion de « mouvement de figures » devient fondamentale et est insérée dans les démonstrations en géométrie marquant ainsi une rupture avec les traditions euclidiennes (Abdeljaouad 2001). Pour ce point de vue, une première remarque consiste en la dissociation de la cohésion Thalès–triangles semblables. Les triangles semblables sont bannis de la niche écologique du théorème de Thalès et l'approche essentielle de ce dernier est basée sur la « projection ».

Nous pouvons dire qu'une différence essentielle entre les deux points de vue réside dans le changement d'appréhension de la figure : dans la géométrie classique, nous regardons les figures comme étant des surfaces et nous les comparons en comparant leurs éléments (angles, côtés), mais ces figures sont statiques. La géométrie des transformations met en avant les droites et les points par rapport aux surfaces et favorise le mouvement et le transfert de propriétés entre des figures. Chasles définit ce point de vue comme permettant de retrouver les propriétés correspondantes à des propriétés caractéristiques d'une figure de départ par application d'une transformation :

> « Qu'on prenne une figure quelconque dans l'espace, et l'une de ses propriétés connues ; qu'on applique à cette figure l'un de ces modes de transformations, et qu'on suive les diverses modifications ou transformation qui éprouve le théorème qui exprime cette propriété, on aura une nouvelle figure et une propriété de cette figure qui correspond à celle de la première. » (Chasles 1889, p. 268)

2. *L'axiomatique de l'algèbre linéaire*

La seconde axiomatique met en avant l'aspect algébrique du théorème de Thalès. La figure perd sa place et on ne peut trouver qu'une forme unique du théorème. Dans cette axiomatique s'inscrit le traité de Dieudonné qui accentue l'algébrisation de la géométrie présente chez Choquet et qui minimise au maximum le recours aux figures.

Le traité de Dieudonné est adressé aux maîtres. L'auteur part de son inquiétude quant à la rupture flagrante qui existe entre les méthodes d'enseignement secondaire et celles du supérieur. Il se propose de renouveler l'enseignement (de son époque) en se référant aux théories récentes. Pour lui, l'enseignement secondaire, loin des résultats des recherches en mathématiques, demeure rattaché essentiellement à la géométrie d'Euclide, à l'algèbre de Viète et de Descartes avec une faible intervention du calcul infinitésimal qui est limité à la classe terminale. Cet enseignement invite les élèves à penser sur un grand nombre de notions ce qui ne leur permet pas de bien développer des techniques de pensée.

La géométrie basée sur l'algèbre linéaire se propose donc de remplacer l'ancien système d'axiomes par un système équivalent, plus simple et mieux adapté à un débutant. Avec un traité sans figures, Dieudonné se propose de planifier les thèmes d'enseignement de géométrie du collège au lycée et se centre sur les deux ou trois années terminales du lycée.

Chez Dieudonné, nous notons en particulier la **disparition du théorème de Thalès** qui est une conséquence immédiate de la distributivité de la multiplication d'un scalaire par rapport à l'addition des vecteurs : $\lambda(u+v)=\lambda u+\lambda v$.

Les deux axiomatiques ainsi dégagées sont caractérisées par des types de pensée différents, suivant la place et le rôle attribués à la figure et à la rigueur. En didactique, plusieurs travaux ont montré les difficultés des élèves à distinguer entre le raisonnement dans le monde théorique et dans le monde sensible (Berthelot et Salin 1992 ; Houdement et Kuzniak 1999).

III. LE THEOREME DE THALES DANS L'ENSEIGNEMENT TUNISIEN

Nous nous proposons d'analyser l'enseignement actuel du théorème de Thalès en Tunisie, en adoptant cette construction d'axiomatiques comme référence. Nous nous intéressons à deux transitions dans l'enseignement : de la 9ème année de base (dernière année du collège) à la 1ère année secondaire (première année du lycée), puis de la 1ère année à la 2ème année secondaire, et montrons que ces transitions sont accompagnées de changement d'axiomatiques.

1. Le théorème de Thalès dans les programmes

Dans l'analyse des programmes, notre objectif est de dégager l'axiomatique sous-jacente aux choix que font les concepteurs de ces supports. Ainsi, à partir de quelques remarques générales annoncées sur l'enseignement de la géométrie, nous tentons de situer les orientations de ces programmes par rapport aux repères historiques que nous avons fixés.

- Le programme de 9$^{\text{ème}}$ B

Commençons par préciser la place de la leçon sur le théorème de Thalès dans les programmes officiels : dans la partie « géométrie », la leçon sur le théorème de Thalès est précédée des leçons sur la projection et sur le repérage dans le plan, et suivie des leçons sur les applications du théorème de Thalès, sur les parallélogrammes, les triangles et les relations métriques dans un triangle rectangle.

Dans les objectifs de l'enseignement du théorème de Thalès, nous trouvons :

- Utiliser le théorème de Thalès et ses applications pour :
  - écrire des proportions
  - calculer des distances dans une figure donnée
  - diviser un segment de droite en un nombre fixé de parties égales
  - préciser la position d'un point divisant un segment dans une proportion donnée

Dans les « recommandations », il est demandé d'appliquer le théorème de Thalès dans le triangle, dans le trapèze et dans la division d'un segment de droite en des segments proportionnels à des longueurs données.

Remarquons qu'aucune indication sur les types de figures n'est mentionnée, mais à partir des applications concernant la division d'un segment, nous pouvons dire qu'une figure ayant un faisceau de parallèles est visée par les programmes.

Ce programme, peu détaillé, ne donne aucune indication explicite quant aux types d'énoncés à enseigner. Mais nous pouvons conclure à partir des objectifs cités et de l'environnement mathématique dans lequel le théorème de Thalès prend place, la tendance des programmes du collège à adopter l'axiomatique euclidienne autour du théorème de Thalès avec ses deux points de vue. En effet, dire que le théorème de Thalès doit être appliqué dans le triangle laisse supposer que les deux points de vue : « classique » et « des transformations » sont visés et que le premier est une application du second et nous pouvons déduire que la catégorie de figure « parallèles et sécantes » sera utilisée dans l'énoncé principal, et la catégorie « triangle » vient en application.

- Le programme de $1^{\text{ère}}$ année secondaire

En $1^{\text{ère}}$ année secondaire, l'enseignement des mathématiques n'est plus organisé sous forme d'objectifs que l'enseignant tente d'atteindre mais il vise plutôt l'acquisition d'un certain nombre de compétences dont chacune inclut plusieurs thèmes à la fois ; le savoir lié à ces compétences est très peu détaillé.

Pour le thème qui nous intéresse, nous relevons les principaux points suivants relatifs à ce concept :

- Ils [les élèves] trouvent une quatrième proportionnelle.
- Ils partagent un segment en parties isométriques.
- Ils construisent un segment dont la longueur est la quatrième proportionnelle à trois longueurs données.
- Ils déterminent l'effet de la multiplication de chaque dimension d'un solide par un nombre donné sur son aire ou son volume.
- Ils mesurent des angles en utilisant les rapports trigonométriques dans un triangle rectangle, le théorème de Thalès et sa réciproque, le théorème de Pythagore et sa réciproque.

Peu détaillé autour du théorème de Thalès, le programme n'annonce pas clairement la forme de l'énoncé demandé, ni l'axiomatique suivie autour de cet énoncé.

- Le programme de $2^{\text{ème}}$ année secondaire

Avec l'introduction des vecteurs, en $2^{\text{ème}}$ S, un changement d'axiomatiques est fait : les éléments de la géométrie classique disparaissent ainsi que les théorèmes et propriétés qui leur sont liés. La puissance du calcul vectoriel remplace le recours à la figure, qui est un point fondamental de la géométrie d'Euclide.

Le contenu disciplinaire à enseigner relatif aux vecteurs indique d'enseigner :

- Le calcul vectoriel
- Le barycentre de deux ou trois points pondérés.
- les translations, homothéties, rotations d'angles dont une mesure appartient à $[0,\pi]$

Dans ce programme, l'accent est mis sur les propriétés du calcul vectoriel dans lesquelles le théorème de Thalès ne semble pas intervenir, et sur l'axiomatique classique selon le point de vue des transformations, par la recherche de l'image d'une figure par une transformation. Nous lisons (p. 23) :

Les élèves mobilisent une technique ou une procédure dans des activités géométriques pour :

- calculer et simplifier une expression vectorielle en utilisant les règles du calcul vectoriel.

Les élèves mobilisent une procédure lors d'activités géométriques pour :

- reconnaître l'image d'une figure par une translation ou une homothétie ou une rotation dont une mesure appartient à $[0,\pi]$.
- reconnaître les éléments de symétrie d'une figure plane.

Dans ce programme, nous pensons qu'à deux moments, on pourrait faire le lien avec le théorème de Thalès :

- dans la construction du barycentre de deux ou trois points pondérés.
- dans l'introduction de l'homothétie.

Avec l’arrivée des « activités dans un repère », le travail géométrique devient purement analytique. Le calcul vectoriel l’emporte par rapport aux configurations classiques qui deviennent peu citées. La seule mention qui pourrait aider à la transition entre les axiomatiques classique et vectorielle est la suivante :

« Les élèves modélisent des situations réelles menant aux figures de base du plan et de l’espace. »

Dans la transition 1ère S – 2ème S, les programmes montrent un changement d’axiomatiques : la géométrie ponctuelle classique qui caractérise le travail géométrique tout au long du collège disparaît au profit des transformations et du calcul vectoriel. Le théorème de Thalès ne semble pas avoir un rôle explicite dans cette transition. L’analyse des manuels pourrait éclairer davantage cette idée.

2. Le théorème de Thalès dans les manuels

- Le manuel de 9ème année de base

Le premier énoncé du théorème de Thalès est le suivant : (page 137) :

« Soient deux droites du plan D et D’’ et A, B et C trois points distincts de D. Si A’, B’ et C’ sont respectivement les projetés de A, B et C sur D’ selon une direction différente de celle de D et de celle de D’, alors on a : $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$. »

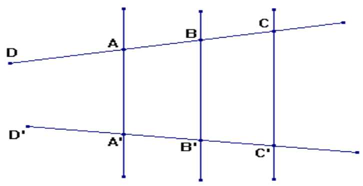


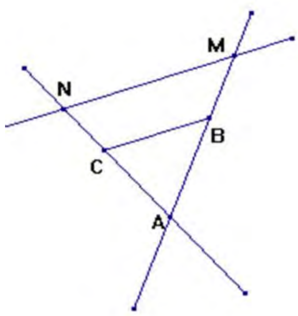
Figure 6 *– Manuel 9^{e}B*

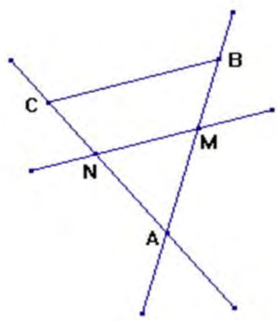
Un deuxième énoncé est proposé (p. 138) :

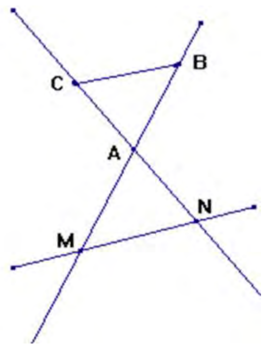
« Soient deux droites du plan D et D’’ et A, B et C trois points distincts de D. Si A’, B’ et C’ sont respectivement les projetés de A, B et C sur D’ selon une direction différente de celle de D et de celle de D’, alors on a : $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$. »

Les hypothèses sont les mêmes, mais la conclusion a changé.

Le théorème de Thalès appliqué au triangle est introduit par la suite à l’aide d’une nouvelle activité. Il est énoncé comme suit (p. 140) :







« Si ABC est un triangle et M est un point de (AB) et N est un point de (AC) tel que (MN) est parallèle à (BC), alors on a: $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$. »

Dans le manuel de $9^{ème}$ B, il existe trois énoncés du théorème de Thalès qui relèvent de l'axiomatique euclidienne mais avec deux points de vue différents. Dans la partie « cours » le point de vue des transformations est dominant alors que dans les « exercices » c'est le point de vue euclidien qui est le plus utilisé avec un énoncé de type « homothétie ». Les différents types de figures coexistent mais les énoncés de type « conservation des abscisses » ou « conservation du rapport de projection » n'apparaissent qu'avec des figures de type « parallèles et sécantes » et profitent de la notion de projection sur une droite selon une direction donnée qui apparaît au chapitre 10 intitulé « Repérage dans le plan ». Au triangle n'est associé que l'énoncé de type « homothétie ». Il est clair que dans ce manuel, le couple (énoncé, figure) traduit un point de vue spécifique.

- Le manuel de $1^{ère}$ S

  - Le théorème de Thalès dans le sens direct

Par rapport au manuel de $9^{ème}$ B, le manuel de $1^{ère}$ S de 2003 redonne vie à l'approche « homothétie » dans le sens direct du théorème de Thalès. D'ailleurs, nous pouvons dire que, c'est quasiment la seule approche mobilisée dans les activités, dans la partie relative aux énoncés des théorèmes et dans les exercices de fin de chapitre, soit partiellement par l'utilisation de l'égalité qui coïncide avec la conservation des abscisses, soit par l'utilisation des côtés parallèles.

Dans la rubrique « Retenir » (p. 28) où sont regroupés les différents objets de savoir institutionnalisés, apparaît un seul énoncé du théorème de Thalès intitulé : théorème de Thalès dans un triangle. La figure associée est de catégorie « triangle étendu », alors que le choix des segments est conforme à l'« homothétie ». Dans ce manuel, aux deux catégories de figure « triangle » et « triangle étendu » sont attribués les mêmes énoncés. Dans les activités relatives au sens direct, l'énoncé utilisé est de type « homothétie » dans une catégorie de figure : « triangle ». La mise en avant du passage d'un triangle à l'autre est claire dans certaines activités par l'utilisation de deux couleurs différentes pour les deux « triangles de Thalès ».

Dans les applications du théorème de Thalès relatives a cet énoncé, nous trouvons : la construction d'un point M d'une droite (AB) telle que $AM = KAB$ où $K \in \Re^*$, le partage d'un segment dans une proportion donnée. Par ailleurs, les auteurs du manuel proposent de nouveaux genres de problèmes qui paraissent plus importants puisqu'ils figurent aussi bien dans le cours que dans les exercices de fin de chapitre et qui concernent les problèmes d'agrandissement et de réduction. Ce nouveau champ d'applications constitue une bonne occasion pour mieux montrer l'aspect utilitaire du théorème de Thalès en précisant les relations entre deux objets ayant « la même forme », et permet d'introduire et de travailler la notion d'échelle. Ceci marque un retour implicite aux triangles semblables qui ont été, dans l'histoire, constamment associés au théorème de Thalès et en ont constitué une application immédiate. Le phénomène d'« agrandissement-réduction » permet également d'établir ce que A. et C. Massot (1995) appellent : la propriété des $(k\,;\,k^2)$: "dans un phénomène d' « agrandissement-réduction », quand les longueurs sont multipliées par un réel k, [les périmètres le sont et] les aires le sont par k^2".

L'environnement mathématique ainsi fixé autour du théorème de Thalès confirme que le choix du point de vue classique de l'axiomatique euclidienne est mis en avant dans ce manuel. Les énoncés relatifs à l'approche « projection » interviennent implicitement dans les applications de partage d'un segment dans une proportion donnée sans qu'une référence explicite, au niveau des énoncés, ne leur soit attribuée.

Dans le passage de la 9$^{\text{ème}}$ B à la 1$^{\text{ère}}$ S, il y a un changement de point de vue à l'intérieur d'une même axiomatique (euclidienne) autour du théorème de Thalès. Dans ce changement, il y a une rupture au niveau des énoncés et des figures de Thalès. La difficulté de transition entre ces deux points de vue est passée sous silence.

- La réciproque du théorème de Thalès

Pour analyser l'énoncé de la réciproque du théorème de Thalès dans le manuel de 1$^{\text{ère}}$ S de 2003, nous comptons le comparer à celui du manuel de 1$^{\text{ère}}$ S de 2002. Dans ce dernier, la réciproque du théorème de Thalès est proposée avec un seul énoncé qui s'inscrit dans la logique du point de vue des transformations de l'axiomatique euclidienne, et qui se sert des mesures algébriques et d'une figure de catégorie « parallèles et sécantes ».

Dans la figure suivante, l'énoncé stipule que :

« si (AA') est parallèle à (BB') et si $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$
alors la droite (CC') est parallèle à (AA') et à (BB'). »

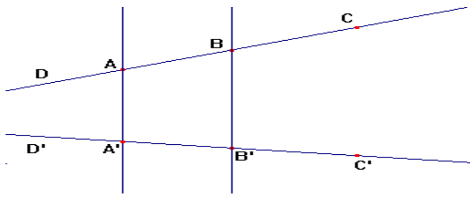


Figure 8 *– Réciproque-manuel 2002*

Dans le manuel de 2003, l'énoncé de la réciproque, marqué par l'absence des mesures algébriques, est proposé suivant trois cas de figure différents. Le voici :

Réciproque du théorème de Thalès dans le manuel de 1$^{\text{ère}}$ S de 2003 (p. 28)

« Soient deux droites (AB) et (AC) sécantes en A. Soient M un point de [AB] et N un point de [AC] tous deux distincts de A.

Si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

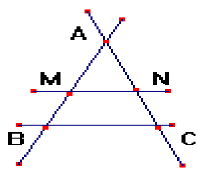


Figure 9 *– Réciproque 1-manuel 2002*

Soient deux droites (AB) et (AC) sécantes en A. Soient M un point de (AB) et N un point de (AC) tous deux distincts de A tels que B appartient à [AM] et C appartient à [AN]

Si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

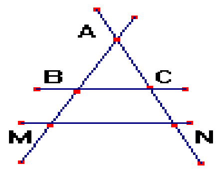


Figure 10 *– Réciproque 2-2002*

Soient deux droites (AB) et (AC) sécantes en A. Soient M un point de (AB) et N un point de (AC) tous deux distincts de A tels que A appartient à [BM] et A appartient à [CN]

Si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles. »

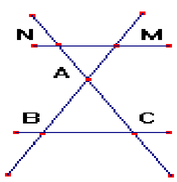


Figure 11 *– Réciproque 3-2002*

En 2003, la réciproque du théorème de Thalès est proposée dans une nouvelle version. A l'instar du sens direct, le sens réciproque marque un retour au point de vue euclidien. Ainsi, l'approche « homothétie » est encore dominante dans le choix des segments, mais la figure associée est de catégorie « triangle étendu ». La suppression des mesures algébriques dans le manuel de 2003 permet de remédier aux difficultés découvertes dans l'ancien manuel et qui consistent en la difficulté chez les élèves d'attribuer trois figures différentes a un même énoncé. Mais cette nouvelle situation a suscité un traitement particulier de la figure. Dans l'ancien manuel, les mesures algébriques ont l'avantage d'éviter l'ordre des points. Avec une formulation de la réciproque à l'aide des distances, dans l'écriture $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$, il devient nécessaire de soulever cette condition et de préciser que la position de M par rapport à A et B est la même que celle de N par rapport à A et C. Il est à noter que le graphique n'exclut pas le côté abstractif de l'énoncé qui, à chaque fois, précise la position de M par rapport à A et B et celle de N par rapport à A et C.

- Le manuel de 2ème S (de 2004)

En deuxième année secondaire, nous avons parcouru les chapitres du manuel pour voir les moments éventuels d'utilisation du théorème de Thalès. Nous avons regardé en particulier la façon d'introduire la propriété $\alpha(\vec{u}+\vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$ du produit d'un vecteur par un réel, qui, dans certains traités historiques, fait appel au théorème de Thalès. Au chapitre 5 (tome 1), l'activité 13 p. 71 traite cette propriété dans un cas particulier : $\alpha = 2$. L'activité demande de construire des points représentant les vecteurs $2\vec{u}$, $2\vec{v}$ et $2(\vec{u}+\vec{v})$ et de déduire directement la relation : $2(\vec{u}+\vec{v}) = 2\vec{u} + 2\vec{v}$. Pour y arriver nous pouvons utiliser par exemple les propriétés de la droite des milieux, mais nous ne pouvons vraiment pas trancher de la pertinence de cet outil selon l'intention des concepteurs du manuel. Dans le même chapitre, nous trouvons une forme vectorielle du théorème de Thalès au chapitre 5 (tome 1). L'activité 42 (p. 80) permet d'introduire le théorème de Thalès dans un triangle sous une nouvelle forme. La figure associée est de type « triangle étendu ».

Voici son énoncé :

Activité 42 – Soient ABC un triangle et M un point de (AB), distinct de A. La parallèle à (BC) passant par M coupe (AC) en N.

On pose $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}$

1) Soit P le point tel que $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AC}$

Montrer que (MP) est parallèle à (BC). En déduire que $\overrightarrow{AN} = x\overrightarrow{AC}$

2) On suppose dans cette question que M est le milieu de [AB]. Exprimer $\overrightarrow{AN}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{MN}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$. »

L'activité suivante (activité 43) est donnée sous le titre : « Théorème de la projection ». Il s'agit d'une situation analogue à celle de l'activité 42, mais dans une figure de catégorie « parallèles et sécantes ».

Activité 43 p. 81

« Dans la figure ci-contre, les droites (AA'), (BB') et (CC') sont parallèles.

La parallèle à D passant par A coupe (BB') en M et (CC') en N.

On pose $\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{AC}$. Exprimer AM en fonction de AN puis montrer que $\overrightarrow{A'B'} = x\overrightarrow{A'C'}$ »

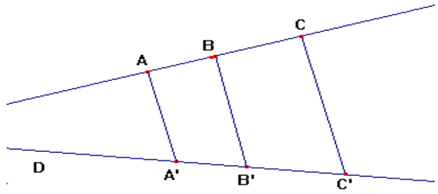


Figure 12 – *Thalès-2ᵉS*

L'activité 42 intitulée « Forme vectorielle du théorème de Thalès » est « insérée » dans un chapitre de calcul vectoriel, et demande une reconnaissance d'un élément de la « boîte à outils » de l'élève vu sous une nouvelle forme.

L'énoncé proposé dans cette activité est de type vectoriel et renvoie ainsi à une nouvelle axiomatique : celle de la géométrie analytique. La figure associée est de catégorie « triangle étendu » alors que celle de l'activité 43 est de type « parallèles et sécantes ». Nous pouvons ainsi dire qu'à un même énoncé vectoriel, deux catégories de figures peuvent être associées.

Dans cette activité, il n'est nulle part indiqué comment faire le lien avec l'énoncé de type « homothétie » vu en 1ère S. Il est laissé à la charge de l'enseignant d'établir le passage de l'ancienne forme du théorème de Thalès formulée avec des distances à la nouvelle forme formulée avec des vecteurs. Dans le choix des vecteurs, nous pouvons dire que l'approche choisie dans la première question est à la fois de type « homothétie » et « conservation des abscisses », puisque seuls les vecteurs sur les sécantes sont concernés. Les vecteurs sur les côtés parallèles n'apparaissent que dans la deuxième question et dans un cas particulier, celui de la droite des milieux.

L'énoncé de la forme vectorielle du théorème de Thalès figure plus loin dans le chapitre, dans la rubrique « Synthèse » avec des modifications par rapport aux résultats de l'activité : la relation vectorielle concernant les côtés parallèles apparaît dans le cas général et non pas dans le cas de la droite des milieux. Voici l'énoncé qui apparaît p. 87 :

« Soit ABC un triangle et M un point de (AB), distinct de A.

La parallèle à (BC) passant par M coupe (AC) en N.

si $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}$ alors $\overrightarrow{AN} = x\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{MN} = x\overrightarrow{BC}$.»

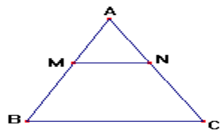


Figure 5 – *Réciproque 2-2ᵉS*

L'activité 43 semble généraliser la précédente et étend le résultat établi dans un « triangle étendu » au cas de deux droites sécantes coupées par trois parallèles. L'énoncé est formulé avec des vecteurs dans une catégorie de figure « parallèles et sécantes » et correspond à l'organisation mathématique de la géométrie analytique. La question demande d'exprimer $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AN}$ puis de montrer que $\overrightarrow{A'B'} = x\overrightarrow{A'C'}$.

Dans le manuel tunisien de 2ème S, il y a un changement d'axiomatique : les moyens de résolution de certains types de problèmes changent. Ainsi sont traitées en utilisant les vecteurs les situations qui utilisaient le théorème de Thalès formulé avec des distances. Ce théorème est introduit dans un cadre vectoriel, sans faire le lien avec les énoncés étudiés en 9ème B et en 1ère S. Dans ce nouveau cadre, cet énoncé n'a pas de vie ultérieure, et en particulier, il ne contribue pas à élaborer les propriétés du calcul vectoriel.

CONCLUSION

Dans ce travail, nous avons montré que la transition collège – lycée est accompagnée d'un changement d'axiomatiques et d'un changement de points de vue à l'intérieur d'une même axiomatique. Nous avons aussi soulevé la question du lien entre deux moyens de résolution des problèmes et la façon dont ce changement est fait, et avons montré que de la 9ème année de base à la 2ème année secondaire, les manuels scolaires proposent trois énoncés du théorème de Thalès qui reflètent trois points de vue différents : le point de vue des transformations (en 9ème B) et le point de vue euclidien (en 1ère S) et la forme vectorielle (en 2ème S). Le rôle du théorème de Thalès dans la transition des distances, qui dominent au collège, aux vecteurs, qui dominent au lycée, est caché et n'est pas considéré comme un point qui mérite d'être soulevé. Une question s'impose : quel est l'impact de ces changements d'axiomatique sur l'apprentissage des élèves ? Nous pensons que cette piste mérite d'être explorée.

REFERENCES

Abdeljaouad M. (2001) Les triangles semblables…ces mal aimés, *Miftah al Hissab* 96-97, Tunis.

Berthelot R., Salin M.-H. (2001) L'enseignement de la géométrie au début du collège. Comment peut-on concevoir le passage de la géométrie du constat à la géométrie déductive ? *Petit x* 56, 5-34.

Bkouche R. (2000) Quelques remarques autour des cas d'égalité des triangles. *Bulletin de l'APMEP* 430.

Brousseau G. (1995) Promenade avec Thalès, de la Maternelle à l'Université. *Bulletin Inter-IREM, Commission premier cycle - Autour de Thalès*. 87-124.

Chasles M. (1889) *Aperçu historique des méthodes en géométrie*. Paris : Gauthier-Villars.

Dieudonné J. (1964) *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*. Paris : Hermann.

Duperret J.-C. (1995) Pour un Thalès dynamique. *Bulletin Inter-IREM, Commission premier cycle - Autour de Thalès*, 125-144.

Houdement C., Kuzniak A. (1999) Géométrie et paradigmes géométriques. *Petit x* 51, 5-21.

Massot A. (1995) Agrandissement-Réduction : un chemin pour Thalès *Bulletin Inter-IREM, Commission premier cycle - Autour de Thalès*, 169-90.

Mrabet S. (2010) *Le théorème de Thalès dans l'enseignement tunisien : conceptions et pratiques des élèves, pratiques des enseignants*. Thèse de doctorat. Université Virtuelle de Tunis, Université Paris Diderot (Paris 7).

Manuel Tunisien (2004) Mathématiques, 2ème année de l'enseignement secondaire, Tome 1, Centre National Pédagogique.

Manuel Tunisien (2003) Mathématiques, 1ère année de l'enseignement secondaire, Centre National Pédagogique.

Manuel Tunisien (1999) Mathématiques, 9ème année de base. Centre National Pédagogique.

TUNISIE 2003, Programmes Mathématiques 1ère année et 2ème année secondaire, Ministère de l'Education et de la formation. Direction des programmes et des manuels scolaires, Tunis.

TUNISIE 1997, Programmes officiels du second cycle de l'enseignement de base, Complément mathématiques.

L'ACTIVITE DE DEFINITION : VERS UN MODE DE PENSEE SPECIFIQUE ?

Cécile OUVRIER-BUFFET*

Résumé – L'activité de définition commence à être considérée en tant que telle dans les travaux internationaux. Elle permet d'accéder aux concepts et de développer un mode de pensée spécifique, et ainsi de « penser » les concepts mathématiques. Cet article s'attachera à définir « l'activité de définition » et conduira une étude épistémologique critique de celle-ci, plaçant les définitions au centre d'une activité mathématique de construction de connaissances et de preuve. Cette critique s'appuiera sur les travaux existants sur le sujet et se penchera plus particulièrement sur les types de situations impliquant une activité de définition. De nouvelles perspectives de recherche en découleront.

Mots-clefs : activité de définition, construction de concept, définition-en-acte, zéro-définition, proof-generated definition, *concept image*, *concept definition*, cadres théoriques

Abstract – The defining activity is studied as such in recent international works in mathematics education. It gives an opportunity to deal specifically with concepts and generates a specific way of thinking. This article will define "the defining activity" and will present a critical epistemological study of it. The activity involving definitions will be considered as a part of the mathematical activity of construction of knowledge. The proposed critic will deal with existing works on the topic and will explore the kinds of situations implying a defining activity. New research perspectives will emerge from it.

Keywords: defining activity, concept construction, in-action definition, zero-definition, proof-generated definition, concept image, concept definition, theoretical backgrounds

L'expression « pensées mathématiques » évoque inévitablement le raisonnement en mathématiques. Elle questionne également les associations que l'on peut faire entre un champ des mathématiques et un (ou plusieurs) mode(s) de pensée spécifique(s), voire même entre un mode de pensée et plusieurs champs des mathématiques. Ce sont là les relations entre les concepts qui sont interrogées, tout autant que les concepts eux-mêmes, mais aussi les représentations, le traitement de celles-ci, les modélisations, les formalisations, etc. Le terme anglais *thinking*[1], tel qu'il est utilisé dans la littérature anglo-saxonne (notamment pour le *advanced mathematical thinking*), reste large dans son acception, tout comme l'est le terme « pensée ». Pourtant, il semble que les deux axent davantage sur un type de raisonnement prédéfini déjà avancé que sur un processus en cours d'élaboration. On utilisera donc dans cet article de préférence le terme « activité », à l'image de Rasmussen et al. (2005), afin de centrer le propos et d'insister sur un processus en construction, que ce soit en mathématiques ou dans des analyses didactiques.

Une distance existe sur la question des définitions lorsque celles-ci représentent l'un des produits d'un processus de construction de concepts ou lorsqu'elles viennent au commencement d'un exposé axiomatique. D'un côté se trouvent des définitions en construction marquant différents stades de la génération de concepts, de l'autre des définitions formelles finalisées inscrites au sein d'une présentation théorique. Si la place de la construction de définitions n'est pas toujours clairement située dans la génération de nouvelles connaissances (formalisation et construction axiomatique mises à part), son lien avec la preuve est souvent réducteur. En effet, la présentation lexicale et logicienne des définitions est fréquente et ne permet pas de construire des définitions (une telle présentation s'attache à proposer une dénomination appropriée – aspect lexical – et/ou une représentation

* IUFM de Créteil, UPEC – LDAR, Paris 7 – France – cecile.ouvrier-buffet@u-pec.fr

[1] Les termes en anglais seront généralement conservés et toujours écrits en italiques.

© Ouvrier-Buffet, C. (2012), L'activité de définition : vers un mode de pensée spécifique ? In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement Des Mathématiques et Contrat Social : Enjeux et Défis pour le 21e Siècle – Actes du Colloque EMF2012* (GT3, pp. 492–503). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

particulière qui sera un outil dans une démonstration ultérieure pour régler une inférence – aspect logicien). Cette vision se situe classiquement au sein d'une théorie mathématique déjà existante, formalisée, consistante, s'appuyant sur la structure dérivative d'une démonstration, et utilisant des définitions dites précises et techniques. La distance, entre ces définitions formelles, qui résultent de choix théoriques, et la problématique qui leur a donné naissance, est réelle. Ainsi, si l'on n'a pas accès à la génération des définitions, la compréhension des concepts que ces définitions sont sensées permettre pourrait paraître en partie compromise, de même que les liens qui peuvent exister entre définitions et preuve. Nous allons donc nous pencher plus spécifiquement sur « l'activité de définition » et explorer les possibles quant à la conception et l'analyse de situations impliquant une telle activité.

Dans cet article, l'expression « activité de définition » comprendra tout processus impliquant la construction de définitions, de l'amorce de la résolution d'un problème à la construction formelle de théories. Cela recouvre, dans la littérature internationale, les expressions suivantes : *defining, defining processes, definitional procedure, defining activity*[2]. Il s'agit donc, pour définir plus précisément l'activité de définition, d'identifier les situations conduisant à ce « mode de pensée »[3] et les processus en jeu. Les paragraphes suivants en souligneront la complexité.

Actuellement, l'activité de définition prend une place grandissante dans les travaux internationaux : déjà soulignée (plutôt du côté formel) par Mariotti et Fischbein en 1997[4], elle apparaît aujourd'hui comme un moyen d'appréhender les concepts mathématiques, dans une nouvelle perspective d'enseignement. Des cadres théoriques spécifiques pour l'étude de l'activité de définition commencent à émerger. L'enjeu de cet article est de proposer une étude épistémologique critique plaçant les définitions au centre d'une activité mathématique de construction de connaissances et de preuve. Il s'agit ainsi d'envisager l'activité de définition comme un mode de pensée mathématique permettant de travailler la génération de concepts, de considérer une définition comme productive, permettant d'ouvrir de nouveaux problèmes, de nouvelles façons de penser. L'aspect formel et axiomatique de l'activité de définition sera mis de côté afin de centrer le propos sur l'activité heuristique de définition. De plus, un état des lieux des travaux didactiques existants sur la question sera conduit afin d'ouvrir de nouvelles perspectives de recherche.

I. SITUER L'ACTIVITE DE DEFINITION DANS L'ACTIVITE MATHEMATIQUE

1. Du côté de l'activité du chercheur en mathématiques

Certains chercheurs en didactique se sont penchés sur la caractérisation d'heuristiques et de comportement de mathématiciens (e.g. Burton 2004; Carlson et Bloom 2005; Schoenfeld 1985). Peu d'éléments cependant concernent l'importance de l'activité de définition, sauf quand celle-ci s'inscrit dans un lien direct avec la preuve. Il est généralement admis qu'une preuve peut soulever la nécessité d'une « meilleure » définition, l'une des fonctions de la preuve étant ici l'exploration du sens d'une définition (en l'impliquant dans la rédaction d'une preuve) et/ou l'étude des implications d'une assertion (Hanna 2000). C'est effectivement une voie à explorer dans l'enseignement pour appréhender la compréhension que les étudiants ont

[2] Ces expressions, très semblables, pourraient être imparfaitement traduites par : définir, processus définissants, procédure définissante, activité de définition. Il en ressort une préoccupation certaine autour de « l'activité de définition ».

[3] « Mode de pensée » est ici à comprendre ainsi, en référence à l'action de « penser » : une façon de « penser », « penser » signifiant « concevoir, juger, raisonner » (dictionnaire de l'Académie Française, en ligne).

[4] "(...) learning to define is a basic problem of mathematical education." (Mariotti et Fischbein 1997, p. 219).

des définitions qui leur sont enseignées, tout comme le sont les situations permettant un enrichissement des *concepts images* des étudiants (Tall 1991 ; Vinner 1991) (cf. §II-2). Mais cela ne prend pas en compte ce qui se trouve en amont, c'est-à-dire l'activité même de recherche mathématique où co-emergent définitions et preuves, à l'image du processus continuel de révision conceptuelle de Lakatos (1961, 1976). Des pistes de recherche sur l'activité de définition se présentent ici : approfondir le processus lakatosien de définition et produire des outils théoriques permettant de mettre en œuvre et d'analyser des situations impliquant l'activité de définition, et conduire des entretiens et expérimentations avec des chercheurs en mathématiques appartenant à différents champs des mathématiques : on peut en effet faire l'hypothèse d'une dépendance de l'activité mathématique aux concepts mathématiques. La question sous-jacente est de déterminer s'il existe une façon de « penser » (concevoir, juger) les définitions, transversale aux mathématiques[5]. Les entretiens avec les chercheurs explorent en particulier certains des éléments dégagés par Peirce (1995) tels l'expression diagrammatique (centrée sur les relations et non sur les mots), l'observation, l'expérimentation, l'habituation[6], mais pas seulement. Il s'agit d'approfondir et de situer l'activité de définition dans l'activité mathématique et les liens qu'elle entretient avec la preuve (en caractérisant les types de situations propices à ce mode de raisonnement et les invariants de cette activité) et, d'une certaine façon, de mettre à l'épreuve le modèle épistémologique de Lakatos.

2. *Lakatos : un modèle épistémologique de l'activité de définition - Portée et limites*

Lakatos cherche à présenter des schémas du raisonnement mathématique en s'appuyant sur différentes conceptions épistémologiques et philosophiques traduites par les protagonistes de *Preuves et Réfutations*. Directement inspiré par Pólya et Popper, Lakatos s'appuie sur le contexte de la découverte (construction de conjectures) et de la justification (mise à l'épreuve de conjectures). Il reprend en effet une idée de Pólya (le *guessing and testing*) comme un exemple de raisonnement de type inductif en mathématiques où une conjecture naïve (antérieure à toute preuve en fait) est atteinte par la méthode de Popper des conjectures et réfutations[7]. Un processus de preuve par analyse-synthèse permet de faire disparaître la conjecture naïve au profit de *proof-generated theorems* de plus en plus complexes, de lemmes cachés etc. Une place prépondérante est donnée aux définitions, qu'elles soient *naïves*, *zéro* ou générées dans la preuve (les fameuses *proof-generated definitions*[8]), la construction de définitions apparaissant clairement comme un processus de formation de concepts[9]. Tous les concepts mathématiques ne peuvent se prêter à ce processus de preuves et réfutations (cf. la conférence de Conway citée par De Villiers (2000)), mais Lakatos l'annonce clairement dans sa thèse (1961) : il ne prétend pas faire « le » modèle de la construction de la connaissance mathématique. Revenons sur les caractéristiques de la situation et des processus de *Preuves et Réfutations* afin de déterminer la portée et les limites de ce modèle.

---

[5] Cette seconde piste est en cours de réalisation, les résultats ne sont pas encore connus lors de l'écriture de cet article mais le seront pour le colloque.

[6] « Il y a trois sortes d'exercices qui semblent particulièrement appropriés à renforcer les facultés de l'habituation. Exercices de division et de classification, exercices de définition et d'analyse logique des idées, exercices de résumés de théories, des grandes lignes d'un raisonnement. » (Peirce 1995, p. 254)

[7] Soulignons ici que Popper cherchait à traduire le progrès scientifique en développant une méthodologie, en sciences. La méthodologie des conjectures et réfutations proposée par Popper en sciences et le fait que Popper suggère de placer la découverte mathématique dans une configuration expérimentale ont inspiré Lakatos.

[8] Traduites par « définitions éprouvettes » dans la version française de *Preuves et réfutations* de Lakatos.

[9] "A definitional procedure is a procedure of concept formation." (Lakatos 1961, p. 54).

Des outils permettant de baliser une activité de définition : les trois types de définitions proposés par Lakatos (définitions naïves, zéro-définitions, *proof-generated definitions*)[10] ont pour fonctions respectives de nommer, communiquer un résultat, prouver. Une définition naïve peut être établie au début d’une recherche mais ne peut évoluer, contrairement à une zéro-définition qui marque réellement le début de l’activité de définition et du processus de recherche à proprement parler. Une zéro-définition peut être modifiée pour protéger la conjecture d’un « monstre » ou parce que le concept est modifié par la présentation d’une preuve. La construction d’un système de concepts est alors engagée, et le stade de *proof-generated definition* ne sera atteint que grâce à l’idée de la preuve. Il demeure cependant que le stade des zéro-définitions est déjà très avancé puisqu’il prend déjà en compte la preuve en jeu : il apparaît en effet comme un outil théorique permettant de conduire des analyses mathématiques et didactiques (voir §II.5). L’idée séduisante des *proof-generated definitions* réside dans le fait qu’elles tentent de relier la construction de concepts et la validation de définitions à la preuve : ce point reste à explorer plus en profondeur, car la situation proposée par Lakatos ne permet pas d’aller vers la généralisation du processus permettant de passer des zéro-définitions aux *proof-generated definitions*. De même se pose la question de l’existence d’autres processus caractérisant l’activité de définition et de preuve.

Une situation initiale très restrictive : la situation initiale[11] est en fait une situation de classification (délimitation du concept de polyèdre), comprenant une conjecture initiale (avec la formule d’Euler), une première représentation des objets mathématiques en jeu (les polyèdres sont en effet déjà connus des élèves, au moins dans une appréhension perceptive avec des définitions de travail), une nouvelle preuve (celle de Cauchy, dans le cadre de la topologie algébrique). C’est cette nouvelle preuve qui va « valider » la *zéro-définition* et lui conférer le statut de *proof-generated definition*. En fait, avant la preuve de Cauchy, la situation pourrait être considérée comme relativement pauvre. Et avec la preuve de Cauchy, il faudrait parvenir à se détacher du seul niveau de la preuve pour aller plus précisément sur la construction de concepts qui serait à requestionner en dehors de la preuve de Cauchy justement. Ces caractéristiques de la situation initiale étant fortes, se pose la question suivante : est-il possible de concevoir des situations impliquant une activité de définition et de preuve moins restrictives que celle de Lakatos ?

Un moment de l’activité mathématique (jusqu’à la formalisation mais sans prise en compte de l’axiomatisation) : Lakatos laisse de côté la première rencontre avec les objets car il s’appuie sur des objets géométriques qui ont déjà une préexistence, des prédéfinitions, et une préaxiomatique, indépendamment de la situation posée dans *Preuves et Réfutations*. Il ne prend pas non plus en charge l’aspect « construction de théorie » (bien qu’une axiomatique locale existe, mais elle provient de la géométrie importée). En fait, Lakatos ne considère pas le fait qu’une axiomatisation a aussi pour intérêt de connecter différents champs de mathématiques a priori éloignés, et que c’est elle qui aidera à dépasser le cloisonnement des différentes branches des mathématiques (cf. Corfield, 1997). En effet, on ne peut parfois faire l’économie d’une axiomatisation pour énoncer certaines conjectures. Lakatos est lui davantage du côté de la formalisation, car même s’il reconnaît que ce n’est pas une fin en soi,

[10] Reprenons l’exemple de Lakatos pour illustrer ces différents types de définition. Il propose une définition naïve (qui n’évoluera pas mais sera remplacée) de polyèdre : un solide avec des faces planes, des arêtes rectilignes. Un exemple de zéro-définition (il en existe plusieurs dans le travail de Lakatos) dans ce même contexte de construction de classe d’objets vérifiant la formule d’Euler : solide dont la surface est constituée de faces polygonales. Mais le cube creux est un contre-exemple. Donner un exemple de *proof-generated definition* est plus délicat car il faudrait expliciter une preuve et la dialectique entre cette preuve et la définition en construction. Le travail décrit dans Ouvrier-Buffet (2006) permet d’avoir une autre illustration du rôle des zéro-définitions.

[11] Lakatos repris une situation historique déjà proposée par Pólya.

il affirme que ce processus est à questionner, notamment en interrogeant ce qu'il ne contient pas.

Une représentation partielle de la construction de concepts - des contre-exemples prédominants : Lakatos pourrait donner l'illusion que la construction de concepts se fait uniquement par modification de la conjecture initiale via des contre-exemples. Il ne faudrait pas croire non plus que seuls les contre-exemples permettent l'examen critique d'une preuve. Pour la situation choisie, il faut tenir compte des éléments donnés au départ et de la gestion du maître, loin d'être neutre. Par ailleurs, Lakatos n'utilise qu'un seul type de preuve[12], ce qui montre son attachement à la structure logique et créé un décalage avec sa volonté de montrer des mathématiques informelles.

Une gestion de la situation par le maître non neutre et fondamentale : une modélisation épistémologique avec certaines conceptions (telles celle d'Aristote et Popper) permet de cerner en partie la gestion de la situation, afin de faire ressortir ce qui relève spécifiquement de l'apport de Lakatos (cf. Ouvrier-Buffet 2006). Cette gestion a été pensée par Lakatos pour représenter différents courants mathématiques et philosophiques : la transposition à la classe requiert un travail spécifique du côté de l'identification des leviers que le maître peut utiliser pour catalyser le travail sur la définition (ces éléments ont été décrits dans Ouvrier-Buffet, 2004). On retrouve l'importance des discussions dans la classe dans l'expérimentation de Mariotti-Fischbein (1997) où l'activité de définition ne se fait pas sans discussion collective.

Une réécriture de l'histoire inévitablement artificielle : il a fallu un siècle (1750-1850)[13] pour qu'hypothèses, définitions et preuve de la relation d'Euler soient correctement formulées. Ce contexte historique est certes très favorable au travail de conjectures, preuves et réfutations et à l'instrumentation des contre-exemples, mais ce qui n'est pas toujours le cas (a priori) en mathématiques.

II. DU COTE DE LA RECHERCHE EN DIDACTIQUE : DES SITUATIONS IMPLIQUANT UNE ACTIVITE DE DEFINITION

Nous allons retenir ici les travaux en didactique des mathématiques conduits sur l'activité de définition et questionner les types de situations propices à l'activité de définition, les objets mathématiques retenus, ainsi que les cadres théoriques utilisés pour analyser la construction de concepts.

1. *Freudenthal : redéfinir pour systématiser ou générer des connaissances (connaissances déjà partiellement connues ou données)*

Certains chercheurs ont souligné la nécessité d'impliquer les élèves dans un processus de recherche proche de celui du mathématicien, et ce, souvent dans le vaste cadre du *problem-solving*. Freudenthal (1973) en particulier s'est penché sur les définitions en géométrie et sur leur aspect arbitraire qu'il souhaite contourner en rendant les élèves acteurs de la classification des quadrilatères notamment. Il distingue deux types d'activité de définition :

- le *descriptive (a posteriori) defining* qui consiste en une systématisation d'une connaissance existante, que l'on pourrait qualifier de caractérisation, mettant en

[12] $\forall$ x (A(x) $\rightarrow$ B(x))

[13] Pour une mise en perspective de cette histoire, le lecteur pourra se référer à l'ouvrage de Pont J.-C. (1974) *La topologie algébrique des origines à Poincaré*. PUF.

évidence les invariants d'une classe d'objets ou d'actions déjà connus (ce n'est donc pas une « première rencontre ») ; les définitions produites dans ce cadre ont pour vocation d'être des conditions nécessaires et suffisantes (il s'agit d'aboutir à des définitions minimales, nous sommes donc du côté « logicien » de l'activité de définition, sans pour autant entrer dans la formalisation ou dans une axiomatique) ;

- et le *constructive (a priori) defining* qui s'intéresse à la génération d'une nouvelle connaissance. Repris par De Villiers (1998)[14], le *constructive defining* est effectif quand une définition connue et/ou donnée est modifiée[15]. Il peut s'agir, par exemple, d'inclure ou d'exclure une propriété, tout dépendra de la situation et du concept proposés.

En réalité, on pourrait encore élargir le *constructive defining* et l'étudier comme un changement de cadre (par exemple avec la définition de triangles sur la sphère) : les élèves connaissent déjà l'objet mathématique, ils le redéfinissent dans un nouveau système de contraintes. Dans ce genre de processus, générer des exemples et contre-exemples est particulièrement intéressant et moteur dans l'activité de définition.

2. « Concept image » et « concept definition » : une reconstruction de concepts

Vinner a également souligné l'importance de construire des définitions[16]. L'étude des concepts (et des *concepts images*) se fait par rapport à une vision formelle, celle du *concept definition*[17]. On retrouve cet aspect formel de manière forte dans la présentation de trois mondes de pensée (*worlds of thinking*) de Tall (2004)[18].

Au sein du cadre théorique du *concept image* et du *concept definition*, Vinner cherche des situations où le *concept image* des étudiants comporte des lacunes afin de les engager dans un processus de reconstruction du *concept definition*. Ce type de situation est l'un de ceux proposés par Borasi qui décrit trois façons de concevoir des activités de définition (Borasi, 1992, p. 155) :

- une analyse approfondie d'une liste de définitions incorrectes d'un concept donné (ce que l'on pourrait rapprocher du *descriptive defining*) ;
- l'utilisation de définitions dans des problèmes impliquant des preuves (à la Lakatos) ;
- l'étude du devenir d'une définition familière (et donc d'un concept familier) dans un contexte différent (ce que propose également Duchet (1995) avec des carrés sur la sphère, ou Ouvrier-Buffet (2006) avec des droites discrètes). La notion de *concept image* peut ici entrer en jeu.

---

[14] Dans les deux cas, Freudenthal et De Villiers se penchent sur des concepts issus de la géométrie, soulignant l'importance de l'activité de définition dans la pensée géométrique (*geometric thinking*).

[15] "(...) a given definition of a concept is changed through the exclusion, generalization, specialization, replacement or addition of properties to the definition so that a new concept is constructed in the process. In other words, a new concept is defined 'into being'." (De Villiers 1998, p. 250)

[16] "The ability to construct a formal definition is for us a possible indication of deep understanding." (Vinner 1991, p. 79)

[17] Dans la structure cognitive, Vinner affirme l'existence de deux pôles en interactions mutuelles : le *concept definition* (définition formelle d'un concept) et le *concept image* (non verbal, de type image mentale).

[18] Tall cherche à donner une vision globale de la croissance mathématique. Son cadre laisse peu, voire pas, de place à l'activité heuristique de définition : il ne considère en effet que les définitions formelles dans le monde formel (*formal world)*, et les caractérisations des deux autres mondes (*embodied world* et *proceptual world*) ne sont pas appropriées pour l'appréhension de concepts en construction.

Ce dernier type de situation peut impliquer des activités de définition se plaçant à des niveaux différents quant au point de vue axiomatique. Il s'agira en effet d'une recherche extrinsèque ou intrinsèque :

- une recherche extrinsèque si la géométrie euclidienne est considérée comme un outil d'investigation avec un travail de transposition de définitions existantes (on cherche à conserver une axiomatique existante avec des objets connus placés dans un autre cadre) ;
- une recherche intrinsèque si l'on construit une « autre » géométrie en cherchant de nouveaux principes applicables au nouveau cadre (on abandonne l'axiomatique connue au profit de la construction d'une nouvelle, locale).

3. *Un exemple d'activité de définition « opportune »*

Balacheff (1987) a tenté de proposer une situation « à la Lakatos » non pas en concevant une situation initiale telle celle de Lakatos, mais en observant comment la question de la nature des objets en jeu est posée lors d'une réfutation par un contre-exemple. La consigne donnée à des élèves de 13 ans dans le cadre de son expérimentation était la suivante : « Déterminer un moyen pour calculer le nombre de diagonales connaissant le nombre de sommets d'un polygone ». L'activité de définition ne peut émerger que si les élèves posent la question de savoir ce qu'est un polygone, une diagonale, deux concepts qui leur sont familiers. C'est là que « le problème de la définition a ensuite joué un rôle essentiel à la fois dans la résolution du problème et dans leur démarche de validation » (Balacheff 1987, p. 188). Les définitions apparaissent alors comme des bases communes pour la résolution du problème et représentent une forme d'institutionnalisation des connaissances en jeu. De son expérimentation, Balacheff conclut que le fait de fournir une information de référence (définition essentiellement précisant les objets en jeu) « ne modifie pas sensiblement (dans le cadre de [son] expérience) les processus de preuve. » (Balacheff 1987, p. 192). Ainsi, le travail sur la définition est possible, ici il était opportun et s'est inscrit dans une logique locale de réfutations les élèves cherchant à sauver leur conjecture en ne retenant que les objets pour lesquels elle était valide.

4. *Les travaux de Larsen, Zandieh, et Rasmussen : de Lakatos à la réinvention*

Larsen et Zandieh (2005, 2008) ont centré leurs travaux dans une perspective de preuves et réfutations, plaçant l'activité de conjecture et de preuve au sein de l'activité de définition. Leurs expérimentations impliquent des concepts de géométrie et d'algèbre à l'université. Ils concluent que le rôle de la preuve dans l'activité de définition consiste à :

> 1) tell you what job the definition needs to do
>
> 2) suggest what the definition ought to look like in order to do that job and
>
> 3) to let you determine whether it actually does the job it supposed to do. (Larsen et Zandieh 2005)[19]

Dans leur réflexion, la preuve est présentée simultanément comme une motivation pour l'activité de définition, mais aussi comme un guide et une façon de légitimer la définition. On retrouve ici partiellement la vision classique du rôle des définitions dans la structuration de la preuve, pour régler des inférences logiques. L'apport du travail de Larsen et Zandieh réside dans leur analyse de processus de réinvention avec les outils proposés par Lakatos. Ils montrent en effet la pertinence de ces outils, dans des situations appropriées, c'est-à-dire

[19] « 1) dire quel rôle la définition doit jouer ; 2) suggérer l'aspect que la définition doit avoir afin de pouvoir jouer ce rôle ; et 3) permettre de déterminer si la définition tient effectivement le rôle qu'elle est censée avoir. » (traduit par nos soins).

suivant les critères des situations de Lakatos, y compris dans la gestion par l'enseignant. Cela étant, les concepts en jeu sont déjà connus des étudiants et il s'agit d'une reconstruction de définitions, mais, comme nous l'avons souligné dans le paragraphe I.2., les « élèves » de Lakatos sont en fait dans une situation similaire. Revenons plus précisément sur les caractéristiques des situations proposées par Larsen et Zandieh (2005, 2008) et les concepts retenus.

Il s'agit en fait de situations « à la Lakatos » avec une conjecture de départ et une preuve qui est donnée : tout dépend de cette situation initiale. Le rôle des contre-exemples est central : l'émergence d'un contre-exemple global et l'analyse de la preuve sont là pour avancer dans l'étude de la conjecture et de *proof-generated* concepts. Les concepts retenus par Larsen et Zandieh se prêtent à ce schéma : ils reprennent en effet les notions de convergence uniforme et de séries de fonctions (comme Lakatos) et choisissent également le cadre de la théorie des groupes afin de calquer le modèle de situation de Lakatos. A cet effet, le questionnement consiste à rechercher le plus petit nombre de conditions suffisantes pour qu'un sous-ensemble d'un groupe soit un sous-groupe, les définitions de groupe et de sous-groupe étant données. Si le travail attendu des étudiants réside dans la production de conjectures et de contre-exemples, il n'en demeure pas moins que le rôle de l'enseignant dans la gestion reste majeur (en particulier, il fournira les contre-exemples). La production finale est un théorème[20] (et non pas une définition ou une *proof-generated definition*) issu du travail sur la preuve fournie. En définitive, « the typical outcome of monster-barring activity is a modification or clarification of a definition » (Larsen et Zandieh 2008, p. 208) : pour ces auteurs, l'activité de définition intervient essentiellement au niveau de la relégation des monstres (au sens de Lakatos) dans une dialectique entre contre-exemple et définition. La prise en compte des exceptions impacte sur la conjecture et l'analyse de la preuve également, sans forcément aboutir à des *proof-generated concepts*.

Dans le prolongement des travaux de Larsen et Zandieh (2005, 2008), un cadre théorique a été affiné par Zandieh et Rasmussen (2010) : celui de la DMA (*Defining as a Mathematical Activity*) qui s'appuie sur la RME (*Realistic Mathematics Education*) et les notions de *concept image* / *concept definition*. Ce cadre décrit quatre niveaux de l'activité mathématique[21] autour de la définition, qui traduisent en fait une progression du pragmatique vers le théorique (ou de l'heuristique vers l'axiomatique)[22] et qui renforcent les liens entre *concept image* et *concept definition* :

- créer un *concept definition* à partir d'un *concept image* (il suffit pour cela d'avoir une « bonne » représentation et fréquentation du concept en jeu) ;
- créer un *concept image* à partir d'un *concept definition* (il s'agit en fait d'un changement de cadre d'un concept connu : par exemple, définir « triangle » sur la sphère, connaissant déjà les triangles dans le plan) ;
- créer des *concept images* et des *concept definitions* (ce niveau a pour but de détacher les définitions de la situation initiale qui leur a donné naissance ; on pourrait le rapprocher de la formalisation) ;
- utiliser des *concept images* et *concept definitions* déjà établis.

Ce cadre permet de distinguer différents types de situations et de proposer une progression au sein de celles-ci pour accompagner les étudiants dans l'activité de définition. Il serait

[20] "Non empty finite closed subset of a subgroup is a subgroup." (Larsen et Zandieh 2005).
[21] Dans la continuité des travaux de Gravemeijer (1999), d'un niveau « informel » à un niveau « formel ».
[22] Les auteurs qualifient ces activités avec des termes finalement très généraux qui ne caractérisent pas à aux seuls les types de cas retenus (*situational, referential, general, formal*).

intéressant d'évaluer la reproductibilité de cet outil théorique pour analyser d'autres situations impliquant notamment des concepts non familiers des étudiants, car dans ce cas, le problème reste entier (le premier niveau s'appuyant en effet sur des concepts « partiellement connus » des étudiants).

5. Un modèle épistémologique pour la conception et l'analyse de situations de construction de définitions

Ouvrier-Buffet (2003, 2006) a proposé un modèle épistémologique prenant en compte plusieurs conceptions complémentaires (celles d'Aristote, Popper, et Lakatos) permettant de décrire une activité de définition suivant des aspects logiques, langagiers, heuristiques, et axiomatiques. Les conceptions sont dégagées des travaux des auteurs cités, mais pas seulement : elles ressortent d'une étude épistémologique plus large et sont décontextualisées des exemples proposés par les auteurs étudiés pour être effectivement opérationnelles. La majeure partie des situations étudiées implique des concepts discrets et des situations de classification. L'activité de définition y est caractérisée notamment par plusieurs opérateurs : une définition peut évoluer pour des raisons liées à l'élaboration d'une théorie (conception poppérienne), pour répondre à des critères logiques (conception artistotélicienne avec l'aspect récurrent de la non-redondance d'une définition) ou encore pendant la génération d'une preuve (conception lakatosienne où la validation d'une définition de travail initiale est effective dans son inscription dans une preuve). Les travaux d'Ouvrier-Buffet ont montré la pertinence des analyses mathématiques de situations impliquant une activité de définition via les notions de zéro-définitions et *proof-generated definitions*. Ils ont également mis en évidence la capacité des étudiants à faire évoluer une zéro-définition et à la considérer comme aboutie lorsque les contre-exemples manquent et lorsque son utilisation dans une preuve est effective. La nécessité d'introduire un autre niveau de définitions dans l'activité de définition, celui des définitions-en-acte[23], est quant à lui illustrée dans Ouvrier-Buffet (2011) dans une situation impliquant des concepts non familiers des étudiants. Une définition-en-acte est définie de la façon suivante : il s'agit d'un énoncé utilisé comme un outil (et non comme objet) permettant aux étudiants d'être opérationnels dans l'avancée d'un problème, sans avoir recours à une définition explicite. Ce niveau de définition vient avant celui des zéro-définitions et pourra même peser contre une zéro-définition. De la même façon que les définitions dépendent des propositions, les définitions-en-acte sont en lien avec des propositions-en-acte.

6. Des situations impliquant une activité de définition : résumé

Le tableau ci-dessous a pour but de situer les travaux existants portant sur l'activité de définition. Il ressort clairement une prépondérance des concepts de géométrie, certes très accessibles par leurs représentations, mais aussi de concepts issus de mathématiques discrètes. Ces derniers ont l'avantage de proposer une problématisation naturelle et peu fortement axiomatisée, ainsi qu'un accès aux concepts par leurs représentations, mais aussi une interface avec les mathématiques contemporaines, donc « en construction ». La place accordée aux concepts non familiers est faible (cf. les travaux d'Ouvrier-Buffet). Ce n'est donc pas un hasard si les cadres théoriques mobilisés impliquent largement les heuristiques de Lakatos, et les notions de *concept image* et *concept definition*.

[23] Les définitions-en-acte et propositions-en-acte sont une extension des concepts-en-acte et des théorèmes-en-acte de Vergnaud (1991).

Types de situations impliquant une activité de définition	**Concepts mathématiques en jeu**	**Outils théoriques**
Classification, à partir de représentations de concept, d'exemples et de contre-exemples (ou non-exemples)	• Quadrilatères (Freudenthal 1973 ; De Villiers 1998) • Polyèdres (Mariotti et Fischbein 1997) • Convexité (Fletcher 1964 ; Ouvrier-Buffet 2005) • Arbres, droites discrètes (Ouvrier-Buffet 2003 et 2006)	Niveaux de Van Hiele Conceptions (dont celle de Lakatos)
Redéfinir un concept familier : • à partir de représentations de celui-ci • ou à partir d'une liste de définitions incorrectes • redéfinir dans un cadre différent Généraliser un concept (élargir des définitions connues)	• Fonction / triangles (Vinner) • Cercle (Borasi 1992) • Taxicab géométrie (Borasi 1992) / Objets sur la sphère (Duchet 1995 ; Larsen et Zandieh 2005 ; Zandieh et Rasmussen 2010) • Puissance d'un nombre (Borasi, 1992)	*Concept image* et *concept definition* Heuristiques de Lakatos ; DMA
Situation "à la Lakatos" • avec des concepts familiers • avec des concepts non familiers	• Situation de reinvention en théorie des groupes (Larsen et Zandieh, 2008) • Polygones (Borasi, 1992) • Diagonales et polygones (Balacheff, 1987) • Générateur, minimalité (Duchet, 1994 ; Ouvrier-Buffet, 2011)	Heuristiques de Lakatos

Tableau 1 *– Différents types de situations impliquant une activité de définition*

III. DE NOUVELLES PERSPECTIVES DE RECHERCHE

De l'analyse épistémologique précédente et des critiques des travaux existants, il ressort plusieurs perspectives de recherche, dont certaines sont en cours d'étude.

La validité des cadres théoriques existants (notamment ceux de Ouvrier-Buffet et Larsen ainsi que Zandieh et Rasmussen) et leur efficience sont encore à tester, notamment sur des concepts non familiers des étudiants (ou élèves) (travail en cours, cf. Ouvrier-Buffet 2011). Il s'agit également de prendre en charge la gestion par l'enseignant de situations impliquant l'activité de définition, et, en amont, la dévolution de cette activité aux enseignants peu familiers avec ce type de travail en classe. La complexité de ces questions réside déjà dans le choix de situations et de concepts permettant une activité réelle de définition.

L'une des pistes à explorer encore, en relation avec la précédente, est d'impliquer plus fortement l'activité de définition dans la perspective d'un travail sur la preuve (ce qui générera sans doute de nouveaux outils d'analyse). En effet, les travaux existants partent généralement, pour de telles situations, sur le modèle de Lakatos, c'est-à-dire avec des contraintes fortes comprenant la donnée initiale de concepts, de conjecture et surtout de preuve à analyser. Il reste à ouvrir les situations de Lakatos en particulier du côté de la preuve, cette dernière étant porteuse de la connaissance mathématique, tout autant que le sont les définitions. C'est là que la construction de concepts peut être balisée.

Les questionnaires en cours des mathématiciens (cf. §I.1.) apporteront par ailleurs des éclairages quant au processus même de définition, en particulier ses caractéristiques dans la recherche contemporaine en mathématiques, domaine non encore exploité à ce jour. Peut-on caractériser un mode de penser transversal aux mathématiques concernant l'activité de définition ? Est-il implémentable de manière pertinente dans l'enseignement, et si oui, avec quels objectifs ? La perspective de travail sur la preuve sera également enrichie suite à cette recherche et permettra vraisemblablement d'envisager de nouveaux types de situations impliquant l'activité de définition.

REFERENCES

Balacheff N. (1987) Les définitions comme outils dans la résolution de problème. *XI^e Conference for the Psychology of Mathematics Education*. Montréal.

Borasi R. (1992) *Learning mathematics through inquiry*. New Hampshire: Heinemann.

Burton L. (2004) *Mathematicians as enquirers: Learning about learning mathematics*. Berlin: Springer.

Carlson M. P., Bloom I. (2005) The cyclic nature of problem solving. *Educational Studies in Mathematics* 58(1), 45-75.

Corfield D. (1997) Assaying Lakatos's Philosophy of Mathematics. *Studies in History and Philosophy of Science* Vol. 28, n°1, 99-121.

De Villiers M. (1998) To teach definitions in geometry or to teach to define? In Olivier A., Newstead K. (Eds) (pp. 248-255) *Proceedings of PME 22* vol. 2. Stellenbosch : RSA.

De Villiers M. (2000) A Fibonacci Generalization: a Lakatosian Example. *Mathematics in College* 10-29.

Duchet P. (1994) Communication sur une grille. *Actes MATh.en.JEANS* (pp. 45-50). Paris : MATh.en.JEANS. http://www.mathenjeans.fr.st/edition/actes/actespdf/94045050.pdf

Duchet P. (1995) Paris et New York sont-ils les sommets d'un carré ? *Actes MATh.en.JEANS* (pp. 95-103). Paris : MATh.en.JEANS. http://www.mathenjeans.fr.st/edition/actes/actespdf/95095103.pdf

Fletcher T. J. (1964) *Some lessons in Mathematics*. Cambridge : Cambridge University Press.

Freudenthal H. (1973) *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht : Reidel.

Gravemeijer K. (1999) How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning* 1, 155-177.

Hanna G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics* 44 (1-2), 5-23.

Lakatos I. (1961) *Essays in the Logic of Mathematical Discovery*. Thèse de doctorat. Cambridge : Cambridge University Library.

Lakatos I. (1976) *Proofs and refutations.* Cambridge : Cambridge University Library.

Larsen S., Zandieh M. (2005) Conjecturing and Proving as Part of the Process of Defining. In Lloyd G. M., Wilson M., Wilkins J. L. M., Behm S. L. (Eds.) *Proceedings of the 27th PME-NA*. Colombus, OH: ERIC.

Larsen S., Zandieh M. (2008) Proofs and Refutations in the Undergraduate Mathematics Classroom. *Educational Studies in Mathematics* 67, 205-216.

Mariotti M. A. et Fischbein E. (1997) Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics* 34, 219-248.

Ouvrier-Buffet C. (2003) *Construction de définitions / construction de concept : vers une situation fondamentale pour la construction de définitions en mathématiques*. Thèse de doctorat. Laboratoire Leibniz, Grenoble. http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00005515/en/

Ouvrier-Buffet C. (2004) Dévolution et gestion de situations de construction de définitions en mathématiques. *Symposium « Travail du professeur et dévolution dans les classes ordinaires ». Congrès de l'AECSE*. Paris.

Ouvrier-Buffet C. (2005) Activités de classification et construction de définitions à l'école élémentaire. *Colloque de la COPIRELEM*. Strasbourg. France.

Ouvrier-Buffet C. (2006) Exploring mathematical definition construction processes. *Educational Studies in Mathematics* 63(3), 259-282.

Ouvrier-Buffet C. (2011) A mathematical experience involving defining processes: in-action definitions and zero-definitions. *Educational Studies in Mathematics* 76(2), 165-182.

Peirce C.S. (1995) *Le raisonnement et la logique des choses, les conférences de Cambridge 1898*. Paris : Cerf.

Rasmussen C., Zandieh M., King K., Teppo A. (2005) Advancing mathematical activity: A view of advanced mathematical thinking. *Mathematical Thinking and Learning* 7, 51-73.

Schoenfeld A. H. (1985) *Mathematical problem solving*. San Diego : Academic.

Tall D. O. (Ed.) (1991) *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht : Kluwer.

Tall D. O. (2004) Thinking through three worlds of mathematics. *28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* Vol 4, 281-288. Bergen. Norway.

Vergnaud G. (1991) La théorie des champs conceptuels. *Recherche en Didactique des Mathématiques* 10/2.3, 133-169.

Vinner S. (1991) The Role of Definitions in Teaching and Learning of Mathematics. In Tall D. O. (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht : Kluwer.

Zandieh M., Rasmussen C. (2010) Defining as a mathematical activity: A framework for characterizing progress from informal to more formal ways of reasoning. *Journal of Mathematical Behavior* 29, 57-75.

APPROCHES EPISTEMOLOGIQUE ET DIDACTIQUE DE L'ACTIVITE DE FORMALISATION EN MATHEMATIQUES

Marc ROGALSKI*

Résumé – On analyse quelques formes que prennent en mathématiques les processus de formalisation, concrètement, aussi bien pour des problèmes ayant eu une dimension historique que pour les « mathématiques de tous les jours ». En même temps, on posera quelques problèmes didactiques sur la transposition possible de ces processus de formalisation. On n'évoquera pas ici la « philosophie formaliste » en mathématiques.

Mots-clefs : formalisation, épistémologie, unification, axiomatique locale

Abstract – We study some forms of formalisation activities in mathematics, in its history and also in « every day » mathematics. We ask some didactic questions about the possible transposition of these processus of formalisation. We say nothing about the « formalist philosophy » in mathematics.

Keywords: formalisation, epistemology, unification, local axiomatisation

I. INTRODUCTION

Ce texte reprend et complète sur certains points (Rogalski 1997). Notre point de départ est la question de la prise en compte éventuelle, en didactique, des pratiques expertes des mathématiciens, dans l'histoire et dans leur activité de tous les jours : la résolution de problèmes.

Les pratiques de résolutions des élèves mises en œuvre dans les exercices et problèmes sont analysées dans certains travaux didactiques, et mises en relation avec certaines pratiques expertes des mathématiciens ; voir par exemple une brève synthèse dans Mac Aleese, Pian, Robert, Rogalski, Viennot (2009). Mais il y a moins d'études sur les réflexions de type « méta » (Dorier 1997, Robert et Robinet 1989, Rogalski 1995) qui pourraient faire comprendre aux élèves ou étudiants certaines démarches fréquentes qui orientent les mathématiciens dans la recherche de résolution de problèmes, y compris par élaboration de théories, locales ou globales ; voir néanmoins Schoenfeld (1980) et Polya (1965).

Je ne m'intéresserai ici qu'aux pratiques expertes qui relèvent de l'activité de formalisation, parce qu'elles semblent constituer un trait marquant de l'évolution des mathématiques, et être une pratique très fréquente actuellement. Elles sont néanmoins très anciennes (qu'on pense à la théorie des grandeurs chez les Grecs). Mais elles ont pris depuis plus d'un siècle une place croissante dans l'activité mathématique, au point d'être devenues un mode de pensée en mathématiques, à la fois dans les restructurations permanentes de l'édifice mathématique (voir Patras 2001) et dans les pratiques de résolution de problèmes.

En bref, la formalisation est une activité extraordinairement productrice, au cours de l'histoire comme dans l'activité quotidienne des mathématiciens, qui permet une meilleure compréhension des mathématiques et une économie importante dans le travail de résolution de problèmes, en particulier parce qu'elle est liée à *une activité réflexive* des mathématiciens sur :

- leurs pratiques spontanées (collectives) de résolution de problèmes : calculs, raisonnements ;

* Laboratoire Paul Painlevé (Lille1-CNRS), Insitut Mathématique de Jussieu (UPMC-CNRS) et Laboratoire de Didactique André Revuz (Université Paris-Diderot) – France – marc.rogalski@upmc.fr

© Rogalski M. (2012) Aproches épistémologique et didactique de l'activité de formalisation en mathématiques. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT3, pp. 504–513). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

- les objets produits dans ces pratiques : organisations de calculs, méthodes, théorèmes, concepts, contre-exemples ;
- la nature des problèmes qu'on essaye de résoudre.

Je me bornerai ici à essayer d'analyser trois types de formalisations, que je retiens parce qu'elles me semblent fréquentes et efficaces.

Les rapports de ces types de formalisation avec l'enseignement se posent évidemment. L'expérience malheureuse des « maths modernes » ne doit pas faire oublier la nécessité d'une prise en compte dans l'enseignement, sous une forme ou une autre, de ce type d'activité des mathématiciens et de développement des mathématiques. Nous essayerons, pour les trois types de formalisations retenues ici, de réfléchir aux possibilités effectives qu'elles puissent être transposées dans l'enseignement, aux niveaux des lycées et surtout de l'université.

Enfin, on n'évoquera pas ici la « philosophie formaliste » en mathématiques c'est-à-dire celle qui est plus fondamentalement liée au formalisme lui-même, au sens de Hilbert, dans la mesure où son objectif concerne l'élucidation de la notion de « vérité » en mathématiques, et non la résolution de problèmes mathématiques.

II. LES GRANDS PROBLEMES CONCERNANT DES NOTIONS MAL OU NON DEFINIES, MAIS « NATURELLES », « INTUITIVES »

1. *Approche épistémologique*

A plusieurs reprises dans l'histoire des mathématiques on constate que l'absence d'une définition suffisamment formelle, générale d'une notion "commune" comprise de façon intuitive par tout le monde, entraîne des *imprécisions* dans les preuves, des *désaccords* sur leur validité, des *réfutations* ou des *controverses*. Ces phénomènes apparaissent lors des essais de résolution de ce qui apparaît souvent a posteriori comme un grand problème concernant cette notion, et peuvent durer lontemps. On voit encore surgir actuellement le même type de situations (en particulier pour des branches des mathématiques qui essayent de résoudre ou de formuler des problèmes issus de la physique contemporaine).

Le saut conceptuel consistant à unifier ces points de vue différents à travers une *définition formelle* est alors le moyen « de rendre tout le monde d'accord » ; cette nouvelle manière formelle de voir la notion en question crée ainsi *un sens nouveau, unifié à un niveau supérieur*. En un sens, cet aspect de la formalisation est constitutif de la « preuve rigoureuse définitive » de résultats longtemps indécis ou controversés. C'est aussi souvent *la délimitation du domaine de validité de résultats* qu'on pensait trop généraux.

Cette activité de formalisation est bien sûr très liée aux différentes manières dont *les mathématiciens créent des définitions*, non pas *a priori*, mais en situation de résolution de problème, individuelle ou collective. Pour cet aspect des choses, nous renvoyons aux travaux de C. Ouvrier-Buffet (Ouvrier-Buffet 2003, 2006), et à la contribution qu'elle propose dans le présent groupe de travail.

2. *Exemples historiques*

On trouvera dans Rogalski (1997) plusieurs exemples, qui illustrent bien ce processus particulier de formalisation, et sa puissance pour le progrès en mathématiques :

* la formule d'Euler pour les polyèdres : seule la définition formelle du polyèdre a été le moyen d'aboutir à une preuve définitive (Lakatos 1976) ;

* la notion de convergence et la pratique des infiniments petits ;

* les implicites de la géométrie d'Euclide, ceux des variétés, ceux des courbes et surfaces algébriques, ceux de la notion d'aire d'une surface (Lebesgue 1915) ;

* la controverse sur les logarithmes des nombres négatifs (Verley 1986) ;

* l'idée naïve de grandeurs et la non commensurabilité de la diagonale du carré à son côté, avec la solution « formelle » d'Eudoxe (Arsac 1987) ;

* les systèmes dynamiques chaotiques, la notion de suite aléatoire, divers problèmes de mécanique statistique.

3. *Questions didactiques*

La question de l'écho que ce processus de formalisation particulier peut ou doit avoir dans l'enseignement des mathématiques est complexe.

D'abord, il s'agit souvent de problèmes difficiles. Ensuite, la volonté de ne plus parler en termes naïfs ou intuitifs de concepts difficiles reste, malgré la réaction à l'épisode des « math modernes », très forte dans le milieu. Or, il semble bien que pour faire vivre dans l'enseignement ce type de processus de formalisation il va falloir se placer à un niveau où la formalisation complète ne sera pas faite, mais où on se contentera seulement de l'ébaucher, voire de la vulgariser. Enfin, parce que ces processus ont souvent eu historiquement de longues durées, ce qui rend difficile leur transposition didactique.

Néanmoins, plusieurs occasions peuvent se présenter, y compris dans les programmes actuels, *de faire que les élèves puissent toucher du doigt l'insuffisance de certaines notions communes, pourtant apparemment claires car reposant sur des images mentales fortes, pour résoudre des problèmes d'énoncés simples*, et de faire vivre en classe une démarche de formalisation raisonnable. Il me semble qu'*il y a un grand intérêt didactique et éducatif à ce que les élèves rencontrent ces moments formalisateurs*, pour leur efficacité et pour leur apport culturel.

Voici un premier exemple (virtuel car jamais testé), qui m'a été suscité par Lehmann (1989). Il s'agit du théorème admis en première : la limite en 0 de sin x/x vaut 1. Parfois, une ébauche de preuve en était donnée, fondée sur les inégalités classiques $\sin x < x < \tan x$, dont on cherchait à donner une raison géométrique. Autant la première inégalité repose sur des intuitions fortes sur la distance, autant le fait que l'arc sous-tendu par un angle soit plus court que le segment déterminé sur la tangente n'a plus rien d'évident visuellement. La preuve alternative utilisant une comparaison de surfaces mène très vite à un cercle vicieux, à moins d'avoir éclairci la raison pour laquelle c'est le même nombre π qu'on trouve dans les mesures de la surface du cercle et de son périmètre… et c'est une question de même nature !

On a OA = 1 (voir la figure 1). On veut montrer $PM \leq \text{arc}(AM) \leq AT$. Si $PM \leq AM \leq \text{arc}(AM)$ sont des inégalités « claires », pourquoi a-t-on $\text{arc}(AM) \leq AT$? Il suffiraitt de montrer qu'on a $\text{arc}(AM) \leq AI + IM$. Pour cela, il faut préciser ce que signifie arc(AM). On pourrait alors faire comprendre qu'un effort pour définir plus clairement la « longueur de l'arc du cercle » (longueur « maximale » qu'on peut approcher par des arcs polygonaux inscrits - sans nécessairement prononcer le nom de borne supérieure) permet de faire facilement la comparaison demandée, dès lors qu'on prouve l'inégalité entre les périmètres de deux polygones *convexes* inclus l'un dans l'autre.

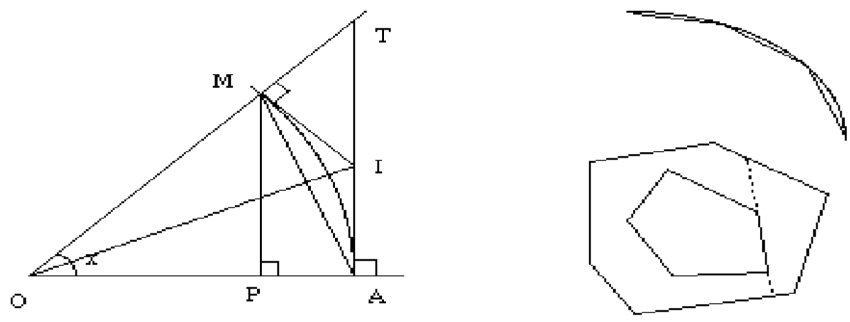


Figure 1

On trouvera dans (Rogalski et al. 2001) une exploitation de cette idée, et comment elle permet de « tirer un fil » menant de la dérivée du sinus au nombre π, au théorème d'Archimède sur l'aire du cercle, et aux versions modernes par l'analyse des fonctions trigonométriques.

Une démarche analogue est possible avec la notion d'aire, en terminale : empiler des petits carrés semble une démarche indispensable au calcul de l'aire intérieure à une *courbe*. Cela peut permettre de relier l'aire du disque à celles des polygones, plutôt que lui laisser un statut de « tarababoum » (Lebesgue 1915) source d'erreurs fréquentes chez les élèves (« si le rayon double, l'aire du disque aussi »).

Troisième exemple, mettre des étudiants de première année d'université devant le problème de calculer le carré du « nombre » 1, 7777… peut faire sentir qu'une définition formelle des nombres comme précisant l'idée de « processus d'approximation » permet de résoudre le problème. Cet exemple a été développé à Lille en première année d'université (CI2U 1990), et est exploité dans (Rogalski 2001, annexe 3).

Un autre exemple est celui développé par D. Grenier, M. Legrand et F. Richard, pour la construction de l'intégrale en première année d'université, dans le cadre du « débat scientifique ». Partant d'une définition « naïve » car ponctuelle de l'attraction de deux masses, il s'agit d'élucider comment on peut la calculer pour des masses non ponctuelles, et cela ne peut se faire que par la construction-définition de la notion d'intégrale. Pour plus de détails, voir (Legrand 1990 dans CI2U 1990) et aussi (Rogalski 2001).

Enfin, les travaux de C. Ouvrier-Buffet, en mettant l'accent sur la notion de définition, explorent les possibilités de constructions de situations didactiques permettant aux élèves d'avoir une activité de construction de définitions, par exemple *pour redéfinir une notion commune* quand il s'agit de l'utiliser dans un domaine ou la notion usuelle ne suffit plus. Nous renvoyons le lecteur à Ouvrier-Buffet (2003).

III. LE PROCESSUS D'UNIFICATION FORMELLE DE DOMAINES DIFFERENTS

1. *Approche générale*

Un autre moment où l'on voit à l'œuvre un processus de formalisation d'une autre nature, est lorsque sont rassemblés sous un même concept ou une même théorie des problèmes et des démarches qui « se ressemblent », ont quelque chose en commun, alors même qu'ils se situent dans des domaines différents. Ce processus d'unification provient d'une *démarche réflexive*, consciente, et qui demande, de la part de ses auteurs, mais aussi des contemporains (et cela n'a pas toujours été de soi) *une « foi» en la puissance créatrice de la pensée unificatrice.* Les concepts crées dans ce type de démarche sont des concepts formalisateurs, unificateurs, généralisateurs, simplificateurs (FUGS), tels qu'évoqués à propos de l'algèbre linéaire dans (Dorier 1997).

C'est typiquement une démarche où l'analogie entre les problèmes, les démarches de résolution, les calculs, joue un grand rôle. La réflexion de nature « méta » est intrinsèquement liée à cette formalisation. C'est l'aspect de la méthode axiomatique qui est devenu le plus courant dans la pratique actuelle des mathématiques.

Ce type de formalisation ne fait pas « perdre le sens » des objets mathématiques manipulés, bien que ce soit un reproche qui lui a été fait (voir aussi plus loin la citation de Patras). Il y a là création d'un sens nouveau, à un niveau supérieur, fondée sur plusieurs aspects :

- les *relations nouvelles* créées entre les différents domaines unifiés ;
- l'usage de *nouveaux registres symboliques*, plus faciles pour faire des calculs ou des raisonnements, et adaptés à tous les cas particuliers à la fois, les changements de registres symboliques étant très porteurs de sens (qu'on pense par exemple à ce qu'évoque la suite d'égalités $(x \mid y) = \Sigma\, x_i y_i = \langle X^*, Y\rangle = y(x) = \int x(t)y(t)\, dt$ dans le cadre du formalisme des espaces de Hilbert) ;
- la création de *représentations mentales plus efficaces* car variées mais liées entre elles (la « géométrisation » de l'analyse fonctionnelle, par exemple).

Ce processus d'unification *organise* autrement des connaissances antérieures, et cette organisation est plus riche par les liens nouveaux et les registres nouveaux qu'elle offre.

A titre d'exemples de ce processus de formalisation par unification, on peut d'abord citer deux thèmes qui ont donné lieu à une étude didactique du point de vue de la transposition.

(a) La création de l'algèbre linéaire, unifiant les règles de calcul et les problématiques linéaires rencontrées dans la résolution des systèmes linéaires, la géométrie vectorielle de l'espace et de la physique, les transformations linéaires, les calculs avec les matrices et les déterminants, les démarches de l'analyse fonctionnelle (des équations aux dérivées partielles linéaires aux opérateurs dans des espaces de dimension infinie). Pour plus de détails, je renvoie à (Dorier 1997).

(b) La création de la topologie générale par Fréchet et Hausdorf est un autre exemple, unifiant les concepts topologiques de l'espace géométrique n-dimensionnel et certaines démarches concernant la convergence des fonctions (Bridoux 2011).

(c) L'évolution historique de la théorie des groupes est aussi typique de ce type de formalisation faisant intervenir des concepts de type FUGS. Pour ce point, je renvoie à la contribution de T. Hausberger dans le présent groupe de travail, et à sa bibliographie.

2. Questions didactiques

La prise en compte en didactique de ce deuxième processus de formalisation est sans doute moins malaisée que pour le précédent. Mais elle comporte le risque de donner lieu à un effet Jourdain généralisé qui rende illusoire l'appropriation de la démarche par les élèves, faute de vraie problématique (« voici 10 objets ; je vous dis : ce sont des groupes »).

Elle comporte aussi des difficultés didactiques très particulières : il n'y a pas toujours de bons problèmes d'introduction (pas de situation fondamentale, difficulté à faire jouer la dialectique outil-objet), ce qu'on doit dévoluer aux élèves est alors « l'envie d'unifier » pour forger des savoirs généraux dont l'utilité est nécessairement, pour un temps, différée, bien plus que « l'envie de résoudre un problème ». On se situe donc à un autre niveau, *les leviers à trouver ne vont plus relever nécessairement d'un processus d'accomodation à un milieu ; les enjeux culturels et réflexifs (méta) vont y être plus importants* (Rogalski 1995).

Enfin, une transposition dans les classes de ce processus de formalisation par unification impose des contraintes extrêmement fortes de temps et d'organisation des contenus (pour unifier, il faut avoir vu suffisamment de domaines différents à unifier), ainsi qu'une mise en valeur des enjeux par une *ébauche de réflexion épistémologique* sur les avantages de l'unification formelle, en particulier par utilisation de changements de cadres et de points de vue. Il faut articuler la formalisation unificatrice et son réinvestissement dans les domaines particuliers sur lesquels elle s'est bâtie, avec gains manifestes. Sinon, bien sûr, le danger d'incompréhension totale par les étudiants du jeu auquel on joue est très grand.

De ce point de vue, enseignants et étudiants ne se situent pas sur le même plan : les premiers ont la possibilité de se référer à ces nombreux cas particuliers pour soutenir le sens, les seconds n'ont pas cette possibilité. C'est par exemple ce que dit F. Patras dans à propos de la géométrie des quadriques unifiée et généralisée dans diverses théories :

> Il n'est pas étonnant que les étudiants qui abordent l'étude des quadriques par l'intermédiaire de ces théories sophistiquées aient l'impression d'être confrontés à un corpus de formules et définitions dont l'esprit leur échappe. Elles font figure de thèmes imposés arbitrairement, au nom d'une cohésion architectonique qui les dépasse. (Patras 2001)

On sait bien depuis (Robert et Robinet 1989) qu'il en est de même pour l'algèbre linéaire (nous y reviendrons plus loin).

Dès lors, la question de la nécessité d'utiliser le « méta » dans l'enseignement de concepts FUGS semble incontournable. Il s'agit d'éclairer des enjeux non habituels, de changer les contrats, de faire comprendre le(les) *pourquoi* de concepts assez abstaits. Faute de bons problèmes d'introduction pouvant tenir lieu de situations fondamentales, on peut organiser des *problématiques* (les problèmes viennent avant les concepts abstraits qui les résolvent), que les étudiants ne pourront sans doute pas aborder par eux-mêmes, mais qui, moyennant un discours méta de l'enseignant et l'organisation d'activités métas pour les étudiants, peuvent *faire comprendre où on va, quels problèmes on a en vue, de quelles généralisations on a besoin, de quels changements de points de vue, quels nouveaux outils apparaissent ainsi, quels nouveaux problèmes plus difficiles on peut ainsi aborder*. Pour cet aspect, les convergences avec les interrogations de la contribution de T. Hausberger au présent groupe de travail sont patentes.

Pour plus de précisions, je renvoie au livre cité sur l'algèbre linéaire (Dorier 1997), où l'exemple de l'ingénierie de Lille, reposant sur ces idées, est traité en détail. Voir aussi Rogalski (1995) et Rogalski (2011). Pour les problèmes posés par l'enseignement « frontal » du formalisme en topologie, on peut consulter (Bridoux 2011).

IV. LA FORMALISATION PAR SIMPLIFICATION LOCALE : ABANDON D'INFORMATIONS, DIALECTIQUE PARTICULIER/GENERAL, « DENOMINATION »

1. *Analyse de ce processus*

Un troisième processus de formalisation, différent des deux précédents, est celui qu'on trouve dans l'activité mathématique de tous les jours, pour résoudre des « petits » problèmes (voire parfois des gros !), trop touffus, trop complexes pour être résolubles sans simplification. Ce que fait très communément le mathématicien devant un tel problème est d'*abandonner* *volontairement de l'information* ; pas n'importe laquelle, celle dont une analyse du problème montre qu'elle est inutile, voire nuisible car cachant une simplicité sous-jacente. Ce faisant, il passe à *un problème plus général*, dont la structure est plus claire, et qui est ainsi plus facile à résoudre. Et pour se donner une idée de la solution, il n'hésite pas alors à reparticulariser le problème, mais sous une forme plus simple que l'énoncé initial. Cette pratique assez répandue pourrait s'appeler *l'axiomatisation locale*. Un mathématicien comme G. Choquet était expert de cette démarche : après avoir réfléchi à un problème qu'on lui posait, il démarrait souvent par : « définissons la notion truc par… ; le problème se réécrit alors … ».

Ce processus de formalisation par simplification-généralisation a très souvent recours à une *dénomination systématique* de divers éléments « concrets » du problèmes, cette dénomination permettant de voir immédiatement qu'on est passé à un problème général, que ces éléments pourraient être remplacés par d'autres du même type sans altérer la *structure* du problème. Cette procédure de dénomination va permettre de raisonner sur des symboles d'un niveau d'abstraction supérieur à ceux des objets qu'on a ainsi symbolisés.

Certaines idées générales dirigent le mathématicien engagé dans cette méthode d'axiomatisation locale pour résoudre un problème :

- un problème n'est jamais isolé, il fait partie d'une classe de problèmes ;
- il y a intérêt à concentrer une trop grande multiplicité de paramètres ;
- il est nécessaire d'alléger les représentations mentales des techniques ;
- il est plus efficace de raisonner ou de calculer sur des symboles que sur des objets « concrets » ; cela renvoie au rôle de l'écrit en mathématiques, et aux bouleversements qu'a apporté aux mathématiques la « révolution symbolique » (Serfati 2006 et 2009).

Cette démarche d'axiomatisation locale peut très bien s'articuler – par une sorte de « modélisation » - avec le processus d'unification cité précédemment, si celui-ci est déjà fait : par exemple, interpréter un problème concret comme étant la recherche des solutions d'une équation T(x) = y, dans des espaces vectoriels adéquats avec une application linéaire T adaptée, c'est utiliser les résultats d'une unification antérieure pour modéliser un problème concret dans une théorie abstraite. Voir une analyse détaillée à ce propos dans Rogalski (2001).

2. *Exemples*

Voici un exemple très simple et en même temps très frappant de ce processus de formalisation par simplification locale, au niveau de la première année d'université. Si on se propose d'étudier la suite récurrente définie par

$$u_1 = 1,\ u_{n+1} = [(n + \ln n)/(n + \cos n) + u_n]^{1/2},$$

l'analyse fait deviner que seul le comportement pour n grand du terme $(n + \ln n)/(n + \cos n)$ va compter, en même temps qu'elle fait prendre conscience que la forme compliquée de ce terme est un obstacle à la résolution du problème … qui n'en est plus un dès qu'on imagine que le problème aurait la même structure si on y remplaçait ce terme par une suite quelconque ayant même comportement pour n grand. Tout cela amène à *dénommer* le terme compliqué, à poser $a_n = (n + \ln n)/(n + \cos n)$, et à *étudier un problème plus général*, la suite récurrente $u_0 = 1$, $u_{n+1} = [a_n + u_n]^{1/2}$, avec l'hypothèse que a_n tend vers 1, ou même vers a, quand n tend vers l'infini. L'étude du cas particulier classique $a_n = a$ pour tout n donne l'idée de s'y ramener à partir d'un certain rang N, celui à partir duquel on a $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$, etc. On peut même *généraliser* encore plus le problème en étudiant les suites de la forme $u_{n+1} = f(a_n, u_n)$, en précisant, au fur et à mesure des études de cas particuliers, les propriétés de la fonction *f* à supposer.

3. Commentaires didactiques

Faire passer auprès des élèves cette méthode de formalisation simplificatrice semble indispensable, d'une part pour les rendre capables de résoudre des problèmes, de l'autre pour qu'ils acquièrent une idée raisonnable de ce que sont vraiment les pratiques en mathématiques. Nous partageons le point de vue de Patras dans lorsqu'il écrit :

> Pour que les mathématiques vivent, il faut qu'elles puissent être facilement communiquées aux novices […]. En d'autre termes, le savoir mathématique est aussi pour beaucoup un savoir faire dont les règles sont celles d'une technique tout autant que d'une connaissance formelle. Les manuels conçus selon les règles de la méthode d'exposition structuraliste laissent souvent un sentiment d'incomplétude : le lecteur a bien compris les ressorts de la méthode, mais serait bien incapable de la faire fonctionner dans l'étude de situations concrètes. (Patras 2001)

Il y a là un enjeu « méta » dans l'enseignement, qui tourne autour de l'enseignement de méthodes et l'utilisation de problèmes suffisamment riches, donc difficiles, pour apprendre quelque chose aux élèves. Des idées générales de résolution existent dans les pratiques expertes des mathématiciens, il est certainement nécessaire d'en faire passer un peu aux élèves si on veut qu'ils soient en mesure d'aborder des problèmes intéressants. La question de l'enseignement de méthodes de résolution a donc un rapport étroit avec ce troisième processus de formalisation. Pour les problèmes soulevés par l'enseignement de méthodes, je renvoie à Robert, Rogalski et Samurcay (1987), au chapitre correspondant de CI2U (1990) et à Schoenfeld (1980).

De même, les démarches générales de changement de cadres, de registres, de points de vue, développées par R. Douady, R. Duval et présentées dans Rogalski (2001) sont au cœur des activités de formalisations locales dans la résolution de problèmes.

Mais les programmes actuels du second degré, et plus encore les commentaires qui les accompagnent, vont à l'encontre de cet objectif : il est interdit de généraliser, de formaliser, de mettre des paramètres ! Quant au supérieur, la position extrêmement fréquente des enseignants est de ne pas dire un mot de ces choses : seuls les bons étudiants finiront par deviner tout seuls qu'il y a en mathématiques des démarches privilégiées extrêmement fructueuses.

Ainsi, il y a une réflexion *a posteriori* à faire sur les difficultés rencontrées et les méthodes de résolution qui ont marché dans les exercices ou problèmes. Comment organiser cette réflexion des élèves, identifier les raisons pour lesquelles ils ne la font pas spontanément, savoir pourquoi les maîtres la mettent rarement en scène, sont de vrais problèmes didactiques.

On trouvera dans Mac Aleese et al. (2009) un essai d'aborder ces problèmes à travers la formation des moniteurs de mathématiques : formation à l'enseignement des mathématiques à l'université pour des étudiants en thèse qui ont 64 heures de travaux dirigés à assurer. On met en évidence avec eux, à travers des réflexions sur divers exercices, l'importance qu'il y a à faire passer auprès des étudiants (et quel discours tenir, quels types d'exercices choisir, pour ce faire – et aussi quelle gestion, mais c'est un autre problème) certaines idées générales sur l'activité de résolution de problèmes, dont certaines s'appuient sur ce thème des formalisations locales : donner des noms ; changer de cadre ; changer de niveau de conceptualisation, reconnaître des structures générales, des analogies, effectuer des transferts ; traduire des propriétés ; dégager des méthodes ; etc.

V. CONCLUSION

La prise en compte dans l'enseignement de moments de formalisation, soit pour résoudre des problèmes présents, par simplification locale ou par élucidation du vague de notions trop communes, soit pour développer une culture d'unification et de simplification qui donne de nouveaux outils de résolution, est nécessaire à une bonne formation mathématique. Un travail didactique à ce propos ne peut éviter de se pencher sur les pratiques expertes des mathématiciens et étudier de possibles transpositions.

De plus, cette question de la formalisation ne peut manquer d'avoir des retombées du côté de la preuve et de la rigueur. On peut motiver la précision nouvelle à donner à une notion qui semblait aller de soi par une interrogation sur l'exactitude d'une preuve dont elle paraît être un maillon faible. Inversement, la formalisation d'un calcul, d'un raisonnement, est aussi un moyen de contrôle en résolution de problème, par l'analyse de leurs formes : on peut voir qu'on a démontré trop - la même preuve, sur des objets différents, donnerait un résultat qu'on sait être faux. Comme il est constaté dans Durand-Guerrier et Arsac (2003), c'est souvent par leurs connaissances mathématiques que les mathématiciens contrôlent leurs preuves ; ce moyen de contrôle, à travers un certain type de formalisation, pourrait être, au moins dans certains cas, aussi dévolué aux étudiants.

REFERENCES

Arsac G. (1987) L'origine de la démonstration : essai d'épistémologie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 8(3), 267-312.

Bridoux S. (2011) *Enseignement des premières notions de topologie à l'université – Une étude de cas*. Thèse doctorat. Université Paris – Diderot.

CI2U (1990) *Enseigner autrement les mathématiques en Deug A première année*. Brochure de la Commission Inter-IREM Université, IREM de Lyon et de Paris 7.

Dorier J.-L. (Ed.) (1997) *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Durand-Guerre V., Arsac G. (2003) Méthodes de raisonnement et leurs modèles logiques. Spécificité de l'analyse. Quelles implications didactiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 23(3), 295-342.

Lakatos I. (1976) *Preuves et réfutations*. Paris : Hermann.

Lebesgue H. (1915) *La mesure des grandeurs*. (Nouvelle édition 1975). Paris : Albert Blanchard.

Legrand M. (1990) Un changement de point de vue sur l'enseignement de l'intégrale. In Commission Inter-IREM université CI2U (Ed.) (pp. 205-220) *Enseigner autrement les mathématiques en Deug A première année.* IREM de Lyon et de Paris 7.

Lehmann D. (1989) *Communication au GREM*. Note multigraphiée.

Mac Aleese J., Pian J., Robert A., Rogalski M., Viennot L.(2009) *Propositions pour une formation des moniteurs en mathématiques. Indications sur la formation des moniteurs de physique*. Document pour la formation des enseignants, Paris : Irem de l'Université Paris-Diderot

Ouvrier-Buffet C. (2003) *Construction de définitions / construction de concept : vers une situation fondamentale pour la construction de définitions en mathématiques*. Thèse de doctorat. Laboratoire Leibniz, Grenoble. http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00005515/en/

Ouvrier-Buffet C. (2006) Exploring mathematical definition construction processes. *Educational Studies in Mathematics* 63(3), 259-282.

Patras F. (2001) *La pensée mathématique contemporaine*. Paris : PUF

Polya G. (1965) *Comment poser et résoudre un problème* (2e édition 1965) Nouveau tirage 2007.

Robert A., Robinet J. (1989) Quelques résultats sur l'apprentissage de l'algèbre linéaire en première année de Deug. *Cahiers de didactique des mathématiques* 53. IREM de Paris 7.

Robert A., Rogalski J., Samurcay R. (1987) Enseigner des méthodes. *Cahiers de didactique des mathématiques 38*. IREM de Paris 7.

Rogalski M. (1995) Que faire quand on veut enseigner un type de connaissances tel que la dialectique outil-objet ne semble pas marcher, et qu'il n'y ait apparemment pas de situation fondamentale ? L'exemple de l'algèbre linéaire. *Séminaire Didatech* 169, 127-162. Grenoble : Université Joseph Fourier.

Rogalski M. (1997) Les processus de formalisation en mathématiques, problèmes didactiques. *La Lettre de la Preuve*. www.lettredelapreuve.it

Rogalski M. et al. (2001) *Carrefours entre analyse algèbre géométrie*. Paris : Ellipses.

Rogalski M. (2001) Les changements de cadre dans la pratique des mathématiques et le jeu de cadres de Régine Douady. *Actes de la journée en hommage à Régine Douady* (juin 2001), Publication de l'IREM de Paris 7.

Rogalski M. (2011) *Une expérience d'enseignement de l'algèbre linéaire s'appuyant sur les analyses épistémologiques et didactiques des difficultés de cet enseignement*. Séminaire de formation de l'Université Fédérale de Sergipe, Brazil.

Schoenfeld A. H. (1980) Teaching Problem-Solving Skills. *American Mathematical Monthly* 87(10), 794-805.

Serfati M. (2006) La constitution de l'écriture symbolique mathématique. Symbolique et invention. *Gazette des Mathématiciens* 108, 101-118.

Serfati M. (2009) La constitution de la pensée symbolique mathématique. Une étude épistémologique. *Actes du Colloque Espace Mathématique Francophone* 2009.

Verley J.-L. (1986) La controverse des logarithmes des nombres négatifs et imaginaires. *Fragments d'histoire des mathématiques, tome 1*. Paris : Publication de l'APMEP 041.

MOBILISATION D'UNE PENSEE REFLEXIVE CHEZ DES FUTURS ENSEIGNANTS DU PRIMAIRE EN EDUCATION MATHEMATIQUE[1]

Anne ROY[*]

Résumé – Notre étude porte sur la mobilisation d'une pensée réflexive chez des futurs enseignants lorsqu'ils participent à des discussions à visée philosophique (DVP) relatives à l'éducation mathématique. Notre objectif consiste à vérifier si nos interventions lors des DVP amènent les futurs enseignants à mobiliser des habiletés de pensée réflexive de niveau supérieur en regard de l'éducation mathématique. À l'aide d'une typologie sur les types de pensée réflexive (Roy 2005), nous avons analysé les habiletés de pensée émergentes des discussions et des entrevues. Ce texte illustre comment nos interventions au sein des DVP aide les futurs enseignants à mobiliser une pensée davantage réflexive en éducation mathématique.

Mots-clefs : pensée réflexive, formation, enseignement, mathématiques

Abstract – Our study relates to the mobilization of a reflexive thought in future teachers of the primary education when they take part in philosophical discussions (DVP) about mathematical education. Our objective consists to verify if our interventions in the DVP lead the future teachers to mobilize more reflexive skills in mathematical education. Using a typology on the reflexive types of thought (Roy 2005), we analyzed the emergent skills of thought of the speech into the discussions and the interviews. This text illustrates how our interventions within the DVP help the future teachers to mobilize more reflexive thought in mathematical education.

Keywords: reflexive thought, formation, teaching, mathematics

I. INTRODUCTION

Plusieurs futurs enseignants du primaire et de l'adaptation scolaire éprouvent un inconfort à justifier didactiquement et mathématiquement leurs choix d'activités mathématiques (Morin 2003 ; Roy 2010). En fait, une majorité se réfère à ses anciennes représentations de l'enseignement des mathématiques pour justifier ses pratiques éducatives (Arseneault 2010 ; DeBlois 2010 ; Lemoyne 2010). Dans ce texte, nous tenterons de montrer que l'intégration de discussions à visée philosophique (DVP) relatives à l'éducation mathématique en formation à l'enseignement des mathématiques pourrait favoriser la mobilisation d'habiletés de pensée réflexive de niveau supérieur chez des futurs enseignants du primaire. Pour ce faire, nous mentionnerons dans l'ordre les points suivants : les fondements théoriques de notre étude, la question de recherche, la méthodologie utilisée et les résultats obtenus.

II. FONDEMENTS THEORIQUES

Notre étude se structure sur la base de deux éléments théoriques : une approche philosophique et didactique en mathématiques et une typologie des types de pensée réflexive en éducation mathématique.

1. L'approche philosophique et didactique en mathématiques

L'approche que nous utilisons est fondée sur une épistémologie de l'apprentissage socioconstructiviste et une philosophie de l'éducation pragmatiste où le questionnement sur les pratiques éducatives des futurs enseignants en mathématiques s'est effectué dans le

[1] Étude subventionnée par le Fonds Institutionnel de recherche de l'Université du Québec à Trois-Rivières.
[*] Université du Québec à Trois-Rivières – Canada – anne.roy@uqtr.ca

© Roy (2012). Développement d'une pensée réflexive chez des futurs enseignants du primaire en éducation mathématique. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21[e] siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT3, pp. 514–522). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

contexte des communautés de recherche philosophiques à l'aide de DVP en mathématiques. En fait, l'approche utilisée est une adaptation à la formation des maîtres de la *Philosophie pour enfants* en mathématiques (PPEM) développée au Québec en 1993 pour des élèves de la fin du primaire et du début du secondaire par Daniel, Lafortune, Pallascio et Sykes (1996). La PPEM est d'ailleurs inspirée des principes pédagogiques inhérents à la *Philosophie pour enfants* (PPE), lesquels mettent en valeur qu'un apprentissage significatif passe par un processus d'apprentissage social et interpersonnel qui engage le développement global de l'apprenant et ce, en misant sur la construction personnelle du sens, la motivation intrinsèque et la prise en compte de l'expérience de l'apprenant.

La démarche de l'approche didactique et philosophique en mathématiques utilisée dans notre étude est basée sur la méthode utilisée en PPEM. Elle inclut toutefois une étape évaluative pour examiner le type de pensée réflexive chez les participants au début du projet et elle intègre des aspects didactiques pour permettre une réflexion philosophique autour d'une problématique éducative en mathématiques. Elle se déroule selon les huit étapes suivantes :

1) L'évaluation préalable du type de pensée réflexive
2) La lecture d'une mise en situation
3) La formulation et la collecte des questions soulevées par les participants
4) La réflexion individuelle avant la discussion de groupe
5) La discussion à visée philosophique en communauté de recherche
6) La planification d'une situation d'enseignement-apprentissage
7) La discussion pédagogique en communauté de recherche philosophique
8) La réflexion individuelle après la discussion pédagogique.

2. *Une typologie des types de pensée réflexive en éducation mathématique*

Les cinq types de pensée réflexive développés dans le cadre de notre recherche doctorale (Roy 2005) tiennent compte du contenu et de la forme d'une pensée complexe.

Le contenu d'une pensée complexe a été analysé à l'aide du modèle épistémologique des idéologiques de l'éducation mathématique de Paul Ernest (1991) en termes des cinq représentations idéologiques suivantes

1) dualisme absolu
2) multiplicisme absolu
3) relativisme absolu séparé
4) relativisme absolu connecté
5) relativisme faillible.

En regard de la vision des mathématiques, qui est un élément du modèle d'Ernest, nous offrons, dans ce texte, une courte synthèse pour définir chaque représentation idéologique :

1) Dualisme absolu : les mathématiques sont des vérités absolues qui proviennent d'une autorité
2) Multiplicisme absolu : les mathématiques sont des vérités non questionnées, appliquées de multiples façons en fonction de considérations personnelles, utilitaristes ou pratiques
3) Relativisme séparé absolu : les mathématiques sont absolues et basées uniquement sur des règles logiques
4) Relativisme connecté absolu : les mathématiques sont absolues mais évoluent grâce à la compréhension de l'être humain par rapport au savoir mathématique
5) Relativisme faillible : les mathématiques sont une construction sociale constamment en évolution, faillibles et interreliées aux valeurs d'une société démocratique.

La forme de la pensée a été analysée à l'aide de la théorie de Matthew Lipman (1995) en termes d'habiletés de pensée complexe associées aux modes de pensée critique, créatif, responsable et métacognitif. Il est à noter que les modes critique, créatif et responsable sont basés sur la théorie de Lipman, tandis que le mode métacognitif a été étudié dans le cadre de nos travaux de recherche à partir des travaux de Pallascio, Daniel et Lafortune (2004). Voici d'ailleurs une courte définition des quatre modes de pensée complexe :

1) le mode critique facilite la recherche de validité
2) le mode créatif contribue à la recherche du sens
3) le mode responsable s'attarde à la recherche éthique pour mieux savoir-vivre ensemble
4) le mode métacognitif s'attarde à la prise de conscience des actes mentaux.

À partir de ces cadres conceptuels (Ernest et Lipman), une première matrice d'une pensée complexe et réflexive a été élaborée afin de réaliser une analyse qualitative homogène pour les cinq représentations idéologiques d'Ernest. Cette matrice a nécessité une analyse itérative et une validation inter-juges (Miles et Huberman 2003). À partir de cette matrice, cinq grilles d'habiletés de pensée ont été constituées pour chaque type de pensée réflexive à l'aide des manifestations émergentes du discours des futurs maîtres. Après une analyse rigoureuse de ces grilles, cinq types de pensée réflexive sont ressortis avec différents degrés de réflexion en lien avec des formes d'habiletés langagières et ce, pour chaque mode de pensée. Le degré de réflexion repose principalement sur la forme de justification utilisée dans le discours des participants pour justifier leur choix éducatifs en mathématiques.

Voici une brève définition, issue du mode critique, pour chaque type de pensée réflexive :

Une pensée *a-réflexive* s'énonce sur le plan du contenu sur la base d'une autorité ou de croyance absolue et sur le plan de la forme à l'aide d'énoncé affirmatif.

Une pensée *non-réflexive* s'énonce sur le plan du contenu sur la base de considérations personnelle, pratique, physique ou utilitariste et sur le plan de la forme à l'aide d'énoncé descriptif.

Une pensée *pré-réflexive* s'énonce sur le plan du contenu sur la base de considération logique et sur le plan de la forme à l'aide d'énoncé explicatif.

Une pensée *quasi-réflexive* s'énonce sur le plan du contenu sur la base de considérations logique et humaine et sur *le* plan de la forme à l'aide d'énoncé justificatif.

Une pensée *réflexive* s'énonce sur le plan du contenu sur la base de considérations logique, humaine et sociale et sur le plan de la forme à l'aide d'énoncé justificatif d'ordre social.

III. QUESTION DE RECHERCHE

La question principale qui a guidé notre étude se formule comme suit : « Est-ce que les stratégies langagières, basées sur la forme des habiletés de pensée[2], utilisées dans les interventions lors des DVP favorisent la mobilisation d'habiletés davantage réflexives chez les futurs enseignants du primaire dans le contexte de l'éducation mathématique ? »

La sous-question suivante découlait de la question principale : « Est-ce que le futur enseignant du primaire qui a développé des habiletés réflexives de niveau supérieur dans le

[2] Les stratégies langagières utilisées dans l'étude découlent directement de la forme des habiletés langagières associées à chaque type de pensée réflexive que nous avons élaborées dans notre doctorat. Les stratégies langagières sont donc basées sur des énoncés descriptifs, explicatifs et justificatifs. Nous n'avions d'ailleurs jamais vérifié le lien entre ces stratégies langagières et les habiletés réflexives mobilisées lors des DVP.

cadre de DVP en mathématiques élabore alors des situations d’enseignement-apprentissage porteuses de signifiance pour les élèves du primaire ? »

IV. METHODOLOGIE

L’étude a eu lieu de septembre 2008 à février 2009 avec un groupe de sept futurs enseignants qui se sont inscrits volontairement à des ateliers pour développer des compétences professionnelles en éducation mathématique à l’aide d’une approche philosophique et didactique en mathématiques. Bimensuellement, le groupe d’étudiants-maîtres venait participer à une DVP sur un thème mathématique. Les concepts qui ont été abordées en communauté de recherche philosophique sont le hasard, l’infini et les perspectives. Chaque discussion a duré approximativement une heure. Une analyse qualitative a été effectuée à partir du discours des futurs enseignants pour examiner le type de pensée réflexive que ces derniers mobilisent lorsqu’ils sont amenés à discuter philosophiquement sur leurs pratiques éducatives en mathématiques. La collecte des données a été assurée par l’enregistrement vidéo de cinq DVP, la rédaction de courriel après chaque discussion et l’enregistrement audio d’entrevues individuelles à la fin du projet avec cinq participants. Comme matériel, pour initier les discussions, nous avons opté pour la lecture d’une histoire élaborée dans le cadre de notre recherche doctorale (Roy 2005).

Pour répondre à notre question principale de recherche, il a d’abord fallu analyser au début de la recherche le type de pensée réflexive utilisé régulièrement par chaque participant. Par la suite, pour vérifier si les stratégies langagières utilisées lors des DVP favorisaient la mobilisation d’habiletés davantage réflexives chez les participants, nous avons étudié les verbatim de cinq DVP. L’analyse des entrevues individuelles réalisées avec cinq participants a ensuite permis de vérifier si ces derniers percevaient leurs nouvelles habiletés réflexives dans leurs activités éducatives en mathématiques.

V. RESULTATS

À la lumière de nos analyses, nous sommes portés à répondre affirmativement à la question principale, à savoir que les stratégies langagières, basées sur la forme des habiletés de pensée, utilisées dans les interventions lors des DVP favorisent la mobilisation d’habiletés davantage réflexives chez les futurs enseignants du primaire dans le contexte de l’éducation mathématique. Néanmoins, dans le cadre de notre étude, la sous-question reste en suspens puisque nous n’avons pas réussi à démontrer que ces habiletés réflexives permettent aux futurs enseignants de planifier de meilleures situations d’enseignement-apprentissage en mathématiques. Pour le moment, nous pouvons seulement confirmer que l’utilisation de stratégies langagières basées sur la forme des habiletés de pensée lors des DVP permet la mobilisation d’une pensée réflexive de niveau supérieur chez les participants dans le domaine de l’éducation mathématique.

Dans la partie des résultats, nous présenterons des extraits de verbatim qui montrent que le futur enseignant a mobilisé des habiletés davantage réflexives dans le domaine de l’éducation mathématique grâce aux stratégies langagières utilisées lors des DVP. Pour ce faire, en regard de chaque type de pensée réflexive, nous présenterons d’abord des extraits du discours provenant des DVP qui font état des habiletés de pensée au début de l’étude. Par la suite, nous tenterons de mettre en lumière dans l’espace de ce texte, la mobilisation de nouvelles habiletés réflexives chez des futurs maîtres (FM) par rapport aux interventions de l’animateur (A) ou de d’autres participants (P) en explicitant les stratégies langagières utilisées dans les interventions lors des DVP. Notre analyse sera ensuite corroborée par des extraits du discours provenant des entrevues qui révèlent l'apport des DVP dans la perception des futurs maîtres concernant leurs habiletés réflexives dans le domaine de l'éducation mathématique.

Type de pensée a-réflexive

Le type de pensée *a-réflexive* s'est manifesté, au début du projet, dans le discours provenant d'une DVP sur le hasard comme suit :

FM1 : Le hasard je n'y crois pas, puis nécessairement je crois au destin étant donné que je crois en Dieu c'est pour cela que je ne crois pas au hasard. (*Fm1 utilise des énoncés affirmatifs pour justifier la non existence du hasard*).

A : Il faudrait que tu nous décrives le lien que tu fais entre le hasard et Dieu. (*Une description est demandée.*)

FM1 : C'est certain que j'ai des choix à faire dans ma vie, ce n'est pas que Dieu va me dire quoi faire, ce n'est pas cela. J'ai des choix à prendre, mais je sais que Dieu est comme au contrôle de toute chose qu'il va me guider. Donc, s'il m'arrive quelque chose dans ma vie, je ne me dis pas que c'est le fruit d'un hasard, non, c'est que j'avais des choses à apprendre à travers cela. Aussi, cela peut être également le fruit de mes décisions. *(Fm1 utilise des énoncés descriptifs pour justifier son point de vue.)*

A : En quoi cette façon de voir fait en sorte que le hasard n'existe pas ? (*Une explication est demandée.*)

FM1 : Oui, mais si je joue à un jeu de loto, oui dans un sens, je vais croire au hasard. Par exemple, si je joue à un jeu de bingo avec vous et que je ne gagne pas je ne dirais pas : c'est Dieu qui a fait en sorte que je ne gagne pas, ce n'est pas comme cela. (*Fm1 utilise des énoncés descriptifs pour justifier la non-existence du hasard.)*

P2 : Donc, il y a des exceptions à la règle ? (*Une explication est demandée.*)

FM1 : Bien, c'est pour cela que je me suis beaucoup questionné parce que je me suis dit : où arrête le hasard ? Quand je songe à la vie en général, non mais, quand je pense aux mathématiques, c'est comme si le concept de hasard existe en quelque sorte. Je dois clarifier ma pensée. *(Fm1 utilise des énoncés descriptifs pour réfléchir à l'existence du hasard en mathématiques mais il ne parvient pas à fournir une explication sur l'exception à la règle.)*

Extrait du discours provenant de l'entrevue

A : Au niveau de tes habiletés de pensée, est-ce que tu vois une différence entre aujourd'hui et avant qu'on fasse le projet ?

FM1 : La philosophie m'a aidé à faire plus de liens avec ce que j'ai vécu durant la session, d'essayer de clarifier ma pensée, de mettre des mots. Puis ça, c'est pour les habiletés de pensée. Je suis plus capable de me questionner ou de comparer ou surtout d'utiliser ce que les autres disent, de profiter des autres là, mais, j'ai réalisé que c'est tellement important de discuter avec les autres parce que souvent, je n'arrivais pas à mettre des mots sur ce que je pensais. Puis là, le fait qu'ils le disent, j'étais comme : ah oui, c'est ça que je voulais dire, puis là, ça m'a aidée dans le fond. C'était plus avec les autres que j'ai réussi à mieux penser, c'est comme grâce aux autres. Bien, je me disais tout le temps : « ah, c'est ça que tu veux dire » ou j'essayais de reformuler parce que dans ma tête ce n'était pas clair qu'est-ce qu'ils disaient. Puis le fait de questionner puis de remettre dans mes mots ce qu'ils disaient, puis quand ce n'était pas correct, vu que je l'ai dit, les autres disaient : « non, ce n'est pas ça que je voulais dire » puis là bien… c'est comme ça que je clarifie ce que les autres disent.

A : Qu'est-ce que tu voulais dire à ce moment là ?

FM1 : Bien je trouvais ça difficile de tout le temps devoir poser des questions ou reformuler. C'est comme si j'étais lent à comprendre, mais dans un sens, c'est comme ça que j'apprends. Il faut que je prenne du temps pour comprendre. Si quelqu'un dit quelque chose, il faut que je fasse des liens. C'est en faisant aller mes méninges puis en essayant de faire plein de liens, puis essayer de comprendre, que c'est comme ça que j'apprends.

A : C'est depuis quand que tu compris ça ?

FM1 : Je pense que je l'ai appris en faisant la *philosophie pour enfants*, que pour apprendre il faut parler. Puis je suis content de l'avoir vécu parce que là maintenant, je peux faire un lien comme entre la théorie puis le concret. Quand on le vit. Un enfant apprend en parlant, là le fait de l'avoir vécu. Parce que maintenant je me sens un petit peu plus solide sur certains concepts de mathématiques qu'on a discutés. Puis les maths ce n'est plus quelque chose qui fait peur, c'est juste comme plaisant à découvrir.

Type de pensée non-réflexive

Le type de pensée *non-réflexive* s'est manifesté, au début du projet, dans le discours provenant d'une DVP sur le hasard comme suit :

FM2 : Je veux dire que le hasard existe, pour moi, dans les jeux. Je veux dire que, comme il dit, le groupe a travaillé pour avoir ce qu'ils ont mérité, mais si tu joues au bingo, tu ne peux pas te pratiquer à jouer au bingo, puis travailler pour jouer au bingo, puis gagner. (*Fm2 utilise des énoncés descriptifs pour justifier l'existence du hasard.*)

A : Est-ce que tu peux poursuivre ta réflexion et nous expliquer pourquoi tu penses que le hasard n'existe pas dans certains domaines ? (*Une explication est demandée.*)

FM2 : Moi je pense qu'il y a du hasard quand on gagne quelque chose, on pourrait gagner au bingo, on pourrait gagner à la loto, on ne peut pas gagner notre vie, on la travaille puis on arrive à certains buts. Il y a des circonstances qui font que l'on rencontre les bonnes personnes. Mais ce n'est pas du hasard, ce sont des circonstances. (*Fm2 commence à utiliser des énoncés explicatifs pour justifier l'existence du hasard dans le contexte du jeu.*)

Extrait du discours provenant de l'entrevue

A : Est-ce que tu as remarqué un changement, surtout en fonction de ce qu'on a vécu en philo avec tes habiletés de pensée ?

FM2 : Oui ! Oui ! Honnêtement, j'en ai eu un gros, là. C'est quand je dis mon opinion, puis que les autres disent : non, je ne pense pas ça, moi. Bien on dirait que ça venait me toucher personnellement. Je ne sais pas pourquoi. Puis ça je vous avais fait une réflexion parce que je pense, bien je ne sais pas pourquoi, j'ai essayé de creuser, puis j'ai trouvé que peut-être parce que moi-même j'ai de la difficulté à former mon opinion puis à le dire. Bien, quand je pense être sûr de ce que je pense, puis que je le dis, peut-être que ça ne fait pas mon affaire que quelqu'un d'autre vienne me confronter, me déstabiliser par rapport à ça. Mais là maintenant je porte une attention plus particulière, j'essaie de me regarder. Puis je suis plus capable maintenant. FM va me dire quelque chose, il va me dire non. … J'avais l'impression d'attaquer tout le temps, d'être sur mes gardes. Puis j'ai réalisé que dans le fond, non, il fallait que je sois ouvert puis que j'écoute parce que je pouvais aller chercher quelque chose d'autre, que je pouvais aller plus loin là-dedans au lieu d'être fermé. C'est vraiment ça. Avant je me sentais fermé quand quelqu'un venait me contredire. Puis maintenant, je pense que je suis rendu plus ouvert. Je suis capable de me dire que ça sert à quelque chose puis que ce n'est pas pour rien qu'il me l'a dit. J'essaie de voir qu'est-ce que l'autre pense, même des fois je vais poser des questions à d'autres personnes. Ça je ne l'aurais jamais fait avant. Jamais, jamais. Puis ce n'est pas pour mal faire, j'avais de la difficulté à le faire.

A : Ok, cela t'a permis d'être plus ouvert.

FM2 : Oui, je pense que c'est vraiment le mot.

A : Être capable de ne pas te sentir sur la défensive quand quelqu'un te parle.

FM2 : Bien j'y travaille encore là. Ça ne se fait pas du jour au lendemain. Mais, je le vois qu'il y a une progression là-dedans. Ça c'est vraiment dû à ça, avant j'étais vraiment là. Puis ce n'est vraiment pas pour mal faire, c'était bizarre, mais j'avais de la difficulté à prendre les idées. Ou quelqu'un qui me donne une idée. Bien je disais : voyons, il est plus fin que moi, pourquoi lui il l'a cette idée-là. Je vais rester fermé, moi aussi j'ai des idées. Bien non, maintenant je me dis que c'est bon d'avoir d'autres idées.

A : Pourquoi ?

FM2 : Pourquoi? Je veux des justifications, parce que ça va m'aider à mieux forger mon opinion. Ah oui, ça c'est vraiment ça.

A : Ça t'amène à vouloir des justifications.

FM2 : Oui.

A : Ok. Puis ça en ayant développé cette habileté-là, est-ce que tu vois aussi des changements dans tes suppléances que tu fais à l'école ?

FM2 : Bien par rapport à l'école, je trouve que c'est plus enrichissant bien sûr parce que si on arrête la conversation, on ne peut pas aller plus loin, on ne peut pas en savoir davantage. Puis à l'école, en tant que tel par rapport à la philo pour enfants, par rapport à ce que j'ai retenu de tout ça, c'est que je suis plus porté pendant mes suppléances à poser des questions, puis à les faire parler. Avant on dirait que je me disais : bon, je suis en suppléance. Des fois, tu peux rester comme dans le même moule. Puis là, je me dis : non, j'ai du temps, j'en récupère du temps en parlant. En discutant, on en gagne du temps. Puis maintenant, je suis plus porté à écouter comme il faut l'enfant, ce qu'il dit puis à ne pas donner de réponse. Bien il n'y a pas nécessairement de bonne réponse ou de meilleures réponses, mais tu peux avoir ton opinion.

A : Il n'y a pas de bonne ou de mauvaise réponse ?

FM2 : Non, bien c'est ça, puis cela je l'ai appris. Puis je suis moins gêné avec les enfants de leur demander, de les faire réfléchir. De pas donner... Comme en maths, telle chose c'est telle chose, non. J'ai plus tendance maintenant à qu'est-ce que vous en pensez. Oui cela m'a vraiment aidé, puis je veux en faire. La philo pour enfants ça m'a tellement intéressé que je veux en faire à mon tour.

Type de pensée pré-réflexive

Selon notre analyse, le type de pensée pré-réflexive s'est manifesté, au début du projet, dans le discours provenant d'une DVP sur le hasard comme suit :

FM3 : Par exemple, si j'y vais avec les jeux du hasard. Le loto 649, c'est sûr que si tu as deux billets et que j'en ai un, tu augmentes tes chances de gagner, mais c'est une combinaison qui fait que c'est une personne qui va gagner. (*Fm3 utilise des énoncés explicatifs pour justifier l'existence du hasard dans le contexte du jeu.)*

P4 : Pourquoi est-ce que l'on peut augmenter nos chances? (*Une justification est demandée.*)

P5 : Moi aussi je dis que l'on peut augmenter nos chances alors qu'avec le hasard tu ne peux rien faire, mais que justement on peut augmenter nos chances en achetant 100 billets de loto. (*P5 reprend les propos de FM3.*)

A : Mais je pense qu'il faudrait absolument définir qu'est-ce que c'est la chance. (*Un énoncé explicatif est demandé en termes de définition.*)

P6 : Qu'est-ce qui différencie la chance du hasard. Parce que moi je dis : Est-ce qu'il y a vraiment un jeu de hasard sans chance ? Il faut se demander aussi la question surtout lorsque l'on parle que dans un jeu de hasard tu as des chances de gagner ou de perdre. Les chances font parties du hasard mais le hasard fait-il partie des chances. Cela est une autre question. (*P6 est à la recherche d'une explication logique pour comprendre la différence entre le hasard et la chance.)*

FM3 : La chance ce serait comme une probabilité. Ton niveau de chance intervient dans les probabilités que tu as de gagner. C'est sûr si on fait un tirage et il y a neuf fois mon nom, puis il y a une fois le tien. (*Fm3 utilise des énoncés explicatifs pour justifier la chance de gagner.)*

P4 : Tu as plus de chances ? (*Une justification est demandée*).

FM3 : C'est sûr que si moi, j'achète mon billet de loto 649 à chaque semaine et que toi tu n'en achètes jamais, alors il y a plus de probabilités que moi je gagne, car moi je participe et toi tu ne participes pas. Ce ne serait pas un hasard que moi je gagne et toi non, car moi je paye deux dollars. (*Fm3 utilise des énoncés justificatifs pour justifier l'existence du hasard en termes de probabilités.*)

P2 : J'ai peut-être mal compris. Mais je ne comprends pas pourquoi que si tu joues à chaque semaine depuis dix ans tu aurais plus de chances de gagner que celle qui en a acheté un. Ils ne regardent pas l'ancienneté. (*Une justification est demandée.*)

FM3 : Non, c'est qu'elle, elle n'en achetait jamais alors que moi j'en achetais toujours. Mais si elle en achète une fois, on tombe égale lors de cette semaine. C'est sûr que si j'achète mille billets ce sont ces milles probabilités que je bloque pour tous les autres. Ma probabilité est plus élevée, car j'ai mille combinaisons possibles de gagner, mais cela reste un jeu de hasard. (*Fm3 utilise des énoncés justificatifs pour justifier l'existence du hasard en termes de probabilités.*)

Extrait du discours provenant de l'entrevue

A : Qu'est-ce que tu retiens le plus des DVP qu'on a eues en rapport avec les mathématiques ?

FM3 : Bien, ce que je retiens le plus c'est les habiletés de pensée. Bien la première partie, si on contredisait mes arguments, bien je le prenais personnel. Et ça venait comme atteindre mon intégrité même si c'était une question mathématique. Et ensuite, je prenais la contre-argumentation pour construire avec l'autre au lieu d'essayer de détruire l'argument de l'autre. Et c'est avec les habiletés de pensée que je pense, j'ai pris conscience de l'utilité de construire au lieu d'être comme en combat cognitif avec l'autre.

A : Comment tu vois les mathématiques maintenant, après avoir fait de la *philo pour enfants* en mathématiques ?

FM3 : Je les vois beaucoup moins fermées qu'avant. Je pourrais même voir une notion de plaisir dans les mathématiques.

A : Est-ce qu'il y aurait d'autres habiletés de pensée qui se sont manifestées depuis qu'on a fait l'expérimentation et le moment où on a fini nos rencontres ?

FM3 : Oui, analyser, c'est quelque chose que je ne faisais pas. Et comme je suis un très bon communicateur et que je suis capable d'influencer, avec plus d'aisance que les autres. J'ai une facilité à rendre l'autre de mon côté, qu'il soit d'accord avec moi. Bien j'utilisais toujours ça. Puis si je veux pousser plus loin mes apprentissages, bien j'ai vu qu'il faut que j'aille voir un peu plus loin que ça, puis analyser ce que l'autre dit : pourquoi il le dit, pourquoi moi je réponds ça, faire preuve de métacognition. Je le fais, mais pourquoi je le fais? Je pense que c'est quelque chose qui peut m'amener encore plus loin. En étant capable d'analyser les choses maintenant, je pense que je le faisais avant, je n'étais pas une cruche non plus, mais j'en n'étais pas conscient. Maintenant que j'en suis conscient, je peux m'analyser quand je le veux. Bien ça me permet de me dire : Oui, je ne suis pas parfait là-dessus, mais ce n'est pas grave, ça me permet de travailler puis de m'améliorer.

VI. CONCLUSION

En guise de conclusion, nous conviendrons que l'utilisation d'une approche didactique et philosophique en mathématiques s'avère être un moyen intéressant pour contribuer à mobiliser des habiletés davantage réflexives chez les futurs enseignants au primaire à l'égard de l'éducation mathématique.

Concernant l'enseignement en didactique des mathématiques, nous considérons sur la base des entrevues effectuées avec cinq des participants qu'une pratique réflexive dans un contexte de communauté de recherche philosophique en mathématiques pourrait être une voie prometteuse pour développer des compétences professionnelles dans le domaine de l'éducation mathématique. Par contre, nous recommandons que d'autres études soient menées sur le terrain, et ce, dans une perspective de didactique professionnelle pour étudier l'impact de DVP sur les pratiques enseignantes en mathématiques.

Concernant la recherche en didactique des mathématiques, nous soutenons que le développement des types de pensée devrait se concevoir en termes de profil de pratique enseignante. Autrement dit, il semble pertinent de poursuivre l'étude des types de pensée réflexive, mais dans une perspective plus globale où les travaux de recherche (Boutet 2004) sur les profils de pratique enseignante devraient être pris en compte pour enrichir la conception de modèles didactiques à mettre en place pour mieux soutenir le développement de compétences professionnelles chez les futurs enseignants dans le domaine de l'éducation mathématique. Enfin, il ne faut pas oublier la recherche collaborative en communauté de pratique qui permet d'établir des liens entre les chercheurs et les praticiens à propos du développement des connaissances dans l'enseignement-apprentissage des mathématiques.

REFERENCES

Arseneault C. (2010) Le spectre de la maîtresse d'école : conceptions et résistances au développement des compétences professionnelles. In Proulx J., Gattuso L. (Eds.) (pp. 121-124) *Formation des enseignants en mathématiques : tendances et perspectives actuelles*. Sherbrooke : Éditions du CRP.

Boutet M. (2004) *La pratique réflexive : un apprentissage à partir de sa pratique*. www.mels.gouv.qc.ca/reforme/Boite_outils/mboutet.pdf profil réflexif

Daniel M.-F., Lafortune L., Pallascio R., Sykes P. (1996) *Philosopher sur les mathématiques et les sciences.* Québec : Le loup de gouttière.

Deblois L. (2010) Développer une formation à l'enseignement : trois entrées possibles. In Proulx J., Gattuso L. (Eds.) (pp. 31-36) *Formation des enseignants en mathématiques : tendances et perspectives actuelles*.Sherbrooke : Éditions du CRP.

Ernest P. (1991) *The philosophy of mathematics education*. London : Falmer Press.

Lemoyne G. (2010) Les jeux de rôles dans le cadre de la formation des enseignants du primaire en mathématiques : une prise en compte de la complexité de la formation. In Proulx J., Gattuso L. (Eds.) (pp. 115-119) *Formation des enseignants en mathématiques : tendances et perspectives actuelles*. Sherbrooke : Éditions du CRP.

Lipman M. (1995) *À l'école de la pensée*. Bruxelles : De Boeck.

Miles M. B., Huberman A.-M. (2003) *Analyse des données qualitatives : Méthodes en sciences humaines.* Bruxelles : De Boeck.

Morin M.-P. (2003) *Enseigner les mathématiques au primaire : Le quoi ou le comment.* Mntréal : Éditions Bande Didactique.

Pallascio R., Daniel M.-F., Lafortune L. (2004) Une pensée réflexive pour l'éducation. In Pallascio R., Daniel M.-F, Lafortune L. (Eds.) (pp. 1-12) *Pensée et réflexivité : théories et pratiques*. Québec : Les Presses de l'Université du Québec.

Roy A. (2010) Engagement et solidarité pour le développement des compétences professionnelles nécessaires à l'enseignement des mathématiques au préscolaire-primaire et adaptation scolaire et sociale». Proulx J., Gattuso L. (Eds.) (pp. 37-40) *Formation des enseignants en mathématiques : tendances et perspectives actuelles*. Sherbrooke : Éditions du CRP.

Roy A. (2005). *Manifestations d'une pensée complexe chez un groupe d'étudiantes et étudiants-maîtres au primaire à l'occasion d'un cours de mathématiques présenté selon une approche philosophique.* Thèse de doctorat inédite. Université du Québec à Montréal, Canada.

DIMENSIONS HISTORIQUE ET CULTURELLE DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

Compte-rendu du Groupe de Travail n°4 – EMF2012

Renaud D'ENFERT* – Ahmed DJEBBAR** – Luis RADFORD***

I. INTRODUCTION

Le but de ce groupe de travail était de se pencher sur la question des dimensions historique et culturelle de l'enseignement des mathématiques en résonance avec le thème central du colloque EMF 2012 « Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le XXIe siècle ». Ceci a conduit notre groupe à mettre un accent particulier sur la place et le rôle de l'histoire des mathématiques et de leur enseignement dans la formation des enseignants et plus généralement dans les cursus universitaires, en proposant de décliner la réflexion autour des trois grandes questions suivantes :

1) Quels sont les fondements épistémologiques et didactiques qui sous-tendent l'introduction des dimensions historique et culturelle dans l'enseignement des mathématiques ?
2) Quelles approches didactiques sont pertinentes pour introduire des dimensions historique et culturelle dans l'enseignement des mathématiques ?
3) Comment la formation des enseignants peut-elle prendre en compte la question des dimensions historique et culturelle ?

Alors que la première question cherche à motiver une discussion autour des fondements conceptuels qui sous-tendent la prise en compte des dimensions historique et culturelle dans l'enseignement des mathématiques, la deuxième porte plutôt sur la nature des approches didactiques qui peuvent permettre d'arriver à introduire ces dimensions d'une manière effective dans l'enseignement. Enfin, la troisième est centrée sur une problématique un peu différente, sans pour autant être indépendante de la problématique définie par les autres questions : elle soulève en effet le problème des caractéristiques d'une formation des enseignants soucieuse de prendre en compte les dimensions historique et culturelle à l'étude.

Selon l'esprit des rencontres EMF, et afin de maximiser le temps des rencontres du groupe de travail, les participants ont été invités à lire, avant le colloque, les 13 contributions retenues et dont la liste figure à la fin de ce texte. Lors des rencontres du groupe, les auteurs ont fait un court rappel des points saillants de leur texte, pour initier les débats.

Le but de cette introduction n'est pas de faire un résumé de chacun de ces articles. Nous pensons qu'il est plus profitable de présenter une courte réflexion sur la problématique générale à la base du groupe de travail. Cette réflexion sera complémentée par des références aux discussions qui ont eu lieu au sein du groupe. Nous ne ferons donc qu'une allusion plutôt oblique aux travaux présentés, espérant que cette introduction permettra d'aider le lecteur à mieux comprendre ces travaux.

* École normale supérieure de Lyon, Institut français de l'éducation – France – renaud.denfert@ens-lyon.fr
** Université des Sciences et Technologies de Lille – France – ahmed.djebbar@wanadoo.fr
*** Université Laurentienne – Canada – lradford@laurentian.ca

© D'Enfert R., Djebbar A., Radford L. (2012) Dimensions historique et culturelle dans l'enseignement des mathématiques – *Compte-rendu du Groupe de Travail n°4.* In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT4, pp. 523–528). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

II. LA DIMENSION HISTORIQUE ET CULTURELLE

Bien qu'il semble y avoir consensus sur l'importance des dimensions historique et culturelle dans l'enseignement des mathématiques, le groupe de travail voulait offrir un espace de discussion et d'échange autour des « raisons » d'une telle importance. Ces « raisons » sont en fait elles-mêmes historiques et sociétales. Il s'agissait, pour nous, d'une occasion de mettre en lumière leur historicité et les enjeux sociaux dans lesquels ces « raisons » se trouvent encadrées. Ce n'est qu'après une telle prise de conscience que, d'après nous, peut se poser la question, plus pratique mais tout aussi importante, des manières d'incorporation des dimensions historique et culturelle dans l'enseignement des mathématiques, dans la didactique et dans la formation des enseignants.

La nature historique et sociétale des raisons qui justifient le recours aux dimensions historique et culturelle dans l'enseignement des mathématiques a été mise en évidence dans plusieurs travaux présentés dans nos séances de travail. Barbin, par exemple, nous rappelle l'esprit qui animait la commission inter-IREM à la fin des années 1970 : il s'agissait d'offrir une sorte de thérapeutique contre une conception qui voit les mathématiques comme un langage. La prise en compte de la dimension historique et culturelle permet de nuancer cette vue et de présenter les mathématiques comme une activité intellectuelle ; comme un processus et non comme un objet achevé, a-historique.

La nature historique et sociétale des raisons de l'importance des dimensions historique et culturelle est aussi apparue lors des discussions portant sur la tendance contemporaine, de plus en plus prononcée, qui tend à réduire les mathématiques, dans la sphère de son enseignement, à son seul aspect utilitariste. Beaudoin, dans son texte sur le rapport à la culture mathématique, présente des données (recueillies auprès d'un groupe d'enseignantes et d'enseignants de mathématiques au Québec) qui suggèrent une conception technique et instrumentaliste des mathématiques. Mais il y a aussi un élément aliénant dans le rapport aux mathématiques qui s'exprime à travers la question, souvent posée par nos élèves : « à quoi sert tout cela ? » (voir le texte de Moyon). Certains participants parlaient à ce sujet d'une « mercantilisation » des mathématiques. Comme dans le cas précédent, la prise en compte des dimensions historique et culturelle peut offrir des arguments pour contrer une telle tendance.

Comme on peut déjà le voir à la lumière de ces exemples, la question des « raisons » qui plaident en faveur d'une prise en compte des dimensions historique et culturelle dans l'enseignement des mathématiques s'articule autour de l'idée qu'une telle prise en compte permet de constater que les mathématiques sont autre chose que ce qu'on a l'habitude d'y voir : elles sont plus qu'un langage formel, plus qu'un moyen d'application ou de modélisation économique. En d'autres termes, une des raisons les plus puissantes pour prendre en compte les dimensions historique et culturelle est que cette prise en compte est susceptible d'apporter un éclairage sur la nature même des mathématiques. Mais peut-être vaudrait-il mieux ne pas voir la prise en compte desdites dimensions comme la « clé » pour *finalement* comprendre ce que sont les mathématiques. Car il se peut que cette nature ne soit pas susceptible d'être ramenée à une formulation du type : « Les mathématiques sont … ». Cette impossibilité ne relèverait pas, notons-le bien, d'une insuffisance de la langue, laquelle serait incapable de loger les prédicats et les noms qui conviendraient à la définition cherchée. Ce que la prise en compte des dimensions historique et culturelle apporterait serait un *questionnement sans fin*, toujours en cours, toujours renouvelé et à renouveler, sur quelque chose toujours en mouvement : les mathématiques. C'est, formulé autrement, ce que certains de nos participants voulaient signifier quand ils faisaient allusion au fait que les mathématiques sont une *activité humaine*. Comme toute activité humaine, les mathématiques sont localisées temporellement et spatialement, c'est-à-dire géographiquement. Elles sont toujours en évolution. Bien sûr, une telle conception apporte ses propres problèmes. Parmi les plus difficiles et les plus intéressants pour notre discussion ici, il y a celui de l'historicité du savoir.

III. QUELLE HISTOIRE ? QUELLE CULTURE ?

Dans un sens assez naïf, le savoir est évidemment historique. On peut imaginer une ligne de temps sur laquelle on positionne la série d'événements qui constituent l'histoire. Les événements deviennent par là ordonnés « naturellement ». Or, le savoir peut être aussi vu dans son historicité dans un sens beaucoup plus profond. Le temps n'est pas simplement un indice qui étiquette le savoir, comme le prix étiquette une marchandise dans un magasin. Le savoir est historique dans un sens *génétique*. En d'autres termes, il se produit dans des conditions sociales et culturelles qui le rendent qualitativement différent de ce qui était déjà là avant. Il y a un « avant » et un « après » (comme le notait déjà Aristote), mais on ne peut pas les réduire qualitativement. L'avant et l'après du savoir ne sont pas homogènes. C'est dans ce sens que Foucault (1966, 1969) parlait des *conditions de possibilité* du savoir. Une approche historique ne peut donc pas se limiter à une chronologie de faits ; il doit intégrer une réflexion en charge d'effectuer l'archéologie anthropologique des conditions épistémologiques, sociales, culturelles et politiques, qui rendent l'émergence et la diffusion d'un concept possibles à un moment donné. Un exemple très clair est celui fourni par Høyrup (1991, 2007) sur les mathématiques babyloniennes, qu'il place dans le contexte social, politique et religieux de l'administration des états dans l'ancienne Mésopotamie.

Il nous semble que cette notion d'historicité du savoir mérite d'être approfondie davantage. La recherche sur l'épistémologie des mathématiques et les approches historiques dans l'enseignement ont certainement fait des progrès remarquables dans les dernières décennies, comme en témoignent d'ailleurs maints articles soumis et présentés par les participants de notre groupe (voir, par exemple, les textes de Bkouche et de Djebbar). Un travail reste à approfondir : celui d'une articulation encore plus fine entre la dimension épistémologique et de la dimension sociétale. Donnons-en deux exemples. Dans son texte, Abdeljaouad explore le contexte social et politique du renouveau des mathématiques turques ottomanes du 18^{e} siècle et montre comment ce renouveau a lieu à l'intérieur d'un projet politique national bien défini. « C'est dans ce milieu extrêmement spécialisé, dit Abdeljaouad, que l'ouverture aux sciences exactes européennes se fait naturellement car il est non seulement encouragé par le sultan mais il permet aussi d'utiliser une astronomie plus fonctionnelle et aux résultats plus corrects ». Les mathématiques apparaissent ici comme consubstantielles aux dimensions sociale et politique qui lui correspondent. Cet exemple est similaire dans sa portée à celui de Høyrup mentionné ci-dessus. Les deux montrent le besoin d'aller au-delà du regard purement épistémologique afin de s'interroger sur les acteurs de l'époque : quel rôle la réflexion mathématique à une époque donnée joue dans la société qui l'a construite.

Le deuxième exemple que nous voudrions mentionner pour illustrer l'idée d'historicité du savoir esquissée ici provient d'une discussion suscitée par la réflexion sur la nature du texte historique amenée par plusieurs contributions, dont celles de Guillemette, de Plantade, de Front et de Bernard. Lors de la discussion, on a relevé que tout texte historique est produit dans un contexte social, d'échanges avec d'autres (même dans les cas où le texte fonctionne comme aide-mémoire de problèmes et de leur solution dans un contexte d'enseignement). Le texte s'adresse (implicitement ou explicitement) à quelqu'un. En s'adressant à quelqu'un, le texte puise ses ressources dans les normes discursives de la culture. Mais il puise aussi dans l'ontologie de la culture, en particulier dans ce qu'on peut considérer comme la manière culturelle correcte de poser un problème et les moyens qu'on considère légitimes pour le résoudre. On sait très bien que Platon, par exemple, se montrait critique envers ceux qui, comme Eudoxe et Architas, utilisaient des instruments mécaniques dans leurs recherches mathématiques. Un tel acte, d'après Platon, ne pouvait que détruire la vertu de la géométrie par son accent sur la matérialité des choses au détriment de la pureté des concepts (Radford 2003). Pour lui, la règle et le compas incarnaient sans problème l'idéalité de la droite et du cercle et avaient alors une place dans la recherche mathématique. Ce que ces commentaires suggèrent donc par rapport au texte historique, c'est que le texte s'ordonne selon deux dimensions historiques reliées entre elles : celle du contenu et celle de la manière dont celui-ci s'exprime. Ce qui les relie est un arrière-plan tissé d'aspects sociétaux et culturels dont il faut prendre compte dans l'acte d'interprétation du texte lui-même.

On pourra donc retenir que le savoir est d'emblée historique dans un sens plus profond qu'il ne lui est normalement attribué. Ce sont les épistémologies positivistes qui peuvent nous faire penser que l'histoire est comme un accessoire qu'on peut ajouter ou enlever au bon gré du savoir. Mais le savoir n'est pas qu'historique. Il est consubstantiel de la culture où il trouve sa niche et se développe. On arrive par là à une conception anthropologique du savoir, une conception selon laquelle le savoir se trouve médiatisé par son historicité, laquelle renvoie à la culture, car ces dernières sont en relation dialectique : l'une est le mode d'existence de l'autre. Le temps du savoir ne peut donc pas être un temps abstrait sur lequel le savoir évoluerait poussé par une force interne. La force qui pousse le savoir est une force où se mêlent l'histoire et la culture.

IV. ENSEIGNEMENT ET FORMATION DES ENSEIGNANTS

La réflexion précédente nous amène à constater l'urgence que prend la tâche d'un enseignement qui prenne en compte la dimension historico-culturelle. Il ne s'agit pas d'un luxe qu'on pourrait se payer « si on a le temps ». En effet, plusieurs présentations ont souligné la tendance de l'école, au cours des dernières années, à se plier de plus en plus aux besoins et aux intérêts des formes de production néo-libérales (Radford 2012). Celle-ci deviendrait, par une « transposition économique », une sorte d'institution bancaire où l'on accorde des crédits pouvant être échangés à des fins d'utilisation pratique dans une société où chacun est poussé par son intérêt personnel (Baldino et Cabral 1998, Freire 2004). Le savoir mathématique y serait comme une marchandise que l'on acquiert et l'élève comme un « client » formé selon une grille qui le décortique en compétences utiles à la consommation (en fait, c'est comme client qu'on conçoit implicitement ou explicitement l'élève dans certains contextes éducatifs nord-américains). Si cette situation donne le sentiment que l'on est aujourd'hui aux antipodes du rôle social que l'école et l'enseignement des mathématiques ont joué précédemment, on n'oubliera pas cependant que, déjà dans les siècles précédents, le fait d'aller à l'école et d'y étudier les mathématiques relevait moins de la volonté désintéressée de se « cultiver » (sauf peut-être pour certaines élites sociales) que d'un investissement pour pouvoir ensuite embrasser un métier permettant, si possible, une certaine ascension sociale. On peut alors se demander si la situation actuelle n'est pas une forme exacerbée d'une tendance pluriséculaire.

Comment alors, dans le contexte actuel, repenser l'enseignement des mathématiques et la formation des enseignants ? Comme on le verra à la lecture des articles qui suivent, plusieurs contributions se penchent sur ce problème fort difficile (voir les textes de Bantaba, de Chellougui et Kouki et de Menez). Ces articles parlent du renouveau du rapport aux mathématiques dans un contexte où l'on a à former les citoyens du 21e siècle. Ici les mathématiques ont beaucoup à apporter, en particulier à travers une rencontre avec l'histoire.

En fait, plusieurs essais ont déjà été faits à travers des expériences d'enseignement qui ont recours aux textes historiques (voir par exemple, les articles de Guillemette et de Barbin dans ce volume ; voir aussi Barbin 2006, Fauvel et Maanen 2000). Cependant, il faudra rester vigilant pour ne pas s'enfermer dans l'optique utilitariste qui pourrait voir cet exercice comme un outil pour amener les élèves à mieux apprendre les mathématiques. Bien que la lecture de textes anciens peut servir à déclencher des réflexions conceptuelles profondes, et donc à arriver à des conceptualisations mathématiques fines, il s'agit d'aller au-delà du cognitif. Sans exclure celui-ci, il s'agirait de rapatrier la dimension historico-culturelle afin de porter un regard critique sur le rôle social des mathématiques, de mieux comprendre les mécanismes historico-culturels de sa production, de comprendre qu'il n'y a pas de savoir neutre, que tout savoir s'insère dans un système idéologique qu'il faut toujours examiner et critiquer. Cela exige, sans doute, qu'on élargisse le sens de ce qu'on entend par « enseigner les mathématiques ». Il nous faut une nouvelle conception de l'enseignement, plus généralement. Cette conception repose sur l'idée qu'enseigner (et enseigner les mathématiques en particulier) ne se limite pas simplement aux technicités de la discipline, à ses utilisations dans la vie de tous les jours. Il s'agit, au contraire, de mener une interrogation sur son rôle dans la société et dans la formation des élèves. Les enjeux sont évidemment grands. Tout d'abord, on doit s'interroger sur ce qu'il faut mettre en place dans la formation des enseignants pour favoriser l'introduction d'une telle perspective dans l'enseignement et plus généralement dans les cursus universitaires. On pense ici bien sûr à une formation en histoire des mathématiques, mais aussi – et surtout – au rôle que peut jouer l'histoire de l'enseignement des mathématiques dans la formation (initiale et continue) des enseignants. Il y a certainement beaucoup de choses à faire. Nous espérons pouvoir continuer ce travail dans les prochaines rencontres de l'Espace Mathématique Francophone.

RÉFÉRENCES

Baldino R., Cabral T. (1998) Lacan and the school's credit system. In Olivier A., Newstead K. (Eds.) *Proceedings of 22nd conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol.22, pp.56-63). Stellenbosch, South Africa. University of Stellenbosch: PME.

Barbin E. (2006) *The different readings of original sources: An experience in pre-service teaching. Mini-Workshop on Studying Original Sources in Mathematics Education*. Oberwolfach, April 30th-May 6th, 2006. Report No. 22/2006, 17-19.

Fauvel J., van Maanen J. (2000) *History in mathematics education: The ICMI study*. Dordrecht : Kluwer.

Foucault M. (1966) *Les mots et les choses*. Paris : Gallimard.

Foucault M. (1969) L'archéologie du savoir. Paris : Gallimard.

Freire P. (2004) *Pedagogy of indignation*. Boulder, Colorado : Paradigm Publishers.

Høyrup J. (1991) *Mathematics and early state formation, or, the janus face of early mesopotamian mathematics: Bureaucratic tool and expression of scribal professional autonomy*. Denmark : Roskilde University Centre, Department of Languages and Culture, Preprints og reprints, nr. 2.

Høyrup J. (2007) The roles of mesopotamian bronze age mathematics tool for state formation and administration. *Educational Studies in Mathematics* 66(2), 257-271.

Radford L. (2003) On culture and mind. A post-vygotskian semiotic perspective, with an example from Greek mathematical thought. In Anderson M., Sáenz-Ludlow A., Zellweger S., Cifarelli V. (Eds.) (pp. 49-79) *Educational perspectives on mathematics as semiosis: From thinking to interpreting to knowing*. Ottawa : Legas Publishing.

Radford L. (2012) Education and the illusions of emancipation. *Educational Studies in Mathematics* 80(1), 101-118.

CONTRIBUTIONS AU GT4

ABDELJAOUAD M. – Le français : langue de médiation pour l'enseignement des sciences européennes en Turquie à la fin du 18e siècle.

BANTABA F. G. – Dimension sociale de l'enseignement des mathématiques. Le rôle des mathématiques dans la formation du citoyen en France entre la seconde moitié du 19e siècle et la fin du 20e siècle.

BARBIN E. – L'histoire des mathématiques dans la formation : une perspective historique (1975-2010).

BEAUDOIN M. – Le rapport à la culture mathématique : avenues pour la formation des enseignants.

BERNARD A. – Sur les modalités de lecture de sources en histoire des mathématiques.

BKOUCHE R. – Sur la dimension culturelle de l'enseignement. De la signification d'un pléonasme.

CHELLOUGUI F., KOUKI R. – Enquêtes épistémologique et didactique du concept de la quantification.

DJEBBAR A. – La phase arabe de l'algèbre (9e–15e s.).

FRONT M. – Kepler, entre savoir et science. Quelques éléments épistémologiques autour d'une situation de recherche.

GUILLEMETTE D. – Enseignement des mathématiques et histoire des mathématiques : quels apports pour l'apprentissage des élèves ?

MENEZ M. – L'expérience mathématique.

MOYON M. – Penser les mathématiques à travers leur épistémologie et leur histoire : un enjeu de/dans la formation des maîtres.

PLANTADE F. – Jules Houël : un mathématicien pédagogue du 19e siècle pour lequel une approche historique est indissociable d'un fondement rigoureux des mathématiques. Exemple des « quantités complexes ».

LE FRANÇAIS : LANGUE DE MEDIATION POUR L'ENSEIGNEMENT DES SCIENCES EUROPEENNES EN TURQUIE A LA FIN DU 18e SIECLE

Mahdi ABDELJAOUAD*

Résumé – Un processus de transfert des sciences européennes se développe en Turquie à partir de la fin du 18e siècle et en Egypte au 19e siècle grâce à la création d'écoles supérieures militaires utilisant des médiateurs francophones, les mathématiques constituant la discipline la mieux représentée dans les cursus de ces écoles. Dans cette communication, nous nous concentrons sur la Turquie ottomane et présentons les arguments des réformistes défendant à la fois l'ouverture à la langue des Francs (sic) et l'usage de la langue nationale comme langue de transfert des sciences modernes.

Mots-clefs : Ottomans, mathématiques européennes, dix-huitième siècle

Abstract – Transfer of European sciences took place in Turkey starting at the end of the 18th century and in Egypt at the beginning of 19th century thanks to the foundation of military schools for engineers using French-speaking mediators, mathematics being the subject matter best represented in the courses of these schools. In this communication, we focus on Ottoman Turkey and present the arguments of the reformists who defended both the learning of the French language and the use of the Turkish language as a mean for acquisition of modern sciences.

Keywords: Ottomans, European mathematics, Eighteenth century

INTRODUCTION

Que ce soit dans la Turquie ottomane du 18e siècle ou en Egypte du début du 19e siècle, les souverains et les élites dirigeantes sont confrontés à des échecs militaires et à des menaces impérialistes grandissantes. L'organisation des armées encadrées par des janissaires qui utilisent des techniques devenues obsolètes et inopérantes faces aux armées européennes et le système éducatif traditionnel géré depuis plusieurs siècles par les Ulémas selon un modèle médiéval qui transmet des connaissances sclérosées sont incapables de répondre aux besoins militaires et civils de la société. Dès la fin du 18e siècle, les sultans à Istanbul et au début du 19e siècle, les gouverneurs des provinces d'Egypte et de Tunisie, cherchant à se prémunir des menaces militaires étrangères, décident la création d'écoles militaires pour y enseigner les sciences et techniques européennes. Ce processus de transfert se développe tout en rencontrant une opposition frontale des ulémas et des janissaires.

Nous concentrons notre présente étude sur l'expérience du transfert des sciences européennes dans la Turquie ottomane de la fin du 18e siècle, sachant que son échec dramatique, en 1807, sert de modèle aux réformateurs turcs, égyptiens et tunisiens du 19e siècle et leur permet de se prémunir des ennemis des réformes et d'éviter les obstacles avant de les commencer.

L'enseignement des mathématiques à partir de manuels français dans des traductions en langue turque ottomane illustre d'une part les héritages scientifiques conservés, l'existence d'ulémas de haut niveau versés dans les sciences classiques qui s'approprient les sciences nouvelles importées et les transmettent à leur tour à des jeunes Turcs en quête de ces mathématiques nouvelles et de leurs applications dans les domaines militaires et civils.

* Université de Tunis – Tunisie – mahdi.abdeljaouad@gmail.com

© Abdeljaouad M. (2012) Le français : langue de médiation pour l'enseignement des sciences européennes en Turquie à la fin du 18e siècle. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT4, pp. 529–538). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

I. QUELQUES MATHÉMATICIENS ASTRONOMES OTTOMANS DU 18e SIÈCLE : LA SCIENCE ENCORE VIVACE

Depuis des siècles, les responsables des administrations civiles ainsi que tous les responsables religieux, judiciaires et éducatifs de l'Empire ottoman ont été, la plupart du temps, recrutés parmi les Ulémas qui gèrent en particulier un enseignement traditionnel totalement inchangé. Le pouvoir politique ne tente pas d'introduire de réformes dans ce système. Pourtant, une exception à ce déclin culturel général doit être signalée : la grande spécialisation des mathématiciens astronomes turcs. Elle s'accompagne par l'étude des œuvres fondamentales arabes (*al-ummahât*) et parfois leur traduction en turc. La transmission de ce savoir à quelques étudiants intéressés est rapportée, suite à son séjour à Istanbul de 1781 à 1786, par le savant italien Jean-Baptiste Toderini[1] qui connaissait parfaitement la langue turque, il écrit :

> Les Turcs étant très portés sur l'astronomie, ils cultivent la géométrie si nécessaire aux études astronomiques. Ils en ont besoin pour la marine, pour faire tous leurs calendriers, leurs cadrans solaires, et leurs cartes géographiques. (Toderini 1789, pp. 102-103)

Assistant à une leçon de géométrie enseignée par un Uléma dans sa demeure, Toderini en profite pour préciser le cursus suivi par les dix étudiants présents : le commentaire d'Euclide par « l'illustre géomètre Nasîr al-Dîn al-Tûsî (m. 1274) et « les traductions arabes d'Archimède, de Théodose, de Ménélaus, d'Apolonius et de tant d'autres savants grecs, sans parler d'un grand nombre d'auteurs arabes qui en ont traité. » (Toderini 1789, p. 102)

1. Les efforts de renouveau scientifique par les traductions

On retient de cette époque la traduction en turc de plusieurs œuvres scientifiques, comme par exemple, les tables éphémérides de Cassini par le mathématicien et astronome Çinâri Ismaîl Efendi (Khalife-zâde) et leur publication en 1772. Elles remplacent les tables élaborées par Ulug Beg au 15e siècle à Samarcande et utilisées jusqu'à cette époque par les astronomes de l'Empire.

- L'interprète du gouverneur ottoman de Belgrade, Osman b. Abdülmannān al-Muhtadî[2] (m. 1786) compose, en 1779, à partir de traités français et allemands, un ouvrage de mathématique et de sciences militaires, ouvrage intéressant car l'auteur s'y efforce de s'inspirer de la terminologie classique arabe.
- Haut fonctionnaire de l'administration militaire, féru de science classique, Mustafa Sidqî (m . 1769) prépare avec Khalife-zâde un traité sur l'astrolabe à partir de « *l'Usage des astrolabes tant universels que particuliers accompagné d'un traité qu'en explique la construction* » de Nicolas Bion (Paris 1702).

C'est dans ce milieu extrêmement spécialisé que l'ouverture aux sciences exactes européennes se fait naturellement car il est non seulement encouragé par le sultan mais il permet aussi d'utiliser une astronomie plus fonctionnelle et aux résultats plus corrects.

[1] Le témoignage de Toderini est intéressant car il donne un éclairage critique de la situation réelle de la science turque à son époque, non seulement à travers les visites qu'il rend à trois des treize plus importantes bibliothèques publiques d'Istanbul où il recense la liste des ouvrages disponibles au public (dont plus de 10% sont consacrés aux sciences exactes) et observe les lecteurs studieux, mais aussi par ses comptes-rendus de rencontres avec des Ulémas éminents avec qui il échange des idées et des informations.

[2] OMLT n°166, pp. 243-251. Rosenfeld et Ihsanoğlu n°1351, p. 406.

II. LA CREATION AU 18e SIECLE DES ECOLES MILITAIRES D'INGENIEURS TURQUES

Le sultan Abdülhamid I (1774-1789) demande à des officiers français d'entraîner certaines unités de l'armée aux techniques militaires européennes et décide, en 1775, l'ouverture de *Hendeskhâne (Ecole de géométrie)* aux chantiers navals impériaux à Üsküdar[3]. La *Hendeskhâne* est constituée d'une seule classe de 10 à 15 élèves-officiers mais reçoit beaucoup d'auditeurs libres parmi les jeunes officiers ottomans en exercice. Les officiers français entrainent les cadets dans les sciences et techniques militaires ; le capitaine de vaisseau algérien Seyyid Hassan al-Jazâ'irî y enseigne les mathématiques[4] et les techniques navales ; Ismail Gelenbevi, mathématicien et astronome[5], assure l'essentiel des enseignements de géométrie et d'astronomie et un second Algérien, ancien pilote de vaisseau, entretient les différents instruments et explique leur utilisation. En 1781, on y forme à la fois des officiers du génie et des mines, et des officiers de la marine. Après une visite à l'école, Toderini la décrit ainsi :

> Elle consiste en deux pièces, l'une où se tient l'école et où les élèves se rassemblent; elle est tapissée de cartes géographiques imprimées, turques et françaises, de dessins à la plume de différentes sortes de navires , et on y trouve un assez grand nombre d'instruments de navigation. Là je remarquai différents atlas et cartes marines d'Europe, le Gian - Numa, ou petit atlas du turc Hagi Calfah <Hajji Khalifa>, un globe céleste qui marquait les constellations et les étoiles de première grandeur, par des signes et des caractères turcs en or sans figures, ouvrage du professeur.
>
> Parmi beaucoup de livres d'Europe, j'y trouvai les tables astronomiques de M. de Lalande, et la traduction qui en a été faite en turc. ... Le professeur me fit voir en turc les tables sur l'artillerie , traduites de livres européens, des cahiers sur l'astrolabe, sur les cadrans solaires, sur la boussole et sur la géométrie, dont il faisait usage pour ses élèves.
>
> Les élèves sont plus de cinquante, à ce que me dit l'Algérien ; ce sont des fils de capitaines et de seigneurs turcs; mais il n'y en avait qu'un petit nombre qui fussent assidus et appliqués à l'étude. Le maître donne quatre heures de leçon chaque jour, excepté le mardi et le vendredi. (Toderini 1789, pp. 163-165)

A partir de 1784, l'école ne forme plus que des élèves officiers pour la marine[6].

1. Création d'une deuxième école d'ingénieurs en 1784

Mühendeskhâne-i Humayûn (Ecole impériale d'ingénieurs) se spécialise dans la formation des officiers de l'armée de terre (artillerie, génie, mines, fortifications, topographie). Outre leurs obligations d'encadrement des officiers de terrain aux techniques militaires modernes, des ingénieurs militaires français, en particulier les officiers André-Joseph Lafitte-Clavé (1740-1793) et Jean-Gabriel Monier (1745-1818), assurent des cours pratiques aux jeunes cadets, alors que les cours théoriques de mathématiques sont assurés par des professeurs turcs, dont certains diplômés de la *Hendeskhâne*.

D'après le témoignage de Lafitte-Clavé, la bibliothèque de cette école était pourvue de nombreux ouvrages de mathématiques et de techniques militaires français récents. Il écrit :

> Pour l'enseignement des mathématiques: le traité d'Etienne Bezout sur la Théorie générale des équations algébriques (Paris 1782), les Tables de logarithmes de Jean-François Callet, les Traités élémentaires

---

[3] Dirigée par le baron de Tott, puis, entre 1775 et 1781, par le capitaine de vaisseau algérien Seyyid Hasan.

[4] D'après Toderini, Seyyid Hasan est un officier multilingue et fort cultivé. D'après OMLT, p. 347, il est l'auteur d'une épître traduite du français sur les quantités irrationnelles.

[5] Voir note 4 ci-dessus.

[6] Entre 1792 et 1794, elle sera dirigée par le *muderris* Ibrahim Kami b. Ali, ancien élève de Yenishehri Muftizade (voir note 13 ci-dessus) et auteur d'un commentaire en turc sur *Miftah al-hisab* d'al-Kashi. (voir OMLT n°173, pp. 259-260)

d'arithmétique et de mécanique (Paris 1774-1775) et le Cours de mathématique à l'usage des écoles militaires (Paris 1782) de l'abbé Charles Bossut[7].

Lafitte-Clavé explique aussi que le meilleur élève de l'école, ^{c}Abdürrahamân Efendî, qui maîtrise bien le français, a traduit en turc un chapitre du cours, puis l'a donné au professeur Ismaîl Gelenbevî pour en rédiger une version finale. On retrouve ce modèle de transfert, (apprentissage de la langue française par des étudiants – traductions en langue nationale du cours scientifique étranger par les plus brillants étudiants – révision linguistique et scientifique de ces traductions par un uléma spécialisé en sciences et mise en forme définitive d'un manuel nouveau pour les promotions suivantes d'élèves) dans toutes les écoles militaires d'ingénieurs créées par la suite en Egypte, en Turquie et en Tunisie.

2. *L'essor des écoles d'ingénieurs pendant le règne de Selim III (1793-1807)*

A partir de 1788, *Mühdeskhāne-i Humayûn* est mise en veilleuse après le départ de Turquie des experts militaires français, suite au déclenchement d'hostilités entre la France et la Turquie.

Mais dès son accession au trône, le sultan Selim III ordonne la réhabilitation des deux écoles militaires créées quelques années plus tôt afin de former une armée nizamî (réglée), sur le modèle européen et encadrée par des officiers ayant des connaissances de haut niveau. Mühdeskhāne-i Humayûn devient, en 1793, Mühendeskhâne ül-Cedide8 (L'école nouvelle des ingénieurs). Toutes les formations des élèves officiers de l'armée de terre sont regroupées dans cette école. Les enseignants sont turcs et européens, dont Abdürrahmân Efendî (m. 1806) et Joseph Gabriel Monier (m. 1818). Plusieurs niveaux sont prévus et une importante bibliothèque d'ouvrages scientifiques et techniques essentiellement en français et en turc. De nombreux jeunes officiers suivent les cours en auditeurs libres. Dès 1801, un programme officiel est mis en place pour les quatre années d'enseignement, sous la direction du Chef instructeur, Husayn Rifkî Tamanî[9].

En 1806, les deux écoles d'ingénieurs deviennent autonomes et spécialisées :

- *Mühendiskhâne-i Bahri-i Hûmayûn* (Ecole impériale des ingénieurs de la marine)
- *Mühendiskhâne-i Berri-i Hûmayûn* (Ecole impériale des ingénieurs de l'armée de terre)

Ces écoles de formations d'ingénieurs pour l'armée et la marine jouent un rôle important dans l'édification d'un corps enseignant turc multilingue, maîtrisant les sciences et les techniques modernes et d'ingénieurs modernes capables de trasformer mes infrastructures militaires et civiles du pays.

Pour les mathématiques et les mathématiciens turcs, les règnes des sultans Abdülhamid I et Selim III ont permis une large ouverture sur les sciences européennes et la constitution d'une importante littérature scientifique en langue turque qui s'épanouira au siècle suivant. Les diplômés de ces écoles militaires d'ingénieurs survivant aux massacres de 1807 vont enseigner les mathématiques, non seulement en Turquie, mais aussi en Egypte pendant les premières années du 19^{e} siècle. Les cours dispensés dans ces écoles, reconstitués sous la forme de manuels et imprimés par Abdürrahmân Efendî[10] à l'imprimerie impériale d'Istanbul

---

[7] D'après Fréderic Hitzel (1995), p.821.

[8] D'abord dirigée par le capitaine Le Brun, puis par Çelebi Mustafa Reşid qui organise son transfert à la caserne des bombardiers à Hasköy.

[9] OMLT n° 180, pp. 266-272.

[10] Abdürrahmân Efendî al-Muhandis (m. 1806), directeur de l'Imprimerie impériale, mais aussi enseignant de mathématiques. Il publie, en 1801, l'édition en arabe de *Tahrîr Uqlîdîs fî 'ilm al-handasa* de Nasîr al-Dîn al-Tûsî

vont constituer une bibliothèque précieuse, d'abord pour les écoles d'ingénieurs nouvellement créées en Egypte par le vice roi Muhammad Ali (1805-1839), puis aussi pour les écoles d'ingénieurs turques qui seront réhabilitées au 19e siècle.

III. LA LANGUE FRANÇAISE : LANGUE DU TRANFERT DES SCIENCES MODERNES.

Le 19e siècle réformiste s'est distingué à Istanbul et en Egypte par l'importance donnée à la langue nationale de chacun des deux pays comme outil d'enseignement des sciences modernes. Ce n'est pas le cas de la Tunisie où le français est retenu pour l'enseignement des mathématiques et des sciences militaires, bien avant l'installation du protectorat français en 1881.

L'usage du turc dans les sciences a commencé dès le 18e siècle par la traduction des œuvres classiques arabes et par l'enseignement dans cette langue de l'arithmétique et de la géométrie dans certaines madrasas. Le vocabulaire et la langue scientifique turcs s'élaborent ainsi à partir de la langue scientifique arabe classique. En Turquie, les traductions des ouvrages européens d'astronomie, puis de mathématiques se font directement sans passer par des traductions arabes ; les traducteurs, souvent des interprètes officiels à la Cour impériale, modernisent ainsi la langue scientifique turque. Nous avons signalé plus haut les noms des plus connus des mathématiciens ottomans (Ishâk Efendî et Mehmed Rûh al-Dîn), célébrés encore aujourd'hui comme les créateurs de la langue mathématique turque.

1. L'attrait de la langue française

Avant 1788 et après 1808, la France a constitué l'allié principal des sultans ottomans dans leurs guerres contre la Russie et l'Autriche. Les officiers français étaient souvent appelés à moderniser l'armée ottomane ; la plupart du temps ils avaient recours à des interprètes formés à l'étranger ou dans les écoles d'ingénieurs turques pour les aider à transmettre leurs instructions. De nombreux ouvrages en français étaient offerts aux écoles d'ingénieurs et servaient de références pour les cours enseignés dans ces écoles.

Le témoignage de Séid Mustapha, jeune enseignant de l'Ecole impériale des ingénieurs de l'armée de terre et auteur de *La diatribe de l'ingénieur*[11], illustre bien l'attrait de la langue française :

> Je m'appliquai à l'étude de la langue française, comme la plus universelle, et capable de me faire parvenir à la connaissance des auteurs qui ont écrit sur ces belles sciences. … Ces auteurs classiques ne remplirent point mon objet, qui était la connaissance de l'application des mathématiques à la tactique et à l'architecture militaires, et, qui plus est, l'acquisition d'un certain degré de perfection capable de procurer le maniement de ces sciences dans toutes les branches de la mécanique qui en dérivent. (Séid Mustapha 1803, p. 17)

L'auteur ne spécifie pas le lieu où il étudia la langue française mais la description des activités de formation qu'il poursuit semble indiquer qu'il assiste en auditeur libre aux enseignements donnés à la *Mühendiskhâne* qui offrait depuis 1788 des cours de français enseignés par des anciens diplômés des premières écoles d'ingénieurs militaires turques.

L'insatisfaction du jeune homme et son désir de partir vers l'Europe pour satisfaire sa soif de mathématique sont clairement exprimés dans ce passage :

(m.1174). Des tables de logarithmes, la *Diatribe* de l'ingénieur Séid Mustapha, un mémoire sur la trisection de l'angle, des ouvrages militaires de Vauban, Lafitte-Clavé, de Belodor et de Truguet sont imprimés avant 1806.

[11] *La diatribe de l'ingénieur* est un pamphlet écrit en français par Séid Mustafa et imprimé à Üsküdar en 1801.

> A force de travail, le calcul de l'algèbre m'étant devenu un instrument familier, je tuais le temps en m'exerçant moi-même, et épiant le moment où la belle occasion d'un voyage en Europe pourrait se présenter, quand tout à coup, notre souverain, convaincu que, de toutes les prérogatives qui honorent un potentat, celle d'accueillir les sciences et les arts est sans contredit la plus brillante et la plus avantageuse à son peuple, Selim III projeta la fondation d'une grande et nouvelle école de mathématique (…). L'idée de pouvoir profiter dans le sein de ma patrie, et peut-être encore de lui devenir utile, m'enchantât et prévalut ; je fis halte. (Séid Mustapha 1801, pp. 18-19)

Séid Mustapha intègre la *Mühendeskhâne ül-Cedide*, en 1794.

> L'école fut établie et pourvue de maîtres et d'écoliers permanents et salariés. Je fus du nombre de ces derniers. Nous commençâmes à travailler en public ; c'était la première fois que le monde ignorant avait entendu à Constantinople des leçons de mathématiques et avait vu des géomètres en pleine assemblée ; la voie de l'impéritie et de l'ignorance s'éleva de tous côtés, on nous molesta, on nous persécuta presque, on criailla en disant : « pourquoi tirent-ils ces lignes sur le papier ? Quel avantage croient-ils retirer ? La guerre ne se fait point au compas et à la ligne. (Séid Mustapha 1801, p. 20)

Comme en témoigne Séid Mustapha, la nouvelle école rencontre l'opposition combinée des ulémas, des architectes traditionnels et des janissaires[12]. Ces corporations considéraient à juste titre les futurs ingénieurs comme des intrus qui allaient les remplacer. Malgré cette opposition, Selim III continua à encourager les élèves dans leurs efforts de formation et, pour prouver leur compétence, il demanda aux meilleurs élèves-officiers de l'école de diriger un contingent de 2000 soldats (de la nouvelle armée) pour mater une révolte dans l'une des provinces. L'opération s'étant achevée par un succès retentissant, Séid Mustapha termine sa « diatribe » par cette belle envolée lyrique :

> Moi-même, ivre de joie de voir ma patrie dans l'état que je désirais si ardemment, éclairée tous les jours davantage du flambeau des sciences et des arts, il ne me fut plus possible de me taire. (Séid Mustapha 1801, p. 52)

Le jeune élève-officier devint un ingénieur reconnu responsable des travaux de topographie et fut appelé à enseigner en même temps dans son ancienne école d'ingénieurs. Cependant, sa carrière s'interrompit brusquement, lorsqu'il fut assassiné pendant la révolte des janissaires, en 1807. Une fois le sultan Selim III démis et les réformateurs exécutés, les structures militaires et éducatives nouvelles furent mises en sommeil.

IV. DES MATHEMATIQUES NOUVELLES ENSEIGNEES EN LANGUE TURQUE

Les programmes des *Mühendiskhânes*, les titres des ouvrages écrits par les professeurs qui y officient, ainsi que les témoignages cités ci-dessus confirment qu'un contenu nouveau y est enseigné.

Les professeurs sont la plupart du temps des Ulémas spécialisés en mathématiques et en astronomie arabe classique de haut niveau connaissant le français ou s'aidant de traducteurs ou d'étudiants pour composer des cours en langue turque traduits ou inspirés de traités essentiellement français. Cette élite scientifique considèrent les manuels arabes classiques obsolètes et inutilisables pour la formation des ingénieurs ; elle leur préfère les ouvrages européens utilisant des techniques plus originales et pouvant rapidement et efficacement être appliquées dans des disciplines théoriques aussi essentielles que l'algèbre moderne, le calcul différentiel et intégral et dans des disciplines appliquées comme la géométrie pratique, la géodésie, la mécanique, l'hydraulique, la topographie, la navigation et l'astronomie. Les

[12] Dans un rapport à son gouvernement, l'Ambassadeur de France à Istanbul écrit : «Les Ulemas reprochent aux élèves leur liaison avec les Infidèles, les accusant d'irréligion parce qu'ils apprennent les mathématiques (…). Les élèves gênaient aussi les architectes traditionnels dont ils prenaient la place.» (Fréderic Hitzel, p. 822).

mudarris (professeurs turcs classiques) n'ont pas été embarrassés par des programmes de mathématiques, proposés par les experts français et conformes à ceux des écoles militaires françaises, ils ont immédiatement adapté leurs savoirs arabo-turcs classiques aux innovations et les ont acceptées en raison de leur simplicité d'usage et d'exposition.

Parmi les innovations, certaines sont fondamentales et d'autres techniques. Nous ne pourrons les étudier en détail dans le cadre de ce travail ; en effet, nous ne proposons d'évoquer que celles concernant les opérations arithmétiques, les décimaux, les fractions et les logarithmes qui ont révolutionné les pratiques calculatoires.

1. Les opérations arithmétiques

Là où les manuels arabo-turcs classiques proposent plusieurs dispositions pour multiplier deux entiers (par exemple, la multiplication par translation, par semi-translation avec ou sans effacement, et par tableaux) et deux dispositions pour la division, les manuels européens n'offrent que les dispositions verticales actuelles. Chez Charles Bossut[13], tous les signes opératoires (+ , - , × , =) sont présents et la division est exprimée sous la forme de fraction. Inexistants dans la littérature arabo-turque, ces signes apparaissent dans les nouveaux enseignements et facilitent les calculs.

- La place des décimaux

Dès le premier chapitre du manuel de Bossut, l'auteur explique la spécificité des décimaux et leur utilité; il définit avec précision les « parties décimales » (§§13-20, pp. 7-11).

Par la suite, pour chaque situation numérique, Bossut consacre un paragraphe aux nombres décimaux.

Le concept de nombre décimal est absent des manuels arabo-turcs d'arithmétique utilisés dans les madrasas du 18e siècle. Pourtant le concept de *kusûr 'acshâriyya* (fractions décimales) avait été inventé par al-Kâshî (m. 1430) et décrit dans son *Miftâh al-hisâb (Clé de l'arithmétique)*. En s'inspirant du système sexagésimal utilisé par les astronomes, al-Kâshî avait imaginé le système décimal de position que nous utilisons aujourd'hui pour représenter les nombres décimaux. Bien que son œuvre fut connue des astronomes arabes et turcs, comme l'astronome Taqiy al-Dîn Ibn Macrûf al-Dimashqî (1521-1585), les décimaux qu'il avait inventés ne semblent pas avoir été disséminés hors des cercles des astronomes.

- Les fractions

On sait qu'en ce qui concerne les fractions, l'apport original andalou-maghrébin caractérisé par l'invention de la barre de fraction séparant le numérateur du dénominateur était accompagné de la mise en place d'une typologie complexe et difficile à utiliser. Par exemple, dans *Kashf al-'asrâr* (*Dévoilement des secrets*) d'al-Qalasâdî (m. 1486), on trouve un symbole spécifique réservé pour chaque type de fraction (par exemple :

- ✓ $\frac{3 \quad 4}{11 \quad 13}$ est la notation pour la fraction $\frac{4}{13} + \frac{3}{11\times13}$;
- ✓ $\frac{4}{13}\frac{3}{11}$ représente la fraction écrite aujourd'hui sous la forme $\frac{3}{11} + \frac{4}{13}$;
- ✓ $\frac{4 \ \mathrm{I}\ 3}{13 \ \mathrm{I}\ 11}$ correspond aujourd'hui à la fraction de fraction : $\frac{3 \times 4}{11\times13}$.

Seul le trait de fraction entre le numérateur et le dénominateur a survécu chez les Européens.

[13] Bossut (1775) *Traité élémentaire d'arithmétique*.

- Les logarithmes

'ilm al-neseb, *līguritma*, *cedvel-i niseb* sont les différents termes turcs choisis au 18e siècle par les traducteurs pour « logarithme » et « tables de logarithmes ».

La traduction à plusieurs mains (celles des élèves de *Mühdesḫâne-i Humayûn,* comme nous l'avons lu dans le témoignage de Lafitte-Clavé) des *tables portatives de logarithmes* de Callet (publiées en 1783) vont permettre la rédaction en turc par leur professeur, Ismaîl Gelenbevî d'un manuel sur les logarithmes: *Sharhu Cadâvil al-Ansâb, Lugaritma* qui sera longtemps utilisé dans les écoles d'ingénieurs turques[14].

Ainsi, que ce soit à Istanbul à la fin du 18e siècle ou au Caire au cours de la première moitié du 19e siècle, les mathématiques enseignées dans les nouvelles écoles d'ingénieurs sont celles-là mêmes enseignées aux mêmes époques dans les meilleures écoles militaires françaises.

V. ARGUMENTS DES REFORMISTES POUR CONTRER L'OPPOSITION DE LA MAJORITE DES ULEMAS

Dans l'Empire ottoman, une fois les janissaires neutralisés (en 1811 en Egypte et en 1826 en Turquie), la neutralité du corps des Ulemas ne devient permanente que si leurs privilèges se perpétuent et si quelques-uns parmi les plus prestigieux d'entre eux adhèrent aux projets de réformes et n'hésitent pas à les justifier.

Les Ulemas conservateurs sont capables de mobiliser des centaines de *softas* (étudiants des madrasas) ainsi que les foules misérables des villes au nom de principes du Moyen Age, comme l'interdiction de frayer avec les étrangers, d'apprendre et de parler leurs langues, d'acquérir leurs techniques, d'enseigner leurs sciences. Cependant des Ulemas ottomans éclairés insistaient, dans leurs *fetwas*, sur la légitimité religieuse d'apprendre et d'utiliser les innovations occidentales. Nous proposons quelques justifications données par quelques-uns d'entre eux au 19e siècle.

> Djihad, the holy war against the infidel, was one of the foremost duties of the believers. To strengthen the army of Islam by every means was therefore an important religious obligation. … To learn from the infidel enemy would not constitute a religiously illicit innovation (*bidᶜa*). (Molla Mehmed Esᶜad, d'après Uriel Held[15] 1993, p. 37)

A son retour de France, en 1838, le shaykh Rifaᶜat al-Tahtâwî rapporte de ce séjour à Paris un récit dans lequel il justifie l'adoption des sciences et techniques modernes :

> Les contrées des Francs ont atteint le sommet en ce qui concerne les mathématiques, les sciences naturelles et métaphysiques. Certains se sont intéressés à quelques unes des sciences arabes qui n'ont plus de secret pour eux. … Comme les contrées musulmanes ont excellé dans l'étude de la loi et de sa mise en pratique ainsi que dans les sciences de la raison, mais qu'elles ont négligé les sciences exactes (*al-hikmiyya*), elles ont besoin des contrées occidentales pour combler la lacune. Ainsi les Francs réalisent cet état actuel des choses mais reconnaissent que dans le passé nous étions leurs maîtres dans les diverses sciences ; et tout le monde sait que le mérite revient aux pionniers, car n'est-il pas vrai que ceux qui suivent nourrissent de l'héritage de ceux qui les ont précédés. (al-Tahtâwî, traduction de Nassib Samir al-Hussein 1998, p. 69)

Dans la préface de la traduction en arabe d'un traité d'art militaire, *Précis de l'Art de la Guerre* du baron Henri de Jomini, on retrouve un plaidoyer pour les réformes du Pacha Ahmed Bey, créateur de l'école polytechnique du Bardo en Tunisie. S'emportant contre le

[14] OMLT n° 171, p. 256-257.

[15] Le Protectorat annonce de nouvelles luttes que mèneront les disciples de Khayr al-Dîn et les anciens élèves de l'école de guerre du Bardo et ceux du Collège Sadiki qui aboutiront 75 ans plus tard à l'Indépendance du pays.

dédain porté par les Arabes aux sciences modernes, le cheikh Mahmûd Qabâdû, professeur à la mosquée-université al-Zaytûna et à l'école polytechnique écrit à propos du « réveil des infidèles. »[16]

> Le monde musulman est en retard malgré la possibilité que lui donne la religion musulmane de progresser. Il faudrait donc rechercher les raisons de ce retard ailleurs que dans la religion. Or, la comparaison entre le monde musulman et l'Europe fait apparaître que ce qui fait défaut à celui-là ce sont les « sciences profanes ». Quand les européens acquirent les sciences à travers l'Islam, c'est l'Europe qui domina le monde musulman, dès lors que celui-ci les délaissa. Il n'est guère plus possible que les musulmans reprennent leur part de bonheur tant qu'ils n'auront pas récupéré les sciences qu'ils ont perdues. Comme les Européens ont accordé toute la place qu'elles méritaient, qu'ils les ont parfaites et enrichies, il ne reste plus aux Musulmans qu'à les reprendre, soit par leur transcription, soit par leur enseignement[17].

Nous ne multiplierons pas les citations montrant les difficultés rencontrées par les réformateurs pour faire appel aux experts militaires étrangers, utiliser des langues étrangères dans l'enseignement, enrichir les bibliothèques d'ouvrages européens, organiser des missions d'étudiants en Europe ou créer des écoles militaires sur le modèle occidental. Tout au long du 19e siècle, les Ulemas conservateurs, soutenus par leurs étudiants, ne cesseront de s'opposer à ces initiatives et réussiront souvent à les bloquer.

VI. POST-SCRIPTUM

Lors des rencontres EMF 2006 au Québec, nous rapportions dans la communication : « *Enseigner l'histoire des mathématiques : de la quête de l'universel à la dérive chauvine* » notre surprise en lisant les copies d'examen d'un grand nombre d'étudiants – des professeurs de mathématiques en formation continuée – qui avaient développé des raisonnements paradoxalement nationalistes là où les données historiques montraient l'universalité des sciences. Une des explications trouvée à cette manière de lire les faits se trouvait, d'après nous, dans la littérature pseudo-scientifique, peu onéreuse, produite par les monarchies pétrolières arabes et largement diffusée dans le pays.

La présente étude sur le transfert des sciences européennes dans les pays musulmans à partir de la fin du 18e siècle montre qu'en fait la réaction inattendue de mes étudiants résultait de frustrations bien plus profondes.

Lorsque la Turquie ottomane et l'Egypte de Muhammad Ali décident de moderniser l'armée et certains aspects du système de gouvernement, ils sont amenés à adopter un certain nombre de réformes inspirées des modèles européens tout en montrant qu'elles étaient les héritières de l'Islam des temps glorieux où religion, sciences et conquêtes se conjuguaient ensemble.

L'adoption immédiate des sciences européennes et leur maîtrise par les ulémas versés dans les sciences exactes traditionnelles, la traduction systématique des ouvrages français de tous niveaux, la mise au point de langues scientifiques arabes et turques et la formation de cadres scientifiques et techniques permettent de préparer les jeunes autochtones à se mettre au diapason de la science universelle. Ce furent les prémisses de « *la Nahda* » arabe du 19e siècle. Mais, ce processus de modernisation choisie a été bloqué à la fin du siècle par les manœuvres des grandes puissances et par la colonisation.

---

[16] Qâbâdû révise la traduction arabe du traité de Jomini effectuée par l'un des meilleurs élèves de l'école et lui écrit une préface.

[17] Traduction de Noureddine Sraieb (1994).

Commencée dans (Abdeljaouad 2006) l'approche historico-culturelle – qui répond en partie au deuxième groupe de questions du GT4 – permet d'éclairer le jeune professeur en formation sur les réponses apportées dans le passé récent à des questions qui restent importantes aujourd'hui et que se posent les citoyens et la jeunesse arabe : Faut-il rejeter la science occidentale source d'aliénations et de frustrations ? Ne doit-on pas revenir aux époques glorieuses de l'Islam et y retrouver les vrais savoirs scientifiques ? Ne doit-on pas privilégier la langue arabe dans l'apprentissage des sciences modernes ? Nous pensons que la connaissance des faits avérés du passé permet de former des citoyens plus avertis.

REFERENCES

Abdeljaouad M. (2006) Issues in the History of Mathematics Teaching in Arab Countries (9th – 15th c.). In *Paedagogica Historica,* vol. 42, nr. 4 & 5, (pp. 629-664). London : Routledge.

Crozet P. (2008) *Les sciences modernes en Egypte. Transfert et appropriation, 1805-1902.* Paris : Geuthner.

Hitzel F. (1999) Les écoles de mathématiques turques et l'aide française. In Panzac (1995) (p. 821)

Ihsanoğlu E. Et al. (1999) *Osmanli Mathematik Literatürü Tarihi* (OAMT). Istanbul : IRCICA.

Ihsanoğlu I. et al. (1998) *Osmanli Astronomi Literatürü Tarihi* (OALT). Istanbul : IRCICA.

Ishāk Efendi (Imprimé à Istanbul 1831, puis à Bulāq 1841-1845)*Macmûa-i Ulûm-i Riyaziye*, compilé en turc à partir du *Cours complet de mathématiques* de Bezout.

Legendre A.-M. (1823) *Les Eléments de géométrie*. Paris : Firmin Didot.

Mehmed Rûh al-Dîn (Imprimé à Istanbul 1831, puis à Bulāq 1845) *Terceme-i ᶜilm al-hisâb*. Traduction du premier volume du *Cours complet de mathématiques* de Bossut.

Berkes N. (1998) *The Development of Secularism in Turkey.* Londres : C. Hurst.

Panzac D. (1995) *Histoire économique et sociale de l'Empire Ottoman et de la Turquie*. Londres : Peeters.

Pertusier Ch. (1815) *Promenades pittoresques dans Constantinople et sur les rives du Bosphore*. Paris : H. Nicolle.

Robson E., Stedall A. (2009) *The Oxford Handbook of the History of Mathematics*. Oxford : Oxford University Press.

Rosenberg and Ihsanoğlu (2003) *Mathematicians, Astronomers & Other Scholars of Islamic Civilization and their works (7th – 19th c.)*. Istanbul : IRCICA.

Salih M. (1915) Introduction of Logarithms in Turkey. In *Napier Tercentenary Memorial Volume*. Londres.

Sraieb N. (1994) Le collège Sadiki de Tunis et les nouvelles élites. In *Revue du monde musulman et de la Méditerranée n°72. Modernités arabes et turque: maîtres et ingénieurs* (pp. 37-52).

Tahtâwî, Rifâ'a al- (1988) *La purification de l'or ou l'aperçu abrégé de Paris*. Paris : Sindbad.

Toderini J.-B. (1789. *De la littérature des Turcs*. Traduction de l'abbé de Cournaud. Paris : Poinçot.

Uriel Heyd (1993) The Ottoman 'Ulema and Westernization in the Time of Selim III and Mahmud II. In Hourani A., Khoury S. P., Wilson M. C. (Eds) (pp. 29-60) *The Modern Middle East: A reader* Berkeley : U. C. Press.

Vlahakis George (2006) *Imperialism and Science: Social impact and interaction.* ABC-CLIO.

DIMENSION SOCIALE DE L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES. LE ROLE DES MATHEMATIQUES DANS LA FORMATION DU CITOYEN EN FRANCE ENTRE LA SECONDE MOITIE DU XIX^{e} SIECLE ET LA FIN DU XX^{e} SIECLE

Fiancée-Gernavey BANTABA*

Résumé – La formation du citoyen par l'éducation est un objectif majeur que plusieurs sociétés se sont proposé d'atteindre. Et cet objectif va très vite apparaître comme un défi à relever. En France dès la seconde moitié du XIX^{e} siècle, la maîtrise des principaux éléments de mathématiques va constituer, à côté d'une culture classique, le socle de base pour cette éducation. Le positivisme va beaucoup influencer la conception française d'un modèle éducatif. L'aspiration au progrès industriel implique alors la détection des qualités requises pour porter ce progrès. Les mathématiques vont jouer un rôle central dans cette sélection ; la responsabilité morale du professeur de mathématiques va être de type social et donner lieu a une forme de militantisme.

Mots-clefs : mathématiques, enseignement, social, citoyen, laïcité

Abstract – The formation of the citizen through education is a major objective that several societies are proposed to achieve. And this objective will soon appear as a challenge. In France in the second half of the 19th century, the mastery of the key elements of mathematics will be, next to a classical culture, the base for this education. Positivism much will influence the French concept of an educational model. The aspiration to industrial progress then involves the detection of the qualifications required to carry this progress. Mathematics will play a central role in this selection; the moral responsibility of mathematics teacher will be social type and give rise to a form of militancy.

Keywords: mathematics, education, social, citizen, secularity

> Dans l'ordre social, où toutes les places sont marquées, chacun doit être élevé pour la sienne. (Rousseau 1762)

Rousseau suggérait de lire la *République* de Platon pour « prendre une idée de l'éducation publique » (Rousseau 1762, p. 40). Et Platon nous met en garde contre les fables – supposées éveiller l'intelligence des enfants – qui risquent de « blesser ces jeunes oreilles » (Platon 1966, p. 24). Il a donc fallu, pour faire court, inventer l'instruction publique pour favoriser l'éveil de l'intelligence des enfants et cela dans des conditions optimales. Une de ces conditions fut de confier les enfants à un instructeur nommé par l'institution scolaire : un instituteur.

I. LE CONTEXTE FRANÇAIS

En France au début du XIX^{e} siècle subsistent deux écoles différentes : celle des enfants de propriétaires et celle des enfants de travailleurs. La culture classique et scientifique pour les premiers et quelques rudiments nécessaires à la morale et l'obéissance pour les derniers. Bref l'école des notables et l'école du peuple. A la fin de ce siècle des intellectuels comme Jules Ferry s'opposaient à ce modèle inégalitaire et antidémocratique. Leur vision était l'école unique pour un enseignement démocratique et une sélection par le mérite. L'instituteur, un genre de missionnaire, est investi d'une mission globale de progrès. Il doit provoquer le progrès non seulement matériel mais aussi celui des mœurs en vue d'un idéal spirituel laïc. Les années du premier après-guerre vont être celles de l'instauration de l'école unique. Le second après-guerre est l'ère d'une école nouvelle dans sa pédagogie. L'institution scolaire

* GREMA - IREM Paris 7 - Université Paris Diderot – France – fbantaba@ac-orleans-tours.fr

© Bantaba F.-G. (2012) Dimension sociale de l'enseignement des mathématiques. Le rôle des mathématiques dans la formation du citoyen en France ente la seconde moitié du 19^{e} siècle et la fin du 20^{e} siècle. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21^{e} siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT4, pp. 539–545). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

étant avant tout une institution sociale, la mission de l'enseignant va se préciser en tenant compte du contrat social.

II. LA MISSION DE L'ENSEIGNANT

En France à la fin du XX^{e} siècle, dans un texte adressé aux recteurs d'académies et aux directeurs des instituts universitaires de formation des maîtres, il était précisé que la mission du professeur dans le cadre des compétences professionnelles générales que la formation initiale de l'enseignant lui avait données était :

> Le professeur […] participe au service public d'éducation qui s'attache à transmettre les valeurs de la République, notamment l'idéal laïque qui exclut toute discrimination de sexe, de culture ou de religion. Sa mission est tout à la fois d'instruire les jeunes qui lui sont confiés, de contribuer à leur éducation et de les former en vue de leur insertion sociale et professionnelle. Il leur fait acquérir les connaissances et savoir-faire, selon les niveaux fixés par les programmes et référentiels de diplômes et concourt au développement de leurs aptitudes et capacités. Il les aide à développer leur esprit critique, à construire leur autonomie et à élaborer un projet personnel. Il se préoccupe également de faire comprendre aux élèves le sens et la portée des valeurs qui sont à la base de nos institutions, et de les préparer au plein exercice de la citoyenneté. (MEN 1997)

Qu'en est-il à ce propos pour l'enseignement des mathématiques ? Dans une introduction commune aux nouveaux programmes de mathématiques du cycle terminal des séries scientifiques, économique et sociale, littéraires et technologiques, on peut également lire :

> L'enseignement des mathématiques au collège et au lycée a pour but de donner à chaque élève la culture mathématique indispensable pour sa vie de citoyen et les bases nécessaires à son projet de poursuite d'études. (MEN 2010)

III. LES MATHÉMATIQUES ET LA FORMATION DU CITOYEN

Le but de cette contribution est de dire le défi que constitue la formation du citoyen – tant pour les sociétés développées que pour celles qui aspirent au progrès – et de mettre en lumière le rôle des mathématiques dans cette formation. J'appuierai cette étude sur les travaux de Jean Dhombres et montrerai comment, un militantisme intellectuel du professeur de mathématiques est indispensable pour relever ce défi et comment ce militantisme peut être multiforme.

A côté d'autres publications, le texte auquel je me référerai dans la suite est un article de Jean Dhombres, sur Pierre Laffitte, publié en 2004 sous le titre : « Les formes militantes d'un professeur de mathématiques dans la seconde moitié du XIXe siècle ».

Selon le modèle polytechnicien de la France, les mathématiques étaient devenues, une discipline de sélection et cela a impliqué une responsabilité morale de type social du professeur. On peut lire le passage suivant dans l'article de Dhombres :

> Il y a de fait une double question, celle du rôle formateur des mathématiques en vue d'une société en progrès industriel et cela concerne au premier chef le positivisme, et celle ensuite du rôle de détection par l'examinateur des qualités requises chez les candidats pour pouvoir porter ce progrès. (Dhombres 2004, pp. 80–81)

On est tenté de dire le scientisme que constitue la sélection par les mathématiques; la maîtrise des principaux éléments de mathématiques serait une compétence fiable, une compétence recherchée, qui se déclinerait en connaissances (des notions mathématiques), en attitude (art de penser, d'expliquer et de comprendre le monde) et en capacité (résolution de problèmes). La mathématique n'est pas le propre d'un cursus scientifique ; elle constitue le socle de la formation intellectuelle du monde français cultivé et se voulant moderne, sans prendre le risque d'être une spécialisation à part. Le cours de mathématiques dans les filières scientifiques est d'une nécessité absolue, cependant sa présence dans les sections littéraire, sociale et économique ne se justifie pas seulement par son caractère culturel. D'une part c'est un apport d'outils indispensables pour une analyse objective et une critique constructive de l'information – de nos jours – de plus en plus chiffrée. D'autre part les mathématiques sont une discipline d'enseignement à caractère socio-égalitaire c'est-à-dire, c'est ma thèse, les mathématiques réalisent l'égalité des chances, les mathématiques garantissent la concrétisation du principe républicain de l'ascenseur social. Parce que la catégorie sociale de l'apprenant a un impact moindre sur l'apprentissage des mathématiques comparé à d'autres disciplines comme l'économie ou les langues étrangères. Les mathématiques imposeraient une vision de nature sociale pour la méritocratie qui s'opposerait à l'aristocratie bénéficiaire des titres civils par la seule naissance et le bon vouloir des pouvoirs politiques. Les mathématiques peuvent prétendent à l'universalité mais l'enseignement des mathématiques – la pratique du professeur de mathématiques – n'est-il pas influencé par les cultures locales ? Les objets mathématiques trouvent leur légitimité dans le lien qu'ils ont avec le monde extérieur. La posture militante du professeur consisterait à donner du sens aux mathématiques enseignées. Les choix pédagogiques sur la progression et sur les contenus ; la modélisation et l'introduction d'une perspective historique dans l'enseignement, sont les manifestations d'un militantisme intellectuel du professeur de mathématiques. Pourquoi ces fondamentaux du métier de professeur de mathématiques seraient-ils devenus une forme d'engagement ?

D'abord, l'enseignant exerce son métier dans un cadre, un référentiel prédéfini, parfois très loin des « réalités de terrain ». Il ne doit pas être le simple exécutant mais un partenaire reconnu et considéré comme tel. En France, paradoxalement, le professeur de mathématiques est souvent confronté, de la part des apprenants, aux questions de l'utilité ou de l'utilisation des mathématiques. Est-ce parce que face aux réalisations de la science, le design – la forme – a pris le pas sur la technologie – le fond ? Depuis toujours, des visionnaires ont défendu la présence des mathématiques dans l'éducation publique.

En avril 1792, Condorcet présentait à l'Assemblé législative le Rapport sur l'organisation générale de l'instruction publique dont voici un extrait :

> Plusieurs motifs ont déterminé l'espèce de préférence accordée aux sciences mathématiques et physiques. D'abord, pour les hommes qui ne se dévouent point à de longues méditations, qui n'approfondissent aucun genre de connaissances, l'étude même élémentaire de ces sciences est le moyen le plus sûr de développer leur facultés intellectuelles, de leur apprendre à raisonner juste, à bien analyser leurs idées. On peut sans doute, en s'appliquant à la littérature, à la grammaire, à l'histoire, à la politique, à la philosophie en général, acquérir de la justesse, de la méthode, une logique saine et profonde, et cependant ignorer les sciences naturelles. De grands exemples l'ont prouvé ; mais les connaissances élémentaires dans ces mêmes genres n'ont pas cet avantage, elles emploient la raison, mais elles ne la formeraient pas. (Gauthier et Nicolet 1987, p. 29)

Des mathématiques au service de la citoyenneté, une tendance forte comme le souligne Michèle Artigue :

> On attend des mathématiques qu'elles contribuent à la formation d'un citoyen vivant dans un pays démocratique et un certain environnement, capable de traiter de façon critique, les nombreuses informations auxquelles il a accès, capable de prendre part aux débats de société. […] Etre citoyen responsable dans une société démocratique, c'est ainsi notamment comprendre quelles informations on peut tirer et quelles informations on ne saurait tirer des statistiques diverses, sous forme de sondages au autres, dont nous sommes abreuvés. C'est pouvoir raisonner ou suivre de façon critique des raisonnements portants sur des situations de risque. (Artigue 2003, p. 750)

IV. HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES ET MODÉLISATION

Dans l'avant-propos des *Premiers cours de philosophie positive*, Yann Clément-Colas écrit :

> Pour Auguste Comte, […] elle [la science mathématique] constitue le degré initial de la saine éducation logique. Comme elle détermine les fondements d'une connaissance objective du monde physique, la mathématique forme le « berceau » qui modèle les lois du monde social tout comme celles des sciences dites naturelles. (Comte 2007, p. 23)

Et pourtant les mathématiques sont aujourd'hui une discipline sous tension, sous pression. Il existe cependant un paradoxe : la société perçoit les mathématiques comme une science utile mais aussi comme une discipline d'enseignement qui n'a pas de prise sur la réalité. C'est la désaffection, pour les sciences en général, controversée ou tout au moins discutées dans les débats scientifiques actuels. Une actualité qui se manifeste dans la durée. Dans son rapport sur les progrès de la géométrie, en 1868, Michel Chasles écrit :

> L'état de nos études classiques des mathématiques a éprouvé, depuis une vingtaine d'années, un affaiblissement que l'on ne peut se dissimuler et dont nous devons dire ici les causes. Ces causes se trouvent dans la malheureuse pensée, si essentiellement contraire à l'esprit et au but des mathématiques, qui a fait substituer aux études intellectuelles et sérieuses des études tronquées, formées de lambeaux de théories ayant pour objet suprême et immédiat des applications pratiques. Cette pensée, destructrice de la science et des ses progrès, a présidé aux nouveaux programmes qui, en 1850, ont causé l'affaiblissement subit des cours de l'Ecole Polytechnique, et n'a point été étrangère à l'altération grave qu'ont éprouvée aussi nos études universitaires. (Gispert 1989, p. 53)

La didactique des mathématiques[1] propose au professeur des outils d'ingénierie pour mettre en scène son enseignement : faire prendre aux élèves la charge (responsabilité) de la construction du savoir par la résolution de problèmes de manière quasi-autonome (on parle de dévolution). La didactique telle que conçue actuellement ne permet pas de répondre aux questions : « à quoi servent les mathématiques ? » ; « pourquoi doit-on apprendre la notion de vecteur ? » ; « et les polynômes, ça sert à quoi ? » ; etc.

Jean Dhombres propose le processus de modélisation[2] comme outil pour pallier la fameuse « carence de prise sur le réel » des mathématiques tout en déclinant deux mouvements possibles. La modélisation classique et la modélisation contemporaine. La modélisation classique du monde physique ou physique mathématique qui se fait par le biais d'un regard sur l'histoire profonde de l'objet : Galilée et la chute des corps par exemple. Mais il attire

---

[1] Définition « très large » donnée par Guy Brousseau (2005, p. 214) : « La Didactique (didactics) comme science, étudie la diffusion des connaissances utiles aux hommes vivant en société. Elle s'intéresse à la production, à la diffusion et à l'apprentissage des connaissances ainsi qu'aux institutions et aux activités qui les facilitent. Ainsi la didactique, comme activité sociale ou professionnelle est tout ce qui tend à l'enseignement d'une connaissance, d'une science, d'un art ou d'une langue ».

[2] Dans *L'épistémologie*, *état des lieux* d'Angèle Kremer-Marietti et Jean Dhombres (2006, pp. 11-12), on peut lire : « Doué d'une double face abstraite-concrète, en une première acception, un modèle se fait le médiateur entre un champ théorique, dont il est une interprétation, et un champ empirique, dont il est une formalisation et une organisation. Essentiellement opératoire, le modèle peut devenir un outil d'observation, de calcul et de prévision. Descriptif et/ou prédictif, le couple modèle/modélisation a une valeur représentative, dont on peut explorer le statut méthodologique ou épistémologique. Loin d'épuiser le phénomène étudié, le modèle témoigne d'un point de vue parmi d'autres possibles, comme un réseau de causalités, et sert comme une hypothèse, à la fois organisatrice des faits rassemblés et réductrice de ceux-ci. Modéliser, ou faire une modélisation, c'est à partir d'un modèle, trouver les expressions mathématiques qui représentent schématiquement et analogiquement un processus phénoménal. La phase de choix d'une modélisation est à proprement parler une mathématisation. Mais la modélisation n'est pas la simple traduction des données d'une discipline en un autre langage. Elle requiert les mathématiques pour figer le modèle en ce sens qu'on ne puisse plus subrepticement faire appel à des propriétés qui seraient ajoutées au modèle ainsi pris comme point de vue. Les mathématiques sont alors un outil épistémologique ».

l'attention sur deux dangers : l'imposture et l'historiette. On peut lire dans *L'épistémologie, état des lieux* :

> Si, par la modélisation, les mathématiques pénètrent désormais directement les différentes autres disciplines, et sont du coup nécessairement colorées par celles-ci, elles n'en restent pas moins identifiables en tant que mathématiques. Au point que l'on peut aisément repérer les impostures qui revêtent d'un manteau mathématique des formes de pensée qui ne leur doivent rien. Tel est le fait épistémologique marquant. (Kremer-Marietti et Dhombres 2006)

Dans *Modèles, modélisations et mathématisations*, Dhombres (2003, p. 11) écrit :

> Tel est aussi le danger des histoires reconstruites des mathématiques où tout paraît couler de source. Les « historiettes » utiles pour l'enseignement des mathématiques, ou l'habillage efficace du réel pour faire faire des mathématiques, ne doivent pas conduire à oublier qu'il y a création par reconnaissance d'une inadéquation du modèle précédent. L'acte du maître, sa présence, sont alors fondamentaux.

La modélisation contemporaine, celle qui peut faire mode dans le bon sens du terme, fait jouer des disciplines mathématiques émergentes, et rarement enseignées. La science mathématique se tourne sereinement vers l'avenir parce qu'elle garde en mémoire son histoire. Une mémoire sans cesse réactivée et interrogée. On notera aussi chez Archimède, des allusions à des résultats trouvés mais non démontrés par des mathématiciens antérieurs. Michel Demazure, dans son *Cours d'algèbre*, écrit :

> Depuis leurs origines, l'algèbre et l'arithmétique mêlent deux traditions, théorique et pratique, que l'on peut symboliser par les noms d'Eudoxe et Diophante, bien que leurs origines soient sûrement bien antérieures. Et toujours y a été présente de façon confuse la distinction entre calculs théoriquement possibles et calculs effectivement réalisables. Mais ce n'est que récemment, dans le double développement des théories de la complexité et des outils informatiques, que les idées se sont éclaircies, que des énoncés précis ont pu être formulés et que des applications souvent spectaculaires ont été développées. C'est ainsi par exemple que la sécurité des transactions interbancaires par voie électronique repose essentiellement aujourd'hui sur la difficulté de la décomposition des grands nombres en facteurs premiers, alors même que cette difficulté n'est pas à ce jour prouvée. Etrange revanche pour une discipline, la théorie des nombres, jusque-là modèle même d'inutilité. (Demazure 1997, Introduction)

Dhombres met en évidence une posture militante du professeur de mathématique qui se manifeste par la mise en perspective de l'histoire des mathématiques et la modélisation comme partie vive de l'enseignement des mathématiques. L'histoire en général est le vecteur du patrimoine culturel et social. Par le biais de l'histoire des mathématiques les apprenants s'approprient l'héritage symbolique du travail passionné, de la réussite conditionnée par le labeur et surtout du droit à l'erreur inévitable dans la recherche de la vérité. L'histoire des mathématiques illustre l'ascension sociale de certains auteurs par la pratique des mathématiques. On peut percevoir l'évolution du statut social d'un auteur entre les controverses que suscitent ses propositions mathématiques et l'acceptation des travaux du même auteur par ses pairs comme théorie mathématique consistante. L'histoire nous donne à voir la naissance des savants. Pour donner des exemples[3] au 17e siècle, Pierre de Fermat qui est parlementaire à Toulouse devient savant mathématicien. Le père Marin Mersenne aussi par la pratique des mathématiques passe du statut de prêtre à celui de savant mathématicien.

Mais si les mathématiques comme discipline d'enseignement peuvent servir l'idéal républicain de la réussite, il est fondamental de contextualiser son enseignement. Du global que constitue les mathématiques universelles et savantes, il faut penser le local qui situe et garantit la transposition didactique et l'enseignement. Selon que le cours de mathématiques s'adresse à des apprenants d'Afrique, d'Asie ou d'Europe, les institutions officielles ont la responsabilité politique et sociale de créer une symbiose entre les mathématiques enseignées

---

[3] Je ne compare pas ici les statuts sociaux au 17e siècle, je dis comment des notables locaux sont devenus des scientifiques mondialement connus par le biais des mathématiques. Ce militantisme que j'assume est le devoir d'exemplarité.

et les cultures locales pour favoriser la cohabitation entre la logique mathématique et la logique naturelle des apprenants.

Un enseignement efficace des mathématiques consisterait à en établir le lien fondamental avec le monde physique (la modélisation est un exemple contemporain), mais une lecture des mathématiques classiques replace les objets dans le contexte de résolution de problèmes dévoilant ainsi le sens à donner aux concepts et la nature même des notions enseignées. Il est donc fondamental que le professeur de mathématiques propose une construction des savoirs ancrée dans l'histoire et vive dans le contemporain pour favoriser les apprentissages à l'heure où plus que jamais, les enseignants sont confrontés à une société organisée en réseaux sociaux dans lesquels l'information a pris une autre dimension et paradoxalement il y a forcément plus de mathématiques dans le savoir des apprenants. L'introduction des technologies de l'information et de la communication dans l'enseignement en général et l'utilisation en classe de mathématique des logiciels pour le calcul formel et la géométrie dynamique ont certes contribué a donné une image de l'Ecole qui se préoccupe de créer ou de maintenir le lien avec le monde qui évolue. Mais une autre question se pose à l'Ecole, celle des croyances et des pratiques religieuses propres aux apprenants.

V. MATHÉMATIQUES ET LAÏCITÉ

La société pose la question sous l'angle ostentatoire, c'est-à-dire le paraître qui reflète la croyance religieuse est prohibé dans tout lieu institutionnel de l'Etat. Mais l'Ecole veut aller plus loin, la formation du citoyen doit se faire sans aucune référence religieuse et l'enseignement des sciences, notamment des mathématiques, pouvait jouer ce rôle comme le dit Jean Dhombres :

> Une pensée sur la science débarrassée de la référence à Dieu, et même délivrée de l'opposition entre raison et foi, ou entre science et religion. Bref c'était la laïcité intellectuelle tranquille que le scientisme voulait penser consensuelle. C'était la forme de neutralité active que concevaient les tenants de la Troisième République des années 1890. (Dhombres, p. 89)

La question de la laïcité n'est pas nouvelle, elle s'est déjà posé au tout début du 19e siècle lors de la création des lycées en rendant obligatoire l'enseignement des mathématiques au même titre que le latin.

> Au professeur de mathématiques avait été assigné un rôle essentiellement scolaire au sens qu'il s'agissait de l'apprentissage d'une technique à la logique rigoureuse. Il n'y avait apparemment aucune relation avec des questions morales, religieuses ou sociales, alors même que le mot « rigueur » dément cette absence de liens. […] Cauchy, le maître de l'école mathématique française avait catégoriquement séparé la religion des mathématiques. Il dégageait ainsi les mathématiques de tout rôle métaphysique, en ne les engageant que sur des vérités particulières. (Ibid., p. 83)

Les composantes essentielles d'une pratique mathématique sont l'observation, l'abstraction, l'expérimentation et la démonstration. La dernière fonde la rigueur et transcende l'individu. L'auteur d'une démonstration a besoin de la reconnaissance de ses pairs. La démonstration est donc une activité sociale particulière. Dans une classe de mathématique la pratique de la démonstration – ou l'initiation à la démonstration – crée les conditions adéquates pour le débat. Cela suppose des valeurs communes que sont les vérités mathématiques universelles. Les règles du débat mathématiques font de la classe le lieu de l'apprentissage de la libre expression des opinions, la défense de ses idées par l'argumentation mais aussi le lieu où la laïcité prend forme par le biais d'une éducation aux argumentations rationnelles.

VI. CONCLUSION

Le positivisme a beaucoup influencé le modèle français de l'éducation publique et ceci dès la seconde moitié du 19e siècle. Le monde extérieur, expliqué par la science, fonde la base objective du positivisme. Le scientisme et la sélection par les mathématiques en sont l'expression. La société est divisée ; faut-il orienter ou sélectionner ? L'orientation est la recherche des aptitudes et des intérêts d'un apprenant, et donc de l'enseignement qui lui conviendra le mieux. Et la sélection consiste toujours en recrutement de l'élite. Dans les deux cas de figure la réussite sociale de l'apprenant reste l'objectif principal ; et les mathématiques peuvent jouer un rôle déterminant. Les mathématiques sont une discipline d'enseignement général ; elles marquent le degré d'ouverture pour l'orientation, par leur présence dans les enseignements obligatoires ou optionnels d'un niveau ou d'une section. L'idée serait de conserver un volume conséquent de mathématiques en enseignement obligatoire dans toutes les sections et retarder l'âge de l'orientation. Le professeur de mathématiques disposera ainsi de plus de temps pour faire vivre les apprentissages et ainsi accorder à l'apprenant la possibilité de tester des procédures – issues de son expérience personnelle – qui lui paraissent fonctionner naturellement et souvent en conflit avec la logique mathématique. Il est fondamental dans l'apprentissage des mathématiques que les apprenants constatent par eux même les limites des présupposés ou des idées fausses. Le cours de mathématiques, à l'image de l'Ecole, est le moyen et le lieu d'une acculturation. Puisque l'orientation aborde aussi les questions des métiers, l'accent devra être mis, dans la formation initiale ou continuée des enseignants de mathématiques, sur les métiers des mathématiques : industrie aérospatiale, imagerie, cryptographie, banques, assurances, etc. Mais aussi sur des métiers des problématiques actuelles : énergie, santé environnement, climatologie, développement durable, etc.

REFERENCES

Artigue M. (2003) Enseigner les mathématiques aujourd'hui. Pourquoi ? Pour qui ? Comment ? *Bulletin de l'APMEP* 449, 742-756.

Brousseau G. (2005) Recherche en éducation mathématique. *Bulletin de l'APMEP* 457, 213-224.

Comte A. (2007) *Premiers cours de philosophie positive*. Paris : PUF.

Demazure M. (1997) *Cours d'algèbre. Primalité. Divisibilité. Codes*. Paris : Cassini.

Dhombres J. (2004) Les formes militantes d'un professeur de mathématiques dans la seconde moitié du XIXe siècle. *Sciences et techniques en perspective* 8(2), 79-138.

Dhombres J. (2003) Modèles, modélisations et mathématisations, en vue d'activités IREMs. In Comité Scientifique des IREM (Ed.) (pp. 8-12) *La modélisation*. Paris : IREM Paris 7.

Gauthier G., Nicolet C. (1987) *La laïcité en mémoire*. Paris : Edilig.

Gispert H. (1989) L'enseignement scientifique supérieur et ses enseignants, 1860-1900 : les mathématiques. *Histoire de l'éducation* 41, 47-78.

Kremer-Marietti A., Dhombres J. (2006) *L'épistémologie, état des lieux*. Paris : Ellipses.

Platon (1966) *La République*. Baccou R. (Trad.). Paris : Garnier Flammarion.

Rousseau J.-J. (1762) *Emile ou de l'Education*. Rééd. (1966). Paris : Garnier Flammarion.

MEN (1997) Mission du professeur exerçant en collège, en lycée d'enseignement général et technologique ou en lycée professionnel. *Bulletin officiel* 22, 1571-1576.

MEN (2010) Programmes d'enseignement du lycée. Annexes. *Bulletin officiel* spécial 9.

L'HISTOIRE DES MATHEMATIQUES DANS LA FORMATION : UNE PERSPECTIVE HISTORIQUE (1975-2010)

Evelyne BARBIN*

Résumé – La manière dont l'histoire des mathématiques intervient dans la formation des enseignants et dans celle des élèves dépend du contexte éducatif et institutionnel. Pour illustrer cette approche, nous prenons l'exemple des recherches et des travaux des IREMs en France dans ce domaine entre 1975 et 2010. Nous insistons particulièrement sur les apports épistémologiques, culturels et pluridisciplinaires de l'introduction d'une perspective historique dans l'enseignement mathématique.

Mots-clefs : épistémologie, culture mathématique, pluridisciplinarité, perspective historique, contexte social

Abstract – The manner in which the history of mathematics takes place in the teacher training and in the teaching and learning of students depends on the educative ans institutionnal context. To illustrate this approach, we take the example of the researchs and the works in the French IREMs in this field betwen 1975 and 2010. We specially stress on the epistemological, cultural ans pluridisciplinary contributions of the introduction of a an historical perspective in mathematical teaching.

Keywords: epistemology, mathematical culture, pluridisciplinarity, historical perspective, social context

Si l'intérêt pour l'histoire s'est poursuivi et même amplifié au cours des trente dernières années en France, il a eu divers motifs et il a pris diverses formes. En particulier, les apports attendus dans les années 1970 et celui des années 2010 sont en partie différents (Barbin 1987). Nous reprenons ici en partie les propos d'un article récent paru dans un numéro spécial de la revue *Repères IREM* sur la formation des enseignants (Barbin 2010). Puis nous les illustrons à partir des productions et des formations, au niveau académique, national et européen, initiées à partir des IREMs dans cette période. Les activités épistémologiques et historiques des IREMs sont mises en réseau dans une Commission inter-IREM qui rassemble des participants, dont la moitié est enseignant de lycées, et l'autre moitié est constituée d'enseignants de collèges et d'universitaires.

I. FIN DES ANNEES 1970 : UNE THERAPEUTIQUE CONTRE LE DOGMATISME

La Commission inter-IREM « Épistémologie et histoire des mathématiques » a été créée en mai 1975 à l'initiative de Jean-Louis Ovaert et de Christian Houzel. Rappelons que les années 1970 furent celles de la « réforme des mathématiques modernes ». Les promoteurs de cette réforme dénonçaient le style qualifié d'historique de l'enseignement antérieur et reprochaient à cet enseignement de ne pas donner une conception unifiée des mathématiques (Barbin 1987, p. 177). La réforme donnait, selon une terminologie de l'époque, le dernier « spectacle » des mathématiques. Assez vite, cette réforme et sa mise en œuvre sont remises en cause, en particulier dans les IREMs, car elle présentait les mathématiques comme un langage et parce que les mathématiques étaient devenues une discipline de sélection.

Les recherches historiques ont constitué alors pour les enseignants, comme nous l'écrivions en 1980, une « thérapeutique contre le dogmatisme, un ensemble de moyens leur permettant de mieux s'approprier et maîtriser leur savoir ». Nous ajoutions que :

> Pour les élèves, elles ont préparé un terrain où les mathématiques cessent de jouer le rôle de monstre froid qui normalise, juge et condamne, pour être rétablies dans leur statut d'activité culturelle indissociable des autres pratiques humaines. (CII 1982, p. 6)

* IREM et Centre François Viète – France – evelyne.barbin@wanadoo.fr

© Barbin E. (2012) L'histoire des mathématiques dans la formation : une perspective historique (1975-2010). In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT4, pp. 546–554). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

Il ne s'agit plus de voir les mathématiques comme un produit achevé, mais comme un processus historique, ni de les comprendre comme un langage, mais comme une activité intellectuelle (Barbin 1989, p. 26-28). En réaction contre le rôle sélectif des mathématiques, une réflexion sur les relations entre mathématiques et société est entreprise dans les IREMs, qui organiseront à la fin des années 1970 trois colloques sur ce thème. Nous résumions l'apport de l'histoire des mathématiques en 1982 en écrivant :

> Le regard de l'historien […], loin de commémorer une mathématique morte, y observe au contraire un savoir débordant de vitalité ; en prise sur des recherches intra et extra mathématiques ; inséparables de problèmes d'astronomie et de physique, d'optique, de technique et de création artistique ; transi de controverses philosophiques et théologiques ; confronté aux pouvoirs et aux institutions. (CII 1982, p. 5)

II. DEPUIS 1980 : AUTRES FORMES DE PANACEES POUR L'HISTOIRE DES MATHEMATIQUES

Après l'abandon de la réforme, l'enseignement des mathématiques a connu plusieurs « nouveaux programmes » successifs, qui n'étaient pas guidés, comme lors de la « réforme des mathématiques modernes », par un plan d'ensemble. Tout au contraire, il résulte des différentes suppressions et ajouts qui ont été faits, un éparpillement des savoirs et des procédés. De sorte que, bien que les programmes soient allégés, ils semblent toujours trop lourds pour le temps imparti qui a d'ailleurs beaucoup diminué. Après la réforme des mathématiques modernes, qui reposait sur une conception axiomatique forte, il a été proposé dans les années 1980 d'enseigner à partir d'« îlots déductifs ». Depuis, l'idée de déduction s'est fortement diluée. Les raisonnements sont souvent réduits au collège à enchaîner une ou deux étapes. De plus, les assertions ont un statut confus : définition ? propriété ? proposition ? Enfin, les « nouveaux programmes » sont souvent interprétés comme une réduction des mathématiques à une « discipline de service ».

L'histoire des mathématiques devient alors plutôt une « thérapeutique contre l'hétéroclisme », permettant de construire et de relier les différents savoirs mathématiques à partir de champs de problèmes, mathématiques ou non, d'analyser la construction d'un savoir à partir ou à l'encontre d'autres savoirs, de repérer des savoirs pérennes, de comprendre les liens entre les mathématiques et les autres activités scientifiques. Le colloque inter-IREM de Montpellier de 1985 portait sur « le rôle des problèmes dans histoire et dans l'activité mathématique ». Il fut suivi de la publication de l'ouvrage *Histoire de problèmes, histoire des mathématiques* en 1993 où il est question du problème de l'irrationalité, de la résolution des équations aussi bien que de la représentation en perspective dans l'histoire, et où il est proposé aux lecteurs des « exercices historiques » (IREM 1993). Nous écrivions dans les actes du colloque inter-IREM sur les « mathématiques dans la longue durée » que « prendre l'histoire à partir de grandes problématiques est une manière de saisir en même temps la pérennité de certaines conceptions et les différences entre les approches successives » (IREM 2002). L'histoire montre que les mathématiques n'ont pas été inventées pour servir de support à des activités pédagogiques mais qu'elles ont été d'abord un instrument de compréhension et de maîtrise du monde. Ceci est essentiel, puisqu'en dépend aussi la légitimation d'un enseignement des mathématiques pour tous.

Il peut paraître paradoxal, qu'après avoir avancé à l'époque de la « réforme des mathématiques modernes » que les mathématiques sont une activité, certains dénoncent plus tard un « activisme pédagogique » (Bkouche 1992). Pour lever ce semblant de paradoxe, je me rapporterais à un échange avec un stagiaire de l'IUFM de Créteil dont le mémoire portait sur l'enseignement par activités. Dans son mémoire, l'auteur se félicitait d'avoir toujours pu montrer à ses élèves que les savoirs ou les connaissances servaient à résoudre des problèmes, mais il regrettait que pour la trigonométrie se soit impossible car « la trigonométrie ne sert à rien ».

Cette affirmation indique une méconnaissance historique, car la trigonométrie, comme mesure des angles à l'aide de mesures de segments est très ancienne. Nous pouvons trouver cette notion dans les problèmes de pente des pyramides des mathématiques égyptiennes vers 1650 avant J.-C., elle est présente dans la géométrie d'Euclide et constituée dans l'astronomie de Ptolémée. La trigonométrie peut servir à se repérer dans l'espace ou à mesurer des distances inaccessibles (Guichard 2010). Inversement, la connaissance des angles permet de mesurer les distances. Ainsi, le mathématicien Alexis Clairaut enseigne en 1765 les angles à partir de la triangulation utilisée pour établir des cartes géographiques. Mais, l'affirmation laisse aussi à penser que le jeune stagiaire imaginait qu'enseigner les savoirs comme activités, serait seulement une injonction didactique, ou que l'on enseignerait des savoirs qui ne seraient que des objets scolaires.

Ici, l'histoire des mathématiques peut servir de « thérapeutique contre une pédagogisation » de l'enseignement des mathématiques, car elle indique la portée authentique des savoirs enseignés. Autrement dit, enseigner par les activités, ou mieux par les problèmes, mérite d'être épaulé par une connaissance de l'histoire. Il n'y a plus de paradoxe.

III. LE TRIPLE ENJEU DE L'HISTOIRE DES MATHEMATIQUES

Les apports de l'histoire à l'enseignement sont liés au contenu de cet enseignement, mais aussi aux préoccupations des enseignants. Or, comme l'a écrit Henri-Irénée Marrou, « l'histoire est inséparable de l'historien ». De ce point de vue, l'histoire qui intéresse les enseignants peut avoir trois vertus en étant dépaysante, épistémologique et culturelle (Barbin 1997, p. 72).

1. Une histoire dépaysante

L'histoire a la vertu de nous dépayser, de nous « étonner de ce qui va de soi » comme l'écrit l'historien Paul Veyne. Tout simplement et d'abord, parce que les mathématiques n'ont pas toujours été, ni pas toujours été telles qu'on les enseigne aujourd'hui. Elles sont l'œuvre d'hommes, de femmes et de communautés. Ensuite, elles ont été produites à une certaine époque, dont elles reflètent les préoccupations et les conceptions mathématiques. Enfin, elles ont été produites dans une aire culturelle et géographique et elles ont circulé. Le dépaysement est aussi bien mathématique que culturel. Il peut nous permettre de comprendre les difficultés de nos élèves qui ne sont pas, comme nous enseignants, en pays connu. Il nous aide aussi à mieux entendre leurs questions ou à mieux interpréter leurs erreurs. Nous avons utilisé le terme de « dépaysement » dans un article de 1997 (Barbin 1997), suite à une conférence à l'UQAM de Montréal en 1996. Il est à noter que le terme de « dépaysement » a été traduit par « réorientation » dans le Rapport de l'ICME Study (Fauvel et Van Maanen 2000, p. 292).

Après un cours sur l'histoire des méthodes de fausse position à l'IUFM de Créteil, une stagiaire m'avait raconté qu'elle n'avait pas arrêté immédiatement un élève de collège qui essayait de résoudre un problème numérique en essayant des nombres. Au contraire, elle avait fait avec lui le chemin qui permet d'aboutir d'une mauvaise valeur à la solution. Les méthodes de fausse position sont très anciennes, on les trouve en Inde, dans les Pays d'Islam puis en Europe à la Renaissance (Chabert 2011). Elles reposent sur un raisonnement de proportionnalité et c'est peut-être la raison pour laquelle elles étaient toujours enseignées dans les années 1900. Il va de soi, pour nous enseignants, que la résolution d'un problème, dit du premier degré, passe par celle d'une équation. Pourtant l'algèbre a été inventée par Al-

Kwarizmi pour résoudre des problèmes dits du second degré. Ce constat dépaysant soulève bien des questions : pourquoi enseigner l'algèbre s'il s'agit seulement de résoudre des problèmes du premier degré, souvent si simples que les élèves ont envie d'essayer des nombres ? L'investissement algébrique n'est-il pas démesuré vis-à-vis des effets qu'il procure ? En général, les savoirs et les procédures enseignés sont-ils bien en adéquation avec la difficulté des problèmes posés ?

La valeur dépaysante de l'histoire suppose une approche de l'histoire par la lecture des textes originaux, qu'il ne s'agit pas de transposer d'emblée en les traduisant en termes modernes. La conception qui sous-tend les méthodes de fausse position s'estompe si nous la traduisons d'emblée sous la forme

$$a\,x = b \text{ ou } a\,x + b = c,$$

et si nous la justifions en ces termes littéraux. En revanche, la démonstration géométrique de Qusta Ibn-Luqa permet d'approfondir les relations entre parallélisme et proportionnalité et de proposer une approche instrumentale de l'équation d'une droite.

2. *Une histoire épistémologique*

Nous donnerons trois exemples d'une histoire épistémologique qui peut intéresser l'enseignant. Le premier exemple concerne les transformations réciproques des problèmes et des concepts. Le second exemple concerne les statuts des démonstrations et des méthodes. Le troisième exemple concerne la notion de nombre.

Dans l'enseignement, un problème donne lieu à l'application d'un concept ou d'un savoir, en général celui qui a été abordé en cours juste avant. Puis un autre problème suivra qui permettra d'utiliser un autre concept ou un autre savoir, etc. Alors que l'histoire montre qu'un problème connaît des transformations, et que les résolutions nécessitent des transformations de concepts. Ainsi, les démonstrations sur les tangentes sont géométriques dans les textes grecs, tandis que dans les années 1630, le problème de trouver la tangente à une courbe devient un problème cinématique chez Roberval et un problème optique chez Descartes. De sorte que les notions de tangente et de courbe s'en trouvent changées. Roberval conçoit une courbe comme la trajectoire d'un point en mouvement et la tangente comme la direction du mouvement en un point. Descartes associe une équation à une courbe et recherche un cercle tangent à la courbe en un point.

À partir du collège, l'élève doit « démontrer », et il s'agit alors de raisonner en s'appuyant sur la déduction logique. Mais il peut aussi obtenir des résultats et des propositions en utilisant des calculs algébriques, puis plus tard des calculs vectoriels. Quels sont les statuts de ces calculs vis-à-vis du discours démonstratif ? L'histoire permet de les comprendre chacun en tant que « méthode », notion qui a disparu en grande partie de l'enseignement, à savoir la méthode algébrique de Descartes de 1637 et la méthode des équipollences de Bellavitis de 1837.

Dans les programmes, les entiers, les décimaux, les fractions, les négatifs, les irrationnels, les complexes, sont tous considérés, au même titre, comme des nombres. Il semblerait que cela ne pose pas de difficulté : les élèves accepteraient sans problème que le produit de deux négatifs soit positif, « puisque c'est bien ce qu'indique la calculatrice », tout comme la racine carrée correspond à une touche de la calculatrice. Il en résulte que, lorsqu'il faut opérer avec les nombres négatifs ou irrationnels, pourtant si différents des entiers, des élèves considèrent qu'ils se comportent « comme » ces entiers. C'est ainsi que, la somme de deux racines carrées devient la racine carrée de la somme, etc. L'histoire indique les obstacles épistémologiques qu'il a fallu franchir pour étendre la notion de nombre. L'existence et la nature de ces obstacles sont intéressantes pour l'enseignant, tout comme les arguments qui ont conduit à étendre la notion de nombre.

3. Une histoire culturelle

L'histoire culturelle des mathématiques situe les mathématiques dans le contexte philosophique, littéraire, artistique ou social d'une époque. Elle établit des rapprochements historiques significatifs, comme la démonstration de la géométrie grecque, avec la naissance de la démocratie, ou comme la méthode de résolution des problèmes de Descartes, avec la volonté de progrès de son siècle. Les enseignants de mathématiques peuvent ainsi montrer des liens avec les enseignements des professeurs de philosophie, mais aussi d'histoire. Un thème, comme l'histoire de la perspective, intéresse aussi les enseignants d'arts plastiques. Dès la fin des années 1970, l'IREM de Caen a commencé à étudier ce thème, qui est maintenant « passé dans les programmes » et bien connu par les enseignants (Le Goff 1993).

Les relations historiques entre les mathématiques et la philosophie sont profondes et constitutives. La Commission inter-IREM « Épistémologie et histoire des mathématiques » comprend, depuis ses débuts en 1975, des enseignants de philosophie. Dans les années 1990, elle a inscrit dans ses séminaires et ses universités d'été la question des relations entre les philosophes et les mathématiques. Il en a résulté un ouvrage, *Les philosophes et les mathématiques*, qui offre un panorama de la façon dont des philosophes ont pensé les mathématiques, mais aussi les inspirations qu'ils ont pu en tirer pour leur théorie de la connaissance ou pour leur doctrine métaphysique. Le panorama couvre seize philosophes, de Platon à Cavaillès, en passant par Pascal, Comte, Husserl ou Wittgenstein (Barbin et Caveing 1996).

IV. L'HISTOIRE DES MATHEMATIQUES COMME INSTRUMENT D'UNE APPROCHE PLURIDISCIPLINAIRE

L'histoire des mathématiques conduit à l'histoire des sciences. En effet, la lecture d'un texte ancien nécessite souvent de le situer vis-à-vis des préoccupations scientifiques de l'auteur. La résolution d'un problème demande parfois aussi d'établir des passerelles ou de faire des analogies entre des sciences. Inversement, il est intéressant d'examiner le passage de l'histoire des sciences à celle des mathématiques, parce que la création et l'autonomisation des différentes sciences sont des faits de l'histoire des sciences et parce que la séparation entre les différentes sciences explicite des distinctions établies dans la résolution de problèmes.

1. La circulation entre les sciences

La circulation entre l'histoire des mathématiques et l'histoire d'une science peut être du côté des problèmes, par rétrécissement ou au contraire par élargissement d'un problème. Par exemple, le problème inverse des tangentes – c'est-à-dire de trouver une courbe connaissant une propriété de ses tangentes – devient, pour Leibniz, le problème auquel doivent se ramener les problèmes physico-mathématiques, comme celui de la chaînette. La circulation peut aussi être du côté des concepts et des méthodes : spécification d'une science par autonomisation d'un concept ou d'une méthode, transfert d'un concept ou d'une méthode d'une science à une autre. Par exemple, Newton fonde son calcul des fluxions sur les notions de mouvement et de temps, qui appartiennent à la physique depuis Aristote.

Le cloisonnement et le décloisonnement des sciences est un propos à historiciser. Par exemple, dans son *Organon*, Aristote condamne le « mélange des genres », comme ceux de l'arithmétique et de la géométrie. Son propos est de fonder la science sur la démonstration axiomatique afin de distinguer la science de l'opinion, de sorte que deux sciences, dépendant d'axiomes différents, ne doivent pas se mélanger. En revanche, Descartes dans les *Règles pour la direction de l'esprit*, prononce l'union et l'interdépendance des sciences. Son propos est tout autre que celui d'Aristote, puisqu'il s'agit de donner des « règles pour acquérir plus facilement la science ». Or, ce qui est commun à toutes les sciences, ce sont les « opérations de l'entendement » que nous sollicitons pour les acquérir.

De manière générale, toutes les universités d'été, organisées depuis 1984 par la commission inter-IREM pour le ministère de l'Éducation nationale, ont été des « universités d'été interdisciplinaires » ouvertes aux enseignants de sciences physiques, de philosophie et d'histoire. La septième, organisée par l'IREM à Nantes en 1997, avait pour thèmes « les mathématiques et la réalité » à propos des relations entre les mathématiques et les sciences physiques, et aussi « les mathématiques et la navigation ». En 2001, le thème de la neuvième université d'été organisée par les IREMs était « l'histoire des sciences comme instrument d'une approche pluridisciplinaire des enseignements en collège et en lycée » (DESCO 2003).

2. Les sciences dans l'histoire des idées, des sociétés et des techniques

Nous soulignons ici encore deux enjeux globaux de l'histoire des sciences vis-à-vis de l'enseignement : celui de replacer les sciences dans l'histoire des idées, des sociétés, des techniques, et celui de susciter une réflexion en profondeur sur les méthodes et les contenus de l'enseignement scientifique. L'histoire des sciences peut jouer un rôle essentiel pour garder des enseignements scientifiques cohérents et pour proposer une approche pluridisciplinaire fructueuse. À condition cependant qu'elle ne devienne pas une discipline scolaire de plus, détachée de la pratique des sciences proprement dit. Il s'agit, plutôt et d'abord, de rassembler des enseignants autour de cette histoire, de répondre au souhait exprimé dans le Rapport Lecourt, celui de

> montrer aux élèves une réflexion commune de leurs enseignants sur les démarches, les perspectives et les enjeux des sciences qu'on leur enseigne. (Lecourt 2000)

Plusieurs exemples ont été donnés lors de l'université d'été de 2001 où l'histoire est une ressource en vue d'une approche pluridisciplinaire de l'enseignement des sciences. Parmi ceux-ci, nous citerons la théorie de la reproduction de Buffon pour les liens entre la biologie et la physique, l'étude de la musique chez Euler pour les liens entre les mathématiques, la physique et la biologie, les conceptions des atomes pour les liens entre la physique et la chimie, les travaux de Galilée, pour les liens entre les mathématiques, la physique et l'astronomie.

L'analyse historique de l'étude des mouvements par Galilée est au carrefour de la philosophie, des techniques, de la physique et des mathématiques. Elle souligne l'opposition entre deux questionnements philosophiques des phénomènes physiques : l'un par les causes et l'autre par les effets de ces phénomènes. Aristote est du côté du premier et Galilée du second. Ensuite, elle situe les travaux galiléens dans le contexte de la recherche des trajectoires des projectiles pour les artilleurs. Les *Discours concernant deux sciences nouvelles* de 1638 se terminent par des tables de portée selon l'inclinaison du jet (ou du canon). Ce problème avait intéressé l'ingénieur et mathématicien Tartaglia au siècle précédent. Puis, elle identifie les rôles différents des hypothèses, des expériences et des raisonnements dans la physique moderne initiée par Galilée. Enfin, elle cerne les difficultés d'une notion physique comme celle d'accélération, tout en rendant compte des difficultés d'ordre mathématique dans la démonstration de la loi de chute des graves.

Les relations entre les mathématiques et les autres disciplines ont été subsumées ces dernières années par la notion de modélisation. Il a été tenu à ce sujet des propos qui semblent contradictoires, si on ne tient pas compte des différentes acceptions qu'elle a prises dans son histoire, qui est récente. En effet, une théorie mathématique peut avoir besoin de modèle, mais un modèle peut aussi être une construction mathématique élaborée à partir d'une réalité. La notion de mathématiques comme « science expérimentale » dépend aussi d'un va-et-vient. En effet, les mathématiques ont été construites dans l'histoire à partir d'expériences, la géométrie notamment à partir d'expériences spatiales, mais elles sont aussi productrices d'expériences, grâce à l'invention de logiciels de géométrie par exemple.

V. L'INTRODUCTION D'UNE PERSPECTIVE HISTORIQUE DANS LA FORMATION MATHEMATIQUE

Il y a donc des enjeux spécifiques de l'histoire dans la formation des enseignants. Dans la formation initiale des enseignants, elle va à l'encontre d'un savoir « scolaire » et d'un savoir de plus en plus « hétéroclite ». Dans la formation continue des enseignants, elle autorise une réflexion sur les contenus et les programmes enseignés. Par exemple, l'histoire des rencontres historiques entre probabilités et statistiques est un élément de réflexion vis-à-vis de l'approche statistique de la probabilité d'un événement (IREM 2004). L'introduction de l'histoire des mathématiques va à l'encontre d'une vision arbitraire des procédures mathématiques enseignées. La connaissance historique permet à un enseignant, auquel un élève demande « à quoi cela sert ? », de ne pas répondre « en maths, c'est comme ça qu'on fait » ou « vous le verrez plus tard ».

1. *La formation épistémologique des enseignants*

La lecture des textes anciens est particulièrement bénéfique vis-à-vis de ces enjeux. Elle permet un « choc culturel », en plongeant d'emblée l'histoire des mathématiques dans l'histoire. Il ne s'agit pas alors de lire ces textes en rapport avec nos connaissances, mais plutôt dans le contexte de celui qui les a écrits. C'est à cette condition qu'elle devient une source d'un « étonnement épistémologique », par une mise en question des savoirs et des procédures qui « vont de soi ». Elle confronte la question : pourquoi les contemporains n'ont-ils pas compris telle nouveauté ? à la question : pourquoi les élèves ne comprennent-ils pas ?

La pensée historique conduit à l'idée de rectification des notions, car une notion peut changer dans l'histoire et un même mot peut désigner dans le temps plusieurs notions. Cette idée introduit à son tour celle du long terme dans la temporalité enseignante, de sorte à s'appuyer sur le passé de l'élève et à anticiper le futur de l'élève. Par exemple, la notion de fonction comme correspondance, qui est celle de l'enseignement actuel, est l'aboutissement d'un processus historique qui va de la fonction comme expression analytique à la fonction comme dépendance, puis comme correspondance. Dans ce processus interviennent des questions physiques, mais aussi épistémologiques. Or, dans l'enseignement, on voit des élèves qui, après avoir surtout fréquenté des fonctions définies par une expression, résistent à l'idée générale de correspondance. L'histoire des relations entre les notions de fonction continue et de fonction dérivable mérite d'être mise en rapport avec les difficultés dans l'enseignement de l'analyse. Comme souvent, l'histoire permet aux enseignants de se poser la question de l'adéquation entre les notions enseignées vis-à-vis des problèmes étudiés, les unes étant souvent trop sophistiquées et les autres trop simples.

2. *L'intégration de l'histoire des mathématiques dans la classe*

Les enseignants peuvent nourrir leur enseignement par une réflexion historique et épistémologique, mais ils peuvent aussi introduire directement des éléments historiques auprès des élèves. Un enseignement autonome de l'histoire des mathématiques ou des sciences pourrait conduire à une discipline autonome, coupée des enseignements scientifiques, avec le risque de perdre le bénéfice que nous attribuons à l'histoire. La voie développée par les IREMs est celle de donner des cours d'histoire, ni non plus d'un enseignement calqué sur l'histoire. Cette expression désigne la mobilisation de toute la réflexion historique et épistémologique de l'enseignant. Il s'agit d'intégrer l'histoire dans l'enseignement, de dater l'invention d'un concept, d'expliquer la portée historique d'un concept, de faire lire des textes anciens, mais aussi de résoudre des « problèmes historiques ». L'objectif n'est pas de créer une discipline ou un moment scolaire complètement détaché de la pratique des mathématiques.

Le premier colloque organisé par les IREMs à la fin des années 1978 portait sur « l'introduction d'une perspective historique » dans l'enseignement. Un ouvrage relatant de telles expériences fut publié par l'IREM de Lyon à l'occasion du congrès international sur l'enseignement des mathématiques (ICME) qui s'est tenu en 1988 à Budapest. Dès 1980, la Commission inter-IREM a participé aux rencontres de l'International Study Group on the Relations between History and Pedagogy of Mathematics (HPM) affilié à ICME. L'ouvrage *intitulé Pour une perspective historique sur l'enseignement des mathématiques* (IREM 1988), a ensuite été édité en anglais par l'Association britannique des professeurs de mathématiques.

La commission inter-IREM a écrit une suite à cet ouvrage, Des défis mathématiques d'Euclide à Condorcet, paru en 2010. Celui-ci rassemble neuf expériences d'introduction d'une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques, depuis le collège jusqu'au post-baccalauréat. Il ne propose pas une formule toute faite ou une réponse unique. Les différentes expériences relatées par leurs auteurs indiquent la variété des ressources qu'un enseignant de mathématiques peut trouver dans l'histoire de sa discipline à tous les niveaux d'enseignement. En effet, si les auteurs des chapitres indiquent les circonstances dans lesquelles ces expériences ont eu lieu, c'est pour cerner leurs conditions et pour inviter les lecteurs à les adapter ou à les transférer à d'autres lieux, d'autres classes ou d'autres niveaux. Car beaucoup d'elles peuvent être imaginées dans d'autres classes que celles où elles ont d'abord eu lieu. Ceci parce que les programmes et les élèves changent, mais aussi, plus profondément, parce que l'histoire des mathématiques permet d'explorer des savoirs pérennes, qui font partie du socle commun de l'enseignement des mathématiques.

L'introduction d'une perspective historique dans l'enseignement nécessite, qu'en amont, les enseignants reçoivent une formation. Nous espérons donc que cette formation sera donnée partout en formation initiale. Les IREMs continuent à organiser, quand cela est possible, des stages pour la formation continue. Les universités d'été européennes destinées à rassembler enseignants, didacticiens et historiens continuent à être organisées : la prochaine aura lieu à Barcelone en Espagne en juillet 2014. L'histoire continue.

REFERENCES

Barbin E. (1987) Histoire et enseignement des mathématiques, dix ans d'histoire des mathématiques dans les IREM. *Bulletin APMEP* 358, 143-163.

Barbin E. (1989) Les effets pervers de la Réforme des Mathématiques Modernes. *Société Française* 33, 26-28.

Barbin E., Caveing M. (Eds.) (1996) *Les philosophes et les mathématiques*. Paris : Ellipses.

Barbin E. (1997) Histoire et enseignement des mathématiques : pourquoi ? comment ? *Bulletin de l'AMQ* 37(1), 20-25.

Bkouche R. (1992) L'enseignement scientifique entre l'illusion langagière et l'activisme pédagogique. *Repères-IREM* 10, 5-14.

Chabert J.-L. et al. (1993) *Histoires d'algorithmes : du caillou à la puce*. Paris : Belin.

DESCO (2003) *La pluridisciplinarité dans les enseignements scientifiques : 1er tome Histoire des sciences*. Caen : CRDP.

Fauvel J ., Van Maanen J. (2000) *History in Mathematics Education*. Dordrecht : Kluwer.

Guichard J.-P. (2010) Les angles au collège : arpentage et navigation. In Barbin E. (Ed.) (pp. 7-25) *De grands défis mathématiques d'Euclide à Condorcet* Paris : Vuibert.

Lecourt D. (2000) *Rapport sur l'enseignement de la philosophie des sciences*. Paris : Ministère de l'Éducation, de la Recherche et de la Technologie.

Le Goff J.-P. (1993) Mais où est donc passée la troisième dimension ? In IREM (Ed.) (pp. 199-240) *Histoires de problèmes, histoire des mathématiques*. Paris : Ellipses.

CII (1982) *La Rigueur et le calcul*. Paris : CEDIC.

IREM (1988) *Pour une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques*. Lyon : IREM.

IREM (2002) *4000 ans d'histoire des mathématiques*. Rennes : IREM.

IREM (2004) *Histoires de probabilités et de statistiques*. Paris : Ellipses.

LE RAPPORT À LA CULTURE MATHÉMATIQUE : AVENUES POUR LA FORMATION DES ENSEIGNANTS

Michel BEAUDOIN*

Résumé – Le texte présente des résultats d'une recherche portant sur le rapport à la culture mathématique d'enseignants du primaire et du secondaire du Québec. Quatre profils types portant sur le volet pédagogique du rapport à la culture mathématique des enseignants sont explicités à partir d'un cadre théorique établi par Falardeau et Simard (2007). Suite à l'analyse, le texte suggère des avenues pour mieux harmoniser la formation des enseignants de mathématiques à l'approche culturelle suggérée dans le programme de formation de l'école québécoise.

Mots-clefs : culture mathématique, formation des enseignants, rapport à la culture, approche culturelle, stagiaires en enseignement

Abstract – The text comments research results concerning the relation to mathematical culture of teachers in primary and secondary schools in Quebec. Four typical profiles on the educational component of the relation of teachers to mathematical culture are explained from a theoretical framework established by Falardeau and Simard (2007). The text finally suggests avenues to harmonize the training of math teachers and the cultural approach suggested in the Quebec education program.

Keywords: mathematical culture, teachers' education, relation to culture, cultural approach, trainee teachers

I. INTRODUCTION

Ce texte s'inscrit à la suite des travaux présentés à Espace Mathématique Francophone 2009 à Dakar (Beaudoin et Bellehumeur 2009). Nous y avions présenté les perceptions de la culture mathématique des enseignants de la région de l'Outaouais au Québec. Une première analyse avait permis de constater que les enseignants avaient une perception positive de plusieurs constituantes de la culture mathématique dans leur milieu et considéraient aussi positivement certains aspects reliés à une pédagogie renouvelée.

D'autre part, les résultats soulevaient l'intérêt de poursuivre l'analyse des données sous d'autres volets. Les volets visés étaient les conceptions de la mathématique, de son enseignement et de son apprentissage, l'autorégulation des apprentissages mathématiques et le rapport des enseignants avec la culture mathématique.

Ce texte présente surtout des résultats en regard du rapport des enseignants à la culture mathématique et leurs retombées en matière de formation (initiale et continue) des enseignants de mathématique.

II. CONTEXTE

L'apprentissage de la mathématique en contexte scolaire a été, depuis quelques années, sujet à une évolution importante au Québec. L'implantation de nouveaux programmes de formation au primaire (MEQ 2001) et au secondaire (MELS 2007 ; 2003) a mis l'accent sur l'appropriation d'une mathématique dite « culturelle », plus destinée à former des citoyens responsables et compétents que des spécialistes de cette discipline. Les contenus et les processus mathématiques devraient être appréhendés fréquemment à travers des situations signifiantes pour l'élève, ces situations permettant le développement de compétences

* Université du Québec en Outaouais — Canada — michel.beaudoin@uqo.ca

© Beaudoin Michel (2012) Le rapport à la culture mathématique : avenues pour la formation des enseignants. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT4, pp. 555–567). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

disciplinaires et transversales. L'élève est maintenant considéré comme l'agent principal de ses apprentissages et l'enseignant est amené à jouer surtout un rôle de guide dans le cheminement des élèves.

La pénétration des TIC dans la vie de tous les jours, dans le monde professionnel et dans l'enseignement a modifié beaucoup d'attitudes et de pratiques enseignantes (Niess 2005). En mathématique, une puissance de calcul remarquable est maintenant à la disposition de tous les apprenants, même si ces technologies ne sont pas utilisées à leur plein potentiel, particulièrement en formation des enseignants (Morin et Corriveau 2010 ; Raby 2005)

Le renouveau curriculaire des années 2000 répond à ce besoin d'une formation mathématique actualisée et les nouveaux programmes tiennent compte des défis émergents de notre société. La culture en est un volet important, à la fois dans les programmes de formation des jeunes (MELS 2007, 2003 ; MEQ 2001a) et dans le programme québécois de formation des enseignants (MEQ 2001b).

La mathématique constitue une partie fondamentale de la formation des jeunes du primaire et du secondaire. C'est une discipline à laquelle la société accorde une grande importance et pour laquelle un niveau minimal de compétence est exigé pour réaliser des études supérieures. La mathématique est utilisée couramment dans la vie quotidienne et dans nombre de disciplines scientifiques : elle constitue une partie importante de notre culture.

1. La culture mathématique

Le Gouvernement du Canada utilise la définition suivante de la culture mathématique.

> L'aptitude d'un individu à identifier et à comprendre les divers rôles joués par les mathématiques dans le monde, à porter des jugements fondés à leur propos, et à s'engager dans des activités mathématiques, en fonction des exigences de sa vie présente et future en tant que citoyen constructif, impliqué et réfléchi. (Gouvernement du Canada 2003).

Cette définition de la culture mathématique est aussi utilisée dans le Programme de formation de l'école québécoise (PFÉQ) (MELS 2007 ; 2003) et en constitue un fondement du volet « mathématique ».

Suivant cette définition, la culture mathématique comporte trois composantes, à savoir les contenus, processus et les situations mathématiques. Ces trois composantes se retrouvent aussi de façon explicite dans le programme québécois de mathématique et forment les bases de l'explicitation des apprentissages disciplinaires des élèves du primaire et du secondaire au Québec. Les *contenus* mathématiques sont les concepts qui sous-tendent la culture mathématique. Les *processus* mathématiques sont des savoir-faire propres aux différents champs de cette discipline. Ces processus s'articulent sur trois niveaux, à savoir des calculs simples, la mise en relation et la mathématisation. Enfin, les *situations* où la mathématique est utilisée traitent de contextes allant du privé aux affaires publiques ou scientifiques (Gouvernement du Canada 2003).

2. Le rapport à la culture des enseignants

L'approche culturelle de l'enseignement est relativement nouvelle dans les programmes de formation québécois, tant dans les programmes destinés aux élèves (MELS 2003 ; 2007 ; MEQ 2001a) que dans ceux destinés aux enseignants (MEQ 2001b). Elle semble encore imprécise pour les enseignants en formation ainsi que pour ceux en exercice (Portelance et Gervais 2008). Au sens commun, la mathématique est peu reliée au domaine culturel (associé généralement aux arts et aux langues). La question du rapport à la culture des enseignants en ce qui concerne la mathématique est donc d'intérêt, dans la visée d'une meilleure appropriation des programmes et d'une formation des enseignants actualisée.

Falardeau et Simard (2007) proposent un cadre théorique pour décrire le rapport à la culture des enseignants au Québec. Ils suggèrent quatre types de rapports des enseignants à la culture, chaque type pouvant être considéré sous trois dimensions : la dimension épistémique, la dimension subjective et la dimension sociale. Chaque dimension peut être étudiée sous deux plans, le plan individuel et le plan pédagogique. Le plan individuel décrit le rapport (général) de l'enseignant avec la culture tandis que le plan pédagogique traite du rapport plus spécifique avec la culture que l'enseignant manifeste dans ses relations professionnelles avec les élèves. Quatre types de rapports avec la culture ont été identifiés et décrits à travers les trois dimensions et les deux plans proposés : le rapport de type *désimpliqué*, le rapport de type *scolaire*, le rapport de type *instrumentaliste* et le rapport de type *intégratif-évolutif*. Comme nous nous intéressons à une situation présente dans les écoles, nous n'avons considéré pour cette recherche que le plan pédagogique, c'est-à-dire celui qui touche au rapport de l'enseignant avec ses élèves et le milieu de l'enseignement.

Le cadre théorique de Falardeau et Simard (2007) a été construit dans un contexte différent de celui de la présente recherche. Nous avons par conséquent interprété les quatre profils présentés par les auteurs dans le contexte de nos travaux, c'est-à-dire de l'enseignement de la mathématique.

Pour l'enseignant de mathématique manifestant un rapport de type *désimpliqué*, la culture n'est pas beaucoup présente à l'école, elle est surtout ailleurs et son développement est peu dévolu à l'enseignant. L'enseignant *désimpliqué* se dégage de son rôle d'agent culturel. On parle d'une mathématique plutôt apprise, basée sur des règles, procédures, etc. L'enseignant ne s'engage pas dans le processus de renouvellement des pratiques nécessaires pour l'émergence d'une mathématique culturelle à l'école. L'enseignant suit souvent de façon stricte les séquences d'une collection de manuels. On pourrait parler d'un enseignant qui suit les consignes sans beaucoup se questionner ou remettre ces consignes en question.

L'enseignant manifestant un rapport *scolaire* avec la culture a le souci de bien transmettre aux élèves les connaissances prévues au programme. L'enseignant propose des situations où l'élève entretient un rapport passif à la culture mathématique ; il ne peut donc l'intégrer suivant ses intérêts. Cette culture est développée par transmission, sous la dominance de l'enseignant.

L'enseignant manifestant un rapport de type *instrumentaliste* avec la culture mathématique considère surtout le transfert de cette culture dans des situations réelles. La culture mathématique a une valeur en autant qu'elle soit utile dans la vie. Elle est importante parce que la mathématique est considérée comme essentielle pour la sélection des élèves ou pour l'exercice d'un métier. La culture est un appui au développement de l'intérêt de l'élève pour qu'il puisse devenir compétent en mathématique et, plus généralement, dans la vie : elle encourage la motivation scolaire. La culture n'apparaît dans les projets collectifs que dans la mesure où elle répond aux intérêts des élèves.

Le rapport *intégratif-évolutif* avec la culture mathématique place la mathématique dans une perspective interdisciplinaire. L'enseignant met les élèves en position de questionnement et encourage la posture critique par rapport aux savoirs. L'enseignant place l'élève en situation de co-construction avec d'autres, en accordant une grande importance au développement du sens personnel chez l'élève. La culture mathématique se situe ainsi dans la formation globale de la personne : l'apprenant est le maître d'œuvre de son développement culturel.

III. MÉTHODOLOGIE

Cette recherche a été réalisée à partir des opinions que les enseignants ont manifestées lors des journées régionales sur la culture mathématique en 2007-08. Deux journées (subdivisées en quatre séances) de rencontres ont été tenues avec dix-huit enseignants participants du secteur primaire et du secteur secondaire. Les enseignants y ont participé sur une base volontaire et ont été a priori identifiés par les conseillers pédagogiques en fonction des critères suivants : sexe, niveau, milieu géographique, milieu culturel. Le groupe comporte neuf enseignants du primaire et neuf enseignants du secondaire.

Une première analyse a été réalisée (Beaudoin et Bellehumeur 2009) et les conclusions ont mis en évidence l'intérêt d'une analyse portant sur d'autres questions, dont le rapport à la culture des enseignants.

1. Les thématiques abordées lors des journées sur la culture mathématique

Une thématique était abordée lors de chacune des journées de rencontre. Pour chaque thématique, un ensemble de questions a été développé pour orienter les discussions. Les thématiques abordées lors des deux journées de rencontre sont les suivantes.

Atelier 1. – Vos élèves et la mathématique

Que veut dire faire de la mathématique dans la vie de tous les jours ?

Atelier 2. – Importance et utilité de la mathématique

Quels sont les besoins de base en termes de concepts et processus pour le citoyen ?

Atelier 3. – La relation entre la culture mathématique et la culture pédagogique

Que se passerait-il si on n'enseignait plus la mathématique ? Pourrait-on se passer de l'enseignement de la mathématique ?

Atelier 4. – Synthèse

2. Les données de recherche

Lors de chacun des ateliers, deux personnes ont pris des notes et rédigé des compte rendus. Ceux-ci ont été fusionnés de façon à conserver un compte rendu unique par atelier. Ces compte rendus fusionnés et anonymes constituent la base des données de recherche. Les règles d'éthique propres à tous les établissements impliqués dans la recherche ont été respectées et un certificat d'éthique de la recherche de l'Université du Québec en Outaouais a été émis pour les travaux.

3. Analyse des données

Les données ont été analysées qualitativement par catégorisation (Paillé et Muchielli 2005). L'analyse a pour but de contextualiser les catégories, c'est-à-dire de leur donner un sens dans le contexte de l'enseignement/apprentissage de la mathématique dans les écoles de l'Outaouais.

Les extraits ont été codés en fonction du volet pédagogique du modèle de Falardeau et Simard (2007) et des conceptions exprimées à propos de la mathématique, de son apprentissage de son importance. Même si le codage a été réalisé à partir d'un contexte théorique bien délimité, quelques nouvelles catégories ont émergé lors de l'analyse, à la lumière d'un premier examen du corpus.

Le logiciel ATLAS TI a servi d'instrument à l'analyse des données.

L'unité d'analyse était formée par une phrase du corpus présentant un sens dans le contexte de l'analyse. Chaque unité a été codée en fonction des définitions a priori ou a posteriori lorsqu'un code s'y appliquait de façon claire. Nous nous sommes limités au contenu explicite du texte et n'avons pas analysé le contenu latent du corpus.

Chacun des éléments codés a par la suite été recodé également de façon binaire : 1 lorsque l'énoncé allait dans le sens de la définition du code et 0 lorsqu'il était neutre ou encore opposé à la description du code. Par exemple, un élément faisant référence à la conception culturelle de la mathématique est codé 1 s'il manifeste un appui à cette conception et 0 s'il manifeste un désaccord ou s'il est neutre par rapport à cette conception. Cette façon de faire nous permet d'avoir des indicateurs de l'assentiment accordé à chacune des catégorisations. Nous n'avons pas utilisé cette codification binaire pour les catégories ayant trait au rapport à la culture mathématique des enseignants, car les extraits ne nous permettaient pas toujours de savoir si les enseignants exprimaient une position personnelle ou encore une perception de ce qui se passe dans leur milieu.

Les données ont été codées par une assistante de recherche sous la supervision du chercheur. Le codage a par la suite été vérifié par la personne qui agissait comme co-chercheure lors d'une étape précédente de la recherche. Enfin, une enseignante retraitée comptant de nombreuses années d'expérience au primaire a repris et commenté le codage. Ses commentaires ont permis une réinterprétation des énoncés en fonction de la réalité scolaire. Cette opération a donné lieu à une modification de la codification de certains extraits, principalement en regard du rapport à la culture mathématique.

Des résultats préliminaires ont été présentés à des enseignants participants lors de rencontres en 2008-09. Cette présentation a permis une validation des bases de nos interprétations et une précision des contextes où il pourrait y avoir ambiguïté.

IV. RÉSULTATS PARTIELS

L'analyse des données a permis de dégager des résultats portant sur l'autorégulation des apprentissages, les conceptions des enseignants à propos de la mathématique, de son apprentissage et de son enseignement, ainsi que sur leur rapport avec la culture mathématique. Nous présentons ici des résultats sur le rapport avec la culture des enseignants et sur les conceptions des enseignants à propos de l'apprentissage de la mathématique, vu la relation naturelle entre ces deux éléments.

1. Conceptions sur l'apprentissage de la mathématique

Les conceptions manifestées par les enseignants à propos de l'apprentissage de la mathématique sont présentées dans la figure 1. Malgré l'orientation socioconstructiviste du Programme de formation québécois, les enseignants ont peu fait référence à l'apprentissage par construction sociale dans les journées de rencontre. Cette vision ne semble pas partagée par une majorité des enseignants présents même si les extraits qui y font référence semblent y être favorables (13 sur 15).

L'apprentissage de la mathématique par transmission de l'enseignant vers l'élève a été évoqué fréquemment, le plus souvent de façon positive (61 % des extraits).

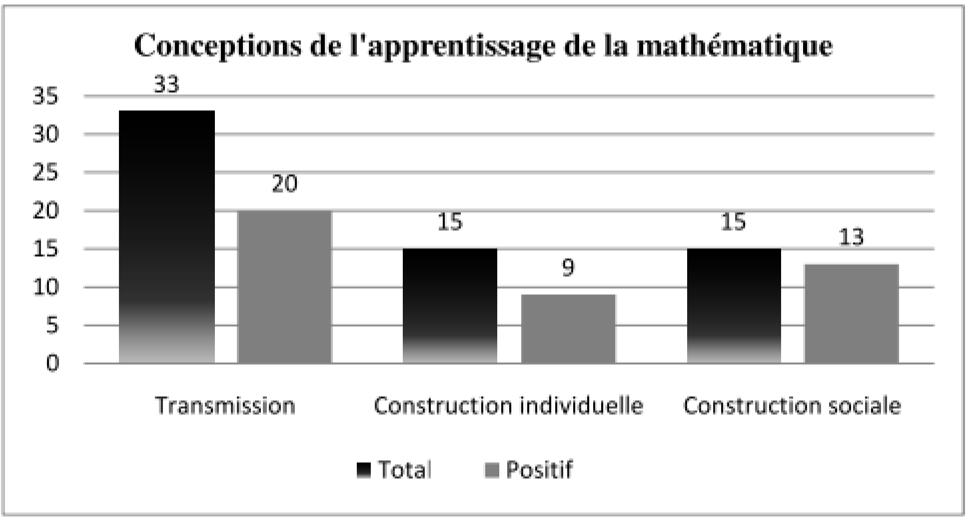


Figure 1 *– Conceptions de l'apprentissage de la mathématique*

Cette approche est la plus présente dans leurs propos : en ce sens, il s'agit d'une réalité présente dans les écoles et elle dispose d'une approbation apparente. Le rattachement à cette conception représente un défi en matière de formation des enseignants, les stagiaires en enseignement ayant tendance à adapter leurs pratiques à celles qui sont en vigueur dans le milieu. Il en sera question dans une section subséquente.

2. Le rapport à la culture mathématique (volet pédagogique)

Les enseignants manifestent plusieurs types de rapports avec la culture mathématique dans leurs activités pédagogiques (relations avec les élèves et leurs pairs). Elles sont décrites par le modèle de Falardeau et Simard (2007), décrit précédemment. La figure 2 (page suivante) présente les fréquences des extraits du discours enseignant référant à chaque type de rapport décrit par ce modèle.

Les types de rapports qui sont associés à un rôle actif de l'élève dans le développement de ses compétences sont les rapports de types « instrumentaliste » et « intégratif évolutif », au sens de la typologie développée par Falardeau et Simard (2007). La figure 2 nous indique que la référence à ces deux types de rapports est minoritaire dans l'ensemble des extraits codés. On voit ainsi apparaître une certaine contradiction entre le rapport à la culture des enseignants et les conditions nécessaires pour le soutien des apprentissages dans des programmes d'inspiration socioconstructivistes (MELS 2007, 2003 ; MEQ 2001a).

Nous décrivons, dans les prochains paragraphes, les profils-types observés chez les enseignants au chapitre de chacun des types rapports proposés par Falardeau et Simard (2007). Cette description a été élaborée à partir des extraits relatifs à chaque catégorie. Les avenues en matière de formation des enseignants seront abordées dans la dernière partie du texte.

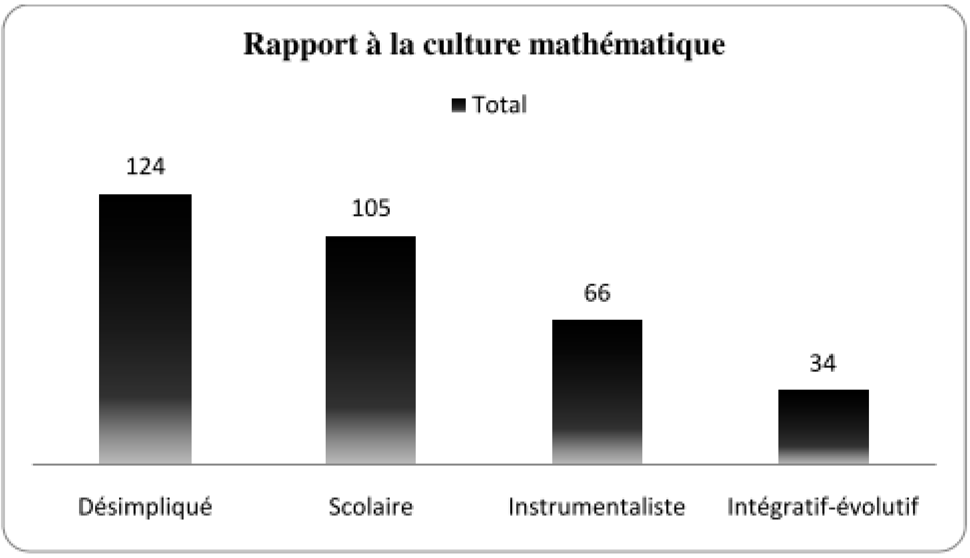


Figure 2 *– Rapport à la culture des enseignants*

V. DESCRIPTION DES PROFILS

1. Profil du rapport de type « désimpliqué »

C'est ce rapport qui a fait l'objet du plus grand nombre d'extraits (124), soit 37 % du total. Plusieurs extraits indiquent une perception de faible implication dans le milieu vis-à-vis du développement de la culture mathématique des élèves. L'apprentissage est avant tout la réussite de procédures mathématiques.

Les extraits concernés associent les problématiques d'apprentissage à des éléments qui se situent « ailleurs » que dans la relation enseignant-élève. Ainsi les difficultés relèvent des programmes, du temps, des pairs, de la direction, de la société, etc. L'enseignant est un transmetteur et l'élève un récepteur de connaissances. La pédagogie « du manuel » est privilégiée. On peut voir ici un enseignant qui fait son travail de façon plutôt technique, sans se poser beaucoup de questions.

Ce rapport de type *désimpliqué,* perçu relativement à la culture mathématique à l'école, met en évidence un désengagement de certains par rapport au contexte culturel des apprentissages prescrit par le programme. La culture mathématique est souvent celle du manuel scolaire (assimilée à la matière couverte par le manuel) et est transmise aux élèves par l'enseignant. L'appropriation des concepts par le biais de situations problèmes (Pallascio 2005) apparaît difficile dans un tel contexte. Beaucoup d'extraits font référence à l'utilisation d'exerciseurs pour favoriser la réussite des évaluations, laquelle passe souvent avant la compréhension des concepts. La question de réaliser les tâches par réflexe, sans comprendre, a été évoquée comme avantageuse pour certains élèves.

Comme il s'agit de perceptions exprimées « à froid » par des enseignants souvent aux prises avec une implantation de programme difficile, il faut interpréter cette analyse avec prudence.

2. Profil du rapport de type « scolaire »

Le rapport de type scolaire a été évoqué dans 105 extraits, soit 32 % du total. Contrairement au rapport de type désimpliqué, le rapport de type scolaire fait une place à la culture mathématique à l'école, mais cette place est plutôt limitée. La culture mathématique se limite à ce qui est prescrit dans les programmes, particulièrement sous l'angle de connaissances mathématiques à acquérir. Ce développement des connaissances n'est pas un processus ou l'élève est un acteur important. La matière est couverte conformément aux exigences du programme en matière de savoirs, mais d'une façon plutôt transmissive. On s'écarte un peu de la pédagogie « du manuel » pour interpréter les apprentissages en termes de programmes tout en maintenant un enseignement orienté vers les connaissances. Le rôle de l'enseignant est avant tout de transmettre le contenu disciplinaire (concepts et processus mathématiques) aux élèves.

Les extraits référant à cette catégorie nous montrent un rapport à la culture mathématique qui est associé au rôle traditionnel de l'enseignant de mathématique. Celui-ci doit avant tout transmettre des connaissances aux élèves et favoriser leur compréhension des concepts mathématiques. L'enseignant de mathématique est surtout un « instructeur » ou un « explicateur » (Gattuso 2001).

3. Profil du rapport de type instrumentaliste

Ce type de rapport a été évoqué dans 66 extraits, soit 20 % des extraits codés. Dans ces extraits, la culture mathématique à l'école est perçue comme un moyen de développer les compétences des élèves. On veut avant tout former des citoyens compétents dans leur sphère professionnelle : la culture mathématique est un moyen pour y arriver. Comme les compétences doivent être mobilisées par l'élève, celui-ci a nécessairement un rôle actif à jouer dans leur développement.

Le rapport de type instrumentaliste est bien en accord avec les visées du programme de formation des élèves. Il est associé à une pédagogie active et à un enseignant de mathématique qui est, par ses compétences et ses actions, un modèle pour les élèves. La culture mathématique est bien présente à l'école ; l'enseignant ajuste ses interventions pour en assurer le développement chez ses élèves.

La perspective instrumentaliste manifestée par ces extraits touche surtout aux compétences disciplinaires (mathématiques) des élèves. Les enseignants manifestant ce type de rapport s'intéressent à leur développement et désirent que l'élève s'approprie des savoirs mathématiques utiles et transférables.

On dénote cependant peu de préoccupations des enseignants pour le développement de compétences transversales, ni pour le lien entre le volet disciplinaire et le volet transversal de la culture mathématique.

4. Profil du rapport « intégratif-évolutif »

Seulement 34 extraits (soit 10 % du total) ont fait référence à ce type de rapport. La culture mathématique est, dans ce contexte, une partie constituante du développement global de la personne et l'élève est le principal acteur de son développement. Compte tenu de la définition de cette catégorie et de la nature même de la discipline mathématique, il est naturel qu'on y retrouve moins d'extraits. Les extraits n'explicitent pas beaucoup le lien entre mathématique et développement intégral de la personne et peu d'entre eux mettent en évidence le rôle moteur de l'apprenant dans son évolution. On pourrait interpréter que les enseignants considèrent qu'en mathématique, le développement global de la personne est moins prioritaire et que d'autres disciplines pourraient s'y prêter davantage.

Les enseignants ont peu souligné le lien entre le développement intégral de la personne et la culture mathématique à l'école. Il s'agit peut-être d'une caractéristique concernant l'école ou encore spécifique à la mathématique. Les données dont nous disposons ne nous permettent pas de comprendre auquel de ces deux contextes les enseignants se rattachent.

VI. LIMITES

Le rapport des enseignants à la culture mathématique a été étudié de façon incomplète dans cette recherche. D'une part, le concept de culture mathématique est relativement nouveau et sa définition ne fait pas l'unanimité ; d'autre part, les données dont nous disposons ne se prêtent pas à une étude approfondie du rapport à la culture, ayant été consignées dans un contexte particulier (utilisation de données secondaires). Enfin, l'approche culturelle de l'enseignement telle que définie dans les programmes québécois (MELS 2007 ; MEQ 2001b) semble susciter beaucoup de questionnements, tant aux enseignants qu'aux étudiants en formation des maîtres (Portelante et Gervais 2008).

Les résultats nous indiquent cependant qu'il y a, dans le milieu de l'enseignement, un certain cheminement à faire au niveau des attitudes et des conceptions avant d'en arriver à une situation où le volet culturel joue un rôle important dans les pratiques d'enseignement en mathématique. L'enseignant, dans ce contexte, devrait préférablement manifester un rapport de type instrumentaliste ou intégratif-évolutif à la culture mathématique dans ces relations avec ses élèves (et l'équipe-école). Ces rapports sont peu évoqués dans nos données.

Beaucoup d'extraits ont montré un rapport de type désimpliqué à la culture mathématique. Nous avons déjà précisé qu'il faut interpréter les résultats avec prudence, compte tenu du contexte où les données ont été prélevées. Plusieurs extraits questionnent la professionnalisation de l'enseignement : l'enseignant devrait être un professionnel créatif, critique et œuvrant en collaboration (MEQ 2001b). Les extraits relatifs à cette catégorie suggèrent la perception d'un enseignant plutôt passif, peu engagé, qui suit les consignes, particulièrement celles du manuel. Les problèmes d'appropriation du manuel scolaire par les enseignants dans le contexte de professionnalisation ont été aussi été évoqués en ce sens par Hasni et al. (2009).

Cette recherche a été réalisée dans un contexte bien particulier : il s'agissait d'étudier avec plus de profondeur des volets problématiques mis à jour par une première analyse des données provenant des journées régionales sur la culture mathématique. Il s'agit par conséquent de données secondaires dont la collecte n'était pas reliée directement à l'objet d'étude. Le portrait des perceptions des enseignants qui a ainsi été dressé sur le sujet n'est probablement pas exhaustif. Des données obtenues dans une instrumentation directement en fonction des objets de recherche auraient pu engendrer des résultats plus complets.

Les discussions ont été réalisées durant l'implantation du Programme de formation au secondaire et la refonte du cadre évaluatif à tous les niveaux. Les incertitudes générées dans le milieu ont pu avoir des répercussions sur les propos des enseignants et les idées exprimées pouvaient alors être très circonstancielles.

Enfin, le groupe d'enseignants participants était relativement petit et a été constitué par les partenaires de la recherche de façon intentionnelle. Il est donc difficile de généraliser les résultats à d'autres contextes.

VII. AVENUES POUR LA FORMATION DES ENSEIGNANTS

Nous avons tous, en tant que personne, une relation avec la culture mathématique, relation construite progressivement depuis notre plus jeune âge. Pour les enseignants, cette culture mathématique présente un volet pédagogique parce qu'elle touche aux relations avec leurs élèves. La formation et l'expérience en enseignement ont contribué à construire ce volet pédagogique. La formation initiale et la formation continue en enseignement ont également façonné leurs conceptions de la mathématique, de son enseignement et de son apprentissage. Les nouveaux défis de la formation des enseignants en mathématique ont été soulevés par plusieurs chercheurs (Proulx et Gattuso 2010). Nos résultats mettent aussi en évidence le besoin d'une actualisation de la formation des enseignants, particulièrement en vue de favoriser un rapport à la culture mathématique en adéquation avec les visées du programme de formation québécois.

1. La nécessité de recherches en partenariat concernant la culture mathématique

La question de la culture mathématique des enseignants et, de façon plus générale, l'approche culturelle à l'enseignement sont encore des zones qui mériteraient d'être éclaircies. Les mathématiciens, les didacticiens et les professionnels de l'enseignement peuvent manifester des vues divergentes sur la culture mathématique en fonction de leur champ d'action, leurs préférences et leur idéologie. Culture mathématique et compétence mathématique semblent en effet comporter des zones d'intersection (DeCorte 2004) mais on les considère souvent comme deux entités séparées.

Cette situation peut entraîner des difficultés dans le choix des stratégies à prioriser pour soutenir les apprentissages des élèves. Des recherches menées en collaboration entre des universitaires et des professionnels de l'enseignement pourraient mener à une plus grande harmonisation des conceptions sur la culture mathématique et sur ses liens avec les compétences à développer chez les élèves.

2. Étudier, dans une optique de changement, le rapport à la culture mathématique des enseignants

L'importance manifestée dans le discours enseignant des rapports de types « désimpliqué » et « scolaire » laisse voir une situation qui pourrait s'améliorer. Les conceptions au sujet de la mathématique, manifestées par plusieurs enseignants québécois, (Beaudoin 2011) présentent une mathématique « prête à porter », transmise de l'enseignant vers l'élève. Proulx (2010) souligne la nécessité de promouvoir un changement de culture dans le domaine de la formation disciplinaire des enseignants de mathématiques. La formation disciplinaire devrait permettre à l'aspirant maître de *faire* de la mathématique plutôt que d'*apprendre* une mathématique toute faite.

Marchand (2010) note que la formation mathématique des futurs maîtres devrait être enrichie, plusieurs d'entre eux ayant une perspective réductrice de l'enseignement de cette discipline. Une formation mathématique enrichie pourrait contribuer à faire évoluer le volet pédagogique du rapport à la culture mathématique de l'enseignant vers les catégories « instrumentaliste » et « intégratif-évolutif », plus adéquates pour développer chez les élèves un apprentissage à partir de situations mathématiques (Brousseau 1998 ; Pallascio 2005).

La recherche pourrait avantageusement encadrer ce processus de changement, compte tenu de la nécessité de l'induire dans plusieurs contextes de formation des maîtres différents (en termes de niveau, milieu, contexte économique, etc.).

Nos résultats permettent de suggérer quelques pistes d'action en formation initiale et en formation continue, particulièrement en matière d'articulation avec le domaine de la formation pratique.

3. *Actions en formation initiale*

En matière de formation initiale à l'enseignement, quelques actions pourraient être entreprises en vue de promouvoir un rapport plus adéquat avec la culture mathématique.

Selon Sqalli (2010), le développement de la culture mathématique des enseignants nécessite plusieurs expertises. L'articulation entre formation mathématique, formation didactique et formation pratique est ainsi fondamentale. Le domaine de la formation pratique est souvent oublié dans cette articulation. Les stagiaires, sous la contrainte des exigences situationnelles (planification, pratiques, évaluation) ont souvent tendance à se conformer à ce qui est en vigueur dans le milieu et à répliquer un enseignement de la mathématique orienté vers la transmission de connaissances préconstruites.

Pourrait-on exiger des stagiaires en enseignement de démontrer, dans leurs pratiques enseignantes, des conceptions et un rapport culturel adéquats en regard de la mathématique ? S'il s'agit là d'un idéal, les principes et modalités de supervision des stages le rendent souvent difficile à atteindre.

Enfin, l'importance de l'activité mathématique pour la formation et pour la société devrait être traitée de façon plus explicite dans la formation de maîtres. Il s'agit d'aller plus loin que de montrer qu'un ensemble de concepts peut résoudre une situation, si complexe soit-elle. Il faut montrer que l'activité mathématique est une composante essentielle d'une société évoluée. Le lien entre mathématique et société démocratique (Niss 2002) pourrait, par exemple, être exploité de façon plus explicite.

4. *Une formation continue des maîtres associés tenant compte des particularités disciplinaires*

Malo (2008) suggère de considérer le stagiaire en enseignement comme un praticien réflexif à part entière et de s'intéresser avant tout à son processus de transformation plutôt que d'imposer l'adhésion à des normes. Cette optique pourrait permettre au stagiaire enseignant d'intégrer, en situation de classe, les acquis des volets mathématique et didactique de sa formation universitaire suivant sa personnalité et ses valeurs.

Une telle approche, non déficitaire par rapport au stagiaire, pourrait être suggérée aux maîtres associés. Elle permettrait aux stagiaires de développer des pratiques plus en accord avec leur formation universitaire (didactique et disciplinaire) et moins dictées par des considérations situationnelles. Un rapport à la culture mathématique plus adéquat pourrait se construire, la formation initiale des enseignants n'étant pas orientée vers les profils de types « désimpliqué » et « scolaire ».

Le processus de formation des maîtres associés prend actuellement peu en compte les particularités disciplinaires, particulièrement en mathématique. Une prise en compte de ces particularités contribuerait à une meilleure articulation entre les domaines disciplinaire, didactique et pratique de la formation à l'enseignement. Cette articulation est vivement souhaitée par les formateurs d'enseignants de mathématique (Sqalli 2010).

REFERENCES

Beaudoin M. (2011) *Le soutien à l'autorégulation des apprentissages dans le contexte d'une mathématique culturelle*. Gatineau : Université du Québec en Outaouais.

Beaudoin M., Bellehumeur P. (2009) La culture mathématique : perceptions des enseignants de l'Outaouais québécois. In Kuzniak A., Sokhna M. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et développement, enjeux de société et de formation. Actes du colloque EMF2009. Revue internationale Francophone*. http://fastef.ucad.sn/EMF2009/Groupes%20de%20travail/GT4/Beaudoin%20-%20Bellehumeur.pdf

Brousseau G. (1998) *La théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

De Corte E. (2004) Mainstream and Perspectives in Research on Learning (Mathematics) from Instruction. *Applied Psychology: an International Review* 53(2), 279-310.

Falardeau E., Simard D. (2007) Le rapport à la culture des enseignants : proposition d'un nouveau cadre théorique. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation* 10(2), 131-150.

Gattuso L. (2001) *Fait-on ce qu'on pense quand on enseigne des mathématiques* ? Collection Mathèse, Eds Bande Didactique. Trois-Rivières : Université du Québec à Trois-Rivières.

Gouvernement du Canada (2003) *La culture mathématique dans le PISA*, http://www.pisa.gc.ca/math_f.shtml

Hasni A., Samson G., Moresoli C., Owen M.-E. (2009) Points de vue d'enseignants de sciences au premier cycle du secondaire sur les manuels scolaires dans le contexte de l'implantation des nouveaux programmes au Québec. *Revue des sciences de l'éducation* 35(2) (Les manuels scolaires : réformes curriculaires, développement professionnel et apprentissages des élèves – Numéro thématique dirigé par Lebrun J.et Niclot D.), 83-105.

Malo A. (2008) Le stagiaire comme praticien réflexif. Un point de vue constructiviste et non déficitaire du développement et du savoir professionnel en enseignement. In Correa Molina E., Gervais C. (Eds.) (pp.104-124) *Les stages en formation à l'enseignement*. Québec : Presses de l'Université du Québec.

Marchand P. (2010) Quelle formation mathématique en formation des maîtres au primaire et en adaptation scolaire et sociale. In Proulx J., Gattuso L. (Eds.) (pp.31-36) *Formation des enseignants en mathématiques : tendances et perspectives actuelles*. Sherbrooke : Éditions du CRP.

Ministère de l'éducation, du loisir et du sport du Québec (2007). *Programme de formation de l'école québécoise, secondaire deuxième cycle*. Québec : Gouvernement du Québec.

Ministère de l'éducation, du loisir et du sport du Québec (2003). *Programme de formation de l'école québécoise, secondaire premier cycle*. Québec : Gouvernement du Québec.

Ministère de l'éducation du Québec (2001a). *Programme de formation de l'école québécoise, éducation préscolaire et enseignement primaire.* Québec : Gouvernement du Québec.

Ministère de l'éducation du Québec (2001b). *La formation à l'enseignement. Les orientations. Les compétences professionnelles*. Québec : Gouvernement du Québec.

Morin M.-P., Corriveau A. (2010) Intégration des technologies de l'information et de la communication en mathématiques : le cas de la formation des enseignants du primaire. In Proulx J., Gattuso L. (Eds.) (pp.43–58) *Formation des enseignants en mathématiques : tendances et perspectives actuelles.* Sherbrooke: Éditions du CRP.

Niess M. L. (2005) Preparing Teachers to Teach Science and Mathematics with Technology: Developping a Technology Pedagogical Content Knowledge (TCPK). *Teacher and Teacher Education* 21, 509-523.

Niss M. (2002) Quantitative Litteracy and Mathematical Competency. http://www.maa.org/Ql/pgs215_220.pdf

Paillé P., Mucchielli A. (2005) *L'analyse qualitative en sciences humaines et sociales.* Paris : Armand Colin.

Pallascio R. (2005) Les situations-problèmes : un concept central du nouveau programme de mathématique. *Vie pédagogique* 136, 32-35.

Portelance L., C. Gervais C. (2008) L'approche culturelle de l'enseignement selon les savoirs mis en relation par l'enseignant associé et le stagiaire. In Correa Molina E., Gervais C. (Eds.) (pp.13-36) *Les stages en formation à l'enseignement*. Québec : Presses de l'Université du Québec.

Proulx J. (2010) Reconnecter les futurs enseignants avec les mathématiques du secondaire : travailler autour de conceptualisations riches en « faisant » des mathématiques. In Proulx J., Gattuso L. (Eds.) (pp.129-152) *Formation des enseignants en mathématiques : tendances et perspectives actuelles*. Sherbrooke : Éditions du CRP.

Proulx J., Gattuso L. (Eds.) (2011) *Formation des enseignants en mathématiques : tendances et perspectives actuelles*. Sherbrooke : Éditions du CRP.

Raby C. (2005) Processus d'intégration des technologies de l'information et de la communication. In Karsenti T., Larose F. (Eds.) (pp.79-94) *L'intégration des TIC dans le travail enseignant : recherches et pratiques*. Québec : Presses de l'Université du Québec.

Sqalli H. (2010) Quelle articulation entre formation théorique, formation didactique et formation pratique dans la formation des maîtres. In Proulx J., Gattuso L. (Eds.) (pp.153-158) *Formation des enseignants en mathématiques : tendances et perspectives actuelles* Sherbrooke : Éditions du CRP.

SUR LES MODALITES DE LECTURE DE SOURCES EN HISTOIRE DES MATHEMATIQUES

Alain BERNARD*

Résumé – L'étude de l'histoire des mathématiques, que ce soit à titre principal ou à titre ancillaire, repose à un moment donné ou à un autre sur la lecture de sources historiques. Cette lecture, en tant que geste et activité, pose en outre des problèmes pédagogiques notoires, liés au temps nécessaire à cette lecture et à la difficulté intrinsèque de l'exercice. Partant de ces deux constats, je propose ici une réflexion visant à mettre en évidence le vaste répertoire des modalités possibles de lecture et à en étudier la correspondance avec la nature particulière des textes d'histoire des sciences.

Mots-clefs : Histoire, mathématiques, sciences, lecture, épistémologie

Abstract – Studying the history of mathematics, either as the main purpose of a course or as an auxiliary to it, ultimately relies on the reading of historical sources. Moreover, this reading should be considered as an activity per se that raises notoriously difficult pedagogical problems. The latter are related to the time necessary for this reading and to the intrinsic difficulty of the exercise. Taking these two observations as points of departure, I here propose some reflections aiming at showing the huge diversity of the possible ways of reading and at studying the correspondence between them and the particular nature of the sources for history of mathematics.

Keywords: History, Mathematics, Sciences, Reading, Epistemology

I. INTRODUCTION : POSITION DU PROBLEME

Dans la littérature afférente aux enjeux d'une intégration de l'épistémologie et/ou de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement, on s'est intéressé à différents ordres de questions très variées. Certaines d'entre elles touchent aux enjeux et aux modalités pratiques de la lecture de sources historiques (Fauvel et van Maanen 2000, chapitres 5 et 9). Une première distinction utile, au moins à titre heuristique, est celle qui sépare une intégration implicite, par les enseignants de sciences, de l'histoire à la manière dont ils conçoivent leur cours, de son intégration explicite par l'étude orchestrée de sources historiques. Dans la première perspective, l'enseignant qui conçoit son cours trouve, en principe du moins, en l'épistémologie ou en l'histoire le moyen de renforcer son point de vue sur sa discipline, qu'il s'agisse de son contenu, de sa valeur, ses enjeux et son enseignement : par ce moyen, il peut installer une « profondeur de champ » pour enrichir aussi bien sa connaissance intime des sciences que sa pratique professionnelle. Dans la seconde perspective, l'enseignant de mathématiques (ou de sciences en général), qu'il le veuille ou non, est toujours un peu historien : il doit lire et faire connaître un patrimoine et ses sources pour orienter à son tour les élèves dans cette « forêt patrimoniale » de l'histoire. Pour lui, l'histoire est alors présente « en personne », par ses archives qui pénètrent comme des fantômes l'espace des apprentissages et des lectures utiles pour le cours lui-même.

Je remarque deux choses : tout d'abord, cette seconde perspective, pour peu du moins que les sources ne soient pas utilisées à titre anecdotique, pose des problèmes épineux. Elle impose en effet de prendre en compte, d'une manière ou d'une autre, l'épaisseur des sources historiques, l'étrangeté de leurs contenus vis-à-vis des connaissances contemporaine au lecteur, la difficulté qu'il y a à les lire et à les interpréter. De manière plus cachée peut-être, cette approche engage aussi la nature du commentaire qu'on est prêt ou qu'on se sent capable

* UPEC et Centre Alexandre Koyré – France – alainguy.bernard@gmail.com

© Bernard A. (2012) Sur les modalités de lecture de sources en histoire des mathématiques. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT4, pp. 568–577). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

de faire, voire de guider quand on se sent plus à l'aise[1]. Ces problèmes sont partiellement résolus, mais aussi complexifiés, lorsqu'on convoque les écrits des historiens dans l'espace même des lectures – autrement dit, lorsqu'on donne à lire des sources secondaires.

Par ailleurs, faire une différence trop nette entre les deux perspectives me semble un peu trompeur. Quel que soit, en effet, le bien fondé de la première perspective « intégratrice », il faut le plus souvent s'intéresser, à un moment donné ou un autre, à la seconde perspective « historienne ». Or cette dernière reste souvent un point aveugle, pour différentes raisons. La raison le plus simple est historique : le « grand partage » des lettres et des sciences implique que la plupart des enseignants de sciences ne sont ni formés ni souvent disposés à accompagner *en tant que telles* des pratiques de lecture ou d'écriture[2]. L'autre raison est que la littérature sur ces questions est volontiers apologétique et présente comme un avantage ce qui, pour bien des débutants, se présente comme une difficulté majeure[3].

Je m'intéresserai donc ici à ce qui me semble être le geste *fondamental*, d'une manière ou d'une autre, de quiconque s'intéresse à la lecture des textes d'histoire des sciences et de mathématiques : de lire et faire lire les textes, d'engager les étudiants à un rapport direct avec eux et d'accompagner cette expérience. Je pars par ailleurs de ce que je tiens pour un constat, faits par des collègues qui ont à cœur de faire découvrir l'histoire des sciences à des étudiants : la lecture des sources, particulièrement celle des sources secondaires, qui parlent d'histoire plus qu'ils ne la livrent « en personne », est une opération difficile et dont la technicité est souvent sous-estimée. En particulier, le *temps* qu'il faut consacrer à cet exercice est souvent négligé, de même que le conflit entre le temps qu'on désire réserver au « contenu essentiel » d'un cours d'histoire ou d'épistémologie (celui d'une synthèse magistrale et érudite) et celui de la lecture plus ou moins autonome, qui paraîtra toujours inachevée ou inachevable.

Pour décomposer la difficulté et tout d'abord la mettre en évidence, je partirai de la manière dont j'ai personnellement rencontré récemment ce problème, au travers d'un récit de l'évolution de mes propres pratiques (partie II). Je proposerai ensuite une liste « à la Borgès » des modes possibles de lecture en histoire des sciences, afin de faire toucher du doigt le fait que choisir parmi elles puise d'emblée dan un éventail très varié de possibilités (partie III). A titre de conclusion, je proposerai très modestement quelques réflexions plus générales sur les enjeux fondamentaux d'une « prise de conscience » des modalités de lecture pour la définition même du contenu d'un cours d'histoire des sciences, et, ultimement, de mathématiques ou en général de sciences.

A titre préliminaire, je dois prévenir que je ne m'intéresserai ici qu'à l'étude de textes historiques dans l'enseignement supérieur et universitaire, ce qui comprend les cours pour de futurs enseignants (aujourd'hui de niveau master en France). Des questions équivalentes, quoique légèrement différentes se posent évidemment dans l'enseignement secondaire, que j'ignore ici délibérément. Il me paraît en effet intéressant de ne pas faire comme si les problèmes soulignés ci-dessus était « réglés » pour qui s'occupe et se préoccupe d'enseigner l'histoire des sciences à l'université, en particulier à de futurs enseignants. Tout au contraire, les témoignages dont j'ai eu connaissance montrent que bien des collègues achoppent sur cette question et s'y sont heurté, consciemment ou non. Intégrer cette dimension et cette

[1] Pour une réflexion sur l'herméneutique des textes d'histoire des sciences, voir (Fauvel et van Maanen 2000, p. 293-313).
[2] Voir (Bernard 2009) pour un argument plus développé sur ce point.
[3] Voir, par exemple, la liste des « bonnes raisons » pour utiliser des sources historiques en cours de mathématiques dans (Fauvel et van Maanen 2000, pp. 292–298). L'approche de Man Keung Siu (2006) souligne davantage les difficultés éprouvées, entre autres, à la lecture de sources historiques.

difficulté me paraît un enjeu considérable, car c'est sa prise en compte qui est susceptible d'informer, dans un second temps, l'activité pédagogique de futurs enseignants.

En outre, je précise que les présentes réflexions ont un caractère purement provisoire et exploratoire : mon intention est de les approfondir dans une étude ultérieure. Dans le cadre du colloque, elles visent à provoquer des échanges à partir des expériences, généralement variées, des participants sur ce sujet.

II. UN CAS D'ECOLE : L'EVOLUTION D'UN COURS DE LICENCE

1. Un clivage de départ : faire lire ou écrire les étudiants, ou non ?

Voilà plusieurs années que je donne des cours de licence à des étudiants, soit pour des étudiants de sciences, soit dans le contexte d'options ouvertes qui sont proposées à un public plus varié. Le sujet en est toujours l'histoire des sciences. Les collègues avec qui je travaille ou ai travaillé à ces deux types de cours, sont soit des enseignants de sciences auxquels l'existence d'un cours d'histoire des sciences paraissait important, soit, comme moi, des historiens des sciences « experts » et par ailleurs sensibilisés à la formation d'enseignants. Je précise en outre que ces cours sont vieux de quatre ans, de sorte qu'ils ont suivi d'année en année leur évolution naturelle : ils ont mûri au soleil des constats répétés faits sur les difficultés des étudiants.

Dès la première année de cours, un clivage est apparu entre les deux catégories d'enseignants : nous, historiens des sciences, considérions que l'étude directe de sources historiques, ainsi que l'écriture de projets personnels appuyés sur la lecture de sources, était et devait être un élément incontournable d'un tel cours. La perspective des collègues de science était bien davantage « intégratrice » : leur problème était davantage de brosser un panorama intelligible et accessible aux étudiants, ou bien de leur faire toucher du doigt, par un récit vivant, certains problèmes épistémologiques touchant à l'historicité fondamentale de la pensée scientifique, que d'aborder des problèmes touchant à l'histoire ou l'épistémologie des sciences en tant que tels. Cette approche n'est évidemment pas illégitime, mais elle ne pouvait entièrement nous convenir, puisque l'histoire des sciences étant le cœur de notre activité et « la chose » que nous avions à transmettre. Nous ne pouvions, de même, souscrire à *une* vision épistémologique déterminée, dont nous aurions fait notre unique cheval de bataille, sans poser en général la question des différentes épistémologies et visions de l'histoire possibles.

Le débat (ou le clivage) avait un enjeu très concret qui était le mode d'évaluation des étudiants : celui que nous avions d'emblée imposé comprenait la rédaction d'un travail personnel sur un sujet proposé à l'avance, soit sur un thème donné (c'était ce que faisaient les collègues de science) soit sur des textes (ce qui était notre approche).[4] Dans les deux cas, les productions réalisées étaient, et ont toujours été, d'un niveau extrêmement disparate. Il est facile de constater qu'un nombre très important d'étudiants ont des difficultés profondes à réaliser les deux sortes de travaux, notamment le plus difficile des deux : une rédaction personnelle *qui comprenne l'étude d'un ou plusieurs textes*. Le clivage ci-dessus se traduisait alors par des prises de positions que je résumerais ainsi, en les caricaturant : les collègues de sciences se scandalisaient du niveau des étudiants en question et incriminaient volontiers leur première formation : s'ils ne peuvent pas écrire ou même lire correctement un texte, à quoi bon leur donner un travail si complexe ? Notre point de vue d'historiens des sciences et de

[4] L'autre partie de l'évaluation portait directement sur le cours, soit qu'on demande la rédaction du résumé d'une des séances du cours, soit que nous proposions (la dernière année) un examen.

formateurs était de convenir des difficultés mais de chercher le moyen de les résoudre : s'ils ne savent pas écrire, ou lire, ou explorer une documentation, comment les y conduire ?

2. La convergence naturelle vers des « exercices de lecture » intégrés au cours.

Nos collègues de sciences ont rapidement fait « scission » au bout de deux ans, préférant ouvrir leur propre option que de poursuivre l'aventure avec nous. Quant à nous, il est intéressant de réfléchir rétrospectivement aux moyens que nous avons explorés pour résoudre le problème énoncé ci-dessus.

Le tout premier, adopté dès la seconde année, était de proposer aux étudiants, à titre facultatif, la possibilité de nous soumettre une version intermédiaire de leur travail : ils pouvaient donc nous communiquer une version, un plan, un brouillon que nous propositions d'annoter pour les aider à réaliser le produit final. Le succès de cette démarche a toujours été très mitigé : une minorité d'étudiants osaient, ou prenaient le temps de, nous envoyer une première version de leur écrit. L'étape suivante a été de modifier le cours en instaurant, dès les deux premiers cours, un véritable cours de lecture appuyé sur un exemple concret : les étudiants avaient un texte assez long à lire entre la première et la seconde séance, et nous leur proposions simplement, à titre d'exercice, de résumer le propos de passages désignés à l'avance. Le second cours consistait alors à confronter leur proposition à la « réalité » du texte, c'est-à-dire à faire entrer très concrètement les étudiants dans une *relecture* à la lumière d'une première interprétation. Cette tentative a eu un impact certain sur la compréhension de l'exercice demandé, mais qui restait encore limité. Nous avons donc, l'année suivante (2010-11) franchi encore une étape en proposant que les étudiants lisent systématiquement un texte avant chaque séance, et que chaque étudiant ou groupe d'étudiants présentent au moins un de ces textes par un exposé oral. Cet exposé nécessairement court (10 minutes) étaient suivi de discussions et remarques, et le ou les exposant(s) devaient ensuite rédiger une synthèse écrite reprenant leur exposé et tenant compte des remarques et de lectures complémentaires.

Cette formule a connu la même année plusieurs autres déclinaisons, à la faveur de l'apparition de multiples cours d'histoire des sciences dans les nouvelles formations pour futurs enseignants, de niveau master. Par exemple, nous avons conçu certains de ces cours sur le même principe d'un exposé oral, restituant une lecture, complété par un travail écrit, mais en le faisant précéder, dans certains cas, d'un modèle : un exercice fait en commun pour lire puis bâtir un commentaire de texte. Je ne m'arrêterai pas tout de suite à ces « détails » de procédure, qui seront à nouveau évoqués dans la partie suivante. Ce qui m'intéresse pour l'instant est d'indiquer ce mouvement que nous avons fait après beaucoup d'autres placés devant la même situation : un projet au départ ambitieux, du point de vue de l'initiation à l'histoire et l'épistémologie des sciences, nous a très vite conduits à des constats drastiques sur la faible capacité concrète de beaucoup d'étudiants à assimiler ce contenu et surtout à le prolonger par des lectures ou un travail personnel. Partant de là, nous avons étudié le moyen d'installer *dans le cœur et le temps même du cours* les actes de lecture et d'interprétation eux-mêmes.

3. Réflexions rétrospectives et généralisation du problème.

Ce basculement apparent du « contenu » des textes vers leur mode de lecture ou la construction d'une interprétation est non seulement fondamental, il me paraît également inévitable d'un point de vue rétrospectif, pour au moins deux raisons. La première est un contrainte de durée : lire et relire, s'interroger en commun sur pourquoi précisément telle lecture est possible, tandis qu'une autre n'est pas tenable, prend nécessairement du temps. Le temps pris par les actes de lectures est pris sur cet autre temps, nécessaire dans tous les cas mais à géométrie variable, où on propose une interprétation magistrale des sources. Par exemple, laisser à des étudiants le temps d'exposer puis de commenter leur prestation, pour enfin y adapter le propos magistral qui rectifiera ou complétera l'exposé, donne une place forcément réduite à ce propos, qui n'est plus qu'un enrichissement de l'exposé, non l'objet principal du cours.

En outre, mettre au centre la pratique de la lecture et (par conséquent) de l'interprétation, sur ces objets particuliers que sont les textes d'histoire des sciences, rend la légitimation du cours, et par conséquent l'implication des étudiants, beaucoup plus simple que lorsqu'il faut expliquer *in abstracto* pourquoi l'histoire des sciences est intéressante, ou nécessaire, etc. Il est en effet aisé d'expliquer que lire et interpréter un texte complexe ou étrange est une opération non seulement transposable dans d'autres contextes (lire des écrits d'élèves, synthétiser une documentation complexe, résumé le propos de quelqu'un qu'on interroge), mais qu'il est de surcroît impossible à quiconque de sortir de l'université sans avoir maîtrisé *au moins* cette compétence, *à l'évidence* nécessaire dans toutes sortes de circonstances.

Enfin, il faut compter avec ce changement fondamental d'environnement que représente la numérisation des sources en sciences sociales. S'il est bien aisé aujourd'hui de constituer des sujets de travail personnel appuyés sur des lectures, c'est qu'une part non négligeable des textes est aujourd'hui téléchargeable ou lisible en ligne. Il est de surcroît très simple, trop simple peut-être, de lire ou de télécharger des commentaires entiers sur les textes en question. Apparemment omnisciente, la toile place en fait les étudiants, et surtout les moins capables d'écrire parmi eux, devant une dangereuse et tragique illusion : le texte, voir son commentaire, semblent à portée de main[5] ; mais la tâche de bâtir sa propre interprétation, en des termes qui paraissent souvent bien pauvres vis-à-vis des vrais ou faux modèles qu'on trouve sur la toile, paraît alors insurmontable. Il en résulte pour un certain nombre d'entre eux la tentation du « copier-coller », trop souvent incriminé selon moi comme un acte illicite d'écriture, alors qu'il est en large partie le reflet d'une situation nouvelle ou l'écriture a la valeur d'une recomposition d'informations.

III. LE RICHE EVENTAIL DES MODES DE LECTURES POSSIBLES EN HISTOIRE DES SCIENCES

Je quitte maintenant le genre de l'anecdote pour proposer, sur un mode plus général, une liste des modes de lecture possible en cours d'histoire des sciences, ou dans ceux où, en général, elle joue un rôle. Car la conclusion universelle de la « petite histoire » que j'ai plus haut présentée puis commentée est que, pour peu qu'on prenne au sérieux, dans une perspective historienne, la tâche de faire découvrir l'histoire « en personne », c'est-à-dire dans son étrangeté constitutive, on est conduit à s'intéresser non seulement à la lecture des textes, mais plus généralement à la tension entre un « objet » historique, qui peut-être un « texte » (mais pas seulement) et son interprétation, sa « lecture » pris dans un sens très général.

1. La lecture de sources historiques comprend celle des textes mais ne s'y réduit pas

Il faut en effet distinguer la notion de *lecture* et celle de *texte*, l'une n'impliquant pas l'autre comme on pourrait le croire. Car, en histoire des sciences comme en général, on peut lire et interpréter bien autre chose que des « textes » au sens courant – c'est-à-dire des ensembles cohérents et signifiés de manière relativement indépendantes de leur support ou de leur langue. On peut, en effet, considérer légitimement un dispositif expérimental, un programme, un objet technique, un jeu d'écriture technique (comme par exemple une suite de calculs), un

[5] ou à portée de « clic », pour employer la nouvelle métaphore en vigueur, effectivement plus adaptée.

graphique ou une simple liste, un lieu muséal, une œuvre picturale ou cinématographique, comme autant d'objets de lecture, d'interprétation ou de compréhension. Dans tous les cas, il s'agit d'artefacts qui sont en partie au moins le fruit d'une activité humaine signifiante et porteuse d'histoire – autrement dit, des objets techniques au sens où l'entendrait G. Simondon (1958).

Les « textes » ne sont pas donc pas les seuls objets qu'on peut donner à étudier pour faire « entrer » dans l'histoire des sciences. Pour l'enseignement comme l'étude de l'histoire des sciences, à titre principal ou secondaire, on peut aussi retenir, par exemple, l'investigation de lieux muséaux, la réplication d'expériences historiques ou le travail de reproduction d'objets techniques. En général, toute la recherche historique contemporaine montre encore que le « texte » gagne lui-même à être compris comme objet technique et matériel, c'est-à-dire comme un objet plus complexe que la « trame signifiante » qu'on en abstrait quand on fait d'un manuscrit, d'un codex manuscrit ou imprimé, ou encore d'un texte enregistré sur traitement de texte, les simples « représentants » d'une même entité signifiée[6]. Les supports ou modalités d'écritures peuvent au contraire s'avérer porteuses de significations qu'il n'est pas possible d'abstraire si on veut entrer dans le sens même que « convoient » ces artefacts. Les « textes » gagnent à être eux-mêmes à être enrichis de leurs dimensions matérielles, de sorte qu'ils constituent en fait des objets techniques particuliers, lisibles à plusieurs niveaux, et on perd probablement à les distinguer trop radicalement d'autres dispositifs signifiants ou bien d'en spécifier trop facilement le mode de lecture[7].

Nous verrons plus loin comment cette approche des sources historiques est fondamentale pour l'étude de l'histoire des sciences. J'en reviens pour l'instant au questionnement primitif, qui porte sur les conditions de réussite d'une telle lecture. Comme on l'a dit plus haut, il s'agit ici d'un problème didactique délicat qu'il faut résoudre pour chaque source considérée. Le moyen de le faire est de s'intéresser de plus près à l'éventail des modalités de lecture qui permettent de concilier l'activité des étudiants et le contenu de connaissances et de savoir-faire qu'on vise en les obligeant à cette confrontation. J'ai évoqué ci-dessus quels avaient été certains de mes choix et ceux des collègues avec lesquels j'ai débattu de ces questions. Il y en a pourtant bien d'autres, les variations étant dues généralement au public visé, aux préférences individuelles ou bien sûr, et bien sûr à l'évolution de l'environnement ou des techniques de lectures possibles. Je propose donc maintenant, sans aucune prétention à l'exhaustivité, quelques exemples volontairement variés de telles modalités de lecture. Je les distingue artificiellement, sachant que bien souvent elles ne sont pas exclusives les unes des autres et sont même généralement combinées dans les dispositifs d'étude les plus sophistiqués.

2. *Inventaire partiel, en guise d'éventail borgésien, de différentes modalités de lecture en histoire des sciences.*

La lecture *commentée* ou *guidée* est le mode d'enseignement courant qui correspond à la citation écrite ou à l'usage d'exempliers dans les conférences de recherche : tel propos synthétique est illustré, chemin faisant, par la lecture commentée d'un extrait que l'étudiant a sous les yeux. Ce mode permet de décoder « immédiatement » certains aspects étranges de la source convoquée pour l'inscrire dans la trame de la synthèse qu'on présente : la citation elle-même devient donc un élément de la trame. Ce type de structure convient en particulier aux grands exposés diachroniques en histoire des sciences.

---

[6] Voir par exemple (Jacob 2011, pp.377-464) sur la « structuration de l'espace graphique ».

[7] Pour un exemple d'un même texte qui, selon la période et le support considéré, peut s'interpréter très différemment, voir (Bernard et Proust 2008, pp.284-294).

La lecture *préparée* consiste à communiquer à l'avance les textes sur lesquels s'appuiera un cours, puis à ménager un temps de débat où l'étudiant pourront restituer leur lecture et proposer – idéalement- les éléments qui pourront être repris dans le cours : la perspective explicite est donc d'alimenter un cours, de lui donner un prétexte suffisant et une trame initiale pour ce qui deviendra une synthèse. La préparation elle-même peut être faite dans le temps même du cours (lecture silencieuse, précédant un commentaire collectif) ou avant le cours lui-même. Ce mode est bien sûr adapté aux textes un peu « techniques », nombreux en histoire des sciences, qui demandent une lecture intensive et une assimilation du raisonnement sous-jacent.

La *lecture résumé*, qui succède à une conférence magistrale, illustrée ou non par un exemplier de citations. La lecture est ici *ex post* et est guidée par le souci de provoquer une lecture qui *remette* en cohérence un propos synthétique et des citations concrètes : on demande à l'étudiant de lire pour reconstruire le cours. Ce mode est propice à l'assimilation d'une méthode de lecture et d'interprétation, sur un mode mimétique.

La lecture *exposé*, qui consiste, suivant le mode rapidement décrit dans la partie II, à proposer à un étudiant non seulement de faire une lecture préparatoire mais à en assumer le résumé dans un temps spécifique du cours, au début, au milieu ou à la fin, où l'enseignant n'intervient pas directement : le temps d'exposé est « sanctuarisé » par une durée spécifique à laquelle ne se superpose aucun autre commentaire. L'exposé est généralement suivi d'une discussion qui permet d'amender l'exposé ou de le compléter. De même le reste du cours peut-être ou non combiné au contenu même de l'exposé : puisqu'il s'agit de temps séparés, de nombreuses combinaisons sont bien sûr possibles. Ce mode est approprié aux textes d'histoire des sciences qui font découvrir un raisonnement ou une procédure nouvelle, mais dont la difficulté les rend accessible à une lecture autonome, au moins sur une partie de l'argument.

La *lecture à haute voix* ou *l'anagnose*, introduite pendant un cours et conduite par l'un des participants, généralement un étudiant, mais il peut s'agir aussi de l'enseignant lui-même. Elle consiste à « simplement lire », en pleine conscience que ce sont les intonations de la voix, l'attitude, le rythme même de la lecture qui, d'emblée, imposent un premier niveau d'interprétation voire d'intellection du texte. Ce type de lecture était très prisé (en fait majoritaire) dans l'antiquité et, en général, tant que la rhétorique fournissait le paradigme central de tout enseignement, mais il est encore aujourd'hui utilisé. Ce mode s'avère, pour la raison indiquée ci-dessus, très adaptée à des textes construits suivant les critères d'une rhétorique précise, comme les textes de Galilée par exemple.[8]

La *lecture – annotation*, qui consiste à lire « un crayon » (ou un clavier) « à la main » (sous la main). Il s'agit d'un mode de lecture « constructive », qui équipe le texte d'annotations, de surlignages, de paraphrases qui balisent le texte et installe un système de repères. Ce mode de lecture est évidemment adapté à des textes elliptiques, comme un texte technique dont le sens est sous-déterminé et à reconstruire.

La *lecture traduction*, qui est un mode de lecture active, qui consiste à redoubler le texte d'un second texte qui vise à le traduire et donc à le représenter, dans une langue ou une forme de schématisation jugée plus accessible. Il s'agit, typiquement, du mode de lecture qu'on emploie pour faire lire des textes algébriques qui précèdent l'arrivée « massive » de l'algèbre symbolique, lors de la Renaissance européenne.

[8] Dans ce mode de lecture, l'enjeu est de bien lire, de sorte que les reprises sont importantes, sinon centrales : un peu comme au théâtre, le sens se joue dans la diction, et la répétition consiste donc la recherche de la bonne diction, celle qui convient au sens, ou du moins à un sens possible.

La lecture d'un dossier constitué à l'avance d'un ensemble de sources sur un même thème : l'enjeu est ici de construire un système de lectures croisées et qui se répondent. La constitution de dossier mélangeant des sources primaires et secondaires, ou qui proposent des points de vue clairement incompatibles sur le même objet ou le même thème, est particulièrement propice à ce type de lecture. Il s'agit typiquement d'un mode de lecture adaptée à l'étude des technosciences modernes.[9]

La *lecture choix* qui consiste à donner pour tâche d'exploration d'un dossier « pléthorique » de sources disponibles en ligne ou dans des œuvres complètes. L'enjeu est ici de lire pour *faire un choix* et le justifier : on délègue ici au lecteur la tâche qui est précisément monopolisée habituellement par l'enseignant, savoir le choix des textes pertinents à un thème, un propos, ou une problématique. Ce mode est bien sûr adapté à toute recherche thématique en histoire des sciences.

La liste pourrait facilement être allongée et diversifiée selon les critères retenus, qui ne sont pas tous de même niveau. Le problème n'est certainement par ici d'atteindre à une quelconque exhaustivité ; il s'agit plutôt, à partir rapide tour d'horizon, de percevoir l'extraordinaire variété des modalités possibles de lecture, leur sensibilité à des paramètres apparemment contingents (au regard du « texte » abstrait) mais qui peuvent s'avérer en réalité essentiels, comme la temporalité d'une lecture ou le caractère plus ou moins collectif d'un commentaire. Cet éventail sera suffisant pour introduire, en guise de conclusion, quelques réflexions plus générales sur le problème posé initialement.

IV. CONCLUSION : LA LECTURE, SES OBJETS, ET L'IMPORTANCE DE CE LIEN POUR L'ETUDE DE L'HISTOIRE DES SCIENCES

Si j'ai proposé un éventail « à la Borgès » c'est, comme toujours chez Borgès, pour inquiéter nos catégories et poser implicitement la question : comment nous y retrouver, et passer d'une série de constats à un choix réfléchi ? Le problème, dans tous les cas, reste pratique : il est de guider et d'enrichir une pratique pédagogique notoirement délicate.

1. La possibilité d'une catégorisation didactique des modalités de lecture.

Une première idée pour aborder la question est de proposer ou d'exploiter une étude didactique des actes de lectures en fonction de critères à déterminer, puis de s'intéresser à la manière de spécifier le propre des sources de l'histoire des sciences quant à leur *lisibilité*. Puisque, par exemple, le facteur temps paraît pertinent, voir essentiel, pour différencier les modalités de lectures en fonction de leur objectif ou de leur effet attendu, on pourrait caractériser dans le temps, ou plus exactement dans leur organisation chronologique, certaines modalités. De même, le caractère plus ou moins collectif *vs* individuel, audible *vs* silencieux, des lectures pourrait être convoqué à titre de paramètre possible pour caractériser une modalité de lecture.

Isoler de tels paramètres peut s'avérer intéressant, voire nécessaire, lorsqu'on vient à des problèmes comme la conception d'apprentissages experts adaptés à des textes ou en général des sources d'histoire des sciences. Mais la pertinence du projet me paraît plus discutable quant il s'agit de nourrir et d'informer une pratique d'enseignement « inventive » qui ne passe pas principalement par des systèmes experts. Ce qu'on peut attendre, au mieux, de tels « grilles de paramètres » est un cadre heuristique qui, à l'instar de l'éventail borgésien ci-dessus, donne tout simplement des idées pour *débuter* avec un procédé particulier (une

[9] Les dossiers du programme européen PayDecide (www.playdecide.eu/) sont constitués sur ce principe.

temporalisation, un mode de collectivisation, etc.) puis acquérir de l'aisance dans le « grand art » qui consiste généralement à combiner de manière pertinente plusieurs modalités semblables.

En outre, la liste des paramètres que j'ai esquissée devra forcément inclure ce paramètre fondamental qu'est la nature même du texte ou de la source visé(e). Par exemple, la lecture d'un texte procédural, non accompagnés d'explications, conduit à certaines possibilités de lecture et en exclut d'autres. Un texte galiléen invite à une lecture suivie et réfléchie, pour laquelle la lecture à haute voix, en particulier, peut s'avérer précieuse. Bref, on en arrive vite à tâcher de caractériser le degré d'adaptation d'une modalité de lecture à son objet, c'est-à-dire au type de source visée. Mais dire cela, c'est finalement reconnaître qu'un schéma « applicationiste », qui isolerait des actes de lectures des objets auxquels ils sont adaptés, n'est pas vraiment satisfaisant.

2. L'intérêt d'une appréhension historique et patrimoniale des actes de lectures.

C'est aujourd'hui une banalité de signaler que les modes de lectures ont une historicité complexe, qui leur est propre. Elle dépend notamment d'innovations techniques et de conditions économiques définies qui changent à chaque fois la façon d'appréhender la lecture et son enjeu. La lecture intensive, méditative qui caractérise l'étude antique et médiévale des classiques, n'est pas la même chose que la lecture extensive des écrits que la révolution de l'imprimerie a fait proliférer à la Renaissance, ni la lecture « navigante » et comparatiste que permettent aujourd'hui les moyens numériques de lecture.

S'il faut donc faire une théorie des modalités de lecture adaptée à l'histoire des sciences, elle devrait être cumulative et historique : c'est-à-dire fondée sur un retour conscient sur l'éventail que nous présente naturellement la longue histoire des techniques de lecture (Chartier et Cavallo 1997). Si j'ai par exemple évoqué plus haut l'*anagnose*, ce n'est ni par pédantisme ni par souci du pittoresque, mais parce que la compréhension profonde et informée de ce qu'était la lecture à haute voix pour les anciens éclaire effectivement et jusqu'à aujourd'hui une *possibilité* de, et parce qu'elle permet d'en valoriser les enjeux dans le temps présent. L'histoire de *ces* techniques, autrement dit, enrichit et valorise le répertoire didactique.

Cette perspective historico-patrimoniale présente l'avantage évident d'inclure très naturellement comme paramètre l'objet de lecture, puisqu'il n'y a de lecture qu'adaptée à son objet, et certains objets ne se comprennent historiquement qu'une fonction d'une certaine façon de les lire.

3. La particularité des textes d'histoire des mathématiques et des sciences

Si cette perspective s'avère particulièrement importante pour l'histoire des mathématiques en particulier, et l'histoire des sciences en général, c'est que cette histoire est en très grosse partie une histoire d'invention de techniques érudites adaptées à l'exploration d'un « donné » expérimental, logique ou procédural, mais qui en tout cas ne relève que de la seule subjectivité, ni même de la seule intersubjectivité, humaines. Une partie de l'inventivité scientifique se joue donc au niveau des objets à lire, et étudier l'histoire des sciences implique certainement de prendre en compte, toujours, cette dimension de ce que visent les sciences : pas seulement la cohérence causale ou conceptuelle d'un monde qui n'est pas qu'humain, mais encore sa *lisibilité commune*. Cette lisibilité ne serait pas tant un enjeu si, précisément, les formes d'accès à une quelconque cohérence scientifique n'étaient pas étroitement liées à une grande diversités de mode de schématisation, d'écriture et de transmission des connaissances, où se déploie une partie importante de l'inventivité technique et scientifique, et ce depuis l'antiquité. Entre en lecture, voire en lecture(s), veut donc bien dire explorer l'histoire des sciences et celle des mathématiques.

REFERENCES

Bernard A. (2009) Intégrer une perspective culturelle en cours de sciences. *Argos* 45, 6-13.

Bernard A., Proust C. (2008) La question des rapports entre savoir et enseignement dans l'Antiquité. In Viennot L. (Ed.) (pp. 281-302) *Didactique, épistémologie et histoire des sciences – Penser l'enseignement*. Paris : PUF.

Chartier R., Cavallo G. (1997) *Histoire de la lecture dans le monde occidental.* Réed. (2001) Paris : Seuil.

Fauvel J., van Maanen J. (Eds.) (2000) *History in Mathematics Education*. ICMI Study Series vol. 6. Dordrecht : Kluwer.

Jacob C. (Ed.) (2011) *Lieux de savoir 2 : les mains de l'intellect.* Paris : Albin Michel.

Simondon G. (1958) *Du mode d'existence des objets techniques*. Paris : Aubier.

Siu M.K. (2006) "No, I don't use history of mathematics in my class. Why?" In Furinghetti F., Kaijser S., Tzanakis C. (Eds.) (pp.268-277) *Proceedings of HPM2004 et ESU4*. Uppsala : Uppsala Universitet. http://hkumath.hku.hk/~mks/

SUR LA DIMENSION CULTURELLE DE L'ENSEIGNEMENT
DE LA SIGNIFICATION D'UN PLÉONASME

Rudolf BKOUCHE*

Résumé – Parler de dimension culturelle de l'enseignement apparaît comme un pléonasme. Si la question se pose aujourd'hui, c'est que l'enseignement s'est coupé de la culture. C'est ce point que nous examinerons dans un premier temps. Second point, pourquoi ce rapprochement entre la dimension culturelle de l'enseignement d'une science et la dimension historique ? L'intervention de l'histoire dans l'enseignement relève moins d'un accompagnement culturel que de sa contribution à la compréhension de cette science. Cela nous renvoie à la notion de perspective historique, ce que nous développerons via la notion de grandeur et le calcul littéral. Ces deux points nous conduisent à insister sur la culture des professeurs.

Mots-clefs : calcul littéral, culture, enseignement, formation des maîtres, histoire des mathématiques

Abstract – To talk about cultural dimension of teaching appears as a pleonasm. If the question is answered to ay, that is because teaching has cut from culture. This is first point we shall examine. Second point. Why a link between cultural dimension of the teaching of a science and the historical dimension ? The introduction of history in teaching is less a cultural accompaniment than a contribution to the comprehension of this science. We shall talk about the historical perspective with the examples of the magnitudes and the literal computing. This two points lead us to talk about the culture of teachers.

Keywords: literal computing, culture, education, teachers' training, history of mathematics

Si donc la culture nous pose un problème, c'est donc, et tout d'abord, qu'elle est en décadence (Rougemont 1972)

Il est plus aisé de suivre dans l'histoire les sauts accomplis dans les sciences empiriques et dans les humanités que de répondre à la toute simple question: comment se fait-il que Galilée et Newton ont laissé sur le carreau d'un massacre épistémologique la physique aristotélicienne alors que les démonstrations d'Euclide, elles, gardent toute leur validité ? (Kowalevski 1989)

I. INTRODUCTION

Qu'est-ce que la dimension culturelle de l'enseignement ? Si cette expression n'est pas un pléonasme, c'est que les termes « enseignement » et « culture » ont perdu leur sens. La question se pose alors de comprendre pourquoi on sent le besoin aujourd'hui de rapprocher ces deux termes comme s'ils relevaient de domaines hétérogènes qu'il faudrait recoller. Cela nous conduit à revenir sur les objectifs de l'enseignement et particulièrement de l'enseignement scientifique.

Second point que nous aborderons : que signifie le rapprochement entre dimension culturelle et dimension historique lorsqu'on parle de l'enseignement d'une science ? L'histoire d'une science est une discipline et si elle intervient dans l'enseignement d'une science, c'est moins comme accompagnement culturel que par ce qu'elle apporte à la compréhension de cette science. En ce sens, ce qu'on appelle la perspective historique dans l'enseignement d'une science s'inscrit dans l'enseignement de cette science ; reste alors à définir les modalités de cette inscription, ce que nous développerons dans la seconde partie de cet exposé. Mais rien ne serait plus dangereux que de réduire cette inscription à une « dimension culturelle », comme si le fait de parler de l'histoire de la discipline suffisait pour non seulement la mieux faire comprendre aux élèves mais encore pour amener les élèves à mieux en appréhender les divers enjeux.

* IREM de Lille, Université de Lille – France – rbkouche@wanadoo.frq

© Bkouche R. (2012) Sur la dimension culturelle de l'enseignement. De la signification d'un pléonasme. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT4, pp. 578–592). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

II. DES OBJECTIFS DE L'ENSEIGNEMENT

On peut considérer que l'enseignement a un double objectif, d'une part l'intégration des nouvelles générations dans la société, d'autre part l'émancipation des individus (Arendt 1990)[1]. C'est dans ce cadre que l'on peut considérer l'enseignement comme s'inscrivant dans la culture d'une société. L'enseignement est ainsi le lieu de transmission des savoirs propres à cette société, savoirs dont l'objectif est, soit de comprendre le monde, soit d'agir sur le monde, soit de construire les règles qui régissent les rapports entre les hommes dans la société.

Ce double objectif, intégration et émancipation, est-il encore pertinent dans la société contemporaine ? L'évolution des contenus d'enseignement depuis un siècle peut apporter des éléments de réponse à cette question (Belhoste, Gispert et Hulin 1996).

L'exemple des mathématiques est à cet égard significatif de cette évolution. Cet enseignement a été marqué par deux grandes réformes, la première au début du XX^{e} siècle, la seconde dans la seconde partie de ce siècle. Après l'échec de cette seconde réforme, les programmes se sont réduits à une accumulation de morceaux de savoir sans grande cohérence globale, l'objectif étant moins de transmettre une connaissance des mathématiques que d'assurer la réussite scolaire des élèves. Cette situation conduit à la double question : que signifie un tel enseignement ? que signifie la réussite scolaire des élèves ?

Il faut, pour comprendre ces questions, noter que le discours contemporain sur l'enseignement s'intéresse essentiellement aux élèves, discours qui exprime ce qu'on peut appeler l'idéologie de la centralité de l'élève. Il est alors moins question de définir des contenus de savoir à transmettre et les modalités de cette transmission que de rechercher ce qui peut satisfaire l'élève devenu « consommateur d'école », une conception marchande de l'enseignement pourrait-on dire. Dans ces conditions le professeur perd son rôle de porteur de savoir pour n'être plus que l'animateur des activités de l'élève, ce que certains considèrent comme la nouvelle forme du métier d'enseignant (Meirieu 1990). Une telle conception est portée par deux idéologies que nous avons définies ailleurs comme une idéologie moralisante et une idéologie savante (Bkouche 1992).

Face à cette mercantilisation de l'enseignement, la tentation est grande, d'abord de chercher à réintroduire dans l'enseignement une dimension culturelle, ensuite de chercher les moyens de cette réintroduction et l'histoire des sciences apparaît comme l'un de ces moyens. Mais cette tentation ne conduit-elle pas à un leurre ? Cette question nous conduit à revenir d'abord sur les notions de dimension culturelle et de dimension historique. Nous nous restreindrons dans ce texte au seul enseignement des mathématiques.

III. LA CULTURE DES PROFESSEURS

Lorsque l'on parle de dimension culturelle de l'enseignement des mathématiques, on renvoie autant à un point de vue interne qui concerne à la fois les mathématiques et leurs rapports aux autres sciences qu'à un point de vue externe qui concerne la place des mathématiques dans la société. Mais une telle dimension culturelle n'a de sens que si elle s'appuie sur ce qu'on peut appeler la culture des professeurs, laquelle suppose d'une part la maîtrise de la discipline enseigné et d'autre part des connaissances sur les rapports de cette discipline avec d'autres domaines de la connaissance ainsi que sur les enjeux de société en rapport avec leur discipline. L'acquisition de cette culture est alors l'un des enjeux de la formation des maîtres.

[1] Rappelons que pour Hannah Arendt, ces deux objectifs, s'ils sont complémentaires, présentent des aspects contradictoires.

La pédagogie, aussi importante soit-elle, vient en second et se construit en fonction de cette culture des professeurs.

C'est pourquoi au classique triangle didactique « l'élève, le professeur, le savoir » nous préférons substituer le triptyque « la discipline, l'enseignement, la classe » (Bkouche 2010). Ce triptyque a l'avantage de remettre le savoir au centre de l'acte d'enseignement.

IV. PERSPECTIVE HISTORIQUE DANS L'ENSEIGNEMENT D'UNE SCIENCE

Dans cette recherche éperdue de la dimension culturelle de l'enseignement, on a cru trouver une réponse dans l'histoire des sciences. Comme si la connaissance de l'histoire de ce que l'on enseigne allait permettre aux élèves de mieux comprendre ce qu'on leur enseigne.

Dans la préface de l'ouvrage *The Principles of Quantum Mechanics*, Dirac explique que le choix qu'il a fait pour introduire la mécanique quantique, la méthode symbolique plutôt que la méthode des coordonnées utilisée dans la plupart des ouvrages de mécanique quantique, l'a conduit à rompre avec toute présentation historique :

> This has necessitated a complete break from the historical line of development, but this break in an advantage through enabling the approach to the new ideas to be made as direct as possible. (Dirac 1930)

Pourtant une introduction historique peut être utile pour comprendre la mécanique quantique et plus précisément les raisons qui ont conduit Dirac à développer la méthode symbolique. Mais le traité de Dirac semble s'adresser à des lecteurs qui ont déjà une idée de la mécanique quantique et son objectif est de donner une présentation synthétique indépendante de la façon dont la mécanique quantique s'est mise en place.

Que peut-on dire en ce qui concerne l'enseignement secondaire ? Une introduction historique est-elle utile pour aborder une question nouvelle ? On ne peut espérer une réponse unique à une telle question. Si une introduction historique peut être utile dans certains cas, elle n'a rien de nécessaire et peut être nuisible dans d'autres cas. A quoi cela sert-il de faire l'histoire du produit scalaire pour l'introduire alors que ce qui importe c'est de montrer son efficacité dans les problèmes métriques ? Et faut-il raconter les difficiles débuts du calcul différentiel pour l'enseigner ?

C'est pourquoi, à l'introduction de l'histoire des sciences dans l'enseignement, nous préférons la notion de perspective historique telle qu'elle s'est dégagée à partir des travaux de la Commission Inter-IREM Epistémologie (1988).

Que l'histoire intervienne explicitement dans la classe est ici secondaire, c'est à chaque professeur de définir la part d'histoire qu'il peut introduire dans son enseignement et la forme de cette introduction (cours, lecture de textes…). Plus intéressant est le rôle que peut jouer l'introduction d'une perspective historique dans l'élaboration de l'enseignement. Non que la perspective historique constitue une panacée pour résoudre les problèmes d'enseignement, une telle panacée n'existe pas, mais le recours à l'histoire permet de mieux prendre en charge certaines questions d'enseignement. C'est alors à chaque professeur de définir, dans le cadre de son enseignement, la façon dont il se sert de l'histoire, ce qui exige d'une part que les professeurs connaissent l'histoire de la discipline qu'ils enseignent, et d'autre part qu'ils aient nourri cette connaissance d'un travail de réflexion qui renvoie à l'épistémologie. Cela renvoie encore une fois à la culture des professeurs.

Ce n'est pas le lieu d'entrer ici dans les détails, renvoyant à des travaux antérieurs (Bkouche 1997, 2000a). Nous nous contentons ici de citer deux points, d'une part la mise en perspective historique permet de mieux comprendre les enjeux d'une théorie, d'autre part la connaissance des difficultés rencontrées lors de l'élaboration d'une théorie permet de mieux prendre en charge les difficultés rencontrées par les élèves au cours de l'apprentissage ; nous précisons ces deux points à travers deux thèmes : la mesure des grandeurs et le calcul littéral. Pour d'autres thèmes nous renvoyons à (Bkouche 2000a), article dans lequel nous abordons les thèmes suivants : la notion de limite, la géométrie dans l'espace en liaison avec la représentation perspectiviste, le lien entre la géométrie et l'algèbre linéaire.

V. DE LA MESURE DES GRANDEURS

La notion de grandeur a disparu de l'enseignement des mathématiques avec la réforme dite des *mathématiques modernes*. Cette notion, dont nous verrons qu'elle a joué un rôle important dans le développement des mathématiques et en particulier dans ce que l'on appelle la généralisation de la notion de nombre, a été considérée comme relevant des mathématiques appliquées. A la décharge des réformateurs enfermés dans leur volonté d'enseigner les mathématiques qui se font[2], rappelons que le point de vue ensembliste a permis de présenter la généralisation de la notion de nombre sous une forme purement arithmétique ; il n'était donc plus besoin de s'appuyer sur la notion de grandeur considérée comme relevant de la physique et des mathématiques dites appliquées. Aujourd'hui, sous l'influence d'une conception moralisante de l'interdisciplinarité, on réintroduit les grandeurs pour faire « concret » et rapprocher l'enseignement des mathématiques de celui de la physique. On commet ici une double erreur. D'une part, la notion de grandeur n'est pas concrète, c'est même l'une des premières abstractions à l'origine du développement des mathématiques. D'autre part, c'est un travail sur les grandeurs qui a conduit au développement de l'algèbre comme nous le verrons ci-dessous.

Une réflexion d'ordre historique permet alors de comprendre la place de la notion de grandeur dans le développement des mathématiques et par conséquent sa place dans l'enseignement. S'il ne s'agit pas de reprendre la démarche historique dans l'enseignement, il s'agit, en s'appuyant sur la connaissance historique, de mettre en place une problématique qui montre comment la mesure des grandeurs a conduit à généraliser la notion de nombre à partie de la notion d'entier naturel, à commencer par la notion de fraction comme l'écrit Hermann Weyl :

> Historically **fractions** owe their creation to the transition from counting to **measuring**. (Weyl H. 1949)

1. Qu'est-ce qu'une grandeur ?

Dans ses *Leçons d'Arithmétique théorique et pratique*, Tannery rappelle cette définition vague

> ce qui est susceptible d'augmentation ou de diminution. (Tannery 1928)

mais il explique que cette définition est suffisante pour une première appréhension des grandeurs.

Une telle définition ne nous apprend pas grand chose sur ce qu'est une grandeur mais elle apparaît suffisante dans un premier enseignement dès que l'on a donné des exemples de grandeurs comme les longueurs, les poids ou les durées.

La première question qui se pose à propos des grandeurs est de les comparer, ce qui conduit au mesurage que l'on peut considérer comme un mode de comptage. On est ainsi

[2] La mode dans les années soixante était d'opposer la « science qui se fait » à la « science déjà faite », ce qui conduisait à mettre en avant l'enseignement de la première en oubliant que celle-ci se construit sur la seconde. En cela on oubliait que la modernité scientifique n'est jamais transparente et que l'enseignement scientifique s'appuie sur des progressions à définir à partir de la science déjà faite.

conduit à la définition de la mesure. Pour simplifier cet exposé nous nous restreindrons, sauf mention explicite, aux longueurs, les grandeurs associées aux segments de droite.

2. De l'égalité des segments de droite

Etant donnés deux segments de droite, nous dirons qu'ils sont *égaux* ou qu'ils ont *même longueur* si on peut amener le premier sur le second. La définition de l'égalité est ainsi liée au mouvement renvoyant au principe de l'égalité par superposition que l'on peut énoncer sous la forme suivante :

> Deux objets que l'on peut superposer sont égaux.

C'est en s'appuyant sur ce principe qu'Euclide démontre le premier cas d'égalité des triangles :

> Si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, chacun à chacun, et si les angles compris par les côtés sont égaux, ces triangles auront leurs bases égales, ils seront égaux, et les angles restants, sous tendus par les côtés égaux, serons égaux chacun à chacun. (Euclide 1993)

Une fois cette proposition démontrée, Euclide peut se passer du mouvement. Ainsi la géométrie élémentaire s'appuie sur le mouvement pour pouvoir l'éliminer (Bkouche 2000b).

Une fois définie l'égalité des segments et la notion de longueur, on peut définir une longueur particulière que l'on appellera la *longueur unité* et le mesurage n'est autre que l'opération qui consiste à compter combien de fois une longueur donnée contient la longueur unité.

Cette opération exige de définir d'abord un calcul sur les longueurs, ensuite la notion de rapport de longueurs. On peut alors définir la mesure d'une longueur par rapport à la longueur unité choisie comme le rapport de la longueur donnée à la longueur unité. Reste alors à définir ce rapport comme nombre.

3. Calcul sur les grandeurs

La longueur est une grandeur additive, c'est-à-dire que l'on peut définir l'addition des longueurs, celle-ci étant commutative et associative. On peut alors définir la multiplication par un entier. Rappelons que, deux longueurs a et b étant données, on dit que b est un *multiple* de a si $b = \mathrm{n}a$ où n est un entier naturel ; on dit aussi que a est un *diviseur* de b. On dit alors que deux longueurs sont *commensurables* si elles ont un diviseur commun, *incommensurables* dans le cas contraire.

Soient a et b deux longueurs et c un diviseur commun, on peut écrire les relations

$$a = \mathrm{m}c \qquad\qquad b = \mathrm{n}c$$

et on dit que le rapport de a à b est égal au rapport de m à n.

On montre aisément que si d est un autre diviseur commun de a et b, c'est-à-dire si on peut écrire les relations

$$a = \mathrm{p}d \qquad\qquad b = \mathrm{q}d$$

on a la relation

$$\mathrm{mq} = \mathrm{np}$$

Cette dernière relation permet de définir la notion de rapport de deux grandeurs commensurables de façon indépendante du choix du diviseur commun.

Le calcul du rapport de deux grandeurs conduit alors à chercher un diviseur commun à ces deux grandeurs. L'algorithme d'Euclide permet de déterminer le plus grand diviseur commun de deux longueurs.

Pour mettre en place l'algorithme, nous devons faire l'hypothèse que deux longueurs étant données, il existe un multiple de la plus petite supérieur à la plus grande, ce que l'on appelle l'*axiome d'Archimède*. On procède alors de la façon suivante :

Soient a et b deux longueurs, a étant inférieure à b, l'axiome d'Archimède implique qu'il existe un entier n tel que

$$\mathrm{n}a \leq b < (\mathrm{n} + 1)b$$

ce qui permet d'écrire

$$b = \mathrm{n}a + a_1$$

où a_1 est inférieur à a.

L'opération ci-dessus est appelée la *division* de b par a et la longueur a_1 est appelée le *reste* de la division. Il est clair que tout diviseur commun aux longueurs a et b divise la longueur a_1.

On peut continuer, c'est-à-dire diviser a par a_1 et obtenir le reste a_2, et ainsi de suite. On obtient une suite de longueurs b, a, a_1, a_2, …, a_n, … et tout diviseur commun de a et b divise les éléments de la suite b, a, a_1, a_2, …, a_n, ….

On montre aisément que si a et b ont un diviseur commun, la suite s'arrête au sens qu'il existe un entier p tel que a_p divise a_{p-1}, le dernier terme a_p est le plus grand diviseur commun de a et b. Réciproquement, si la suite s'arrête, le dernier terme de la suite est le plus grand diviseur commun de a et b.

La question se pose alors de savoir si la suite s'arrête.

Pour les pythagoriciens, deux longueurs sont commensurables et on peut définir leur rapport comme un rapport d'entiers. Le problème se posera avec la découverte de longueurs incommensurables, l'exemple classique étant le couple de longueurs défini par le côté d'un carré et sa diagonale, l'opération d'antiphérèse montrant que la suite définie par l'algorithme d'Euclide ne s'arrête pas (Szabo 2000, pp. 162-163).

Une fois découverte l'existence de couples de longueurs incommensurables, la question se posera de la définition du rapport de deux longueurs. C'est ce qu'expose Euclide au livre V des *Eléments*.

4. *Rapport de grandeurs et théorie des proportions*

Euclide ne donne pas de définition précise du rapport de deux grandeurs, se contentant de dire que le rapport de deux grandeurs est « une certaine manière d'être entre elles suivant la quantité » (Euclide 1993, Livre V, Définition 5)[3]. Cependant il suppose une condition qui n'est autre que l'axiome d'Archimède rappelé ci-dessus. Il peut alors donner une définition précise de l'égalité de deux rapports, puis de l'ordre entre les rapports, qu'il énonce de la façon suivante :

> Des grandeurs sont dites être en même rapport, la première à la seconde, et la troisième à la quatrième, lorsque des équimultiples quelconques de la première et de la troisième, et d'autres équimultiples quelconques de la seconde et de la quatrième sont tels, que les premiers équimultiples surpassent, chacun

[3] Dans sa traduction, Peyrard utilise le terme « raison » qui est équivalent au terme « rapport ». C'est ce dernier terme que nous utilisons dans la suite.

> à chacun, les seconds équimultiples, ou leur sont égaux à la fois, ou plus petits à la fois. (Euclide, 1993, Livre V, définition 6)
>
> Lorsque, parmi ces équimultiples, un multiple de la première surpasse un multiple de la seconde, et qu'un multiple de la troisième ne surpasse pas un multiple de la quatrième, on dit alors que la première a avec la seconde un plus grand rapport que la troisième avec la quatrième. (Euclide 1993, Livre V, Définition 8)

Ces définitions lui permettent de développer la théorie des proportions (égalité de rapports) qu'il utilisera pour l'étude des proportions géométriques, ce qu'il développe au Livre VI des *Eléments*.

5. Mesure des grandeurs et généralisation de la notion de nombre

Si, avec la théorie des proportions, Euclide a défini l'égalité des rapports, il n'en a pas pour autant donné la définition d'un rapport, encore moins défini le rapport comme un nombre.

Reste cependant la question de relier sa construction théorique avec la pratique de la mesure. Cela conduira à introduire des "nombres" nouveaux dont le statut reste mal défini. Si, lorsque deux grandeurs sont commensurables on peut définir leur rapport comme un rapport de nombre à nombre ce qui conduit à la notion de *nombre rompu* (la notion de fraction), la question des couples de grandeurs incommensurables reste entière et conduira à parler de *nombres sourds*[4].

A la fin du XVI^e^ siècle, Stevin décidera que tous les nombres se valent pour que les divers types de nombres (entiers, rompus, sourds) soient considérés de même nature (Groupe Epistémologie et histoire des mathématiques 1987, pp. 134-135). Mais ce que l'on peut considérer comme un coup de force épistémologique de la part de Stevin ne résout pas le problème et il faudra attendre la seconde partie du XIX^e^ siècle pour que les nombres sourds acquièrent un statut clair avec Dedekind, Cauchy, Méray et Weierstrass. Mais cela est une autre histoire.

6. La définition arithmétique des nombres

Le développement de l'analyse et les problèmes que pose la notion de limite conduiront à remettre en question, au tournant des XVIII^e^ et XIX^e^ siècles, la place de la géométrie comme modèle de la rigueur mathématique, remise en question renforcée par la découverte (ou l'invention !) des géométries non euclidiennes.

Ainsi Bolzano cherchera une démonstration numérique du fait que, une fonction continue f étant définie sur un intervalle $[a,b]$, si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes différents, alors la fonction s'annule pour au moins une valeur située dans l'intervalle $[a,b]$ (Bolzano 1964). Si sa démonstration reste incomplète dans la mesure où il ne dispose pas de la notion de nombre réel, elle met en place les ingrédients nécessaires qui seront repris une fois définie la notion de nombre réel.

Une première solution sera proposée par ce que l'on appelle l'arithmétisation de l'analyse conduisant à reconstruire le numérique à partir des entiers. La théorie des ensembles y ajoutera la définition des ensembles de nombres aujourd'hui notés **N**, **Z**, **Q**, **R**.

7. Construction des nombres rationnels

On définit sur l'ensemble des couples d'entiers la relation R[(m,n),(p,q)] définie par

$$mq = np$$

---

[4] Cette dénomination, introduite par les mathématiciens arabes, désigne les nombres que la raison n'entend pas.

et l'on montre aisément que c'est une relation d'équivalence dont on peut noter la ressemblance, non fortuite, avec la relation qui définissait l'égalité des rapports de nombres.

On définit sur l'ensemble des couples d'entiers une addition et une multiplication qui ne sont autres que l'addition et la multiplication des fractions. Ces opérations sont compatibles avec la relation d'équivalence.

Le quotient de l'ensemble des couples d'entiers par la relation d'équivalence R n'est autre que l'ensemble des nombres rationnels positifs.

8. Construction des nombres réels (Dedekind 2008)

Les nombres réels sont au fondement de l'analyse et leur construction est nécessaire pour démontrer les propriétés élémentaires des fonctions continues. Cette construction a permis d'abord de construire l'analyse indépendamment de toute référence géométrique et ensuite de redéfinir la notion de continuité géométrique comme l'explique Dedekind dans son article « Continuité and Nombres Irrationnels » (Dedekind 2008). On peut cependant noter que, si la construction de Dedekind permet de construire l'analyse indépendamment de toute référence géométrique, l'idée de coupure qu'il introduit est d'origine géométrique.

9. Retour à la mesure des grandeurs

La construction des nombres réels permet de redéfinir la mesure des grandeurs comme une application d'un ensemble de grandeurs dans l'ensemble des nombres réels. Nous nous appuyons ici la construction donnée par Jules Tannery dans *ses Leçons d'Arithmétique théorique et pratique* déjà citées (Tannery 1928), construction que nous reformulons pour mieux faire apparaître le lien avec la construction d'Eudoxe - Euclide.

Pour ce faire, nous définissons une section positive commençante comme une partie de l'ensemble des rationnels strictement positifs telle que si un nombre rationnel positif appartient à cette partie, alors tout nombre rationnel positif inférieur au nombre donné appartient encore à cette partie. Une section positive commençante définit un nombre réel positif.

On suppose que l'ensemble des grandeurs que l'on considère est additif et satisfait l'axiome d'Archimède, on associe à tout couple de grandeurs (a, b) la section positive commençante

$$S(a, b) = \{p/q \mid pb < qa\}$$

et on appelle *rapport* de a à b le nombre réel positif défini par $S(a,b)$, on le note a/b.

On vérifie aisément les propriétés suivantes :

Soient (a, b) et (c, d) deux couples de grandeurs, alors

I : les rapports a/b et c/d sont égaux si et seulement si les sections positives commençantes $S(a, b)$ et $S(c, d)$ sont les mêmes.

Ii : le rapport a/b est strictement supérieur au rapport c/d si et seulement $S(a, b)$ contient strictement $S(c, d)$.

Ces propriétés sont analogues aux définitions 6 et 8 du Livre V des *Eléments* d'Euclide rappelées ci-dessus.

VI. DE LA THEORIE DES EQUATIONS AU CALCUL LITTERAL

Dans un ouvrage destiné à des élèves de cinquième, les auteurs écrivent pour expliquer les *raisons* du calcul littéral :

> La résolution d'un problème est souvent facilitée lorsqu'on représente par des lettres les nombres inconnus qui interviennent dans ce problème. (Lebossé et Hémery 1948)

précisant ensuite :

> On peut raisonner sur ces lettres comme s'il s'agissait de nombres inconnus.

Nous ajouterons ici que si on n'a pas compris que le calcul littéral participe de la construction du simple, construction qui est l'un des objectifs du travail du mathématicien (Bkouche 1997), on n'a pas compris ce que signifie le calcul littéral. Le premier objectif d'un enseignement du calcul littéral est alors d'amener les élèves à prendre conscience de ce caractère de simplicité. Replacer le calcul littéral dans une perspective historique apparaît alors comme une façon de comprendre ce caractère de simplicité. Cela nous conduit à définir les trois aspects du calcul littéral, la lettre comme inconnue et comme paramètre, la lettre comme variable et la lettre comme indéterminée.

1. La lettre comme inconnue

L'utilisation des équations pour résoudre un problème s'inscrit dans le prolongement de la méthode « analyse – synthèse » des géomètres grecs pour les problèmes de constructions géométriques. Pour préciser cela, nous mettrons en parallèle un texte de Pappus sur l'analyse et la synthèse et un texte de François Viète.

Pappus écrit au Livre VII de la *Collection Mathématique* :

> L'analyse est donc la voie qui part de la chose cherchée, comme étant concédée, pour aboutir, au moyen des conséquences qui en découlent, à la synthèse de ce qui a été concédé. En effet, supposant, dans l'analyse, que la chose cherchée est obtenue, on considère ce qui dérive de cette chose et ce dont elle est précédée, jusqu'à ce que revenant sur ses pas, on aboutisse à une chose déjà connue ou qui rentre dans l'ordre des principes ; et que l'on nomme cette voie l'analyse en tant qu'elle constitue un renversement de la solution. Dans la synthèse, au contraire, supposant la chose finalement perçue par l'analyse comme déjà obtenue, et disposant dès lors de ses conséquences et ses causes dans leur ordre naturel, puis, les rattachant les unes aux autres, on aboutit en dernier ressort à construire la chose cherchée ; et c'est ce que nous appelons la synthèse. (Pappus 1982)

Quant à Viète, il écrit au début de l'*Art Analytique* :

> Il y a une voie aux mathématiques pour enquérir et rechercher la vérité, laquelle est dite premièrement trouvée par Platon et par Théon, appelée Analyse, et d'icelles définies par l'Assumption du requis comme concédé par les conséquences au vrai concédé. Comme au contraire la Synthèse, l'Assumption du concédé par les conséquences tirées de la fin et compréhension du requis. Et bien que les anciens aient seulement proposé deux espèces d'analytiques, savoir la zététique et la poristique auxquelles convient très bien la définition de Théon, j'en ai toutefois constitué une troisième espèce convenables à icelles, laquelle sera site rétique exégétique. Comme étant le Zététique, celui par lequel est trouvée l'égalité ou proportion de la grandeur requise avec celles qui sont données, le Poristique, par lequel est enquis de la vérité du Théorème ordonné, par l'égalité et la proportion, l'Exégétique, par lequel est exhibé la même grandeur dont est question, par l'égalité ou proportion ordonnée. Et ainsi tout l'art Analytique s'attribuant ce triple office sera défini la doctrine de bien trouver aux Mathématiques. (Vaulezard 1986)

Cette mise en parallèle nous rappelle l'origine du terme *"analytique"*.

La mise en équation revient à écrire les relations entre les quantités inconnues et les quantités connues et à calculer avec les quantités inconnues comme si elles étaient connues. Pour ce faire, on représente les quantités inconnues par des mots, la *racine*, comme le fait Al-Khwarizmi dans son ouvrage fondateur (Al-Khwarizmi 2007) ou la *chose* comme le feront les géomètres italiens du début du XVI^e siècle et plus tard par des lettres. Il faut alors noter que les coefficients numériques qui interviennent dans les équations jouent le rôle de "nombres génériques" au sens où, si l'on change la valeur de ces coefficients, le développement des calculs ne change pas.

2. Le calcul littéral

La représentation littérale des inconnues sera élargie par François Viète lorsqu'il représentera aussi les quantités connues par des lettres. Un tel élargissement permet d'éviter l'usage des nombres génériques puisque cet usage est indépendant des valeurs numériques, mais cet élargissement est lié au fait que les calculs portent non seulement sur des nombres mais plus généralement sur des grandeurs. C'est l'analogie entre le calcul sur les nombres et le calcul sur les grandeurs qui conduira Viète à écrire :

> Le Logistique Numérique est celuy qui est exhibé et traité par les nombres, le Spécifique par les espèces ou formes des choses : comme par les lettres de l'alphabet. (Vaulezard 1986)

Viète précise que le calcul sur les grandeurs est plus simple que le calcul numérique en ce qu'il est contraint par la loi des homogènes, ce qui conduit Viète à introduire cette loi dans le calcul sur les nombres, critiquant Diophante pour avoir ignoré cette loi. La loi des homogènes apparaît ainsi comme un point crucial du calcul littéral, ce qui pose la question de son explicitation dans l'enseignement si on veut que le calcul littéral apparaisse autrement que comme un exercice de style, mais cette explicitation ne prend son sens que dans un calcul sur les grandeurs, ce qui renvoie à la géométrie et à la physique[5]. Cela montre la place de la géométrie et de la physique dans l'enseignement du calcul littéral.

3. La notion de paramètre

La représentation des constantes par des lettres conduira à la notion de *paramètre*, un paramètre désignant une constante (nombre ou grandeur) dont la valeur peut varier. On peut alors classer les équations en fonction des paramètres ce qui permet de discuter de l'existence et du nombre de solutions, l'exemple classique étant l'équation du second degré.

Le passage des équations à coefficients numériques aux équations à coefficients littéraux marque une étape importante de la progression de l'enseignement de l'algèbre. La difficulté, dans l'enseignement, vient de ce qu'une littéralisation trop rapide risque de cacher la question sous ses aspects techniques et de couper ceux-ci de leur signification théorique. Il est donc nécessaire d'introduire la représentation littérale des quantités connues lorsque celle-ci permet de mieux appréhender une question. Ce qui conduit à mettre en avant, dans l'enseignement, d'abord le rôle des équations, ensuite le rôle déjà signalé de la géométrie et de la physique dans l'enseignement du calcul littéral.

La représentation littérale des constantes conduira à la notion de polynômes, sur laquelle s'appuie la théorie des équations algébriques, laquelle s'est identifiée à l'algèbre jusqu'à la mise en place des structures algébriques au XIX^e. Mais ce n'est pas ici le lieu de développer cette partie du calcul littéral nous contentant de renvoyer à quelques ouvrages classiques d'algèbre, tels que les *Leçons d'Algèbre élémentaire* de Carlo Bourlet et le *Cours d'Algèbre* de Pierre Chenevier, à l'usage des élèves des classes de Mathématiques élémentaires des lycées, ou encore, à un niveau plus élémentaire, l'ouvrage d'*Algèbre* d'Emile Borel et Paul Montel.

---

[5] On peut relier la loi des homogènes aux équations aux dimensions.

4. *La géométrie analytique*

L'invention de ce que l'on appelle aujourd'hui de la géométrie analytique, c'est-à-dire l'algébrisation de la géométrie, a suivi de près le travail de Viète. Cette algébrisation de la géométrie conduira en retour à une géométrisation de la théorie des équations et il faut voir dans cette dialectique « algébrisation – géométrisation » un aspect essentiel des mathématiques contemporaines.

Nous citerons d'abord la première phrase de *La Géométrie* de Descartes :

> Tous les Problèmes de Géométrie se peuvent facilement réduire à tels termes qu'il n'est besoin par après que de connaître la longueur de quelques lignes droites pour les connaître. (Descartes 1986, p. 333)

Cette première phrase annonce l'objectif : la réduction des méthodes géométriques au calcul des longueurs. Pour Descartes, un tel calcul doit être analogue au calcul numérique, ce qui le conduit à introduire une longueur unité et renoncer ainsi à la loi des homogènes ; c'est le prix à payer si l'on veut définir le produit de deux longueurs comme une longueur. Si ce calcul se montre à la fois simple et puissant, la géométrie disparaît derrière le calcul. La question se pose alors de retrouver la géométrie sous-jacente, ce qui conduit Descartes à alourdir le discours comme le montre le laborieux chapitre III de l'ouvrage.

Par contre Fermat, en conservant la loi des homogènes, reste plus proche de la géométrie. Il obtient ainsi un calcul moins fluide que celui de Descartes[6], calcul qui permet cependant à Fermat de prendre conscience de l'autonomie du calcul littéral par rapport aux grandeurs que représentent les lettres. C'est ce qui apparaît dans la partie consacrée à la géométrisation de la théorie des équations, d'abord dans l'appendice de son « Introduction aux lieux plans et solides » (Fermat 1896, pp. 95-101), ensuite dans la « Dissertation en trois parties » (Fermat 1896, pp. 109-20). Nous reviendrons ci-dessous sur l'autonomie du calcul littéral.

5. *La lettre comme variable*

La notion de fonction est aujourd'hui une notion essentielle des mathématiques. Pourtant cette notion est susceptible de plusieurs approches dont il n'est pas toujours facile de voir les liens. La définition ensembliste, malgré la simplicité de sa formulation, n'est pas la plus intéressante dans l'enseignement élémentaire[7]. Parmi les entrées possibles, la cinématique tient un rôle important sinon premier.

Etudier un mouvement revient à associer à chaque instant la position d'un mobile. Cette définition se précise lorsque le mouvement est celui d'un point se déplaçant sur une droite. On peut alors considérer le temps lui-même comme un point (un instant) se déplaçant uniformément sur une droite (l'axe des temps). Cette représentation du temps est loin d'être évidente et c'est l'une des grandes conquêtes de la révolution scientifique du XVII^e^ siècle.

En admettant une telle représentation, on peut alors représenter le mouvement d'un point sur une droite comme une fonction du temps. Le temps est ici la variable indépendante et la position du point la variable dépendante. Le mouvement est dit uniforme si les espaces parcourus sont proportionnels aux durées, ce qui conduit à la représentation du mouvement par une relation de la forme

---

[6] Encore que la question se pose des nos habitudes de calcul, plus proches de la présentation cartésienne. Tannery et Henry ont montré comment on pouvait moderniser les calculs de Fermat tout en conservant l'essentiel de sa présentation.

[7] Rappelons que la théorie des ensembles répond à des problèmes qui ne relèvent pas de l'enseignement élémentaire, sauf peut-être en ce qui concerne les probabilités. On peut s'appuyer sur ces dernières pour introduire quelques éléments de théorie des ensembles dans l'enseignement du lycée.

$$x = at + b$$

où x est l'abscisse du point en mouvement sur la droite qu'il parcourt et t le temps[8].

D'autres exemples de fonctions affines peuvent être donnés, mais il nous semble que le mouvement est une entrée essentielle pour l'étude des fonctions.

On rencontre ainsi une nouvelle forme d'utilisation des lettres, les lettres comme représentant des nombres ou des grandeurs variables, une fonction exprimant le mode de dépendance d'une grandeur, la grandeur dépendante, par rapport à la grandeur indépendante.

Lorsque les grandeurs sont des nombres ou représentées par des nombres *via* la mesure, la fonction est définie par une expression composée d'opérations élémentaires telles les quatre opérations arithmétiques augmentées de quelques autres que nous ne précisons pas ici.

Rappelons la définition d'une fonction énoncée par Euler dans son *Introduction à l'Analyse Infinitésimale* :

> Une fonction de quantité variable est une expression analytique composée, de quelque manière que ce soit, de cette même quantité et de nombres, ou de quantités constantes. (Euler 1796, t.1, p. 2)

Cette définition est suffisante dans l'enseignement secondaire autant pour les besoins des mathématiques que pour les besoins de la physique.

6. *L'autonomie du calcul littéral*

La pratique du calcul littéral conduit à remarquer que, une fois les règles de calcul énoncées, on ne se préoccupe plus de ce que représentent les lettres utilisées, nombres ou grandeurs. Le calcul devient ainsi un pur jeu de lettres obéissant à des règles précises.

Pour préciser ce point de vue, nous donnerons l'exemple de l'identité remarquable

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

On peut considérer cette identité comme une façon de représenter une infinité de relations numériques, chacune étant définie en "donnant des valeurs numériques" aux lettres.

On peut aussi considérer que cette identité représente une égalité d'aire si on considère le carré de côté $a + b$ que l'on décompose en deux carrés de côtés respectifs a et b et deux rectangles, chacun de côtés a et b. (nous laissons au lecteur le soin de dessiner la figure)[9].

Si ces représentations sont utiles pour comprendre ce que signifie cette identité, il faut remarquer que le calcul qui conduit à cette identité est indépendant de toute signification des lettres. Il suffit de connaître les règles d'usage de l'addition (l'application qui au couple (a, b) associe l'expression notée $a + b$), de la multiplication (l'application qui au couple (a, b) associe l'expression notée ab), et la règle de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. Autrement dit, du point de vue du calcul littéral, l'identité ne signifie rien d'autre qu'elle-même en tant que conséquence des règles d'usage.

C'est cela que nous appellerons l'*autonomie du calcul algébrique*. On peut considérer que Fermat l'avait, sinon compris, du moins entrevu, lorsqu'il transformait ses équations pour montrer comment leur résolution conduisait à chercher l'intersection de deux courbes. Cette

[8] Il faudrait distinguer ici la relation entre grandeurs, ce qui renvoie à la loi des homogènes, et la relation entre mesures qui est une relation numérique.

[9] Cette propriété géométrique n'est autre que la proposition 4 du Livre II des *Eléments* d'Euclide. La démonstration euclidienne est purement géométrique, s'appuyant sur la méthode des aires développée dans le Livre I.

autonomisation n'est pas sans poser problème. C'est ce qu'expose Poncelet lorsqu'il énonce les deux postulats de la géométrie analytique.

> Premier postulat : une situation géométrique étant donnée, on peut la représenter par des équations exprimant des propriétés de cette situation géométrique.
>
> Second postulat : après que certains calculs ont été effectués, les nouvelles équations obtenues expriment encore des propriétés de la situation géométrique. (Poncelet 1864, t.2, pp. 320-321)

La question se pose alors de la place de cette autonomie dans l'enseignement de l'algèbre.

La compréhension de cette autonomie s'appuie sur la pratique du calcul littéral, que ce soit sous une forme purement algébrique ou sous la forme de la géométrie analytique ou de la physique ; il ne saurait donc être question d'exiger cette compréhension au début de l'enseignement de l'algèbre. Mais, si dans un premier enseignement, les lettres restent les symboles des quantités, nombres ou grandeurs, qu'elles représentent, on peut penser que l'idée de l'autonomie du calcul se mettra en place au fur et à mesure que se développe la pratique du calcul littéral par l'élève. Ce peut être l'un des objectifs de la terminale S, mais ce peut être aussi l'objectif des terminales littéraires si on relie cette notion d'autonomie à l'enseignement de la philosophie des sciences. Car cette autonomie du calcul littéral reste un des points importants des mathématiques contemporaines.

7. La lettre comme indéterminée

C'est dans le cadre de cette autonomie du calcul qu'il faut comprendre la notion d'indéterminée. Une indéterminée n'est plus une lettre en attente de valeur comme cela se passe dans le premier enseignement du calcul littéral, c'est une lettre qui n'a d'autre signification qu'elle même et dont l'usage est défini par des règles explicites.

Dans ce cadre les polynômes ne sont plus des fonctions mais des assemblages de lettres soumis à des règles de calcul. Mais ces assemblages ne prennent sens que parce qu'ils sont la systématisation de calculs antérieurs, systématisation qui permet de mieux comprendre ces calculs antérieurs. S'il n'est pas question de reprendre l'ordre historique pour expliquer ce passage de la lettre-symbole, c'est-à-dire représentant un objet qui lui est antérieur, un nombre ou une grandeur, à la lettre-signe, l'histoire permet de comprendre comment on est passé d'un calcul littéral symbolique à un calcul littéral autonome, c'est-à-dire portant sur des signes, ici les lettres, indépendamment de toute signification de ces signes, permet de comprendre aussi que ce calcul sur les signes ne prend son sens que si on le replace dans son contexte, moins celui de l'autonomie que celui de l'autonomisation. En cela la notion d'indéterminée ne relève pas de l'enseignement secondaire, tout au plus peut-elle apparaître comme un thème limite en classe de terminale.

Ce court historique sur la constitution et les transformations du calcul littéral rappelle ce principe dont la réforme dite des « mathématiques modernes » a fait prendre conscience, à savoir que l'enseignement secondaire, et en particulier l'enseignement scientifique, a moins pour objectif de dire la modernité scientifique que de donner aux élèves les moyens intellectuels d'accéder à cette modernité.

VII. FORMATION DES MAÎTRES ET CULTURE DES PROFESSEURS

Les considérations sur la perspective historique indiquées ci-dessus nous conduisent à revenir sur la formation des maîtres et son rôle dans la culture des professeurs.

Si l'enseignement est lieu de transmission du savoir, la première exigence du métier de professeur est la maîtrise du savoir que l'on doit enseigner. La pédagogie, qui n'est autre que le moyen de construire les progressions nécessaires pour amener les élèves à acquérir le savoir qu'on leur enseigne, se définit essentiellement par rapport à ce savoir.

La formation des maîtres s'appuie sur ces deux pôles, la maîtrise du savoir, ou des savoirs, que le futur professeur devra enseigner et la mise en place de méthodes pédagogiques au sens que nous avons dit ci-dessus. L'histoire des mathématiques apparaît alors comme un moyen de penser l'enseignement. Nous l'avons vu ci-dessus pour la notion de grandeur et le calcul littéral, celui-ci apparaissant comme un moyen de résoudre les problèmes, problèmes numériques ou problèmes de grandeurs *via* la théorie des équations à laquelle s'identifie l'algèbre. Ce n'est que plus tard que la définition de l'algèbre évoluera, d'une part vers une science générale du calcul, d'autre part vers l'étude des structures algébriques.

Si le rôle de l'enseignement secondaire est moins de raconter le dernier cri de la science que d'expliciter les diverses étapes qui ont conduit à la science d'aujourd'hui, on peut concevoir que l'on s'appuie sur l'histoire pour organiser l'enseignement d'une science, non pour répéter cet histoire, ce qui serait illusoire mais pour en dessiner la trame. C'est ce que nous avons tenté de présenter autour de la notion de grandeur et du calcul littéral.

Mais, comme nous l'avons déjà souligné, ce travail historique préalable à l'organisation de l'enseignement s'appuie sur ce que nous avons appelé la culture des professeurs. C'est alors l'un des points essentiels de la formation des maîtres que de donner les moyens de cette culture aux futurs professeurs.

REFERENCES

Al-Khwarizmi (2007) *Le commencement de l'algèbre*. Texte établi, traduit et commenté par Roshdi Rashed. Paris : Blanchard.

Arendt H. (1990) La crise de l'éducation. Vezin C. (Trad.) In Arendt H., *La crise de la culture*. Paris : Gallimard.

Belhoste B., Gispert H., Hulin N. (Eds.) (1996) *Les sciences au lycée. Un siècle de réformes des mathématiques et de la physique en France et à l'étranger*. Paris : Vuibert-INRP.

Bkouche R. (1992) L'enseignement scientifique entre l'illusion langagière et l'activisme pédagogique. *Repères IREM* 9, 5-12.

Bkouche R. (1997) Epistémologie, histoire et enseignement des mathématiques. *For the learning of mathematics* 17(1).

Bkouche R. (2000a) Sur la notion de perspective historique dans l'enseignement d'une science. *Repères IREM* 39, 5-59.

Bkouche R. (2000b) Quelques remarques autour des cas d'égalité des triangles. *Bulletin de l'APMEP* 430, 613-629.

Bkouche R. (2010) De la formation des maîtres. *Repères IREM* 80, 29-48.

Bolzano B. (1817) Démonstration purement analytique du théorème : entre deux valeurs quelconques qui donnent deux résultats de signes opposés se trouve au moins une racine réelle de l'équation. Traduction française 1964. Sebestik J. (Trad.) *Revue française d'histoire des sciences* 17(2), 129-164.

Borel E., Montel P. (1918) *Algèbre (Nouveau Cours de Mathématiques)*. Paris : Armand Colin.

Bourlet C. (1896) *Leçons d'Algèbre élémentaire (Cours complet de mathématiques élémentaires)*. Paris : Armand Colin.

Chenevier P. (1930) *Cours d'Algèbre, à l'usage des classes de Mathématiques de l'enseignement secondaire (lycées et collèges de garçons et de jeunes filles)*. Paris : Hachette.

Commission Inter-IREM Epistémologie (1988) Pour une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques. *Bulletin Inter-IREM Epistémologie*.

Dedekind R. (2008) Continuité et nombres irrationnels (1872). In *La création des nombres*. Introduction, traduction et notes par Houria Benis Sinaceur. Paris : Vrin.

Descartes R. (1986) *La Géométrie*. In Descartes R., *Discours de la Méthode plus la Dioptrique, Les Météores et la Géométrie*. Paris : Fayard.

Dirac P. A. M. (1930) *The principles of Quantum Mechanics*. 3rd edition (1947). Oxford : Clarendon Press.

Euclide (1993), *Les Elément*s, traduits par Peyrard. Paris : Blanchard.

Euler L. (1796) *Introduction à l'Analyse Infinitésimale*, traduit du latin en français, avec des notes et des éclaircissements. Paris : Barrois. Réed. (1987) Paris : ACL-éditions.

Fermat P. (1896) *Œuvres de Fermat,* publiées par les soins de MM. Paul Tannery et Charles Henry. Tome troisième. Tannery P. (Trad.) Paris : Gauthier-Villars.

Groupe Epistémologie et histoire des mathématiques (1987) *Mathématiques au Fil des Ages*. Paris : Gauthier-Villars.

Kolakowski L. (1989) *Horreur métaphysique* (traduit de l'anglais par Michel Barat). Paris : Payot.

Lebossé C., Hémery C. (1948) *Arithmétique, Algèbre et Géométrie (classe de cinquième des lycées et collèges)*. Paris : Fernand Nathan.

Meirieu P. (1990) *Enseigner, scenario pour un métier nouveau*, préface de Louis Legrand, 2e édition augmentée d'un guide pour le conseil pédagogique. Paris : ESF.

Pappus (1982) *La Collection Mathématique*, traduction et notes par Paul Ver Eecke, nouveau tirage. Paris : Blanchard.

Poncelet J.-V. (1864) *Principes d'Analyse et de Géométrie*. Paris : Gauthier-Villars.

Rougemont (de) D. (1972) *Penser avec les mains*. Paris : Gallimard.

Szabo A. (2000) *L'aube des mathématiques grecques*. Traduit de l'allemand. Federspiel M. (Trad.) Paris : Vrin.

Tannery J. (1928) *Leçons d'Arithmétique théorique et pratique (Cours complet pour la classe de Mathématiques A, B)*, dixième édition revue. Paris : Armand Colin.

Vaulézard (1986) *La Nouvelle Algèbre de Monsieur Viète*. Paris : Fayard.

Weyl H. (1963) *Philosophy of mathematics and natural Science*. Princeton University Press. Reprint New York : Atheneum.

ENQUÊTES EPISTEMOLOGIQUE ET DIDACTIQUE DU CONCEPT DE LA QUANTIFICATION

Faïza CHELLOUGUI* – Rahim KOUKI**

Résumé – Dans une première partie de cet article, nous présentons une enquête épistémologique à partir des textes fondateurs (Frege et Quine) mettant en valeur la naissance du symbolisme logique et le lien du concept de la quantification avec des théories philosophiques qui montrent la complexité et la polysémie des quantificateurs dans le langage formel et le langage naturel (Chellougui 2004). La deuxième partie propose une analyse didactique autour du concept de quantification. Il s'agit de quelques résultats expérimentaux issus des travaux antérieurs de Dubinsky et Yiparaki (2000) et de Durand-Guerrier et Arsac (2003).

Mots-clefs : quantification, quantificateur universel, quantificateur existentiel, logique, calcul des prédicats

Abstract – In a first part of this article, we present an epistemological survey starting from the foundational texts of Frege and Quine in ordre to highlight the birth of logical symbolism and the link of the concept of the quantification with philosophical theories which show the complexity and the polysemy of quantifiers in the formal language and the natural language (Chellougui 2004). The second part proposes a didactic analysis around the concept of quantification. We discuss some experimental results from earlier work of Dubinsky and Yiparaki (2000) and Durand-Guerrier and Arsac (2003).

Keywords: quantification, universal quantifier, existential quantifier, logic, calculation of the predicates

I. INTRODUCTION

Dans l'activité mathématique, l'essentiel du discours est porté par la langue naturelle et par un langage mixte qui incorpore des symboles mathématiques. En début d'université, on introduit le symbolisme logique : $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\forall$ et $\exists$, pour permettre d'écrire des énoncés entièrement formalisés sans qu'un travail spécifique sur les règles de fonctionnement du symbolisme et sur le passage des énoncés en langue naturelle aux énoncés formalisés et vice versa (Duval 1995), ne soit conduit.

On observe cependant que chez un grand nombre d'étudiants, l'introduction des écritures formalisées semble bien au contraire engendrer des ambiguïtés résistantes. De nombreux travaux de recherche en didactique des mathématiques (Bloch 2000 ; Dubinsky et Yparaki 2000 ; Durand-Guerrier et Arsac 2003 ; Chellougui 2004 ; Durand-Guerrier 2005) ont montré que la complexité de la structure logique des expressions mathématiques quantifiées engendre souvent des difficultés spécifiques dans la gestion et la manipulation des quantificateurs par les étudiants : difficultés d'interprétation du vocabulaire logico-mathématique ; lacunes d'ordre opératoire ; difficultés dans la manipulation des énoncés complexes à quantifications multiples.

Dans la première partie de cet article, nous présentons quelques fondements épistémologiques autour du concept de quantification, à partir des textes fondateurs de Frege (1848-1925) et Quine (1908-2000). Ces fondements épistémologiques sous-tendent l'introduction des dimensions historique et culturelle, dans l'enseignement des notions mathématiques dont l'usage des quantificateurs est nécessaire, telles que la limite, la continuité, les suites réelles, etc. Au cœur de ce travail se trouve une analyse du langage qui

* Université de Carthage, Faculté des Sciences de Bizerte – Tunisie – chellouguifaiza@yahoo.fr
**Université de Tunis El Manar, Institut Préparatoire aux Etudes d'Ingénieurs El Manar, LAMSIN ENIT – Tunisie – kouki_ra@yahoo.fr

© Chellougui F., Kouki R. (2012) Enquêtes épistémologique et didactique du concept de la quantification. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT4, pp. 593–602). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

conduit à l'élaboration progressive d'un formalisme dont, selon Quine, la fonction première est de contribuer à la clarification conceptuelle. Il s'agit, en particulier, d'élucider les règles d'usage tant syntaxiques que sémantiques des expressions telles que : « quel que soit », « tout », « pour tout », « chacun », « chaque », « il existe », « certain »…

Dans la deuxième partie, nous présentons quelques résultats en didactique des mathématiques. Il s'agit des travaux ayant pour problématique le formalisme logique. Le premier travail, accompli conjointement par Ed Dubinsky et Olga Yiparaki (2000), concerne les énoncés quantifiés du type « Pour tout X, il existe Y… », « Il existe X, pour tout Y… ». Le second travail réalisé par Durand-Guerrier et Arsac (2003) montre une analyse des énoncés quantifiés du type « Pour tout x, il existe y tel que F(x, y) ».

II. FONDEMENTS EPISTEMOLOGIQUES

1. *L'*Idéographi*e de Frege*

L'*Idéographie* de Frege (1879) expose pour la première fois un langage symbolique enrichi par rapport au symbolisme mathématique où la quantification trouve son expression. L'*Idéographie* est l'écriture des concepts, c'est un exemple d'une langue scientifique, en particulier d'une langue mathématique. Selon Frege, le langage formel devrait être capable d'éviter les différences de représentations et les ambiguïtés intrinsèques dans certaines structures qui, même dans un contexte donné, sont susceptibles d'engendrer une mauvaise compréhension.

Frege adopte les signes suivants : trait de jugement, trait de contenu, trait de négation et lettre gothique.

Frege exprime un jugement à l'aide du signe : ├—— , qui se trouve à gauche du signe ou de la combinaison de signes exprimant le contenu du jugement. Ce signe se compose de deux traits : |… trait de jugement, et —— trait de contenu.

Le trait de jugement ne peut paraître qu'une seule fois dans une formule et doit invariablement y occuper la première place. De plus, il doit être suivi directement par un trait de contenu.

On peut écrire, sans se prononcer sur la vérité : —— 2 + 5 = 7

Pour affirmer la justesse de ce contenu, on écrit : ├—— 2 + 5 = 7

Ainsi, le trait de jugement signifie toujours « il est vrai » ce qui donne « il est vrai qu'il est vrai » ou « il est vrai qu'il est faux ».

Dans l'*Idéographie*, le trait de négation est formulé de la manière suivante :

> Si l'on met un petit trait vertical sous le trait de contenu, on exprime de cette manière la circonstance *que le contenu n'a pas eu lieu*. (Frege 1879, p. 24)

Frege présente l'exemple suivant : « ├——┬—— A » qui signifie : « A n'a pas lieu ».

Le petit trait vertical est appelé le trait de négation. La partie du trait horizontal qui se trouve à la droite du trait de négation est le trait de contenu de A, et la partie qui se trouve à la gauche du trait de négation est le trait de contenu de la négation de A. Par exemple, avec ce trait de négation, on peut exprimer le jugement selon lequel « il n'est pas le cas que deux et quatre font sept », en se servant de la formule suivante : « ├——┬—— 2 + 4 = 7 ».

Ainsi, l'expression : « $\vdash\!\top\!-\ A$ » est vraie, si et seulement si l'expression : « $\vdash\!-\ A$ » est fausse.

Frege introduit l'universelle affirmative formulée comme suit : « $\vdash\!-\!-a,\!\smile\!-\!-\ \Phi(a)$ » en disant qu'elle exprime le jugement que la fonction désignée par « Φ » est un fait pour n'importe quel argument « a ».

Dans ce qui suit, nous présentons une expression idéographique pour des énoncés portant une négation. En voici deux énoncés[1] proposés par Barnes :

Enoncé 1. Rien n'est plus grand que deux.

Enoncé 2. Quelque chose n'est pas plus grand que deux.

Pour l'énoncé1 la formule idéographique est : « $\vdash\!-a,\!\smile\!-\!\top\!-\ a > 2$ » cette formule est vraie si et seulement si, pour tout élément, il n'est pas vrai qu'il est plus grand que 2, ou si et seulement si, il n'y a rien qui est plus grand que 2. Cette formule exprime la généralité d'une négation, elle dit qu'une négation est tenue comme vraie partout. En effet, la généralité s'étend du début de ligne jusqu'à la fin sans être affectée par la négation.

Par contre, l'énoncé 2 exprime la négation d'une généralité qui ne commence qu'après le trait de négation. Son expression idéographique est la suivante : « $\vdash\!\top\!-a,\!\smile\!-\ a > 2$ ». Ici, la négation porte sur toute la formule. Celle-ci est vraie si et seulement si, « $\vdash\!-a,\!\smile\!-\ a > 2$ », est fausse. Autrement dit, si et seulement si, au moins un élément n'est pas plus grand que deux.

Ainsi, on dispose d'une universelle négative formulée de la manière suivante :

« $\vdash\!-a,\!\smile\!-\!\top\!-\ \Phi(a)$ » dont la négation est la particulière affirmative : « $\vdash\!\top\!-a,\!\smile\!-\!\top\!-\ \Phi(a)$ », ce qui revient à dire que quelque chose possède une certaine propriété.

Ceci donne à voir la portée de la quantification par rapport à la négation ce qui élève des ambiguïtés dans la langue française. On peut donc représenter la phrase : « Quelque chose est plus petit que toute chose » au moyen de la formule idéographique suivante :

$$\vdash\!-\!\top\!-\!-b,\!\smile\!-\!-\!\top\!-\!-a,\!\smile\!-\!-\ b < a$$

Frege a réussi à exprimer le quantificateur universel en lui attribuant, comme ostensif, une lettre gothique glissée dans un creux. Alors que, le quantificateur existentiel est exprimé en utilisant le trait de négation suivit du creux de généralité. En d'autre terme, le quantificateur existentiel est la négation du quantificateur universel. C'est ainsi que dans son idéographie, Frege ne se sert que du quantificateur universel.

On prend comme exemple les deux propositions suivantes, dont le domaine de référence est l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$:

Proposition 1 : « Il y a un entier qui est plus grand que tous les autres entiers" » (1) qui est fausse.

Proposition 2 : « Pour tout entier il existe un entier qui est plus grand que lui" » (2) qui est vraie.

Pour la proposition1, la formule idéographique est : « $\vdash\!\top\!\top\!-x,\!\smile\!-\!\top\!-y,\!\smile\!-\ x \geq y$ », pour la proposition 2, elle est : « $\vdash\!-\!-y,\!\smile\!-\!\top\!-x,\!\smile\!-\!\top\!-\ x \geq y$ »

La différence entre ces deux ostensifs exprime la différence entre les pensées qui se trouvent dans les deux propositions. En effet, Frege donne une importance capitale pour les

[1] Postface de l'ouvrage : « Idéographie », p. 169.

signes dans le développement de la pensée car ils permettent de se détacher des images mentales courtes pour entrer dans un mode de pensée.

A l'aide du quantificateur universel, on a les équivalences suivantes pour les deux formules précédentes :

(1) « ├┬─x,◡─┬─y,◡─ x ≥ y ≡ ¬ [∀x ¬ (∀y, x ≥ y)] » et

(2) « ├──y,◡─┬─x,◡─┬─ x ≥ y ≡ ∀y [¬ (∀x ¬ (x ≥ y)] »

Les formules complexes ne sont pas faciles à interpréter et à saisir. Mais leur structure générale est toujours évidente et une approche méthodique suffit pour déceler leur sens. Nous pouvons ainsi dire que non seulement l'idéographie possède un pouvoir expressif permettant principalement la compréhension des expressions mathématiques contenant des éléments de logique mais elle peut également lever les ambiguïtés.

Comme conséquence, on peut dire que cette *Idéographie* est peu maniable pour exprimer les existentielles. Par exemple : « Quelque homme est blanc », se traduit dans le langage idéographique par : « Non (tout homme est non blanc) ».

Aujourd'hui, on peut écrire : « ∃x ∀y, x ≥ y » pour (1) et « ∀y ∃x, x ≥ y » pour (2).

Pour conclure, nous pouvons signaler que L'*Idéographie* se voulait d'une aide non négligeable, essentiellement pour la bonne compréhension du cheminement logique d'un raisonnement. Frege a réussi à exprimer le quantificateur universel, désigné dans l'*Idéographie* par généralité, en lui attribuant, comme ostensif, une lettre gothique glissée dans un creux. Alors que, le quantificateur existentiel est exprimé en utilisant le trait de négation suivit du creux de généralité. C'est ainsi que dans son idéographie, Frege ne se sert que du quantificateur universel. Comme conséquence, on peut dire que cette Idéographie est peu maniable pour exprimer les existentielles.

2. La quantification chez Quine

La simplification de la théorie logique

Quine (1960) parle de l'ambiguïté des termes et examine différents moyens pour les clarifier. Le recours aux parenthèses dans les écritures formalisées permet de clarifier certaines ambiguïtés structurelles dans les écrits mathématiques. Selon Quine, sans les parenthèses ou quelques conventions de rechange, les mathématiques n'en seraient pas où elles en sont.

Quine donne un nom à ce procédé qu'il note : la simplification de la théorie. Ce procédé est l'un des motifs principaux du recours à la notation de la logique. Pour expliquer cette notation, on doit employer la langue naturelle en spécifiant explicitement certaines opérations par lesquelles toute phrase notée dans la notation logique peut être directement développée dans la langue naturelle. En développant rigoureusement la théorie logique pour les phrases mises sous une forme canonique adaptée à cette théorie, Quine adopte la tâche de paraphraser ces expressions du langage naturel en symboles logiques. L'adjectif indéfini « aucun » peut être paraphrasé à l'aide de « chaque » et de la négation. Les formes essentielles des termes singuliers indéfinis se réduisent à « chaque F » et « quelque F », où « F » tient la place de n'importe quel terme général en forme substantive.

Les quantificateurs universel et existentiel sont représentés habituellement et respectivement par « ∀x »[2] et « ∃x ». L'expression "aucune chose" s'écrit « ¬(∃x) ». Le

[2] Dans son symbolisme, Quine représente le quantificateur universel par « (x) ».

quantificateur existentiel peut être paraphrasé à l'aide du quantificateur universel et vice versa : « $\exists$x (…x…) » devient « non ($\forall$x) non (…x…) », et réciproquement. Ainsi, selon Quine, tous les termes indéfinis se réduisent aux deux sortes de quantificateurs.

Le quantificateur existentiel chez Quine

Selon Quine, l'observation de la nature elle-même suffit à décider de ce qui « existe » comme de ce qui « subsiste ». La distinction terminologique entre « exister » et « subsister » n'a, pour lui, aucune justification. Il est légitime de traduire « Socrate est » par « Il existe un et un seul x qui est Socrate », ou « Il existe un et un seul x qui Socrate », ou « $\exists!$x (Sx) », ou encore, en langage ensembliste, « $\exists!$x (x$\in$s) », (le prédicat monadique S ayant pour extension la classe s).

Pour comprendre le propos de Quine, il est nécessaire de distinguer, parmi les fonctions du langage, celles dont se chargent ou ne se chargent pas certains mots. Un nom propre ne signifie rien, il nomme. Sa fonction est de faire référence à un objet, mais, par lui-même, il n'affirme l'existence d'aucun objet. C'est au prédicat que revient, dans la phrase, la fonction de préciser la qualité qui est attribuée à l'objet. Seule une affirmation existentielle comme « $\exists$x Fx » affirme l'existence d'au moins un individu x qui vérifie la propriété F. Cet individu est nommé par la variable x, il est dit « exister », puisqu'il est sous la portée du quantificateur existentiel et une qualité F lui est attribuée. En l'absence de toute précision, cet individu peut être un élément comme un ensemble, mais il appartient au domaine de l'ontologie. Son exclusion de ce domaine se formulerait par les énoncés : « $\neg$($\exists$x Fx) » ou « $\forall$x $\neg$Fx ».

On peut dire qu'il y a une différence importante entre le « il existe » de la notation canonique de Quine et celui de la logique de la théorie des ensembles. Le « il existe » de Quine marque une existence soit physique ou ontologique de la variable quantifiée et explique ensuite qu'il prend comme existants les objets physiques et les classes construites sur ces objets. Ainsi, le « il existe » de la notation canonique se divise en un « il existe » quantifiant sur tous les éléments de ce modèle, qui est un quantificateur, et un prédicat à une place « a une existence physique ». Alors que le « il existe » de la logique est plutôt une manière de dire qu'on va parler d'un certain « objet » à valeurs dans n'importe quel modèle de la théorie.

Dans la notation canonique de la quantification de Quine, les objets admis sont les objets de l'univers dans lequel les variables liées de la quantification sont censées prendre leurs valeurs. Cependant, en considérant *U* l'univers du discours, le sens donné aux quantificateurs « $\forall$x » et « $\exists$x » est respectivement « tout objet x de U est tel que », « il existe un objet x de U tel que ». Ces constructions servent à renvoyer à des objets. Ainsi, paraphraser une phrase dans la notation canonique de la quantification c'est expliciter son contenu ontique : la quantification n'est qu'un procédé pour parler des objets (Quine 1960).

Pour conclure, le critère de l'engagement ontologique permet de reconnaître les êtres : entités et objets, qu'une théorie admet dans la description de la réalité. La norme de l'engagement ontologique est formulée dans le langage ordinaire de la façon suivante : « Une théorie admet *tels objets* si l'affirmation de l'*existence de tels objets* est nécessaire pour rendre la théorie *vrai*e ». Dans la langue canonique de la logique, elle est formulée comme suit : « Il y a des choses de l'espèce *F* si et seulement si ($\exists$x *Fx*) ».

La formalisation montre que l'engagement ontologique ne porte pas sur l'espèce *F*, mais sur ce *x* quelconque qui vérifie la propriété d'être un objet d'espèce *F*. Une question se pose alors : quelle est la nature de ce *x* qui est dit exister ?

III. QUELQUES RESULTATS EN DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

Nous présentons quelques résultats expérimentaux issus des travaux antérieurs de Dubinsky et Yiparaki (2000) à partir de leur article intitulé *On student understanding of AE and EA quantification*, et de Durand-Guerrier et Arsac (2003) à travers leur article *Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques*.

1. Interprétation des énoncés en langue naturelle

Dubinsky et Yiparaki (2000) ont mené un travail sur la compréhension par des étudiants scientifiques des énoncés quantifiés du type AE et EA donnés en langue naturelle. En particulier, ils cherchent à savoir si la différence de syntaxe est considérée ou non. Par AE, ils désignent des formulations du type : « For all...there exists... » (Pour tout...il existe...) ; il s'agit des énoncés de la forme : $(\forall x)\ (\exists y)\ R(x,y)$ où R est une relation binaire. De même, ils désignent par EA, les formulations du type : « There exists... for all... » (Il existe… pour tout…) ; il s'agit des énoncés de la forme : $(\exists c)\ (\forall d)\ S(c,d)$ où S est une relation binaire.

Dans ce travail, les auteurs ont conduit une étude expérimentale auprès d'étudiants d'université scientifique. Cette étude comporte deux phases : un questionnaire et un entretien. Le questionnaire contient 11 énoncés présentés dans le langage naturel dont chacun est soit vrai soit faux. Parmi ces énoncés, on compte six EA et cinq AE, seuls les deux derniers sont des énoncés mathématiques. Les auteurs ont proposé une catégorisation des énoncés suivant qu'ils soient (AE) ou (EA), notée au début de chaque phrase. Par contre, les étudiants ne disposent pas de cette catégorisation.

En voici la liste telle qu'elle est présentée dans les pages 5 et 6 de l'article :

(1) (AE) Everyone hates somebody.

(2) (AE) Every pot has a cover.

(3) (EA) Someone is kind and considerate to everyone.

(4) (EA) There is a mother for all children.

(5) (AE) All good things must come to an end.

(6) (EA) There is a magic key that unlocks everyone's heart.

(7) (AE) All medieval Greek poems described a war legend.

(8) (EA) There is a perfect gift for every child.

(9) (EA) There is a fertilizer for all plants.

(10) (AE) For every positive number a there exists a positive number b such that $b<a$

(11) (EA) There exists a positive number b such that for every positive number a $b<a$ (Ibid., pp. 5-6)

Dans le questionnaire, il est demandé aux étudiants de répondre par vrai ou faux pour chacun des énoncés et d'expliquer brièvement leur réponse. Concernant la phase de l'entretien, les questions posées sont liées aux interprétations faites dans leurs réponses.

Ce travail a mis en évidence la tendance des étudiants à interpréter systématiquement les énoncés comme AE : les résultats ont montré qu'il y a une forte tendance chez un nombre important d'étudiants à favoriser une interprétation AE contre une interprétation EA. Ceci semble dû au fait que les énoncés AE sont plus facilement tenus pour vrais.

L'étude a montré, en outre, certaines difficultés des étudiants pour interpréter et distinguer ces énoncés dans un contexte mathématique et non mathématique. Selon Dubinsky et Yiparaki, les étudiants sont beaucoup plus capables de traiter les énoncés non mathématiques que les énoncés mathématiques. En effet, pour les énoncés mathématiques, il y a une mauvaise gestion des quantificateurs et une interprétation non pertinente des énoncés AE et EA.

Les auteurs insistent sur la nécessité d'enseigner la syntaxe. Par ailleurs, nous pensons qu'il ne suffit pas d'enseigner quelques règles d'usage pour que les problèmes liés à ces questions soient résolus. Les résultats fournis par les auteurs ont mis en évidence une nécessaire interaction entre les points de vue sémantique et syntaxique. Cette étude de l'articulation entre syntaxe et sémantique présente une importance considérable pour analyser les énoncés mathématiques illustrant des notions travaillées et rencontrées dans l'enseignement supérieur telles que : continuité, limite, continuité uniforme, convergence simple, convergence uniforme etc. Ces notions nécessitent le plus souvent une présence des quantificateurs, de même type ou de types différents qui peuvent être placés au début ou au milieu de l'énoncé quantifié.

2. *Manipulation des énoncés en « quel que soit, il existe »*

Durand-Guerrier et Arsac (2003) se sont intéressés de très près à la place et au rôle de la logique dans l'enseignement des mathématiques depuis le lycée jusqu'au premier cycle universitaire scientifique. Dans leurs travaux, ils placent le formalisme logique au cœur de leur problématique d'une part, et analysent le plus souvent des énoncés quantifiés d'autre part. Parmi ces énoncés, nous distinguons ceux du type « Pour tout x, il existe y tel que F(x,y) ».

Durand-Guerrier et Arsac proposent d'utiliser un modèle théorique pour rendre compte de la pratique suivante :

> […] ; quand on applique un énoncé du type « quel que soit a, il existe b… », il faut ajouter que b « dépend » de a. […], l'erreur consiste à utiliser une lettre de variable liée comme s'il s'agissait d'un nom d'objet. Ceci revient à faire l'impasse sur l'inférence sémantique associée à la règle d'instanciation existentielle, et du coup, à ne pas respecter les restrictions correspondantes sur les noms d'objets ; à savoir, qu'une lettre utilisée pour une instance d'un énoncé existentiel ne peut pas être utilisée pour désigner un autre objet. (Ibid., pp. 299-300)

Pour éviter cette erreur, une pratique, fréquemment proposée par les professeurs de mathématiques, consiste à attribuer deux lettres différentes pour la variable liée pour chacune des deux instances de l'énoncé existentiel[3].

On s'intéresse dans ce travail à la branche de l'analyse, dans laquelle pour définir les notions de limite, de continuité, d'uniforme continuité, etc., les énoncés qui apparaissent le plus souvent sont du type : « $\forall\varepsilon\ \exists\eta$… ».

Durand-Guerrier et Arsac (2003) parlent en abrégé de démonstration en (ε, η) qui part de la donnée d'un ε générique et de la dépendance de η par rapport à ε. A partir d'un examen de quelques manuels, ils ont montré que le caractère générique de ε fait l'objet d'une grande variété de traitements et que le caractère de dépendance est parfois introduit par la notation η_ε sans toutefois faire l'objet d'une explicitation.

La grande variété de formulations proposées, tant dans les manuels que par les professeurs interrogés, incite les auteurs à envisager un cadre théorique permettant de fournir pour le chercheur une référence stabilisée pour les preuves comportant l'usage d'énoncés à quantificateurs multiples, principalement les énoncés en « Quel que soit x, il existe y tel que

[3] Exemple : démonstration du théorème des accroissements finis généralisé.

F(x, y) ». Ils proposent pour cela la démonstration naturelle de Copi que nous présentons dans le paragraphe suivant.

3. Le contrôle des preuves

Les systèmes de déduction naturelle, tels ceux dus à Gentzen (1935) et à Copi (1954), fournissent des outils intermédiaires permettant, d'une part, de détecter des failles dans le choix des arguments en restant au plus près des modes habituels de raisonnement des mathématiciens, et d'autre part, de contrôler logiquement la validité des démonstrations mathématiques en raison de la trop grande complexité et de la longueur des preuves logiques (Durand-Guerrier et Arsac 2003).

Dans une perspective didactique, la question qui se pose est celle de savoir si on peut avoir des preuves formalisées qui ne s'éloignent pas trop du raisonnement naturel. C'est ce qu'ont proposé Gentzen (1935), après lui Quine (1950) et enfin Copi (1954).

Nous présentons dans ce paragraphe le système de démonstration naturelle que Copi a développé dans le calcul des prédicats en proposant quatre règles d'introduction et d'élimination pour les quantificateurs :

(1) IU : Instanciation Universelle. $\forall$-élimination

(2) GU : Généralisation Universelle. $\forall$-introduction

(3) GE : Généralisation Existentielle. $\exists$-introduction

(4) IE : Instanciation Existentielle. $\exists$-élimination

Ces règles peuvent être utilisées pour analyser le formalisme et explorer le phénomène d'articulation entre logique et mathématique d'une part, et pour contrôler localement la validité de preuves mathématiques d'autre part.

A ce système de déduction naturelle de Copi concernant les prédicats à une place, il sera important d'ajouter des règles pour les prédicats polyadiques indiquant des contraintes sur l'ordre de réintroduction des quantificateurs. Une des règles importantes peut s'énoncer ainsi :

> Si une IE a été faite après une IU, la GE correspondante devra se faire avant la GU. (Durand-Guerrier et Arsac 2005 p. 165)

Cette règle absorbe la question de la dépendance. Nous illustrons cette règle pour montrer, dans le calcul des prédicats, que l'implication suivante : « $\exists y\ \forall x\ F(x,y) \Rightarrow \forall x\ \exists y\ F(x,y)$ (A) » est valide, alors que sa réciproque : « $\forall x\ \exists y\ F(x,y) \Rightarrow \exists y\ \forall\ F(x,y)$ (B) » est non valide.

En adoptant la méthode de preuve due à Copi, la structure interprétative de (A) est la suivante :

(1)	$\exists y\ \forall x\ F(x,y)$	Prémisse
(2)	$\forall x\ F(x,b)$	IE sur (1)
(3)	$F(a,b)$	IU sur (2)
(4)	$\exists y\ F(a,y)$	GE sur (3)
(5)	$\forall x\ \exists y\ F(x,y)$	GU sur (4)

Ceci prouve la validité de l'énoncé (A). Examinons maintenant l'énoncé (B) et montrons qu'il n'est pas universellement valide. La méthode précédente conduit à :

(6)	$\forall x\ \exists y\ F(x,y)$	Prémisse
(7)	$\exists y\ F(a,y)$	IU sur (6)

(8) F(a,b) IE sur (7)

A partir de là, on ne peut pas conclure la vérité de « $\exists y\ \forall x\ F(x,y)$ ». Ainsi, la non validité de l'implication (B) est bien liée au fait qu'à partir de (8) on ne peut pas effectuer une généralisation universelle de la constante d'objet *a*, sans avoir fait la généralisation existentielle sur *b*, ce qui nous ramène à l'énoncé de départ.

Dans la pratique mathématique ordinaire, le plus souvent, les deux opérations d'élimination et d'introduction des quantificateurs sont soit absentes soit partielles (Durand-Guerrier et Arsac 2003). Ainsi, on peut dire que la déduction naturelle est pertinente dans l'analyse logique du raisonnement mathématique, principalement dans des situations qui mobilisent des énoncés contenant plusieurs quantificateurs où l'on trouve au moins une fois chacun des deux quantificateurs universel et existentiel.

IV. CONCLUSION

Le travail présenté dans cette communication s'est organisé autour de deux parties : une étude épistémologique et une analyse didactique.

L'étude épistémologique a permis de mettre à jour la complexité et la richesse du concept de la quantification et de développer certains éléments susceptibles d'éclairer ce concept. Selon la théorie de Frege, il existe des procédures de traduction permettant de faire passer les phrases du langage ordinaire dans des formules logiquement claires par l'intermédiaire de propositions contenant de expressions partiellement dépourvues d'ambiguïté. L'Idéographie de Frege doit s'occuper de l'hypothèse selon laquelle les mathématiques se réduisent à la logique et il lui suffit de savoir que sa langue peut exprimer n'importe quelle thèse logique nécessaire dans l'activité mathématique. Elle serait fructueuse dans une interprétation des formulations mathématiques complexes et aussi pour une production d'ostensifs pertinents au support visuel de chaque réflexion.

Les apports de Quine à la logique formelle, à la philosophie du langage et également à la fondation des mathématiques et à l'épistémologie sont importants. Il soutient la thèse selon laquelle le travail de paraphrase su les énoncés du langage ordinaire pour les formaliser dans le calcul des prédicats du premier ordre, contribue à la simplification et à la clarification conceptuelle. L'une des préoccupations de Quine est l'éclaircissement et l'explicitation du problème de l'existentiel. Il regarde les variables et les quantificateurs comme fournissant des indices sur ce qu'une théorie affirme exister et non sur ce qui existe.

L'analyse didactique a essentiellement porté sur le raisonnement mathématique, la question fondamentale étant le traitement de la logique opératoire dans le formalisme mathématique. Le travail de Dubinsky et Yiparaki autour des énoncés du type AE et EA a mis en évidence la tendance des étudiants à interpréter systématiquement les énoncés comme AE. L'étude a montré, en outre, certaines difficultés pour interpréter et distinguer ces énoncés dans un contexte mathématique et non mathématique. Dans leur article, Durand-Guerrier et Arsac mettent en évidence que le fait de ne pas expliciter l'élimination et l'introduction des quantificateurs, peut conduire à des preuves invalides d'une part, et que l'utilisation du système de Copi pour analyser les preuves permet de repérer les pas de raisonnement douteux, d'autre part.

En rapport avec les questions directrices du GT4, signalons que ces approches didactiques sont pertinentes pour une prise en considération des dimensions historiques dans l'enseignement des mathématiques, et influencent également l'intérêt que portent les didacticiens sur des aspects particuliers du formalisme logique, qu'il s'agisse des propositions, de la quantification, des connecteurs logiques, etc.

Ces positions générales offrent des perspectives épistémologiques et didactiques concernant l'apparition des quantificateurs dans des énoncés mathématiques qui sont sensiblement différentes les unes des autres.

REFERENCES

Bloch I. (2000) *L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée/université : Savoirs, connaissances et conditions relatives à la validation*. Thèse de doctorat. Université Bordeaux 1.

Chellougui F. (2004) *L'utilisation des quantificateurs universel et existentiel en première année d'université, entre l'explicite et l'implicite*. Thèse de doctorat. Université Lyon 1 et université de Tunis.

Copi I. M. (1954) *Symbolic Logic*. NewYork : Hardcover.

Dubinsky E., Yiparaki O. (2000) On student understanding of AE and EA quantification. Research in Collegiate Mathematics Education IV. *CBMS Issues in Mathematics Education* 8, 239-289.

Durand-Guerrier V. (2005) *Apports de la théorie élémentaire des modèles pour une analyse didactique du raisonnement mathématique, Note de synthèse*. Habilitation à diriger les recherches en didactique des mathématiques. Université Claude Bernard Lyon 1.

Durand-Guerrier V., Arsac G. (2003) Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques : Spécificité de l'analyse. Quelles implications didactiques ? *Recherches en didactique des mathématiques* 23 (3), 295-342.

Durand-Guerrier V., Arsac G. (2005) An epistemological and didactic study of a specific calculus reasoning rule. *Educational Studies in Mathematics* 60, 149-172.

Duval R. (1995), *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne : Peter Lang.

Frege G. (1879) *Begriffsschrift*. Traduction française (1999). Besson C., Barnes J. (Trad.) Paris : Vrin.

Gentzen G. (1935) Untersuchungen über das logische Schliessen. *Mathematische Zeitschrift* 39, 176-210 et 405-431.

Quine W. V. O. (1950) *Methods of logic*. New York : Holt, Rinehart & Winston. Traduction française (1972) Paris : Armand Colin.

Quine W. V. O. (1960) *Word and Object*. Cambridge (Mass.) : MIT Press. Traduction française (1977) Paris : Flammarion.

Quine W. V. O. (1970) *Philosophy of logic.* Englewood Cliffs : Prentice-Hall. Traduction française (1975) Paris : Aubier.

LA PHASE ARABE DE L'ALGEBRE (IX^e-XV^e S.)

Ahmed DJEBBAR*

Résumé – L'article expose la naissance de l'algèbre comme discipline, ses premiers pas en relation avec la géométrie euclidienne, ses orientations les plus importantes entre le IX^e et le XV^e siècle et la circulation, en Europe, à travers des traductions en latin et en hébreu de certains ouvrages algébriques écrits en arabe.

Mots-clefs : Algèbre, arabe, équations, polynômes, traduction

Abstract – The paper presents the birth of algebra as a discipline, its first steps in relation to Euclidean geometry, its most important orientations between the ninth and the fifteenth centuries and the diffusion in Europe, through Latin and Hebrew translations, of some algebraic books written in Arabic.

Keywords : Algebra, arabic, equations, polynomes, translation

I. INTRODUCTION

Depuis la seconde moitié du XIX^e siècle, la phase arabe[1] de l'histoire de l'algèbre a bénéficié d'un grand nombre d'étude de la part des historiens des mathématiques. Cela a permis de révéler quelques aspects de l'histoire de cette discipline et quelques spécificités de son contenu. Ainsi, nous disposons désormais d'un certain nombre d'informations fiables sur les premiers pas des pratiques algébriques à Bagdad, sur leur développement, en relation avec leur environnement scientifique, culturel et social, ainsi que sur la circulation partielle de la production algébrique de l'Orient vers l'Occident musulmans puis vers l'Europe médiévale.

Dans ce court exposé, nous allons tenter de faire le point sur l'état de la recherche dans ce domaine, en nous intéressant plus particulièrement au contenu des premiers écrits algébriques arabes, aux orientations les plus importantes de la discipline, aux obstacles auxquels se sont heurtés les chercheurs dans leurs investigations et aux solutions qu'ils ont élaborées pour contourner certains de ces obstacles. Dans une dernière partie, nous évoquerons, rapidement, ce qui est connu aujourd'hui de la réception de l'algèbre par les premiers foyers scientifiques du sud de l'Europe.

II. LES PREMIERS PAS DE L'ALGEBRE EN PAYS D'ISLAM

Il n'est pas possible, aujourd'hui, de dater les premières pratiques algébriques dans le cadre de la civilisation arabo-musulmane. Il semble qu'elles aient précédé la parution du célèbre ouvrage d'al-Khwârizmî (780-850), *L'Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison*, qui est considéré comme l'acte de naissance officiel de l'algèbre en tant que discipline (avec un nom, des objets, des outils, des justifications géométriques et des domaines d'application). Cette hypothèse est confortée par le fait que ce mathématicien ne s'attribue aucun des éléments nouveaux que renferme son manuel. Mais, le seul témoignage en faveur de l'existence de ces pratiques avant le IX^e siècle est très tardif. De plus, il n'est pas confirmé par d'autres sources et certaines informations qu'il rapporte ont un caractère légendaire qui affaiblit le reste du témoignage. Dans l'un de ses manuels, Ibn al-Jallâb, un mathématicien yéménite peu connu du XIII^e siècle, évoque ce que lui aurait dit un juriste, al-Yifrâshî, encore moins connu. Ce dernier affirme qu'à l'époque du second calife musulman

* Université des Sciences et des Technologies de Lille – France – ahmed.djebbar@wanadoo.fr

[1] C'est-à-dire la phase au cours de laquelle les ouvrages traitant de cette discipline étaient, pour la plupart, écrits en arabe.

© Djebbar A. (2012) La phase arabe de l'algèbre (IX^e-XV^e s.). In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21^e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT4, pp. 603–611). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

'Umar (634-644) des Persans ayant des connaissances en algèbre seraient arrivés à Médine. L'ayant appris, 'Alî, le cousin et gendre du Prophète, aurait suggéré à 'Umar de les charger d'enseigner ce nouveau savoir, en leur accordant une pension du trésor public. Il est même précisé que, parmi les premiers élèves, il y avait 'Alî qui aurait assimilé les nouvelles techniques en moins d'une semaine. Puis, ce savoir-faire aurait circulé oralement jusqu'au début du IX^e siècle, date à laquelle le célèbre calife abbasside al-Ma'mun (813-833) aurait chargé al-Khwarizmî (m. 850) de rassembler les éléments encore disponibles dans un manuel qui devait être mis à la disposition des utilisateurs (Djebbar 2005, pp.41-42).

Ce petit livre, qui ne contient pas plus de 92 pages dans sa version imprimée, commence par une introduction dont le contenu confirme la dernière partie du témoignage que nous venons de rapporter. En effet, on y lit ceci :

> [J'ai été] exhorté à composer, dans le calcul de l'*algèbre* et d'*al-muqâbala* un livre concis ; j'ai voulu qu'il renferme ce qui est subtil dans le calcul et ce qui, en lui, est le plus noble, ce dont les gens ont nécessairement besoin dans leurs héritages, leurs legs, leurs partages, leurs arbitrages, leurs commerces, et dans tout ce qu'ils traitent les uns avec les autres lorsqu'il s'agit de l'arpentage des terres, de la percée des canaux, de la mensuration, et d'autres choses relevant du calcul et de ses sortes. (Rashed 2007, p.94)

1. Structure et contenu du premier livre d'algèbre en arabe

Le livre d'al-Khwârizmî est divisé en deux grandes parties. La première se subdivise en plusieurs petits chapitres. Dans le premier, l'auteur rappelle la définition du système décimal (qu'il a évoqué plus longuement dans un livre consacré à cette numération d'origine indienne et à ses utilisations) (Allard 1992). Puis, il définit les objets de l'algèbre : les *nombres* (entiers et rationnels positifs), le *mâl*[2] et la *racine* (sous-entendu du *mâl*). Puis, il présente les six équations canoniques que nous écrirons ainsi, à l'aide du symbolisme moderne, mais en respectant la formulation de l'auteur :

(1) $aX = b\sqrt{X}$; (2) $aX = c$; (3) $b\sqrt{X} = c$;

(4) $aX + b\sqrt{X} = c$; (5) $aX + c = b\sqrt{X}$; (6) $b\sqrt{X} + c = aX$,

avec X désignant le *mâl* et a, b, c, des nombres positifs (entiers, rationnels positifs et, parfois, irrationnels quadratiques)[3].

Dans le second chapitre, l'auteur fournit, pour chacune des six équations un procédé de résolution permettant d'obtenir la valeur du *mâl* et de sa racine. Chaque étape de ce procédé est exprimée d'une manière générale avant d'être explicitée à l'aide d'un exemple. Puis il expose les justifications géométriques de l'existence des solutions de chaque équation, étant entendu qu'il s'agit uniquement de celles qui sont positives.

Dans le troisième chapitre, il explique la manière de formuler algébriquement un problème donné afin de le ramener à l'une des six équations précédentes. Dans le quatrième, il montre comment étendre les opérations arithmétiques classiques (addition, soustraction, multiplication, division et racine carrée) aux objets de l'algèbre de cette époque qui se limitaient alors aux entiers, aux rationnels positifs et à certains monômes. Il formule également ce qui sera appelé plus tard la règle des signes qui ne semble pas être de son invention puisqu'on la trouve dans des ouvrages qui traitent des procédés de calcul non indiens, c'est-à-dire ceux utilisés dans le calcul digital et mental.

---

[2] Mâl : mot arabe signifiant « *capital* », « *fortune* », « *bien* », « *troupeau* ».

[3] Ce qui correspond, dans la notation actuelle (où x est l'inconnue et non pas son carré), aux équations suivantes : $ax^2 = bx$; $ax^2 = c$; $bx = c$; $ax^2 + bx = c$; $ax^2 + c = bx$; $bx + c = ax^2$.

Le cinquième et dernier chapitre de la première partie du livre est constitué d'une quarantaine de problèmes d'application, groupés en trois thèmes (problèmes des dizaines, des biens et des hommes), et qui sont résolus à l'aide des outils des chapitres précédents : les *problèmes des dizaines* dans lesquels on doit déterminer deux valeurs dont la somme est dix et qui sont liés par une seconde relation du second degré ; les *problèmes des biens* où l'inconnue est un capital lié à des valeurs connues selon une équation du premier ou du second degré ; les *problèmes des hommes* dans lesquels il s'agit de partager une somme d'argent entre un certain nombre de personnes et sous certaines conditions.

La seconde partie du livre, quantitativement la plus importante, est consacrée exclusivement à la résolution de problèmes de transactions commerciales, d'arpentage et de répartition des héritages (selon la loi islamique).

Compte tenu de ce qui nous est parvenu des traditions mathématiques antérieures à l'islam qui ont eu à traiter des problèmes du premier et du second degré, on peut affirmer que l'apport d'al-Khwârizmî ne se situe pas au niveau des procédés de résolution. Sa contribution a consisté à rassembler des définitions des opérations des procédés de résolution et des démonstrations qui étaient auparavant éparpillés ou qui n'étaient pas formulés explicitement. Cet assemblage semble répondre à une logique qui vise à distinguer clairement ce nouveau chapitre des autres chapitres du vaste domaine de la science du calcul (Rashed 2007, pp. 96-330).

2. *Les premiers prolongements de l'algèbre arabe*

Le caractère encore très lacunaire de nos connaissances relatives aux activités algébriques du IX^{e} siècle, ne nous permet pas de dater les premières contributions qui ont été inspirées par le livre d'al-Khwârizmî. Nous nous contenterons donc d'évoquer des travaux plus tardifs sans qu'on puisse d'ailleurs préciser le contenu de certains d'entre eux. Des bibliographes signalent la publication, au cours de la seconde moitié du IX^{e} siècle et du début du X^{e}, d'une série d'ouvrages consacrés exclusivement à l'algèbre. Certains, comme ceux de Sinân Ibn al-Fath, d'as-Saydanânî et d'abû l-Wafâ' (m. 997), sont des commentaires du livre d'algèbre d'al-Khwârizmî puisque cela est mentionné dans leurs titres. D'autres, comme ceux d'ad-Dinawârî, et d'al-Missîsî sont intitulés *Livre d'algèbre* sans référence au premier manuel d'algèbre.

A côté de ces ouvrages qui ne nous sont pas parvenus, on remarque la production d'autres écrits dont la caractéristique commune a été de réaliser l'interpénétration entre l'algèbre naissante et la géométrie grecque. C'est ainsi que Thâbit Ibn Qurra (m. 901) a rédigé un opuscule, intitulé *La justification des problèmes de l'algèbre par les preuves géométriques*, dans lequel il est le premier, à notre connaissance, à utiliser des propositions des *Eléments* d'Euclide pour établir l'existence des solutions des équations quadratiques. De son côté, al-Ahwâzî (X^{e} s.) a suivi, dans une de ses épîtres, la démarche inverse qui a consisté à utiliser des équations algébriques pour expliciter certaines grandeurs incommensurables du Livre X des *Eléments*. Son travail s'inscrivait en fait dans un projet plus large concernant l'extension de la notion de nombre : dans une première étape, les grandeurs incommensurables du Livre X ont été arithmétisées en quelque sorte et ont été assimilées à des nombres irrationnels. Dans une seconde étape, Ces nombres ont été enrichis par l'introduction de nouveaux irrationnels qui ne pouvaient pas s'obtenir à l'aide des procédés géométriques d'Euclide. C'est le cas des racines $n^{\text{ièmes}}$, avec n impair, qui sont définies par al-Mâhânî (m. 888). Plus tard, des progrès ont été faits dans l'extension des opérations arithmétiques classiques à ces nouveaux nombres. C'est ce qu'a fait, en particulier, al-Baghdâdî (XI^{e} s.), dans son livre intitulé *Le livre de la complétion en calcul* (Djebbar 2005, pp. 49-54).

3. *Les contributions du X^e siècle*

Les travaux de cette période concernent deux domaines déjà présents dans le livre d'al-Khwârizmî : celui des objets de l'algèbre et celui des opérations qui leurs sont appliquées. On voit d'abord apparaître, dans les équations du premier et du second degré, des coefficients et des racines qui ne sont pas seulement des entiers ou des rationnels mais également des irrationnels quadratiques et biquadratiques, comme cela est le cas dans un grand nombre de problèmes résolus par Abû Kâmil dans son important traité *Le livre complet en algèbre*. Ce progrès a été rendu possible grâce aux travaux relatifs au livre X des *Eléments* qui ont permis d'appliquer aux grandeurs de ce livre les opérations arithmétiques classiques.

Le second sujet, étudié ou simplement effleuré par certains mathématiciens de ce siècle, est celui de la généralisation de la notion de puissance et son application à l'étude des équations. D'après le témoignage de Sinân Ibn al-Fath, plusieurs mathématiciens, avant lui, avaient été amenés à considérer des monômes de degré supérieur à 2 et à leur donner des noms, mais il dit être le premier à avoir rédigé un exposé systématique sur cette question et à s'être servi de ces nouveaux objets pour étendre le domaine des équations résolubles par radicaux. Son étude contient, pour la première fois à notre connaissance, la notion générale de monôme de degré quelconque ainsi que le procédé de génération de ces monômes. Il est également le premier à avoir défini et résolu toutes les équations de degré $2n+p$ qui se ramènent (par simplification par x^p puis par changement d'inconnue : $X = x^n$) aux six équations canoniques d'al-Khwârizmî (Djebbar 2005, pp. 51-54).

III. L'ALGEBRE DES XI^e-XII^e SIECLES

1. *Les polynômes, des objets d'études nouveaux*

Vers la fin du X^e siècle ou au début du XI^e, des prolongements aux travaux d'Ibn al-Fath sont réalisés par le mathématicien persan al-Karajî (m. 1029). Il semble avoir été le premier à exposer les premiers éléments d'une théorie des polynômes, avec l'extension des opérations arithmétiques classiques (addition, soustraction, multiplication) aux monômes et à leurs inverses, en utilisant, explicitement, la notion de puissance et les opérations d'addition et de soustraction de ces puissances. A cette occasion, al-Karajî expose le procédé de construction du triangle arithmétique et la manière de l'utiliser pour déterminer le développement du binôme. Ces études ont été poursuivies par as-Samaw'al (m. 1175) qui a justifié la division d'un polynôme par un autre polynôme composés tous deux de monômes ajoutés ou retranchés et qui a appliqué l'opération d'extraction de la racine carrée à un polynôme carré parfait.

La nature de ces études et leur complexité ont nécessité l'introduction d'un premier symbolisme, celui des tableaux qui a permis aux algébristes de cette époque de représenter chaque polynôme par ce que nous appelons aujourd'hui la suite de ses coefficients disposés dans les colonnes correspondants à leurs monômes respectifs.

Avec ces contributions, l'algèbre a connu un premier saut qualitatif. En effet, après avoir été un instrument de calcul axé sur la résolution des équations, elle a acquis, avec l'étude des polynômes comme nouveaux objets mathématiques, une certaine dimension théorique qui pouvait lui ouvrir de nouvelles voies.

2. *Les systèmes d'équations*

Malgré la présence, dans la troisième partie du livre d'al-Khwârizmî, de quelques problèmes d'héritage pouvant aboutir à des systèmes d'équations, il ne semble pas que son livre soit à l'origine de ce chapitre de l'algèbre. La forme de certains problèmes, comme ceux où les inconnues sont des volatiles, suggérerait plutôt une origine chinoise ou indienne. Mais, les premiers ouvrages mathématiques qui ont abordé l'étude des systèmes d'équations et qui pouvaient nous renseigner sur leurs sources, n'ont pas encore été retrouvés.

Quant à ceux qui nous sont parvenus, et qui sont du X^{e} ou du XI^{e} siècle, ils ont une facture assez élaborée qui confirme l'existence d'une activité antérieure : il y a, tout d'abord, le *Livre complet en algèbre* d'Abû Kâmil (m. 930) qui traite, dans sa troisième partie, quelques problèmes de ce type sans souci de classification ou de systématisation, mais plutôt comme des exemples d'application des procédés de l'algèbre. Un autre livre du même auteur, intitulé *Les choses rares en calcul,* est entièrement consacré aux systèmes d'équations. Six problèmes seulement y sont traités et, à chaque fois, il s'agit d'acheter, avec une somme donnée, un nombre fixé de volatiles de plusieurs sortes (passereaux, poulets, pigeons, canards ou alouettes). Dans cet opuscule, on trouve une première classification des systèmes d'équations : ceux qui sont impossibles, ceux qui ont une et une seule solution et ceux qui peuvent en avoir plusieurs.

Après lui, al-Karajî reprend, dans son *Fakhrî en algèbre*, des problèmes du même type sans toutefois les regrouper dans un chapitre autonome. Ces problèmes aboutissent à des systèmes d'ordre inférieur ou égal à 4. A peu près à la même époque, Ibn al-Haytham (m. *ca*. 1041), publie une *Epître sur les problèmes de rencontre*, consacrée exclusivement aux systèmes d'équations à n inconnues, n quelconque, qui sont du type :

$$p_i x_i = q_j x_j \text{ , } 1 < \mathrm{i,j} < \mathrm{n} \text{ ; } \mathrm{i} \neq \mathrm{j}$$

Dans cette étude, la démarche d'Ibn al-Haytham est différente de celle de ses prédécesseurs dans la mesure où son traitement des problèmes adopte une démarche générale et s'accompagne de démonstration alors qu'avant lui, on se contentait d'exposer les méthodes de résolution. On ne sait pas si, après lui, ce chapitre a fait l'objet de nouvelles recherches en pays d'Islam. En tout cas, cela n'est pas confirmé par les livres d'algèbre connus postérieurs à celui d'Ibn al-Haytham (Djebbar 2005, pp. 54–60).

3. *L'analyse indéterminée*

Au vu des problèmes qui nous sont parvenus, ce chapitre semble être un prolongement de pratiques que l'on trouve dans la tradition arithmétique grecque. Le plus ancien auteur connu ayant traité ce type de problèmes est Abû Kâmil. Dans son livre d'algèbre, il résout des équations et des systèmes d'équations du premier ou du second degré dont le second membre est toujours un carré non fixé. Aujourd'hui, ces systèmes seraient exprimés ainsi :

$$x^2 + a_1 x + b_1 = \square_1$$
$$x^2 + a_2 x + b_2 = \square_2$$

Les méthodes utilisées par Abû Kâmil ne sont pas identiques à celles que l'on trouve dans les dix chapitres des *Arithmétiques* de Diophante qui nous sont parvenus. Il faut d'ailleurs préciser que la traduction partielle de cet ouvrage en arabe a été réalisée par Qustâ Ibn Lûqâ (m. 910) qui était son contemporain. Il semble donc qu'Abû Kâmil ne connaissait pas l'existence de cette traduction au moment où il rédigeait son ouvrage. Sinon, il aurait au moins évoqué son contenu. Par contre, il fait référence à des pratiques qui existaient à son époque et qui concernaient des problèmes qualifiés « d'indéterminés » ou « à plusieurs solutions ».

Cela dit, la traduction des livres de Diophante a enrichi considérablement ce chapitre et a favorisé son développement. Ainsi, dès la seconde moitié du X^{e} siècle, un certain nombre de mathématiciens a étudié ce qui avait été traduit des *Arithmétiques*. Le plus connu d'entre eux est Abû l-Wafâ' mais ses contributions dans ce domaine n'ont pas encore été retrouvées. Ces travaux ont probablement préparé le terrain à al-Karajî. Ce dernier a traité de ces problèmes dans deux de ses ouvrages, le *Fakhrî* qui est consacré, en grande partie à la résolution de problèmes indéterminés, et le *Livre merveilleux en calcul*. Dans le second traité, l'auteur présente une étude systématique de ce chapitre en donnant une classification des problèmes traités et des méthodes de résolution pour chaque catégorie d'équations (Djebbar 2005, pp. 60–63).

4. *La géométrie au secours de l'algèbre*

Parmi les tentatives d'extension des outils de l'algèbre d'al-Khwârizmî à des domaines nouveaux, il y a celles qui ont concerné les problèmes dits « solides » et qui s'exprimeraient aujourd'hui sous forme d'une équation du troisième ou du quatrième degré. La première de ces tentatives a été celle d'al-Mâhânî (m. 888) qui a essayé, sans succès, de résoudre, par radicaux, l'équation suivante :

$$x^3 + c = x^2 \; ; c > 0$$

Sa résolution devait permettre d'établir, par une méthode non géométrique, le lemme de la proposition 4 du Livre II du traité d'Archimède (m. 212 av. J.C.) sur *La sphère et le cylindre* qui concerne la division d'une sphère en deux parties dont les volumes V_1 et V_2 vérifient le rapport suivant :

$$\frac{V_1}{V_2} = \lambda \; ; \lambda > 0$$

Cet échec a été suivi par d'autres tentatives dont certaines ont fini par aboutir en faisant intervenir la géométrie des coniques. C'est ainsi qu'al-Khâzin (X^e s.) et, après lui, Ibn al-Haytham, ont établi, chacun de son côté, l'existence de la solution positive de l'équation d'al-Mâhânî à l'aide de l'intersection de deux sections coniques. Au cours de ce même siècle, al-Kûhî résout, selon une démarche semblable, un problème nouveau, celui de la détermination d'une portion de sphère de volume égal à celui d'une portion de sphère donnée et de surface égale à celle d'une autre portion de sphère donnée.

L'aboutissement de ces recherches partielles a été l'élaboration, par ʻUmar Al-Khayyâm (m. 1131), d'une classification et d'une étude complète des 25 équations de degré inférieur ou égal à 2. Cette étude fait intervenir des cercles, des paraboles et des hyperboles pour établir l'existence des solutions positives des équations (Djebbar et Rashed 1981).

Quelques décennies plus tard, un autre mathématicien persan, Sharaf ad-Dîn at-Tûsî (m. 1273), publie une nouvelle étude de ces équations qui va plus loin que la contribution d'al-Khayyâm. Il y présente une nouvelle classification des équations en fonction du nombre de leurs solutions et non pas du degré des monômes qui interviennent dans chacune d'elle. Il étudie également la relation entre les coefficients de chaque équation du troisième degré et l'existe de ses solutions positives en introduisant la notion de « maximum » d'un polynôme. Et pour déterminer ce maximum, il résout, à chaque fois, une équation auxiliaire que l'on obtiendrait aujourd'hui en « dérivant » le polynôme du troisième degré associé à l'équation étudiée (Rashed 1984, pp. 148-93).

IV. L'ALGEBRE AUX XIII^{e}-XIV^{e} SIECLES

En Orient, de nouvelles recherches ont été entreprises en algèbre mais, à notre connaissance, aucune n'a abouti. A la fin du XIII^{e} siècle Ibn al-Khawwâm (m. après 1324) rassemble à la fin de son *Livre à Bahâ' ad-Dîn sur les choses utiles en calcul*, les énoncés de 36 problèmes que ses prédécesseurs et lui-même n'avaient pas réussi à résoudre par une méthode algébrique. Certains d'entre eux s'expriment sous forme d'équations du 3^{e} et du 4^{e} degré ou de systèmes d'équations indéterminées. Au XIV^{e} siècle, al-Kâshî (m. 1429) a commencé l'étude des équations de degré inférieur ou égal à 4, mais il ne semble pas qu'il ait abouti à des résultats tangibles. A peu près à la même époque, le mathématicien du Caire, Ibn al-Majdî (m. 1447), se contente de dénombrer les équations à coefficients positifs, de degré inférieur ou égal à n (Djebbar 2005, pp. 70-72).

En Occident musulman, les informations concernant l'algèbre sont postérieures au XII^{e} siècle. Nous disposons en effet de trois ouvrages consacrés exclusivement à cette discipline. Le plus ancien semble être le poème mathématique d'Ibn al-Yâsamîn (m. 1204). Son auteur y expose les algorithmes de résolution des six équations canoniques et quelques opérations sur les irrationnels quadratiques et sur les monômes. Son contenu ne reflète donc pas le niveau de l'algèbre à son époque. Il s'agit en fait d'une sorte d'aide-mémoire pour les enseignants et pour les étudiants. C'est probablement sa forme versifiée et la facilité avec laquelle il pouvait être mémorisé qui ont permis à ce poème de circuler et de s'imposer tout au long des trois siècles suivants. Ce succès est confirmé par les nombreux commentaires dont il a bénéficié au Maghreb et en Egypte et par les références à son contenu.

Le second livre est *L'abrégé en algèbre* d'Ibn Badr. Au vu de son nom, l'auteur semble être d'origine andalouse mais nous ne savons pas où il a vécu et où il a enseigné. Son ouvrage a été écrit avant 1343, date à laquelle a été réalisée la seule copie qui nous en est parvenue. Son contenu s'inscrit dans la double tradition d'al-Khwârizmî et d'Abû Kâmil, avec certains éléments nouveaux qui sont apparus après le X^{e} siècle. On sait aussi que des copies ont circulé, au XIV^{e} siècle, à Fès et à Ceuta puis au XV^{e} siècle à Tunis. Mais les auteurs maghrébins postérieurs au XIII^{e} siècle, dont les écrits ont été analysés, ne le citent pas et ne reprennent pas les problèmes qui y sont traités.

Le troisième écrit consacré exclusivement à l'algèbre est intitulé *Livre des fondements et des prémisses en algèbre*. Il a été publié à Marrakech, au tout début de la carrière de son auteur, Ibn al-Bannâ (m. 1321). Son contenu a fait l'objet d'une polémique dans le milieu des mathématiciens maghrébins de l'époque, puisque certains d'entre eux ont prétendu que son auteur n'avait fait que résumer le livre d'al-Qurashî, un de ses prédécesseurs. Quoi qu'il en soit, et en l'absence du traité de ce dernier, on peut affirmer qu'on est en présence du dernier ouvrage d'algèbre de l'Occident musulman. Son contenu, qui se rattache clairement à la tradition d'Abû Kâmil, est en deux parties : la première expose les fondements et les préliminaires relatifs aux nombres. C'est un résumé de certains livres des *Eléments* d'Euclide, avec quelques ajouts comme la division par des expressions irrationnelles de la forme : $n+\sqrt{m}+\sqrt{p}$. La seconde partie traite de la résolution des différents types de problèmes à l'aide des méthodes algébriques, en exposant et en résolvant d'abord ceux qui sont à solutions entières ou rationnelles puis, dans un dernier chapitre, ceux à solutions irrationnelles. Cette partie du livre est, à quelques exceptions près, une reprise abrégée, mais dans une présentation différente, des problèmes d'Abû Kâmil. Mais, on y trouve aussi des problèmes absents du livre de ce dernier, comme la décomposition d'un entier en somme de deux carrés d'entiers ou de rationnels.

Après Ibn al-Bannâ, trois types d'écrits mathématiques ont traité de questions d'algèbre. Il y a d'abord les commentaires portant sur des écrits antérieurs : ceux qui explicitent les vers, parfois hermétiques, du poème algébrique d'Ibn al-Yâsamîn et ceux, plus nombreux (une quinzaine), qui visent à expliciter le contenu de *L'Abrégé des opérations du calcul* d'Ibn al-Bannâ. Il y a aussi des chapitres dans des ouvrages de calcul. Ils sont généralement regroupés à la fin de chaque livre, à la suite des chapitres exposant d'autres méthodes de résolution des problèmes de la vie de tous les jours (règle des quatre proportions et méthodes de fausse position).

Il y a enfin des opuscules autonomes, souvent anonymes. L'analyse de ces écrits montre qu'ils ne contiennent rien de nouveau. Mais ils confirment, clairement, l'utilisation intensive d'un symbolisme algébrique dans l'enseignement mathématique du Maghreb des XIV^{e}-XV^{e} siècles. Ce symbolisme était utilisé pour exprimer les équations du premier et du second degré avec leurs algorithmes de résolution ainsi que les polynômes et les opérations arithmétiques qui leur étaient appliquées. Le *Livre de la fécondation des esprits sur l'utilisation des chiffres de poussière* d'Ibn al-Yâsamîn est le plus ancien texte connu contenant ce type de symbolisme.

Une des dernières contributions de nature algébrique, repérée dans un ouvrage écrit au Maghreb, est celle d'al-Qatrawânî (XIV^{e} s.), un mathématicien d'origine égyptienne qui a enseigné à Tunis. Dans son livre intitulé *La succion du nectar de la bouche des opérations du calcul*, il y a un chapitre d'algèbre consacré à la détermination de la racine n^{ième} d'un polynôme abstrait. Pour la racine carrée, il suit une démarche identique à celle de son prédécesseur al-Karajî mais en remplaçant les tableaux, dont les colonnes représentent les monômes a_1x, a_2x^2, a_3x^3, etc., par l'écriture des polynômes à l'aide des symboles algébriques que nous avons déjà évoqués et qui étaient devenus, à son époque, un outil d'usage courant dans les foyers scientifiques du Maghreb. Dans le même livre, l'auteur traite aussi de l'extraction de la racine cubique d'un polynôme. Ce problème n'a été traité ni par al-Karajî ni par son successeur as-Samaw'al, les seuls mathématiciens connus qui se sont occupés de ce sujet avant al-Qatrawânî (Djebbar 2005, pp. 73-103).

V. LA CIRCULATION DE L'ALGEBRE ARABE EN EUROPE

Compte tenu des résultats de recherches récentes qui ont révélé de nouveaux aspects de la transmission de l'algèbre arabe vers l'Europe médiévale, on peut dire, aujourd'hui, que cette transmission s'est effectuée en plusieurs étapes et qu'elle a revêtu diverses formes. Au cours de la période antérieure à la conquête de Tolède par les Castillans (1085), des Européens ont probablement eu accès à certains traités de *Calcul pour les transactions*, soit directement soit par l'intermédiaire de traductions orales. Nous savons, par exemple, qu'entre 967 et 970, Gerbert d'Aurillac (m. 1003), le futur pape Sylvestre II, a séjourné dans le nord de la péninsule ibérique, qu'il a étudié quelques rudiments des mathématiques arabes et qu'il a été un des premiers vecteurs de la diffusion de certains aspects de la science du calcul. Comme l'algèbre était considérée, encore à cette époque, comme un chapitre du calcul, il est probable que Gerbert ait eu connaissance des procédés algébriques et qu'il ait favorisé leur diffusion dans les milieux cultivés de son époque. Mais les sources connues ne permettent pas de confirmer cette hypothèse.

Après 1085, de nombreuses personnes, venues de différentes régions d'Europe, se sont mises à étudier l'arabe, d'abord à Tolède puis dans d'autres villes. Certaines d'entre elles ont pu ainsi se spécialiser dans la traduction d'œuvres scientifiques et philosophiques. Parmi elles, il y a eu le livre d'algèbre d'al-Khwârizmî qui a été traduit en latin, une première fois en 1145, à Ségovie, par Robert de Ketton, puis une seconde fois par Gérard de Crémone (m. 1187) et peut-être une troisième fois par de Lunis.

Parallèlement, et toujours au XIIe siècle, des auteurs européens, qui semblent avoir appris suffisamment d'arabe pour comprendre les mathématiques, ainsi que des Juifs arabisés de la péninsule ibérique, ont rédigé, directement en latin ou en hébreu, des manuels de calcul qui s'inscrivent complètement dans la tradition algébrique et arithmétique arabes. Pour les ouvrages hébraïques, on peut citer le *Liber Embadorum* d'Abraham Bar Hiyya. Pour les ouvrages latins, nous avons deux exemples importants : le premier est le *Liber Mahameleth* d'un auteur anonyme qui a vécu à Séville ou à Tolède et qui y a appris l'arabe. Le second est le *Liber Abaci* de Leonardo Pisano (m. après 1240) qui est le premier grand mathématicien de l'Europe médiévale. Comme il le dit lui-même, Pisano a appris l'arabe et le calcul au Maghreb dans la ville de Bejaïa, avant de poursuivre sa formation scientifique en Orient. Les deux ouvrages que nous venons d'évoquer se réfèrent plusieurs fois aux contenus des livres d'algèbre d'al-Khwârizmî et d'Abû Kâmil.

Quant aux traductions en hébreu des ouvrages arabes traitant de l'algèbre, elles ont également commencé au XIIe siècle et se sont prolongées jusqu'au XVe siècle puisque il nous est parvenu une traduction, dans cette langue, du livre d'algèbre d'Abû Kâmil, réalisée, en 1460, par l'italien Mordechaï Finzi.

Ce ne sont là que quelques exemples qui ne peuvent pas exprimer toute l'importance du phénomène de traduction. Mais, ils permettent d'en saisir la diversité et la richesse. Ils montrent aussi la nécessité d'étudier les écrits mathématiques latins et hébraïques du moyen-âge, afin de mieux connaître encore le contenu de l'algèbre arabe, surtout lorsqu'on sait que certains ouvrages mathématiques arabes ne nous sont parvenus qu'à travers leurs traductions dans ces deux langues (Djebbar 2005, pp. 105-116).

REFERENCES

Allard A. (1992) *Al-Khwârizmî, le calcul indien (Algorismus)*. Paris : Blanchard – Namur : Société des Etudes Classiques.

Djebbar A. (2005) *L'algèbre arabe, genèse d'un art*. Paris : Vuibert-Adapt.

Djebbar A., Rashed R. (1981) *L'œuvre algébrique d'al-Khayyâm*. Alep : I.H.A.S.

Rashed R. (2007) *Al-Khwârizmî, le commencement de l'algèbre*. Paris : Blanchard.

Rashed R. (1984) *Entre Arithmétique et Algèbre, recherches sur l'histoire des mathématiques arabes*. Paris : Les Belles lettres.

KEPLER, ENTRE SAVOIR ET SCIENCE
QUELQUES ÉLÉMENTS ÉPISTEMOLOGIQUES AUTOUR D'UNE SITUATION DE RECHERCHE

Mathias FRONT*

Résumé – Johannes Kepler fit preuve au long de sa carrière scientifique d'une exigence intellectuelle qui s'est traduite par des écrits laissant place aux doutes et aux hésitations et qui montrent le processus mental en cours lors d'élaborations théoriques. Nous avons cherché à saisir dans des extraits de cette « pensée en actes » les modalités de construction d'un savoir en l'observant du point de vue d'un processus à caractère exploratoire et expérimental. Nous proposons alors quelques éléments épistémologiques puis didactiques résultant de cette étude en montrant en quoi une telle approche permet d'envisager l'élaboration de situations didactiques spécifiques en classe.

Mots-clefs : Pavages archimédiens, problème, Kepler, action sur les objets, dimension expérimentale

Abstract – Johannes Kepler showed throughout his scientific career, an intellectual requirement that has produced papers which leave a hand room for some doubt and hesitations, showing us the mental processes during the theoretical elaborations. We tried to seize in extracts of this « thought in acts » the modalities of construction of a learn, by observing it from the point of view of a process with exploratory and experimental character. We then propose some epistemological and didactic elements resulting from this study by showing how such an approach allows to consider the development of specific teaching situations in the classroom.

Keywords: Archimedean tilings, problem, Kepler, action on objects, experimental dimension

I. INTRODUCTION

Il existe dans la culture mathématique quelques résultats simples et pourtant peu connus de la communauté des enseignants. La recherche des pavages archimédiens du plan fait partie de ces situations qui explorées, oubliées puis remises à jour, ont des parcours chaotiques et finalement obscurs. L'étude historique de cette émergence difficile porte en elle la richesse de toute quête qui questionne les diverses voies explorées, les pistes sans issues, les approches variées, qui sont tout d'abord reçues sans a priori. Nous retrouvons ainsi dans un premier temps l'idée de faire de l'histoire « à mains nues »[1], et nous en tirons l'intrigue de l'apparition d'un savoir simple mais résistant.

Nous verrons alors que l'enquête met naturellement en évidence des conditions d'émergence variées et complexes. Nous faisons alors le lien avec le cœur de cet article qui développe un point de vue essentiellement heuristique, que nous abordons aussi bien par l'étude historique que par une interprétation épistémologique qui met en avant la dimension expérimentale et le travail sur les objets. Nous expliciterons cet aspect par l'étude d'extraits de l'*Harmonices Mundi* et par un essai d'interprétation de la démarche de Kepler.

Pour terminer, nous verrons comment ces diverses approches peuvent enrichir l'élaboration de situations de recherche pour la classe, situations qui là aussi mettent en avant

* IUFM de LYON et S2HEP, Université Claude Bernard Lyon1– France – mathias.front@univ-lyon1.fr

[1] En référence à l'article d'Evelyne Barbin (1997), qui oppose une recherche historique sans a priori à une lecture de l'histoire au travers de grilles et par exemple avec des visées didactiques.

© Front M. (2012) Kepler, entre savoir et science. Quelques éléments épistémologiques autour d'une situation de recherche. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT4, pp. 612–621). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

la survenue de va et vient entre des phases d'actions sur les objets et des phases d'élaborations théoriques.

II. APERCU DE L'INTRIGUE HISTORIQUE

Figure 1 *– Rosace du temple de Diane à Nîmes*

L'enquête débute avec les textes écrits à notre disposition. C'est dans le préambule du livre V de « La Collection Mathématique » (Pappus ~340), que Pappus[2] prouve qu' « il y a trois figures au moyen desquelles on peut remplir l'espace qui règne autour d'un point : le triangle, le carré et l'hexagone ». La démonstration proposée s'intègre dans un éloge à l'habileté des abeilles qui parées, par « la divinité » d'une « certaine intuition géométrique », parviennent à réaliser un pavage du plan pour contenir leur miel. Pappus indique également que c'est parce que « les figures dissemblables répugnaient aux abeilles » qu'il suffit de considérer des figures régulières lorsqu'on s'intéresse à cette question.

Pappus ne présentera pas d'autres résultats concernant les pavages du plan. On peut alors se poser la question de savoir ce qui l'arrête quand il s'agit de généraliser cette étude ? Doit-on plutôt chercher dans la direction de considérations philosophiques de longue tradition, ou étudier un éventuel manque de familiarité avec les objets manipulés aussi bien pour le plan que pour l'espace ? Pour ce dernier point il est à noter que dans le même livre V (seconde partie, chapitre XIX en particulier) Pappus décrit en détail les treize solides d'Archimède[3] et en montre ainsi sa très bonne connaissance, même s'il se borne à les décrire. Mais, par ailleurs, Cuomo (2000) nous indique qu'il est nécessaire pour comprendre « La Collection mathématique » de tenir compte des intentions spécifiques éditoriales de Pappus. Il semble vraisemblable d'envisager que certains thèmes mathématiques ont été choisi aussi pour leur appartenance à une culture commune et permettent alors de défendre certaines thèses comme, par exemple, de montrer que « mathématicians are better qualified than philosophers to talk about isoperimetry and the fives platonic bodies » (Cuomo 2000, p.58). Certains des objectifs de Pappus ne sont donc pas strictement mathématiques, pour autant, on ne peut pas ne pas relever les enjeux mathématiques forts portés par la question de la comparaison des figures qui occupe tout le livre V. Bien qu'il ait choisi de ne pas le citer, Pappus est ici sur les traces, en particulier, de Zénodore[4] et de ses travaux *Sur les figures isopérimétriques.* Ceux-ci mettent en avant l'intérêt de la régularité des figures pour maximiser une aire, et finalement

[2] Paul Ver Eecke propose d'admettre que Pappus vécut entre la fin du III^e^ siècle et première moitié du IV^e^ siècle après J.-C.
[3] Archimède est né vers 287 av. J.-C. et mort en 212 av. J.-C.
[4] Zénodore vécut entre le II^e^ siècle avant J.-C. et le I^er^ siècle après J.-C.

en déduire « que parmi les figures planes ayant un périmètre donné, celle qui contient la surface la plus grande est le cercle » puis que « parmi les figures solides ayant une surface donnée, celle qui contient le volume le plus grand est la sphère ». Et alors « [...] il convient qu'elle soit la forme du cosmos qui contient toutes choses »[5]. Pappus, par sa reprise de l'étude, « fonde » alors pour une part les propos des philosophes qui affirment que « c'est à juste titre que le premier des dieux a revêtu le monde de la figure sphérique ». On peut donc concevoir que Pappus avait bien d'autres objectifs que la généralisation de l'étude des pavages mais aussi se convaincre qu'en poursuivant ce projet, lui et d'autres ont privilégié l'étude des figures régulières qui sont restées pendant longtemps des attracteurs puissants et peut-être une source d'obstacles pour l'étude de configurations moins « harmonieuses ».

C'est Kepler qui parviendra à franchir l'obstacle, aussi bien pour le plan que pour l'espace. Il est lui aussi assuré de la perfection (divine) du cercle et construit une grande partie de ses travaux sur les relations qu'entretiennent les polygones avec ce cercle parfait. Mais dans cette relation tout aussi philosophique et métaphysique à la connaissance, ambitionnant de décrire, pas moins, que l'*Harmonie du Monde*, il saura inventer des nouveaux degrés de congruence pour les polygones et trouver de nouvelles harmonies.

En 1619, Kepler produit un ouvrage magistral, l'*Harmonices Mundi* (Kepler 1619), dont la renommée fut faite par les trois lois qu'il contient[6]. De cette œuvre majeure, on connaît peu des résultats tels que ceux illustrés sur des planches comme celle de la figure 2. Pourtant ces dessins, particulièrement soignés, montrent le progrès majeur que Kepler a réalisé dans l'étude des pavages archimédiens du plan, c'est-à-dire des pavages stricts, dont tous les pavés sont des polygones réguliers et où les sommets ont des voisinages identiques à une symétrie près[7].

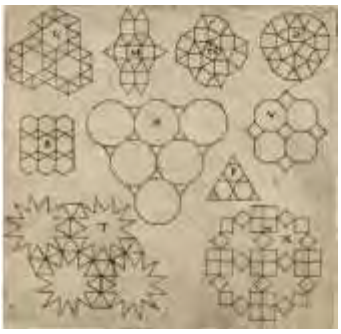


Figure 2 *– Planche de l'*Harmonices Mundi

L'étude de ces planches montre en effet que Kepler a identifié les 11 pavages archimédiens du plan. Mais il a fait mieux en donnant une preuve de ce résultat[8] qui repose sur les trois propositions suivantes du livre II de l'*Harmonices Mundi*, « De congruentia Figurarum Harmonicarum » :

---

[5] Extraits repris de *Les géomètres de la Grèce antique*, Bernard Vitrac, dossier en ligne, http://www.math.ens.fr/culturemath/histoire des maths/htm/Vitrac/grecs-index.htm

[6] Il s'agit des lois, dites de Kepler, qui décrivent les propriétés principales du mouvement des planètes autour du Soleil.

[7] Nous présentons ici une analyse des résultats sur les pavages archimédiens établis et présentés par Kepler dans l'Harmonices Mundi. L'« invention » proprement dite de ces pavages par Kepler est, à vrai dire, nettement antérieure, mais ce point fera l'objet d'une publication ultérieure.

[8] On trouvera une démonstration récente de ce résultat dans (Front et Legrand 2010).

> XIX : Un lieu plan est empli six fois à partir des surfaces planes de deux figures ; deux fois à partir de cinq, une fois à partir de quatre, trois fois à partir de trois angles.
>
> XX : Un lieu plan est empli congruement quatre fois à partir d'angles plans de trois espèces.
>
> XXI : les figures planes de quatre ou de plus d'espèces ne congruent pas avec les angles un à un, pour emplir le lieu entier.

Pour la proposition XXI, par exemple, il s'agit de comprendre qu'il n'est pas possible de paver le plan si l'on souhaite assembler des polygones d'au moins quatre espèces différentes. En effet, la somme des angles serait supérieure ou égale à un angle du triangle, plus un angle du carré, plus un angle du pentagone, plus un angle de l'hexagone ce qui dépasse déjà l'angle plein. Dans les propositions XIX et XX, Kepler traite respectivement les cas où l'on assemble des figures de deux espèces différentes et trois espèces différentes.

Pour l'élaboration de ces propositions, Kepler mène une étude exhaustive de tous les cas envisageables en fonction du nombre d'espèces différentes de polygones à associer autour d'un nœud. Il s'appuie sur des énoncés quantitatifs et mathématiquement démontrables mais également, nous le verrons plus loin, sur une relation singulière aux objets de l'étude, et en ayant recours à une intuition plongeant ses racines dans une imagination créatrice, non réductible aux normes mathématiques actuelles. Il est à noter de plus que Kepler se donne peu de limites. Ces dessins et ces textes montrent qu'il s'engage dans les pistes variées qui s'ouvrent à lui, en mélangeant par exemple polygones convexes et polygones étoilés quand il en ressent la nécessité. Nous avons bien sous les yeux la trace d'une démarche qui explore et développe différents possibles autant qu'elle structure et formalise[9].

Et c'est ainsi que Kepler prouve ses résultats inédits sur les pavages archimédiens ... résultats qui seront aussitôt oubliés[10].

En 1881, quand Albert Badoureau présente ses avancées, dans son « mémoire sur les figures isoscèles » (Badoureau 1881), il cite Lidonne, Gergonne et Catalan pour leurs travaux sur les polyèdres, mais à aucun moment Kepler dont il semble ignorer les résultats en ce domaine. Il établit lui, ses résultats, après l'étude des travaux de Bravais sur la symétrie et la cristallographie et d'Elie de Beaumont sur le réseau pentagonal[11]. Son approche est nouvelle, algébrique et ainsi totalement différente de celle de Kepler. Pour R_i un polygone régulier à n_i côtés et d'angle a_i on doit avoir pour assembler k polygones autour d'un nœud : $\sum_{i=1}^{k} a_i = 2\pi$ avec $a_i = \frac{n_i-2}{n_i}\pi$ ce qui implique $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n_i} = \frac{k}{2} - 1$. On retrouve dans le mémoire de Badoureau une expression similaire sous la forme $\sum \frac{1}{n} = \frac{K}{2} - 1$. Ce dernier, en usant alors de quelques conditions nécessaires complémentaires, retrouve l'essentiel des résultats de Kepler pour les polygones convexes. Il commet toutefois un oubli qui semble de détail mais qui fut relevé plus tard par H .S. M. Coxeter et sur lequel nous reviendrons plus avant dans le texte :

---

[9] Nous nous intéressons ici à une « présentation » d'un résultat assez ponctuel. Pour une analyse plus globale de l'*Harmonices Mundi*, il peut être utile de consulter des travaux récents (Voelkel 2001), qui ont mis en évidence un aspect rhétorique à la facture de l'*Astronomia Nova*.

[10] C'est plus généralement une grande partie de l'œuvre de Kepler qui fut laissée dans l'ombre comme l'énonçait Chasles (1837, p. 482) : « La théorie des polygones, qui a guidé Kepler dans ses longues et pénibles spéculations, a été encore moins favorisée ; la simple curiosité ne s'en est pas mêlée ; rien n'a pu la sauver d'un oubli complet ». Coxeter (1974), a fait plus récemment le même constat pour les pavages.

[11] Kepler est ici doublement négligé, autant pour son étude des solides que pour « La Strena » (Kepler 1609) qui peut être vue comme une des pièces de la protohistoire de la cristallographie.

> One of them[12], is exceptional, because it is chiral like his snub dodecahedron: it cannot be continuously moved into the position of its reflected image. In 1881 the French geometer A. Badoureau made a fresh attempt to enumerate the uniform tessellations. Although he rediscovered all the rest, he missed the chiral one…(Coxeter 1974, p. 668)

En 1891, L. Lévy, reprend et complète, les résultats de Badoureau, dans un article qu'il fait paraître dans la revue de la Société philomathique (Lévy, 1891). Mais il ne répare pas l'oubli signalé et même si certaines pistes ont un rapport avec les travaux de Kepler, ceux-ci ne sont toujours pas cités.

Plusieurs auteurs se sont ensuite appuyés sur le texte de L. Lévy, mais le lien avec les travaux de Kepler ne sera réalisé que vers 1905 par Sommerville (1905), et leur richesse ne sera intégrée que postérieurement, dans les années 1970. Ainsi, il aura fallu, de façon surprenante, près de 300 ans pour que ces travaux, fondamentaux dans ce domaine, voient à nouveau le jour. Cette synthèse tardive, peut expliquer la quasi-absence des pavages archimédiens dans la culture scolaire française actuelle alors même qu'ils s'intègrent parfaitement aux travaux de recherche sur le thème.

III. ÉLÉMENTS ÉPISTEMOLOGIQUES

Tout le monde ne reconnaît pas encore Kepler comme un des précurseurs de la science moderne. Mais ceci peut se comprendre, tant Kepler, sa personnalité, ses écrits, ont brouillé les pistes pour qui lit l'histoire comme une accumulation de résultats, qui s'intègrent dans une construction a posteriori de la science. En effet, Kepler n'a fait aucun effort, au contraire, pour produire des textes expurgés de toutes références à des savoirs qui sont aujourd'hui sortis du champ des sciences. C'est d'ailleurs pour cela que Gérard Simon en a fait l'objet de son étude ce qui lui permet de montrer, dans *Kepler astronome astrologue* (Simon 1979), que c'est une histoire des savoirs et non pas une histoire des sciences qui permet de prendre en considération des apports incontournables comme ceux de Kepler. Dans le même esprit, Simone Mazauric revient sur la notion d'obstacle épistémologique :

> Contrairement à ce que l'on a appris chez Bachelard de la notion d'obstacle épistémologique, il s'avère que des savoirs jugés aujourd'hui non scientifiques ont joué un rôle positif dans le mouvement de restructuration intellectuelle opéré par Kepler comme dans la constitution de savoirs annexés désormais au domaine de la science. (Mazauric 2007, p. 99)

Donnons ici, et pour ce qui nous intéresse, un exemple de la présence de ces savoirs « non scientifiques » dans la pensée de Kepler.

Kepler possède une grande maîtrise des polygones réguliers. Il les étudie longuement dans le livre I de l'*Harmonices Mundi*, mais la description de certains polygones lui résiste et le lien entre le côté de l'heptagone et le diamètre du cercle circonscrit, l'amène à des considérations complexes et des commentaires qui s'écartent du paradigme scientifique comme nous le concevons aujourd'hui. Lors de la rédaction de la proposition 45 il écrit ainsi :

> En effet nous nous occupons certes ici des êtres scientifiques, et nous prononçons justement que le côté de l'Heptagone est issu des Non Etant [...] et il n'est pas connu par la pensée entière, sache par un acte simple éternel, parce qu'il est inconnaissable par sa nature.

Ainsi, alors même que Kepler fait preuve d'une démarche mathématique complexe et qui se veut exhaustive pour l'étude des polygones, il reste, dans les objets qu'il va être amené à

[12] Figure L sur la planche de la figure 2, et figure 3.

manipuler des « non êtres ». Nous allons voir l'incidence de cette présence dans ses travaux mais notons toutefois que ceci ne l'empêchera pas d'aboutir à des résultats nouveaux et particulièrement innovants. Chasles formulera ainsi son appréciation favorable des travaux de Kepler :

> Au milieu de ces considérations mathématiques si justes et si profondes, on trouve quelques réflexions qui annoncent l'usage bizarre et chimérique que veut faire, de ses savantes spéculations sur les polygones, le génie de Kepler, dominé par les idées pythagoriciennes et platoniciennes sur les propriétés cosmographiques des nombres : tel est ce passage qui termine la Proposition 45 : « Il est donc prouvé que les côtés de ces figures doivent rester inconnus et sont de leur nature introuvables. Et il n'y a rien d'étonnant en ceci, que ce qui ne peut se rencontrer dans l'Archétype du monde ne puisse être exprimé dans la conformation de ses parties ». Ce sont de pareilles idées qui ont conduit Kepler à l'une des plus grandes découvertes qu'on ait jamais faite. (Chasles 1837, p. 484)

Et c'est bien la pertinence et la fécondité de telles approches, que nous questionnons et qui sont au cœur de nombreux travaux de recherche actuels. C'est en effet dans des moments comme ceux-ci qu'apparaissent les savoirs nouveaux et ce sont ces moments qui nous intéressent du point de vue épistémologique et didactique dans la mesure où nous pourrons, en lien avec ces observations historiques, envisager des dispositifs didactiques favorables aux apprentissages.

Mais revenons aux travaux de Kepler sur les pavages archimédiens du plan[13]. Nous observons donc qu'ils constituent une avancée mathématique notable. Dans ce domaine aussi Kepler travaille essentiellement sur des énoncés quantitatifs et mathématiquement démontrables. Nous avons toutefois pu identifier, dans la démonstration de la proposition XX, où Kepler traite d'assemblages de figures de trois espèces, une erreur[14], qui amène Kepler à écarter prématurément les trois candidats-pavages pour lesquels les nœuds seraient respectivement construits à partir des polygones à 3,7 et 42 côtés, 3,8 et 24 côtés, 3,9 et 18 côtés. Nous constatons ainsi, qu'à cet instant, le contrôle du raisonnement par le retour aux objets[15] présente une difficulté. Il est alors nécessaire de questionner le milieu de recherche[16] de Kepler. Les validations des candidats-pavages se font-elles dans le cadre mathématique ou encore dans celui de l'action sur les objets ? Quels sont les objets qui sont réellement disponibles et les « non êtres » y figurent-ils ?

Kepler propose des figures particulièrement soignées qui montrent qu'une part des validations se fait par un retour au dessin aussi bien pour les candidats-assemblages autour d'un nœud que pour le pavage lui même[17]. Plus généralement, les textes montrent une référence constante aux objets et à leurs propriétés. Dans cet optique, il est probable que les « non êtres » et leur mode « d'existence » bien particulier aient une place à part dans le milieu de la recherche et que le candidat-pavage contenant l'assemblage de polygones à 3, 7 et 42 côtés, ait été écarté par son absence de réalité dans l'interprétation du monde de Kepler.

---

[13] Une étude fine de la démarche de Kepler devrait détailler l'environnement mathématique, qui intègre au-delà des polygones réguliers, des polygones étoilés et doit se concevoir dans un parallélisme avec l'étude des polyèdres.

[14] On pourra consulter (Front, à paraître) pour des développements.

[15] Nous entendons par objet, toute chose qui peut être soumise à manipulation, aussi bien concrète qu'abstraite.

[16] Nous faisons ici référence au milieu au sens de Brousseau, qui est caractérisé, dans le cadre d'une situation de recherche.
en classe, par : « dans une situation d'action, on appelle "milieu" tout ce qui agit sur l'élève ou/et ce sur quoi l'élève agit ».

[17] Ceci apparaît clairement sur certaines planches.

Ainsi ce qui apparaît lors de l'élaboration mathématique de Kepler, c'est un appui fort sur les objets manipulés et en conséquence sur le sens que ces objets portent dans l'interprétation de Kepler. Et si, comme on l'a vu, cela peut perturber certains aspects de la démarche, c'est aussi sans doute ce lien plus fort avec les objets de l'étude qui donne un avantage à Kepler sur Badoureau. En effet, l'approche algébrique de ce dernier l'amène à identifier quasiment tous les pavages archimédiens mais ne lui permet pas de retrouver que l'association de polygones à 3, 3, 3, 3 et 6 côtés amène à considérer 2 pavages différents, non superposables sans retournement (Figure 3). C'est ce que Kepler avait parfaitement identifié, ce pourquoi, Coxeter le tenait en haute estime.

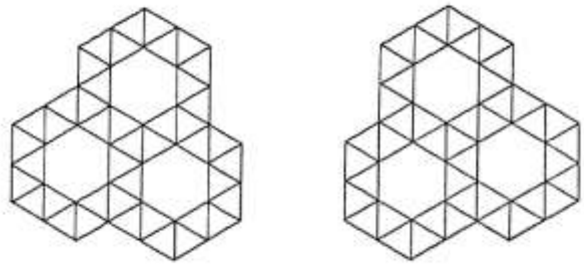


Figure 3

Ces quelques éléments nous permettent de pointer ainsi l'influence des approches et des démarches, le rôle du type d'objets manipulés, de leur intégration dans le milieu de la recherche en lien avec une certaine interprétation du monde et l'intérêt du va et vient entre les élaborations théoriques et les actions sur les objets.

IV. DES LIAISONS AVEC LA DIDACTIQUE

Il n'est bien entendu pas dans notre propos ici d'imaginer un enseignement du discours le plus récent concernant les pavages archimédiens, ni même d'envisager de le présenter avec une perspective historique. Le lien qui nous établissons se réalise par une approche que nous menons autour de la mise en œuvre de problèmes de recherche en classe et qui s'appuie aussi fortement, sur le rôle de l'action sur les objets qui peut donc être mis en évidence lors de processus de recherche. Nous n'entrerons pas ici dans le détail de la méthodologie qui peut amener à l'élaboration d'une situation pour la classe mais nous souhaitons mettre en évidence quelles idées fortes.

En reprenant des propos de Dias et Durand-Guerrier (2008, p. 15), rappelons tout d'abord que nous souhaitons avant tout « favoriser l'accès du plus grand nombre d'élèves non seulement aux outils et méthodes spécifiques des mathématiques, mais également à la signification des objets mathématiques et de leurs propriétés et à leurs liens avec les autres domaines de la connaissance et de l'activité humaine ».

Nous pensons alors qu'il est nécessaire, de prendre en considération et de favoriser l'affirmation des divergences d'interprétation des situations mais également des divergences d'interprétation du « monde ». Ceci doit se traduire par l'apparition, lors de situations de recherche, d'approches et de démarches variées qui engagent les élèves dans des modes d'élaborations théoriques parfois opposés mais toujours complémentaires.

Nous estimons également que l'activité mathématique ne s'exprime ni par la simple manipulation d'objets qui ferait à elle seule émerger des concepts, ni par des constructions essentiellement formelles et théoriques, trop souvent purement syntaxiques. Cette opposition ne permet d'ailleurs pas de rendre compte d'une activité mathématique où les élèves élaborent des mini-théories locales comme nous pouvons l'observer quand nous mettons en œuvre certaines situations que nous avons élaborées. Nous émettons l'hypothèse que ces élaborations théoriques se développent lors de manipulations qui agissent sur du concret, c'est-à-dire « de l'abstrait rendu familier par l'usage », par un mouvement de va et vient entre ces actions et les élaborations conceptuelles.

Dans cette optique, un travail sur les objets potentiellement manipulés lors de la recherche et sur les relations que les élèves entretiennent avec eux s'avère alors indispensable. En effet, au-delà de la simple connaissance factuelle, un élément clé de la fécondité des recherches est bien, comme on a pu en donner un exemple, le mode d'existence que l'on accorde aux objets considérés.

Ainsi, en appui sur les travaux du groupe de recherche EXPRIME[18] (2010), nous nous plaçons dans une optique qui met particulièrement en avant la recherche de problèmes en classe de mathématiques pour élaborer des situations didactiques permettant des élaborations théoriques et la construction de connaissances nouvelles. Celle, s'appuyant sur cette situation des pavages a été expérimentée de nombreuses fois en France, avec des élèves de terminale scientifique, mais également avec des étudiants non scientifiques préparant le concours de professeurs des écoles ou encore avec des enseignants du second degré en formation initiale ou continue. Elle s'est révélée, dans tous les cas, résistante et favorable à des élaborations théoriques, locales ou globales, partielles ou complètes. Ainsi par exemple, l'étude du voisinage d'un nœud permet l'élaboration de résultats souvent sous forme de conditions nécessaires et suffisantes, qui investissent soit le registre géométrique soit le registre numérique mais qui toutes montrent à des degrés divers l'importance de la relation aux objets et des retours de l'expérience sur ces objets. Cette relation porte particulièrement ses fruits lors des changements de registres qui s'avèrent nécessaires. Montrons sur un exemple ce lien entre élaboration théorique et action sur les objets, ici lors de l'étude d'une relation obtenue algébriquement : $180 \times \frac{n-2}{n} = \frac{360}{p}$, où n désigne le nombre de côtés des polygones réguliers considérés et p leur nombre. Les protagonistes se retrouvent en difficulté : « Non mais c'est des trucs que tu vois en terme » ... (en référence à des équations diophantiennes). Puis :

- ... si on en met plus de 6 on va peut-être trouver un angle trop aigu
- Si si on va s'en sortir parce que là on essaie d'en mettre le plus possible à un moment donné on arrive à des angles aigus plus petits que l'angle du triangle ça marche plus ben tout simplement, on peut pas faire moins que 60 ... et oui oui ... n il est forcément plus grand ou égal à 60 euh
- Non pas n, p
- Non p c'est un nombre de côté, non c'est le nombre de polygones

Apparaît ainsi clairement ici le fait que la résolution d'un problème de la théorie se réalise en appui sur l'expérimentation, au-delà de considérations syntaxiques. C'est la manipulation « mentale » des objets de la famille des polygones réguliers, qui permet de constater une

[18] EXPRIME, EXpérimenter des Problèmes de Recherche Innovants en Mathématiques à l'Ecole, est une équipe de recherche regroupant des chercheurs de l'Université Lyon 1 (UFR de Mathématiques, IREM, S2HEP, IUFM) et de l'IFE.

impossibilité « ça marche plus ». On peut d'ailleurs constater que l'élaboration de cet élément de la théorie, s'appuie, non pas sur les objets polygones réguliers mais sur la famille de ces polygones.

V. CONCLUSION

La situation des pavages archimédiens, d'une approche pourtant aisée, a longuement résisté aux mathématiciens et résiste à ceux qui l'abordent comme un objet de recherche, objet d'étude, (objet « à » savoir et non objet « de » savoir, pour reprendre une expression de Audin et Duchet[19]). Les textes de Kepler montrent qu'une approche exploratoire liant action sur les objets et cadre théorique en construction s'avère féconde, même dans une interprétation du monde qui nous surprend encore. Ce qui apparaît également c'est que ces constructions ne peuvent se renouveler à l'identique pour peu que l'on considère le rôle de l'environnement culturel, environnement mathématique, scientifique, langagier ... Mais ce que nous pouvons toutefois espérer c'est qu'elles se renouvellent pour chaque individu, dans le cadre de situations que nous construisons avec cet objectif et qui doivent permettre, en favorisant l'élaboration de processus efficaces, d'améliorer la conceptualisation du monde de chacun des acteurs.

[19] Compte-rendu d'un atelier de présentation de MATh.en.JEANS par Pierre Audin et Pierre Duchet, en ligne : http://www.animath.fr/old/UE/UE04/MeJ.pdf

RÉFÉRENCES

Badoureau A. (1881) Mémoire sur les figures isoscèles. *Journal de l'Ecole polytechnique* 30, 47-172.

Barbin E. (1997) Sur les relations entre épistémologie, histoire et didactique. *Repères IREM* 27, 63-80.

Chasles M. (1837) *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*. Bruxelles : Editions Hayez.

Coxeter H. (1974) Kepler and mathematics. *Vistas in Astronomy* 18, 661-670.

Cuomo S. (2000) *Pappus of Alexandria and the mathematics of the lake antiquity*, Cambridge : Cambridge University Press.

Dias T., Durand-Guerrier V. (2008) Faire l'épreuve des objets en mathématiques, le cas des polyèdres réguliers. In *Actes du colloque : Efficacité et équité en éducation, IUFM de Bretagne et Université de Rennes.*

EXPRIME (2010) *Expérimenter des problèmes innovant en mathématiques à l'école.* Cédérom, INRP.

Front M., Legrand P. (2010) Pavages semi-réguliers du plan. *Bulletin de l'APMEP* 486, 60-66.

Front M. (2012) Pavages semi-réguliers du plan, une exploration favorable aux élaborations mathématiques. *Repères IREM 89.*

Kepler J. (1609) *Strena sive de Nive sexangula*. Traduction française (1975) *L'étrenne ou la neige sexangulaire*, Halleux R. (Trad.) Paris : Vrin-CNRS.

Kepler J. (1619) *Harmonices mundi.* Traduction française (1980) *L'harmonie du monde*. Peyroux J. (Trad.) Paris : Blanchard.

Lévy L. (1891) Sur les pavages à l'aide de polygones réguliers. *Bulletin de la Société philomatique de Paris* 8(3), 46-50.

Mazauric S. (2007) De l'âge baroque à l'âge classique : construction d'une nouvelle rationalité scientifique. In *Actes du colloque Histoire et agronomie : entre ruptures et durée* (pp. 90-104). Paris : IRD.

Pappus (~340). *Collection*. Traduction française (1933) *La Collection mathématique*. Ver Eecke P. (Trad.) Paris and Bruges : Desclée De Brouwer. Rééd. (1982) Paris : Blanchard.

Simon G. (1979) *Kepler astronome astrologue*. Paris : Gallimard.

Sommerville D. M. Y. (1905) Semi-regular networks of the plane in absolute geometry. *Transactions of the Royal Society of Edinburgh* 41, 725-759.

Voelkel J. (2001) *The composition of Kepler's Astronomia nova*. Princeton : Princeton university press.

ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES ET HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES : QUELS APPORTS POUR L'APPRENTISSAGE DES ELEVES ?

David GUILLEMETTE*

Résumé – Plusieurs auteurs amènent des arguments supportant la présence de l'histoire dans la classe de mathématiques. Cependant, ces considérations théoriques ont été peu confrontées à l'expérimentation. On en sait peu sur l'apport véritable de l'histoire dans l'enseignement des mathématiques. Aussi, d'autres nous informent sur des expériences positives autour d'activités spécifiques, mais rares sont ceux qui ont conduit de véritables analyses sur la manière dont l'histoire est utilisée et de ses retombées pour l'apprenant. J'apporte ici quelques éléments de problématisation pour aider à mieux comprendre les enjeux de l'utilisation de l'histoire en classe de mathématiques dont l'éclaircissement par la recherche semble nécessaire.

Mots-clefs : enseignement des mathématiques, histoire des mathématiques, lecture de textes historiques, études empiriques, problématisation

Abstract – Researchers bring arguments supporting mathematics' history in the classroom. Indeed, these theoretical considerations haven't been confronted to experimentation very much. The fact is that we know very little about the very bringing-in of the history in the classroom. Also, if numerous studies report positive experiences, very few show real analysis of the way history was used and the effects on the classroom. In this text, I will bring some elements of research problems for a better understanding of the issues relating to the introduction of history of mathematics in the classroom, issues that have to be clarified by research.

Keywords: mathematics education, history of mathematics, historical texts lectures, empirical studies, research problems.

I. INTRODUCTION

Depuis plusieurs décennies, de nombreux penseurs, chercheurs et enseignants se sont penchés sur le « comment » et le « pourquoi » du recours à l'histoire des mathématiques dans la classe de mathématiques. Dès le début du 20e siècle, pédagogues (Barwell 1913), philosophes (Bachelard 1938) et mathématiciens (Poincaré 1889 ; Klein 1908 ; Toeplitz 1927 ; Pólya, 1962) s'y sont intéressés. Jusqu'à récemment, il semble que tous, enseignants et chercheurs, s'entendaient pour dire que l'histoire est bénéfique et se veut d'emblée un outil cognitif efficace et motivant dans l'apprentissage des mathématiques (Charbonneau 2006). Cet engouement a donné lieu à de nombreuses études concernant l'utilisation de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement des mathématiques.

Cependant, depuis maintenant 10 ans, le champ de recherche autour de l'utilisation de l'histoire se restructure. De nouveaux et sérieux questionnements sont nés suite à la parution de l'important ouvrage *History in mathematics education-The ICMI Study* (Fauvel et van Maanen 2000). Véritable bilan de santé de ce secteur de recherche, le livre, issu d'un colloque international du même nom, rassemble les réflexions, interrogations et inquiétudes des chercheurs du domaine. Cet ouvrage amène, en effet, les chercheurs à prendre davantage de recul face à leurs croyances afin de bien les fonder par la recherche. À titre d'exemple, l'efficacité et la pertinence de nombreux exemples d'application de l'histoire en classe ont été questionnées (Siu 2000 ; Bakker 2004). Certains chercheurs soulignent aussi l'importance de faire davantage preuve d'une grande prudence face à l'étude des aspects historiques de certaines notions et osent même douter des réelles capacités des étudiants et des enseignants

*Université du Québec à Montréal – Canada (Québec) – guillemette.david@courrier.uqam.ca

© Guillemette D. (2012) Enseignement des mathématiques et histoire des mathématiques : quels apports pour l'apprentissage des élèves ? In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT4, pp. 622–631). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

devant les difficultés liées à l'étude de ces notions historiques (Fried 2001 ; Charbonneau 2002 ; Jankvist 2009a). D'autres questionnent aussi la « transférabilité » d'expériences positives rapportées par des praticiens de différents niveaux académiques (Tzanakis 2000 ; Schubring 2007). Plus largement, on questionne l'entreprise générale de recherche qui est conduite dans ce champ, pour tenter d'aller plus loin que les récits de pratiques et le rapport d'expériences positives sur l'utilisation de l'histoire. Ainsi, le manque d'études empiriques sérieuses et systématiques questionne le réel apport possible de l'histoire des mathématiques à l'apprentissage des mathématiques (Lederman 2003 ; Siu et Tzanakis 2004 ; Siu 2007 ; Jankvist 2009b).

II. LES QUESTIONS ET PROBLÈMES DE RECHERCHE A CONSIDERER

Encore aujourd'hui, si plusieurs études nous informent sur des expériences positives autour d'activités spécifiques faisant intervenir l'histoire des mathématiques en classe (voir Greenwald 2005 ; Arcavi et Isoda 2007 ; Høyrup 2007 ; Kjeldsen et Blomhøj 2009), rares sont les travaux, selon plusieurs (par ex. Furinghetti 2007 ; Charalambous, Panaoura et Philippou 2008 ; Jankvist 2009b, 2010), faisant véritablement l'analyse de la manière dont on utilise l'histoire, et de ses retombées pour les apprenants.

1. Deux types d'études

En parcourant la littérature scientifique depuis les années 1990, on peut classer les études portant sur l'utilisation de l'histoire dans la classe de mathématiques sous deux catégories. Il y a, dans un premier temps, les travaux qui prennent généralement la forme de récits de pratiques analysés. On y traite, généralement, des initiatives de professeurs de mathématiques de différents niveaux académiques qui ont tenté d'introduire de diverses façons l'histoire dans leurs cours. Cependant, la plupart restent peu satisfaisantes au point de vue expérimental, car rares sont celles qui présentent un cadre d'analyse pour leurs données, se contentant d'offrir des pistes intéressantes et des réflexions sur le phénomène, mais sans y conduire une analyse précise suite à une collecte de données méthodologiquement établie. Dans ce sens, Gulikers et Blom (2001) observent que les cas d'utilisation de l'histoire sont souvent isolés, créant un certain fossé entre les « expériences pratiques » rapportées par certains et les études « générales » plus spéculatives rapportées par d'autres. Ainsi, dans un deuxième temps, on retrouve des textes portant majoritairement sur des réflexions théoriques. Ces textes offrent une entrée importante en offrant des distinctions et façons de voir qui aident à jeter un regard plus fin sur les arguments et méthodes en ce qui concerne l'utilisation de l'histoire (Jahnke et al., 2000 ; Fried 2007, 2008 ; Jankvist 2009c). Ainsi, malgré les apports évidents de ces deux types d'études, le besoin se fait sentir d'avoir une entrée empirique avec des études systématiques sur le processus d'apprentissage mathématique qui se déploie à l'intérieur de séances où l'histoire des mathématiques est travaillée.

De plus, ces « expériences pratiques » ou réflexions théoriques restent peu nombreuses. Dans sa recherche, Jankvist (2007, 2009a) tente de recenser, pour une période allant de 1998 à 2009, l'ensemble des études empiriques parues dans les revues anglophones *Educational Studies in Mathematics*, *For the Learning of Mathematics*, *Mediterranean Journal Research in Mathematics Education* et *e t tt D d t de t e t* , ainsi que des thèses de maîtrise et doctorat et des actes de colloques. Dans son travail, il entend par études empiriques « les recherches allant de la petite étude qualitative à la grande étude quantitative qui, par l'expérimentation et l'emploi de tests, questionnaires, entrevues ou d'une méthodologie quelconque, discutent et élaborent des conclusions à partir de données recueillies sur le terrain » (Jankvist 2009a, p. 5, traduction libre). Ainsi, n'ont été sélectionnées que les études qui présentaient d'une manière ou d'une autre des données empiriques sur lesquelles les auteurs appuyaient leurs remarques et conclusions. Il a trouvé en tout 81 études. D’autre part, il souligne qu’à travers les 78 études paraissant dans le *HPM2004 et ESU4* (Furinghetti, Kaijser et Tzanakis 2008), des actes de colloque portant sur l’histoire des mathématiques dans l’enseignement des mathématiques, seulement environ 10 % d’entre elles sont issues d’études empiriques. Cela dit, il remarque une recrudescence du nombre de ces études depuis le milieu de la décennie, montrant ainsi le changement de cap amorcé dans ce champ d’études vers ce type de recherche mieux comprendre l’utilisation de l’histoire des mathématiques en classe de mathématiques.

En ce qui concerne les travaux théoriques sur l’utilisation de l’histoire des mathématiques dans la classe, ceux-ci discutent, entre autres, de la question du « pourquoi » de l’utilisation de l’histoire. De cette question centrale, en ressortent de nombreux arguments pour justifier la présence de l’histoire dans la classe de mathématiques, que Jahnke et al. (2000) et Jankvist (2009c) décortiquent et classifient à leur façon. Je présente ces classifications dans ce qui suit.

2. Jankvist et le « pourquoi » de ’ut s t o de ’ sto e

Pour Jankvist (2009c) les arguments en faveur de l’utilisation de l’histoire se divisent en deux catégories. Celles-ci sont associées à des visions distinctes de l’utilisation qu’on peut en faire.

Premièrement, l’histoire peut être perçue comme un *outil* cognitif efficace et motivant pouvant venir en aide et accompagner l’enseignement et l’apprentissage des mathématiques. Les facteurs motivationnels, l’humanisation des mathématiques, le support cognitif pour l’élève, l’approfondissement des réflexions épistémologiques et didactiques de l’enseignant sur la matière, l’accès à des problèmes variés et enrichissants ou la réflexion didactique autour d’obstacles épistémologiques précis sont tous des arguments associés à cette histoire perçue comme un *outil*.

Deuxièmement, un certain type de discours clame que l’enseignement de l’histoire des mathématiques en tant que telle est un apport à l’apprentissage des mathématiques, dans le sens où elle nous apprend ce que *sont* les mathématiques. Jankvist n’hésite pas à parler alors de l’apprentissage de « l’esprit » des mathématiques au travers de l’histoire des mathématiques (Jankvist 2009c, p. 239). Dans ce sens, l’histoire des mathématiques est perçue comme un *objectif en soi*. Montrer que les mathématiques sont en constante évolution dans le temps et dans l’espace, qu’elles ne « descendent pas du ciel », qu’elles sont une activité humaine arborant de multiples facettes au gré des cultures, des sociétés et de l’histoire et que son évolution est issue de motivations intrinsèques et extrinsèques animant les mathématiciens dans leurs époques respectives, sont des arguments qui relèvent d’une vision de l’histoire perçue comme un *objectif en soi*.

D’une certaine façon, Jankvist catégorise les arguments qui supportent la présence de l’histoire des mathématiques en classe en observant *’ te t o péd g og que de ’ ct v té d’ pp e t ss ge p oposée*. Si l’intention concerne plus spécifiquement l’enrichissement de la compréhension conceptuelle des objets mathématiques, les arguments sont associés à l’histoire perçue comme un *outil*. Si l’intention concerne principalement des réflexions métamathématiques, c’est-à-dire les réflexions qui touchent l’historicité des notions abordées, l’historicité de la notation et de la rigueur associée, les mécanismes sous-jacents à la découverte des concepts explorés, les forces intrinsèques et extrinsèques qui animent les mathématiciens découvreurs ou les liens entre le développement de ces concepts et le développement des sociétés et des cultures, les arguments sont alors associés à l’histoire perçue comme un *objectif en soi*.

3. Barbin, Jahnke et al. et les hypot ès es su ' pp o t de 'ut s t o de ' sto e

De leur côté, Barbin (1997), ainsi que Jahnke et ses collaborateurs (Jahnke et al. 2000), se sont aussi interrogé sur les arguments en faveur de l'utilisation de l'histoire. Ils mettent en relief principalement trois hypothèses[1]. Ils mettent en relief principalement trois hypothèses. D'abord, une première hypothèse est que l'histoire peut offrir une *compréhension culturelle* des mathématiques. Comme ils le mentionnent : « L'intégration de l'histoire des mathématiques nous inviterait à ancrer le développement des mathématiques à l'intérieur d'un contexte sociohistorique et culturel large et à repousser les limites établies des objets à l'intérieur de la discipline » (Jahnke et al. 2000, p. 292). Ainsi, l'histoire des mathématiques se veut le moyen de situer les objets mathématiques étudiés dans une perspective de continuum historique et dans un contexte historique et social, de voir leur évolution et de cerner les problématiques qui ont suscité leur développement et les concepts comblés par ce processus. Aussi, dans cette perspective, les liens qui unissent les notions mathématiques prennent une dimension différente et s'éloignent du simple enchaînement des notions à l'intérieur d'un programme d'études ou des manières selon lesquelles les concepts de la discipline sont classiquement organisés.

La deuxième hypothèse est celle que l'intégration de l'histoire amène un *repositionnement* des mathématiques, c'est-à-dire que « l'intégration de l'histoire permet de percevoir les mathématiques comme une véritable activité intellectuelle plutôt qu'un simple corpus de connaissances, qu'une simple collection d'outils disparates » (Ibid.). Ces deux premières hypothèses sont liées à un besoin d'humaniser les mathématiques, d'en souligner l'historicité et de mettre en relief l'aspect évolutif de celles-ci ; et il s'agit d'une dimension fréquemment mentionnée dans les travaux (voir Furinghetti 2004 ; Tang 2007 ; Guillemette 2009 ; Kjeldsen et Blomhøj 2009 ; Jankvist 2010).

Enfin, la dernière hypothèse est celle de la *réorientation*. Dans ce sens, « l'histoire des mathématiques aurait la vertu d'étonner, elle rend le familier inusité […] l'apprenant se voit engagé dans un processus où il est forcé de se réapproprier le sens des objets enseignés ou à être enseignés » (Jahnke et al. 2000, p. 292, traduction libre). Dans cette optique, l'histoire permet aux étudiants de remettre en question leurs propres conceptions et expériences associées aux objets mathématiques par la rencontre et la comparaison d'une autre culture mathématique, celle d'une autre époque.

En ce qui concerne la recherche, si plusieurs alimentent la discussion autour de ces différents arguments, ceux-ci n'ont que peu souvent été confrontés à l'expérimentation. Les travaux de recherche en sont encore à un stade embryonnaire et prennent généralement la forme de récits de pratiques analysés qui éclairent peu quant à la compréhension de la manière dont s'opèrent cette *compréhension culturelle*, ce *repositionnement* et cette *réorientation* chez l'apprenant et comment elle s'articule avec la présence d'éléments historiques dans la classe de mathématiques (Furinghetti 2007 ; Siu 2007 ; Charalambous et al. 2008 ; Jankvist 2009b). Il y a là un véritable besoin de mieux comprendre ces phénomènes et ce qu'il peut potentiellement s'y passer. Dans une perspective plus large, il nous faut combler cet écart, soulevé par Guliker et Blom (2001) entre les études empiriques peu satisfaisantes et les études de nature plus théorique et spéculative.

Dans le cas de Jankvist, la catégorisation entre histoire perçue comme un *outil* et histoire

[1] Il est à noter que les trois hypothèses ont d'abord été posées par Barbin (1997). Elles ont été reprises, traduites et diffusées dans la littérature anglo-saxonne par Jahnke et ses collaborateurs (Jahnke et al. 2000), dont Evelyne Barbin elle-même fait partie.

perçue comme un *objectif en soi* permet de jeter un regard sur les possibles intentions des enseignants. Aussi, elle permet, d'une part, d'éviter une confusion répandue dans plusieurs études entre arguments et méthodes et, d'autre part, de faciliter l'observation et l'analyse des interrelations entre ces deux aspects de la recherche. La catégorisation de Jankvist a donc pour but de faciliter et d'orienter le travail du chercheur. D'un autre côté, les trois arguments hypothétiques de Barbin (1997) et de Jahnke et al. (2000) ; la *compréhension culturelle*, le *repositionnement* et la *réorientation* départagent, dans une perspective large, les possibles retombées positives pour l'apprentissage de l'apprenant et pour la classe de mathématiques. Il y a là un ancrage direct avec les impacts potentiels de l'utilisation de l'histoire des mathématiques dans la classe. Impacts, qui, comme mentionné plus haut, nécessitent d'être éclairés par la recherche et l'analyse fine d'expériences vécues en classe.

4. Le « comment » de 'ut s t o de ' st o e

D'autre part, certains chercheurs ont réfléchi de façon plus spécifique au « comment » de l'utilisation de l'histoire. C'est entre autres le cas de Fried (2001, 2007, 2008), qui met en relief la difficulté de traiter convenablement de l'histoire des mathématiques en classe de mathématiques. Il souhaite que l'histoire soit prise au sérieux et que son étude soit prudente et attentive. Sinon, pour Fried (2001), il y a des risques probants d'une dénaturation de l'histoire, celle-ci pouvant être contaminée par une vision moderne des mathématiques qui écrase l'historicité des concepts et en aseptise l'exploration. Les risques d'anachronisme et de lectures faussement progressives de l'histoire contaminée par le présent sont élevés. Trop souvent, l'histoire prend la forme, selon lui, d'anecdotes et de capsules historiques qu'il voit d'un très mauvais œil. Fried donne l'image « d'épices » ajoutées à la casserole mathématique.

Quant à Jankvist (2009c), il regroupe les méthodes proposées sous trois catégories : *'pp oc e ecdot que*, *'pp oc e p odu es d' pp e t ss ges* et *'pp oc e sto que intégrée*. La première correspond à l'introduction de faits isolés, de capsules historiques ou d'anecdotes particulières. Le cas de Lindstrøm (1995) qui, à la fin de chaque chapitre de son manuel, présente une petite rubrique concernant le développement dans l'histoire des notions abordées en est un bon exemple. *L' pp oc e p odu es d' pp e t ss ges* propose des situations problèmes ou des séquences d'enseignements, s'étendant plus ou moins dans la durée, basées sur l'histoire autour d'un sujet mathématique précis. Il s'agit d'opportunités précises dans l'histoire qui sont étayées mathématiquement et didactiquement et qui peuvent inclure l'utilisation de sources primaires ou secondaires, la lecture de textes historiques, l'élaboration de projets recherches par les étudiants, etc. Quant à *' pp oc e sto que intégrée*, elle s'inspire ou se base sur les développements historiques de l'objet mathématique étudié pour l'élaboration d'une séquence complète d'enseignements. De façon directe ou indirecte, l'histoire se retrouve dans la classe de mathématiques au travers des stratégies adoptées par l'enseignant, de son attitude face à la présentation des sujets d'études, des questions soulevées à partir du contexte historique ou de l'enchaînement des concepts abordés. Essentiellement, cette troisième catégorie regroupe l'ensemble des pratiques basées sur l'*approche génétique* issue des travaux de Toeplitz (1963) et plus tard retravaillée par Freudenthal (1991).

Ainsi, Jankvist (2009c) laisse présager que ces différentes approches, qui regroupent plusieurs méthodes spécifiques d'utilisations, ne poursuivent pas toutes les mêmes objectifs et que leur portée diffère de l'une à l'autre. Dans ce sens, Fried (2007) affirme que la lecture de textes historiques apparaît comme une méthode à privilégier lorsqu'il s'agit d'utiliser l'histoire de façon rigoureuse et sérieuse. Or, cette difficile activité de lecture impliquerait une double perspective. Pour l'illustrer, il souligne que l'objectif de l'historien est de se plonger dans l'époque du mathématicien, de percevoir les idiosyncrasies de ce dernier et de situer l'ouvrage dans un continuum de développement des mathématiques. Le regard du mathématicien, quant à lui, tente de décoder les symboles désuets, de les restituer au langage moderne et de saisir l'aspect essentiellement mathématique des propos de l'auteur. Il qualifie de *diachronique* la lecture de l'historien et de *synchronique* la lecture du mathématicien, termes qu'il emprunte au linguiste de Saussure (2005). Pour Fried, connaître véritablement un concept mathématique c'est le connaître à la fois synchroniquement et diachroniquement. Selon lui, la lecture synchronique des objets mathématiques et trop souvent renforcée par les enseignants. Aussi, le rôle de l'enseignant serait précisément de faire basculer l'élève constamment entre ces deux visions. C'est ce travail de va-et-vient continuel qui permettrait de faire émerger en l'apprenant une certaine conscience de ses propres conceptions des mathématiques, de ses compréhensions personnelles et de la possibilité pour lui de les confronter de façon constructive avec celles des autres. C'est pourquoi la lecture de textes historiques lui apparaît comme étant l'approche à privilégier dans la perspective de susciter chez l'apprenant les trois composantes de Barbin (1997) et Jahnke et al. (2000).

Somme toute, de profondes réflexions alimentent la discussion concernant le « pourquoi » et le « comment » de l'utilisation de l'histoire dans la classe de mathématiques. De ces considérations théoriques et hypothèses, une question globale se dessine : de quelle façon l'utilisation de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement des mathématiques développe les composantes de *compréhensions culturelles*, de *repositionnement* et de *réorientation* chez les apprenants ? En particulier, comment ceci peut se mettre en route à l'intérieur d'une activité de lecture à la fois *synchronique* et *diachronique* de textes anciens en classe de mathématiques ?

III. DONNEES PRELIMINAIRE ET PREMIERES PERSPECTIVES

Quelques données préliminaires issues de mes travaux de maîtrises (Guillemette 2009) peuvent d'emblée nous permettre d'appréhender les trois arguments hypothétiques de Barbin (1997) et Jahnke et al. (2000) quant à l'utilisation de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement des mathématiques. En effet, lors de cette étude, une activité de lecture d'un texte de Pierre de Fermat a été construite et vécue en classe. Il s'agissait d'une correspondance entre savants de l'époque à travers laquelle Fermat présente sa théorie des *Minima et Maxima* qui s'avère être un précurseur à la fondation du calcul différentiel par Leibniz et Newton. Cette activité de lecture comprenait trois phases : une première de présentation du contexte sociohistorique, une seconde de lecture individuelle et une dernière de plénière en grand groupe durant laquelle un parallèle était établi entre la méthode de Fermat présentée dans le texte et les méthodes associées aux outils de calculs modernes.

Cette recherche m'aura permis d'observer les réflexions métamathématiques qui émergent chez l'étudiant préuniversitaire dans le cadre d'une telle activité. Les réflexions métamathématiques en question étaient celles qui, au travers d'une activité mathématique, touchent l'historicité des notions abordées, l'historicité de la notation et de la rigueur associée, les mécanismes sous-jacents à la découverte des concepts explorés, les forces intrinsèques et extrinsèques qui animent les mathématiciens découvreurs et les liens entre le développement de ces concepts et le développement des sociétés et des cultures. Pour y arriver, j'ai dû mener, suite à l'expérimentation de l'activité en classe, une vingtaine d'entrevues individuelles afin de mettre en relief ces réflexions particulières. Chacune de ces entrevues a soigneusement été retranscrite pour en faciliter l'analyse.

Cette retranscription a permis de constituer des données précieuses en ce qui concerne l'émergence de réflexion métamathématiques dans le cadre d'une activité de lectures de textes anciens. Cependant, il m'apparaît intéressant *a posteriori* de tenter de mettre en lumière, au travers d'extraits de la retranscription, les trois arguments hypothétiques de Barbin (1997) et Jahnke et al. (2000) concernant l'utilisation de l'histoire dans la classe de mathématiques : la *compréhension culturelle*, le *repositionnement* et la *réorientation*. Prenons en exemple les deux extraits suivants qui constituent des réactions des étudiants ayant vécu l'activité de lecture :

> « Tu te dis ; ah ! Des maths ça va être plate ça ! Que tu nous aies mis comme l'entourage des découvertes de lui, on dirait que tu rentres plus dedans. Tu connais le personnage et t'as le goût de voir comment y a trouvé son affaire. Tu sais, les maths, juste des chiffres, au moins là tu as de quoi en arrière […] C'est moins abstrait mettons » (Guillemette 2009, p. 67).

> « Puis que lui est arrivé à faire comme une égalité dans les airs de même et finalement nous on est capable avec les limites et notre optimisation à arriver à la même réponse que lui… Je ne comprends pas, il a quand même fait ça dans les airs et nous autres on est capable de justifier » (Ibid., p. 50).

Il m'apparaît possible d'envisager ces réactions selon les trois composantes de Barbin (1997) et Jahnke et al. (2000). En effet, il est possible d'imaginer que l'apprenant derrière la première citation manifeste une *compréhension culturelle* des mathématiques en affirmant qu'il « rentre plus dedans ». Il semble, d'une certaine façon, avoir ancré les concepts abordés dans un cadre sociohistorique et culturel plus large. Son regard s'est modifié et il semble percevoir l'« entourage des découvertes », ce qui lui permet de poser un regard nouveau sur les mathématiques. On peut imaginer aussi que l'activité de lecture aurait amené ce même étudiant à faire un *repositionnement* des objets mathématiques en question. Il mentionne qu'avec ce genre d'activité « tu as de quoi en arrière », que les mathématiques ne sont pas « juste des chiffres ». Elles apparaissent donc moins figées dans le temps, immuables ou réifiées. L'activité mathématique apparaît alors comme une véritable activité humaine. Les objets et concepts étudiés ne descendent pas du ciel, mais sont élaborés par des hommes aux motivations intrinsèques et extrinsèques particulières et qu'ils sont le fruit de longues et parfois tortueuses réflexions. Enfin, il serait possible qu'une *réorientation* se soit opérée chez l'apprenant derrière la seconde citation. En effet, il se dit étonné et surpris de la démarche intuitive de Fermat, à un tel point qu'il sent le besoin de se réapproprier les concepts en question pour mieux saisir les propos du mathématicien. Il se questionne et tente de mettre en relief les liens qui unissent les deux formes de compréhension, la sienne et celle de Fermat.

Cette analyse préliminaire provenant des données d'un projet de recherche particulier, dont on ne perçoit ici qu'une simple ébauche, permet de fournir des indices de ce que chacune des hypothèses peut signifier. Il n'en demeure pas moins que les contours de ces considérations théoriques demeurent flous et qu'un raffinement s'impose. De nombreuses questions demeurent. Une *compréhension culturelle* implique-t-elle nécessairement un *repositionnement* des mathématiques par exemple ? Existe-t-il une forme de gradation entre chacune des composantes ? Une *compréhension culturelle* est elle nécessaire pour qu'une *réorientation* s'opère ? Plus largement, ces trois hypothèses suffisent-elles à interpréter l'ensemble des retombées pour l'apprentissage des apprenants ?

Ce premier niveau d'interprétation, d'une part, permet en partie de mieux comprendre les phénomènes en question et, d'autre part, souligne clairement le besoin d'entrer plus en profondeur et de façon plus systématique dans l'analyse de ceux-ci. Dans ce sens, il apparaît nécessaire de construire de nouvelles expérimentations permettant d'investiguer plus finement les retombées de l'introduction de l'histoire dans la classe de mathématiques pour mieux éclairer les arguments en faveur de cette introduction. Ainsi, il nous faut trouver des moyens efficaces de faire parler les apprenants : différentes sortes d'entrevues, réflexions écrites, questionnaires, productions mathématiques, etc. C'est par l'analyse systématique du vécu de la classe qu'il sera possible de saisir pleinement et de mieux comprendre les enjeux de l'introduction de l'histoire dans la classe de mathématiques. Cette compréhension approfondie fournira des outils permettant d'appréhender efficacement les objets d'études de ce champ de recherche.

REFERENCES

Arcavi A., Isoda M. (2007) Learning to listen: from historical sources to classroom practice. *Educational Studies in Mathematics* 66(2), 111-129.

Bachelard, G. (1938) *L o t o de 'esp t s c e t que*. Paris : Vrin.

Bakker A. (2004) *Design research in statistics education. On symbolizing and computer tools.* Thèse de doctorat. Utrech : The Freudenthal Institute.

Barbin E. (1997) Histoire et enseignement des mathématiques : Pourquoi ? Comment ? *Bu et de 'Assoc t o t é t que du Qué ec* 37(1), 20-25.

Barwell M. (1913) The advisability of including some instruction in the school course on the history of mathematics. *The mathematical gazette* 7, 72-79.

Charalambous C. Y., Panaoura A., Philippou G. (2008) Using the history of mathematics to induce changes in preservice teachers' beliefs and attitudes: insights from evaluating a teacher education program. *Educational Studies in Mathematics* 71(2), 161-180.

Charbonneau L. (2002) L'histoire des mathématiques peut-elle changer l'attitude des élèves face aux mathématiques ? *Comhishma-HPM*, 99-120. Marrakech : École Normale Supérieure.

Charbonneau L. (2006) Histoire des mathématiques et les nouveaux programmes au Québec: un défi de taille. *L'e se g e e t des t é t ques ce ux dé s de 'éco e et des communautés: Actes du colloque EMF* (p. 11). Sherbrooke : Faculté d'éducation, Université de Sherbrooke.

Fauvel J., van Maanen J. (Eds.) (2000) *History in mathematics education. The ICMI study*. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

Freudenthal, H. (1991) *Revisiting mathematics education: China lectures*. Springer.

Fried M. N. (2001) Can Mathematics Education and History of Mathematics Coexist? *Science et Education* 10, 391-408.

Fried M. N. (2007) Didactics and History of Mathematics: Knowledge and Self-Knowledge. *Educational Studies in Mathematics* 66(2), 203-223.

Fried M. N. (2008) History of Mathematics in Mathematics Education: a Saussurean Perspective. *The Montana Mathematics Enthusiast* 5(2), 185-198.

Furinghetti F. (2004) History and mathematics education a look around the world with particular reference to Italy. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education* 3(1/2), 125-146.

Furinghetti F. (2007) Teacher education through the history of mathematics. *Educational Studies in Mathematics* 66(2), 131-143.

Furinghetti F., Kaijser, S., Tzanakis, C. (Eds.) (2008) *Proceedings HPM2004 et ESU4 (revised edition)*. Uppsala : Uppsala Universitet.

Greenwald S. (2005) Incorporating the mathematical achievements of women and minority mathematicians into classrooms. In Shell-Gellasch A., Jardine D. (Eds.) (pp. 183–200) *From calculus to computers. Using the last 200 years of mathematics history in the classroom, MAA Notes (No. 68)*. Washington : The Mathematical Association of America.

Guillemette D. (2009) *Ut s t o de textes c e s d s 'e se g e e t du c cu d é e t e.* Mémoire de maîtrise. Montréal : Université du Québec à Montréal.

Gulikers I., Blom K. (2001) "A historical angle", A survey of recent literature on the use and value of history in geometrical education. *Educational Studies in Mathematics* 47, 223-258.

Høyrup J. (2007) The roles of Mesopotamian bronze age mathematics tool for state formation and administration – carrier of teachers' professional intellectual autonomy. *Educational Studies in Mathematics* 66(2), 257-271.

Jahnke H. N., Arcavi A., Barbin E., Bekken O., Furinghetti F., El Idrissi A. et al. (2000) The use of original sources in the mathematics classroom. In Fauvel J., Van Maanen J. (Eds.) (pp. 291-328) *History in mathematics education-The ICMI Study*. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

Jankvist U. T. (2007) Empirical research in the field of using history in mathematics education: Review of empirical studies in HPM2004 et ESU4. *Nomad* 12(3), 82-105.

Jankvist U. T. (2009a) *Us g H sto y s 'Go ' t e t cs Educ t o* . Thèse de doctorat. Roskilde : Roskilde University.

Jankvist U. T. (2009b) On empirical research in the field of using history in mathematics education. *ReLIME* 12(1), 67-101.

Jankvist U. T. (2009c) A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics* 71(3), 235-261.

Jankvist U. T. (2010) An empirical study of using history as a "goal". *Educational Studies in Mathematics* 74(1), 53-74.

Kjeldsen T. H., Blomhøj, M. (2009) Integrating history and philosophy in mathematics education at university level through problem-oriented project work. *ZDM Mathematics Education* 41(1/2), 87.103.

Klein F. (1908) *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*. Stuttgart: Leipzig.

Lederman N. (2003) Is history of science stuck in the past? *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education* 3(4), 521.523.

Lindstrøm T. (1995) *Kalkulus*. Oslo : Universitetsforlaget.

Poincarré H. (1889) La logique et l'Intuition dans la science mathématique et dans l'enseignement. *L'E se g e e t thématique* 1, 157.162.

Pólya G. (1962) *Mathematical discovery (combined edition)*. New York : John Wiley & Sons.

Saussure F. de. (2005) *Cours de linguistique générale*. Paris : Payot et Rivages.

Schubring G. (2007) Ontogeny and phylogeny – categories for cognitive development. In Furinghetti F., Kaijser S., Tzanakis C. (Eds.) (pp. 329-339) *Proceedings HPM2004 et ESU4 (revised edition)*. Uppsala : Uppsala Universitet.

Siu M.-K. (2000) The ABCD of using history of mathematics in the (undergraduate) classroom. In Katz V. (Ed.) (Vol. 51, pp. 3-9) *Using history to teach mathematics – an international perspective, MAA notes*. Washington, DC: The Mathematical Association of America.

Siu M.-K. (2007) "No, I don't use history of mathematics in my class. Why?" In Furinghetti F., Kaijser S., Tzanakis C. (Eds.) (pp. 368-382) *Proceedings HPM2004 etESU4 (revised edition)*. Uppsala : Uppsala Universitet.

Siu M.-K., Tzanakis C. (2004) History of Mathematics in Classroom Teaching - Appetizer? Main Course? Or Dessert? *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education* 3(1), 5-10.

Tang K.-C. (2007) History of mathematics for the young educated minds: A Hong Kong reflection. In Furinghetti F., Kaijser S., Tzanakis C. (Eds.) (pp. 630-638) *Proceedings HPM2004 et ESU4 (revised edition)*. Uppsala : Uppsala Universitet.

Toeplitz O. (1927) Das Problem der Universitätsvorlesungen über Infinitesimalrechnung und ihrer Abgrenzung gegenüber der Infinitesimalrechnung an den höheren Schulen. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 36, 88-100.

Toeplitz O. (1963) *The calculus: A genetic approach*. Chicago : University of Chicago.

Tzanakis C. (2000) Presenting the relation between mathematics and physics on the basis of their history: A genetic approach. In Katz V. (Ed.) (Vol. 51, pp. 111-120) *Using history to teach mathematics—an international perspective, MAA notes*. Washington DC : The Mathematical Association of America.

L'EXPERIENCE MATHEMATIQUE

Maryvonne MENEZ *

Résumé – Le but de cet article est de fédérer les différentes pratiques et recherches qui font de l'enseignement des mathématiques un lieu où rigueur et passion vont de pair, où « faire le programme » va de pair avec un enrichissement de chacun. Pour cela , il me paraît nécessaire de croiser les travaux de la Commission inter-IREM (Institut de recherche de l'enseignement des mathématiques) « Épistémologie et histoire des mathématiques », de la Commission inter-IREM « Premier cycle » (élèves de 10-15 ans), des travaux de didactique des IREM, des réflexions philosophiques sur les apprentissages, comme des recherches en psychanalyse dans les départements de sciences de l'éducation.

Mots-clefs : histoire, épistémologie, philosophie, narration de recherche, débat scientifique

Abstract – The aim of this article is to combine the different practices and researches which made the teaching of mathematics a place where rigor and passion walk together, where « follow the program » walk together with the enrichment of every one. For that, it seems to me necessary to mutually refer to the works of the Commission inter-IREM (Institute of research for the teaching of mathematics) « Epistemology and history of mathematics », the Commission inter-IREM « First cycle » (pupils 10-15years old), the works of didactic in the irem, the philosophic ideas on learning, as well as psychoanalytic research conducted in the departments of sciences of education.

Keywords: history, epistemology,philosophy, research tale, scientific debate

> On devient stupide dès qu'on cesse d'être passionné. (Helvetius 1758, p. 315)
>
> L'homme naît ignorant mais il ne naît point sot, et ce n'est pas sans peine qu'il le devient. Pour être tel et parvenir à éteindre en soi jusqu'aux lumières naturelles il faut de l'art et de la méthode ; il faut que l'instruction ait entassé en nous erreur sur erreur. (Helvetius 1773, p. 6)

Le titre « l'expérience mathématique » fait référence à Jean Cavaillès qui s'est longuement interrogé sur le sens que peut prendre cette expression et qui pour cela s'est réclamé « du patronage de Spinoza » dans une lettre à son père du 24 juillet 1938 (Ferrières 1950 p. 126) ; il entend par expérience « un système de gestes, gouverné par une règle et soumis à des conditions indépendantes de ces gestes » (Cavaillès 1994, p. 601). Sa phrase « comprendre une théorie, c'est en attraper le geste et pouvoir continuer » (Cavaillès 1981, p. 178) fut souvent reprise dans son contexte et en dehors de lui et c'est bien de ce « attraper » et de ce « continuer » que se réclame Gilles Châtelet en approfondissant la notion de geste :

> ce concept de geste est crucial pour approcher le mouvement d'abstraction amplifiante des mathématiques… ce geste réveille en nous d'autres gestes… il décide, libère et propose une autre modalité du « se mouvoir »…on se pénètre du geste avant de le savoir. (Châtelet 1993, p .27)

Le geste concerne le corps, l'être en son entier, le sensible et l'intelligible, et est donc indissolublement lié au désir, désir de comprendre, désir d'apprendre, désir de grandir.

S'il n'y a pas eu gestes de numérisation, par exemple, l'individu calcule comme un automate, ou est dyscalculique ; si cette phase a lieu, il reste une mémoire du corps et une mémoire procédurale des habiletés motrices. Et ces gestes, nés dans l'apprendre, ayant leur origine dans la personne lui permettent d'inventer d'autres gestes de calcul.

Dans un livre récent, Julie Roux, pseudonyme des auteurs, reprend cette idée « on ne transmet pas des savoirs mais des gestes qui peuvent ou non être prolongés», et elle ajoute « il n'y a pas de différence de nature entre une équation de thermodynamique et un problème de l'école primaire » (Roux 2007, p .43). Même si l'on peut discuter la formulation (tout dépend de la manière dont se posent les problèmes), cette similitude de nature s'inscrit bien dans le

* IREM de Lorraine – France – philodonon@wanadoo.fr

© Menez M. (2012) L'expérience mathématique. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT4, pp. 632–640). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

postulat de l'importance d'une entrée en mathématiques réfléchie dés l'école primaire et de la nécessité d'une dynastie de gestes agis à la première personne.

Vivre et faire vivre l'expérience mathématique à l'école comme au collège et au lycée nécessite que nous nous interrogions sur le sens de la connaissance et sur les différents genres de connaissance, ce que nous faisons dans la commission inter-irem histoire et épistémologie en ne cessant pas de nous poser les questions du pourquoi et du comment enseigner, apprendre les mathématiques. Devenue enseignante-chercheuse-formatrice, mes deux maîtres-mots sont passion et rigueur et ces deux questions du pourquoi et du comment ont fait évoluer ma praxis, dans le sens d'une pratique toujours en dialogue avec la théorie. Cela nécessite une remise en question permanente du rapport au savoir, du rôle de l'enseignant car il est facile de retomber dans des habitudes mortifères.

I. PHILOSOPHIE D'UN APPRENTISSAGE

1. *Définition de l'apprendre*

Ce geste de l'apprendre qui parcourt, lui aussi, les réflexions sur l'enseignement et, dont les textes d'Heidegger et Châtelet ne sont que des occurrences, est prolongé par celui dit de « de l'école moderne » :

> L'inversion la plus troublante est celle de la posture du maître, qui renonce à s'imposer et à déverser pour échanger. […] il faut accepter d'apprendre de l'enfant. (Agnès 2005)

Ce geste réactive celui d'éducateurs, de penseurs comme Jean-Jacques Rousseau, Anton Semionovitch Makarenko, Francisco Ferrer. La philosophie sous-jacente à cette pédagogie nouvelle inclut le principe suivant :

> Si je veux réussir à accompagner un être vers un but précis, je dois le chercher là où il est, et, commencer là, justement là. Celui qui ne sait faire cela, se trompe lui-même quand il pense pouvoir aider les autres. (Kierkegaard cité dans Agnès 2005)

Tout repose alors sur la confiance, confiance dans les potentialités des enfants à prendre en charge la joie et la complexité de notre monde à venir ;

> la transmission ne se réduit pas à l'objet qui passe, mais se joue **dans ce qui se passe ;** à l'opposé d'un savoir académique, ce qui se transmet n'est pas de l'ordre des seules connaissances. Ce qui dure, c'est ce savoir particulier qui passe par les aléas eux-mêmes, qui « se produit » selon les termes de l'événement, toujours inédit. La transmission s'opère là à notre insu : c'est le risque de la coexpérience. (Agnès 2005)

2. *Egalité des intelligences*

Cette philosophie de l'apprendre repose sur deux postulats que l'on peut attribuer respectivement à Aristote et à Jacques Rancière. Le premier consiste en la croyance au sens de poser comme axiome, comme première pierre, en l'aptitude à la pensée de chaque être humain. « Tous les hommes désirent naturellement savoir » (Aristote 1962), l'importance du désir est d'ailleurs renforcé par le même Aristote « notre fonction désirante est notre premier moteur » (Aristote, 1993) ; on peut retrouver une idée proche dans l'énoncé de Platon « chacun possède la puissance du savoir, ainsi que l'organe au moyen duquel chacun acquiert l'instruction ». (Platon 1950, p. 1107)

Le deuxième, celui de l'égalité des intelligences, fut pour nombre de personnes une découverte à la sortie du livre de Jacques Rancière, *Le maître ignorant* (2004). Une petite anecdote : une élève de sixième était cataloguée par l'équipe pédagogique de « limitée » ; lors d'une narration de recherche (voir plus loin) sur la somme des n premiers nombres entiers, elle a inventé le procédé de sommation du petit Gauss, ce qui a permis de changer le regard des membres de l'équipe.

Toutes ces réflexions ont orienté mon regard sur les élèves et m'ont donné la force et la possibilité de convaincre les élèves de leurs capacités alors qu'ils affirmaient d'emblée « nous, on est pas des intellectuels ».

3. Ancrage social de la connaissance

D'un tout autre point de vue, nous devons considérer que l'enseignement n'est pas un secteur séparé de l'activité sociale et s'inscrit dans la recherche toujours à inventer et à réinventer

> d'une articulation éthico-politique entre les trois registres écologiques, celui de l'environnement, celui des rapports sociaux et celui de la subjectivité humaine. (Guattari 1989, p .12)

Ce point de vue se situe dans la vision plus large d'une éducation permanente où adultes, adolescents, enfants et quiconque a des connaissances et une expérience à faire partager se rencontrent multipliant les zones de savoir et les points de coordination entre apprentissage social, familial et scolaire. Nous avons tous des aptitudes à transmettre car, tous, nous sommes en proie à cette passion universelle et si souvent corrompue en inquisition : la curiosité. Car zapping et passivité sont souvent les fruits amers du caractère dirigiste de l'enseignement. Il y manque le temps nécessaire aux méthodes, aux outils pour s'initier, pour s'orienter vers une question, un problème, pour se mettre tel les chercheuses, chercheurs en situation d'hésiter, de commettre des erreurs, de résoudre des problèmes annexes au problème initial, de se poser, et de répondre à des questions qui ne semblent pas directement liées à la question de départ. La co-formation horizontale et verticale sous forme de discussions fréquentes peut seule construire esprit critique et inventif, et confiance en soi tout en étant toujours ouverte au doute. Tout ceci nécessite des projets de longue durée, autant que des mises au point ponctuelles et fortes. L'enseignant comme garde-fou conseiller, éveilleur. Ceci est valable pour tout apprentissage qu'il soit du nombre ou ce qu'on appelle manuel (métier du bois, de la forge, de la pierre…).

Ce qui nous conduit à un autre postulat de Julie Roux : « des gestes qui ne peuvent pas être détachés sans perte des contextes d'existence dans lesquels ils sont inscrits » (Roux 2007) ; c'est une référence explicite à Ludwig Fleck qui écrit en 1935 « l'acte cognitif est l'activité humaine la plus conditionnée qui soit par le social et la connaissance est tout simplement une création sociale ». Il ne fait que rejoindre tout ce courant de pensée qui montre et analyse la non-linéarité de l'histoire des sciences, sa non-continuité, sa pluridirectionalité, sa complexité et qui replace le travail scientifique dans une dimension collective. Il ne s'agit pas d'identifier des objets dans une nature immuable ; l'objectivité de la connaissance ne vient pas d'une propriété substantielle une fois pour toute acquise ; elle se projette au-devant d'elle-même au cours du mouvement incessant que constitue la vie des concepts. Ce dont Fleck parle à propos du concept de syphilis s'applique aussi bien au concept de nombre. Chaque étape laisse des traces et c'est collectivement dans une même époque et dans une reprise des traces historiques que le savoir se construit. La conclusion est l'apport indispensable de la pluridisciplinarité. Ce travail de contextualisation est entrepris depuis 1982 dans les IREM.

II. COMMENT ENSEIGNER LES MATHEMATIQUES

Pour répondre à cette philosophie, deux outils didactiques, narration de recherche et débat scientifique, ainsi qu'un concept toujours en évolution la pluridisciplinarité ont révolutionné mon enseignement.

1. La narration de recherche

Une narration est l'occasion d'une véritable expérience mathématique : d'abord une entrée dans la langue mathématique. Une question est posée. La consigne est donnée dans une des formulations des IREM : vous allez chercher en écrivant au brouillon tout ce que vous faites, vos idées, les idées du groupe. Vous pouvez discuter entre vous, vous disputer, utiliser les idées des autres, essayer des méthodes qui finalement ne marchent pas, utiliser la calculatrice : tout est permis. Ce qui est important, c'est d'**écrire tout ce** qui se passe dans le groupe et dans votre tête. Les brouillons et l'énoncé du problème seront relevés.

- racontez avec précision tous vos essais, même s'ils n'ont pas donné de solution ;
- écrivez toutes les questions que vous vous posez, avec ou sans réponse ;
- signalez quand vous changez de piste (par exemple, par un changement de couleur du stylo) ;
- reproduisez les dessins que vous avez fait au brouillon ;
- et, bien sûr, faîtes un effort pour être compris par celui qui lit.

Une question : **Construire un carré d'aire double de celle d'un carré donné**.

J'ai posé ce sujet chaque année de la sixième à la terminale et continue à le poser en formation continue ; il correspond à la qualité demandée de mettre tous les apprenants en réelle activité mathématique même si cette entrée se fait par des détours : « c'est un carré plein de vent » ! répond Paulo en première réponse dans uns classe non francophone. Cette réponse a suggéré tout une réflexion sur les homonymies et a permis de travailler sur le mot « aire ». Il n'est pas arrivé une seule fois que des apprenants laissés en libre recherche, ne se soient emparés de ce problème pour en faire des questions et des réponses, n'aient pas produit des écrits et dessins intéressants et n'aient ainsi acquis une expérience du mathématique. On rencontre, comme dans l'histoire des mathématiques depuis l'antiquité, deux grands types de recherche : numérique et géométrique. Dans toutes les classes de collège et souvent au-delà, l'hypothèse de proportionnalité entre le côté du carré et son aire est proposée dans un premier temps pour être invalidée ensuite (Ménez 2000). Du côté géométrique, des réponses « exactes » et des réponses approchées sont proposées par les élèves découpages, puzzles, collages… Du côté numérique découpage et propositions en nombres fractionnaires, calculs, propositions décimales et inventions de nouveaux nombres. Leurs productions correspondent souvent à des textes historiques dont on peut leur proposer l'étude comme le dialogue du *Ménon* de Platon, des extraits de la *Géométrie* d'Arnaud (17^e^ siècle), des extraits des *Eléments* de Clairaut (18^e^ siècle) des extraits des *Sulbasutras* (environ 3^e^ siècle av. J.-C.) des extraits d'Euler (18^e^ siècle), de Stevin (16^e^ siècle). Car chercher un carré d'aire double d'un carré donné autrement dit le fameux problème de la duplication du carré se retrouve dans toutes les mathématiques antiques qu'elles soient occidentales, indiennes, chinoises aussi bien que dans l'histoire des mathématiques jusqu'à nos jours. On peut y voir quelque chose d'une structure sous-jacente sans acquiescer à la théorie platonicienne de la réminiscence. La découverte de l'irrationalité de la diagonale du carré par rapport à son côté, c'est à dire l'impossibilité de trouver un rapport d'entiers égal au rapport entre ces deux grandeurs a été une révolution cognitive chez les grecs ; elle suscite toujours l'étonnement d'élèves contemporains. Que de lignes d'erre dans les domaines numérique et géométrique et dans les allers et venues entre les deux ! Ce geste de la duplication du carré que l'on peut appeler quadrature de deux carrés identiques est le premier de la lignée des quadratures celle du rectangle, celle de deux carrés différents (« notre » fameux théorème de Pythagore). Ce problème a des suites « culturelles » et mathématiques. Qu'est-ce qui fait que cet antique problème suscite de nos jours un intérêt que je peux qualifier d'universel et qui ouvre aux autres gestes de quadratures ? Question ouverte mais l'intérêt pour ledit problème est indéniable. Une autre narration de recherche apparemment anodine « construire le plus petit carré contenant un cercle donné » va induire d'autres quadratures et des rectifications et déboucher sur les deux visages de la tangente à une courbe : tangente de direction donnée, tangente passant par un point de la courbe (Guitart 2000, p. 98). Nombre de narrations de recherche sont racontées dans les brochures IREM. Toute question peut faire l'objet d'une narration de recherche.

2. Le débat scientifique

Le débat scientifique lancé par Marc Legrand est maintenant fort courant mais reste quand même sous-utilisé :

> Le **mariage permanent entre théorie et pratique c'est ce que le chercheur passe son temps à faire dans son labo, c'est ce qu'il a vocation à transmettre par voie d'enseignement… Cela suppose bien entendu une véritable révolution dans notre conception de l'enseignement :** au lieu de continuer à gaver nos élèves/étudiants de résultats dont ils ne font rien par la suite tant qu'ils n'en ont pas compris la philosophie, nous « construisons » avec eux ces théories en engageant dans tous nos enseignements (cours, TP, TD) **de véritables débats dans lesquels nos interlocuteurs assument une réelle responsabilité scientifique :** « je pense que… je soutiens que… je ne suis pas d'accord avec cette idée, ce calcul, cette méthode, et voici mes raisons… » Au cours du débat chacun doit donc défendre ses idées avec ténacité tant qu'elles lui semblent plus raisonnables que les explications concurrentes ou contradictoires, et (contrairement au débat polémique) les abandonner, en disant pour quelles raisons, quand il a été persuadé du contraire. (IREM de Grenoble 2006)

Des remarques d'étudiants explicitent le renouvellement de leur intérêt pour les mathématiques produit par leurs réflexions engendrées par le débat mathématique :

> J'arrive à m'étonner moi-même ! Cette nouvelle façon de voir les mathématiques m'a tout simplement émerveillé. (Ibid.)

Ces idées nées dans l'université où elles paraissent le plus convaincantes sont tout aussi importantes à l'école, au collège et au lycée.

Un petit exemple en classe de sixième : a-t-on 2/5 = 1/3 + 1/2 ? Il est arrivé qu'un élève de sixième arrive un temps à convaincre tout le groupe de la véracité de cette égalité : avec une représentation géométrique, cela consistait à dire 2/5 de 5 = 1/3 de 3 + ½ de 2. La notion de fraction avec ses deux visages opérateur et nombre peut vraiment prendre corps pour les élèves dans ce genre de débat.

3. Pluridisciplinarité

Quand à mon arrivée à Paris en 1983, une élève de sixième posa la question « d'où vient pi ? », je n'avais pas la moindre idée de l'origine de ce nombre. C'est cette année-là que j'ai rencontré les IREM ; à l'instigation d'un enseignant-chercheur de l'université d'une rare générosité, Jean-Luc Verley, un groupe se forma pour travailler à la lecture de textes historiques de mathématiques entre adultes comme avec les élèves. C'est ainsi qu'un va-et-vient de recherches se fit entre l'IREM de Paris 7 et le collège-lycée Paul Bert. Le travail sur « pi » nous occupa, les élèves de la classe et moi, non seulement toute l'année mais encore l'année suivante (je demandais à garder la classe, ce qui fut accepté sans difficulté), et nous réalisâmes, entre autres, une bande dessinée sur Archimède en pluridisciplinarité. Je n'ai cessé d'ouvrir la dimension historique des mathématiques et de pratiquer la pluridisciplinarité aussi bien avec les élèves de collèges et de lycées qu'avec les adultes en formation continue et initiale. Chaque année, en collège, il m'a suffi de suivre le programme d'histoire de la classe et de mettre en relation les deux programmes d'histoire et de mathématiques en lien avec le maximum d'autres disciplines dont chaque année les arts plastiques.

En classe de sixième, les mathématiques grecques, babyloniennes, égyptiennes avec les outils spécifiques ; la vidéo de 18 minutes de l'IREM de Toulouse *Les comptes de Bastet,* le livre de Nicolas Rouche *Pourquoi ont-ils inventé les fractions ?*(1998)

En cinquième, l'histoire des mathématiques arabes avec les années fastes une conférence d'Ahmed Djebbar et sinon ses publications, l'invention de la perspective avec les écrits et dessins de Piero della Francesca, de Léonard de Vinci, d'Alberti, de Luca Pacioli…

En quatrième, l'étude du dix-septième siècle est l'occasion de nombreux projets pluridisciplinaires qui peuvent concerner toutes les disciplines. Un projet sur les préoccupations du public éclairé dans ce siècle avec des lectures de Descartes, de Pascal, de Leibniz et les recherches sur le théâtre, la musique, les sociétés savantes.

A partir de cette base, même si les programmes d'histoire favorisent moins ces projets en lycée, les questionnements des élèves sur le nombre, sur le calcul infinitésimal, sur les transformations, sur les dimensions ont toujours pu déboucher sur un travail pluridisciplinaire. Des projets comme « Galilée », « Evariste Galois », « Jean Cavaillès », « Limites, frontières », « Le nombre », la mesure du cercle, le baroque… pour en citer quelques-uns suscitent bien la curiosité de chacun. Les aventures du « un » (je recommande entre autres le film qui peut passionner petits et grands dès l'âge de 7 ans au moins : l'extraordinaire histoire du chiffre un http://www.france5.fr/.../histoire/519-l-extraordinaire-aventure-du-chiffre1), et du « zéro » (Châtelet 1993, pp. 115-153) sont bien à même de passionner tout élève. Le zéro de l'ouverture du plan qui se produisit au début du 19e siècle dans cette aventure passionnante que fut la représentation géométrique conjointe des nombres négatifs et des nombres « imaginaires ».

La liste de ces projets est infinie. Le projet « infini » suscite toujours autant de passion. Les publications de la Commission inter-IREM « Épistémologie et histoire des mathématiques » en sont une pépinière.

III. POURQUOI ENSEIGNER LES MATHEMATIQUES

L'utilité des mathématiques a fait l'objet de nombreuses conférences. Je ne parlerai ici que des raisons philosophiques. L'hypothèse sous-jacente peut se dire : il y a un lien entre ontologie et praxis. Toutes ces réflexions ont un point de fuite à savoir les deux questions ontologiques indissolublement liées : qu'est-ce qu'une chose ? qu'est-ce que l'homme ? dont l'antériorité est aussi non décidable que le toujours actuel dilemme de l'œuf et la poule. Homme et chose se construisent dans des incessants renvois symboliques.

J'émets l'hypothèse que c'est de socle ontologique (socle étant impropre puisque toujours mouvant) donc on pourrait dire de ces sables mouvants de l'ontologie que s'origine, que se fonde notre praxis « une action concertée par l'homme, quelle qu'elle soit, qui le met en mesure de traiter le réel par le symbolique » (Lacan 2001, p .57) c'est-à-dire schématiquement trouver une formulation langagière à « qui nous arrive ». Tout en n'étant pas du tout platonicienne c'est à dire ne croyant pas à un monde des idées, j'ai acquis petit à petit la croyance de Platon en l'intérêt propédeutique des mathématiques et ai ainsi changé mon regard sur celles-ci. Le lien indécidable entre les questions Qui suis-je ? Qu'est-ce qu'une chose ? Qu'est-ce que le temps ? Se renforce à chaque tentative de répondre à la question « qu'est-ce que… ».

Prenons par exemple la question « qu'est-ce qu'un cercle ? » ; elle suscite toujours, selon mon expérience, des réponses variées. Une fois que les échanges ont été travaillées dans le groupe d'apprenants ou d'amis, je propose la lecture d'un extrait de la lettre VII de Platon (Ménez 2010) qui structure cinq différents cercles de la connaissance de cet objet « cercle », réflexion philosophique qui nous entraîne vers la connaissance « vraie », vers la connaissance du troisième genre de Spinoza, celle qui a réuni corps et pensée dans une entité unique. Nous pourrons suivre ces cinq cercles proposés par Platon en lisant Euclide, Archimède…, en passant par la définition génétique de Spinoza… en lisant des extraits de Deleuze, et plus contemporainement de Guitart ; ces deux derniers sont des compagnons qui nous mettent en garde contre l'image des mathématiques communément répandue comme d'une science exacte dont le principal fonctionnement est le raisonnement axiomatico-déductif aux dépens de toute la composante heuristique de cette même mathématique.

> le paradoxal et l'ambiguïté sont au cœur des mathématiques, tant dans son agir quotidien non écrit que dans son souci théorique, contrairement à l'idée que le grand public en a. (Guitart 2000, p. 68)

Une autre question est très souvent débattue : Qu'est-ce qu'un nombre ? Dans les *Confessions*, Saint-Augustin (1964) opère une distinction fondamentale dans les nombres qu'il verbalise « nombre nombré » et « nombre nombrant ». C'est ce geste que réactive Stella Baruk (2003) avec les catégories qu'elle propose : « nombre de » et « nombre ». La proposition de Saint-Augustin a été peu opérante, celle de Stella est fondatrice d'une réflexion pédagogique pour tout instituteur et enseignant de mathématiques ; elle a ses répercussions dans le langage ; la multiplication de « nombre de » n'est pas commutative, celle des « nombres » l'est ; 5 fois 7 n'est pas la même chose, n'est pas la même opération concrète que 7 fois 5, par contre la commutativité de la multiplication et son égalité $5 \times 7 = 7 \times 5$ est un énoncé fondamental. Et ceci, qui peut paraître un coupage de cheveux en quatre pour un non-mathématicien est une distinction nécessaire si l'on veut accompagner des enfants vers la pensée mathématique. Le radicalement nouveau auquel ce geste ouvre ne se fait voir, comme presque toujours, que dans l'énergie joyeuse qui s'empare de la personne qui l'agit que ce soit un enfant ou un adulte. La non-distinction de ces catégories de nombres que l'on peut aussi qualifier de concret et d'abstrait est bien une des nombreuses occurrences de l'abêtissement généralisé qu'induit pour la plupart l'enseignement des mathématiques à l'école. La faiblesse de pensée est en effet la chose du monde la mieux partagée.

Comme il est facile de tuer dans l'œuf une joie naissante chez un jeune être jusqu'à ce qu'il devienne le propre assassin de ses enthousiasmes!

Cette distinction est une entrée dans l'expérience mathématique ou dans le langage mathématique , langage conçu comme un « faire », un « dire », une réflexion sur le « faire » et le « dire ». Le langage n'est pas une forme de communication, mais une manière de construire quelque chose. Pour le « dire » dans ce langage, on utilise la langue, fait social qui s'impose au locuteur ; la langue se laisse utiliser. Nous avons à produire notre parole, à revenir sans cesse sur les mots pour les armer et les désarmer.

Prenons un exemple simple mais toujours aussi percutant pour un profane : à quoi vous fait penser ce fait de langue « trois au carré » ? Une fois la mise en confiance établie, une fois dépassée la peur engendrée par des années de refus des mathématiques en général, commencer à habiter ces trois mots est une entrée dans le langage mathématique ; produire une écriture symbolique, un calcul numérique ne se suit pas d'emblée par un dessin géométrique. Que ce « trois au carré » soit à la fois $3 \times 3 = 9$ et l'aire d'un carré de côté trois et que « faire » des mathématiques c'est apprendre à jongler avec ces deux visages est une révélation pour beaucoup. L'importance du changement de cadres est une des réflexions didactiques incontournable.

A ce propos la lecture de l'extrait de Stendhal de la *Vie de Henry Brulard* sur la difficulté de faire d'un énoncé « moins par moins donne plus », un véritable énoncé mathématique rejoint l'exemple particulièrement éclairant proposé par René Guitart dans son livre, qui nous donne plein de pistes pour cette habitation du langage mathématique tel que défini plus haut :

> Or le mathématicien au travail, l'amour au sens hégélien du terme, il le fait à tout bout de champ. Je crois que c'est Poincaré qui écrivait à peu près ceci : on ne peut pas faire de mathématiques sans tantôt désigner d'une même lettre des objets distincts, et tantôt désigner de plusieurs lettres un même objet. Pensez à la difficulté majeure qu'il y a pour accéder à l'algèbre : comment est-il possible de penser que x est finalement 2, puisque dès le début x est x, 2 est 2, et ce sont deux choses distinctes ? Je me souviens de l'extraordinaire mystère de cette énigme pour moi lorsque vers mes onze ans on commença à m'enseigner l'algèbre. Je fus deux ou trois semaines dans cette énorme chose et n'en pouvait sortir. Mon professeur ne m'en sortait pas, qui me disait de continuer, de voir qu'en jouant (!) avec, ça marchait. Ne faîtes pas ça avec vos élèves, répondez à leur question. Un mathématicien peut bien dire cela (« joues avec, tu verras ») à un autre mathématicien et encore ; du moins cet autre a-t-il le sens du « jeu » en général.
>
> De fait, je m'en sortis, à l'automne 1959, que parce que j'allai, en dernier recours, demander de l'aide à mon ancien instituteur Jean Batguzère qui immédiatement m'expliqua qu'une chose peut avoir plusieurs noms, que 2 et x sont deux noms d'une même chose, ou mieux que x est le nom d'une place dans le calcul où je finirai par déposer l'objet 2 pour que l'équilibre tienne, et que les différents « est » dans mon énigme étaient à entendre en des sens différents (est absolument identique à, vaut pour, désigne, etc.). Il faut initier à l'enjeu du jeu, pointer l'insu autour de quoi il pivote. (Guitart 2000, p. 46)

D'une manière très elliptique sur ces quelques exemples, le cercle, le carré, le négatif et l'entrée dans l'algèbre, je n'ai fait que suggérer, en réponse aux trois questions du GT4, que les concepts travaillés dans leurs dimensions historique et culturelle permettent à l'élève comme au futur enseignant de s'inscrire dans histoire des mathématiques et dans histoire des idées et ainsi de relier leurs propres interrogations à celles de leurs prédécesseurs. L'intérêt et le plaisir de penser et de lire suscités dans ces démarches sont le garant de la fonction de cette dimension culturelle qui est de tisser des liens dans lequel les constructions disciplinaires se solidifient les unes les autres non pas comme un entour folklorique mais comme ce qui articule les connaissances entre elles et construisent le sujet lui-même.

IV. CONCLUSION

Ce colloque me paraît une occasion très importante pour échanger nos pratiques et nos réflexions et j'attends beaucoup de ces rencontres. Lors de EMF 2000, nous avions envisagé une banque de textes, de films ; j'espère que nous pourrons concrétiser ces échanges aussi bien pour nos pratiques dans nos classes que pour la formation initiale et continue de professeurs d'école comme des professeurs de collèges, de lycées, d'universités.

Nous avons avec toutes les pratiques existantes (me revient le théâtre et l'algèbre, outil de Michèle Muniglia de l'IREM de Lorraine, facilement adopté par les élèves de quatrième qui deviennent eux-mêmes metteurs en scène de l'activité) et toutes les recherches universitaires et autres (Marie Millis, Jacques Levine, André de Peretti, Mireille Cifali,…)

Toute cette richesse est occultée par les différentes peurs qui envahissent les sociétés humaines, dont celle de l'inspecteur et du programme. Or le programme s'il doit rester un référent ne doit pas contrecarrer l'évolution des recherches des élèves.

Croiser les recherches qu'elles soient philosophiques, épistémologiques, historiques, didactiques me paraît essentiel pour transmettre, pour faire d'une classe, d'un atelier de formation une communauté de recherche. Les travaux des IREM nous permettent cet enrichissement mutuel.

REFERENCES

Agnès J. (2005) Transmission et pédagogie. *Cahiers pédagogiques* 395. http://www.cahiers-pedagogiques.com/spip.php?article983

Aristote (1962) *Métaphysique.* Paris : Vrin.

Aristote (1993) *De l'âme.* Paris : Flammarion.

Baruk S. (2003) *Comptes pour petits et grands.* Paris : Magnard.

Cavailles J. (1981) *Méthode axiomatique et formalisme.* Paris : Hermann.

Cavailles J. (1994) *Œuvres complètes de philosophie des sciences*. Paris : Hermann.

Châtelet G. (1993) *Les enjeux du mobile.* Paris : Seuil.

Ferrières (1950) *Jean Cavaillès philosophe et combattant.* Paris : PUF.

Guattari F. (1989) *Les trois écologies.* Paris : Galilée.

Guitart R. (2000) *Evidence et étrangeté.* Paris : PUF.

Heidegger M. (2006) *Qu'est-ce qu'une chose ?* Paris : Gallimard.

Helvetius C. A. (1758) *De l'esprit.* Paris : Durand

Helvetius C. A. (1773) *De l'homme.* http://wikisource.org:wiki/Réfutation d'Helvétius. Texte_entier IREM de Grenoble (2006), http://www-irem.ujfgrenoble.)fr/new2006/Debat_scientifique/De_vraies_raisons.pdf

Lacan J. (2001) *Les 4 concepts de la psychanalyse.* Paris : Seuil.

Ménez M. (2006) L'invention d'un zéro. http://www.apmep.asso.fr/L-invention-d-un-zero,3596

Ménez M. (2000) Un enseignement de la proportionnalité de la 6ème à la terminale. http://www-leibniz.image.fr/EMF2000/Actes/Ateliers/HALLEZ.pdf

Ménez M. (2010) La question du mathématique. In *Circulation transmission héritage. Actes du 18e colloque inter-IREM d'épistémologie et d'histoire des mathématiques* (pp. 545-554). Caen : Université de Caen-Basse Normandie.

Platon (1950) *La République.* Paris : La Pléiade.

Rancière J. (2004) *Le maître ignorant.* Paris : 10/18.

Rouche N. (1998) *Pourquoi ont-ils inventé les fractions ?* Paris : Ellipses.

Roux J. (2007) *Inévitablement (après l'école)*. Paris : La fabrique.

Saint-Augustin (1964) *Confessions*. Paris : Garnier-Flammarion.

PENSER LES MATHÉMATIQUES À TRAVERS LEUR ÉPISTEMOLOGIE ET LEUR HISTOIRE : UN ENJEU DE/DANS LA FORMATION DES MAÎTRES

Marc MOYON*

Résumé – Notre contribution est centrée sur l'introduction de l'épistémologie et d'une perspective historique dans les formations initiale et continue des enseignants. Nous nous intéressons essentiellement à la genèse et au développement des mathématiques dans une culture donnée à une époque donnée ainsi qu'à l'élaboration du savoir mathématique tel que nous l'enseignons aujourd'hui. Nous montrons d'abord, à partir de notre expérience personnelle, comment l'enseignement des mathématiques peut intégrer à la fois sa propre histoire et celle de la discipline. Ensuite, en considérant les mathématiques comme activité humaine, notre enjeu est de reconnaître certaines des dimensions sociales et citoyennes de cette discipline.

Mots-clefs : Formation des maîtres, épistémologie, enseignement des mathématiques, savoir, culture

Abstract – Our paper deals with the introduction of epistemology and historical perspective in teacher training (both initial and in-service). We mainly focus on the genesis and development of mathematics in a given culture at a given time and on the elaboration of mathematical knowledge that we teach nowadays. First of all, we show, from our personal experience, how mathematics teaching can take into account both its own history and that of discipline. Then, by considering mathematics as human activity, our challenge is to recognize some of the social and civic features of this discipline.

Keywords: Teacher Training, Epistemology, Mathematics Education, knowledge, culture

> Ce que nous nous proposerons ici sera de mettre en évidence tout ce que l'enseignement scientifique perd à être uniquement dogmatique, à négliger le point de vue historique.
>
> En premier lieu il perd de l'intérêt. L'enseignement dogmatique est froid, statique, et aboutit à cette impression absolument fausse que la Science est une chose morte et définitive. […]
>
> Or pour contribuer à la culture générale et tirer de l'enseignement des sciences tout ce qu'il peut donner pour la formation de l'esprit, rien ne saurait remplacer l'histoire des efforts passés, rendue vivante par le contact avec la vie des grands savants et la lente évolution des idées. (Langevin 1933, p. 6)

Ainsi s'exprime Paul Langevin, professeur au Collège de France, lors de sa conférence à propos de l'enseignement scientifique intitulée « la valeur éducative de l'histoire des sciences » donnée au Musée Pédagogique en 1926. Même si le terme « dogmatique » doit être lu à travers le prisme de la désormais fameuse alternative héritée d'Auguste Comte (1930, pp. 77-83) : « dogmatique » *versus* « historique » (Bensaude-Vincent 2005, pp. 313-319), ces propos renvoient à des réflexions actuelles sur l'enseignement des sciences (tant expérimentales que mathématiques). Langevin est loin d'être pionnier. Tout au long du XIX^e^ siècle, plusieurs intellectuels et autres hommes politiques ont l'occasion de montrer leur intérêt pour l'histoire des sciences. Ainsi, par exemple, en 1852, le ministre de l'Instruction Publique, Fortoul, introduit de l'histoire des sciences dans l'enseignement secondaire (Fauque 1989 ; Hulin 1984, pp. 17-19 ; Hulin 1996). Cet enseignement a subi de nombreuses réformes et la question de l'introduction d'une perspective historique a toujours largement été débattue tantôt pour la défendre tantôt pour la dénoncer.

Un autre problème se révèle alors de manière corrélative dès la seconde moitié du XIX^e^ siècle : celui de la formation des enseignants en histoire des sciences. En 1869, le Ministre de l'Instruction Publique Duruy réussit à instaurer une épreuve d'admissibilité à l'agrégation sur

* FRED (francophonies, éducation, diversités), IUFM du Limousin & IREM de Limoges, Université de Limoges – France – marcmoyon@gmail.com.

© Moyon M. (2012) Penser les mathématiques à travers leur épistémologie et leur histoire : un enjeu de/dans la formation des maîtres. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21^e^ siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT4, pp. 641–652). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

« une question de méthode et d'histoire des sciences » (Hulin 2001). Cette épreuve sera oubliée en 1873. La nécessité d'une formation en histoire des sciences dans le *curriculum* des futurs enseignants de sciences reste alors posée tout au long du XX^e siècle de manière marginale dans plusieurs recommandations personnelles de scientifiques de renom comme peut en témoigner, à nouveau, Langevin :

> Si [la] nécessité [d'introduire le point de vue historique dans l'enseignement des sciences] est évidente pour ceux qui feront la Science, elle est non moins grande pour les éducateurs, les initiateurs et plus grande encore pour le plus grand nombre, pour ceux qui devront se contenter de la culture acquise dans les années d'école. (Langevin 1933, p. 7)

Les instructions et autres documents officiels, quant à eux, ne font apparaître que très rarement cette formation comme impérative (Hulin 1984, pp. 21-22 ; Hulin 2001, pp. 403-405). La nécessité que rappelle Langevin est le cœur même de la présente contribution qui se limite d'une part aux mathématiques et à leur enseignement et d'autre part à la formation mathématique des enseignants. Je dois aussi d'ores et déjà préciser que cette contribution se place dans le cadre français de la réforme de la formation des maîtres lancée dès juillet 2008 par un communiqué de presse du conseil des ministres. Cette réforme prévoit le recrutement de tous les enseignants tant du premier degré (3-11 ans) que du second (11-18 ans) au niveau master. En conséquence, les programmes et les épreuves des concours sont profondément transformés. Ainsi, les masters spécifiques MEFE « Métiers de l'éducation, de la formation et de l'enseignement » sont alors mis en place dans les université françaises. Précisons que cette masterisation (généralement mise en œuvre à la rentrée 2010) voit s'exaucer un des vœux prononcés par la Section des Sciences du Congrès International des Sciences Historiques de Rome un siècle plus tôt (Lebon 1903, p. 590). L'épistémologie et l'histoire des disciplines – donc en particulier celles des mathématiques – doivent alors être intégrées aux programmes universitaires de tout étudiant préparant les concours de recrutement (CAPES, agrégation). Par exemple, dans le *Journal officiel* du 18 juillet 2010 définissant les compétences professionnelles à acquérir par les professeurs du système éducatif français (tant du premier que du second degré) pour l'exercice de leur métier, on peut lire au sein de la compétence « Maîtriser les disciplines et avoir une bonne culture générale » entre autres :

> Le professeur des lycées et collèges situe sa ou ses disciplines, à travers son histoire, ses enjeux épistémologiques, ses problèmes didactiques et les débats qui la traversent. (MEN 2010)

De nombreuses questions se posent alors. Parmi elles, quelle(s) formation(s) en histoire des mathématiques ? Et surtout pourquoi ? Je donne ici des éléments de réponses en montrant, à partir de mon expérience personnelle, comment la formation des maîtres peut prendre en compte les dimensions historiques des mathématiques et de leur enseignement. « Penser les mathématiques à travers leur épistémologie et leur histoire » doit autant être envisagé comme un moyen dans la formation des maîtres que comme un objectif de ladite formation. D'abord, je tenterai de montrer en quoi l'introduction d'une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques est utile à l'enseignant et aux élèves. Ensuite, plutôt que de ne considérer que les « Hommes des mathématiques » comme il est habituel de le faire dans l'enseignement secondaire, je défendrai l'idée des « mathématiques des hommes », œuvre collective lentement façonnée au cours des siècles. Cette conception, présente dans de nombreux travaux mathématiques et explicitement formulée à la Renaissance par Peletier du Mans (m. 1582), amène alors l'historien à concevoir l'histoire des pratiques et des savoirs mathématiques comme une aventure humaine et sociale dans le contexte plus général de l'histoire des civilisations (Ehrhardt 2010). C'est en partie à ce prix (relativement modique) que l'enseignement des mathématiques se verra attribuer une certaine légitimité sociale.

I. L'INTRODUCTION D'UNE PERSPECTIVE HISTORIQUE : UNE AIDE POUR L'ENSEIGNANT DE MATHEMATIQUES ET SON ELEVE

L'histoire des mathématiques est une discipline à part entière qui a progressivement su gagner en autonomie par rapport aux laboratoires de mathématiques qui ont vu naître certaines des premières études de ce genre avec les départements de philosophie ou d'histoire. Aujourd'hui de nombreuses universités françaises délivrent le grade de docteur en épistémologie et histoire des mathématiques. En dehors des universités parisiennes, il y a, entre autres, celles de Lille, Nantes, Lyon ou encore Bordeaux. Comme toutes les disciplines, elle a ses objets, ses méthodes et ses difficultés propres. Il ne s'agit pas ici de décrire ces différents éléments mais plutôt de comprendre en quoi la connaissance de l'épistémologie et de l'histoire des mathématiques peut être essentielle pour l'enseignement de cette discipline scientifique. Pendant très longtemps, un des arguments les plus utilisés pour justifier cette idée a reposé sur un prétendu parallélisme, véhiculé comme une idée-reçue dans les milieux enseignants, entre la formation mathématique personnelle et l'évolution historique de la discipline. Le biologiste et philosophe allemand Haeckel (m. 1919) est à l'origine de ce courant en exprimant sa « loi de récapitulation », c'est-à-dire que l'histoire du développement individuel serait la récapitulation de l'histoire de l'espèce sur une courte période (Haeckel 1866). Ce courant de pensée est plus ou moins repris par plusieurs auteurs de la fin du XIX^{e} et de la première moitié du XX^{e} siècle comme Klein, Langevin, Bachelard ou encore Piaget lorsqu'il rédige, en 1950, son *Introduction à l'épistémologie génétique* (Raichvarg 1987). Je ne reviendrai pas ici sur cette conception et ses prolongements dans les recherches tant épistémologiques que didactiques (Furinghetti et Radford 2002, 2008).

Je vais plutôt détailler ci-après deux enjeux de l'introduction d'une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques que ma propre expérience d'enseignant, d'animateur IREM et d'historien des mathématiques retient comme fondamentaux. Tous deux concourent à l'émergence de nouvelles représentations de la discipline enseignée (aussi bien chez les enseignants que chez les élèves). Alors même que toutes sortes d'innovations pédagogiques sont largement encouragées dans le système éducatif français et notamment dans les zones dites défavorisées, l'enseignement reste trop souvent exclusivement doctrinaire. En particulier, les mathématiques sont souvent érigées comme juxtaposition de définitions, de théorèmes et autres conventions plutôt que comme une activité humaine dynamique, enrichie de ses erreurs. L'introduction d'une perspective historique permet donc, d'abord, à l'enseignant de (re-)penser son enseignement

> dans la mesure où c'est la construction par celui qui enseigne de son propre rapport au savoir qu'il enseigne qui conditionne son enseignement. (Bkouche 1997)

Ensuite, elle représente une excellente occasion pour mettre en avant la cohérence des disciplines enseignées avec une évidente remise en cause de la frontière qui existe entre sciences et lettres. En effet, l'introduction d'une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques illustre l'interdisciplinarité offerte, entre autres, par la naissance d'un nouveau champ disciplinaire, par l'interaction éventuelle entre différentes branches mathématiques dans un contexte historique donné.

1. L'histoire des sciences pour (re-)penser son enseignement

Il est indispensable que

> les enseignants connaissent [les] représentations (celles des Anciens et celles des enfants), soient capables de faire émerger celles de leurs élèves et qu'ils en tiennent compte dans la construction de la connaissance nouvelle. (Djebbar, Gohau et Rosmorduc 2006, p. 21)

Sans cela, ils sont démunis face aux premières et très nombreuses difficultés de l'enseignement, celles intrinsèquement liées aux mathématiques et non pas celles relatives à la manière dont les mathématiques sont enseignées. C'est en particulier dans ce contexte que l'introduction d'une perspective historique permet de mettre en évidence les obstacles épistémologiques pour mieux surmonter les obstacles didactiques (Brousseau 1989). Elle apporte une plus-value aux mathématiques réfléchies et construites (et donc enseignées) dans ce contexte : celle d'une meilleure connaissance de la genèse, du développement et de l'enrichissement mutuel des concepts mathématiques. Elle favorise donc l'abandon d'un enseignement rigide des mathématiques, discipline que l'histoire décrit en constante évolution. En ce sens, j'écarte naturellement de l'idée d'introduction d'une perspective historique la volonté d'un enseignant de narrer la science à partir d'anecdotes de type historique. Même si celles-ci peuvent avoir leur place dans l'enseignement, elles nécessitent une relative prudence car, le plus souvent, elles travestissent la notion de progrès et d'évolution des pratiques scientifiques (Maitte 2008, p. 76). Les réflexions de types historiques et épistémologiques apparaissent donc essentielles (sans relever pour autant de l'absolue nécessité) dans la manière de penser et d'élaborer une progression pédagogique.

L'algèbre et ses relations avec l'arithmétique et le calcul littéral dans le paysage éducatif français est, dans ce cadre, un bon exemple. Seule la lecture et l'étude historique et épistémologique du *Mukhtaṣar fī-l-ḥisāb al-jabr wa-l-muqābala* [Abrégé sur le calcul par la restauration et la comparaison] d'al-Khwārizmī (Rashed 2007), considéré comme l'acte de naissance officiel de l'algèbre, m'a permis de penser différemment l'enseignement de l'algèbre dans les classes du collège malgré le nombre considérable de travaux didactiques sur le sujet. L'introduction de la lettre (comme inconnue ou comme paramètre) pour la résolution des équations ne doit pas être systématique comme dans de nombreux manuels mais très progressive. Je ne pourrai que conseiller, à l'instar des documents anciens, l'utilisation de nombres génériques et le recours à des mathématiques plus rhétoriques que symboliques. Une telle démarche permet aussi de mettre en place le calcul littéral, trop souvent mal vécu par les élèves du secondaire, autrement que comme un exercice scolaire supplémentaire mais en montrant qu'il participe à la « simplification » des mathématiques (Bkouche 1997, pp. 13-16). Il n'est néanmoins pas indispensable que les élèves lisent et comprennent un texte ancien, que ce soit le traité rédigé au IX^{e} siècle par al-Khwārizmī ou un autre ouvrage (Glaubitz 2008 ; 2011). Il me semble important, à ce stade, de différencier le rôle de la connaissance historique dans la conception d'un enseignement scientifique et l'intervention effective de l'histoire des sciences dans l'enseignement. L'introduction de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement ne doit, en aucun cas, être un supplément d'âme mais doit naturellement s'intégrer à l'enseignement, qu'elle apparaisse effectivement dans la classe ou non (Bkouche 2000, pp. 35-36).

Je ne saurai que trop insister ici sur la culture scientifique de l'enseignant, c'est-à-dire sur le rapport de l'enseignant au savoir qu'il enseigne et à son histoire, qui est déterminante. Je vais ici prendre deux exemples. Le premier concerne la dualité nombres et grandeurs. Si le professeur, et en particulier le professeur des écoles dont la formation initiale n'est pas nécessairement mathématique, n'a pas saisi les enjeux historique et épistémologique du passage de la grandeur au nombre, comment pourra-t-il mener une réflexion didactique sur cette dualité essentielle dès l'école élémentaire. Or, il apparaît que l'histoire des mathématiques est là un moyen sûr, en formation initiale ou continue (et notamment en animation pédagogique de circonscription), pour appréhender cette difficulté en privilégiant notamment la lecture et l'analyse de textes anciens comme les *Eléments* d'Euclide et le commentaire d'al-Khayyām, en particulier pour faire une étude du théorème des lignes proportionnelles dit « de Thalès » (Djebbar 2002). Le corpus géométrique médiéval est aussi propice à la mise en évidence de la dualité grandeur/nombre et notamment avec une arithmétisation progressive des grandeurs (Moyon 2012a). Le deuxième exemple veut donner des éléments de réponse à une question pédagogique que tout enseignant se pose : qu'est-ce qu'une démonstration mathématique ? et plus généralement, qu'est-ce que « faire des mathématiques » ? Il s'avère alors très utile de montrer pour un même problème (resp. théorème) la résolution (resp. démonstration) proposée par plusieurs auteurs d'ères culturelles différentes. En plus de la formation purement mathématique, cet exercice pédagogique est une réflexion sur la nature d'un raisonnement mathématique en fonction de son contexte d'écriture. C'est là une manière de mener une véritable réflexion didactique sur ce qui peut être accepté ou non comme formulation pour un élève d'une classe donnée. L'exemple le plus élémentaire, dans ce cadre, est sans doute l'étude comparative de plusieurs démonstrations du théorème dit « de Pythagore » : celle des *Eléments* d'Euclide pour l'antiquité grecque (Euclide 1990, pp. 282-284), celle de Liu Hui dans le commentaire des *Neuf Chapitres* pour la tradition chinoise (Chemla et Shuchun 2004, pp. 674-681) et celles, par exemple, de Thābit ibn Qurra (m. 901) pour les pays d'Islam (Sayili 1960). Cet exercice permet aussi de sortir d'un européocentrisme trop souvent exacerbé dans la formation française.

Je ne peux m'empêcher de donner un dernier exemple qui illustre de manière significative la disposition avec laquelle l'histoire des mathématiques permet de réfléchir l'introduction de nouveaux objets, notions ou concepts mathématiques. Cette histoire est alors envisagée comme introduction heuristique permettant de mettre en lumière la genèse d'une notion à enseigner comme les nombres réels et complexes ou encore le calcul différentiel ou intégral pour les chapitres les plus classiques de l'enseignement secondaire. Un des thèmes essentiels de l'introduction d'une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques est ainsi illustré : celui du *rapport dialectique entre la construction des concepts et la résolution des grands problèmes* (Ovaert et Reisz 1981, pp. 5-6). Je renvoie ici à plusieurs publications de la commission inter-IREM « Épistémologie et histoire des mathématiques » qui développent largement cet argument (IREM 1993, 1998).

Les quelques exemples donnés ci-dessus montrent qu'il est inévitable d'intégrer, de manière substantielle, les connaissances (de nature épistémologique et historique) du développement du savoir mathématique dans la didactique des mathématiques (Artigue 1991). Réciproquement, l'introduction de l'histoire des mathématiques doit aussi être interrogée en tant que pratique enseignante. À ce titre, il est souhaitable qu'elle se nourrisse des réflexions didactiques pertinentes pour son domaine d'action. Cette relation entre épistémologie et didactique mérite largement d'être questionnée, et en particulier dans au moment de reprendre l'architecture des différentes maquettes de Master.

2. *Histoire des mathématiques et interdisciplinarité*

La grande difficulté de la formation des enseignants du premier degré réside dans la pluridisciplinarité. Cette pluridisciplinarité intervient à deux niveaux distincts. D'une part, les étudiants français inscrits en Master MEFE proviennent de formations initiales fortement variées (langues vivantes, sciences de l'éducation, sciences du langages, histoire ou géographie, STAPS et, dans une moindre mesure, mathématiques ou physique-chimie). D'autre part, l'institution attend d'eux des compétences dans toutes les disciplines enseignées à l'école élémentaire. La formation n'a pas d'autre choix que de prendre en compte ces deux niveaux. Une des manières de répondre à cette exigence est une formation en épistémologie et histoire des mathématiques qui apporte, aux professeurs en formation, une double culture : d'abord une culture mathématique, au sens où elle permet de faire des mathématiques (avec une remise à niveau strictement nécessaire) ; ensuite une culture générale, puisqu'elle offre une opportunité de mettre en contexte la pratique et le savoir mathématiques. J'aimerais m'arrêter ici sur un exemple. En répondant aux cahiers des charges de la « Main à la pâte », j'ai construit une introduction à la première transformation géométrique du plan enseignée au cours moyen 2^{e} année (10-11 ans). Son objectif essentiel est de construire la notion de symétrie axiale et d'en établir les principales propriétés (Moyon 2009a). Mais, en choisissant une approche privilégiant l'observation, la démarche d'investigation et l'histoire des pratiques mathématiques, l'objet d'étude devient les *zelliges*, célèbres mosaïques de terres cuites émaillées des pays d'Islam. Toute la force de l'interdisciplinarité est alors révélée dans ce chapitre rédigé en direction des enseignants. En effet, il n'est pas seulement question de mathématiques ou bien d'histoire des mathématiques mais aussi de l'histoire culturelle et artistique des pays d'Islam. Plusieurs remarques sont aussi des prétextes pour aborder les relations géographiques et politiques entre le Maghreb et l'Europe et bien sûr la colonisation.

L'interdisciplinarité semble donc inhérente à la pratique scolaire de l'histoire des sciences, et celle des mathématiques en particulier. En effet, l'utilisation en classe de l'histoire des mathématiques – avec ou sans la lecture d'un texte ancien – nécessite de se situer dans le contexte scientifique, philosophique et culturel de la création ou de la rédaction des mathématiques étudiées. Il en est de même lorsque l'enseignant désire problématiser son enseignement autour, par exemple, de grands problèmes, de découvertes, de la naissance d'une discipline ou encore de la construction de concepts mathématiques. Un travail historique et une réflexion épistémologique sont alors indispensables. Ils ne peuvent être qu'encouragés par les formations initiale et continue des enseignants, seules capables de fournir l'ensemble de ces aspects. Ainsi, comme il semble indispensable d'introduire l'histoire des sciences dans les parcours de formation du premier degré, il apparaît nécessaire qu'un étudiant inscrit dans un cursus de mathématiques puisse profiter d'un enseignement en histoire des mathématiques, de la physique et de la chimie et réciproquement. Comment comprendre l'optique d'Ibn al-Haytham sans avoir une connaissance minimale de l'optique géométrique d'Euclide ? En outre, les stages de formation continue avec un public pluridisciplinaire (sciences exactes et expérimentales, philosophie, histoire, documentation) doivent être encouragés pour permettre aux enseignants de montrer comment leurs méthodologies et connaissances scientifiques, quoique différentes, sont complémentaires. Poser l'histoire des sciences au cœur des échanges entre des enseignants en formation peut permettre, entre autres, d'interroger les fondements, les problématiques et les pratiques des différentes disciplines (scientifiques ou non), d'étudier les articulations et les différences entre celles-ci, et de mettre en évidence, par exemple, l'historicité des processus de création et d'écriture de la science, de preuve et de légitimation. Cette réflexion et ces dispositifs ne peuvent que se montrer féconds. Un point essentiel porte sur l'éducation à la citoyenneté. Il a d'ailleurs déjà été relevé par Dominique Lecourt dans son rapport à propos de l'enseignement de la philosophie des sciences et notamment par rapport aux réalités scientifiques et techniques où « l'esprit de la recherche viendrait vivifier l'esprit civique » (Lecourt 1999, p. 5).

Comme corollaire à cette dualité entre l'interdisciplinarité et l'histoire des mathématiques, je vais maintenant détailler un enjeu trop souvent ignoré dans les présentations scolaires des mathématiques : leurs dimensions culturelles.

II. POUR LES MATHEMATIQUES DES HOMMES : LES DIMENSIONS SOCIALE ET CITOYENNE DES MATHEMATIQUES. L'APPORT DE L'HISTOIRE

L'idée que je souhaite défendre ici concerne l'importante valeur culturelle de l'histoire des mathématiques. En effet, comme je viens de le suggérer, son introduction dans la formation des enseignants est une formidable opportunité pour replacer les mathématiques dans leur contexte social, culturel, politique de développement en interrogeant la place de l'activité mathématique dans les sociétés qui la voient naître et évoluer à un moment donné. Ainsi, il ne faut pas seulement retenir les quelques mathématiciens dont l'histoire nous a laissé le nom, il faut sortir de l'ombre tous les anonymes, ou plus exactement leurs pratiques et savoirs que l'histoire des mathématiques permet de reconsidérer. Dans ce cadre, les études ethnomathématiques peuvent être complémentaires dans la formation des enseignants. Si certains s'accordent à dire que l'écriture est née, en Mésopotamie 3300 ans avant J.-C., du besoin de dénombrer, personne ne peut dire précisément qui en sont précisément les « inventeurs ». Cette remarque est triviale mais elle me semble symptomatique de la quête des origines dans laquelle les élèves se lancent sans répit, notamment en milieu socialement défavorisé. La plupart du temps, prendre en compte cette demande des élèves (même lorsqu'elle reste implicite) évite la fameuse et récurrente question utilitariste « à quoi ça sert ? » qui a tendance à plonger les enseignants dans l'abîme. Or, construire sa propre identité et devenir citoyen, c'est effectivement tenter de discerner des éléments de réponse à cette délicate quête pour se situer à la fois dans l'histoire de la civilisation humaine et dans la géographie mondiale. Au moment même où les politiques identitaires secouent les démocraties européennes, les enseignants ont un rôle essentiel à jouer et leur formation ne peut donc pas le négliger. Je voudrais détailler plusieurs exemples relatifs à cette quête des origines et à la valeur citoyenne des mathématiques et de leur enseignement.

Avant d'examiner la manière avec laquelle les mathématiciens eux-mêmes reconnaissent l'intérêt de l'histoire et de l'épistémologie de leurs disciplines, je voudrais m'arrêter sur la conception de J. Peletier du Mans au sujet de l'importance de l'historicité des mathématiques. L'algébriste et poète expose à plusieurs reprises sa sensibilité pour l'héritage collectif des mathématiques de l'Antiquité que je souhaite défendre ici. En effet, dans les *Poèmes* à son *Algèbre* et à son *Arithmétique*, Peletier pense les mathématiques comme une œuvre collective issue d'une longue et féconde accumulation de savoirs (Peletier 1554a, 1554b). Cette conception (originale dans le contexte de l'humanisme français) rend donc stérile, entre autres, les questions de paternité, fussent-elles à propos des *Eléments* (Loget 2000, pp. 132-147). Pour montrer maintenant la fécondité et les innovations pédagogiques que permettent la mise en perspective de l'histoire, j'emprunterai à la littérature mathématique deux exemples chronologiquement éloignés l'un de l'autre. D'abord, le traité d'algèbre d'al-Khayyām, mathématicien des Pays d'Islam du XII^{e} siècle, illustre la vertu de cette historicité. En effet, dans son introduction, il détaille l'histoire, les erreurs et tentatives successives de certains de ses prédécesseurs qui lui ont permis de finaliser sa théorie géométrique des équations de degré inférieur ou égal à 3 (al-Khayyām 1981, pp. 11-13). Certes, c'est surtout une façon de montrer la grande qualité de son traité et l'innovation dont il fait preuve, mais c'est aussi une manière de s'inscrire dans le long processus des découvertes mathématiques en relation avec les cubiques. Ensuite, Fourrey, auteur de plusieurs ouvrages de mathématiques au début du XX^{e} siècle, convoque l'histoire de sa discipline telle qu'il la connaît. Par exemple, en 1907, il édite pour la première fois ses *Curiosités géométriques* dans l'idée de produire un manuel de mathématiques s'inscrivant à la fois dans l'intense activité scientifique du début du XX^{e} siècle et dans le mouvement de réforme de l'enseignement des mathématiques de la même époque (Fourrey 1994). L'histoire des mathématiques, les problèmes des Anciens (grecs, arabes, Chinois, du Moyen Âge ou de la Renaissance) sont alors interrogés pour faire comprendre et aimer les mathématiques ainsi que pour réussir à se placer sur l'échelle du développement de la science mathématique.

Le savoir mathématique, tout universel qu'il est, est fabriqué, transmis, enseigné et assimilé dans des contextes historiques, culturels et politiques qu'il est bien absurde de négliger lorsqu'on fait des mathématiques et *a fortiori* lorsqu'on les enseigne. L'histoire des mathématiques permet une appropriation des connaissances sociales, culturelles, politiques et scientifiques de l'élaboration, du développement et de la diffusion des mathématiques comme « œuvre humaine, soumise, comme toute œuvre humaine, aux aléas de l'histoire » (Roger 1995, p. 49). En effet, l'activité mathématique s'intègre dans l'histoire des idées et dans l'histoire des sociétés avec leurs évolutions, leurs changements techniques et leurs révolutions industrielles. L'historien des mathématiques lève en particulier le voile sur certains éléments de ce qu'ont été et de ce que sont les mathématiques à la fois comme disciplines de recherche et comme activités sociales à condition d'accepter ce que l'historiographie a longtemps négligé : la prise en compte des pratiques locales. L'histoire de l'art et de l'architecture en Pays d'Islam est probablement un des meilleurs exemples. Même s'il est aujourd'hui relativement bien connu, je me permets de le rappeler ici. À ma connaissance, aucun mathématicien médiéval de langue arabe n'étudie les transformations planes telles que les translations, les symétries et les rotations, largement décelables dans les pavages de *zelliges* qui ornent les plus beaux bâtiments de la cité islamique. Et pourtant, une observation est possible : les 17 types de pavage du plan sont tous présents dans un site aussi célèbre que l'Alhambra de Grenade dont la construction s'achève au XV^{e} siècle (Lu et Steinhardt 2007). Les artisans des pays d'Islam possédaient donc une compréhension de concepts mathématiques savants basée sur leur intuition et leur savoir-faire. Cet exemple permet un travail remarquable en classe et en formation des enseignants (Moyon 2009a). Je donnerai deux exemples supplémentaires qui contribuent à montrer aux élèves et aux professeurs en formation l'implication des mathématiques, en l'occurrence de la géométrie, dans des pratiques sociales et corporatistes. Le premier est relatif à la littérature agricole de l'antiquité latine (Moyon 2009b). Les techniques de mesurage des champs lié au calcul des fermages exposées dans des ouvrages non-mathématiques illustrent l'interaction féconde entre des problèmes socio-culturels et le développement d'une science. Le second exemple se rapporte aux problèmes anciens de division des figures planes. Dans les pays d'Islam, ils sont en partie liés à des questions d'ordre juridique et religieux. En effet, il peut s'agir de partager entre frères et sœurs (à la suite d'un héritage) ou entre copropriétaires (lors d'une transaction) des parcelles de champs dans un rapport donné et en respectant certaines contraintes liées au terrain (mosquée, puits, accès…) et dictées par la loi coranique (Moyon 2012a, 2012b). La résolution de ce type de problèmes illustre plusieurs domaines élémentaires des mathématiques. Même si elle convoque principalement la théorie des rapports des Livres V et VI des *Eléments* d'Euclide, certaines autres procédures de résolution sont algorithmiques voire algébriques (Moyon 2011). Ces trois exemples suffisent à remarquer qu'en plus d'être une source évidente de problèmes pour l'enseignement (Moyon 2009c), l'histoire des mathématiques permet de montrer aux élèves le rôle des mathématiques (même anonymes) dans une société à un moment de son histoire. L'enseignant doit en être convaincu. C'est, à mon avis, un des enjeux de sa formation.

Enfin, il n'est pas suffisant que l'enseignant connaisse l'histoire de sa discipline, il doit aussi apprécier l'histoire de son enseignement. Il a tout intérêt à avoir conscience des choix scientifiques, politiques et sociaux qui ont amené l'enseignement sous sa forme actuelle. C'est en particulier dans ce cadre qu'une spécificité des mathématiques en tant que discipline scolaire peut être relevée : c'est en effet la seule du paysage français à avoir un institut de recherche sur son enseignement avec la création des IREM en 1967 à l'instigation de la Commission Lichnerowicz. Depuis, les IREM continuent à produire des documents pour la formation des enseignants, notamment en épistémologie et histoire des mathématiques par le biais de la Commission inter-IREM. Une autre piste est à explorer : celle des manuels anciens dont l'étude peut révéler de nombreuses informations. Responsable de l'initiation à la recherche pour le parcours « professeur des écoles » du Master MEFE de l'IUFM du Limousin, j'ai contribué à mettre en place plusieurs équipes de recherche sur l'étude du fonds patrimonial de l'institut hérité des bibliothèques des écoles normales d'instituteurs et d'institutrices du Limousin. Ces équipes voient l'émergence de problématiques communes et transversales entre champs disciplinaires *a priori* distincts comme les sciences de l'éducation, la didactique et l'épistémologie des sciences. De nouvelles pistes de recherche, socio-historique en particulier, sont alors à investir, notamment à partir de l'exploration de fonds de manuels anciens autour de thématiques comme l'éducation, la construction du jeune citoyen, la diversité ou la réflexivité. À titre d'exemple, les seuls textes et illustrations (figure 1), extraits du chapitre « Le gain, la dépense et l'économie » de l'*Arithmétique en riant* (Jolly 1935, p. 40), laissent présager d'une des lectures possibles des manuels anciens de mathématiques à travers le prisme de la représentation de la société française et de son fonctionnement à une époque donnée.

LE GAIN, LA DÉPENSE ET L'ÉCONOMIE

Le gain. — Prenons l'exemple de M. Dubois, le cantonnier. Il travaille pour gagner de l'argent. Chaque mois il reçoit par exemple un **salaire de 1.200 f.** qu'il est heureux de rapporter à la maison.

La dépense. — Pendant que son mari est occupé sur la route, M^me^ Dubois entretient son ménage, fait des achats et prépare les repas. Car on ne peut faire la soupe aux cailloux ! Et M^me^ Dubois a dû acheter **de la viande, des légumes, du pain et de l'épicerie.**

De temps en temps elle est encore obligée d'acheter **des vêtements, du linge, du charbon.** Enfin elle doit dépenser pour **l'éclairage, le loyer** et les **menus frais** de toutes sortes.

Par exemple, le mois dernier, M^me^ Dubois a **dépensé 1.100 f.**

Qu'est-ce que l'économie ?

Puisque M^me^ Dubois n'a pas dépensé tout le gain de son mari, elle peut **mettre de l'argent de côté.**

On dit que le ménage a **économisé :**
1.200 f. — 1.100 f. = 100 f.

Vous voyez M^me^ Dubois qui va placer cette **économie de 100 f.** à la Caisse d'épargne.

L'économie, c'est donc la différence entre le gain et la dépense lorsque le gain est supérieur à la dépense.

***Figure 1** – Représentation de la société dans les manuels anciens de mathématiques*

En outre, une étude comparative des manuels anciens entre eux et avec les instructions officielles anciennes ou actuelles permet à nouveau de faire des mathématiques autrement dans le cadre de la formation initiale des enseignants et de réfléchir à l'élaboration de démarches didactiques. Un premier travail est à noter dans ce sens, à titre d'exemple. En effet, une de mes étudiantes a soutenu un mémoire en juin 2011 intitulé « L'enseignement des mathématiques de l'après-guerre à la fin des années 70 ». Elle y a comparé l'enseignement de la soustraction tel qu'il est promu dans deux manuels du cours élémentaire 2^e^ année (8-9 ans), l'un de 1947 et l'autre de 1972. Cette étudiante a donc intégré, par la lecture et l'étude de ces manuels, la réforme des « mathématiques modernes » sans oublier la réflexion didactique sur son propre enseignement et sans négliger non plus la préparation à l'oral du CRPE. Les divers types d'énoncés de problèmes, le recours ou non à la manipulation d'instruments, le rôle de la figure en géométrie, les types de raisonnements utilisés, les différentes pratiques algorithmiques tantôt encouragées tantôt bannies sont autant de thèmes qui peuvent naturellement être étudiés à travers l'ensemble de ces manuels.

III. CONCLUSION

Faute de pouvoir agir directement sur les maquettes des formations initiales et continues des enseignements autrement que localement, je voudrais insister sur la nécessité absolue d'encourager la production de ressources en épistémologie et histoire des mathématiques. En effet, une production qualitativement et quantitativement importante encouragerait les structures universitaires à mettre en place des formations de qualité. Elle permettrait aussi de contribuer à l'auto-formation des enseignants du primaire comme du secondaire même si celle-ci reste très faible (Académie des Sciences 2004). Ces ressources doivent d'abord et surtout rendre compte des recherches actuelles en histoire des mathématiques comme l'a fait Høyrup (2010) par exemple. En ce sens, les historiens des mathématiques ne doivent pas négliger la valorisation de leur recherche même si les instances évaluatrices de la recherche n'y accordent que peu d'importance. Les source-books à l'instar de (Katz 2007) seraient aussi à développer. Ils permettent de rendre accessible des textes anciens traduits de leur langue originale par les spécialistes et accompagnés de commentaires mathématiques et historiques, ce qui est nécessaire si l'on veut un accès direct aux textes. Enfin, des présentations de dispositifs pédagogiques – à tous les niveaux de l'école à l'université – intégrant explicitement l'histoire des mathématiques dans l'enseignement ou la formation comme dans (Barbin 2010, 2012) devraient aussi être rendue accessible au plus grand nombre d'enseignants.

REFERENCES

Académie des Sciences (2004) *Avis sur l'enseignement scientifique et technique dans la scolarité obligatoire : école et collège*.

Artigue M. (1991) Épistémologie et Didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 10(2/3), 241-286.

Barbin E. (Ed.) (2010) *De grands défis mathématiques : d'Euclide à Condorcet*. Paris : Vuibert-Adapt.

Barbin E. (Ed.) (2012) *Des mathématiques éclairées par l'histoire*. *Des arpenteurs aux ingénieurs.* (coord.) Paris : Vuibert-Adapt.

Bensaude-Vincent B. (2005) Paul Langevin : L'histoire des sciences comme remède à tout dogmatisme. *Revue d'Histoire des Sciences* 58(2), 311-328.

Bkouche R. (1997) Epistémologie, histoire et enseignement des mathématiques. *For the learning of mathematics* 17(1), 34-42.

Bkouche R. (2000) Sur la notion de perspective historique dans l'enseignement d'une science. *Repères IREM* 39, 35-59.

Brousseau G. (1989) Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques. In Bednarz N., Garnier C. (Eds.) (pp. 41-63) *Construction des savoirs, Obstacles et Conflits*. Montréal : CIRADE Les éditions Agence d'Arc inc.

Chemla K., Shuchun G. (2004) *Les neuf chapitres*, *le classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires*. Paris : Dunod.

Comte A. (1930) *Cours de philosophie positive*. Vol.1. Paris : Bachelier.

Djebbar A. (2002) L'épître d'Al Khayyām sur l'explication des prémisses problématiques du livre d'Euclide. *Farhang* 14(39/40), 79-136.

Djebbar A., Gohau G., Rosmorduc J. (2006) *Pour l'histoire des sciences et des techniques*. Paris : Hachette.

Ehrhardt C. (2010) Histoire sociale des mathématiques. *Revue de Synthèse* 131(4) (Histoire sociale des mathématiques), 489-493.

Euclide (1990) *Les éléments* (vol.1). Vitrac B. (Ed.). Paris : PUF.

Fauque D. (1989) L'enseignement de l'histoire des sciences dans les classes du secondaire. *Bulletin de l'Union des Physiciens* 712, 417-426.

Furinghetti F., Radford L. (2002) Historical conceptual developments and the teaching of mathematics: from phylogenesis and ontogenesis theory to classroom practice. In English L. (Ed.) (pp. 631-654) *Handbook of International Research in Mathematics Education*. New Jersey : Lawrence Erlbaum.

Furinghetti F., Radford L. (2008) Contrasts and oblique connections between historical conceptual developments and classroom learning in mathematics. In English L. (Ed.) (pp. 626-655) *Handbook of International Research in Mathematics Education.* New York : Routledge, Taylor and Francis.

Fourrey E. (1994) *Curiosités géométriques*. Paris : Vuibert.

Glaubitz M. (2008) The Use of Original Sources in the Classroom. Theoretical Perspectives and Empirical Evidence. In Barbin E., Stehlíková N., Tzanakis C. (Eds.) (pp. 373-381) *History and Epistemology in Mathematics Education. Proceedings of the 5th European Summer University.* Prague : Vydavatelsky servis, Plzeň.

Glaubitz M. (2011) The Use of Original Sources in the Classroom. Emperical Research Findings. In Kronfellner M., Barbin E., Tzanakis C. (Eds.) (pp. 351-361) *History and Epistemology in Mathematics Education. Proceedings of the 6th European Summer University*. Vienne : Verlag Holzhausen GmbH.

Haeckel E. (1866) *Generelle Morphologie der Organismen*. 2 vol. Berlin : G. Reimer.

Høyrup J. (2010) *L'algèbre au temps de Babylone*. Paris : Vuibert.

Hulin N. (1984) L'histoire des sciences dans l'enseignement scientifique. *Revue française de pédagogie* 66, 15-27.

Hulin N. (1996) L'histoire des sciences et l'enseignement scientifique. Quels rapports ? Un bilan des XIX^{e} et XX^{e} siècles. *Bulletin de l'Union des Physiciens* 786, 1201-1243.

Hulin N. (2001) L'histoire des sciences et l'enseignement scientifique. Une composition en histoire des sciences à l'agrégation. *Revue de Synthèse* 4(2/3/4), 393-410.

IREM (1993) *Histoire de problèmes, Histoire de mathématiques*. Paris : Ellipses.

IREM (1998) *Images, Imaginaires, Imagination, une perspective historique pour l'introduction des nombres complexes*. Paris : Ellipses.

Jolly R. (1935) *L'arithmétique en riant*. Paris : Fernand Nathan.

Katz V. J. (2007) *The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India and Islam*. Princeton : Princeton University Press.

Al-Khayyām (1981) *Kitāb al-jabr* [Livre d'algèbre]. Djebbar A., Rashed R. (Ed. et Trad.). Alep : Institut d'Histoire des Sciences Arabes.

Langevin P. (1933) La valeur éducative de l'histoire des sciences. *Revue de Synthèse* 6(1), 5-16.

Lebon E. (1903) Chronique et Correspondance – Universités et Congrès. *Revue générale des sciences pures et appliquées*, 590-591.

Lecourt D. (1999) *Rapport sur l'enseignement de la philosophie des sciences*. Paris.

Loget, F. (2000) *La querelle de l'angle de contact (1554-1685). Constitution et autonomie de la communauté mathématique entre Renaissance et Âge baroque*. Paris : EHESS.

Lu P. J., Steinhardt P. J. (2007) Decagonal and Quasi-crystalline Tilings in Medieval Islamic Architecture. *Science* 315, 1106-1110.

Maitte B. (2008) Les récits de découvertes scientifiques : petits mensonges et grands mythes. *Actes de savoirs* 4, 65-78.

MEN (2010) *Arrêté du 12 mai 2010 portant définition des compétences à acquérir par les professeurs, documentalistes et conseillers principaux d'éducation pour l'exercice de leur métier*. *Journal officiel de la République française* 164.

Moyon M. (2009a) Quand les zelliges entrent dans la classe… étude de la symétrie axiale. In Djebbar A. (dir.) (pp. 111-127) *Les découvertes en Pays d'Islam.* Paris : Le Pommier.

Moyon M. (2009b) Géométrie et mesurage des champs dans l'antiquité latine. *Les nouvelles d'Archimède* 52, 12-13.

Moyon M. (2009c) La division des figures planes comme source de problèmes pour l'enseignement de la géométrie. In Escofier J.-P., Hamon G. (Eds.) (pp. 71-86) *Actes de la Rencontre des IREM du Grand Ouest et de la réunion de la Commission Inter-IREM Épistémologie et Histoire des mathématiques.* Rennes : Université Rennes 1.

Moyon (2011) Practical Geometries in Islamic Countries : the Example of the Division of Plane Figures. In Kronfellner M., Barbin E., Tzanakis C. (Eds.) (pp. 527-538) *History and Epistemology in Mathematics Education. Proceedings of the 6th European Summer University*. Vienne : Verlag Holzhausen GmbH.

Moyon M. (2012a) Diviser un triangle au Moyen Âge : l'exemple des géométries latines. In Barbin E. (Ed.) (pp. 73-90) *Des mathématiques éclairées par l'histoire. Des arpenteurs aux ingénieurs.* Paris : Vuibert-Adapt.

Moyon M. (2012b) Mathématiques et interculturalité : l'exemple du découpage des figures de la Mésopotamie au moyen-âge latin. In Moyon M., Belmehdi S. (Eds.) *Classics@ : an online Journal 8*.

Ovaert J.-L., Reisz D. (1981) *Fragments d'histoire des mathématiques* 41. Paris : APMEP.

Peletier J. (1554) L'algèbre. Lyon : J. de Tournes.

Peletier J. (1554) L'arithmétique. Lyon : J. de Tournes.

Raichvarg D. (1987) La didactique a-t-elle raison de s'intéresser à l'histoire des sciences ? *Aster* 5, 3-34.

Rashed R. (2007) *al-Khwārizmī. Le commencement de l'algèbre*. Paris : A. Blanchard.

Roger J. (1995) *Pour une histoire des sciences à part entière*. Paris : Albin Michel.

Sayili A. (1960) Thābit ibn Qurra's Generalization of the Pythagorean Theorem. *Isis* 51(1), 35-37.

JULES HOUËL : UN MATHEMATICIEN PEDAGOGUE DU XIXe SIECLE POUR LEQUEL UNE APPROCHE HISTORIQUE EST INDISSOCIABLE D'UN FONDEMENT RIGOUREUX DES MATHEMATIQUES. EXEMPLE DES « QUANTITES COMPLEXES »

François PLANTADE*

Résumé – Jules Houël (1823-86) enseigna l'analyse réelle et complexe à la faculté des sciences de Bordeaux de 1859 à 1884. Houël était un professeur très soucieux de ses enseignements, reconnu en tant que pédagogue en France comme en Europe, qui, avant d'enseigner un sujet, l'étudiait le plus profondément possible. Il rédigeait en détails ses cours et les publia chez Gauthier-Villars. La *Théorie élémentaire des quantités complexes* (1867) débute par des considérations générales sur l'algèbre et par un historique assez précis de la représentation géométrique des « quantités complexes ». Nous nous référons à la question 1 du GT4, Houël étant un exemple vivant de la maxime d'Auguste Comte, affirmant qu'on ne peut connaître une discipline sans en connaître son histoire.

Mots-clefs : Enseignement des mathématiques, Analyse complexe, Historique, Représentation géométrique, Jules Houël

Abstract – Jules Houël (1823-86) taught real and complex analysis at the Bordeaux Sciences Faculty from 1859 to 1884. Houël was a really zealous teacher and well-know in France and Europe: before teaching a subject, he studied it in details. He wrote down his courses, which he published at Gauthiers-Villars. The *Théorie élémentaire des quantités complexes* (1867-73) begins with general considerations about algebra and a historical presentation of the geometric represensation of the « complex quantities ». We are refering to the question 1 of the GT4: Houël was a being example of the Auguste Comte's motto, which claimed that one can't know a disciplin without knowing its history.

Keywords: Mathematics teaching, Complex analysis, Historic, Geometric representation, Jules Houël

I. INTRODUCTION

Jules Houël (1823-1886) a fait l'objet d'études dans (Gispert 1987) et (Neuenschwander 1984) à travers notamment les lettres de Gaston Darboux et dans (Boi, Giacardi et Tazzioli 1998) à travers celles d'Eugenio Beltrami. Dans sa correspondance avec Darboux, Houël est présenté comme co-éditeur du *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, polyglotte et connaissant bien les mathématiques européennes. Dans sa correspondance avec Beltrami, Houël est présenté notamment comme diffuseur des géométries non-euclidiennes en France et en Europe.

Nous proposons de nous intéresser à une autre facette de Houël : celle de l'enseignant. Cette facette est fondamentale car c'est en vue de préparer ses cours que Houël étudia en détails la géométrie euclidienne (Houël 1867) et qu'il fut convaincu de l'existence (Houël 1871) puis de l'intérêt des géométries non-euclidiennes ; de même, c'est en vue de rédiger ses cours sur les « quantités complexes », qu'il en réécrivit les fondements ainsi que l'historique : comme il l'écrivit à son lointain cousin Charles Berger – mathématicien lui aussi, le 12 janvier 1867[1] :

> Je m'occupe en ce moment des imaginaires, dont je tâche d'asseoir la théorie élémentaire sur des bases simples, claires et solides. Je rédige quelques considérations sur l'historique de la question.

Nous nous référons à la première question du groupe de travail 4, à savoir :

---

* IREM de Basse-Normandie, Université de Nantes – France – fplantade@wanadoo.fr

[1] Lettre du fonds Houël, de la bibliothèque de Caen-la-mer situé à Caen, avenue Albert Sorel.

© Plantade F. (2012) Jules Houël : un mathématicien pédagogue du XIXe siècle pour lequel une approche historique est indissociable d'un fondement rigoureux des mathématiques. Exemple des « quantités complexes ». In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT4, pp. 653–662). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

> Quels sont les fondements épistémologiques et didactiques qui sous-tendent l'introduction des dimensions historique et culturelle dans l'enseignement des mathématiques ?

En effet, Houël constitue, à notre sens, un exemple « vivant » de la pensée d'Auguste Comte, pour lequel « on ne connaît pas une science complètement tant qu'on n'en connaît pas l'histoire » (Comte 2001). Nous souhaitons montrer que Houël ne pouvait enseigner des sujets non approfondies ou des choses peu claires : pour lui, l'historique des notions et leur « fondement » étaient indissociables de l'enseignement des mathématiques « techniques ». Pour ce faire, nous présenterons Jules Houël et le traité *Théorie élémentaire des quantités complexes* et analyserons l'introduction de l'*Algèbre des quantités complexes*, qui forme le premier volume de ce traité.

II. A PROPOS DE JULES HOUËL

Figure 1 *– Jules Houël vers 1880*

Jules Houël (1823-86), issu d'une ancienne famille normande protestante, étudia les mathématiques à l'Ecole normale supérieure de 1843 à 1846 ; ayant échoué à l'agrégation en 1846 – qu'il obtint l'année suivante –, Houël commença à enseigner en lycée. Il exerça notamment dans les lycées de Bourges (1847), de Pau (1848 et 1849), de Bordeaux (1850) et Alençon (1851 et 52). En 1852, il prit un congé sans solde pour poursuivre ses recherches mathématiques et astronomiques, qui aboutirent en 1855, à la soutenance en Sorbonne de deux thèses, l'une en mécanique et l'autre en astronomie (Houël 1855). Cauchy, qui faisait partie du jury des thèses de Houël, montra un réel enthousiasme à leur sujet. Houël ambitionnait de travailler en astronomie mais ne put entrer[2] à l'Observatoire de Paris. Finalement Houël prit la succession de V. A. Le Besgue à la chaire de mathématiques pures

[2] D'après la famille de Houël, U. Le Verrier alors directeur de l'Observatoire de Paris et normand d'origine, l'aurait empêché d'y entrer. L'information reste encore à vérifier.

de la faculté des sciences de Bordeaux en 1859 où il enseigna jusqu'en 1884, année à laquelle il prit sa retraite en raison de problèmes de santé.

Houël anima activement la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. Il en fit la promotion, de sorte qu'en 1867[3], « presque tous les mathématiciens de Bordeaux y étaient inscrits ». Il publia de nombreux articles mathématiques, historiques ou traductions dans les *Mémoires* de ladite Société, notamment à propos de géométries non euclidiennes[4]. De 1864 à 1872, Houël fut archiviste de la Société et en développa considérablement l'activité et les contacts. En 1872, la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux comptait plus d'une centaine de contacts parmi des sociétés savantes du monde entier.

Houël était un polyglotte : d'après le mathématicien P. Barbarin (1927), il connaissait à la fin de sa vie « toutes les langues de l'Europe », bien qu'il n'eût pas voyagé en dehors de la France. Il traduisit, par exemple : de l'allemand, des articles de Lejeune-Dirichlet, de Riemann, de Balzer, de Lobatchevski[5], de Lipschitz ; du suédois, des articles de Mittag-Leffler sur les fonctions elliptiques ; du hongrois, l'opuscule de J. Boliay sur la géométrie non-euclidienne ; du russe, certains articles de Lobatchevski, d'Imschenetski, de Bougaïev ; du norvégien, *La vie d'Abel* de C. A. Bjerknes, de l'italien la *Théorie des équipollences* de Bellavitis.

Houël fut en contact épistolaire avec de nombreux mathématiciens européens ; en voici quelques exemples. En France, il correspondit avec Ch. Berger, Bourget, Darboux, Hermite, Laisant, Lefoy ; en Italie, Bellavitis, Beltrami, Cremona, Forti ; en Allemagne, Balzer, Borchard, Günther, Klein, Lipschitz, Ohrtmann ; en Scandinavie, Bjerknes, Dillner, Lie, Lindelöf, Mittag-Leffler, Zeuthen ; en Belgique, De Tilly, Mansion ; en Bohême, Durège, les frères Emil et Eduard Weyr ; en Russie, Imschenetski.

Houël fut de 1870 à 1882 environ co-éditeur avec Darboux du *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, journal fondé sous la direction de la Commission des hautes études – présidée par Chasles – avec le soutien du Ministère de l'instruction publique dans le but de diffuser[6] les nouvelles idées mathématiques venues d'Allemagne notamment, en France (Gispert 1987). Le polyglottisme et l'ouverture d'esprit mathématique de Houël furent les principales motivations de ce choix. Le *Bulletin* perdura jusqu' environ la deuxième guerre mondiale.

III. LA *THEORIE ELEMENTAIRE DES QUANTITES COMPLEXES*

Houël enseigna l'analyse réelle et complexe à Bordeaux. Le nombre d'étudiants en licence de mathématiques était faible, mais à peu près constant : probablement environ deux ou trois chaque année[7], d'après (Zerner 2001, p. 22). Pour Houël, le nombre d'étudiants n'avait rien à voir avec la qualité de son cours : il se devait être le plus complet possible. De plus, au lieu de faire deux leçons par semaine comme c'était la règle, il en faisait cinq, comme il l'expliqua à Mittag-Leffler, dans sa lettre du 13 septembre 1874. Houël, avant de professer un cours, en étudiait toutes les facettes afin d'en choisir la manière la plus adaptée à ses étudiants et cependant rigoureuse. C'est ainsi que lorsque Houël dut enseigner les fonctions elliptiques –

[3] Il l'expliqua à Charles Berger dans la lettre du 12 janvier 1867 déjà citée dans l'introduction.
[4] Sur la vie et les œuvres de N. Lobatchevski, par exemple.
[5] La plupart des mémoires de Lobatchevski étaient en allemand.
[6] Après la guerre franco-prussienne de 1870 et les succès de l'école analytique française du début du XIX^e siècle, les mathématiciens français avaient tendance à dédaigner les sciences allemandes pourtant florissantes dans la deuxième moitié du XIX^e siècle.
[7] En moyenne. Ces résultats sont à préciser cependant.

suite au changement de programme de 1877 –, il demanda de l'aide à Mittag-Leffler qui en était un spécialiste. Ils échangèrent durant plusieurs mois sur la manière la plus élémentaire de les présenter (Mittag-Leffler 1872-83, lettres de janvier 1877 à 1878).

La *Théorie élémentaire des quantités complexes* est un traité en quatre volumes :

1. *Algèbre des quantités complexes* (1867) ;
2. *Théorie des* fonctions *uniformes* (1868) ;
3. *Théorie des* fonctions *multiformes* (1869) ;
4. *Théorie des* quaternions (1873).

Dans la première partie, sont définies les « quantités complexes » de manière géométrique, puis toutes les propriétés classiques à notre époque ainsi que les fonctions exponentielles et logarithmes y sont présentées avec une démonstration. Dans la deuxième partie, figurent les définitions de continuité, dérivabilité, de points singuliers et la théorie des résidus de Cauchy avec des exemples détaillés. Dans la troisième partie, la théorie de Riemann est exposée – des « surfaces de Riemann » avec de nombreux croquis. Dans la quatrième partie, les quaternions sont introduits *via* les équipollences de Bellavitis et traités de manière géométrique exclusivement.

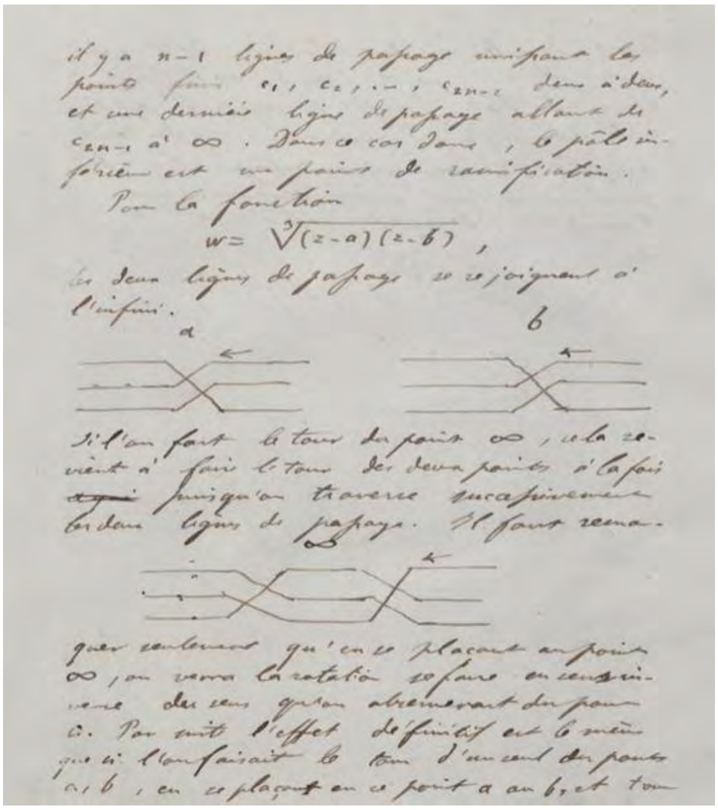

il y a n−1 lignes de passage unissant les points finis $c_1, c_2, \ldots, c_{2n-2}$ deux à deux, et une dernière ligne de passage allant de c_{2n-1} à ∞. Dans ce cas donc, le pôle infini est un point de ramification.
Pour la fonction
$$w = \sqrt[3]{(z-a)(z-b)},$$
les deux lignes de passage se joignent à l'infini.
a b
Si l'on fait le tour du point ∞, cela revient à faire le tour des deux points à la fois jusqu'on traverse successivement les deux lignes de passage. Il faut remarquer seulement qu'en se plaçant au point ∞, on verra la rotation se faire en sens inverse de ceux qu'on observerait du point O. Par suite l'effet définitif est le même que si l'on faisait le tour d'un seul des points a, b, en se plaçant en ce point a ou b, et tou

Figure 2 *– Exemple de note de cours sur les fonctions multiformes rédigée par Houël*[8]

Les cours de Houël furent, à l'origine, publiés à Bordeaux sous forme autographiée ; rapidement épuisés, il fut décidé de les publier sous forme typographié chez Gauthier-Villars à Paris. Houël reprit[9] le contenu de la *Théorie élémentaire des quantités complexes*– hormis la partie sur les quaternions – dans son *Cours de calcul infinitésimal* auquel il adjoignit une

[8] Bibliothèque de Caen-la-mer.
[9] Il y a toute la partie analyse réelle en plus, bien entendu.

partie sur les fonctions elliptiques. Ces deux traités eurent un très bon écho en France et en Europe.

Ainsi dans sa première lettre, datée du 15 juin 1872, adressée à Houël, Mittag-Leffler écrivit :

> Tout d'abord, je vous prie de me permettre de vous présenter mes humbles et respectueux remerciements pour la connaissance des quantités complexes que j'ai pu acquérir à la lecture de votre œuvre exhaustive et géniale *Théorie Élémentaire des Quantités Complexes*.

Darboux fit également l'éloge des traités de Houël à plusieurs occasions dans le *Bulletin* ; le mathématicien Rubini fut également enthousiaste (Zerner 2001, p. 22). Les qualités de ces traités sont, selon ces derniers : la rigueur, l'exhaustivité, la clarté et la concision[10]. En effet, la *Théorie élémentaire des quantités complexes* traite des fondements des « quantités complexes », de toutes les propriétés nécessaires pour travailler sur les fonctions d'une variable complexe ; les fonctions d'une variable complexe sont également étudiées en définissant les propriétés les plus élémentaires – continuité, dérivabilité, points singuliers, intégrales curvilignes – pour en arriver aux résidus et aux « surfaces de Riemann » ; la partie sur les quaternions généralise la notion de « quantités complexes » dans l'espace, dont les applications sont multiples. Tous les résultats énoncés sont démontrés ; des exemples fondamentaux et pédagogiques sont régulièrement donnés. Cependant, les différentes parties ne sont pas très longues : 64 petites pages pour la première par exemple, les suivantes étant un peu plus longues. Remarquons que la numérotation en petits paragraphes, indépendante des chapitres rend le référencement très simple. Nous analysons plus en détails le début de l'*Algèbre des quantités complexes* – premier volume du traité – pour étayer notre propos.

IV. PRESENTATION DE L'INTRODUCTION DE L'*ALGEBRE DES QUANTITES COMPLEXES*

Le premier chapitre de l'*Algèbre des quantités complexes*, qui en constitue l'introduction, est formé de deux parties : une première partie intitulée *Considérations générales* qui comprend 6 paragraphes – sur 4 pages – et une deuxième partie intitulée *Sur l'histoire de la théorie géométrique des imaginaires* qui comprend 11 paragraphes – sur 6 pages.

Au début de l'introduction, Houël explique que l'algèbre est très abstraite et qu'en fait, on peut la fonder géométriquement – à condition d'en faire une interprétation adéquate : en suivant les traces de Descartes :

> Une des plus grandes difficultés qu'éprouvent les commençants, en abordant l'étude de l'algèbre, c'est l'usage que l'on y fait de notions mystérieuses en apparence, comme celles des quantités négatives et des quantités imaginaires. Les géomètres qui ont assis sur des bases inébranlables les règles du calcul de ces symboles ont rendu un immense service à la philosophie mathématique. On peut cependant ne pas se trouver encore pleinement satisfait de leurs démonstrations, qui sont d'une rigueur inattaquable, sans doute, mais qui laissent subsister dans les mathématiques des symboles de quantités et des signes d'opérations qui semblent correspondre à rien de réel. (paragraphe 1) [...]
>
> On aura donc obtenu un avantage important, si l'on parvient à démontrer les mêmes règles avec la même rigueur, sans introduire dans les raisonnements autre chose que des quantités réelles et mesurables, sur lesquelles on exécutera des opérations nettement définies, mais plus générales que les opérations simples de l'arithmétique. De cette manière, au lieu d'arriver au résultat par une route certaine, mais obscure, dans laquelle un esprit timide peut craindre à chaque instant de s'égarer, on passera par une suite de déductions claires, et l'on pourra suivre des yeux toutes les phases du calcul. (paragraphe 2)

[10] Mittag-Leffler fit l'éloge de la concision de Houël en comparaison avec l'ouvrage de (Neumann 1867), qui comprend plus de six cents pages et n'est pas plus riche que celui de Houël.

Ensuite, Houël explique la notion d'opération algébrique – un peu à la manière de H. G. Grassmann dans sa *Théorie des formes* précédant l'*Ausdehnungslehre* de 1844, quoique briévement.

> L'algèbre s'occupe uniquement de la combinaison des opérations, sans s'inquiéter de leur signification ni de leur nature. Elle donne les moyens de remplacer une combinaison d'opérations par une autre combinaison équivalente ; mais elle ne traite nullement de la manière d'effectuer ces opération. […] Par exemple, rien n'empêchera d'appeler *addition* la composition des forces, et de dire que la résultante est égale à la *somme* des composantes ; car la somme, ainsi définie, jouit de la propriété de ne pas changer lorsqu'on intervertit l'ordre de ses parties. (paragraphe 4)

Puis, Houël introduit les nombres complexes comme permettant la résolution de nouveaux problèmes :

> Il faut distinguer, en outre, entre l'impossibilité absolue d'un problème, et l'impossibilité de tel ou de tel cas de ce problème, lorsqu'il en peut présenter plusieurs. C'est dans ce dernier cas seulement que l'on peut faire disparaître l'impossibilité par la généralisation des opérations. (paragraphe 5) [...]

> Cette généralisation s'obtient en remplaçant les définitions arithmétiques des quantités et des opérations par des définitions géométriques. C'est ce que l'on a fait, depuis Descartes, pour les quantités négatives. Mais c'est plus tard seulement que l'on a cherché à représenter géométriquement les quantités imaginaires par des grandeurs réelles. Leur théorie purement algébrique n'a guère été fixée que depuis un siècle, après les travaux de d'Alembert et d'Euler, et c'est plus récemment encore que Cauchy y a mis la dernière main. (paragraphe 6)

Dans la deuxième partie, Houël donne dans l'ordre chronologique, les mathématiciens qui ont travaillé sur la question de la « représentation géométrique des imaginaires ».

Le premier est le prussien H. Kühn au XVIII^{e} siècle même s'il n'a pas abouti à la représentation actuelle des complexes :

> Le premier essai de représentation géométrique des quantités imaginaires est dû au géomètre prussien Heinrich Kühn, né à Königsberg en 1690, mort à Dantzig en 1789. Kühn a publié, en 1750 dans le tome III des *Novi Comentarii* de l'Académie de Saint-Pétersbourg, dont il était membre, un Mémoire de 54 pages in-4°, intitulé : *Meditationes de quantibus imaginariis construendis et radicibus imaginariis exhibendis*. Ce travail, que Montucla traite peut-être avec trop de dédain, ne contient pas, il est vrai, la solution de la difficulté, que l'auteur avait aperçue ; mais il a, du moins, le mérite d'avoir mis sur la voie, et il restait bien peu de chose à ajouter pour obtenir la représentation des imaginaires telle qu'on la conçoit aujourd'hui. (paragraphe 7)

Dans le paragraphe 8, Houël précise les idées de Kühn : sur deux axes orthonormés, il place les points A (a ; a), B (-a ; a), C (a ; -a) et D (-a ; -a) et trace les quatre carrés dont un sommet est l'origine et les trois autres parmi A, B, C, D. Il calcule les quatre aires orientées α, β, γ, δ comme sur la figure 3 ci-dessous :

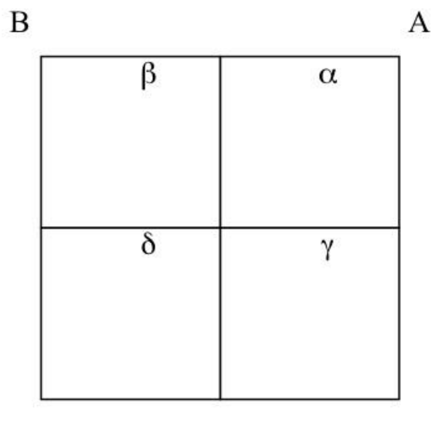


Figure 3 *– Représentation géométrique des quantités complexes par H. Kühn*

Il arrive ainsi à représenter d'une certaine manière la « racine carrée de -a² » :

> L'imaginaire plus ou moins racine de -a², qui exprime l'une ou l'autre des racines de l'équation $x^2 + a^2 = 0$, est définie par Kühn comme le côté de l'un des carrés négatifs β ou δ. Mais l'auteur n'indique pas lequel des côtés du carré il faut prendre pour représenter l'imaginaire, et faute d'avoir fait entrer dans cette représentation la notion de direction, il lui devient impossible de définir ce qu'il faut entendre par somme d'une quantité réelle et d'une quantité imaginaire.[...] il a posé le problème sans le résoudre et la lecture de son Mémoire aurait pu mettre ses successeurs sur la voie de la solution. (paragraphe 9)

Ensuite, Houël reprend son historique par une remarque sur H.-D. Truel et A. Normand, cités par Cauchy :

> Pendant le demi-siècle qui suivit la publication du travail de Kühn, la question fut à peu près abandonnée. Nous lisons seulement dans une Note de Cauchy[11], la mention suivante, à propos des travaux dont nous parlerons tout à l'heure :
>
> « Une grande partie des résultats de ces recherches avait été, à ce qu'il paraît, obtenue, même avant le siècle présent, et dès l'année 1786, par un savant modeste, M. Henri-Dominique Truel, qui, après les avoir consignés dans divers manuscrits, les a communiqués, vers l'année 1810, à M. Augustin Normand, constructeur de vaisseaux au Havre ». (paragraphe 10)

et également l'abbé Buée :

> Le premier Mémoire publié sur ce sujet, depuis la tentative de Kühn, est celui de l'abbé Buée, inséré dans les Philosophical Transactions pour l'année 1806, et intitulé : *Mémoire sur les quantités imaginaires* (56 pages). Dans ce travail, Buée formule nettement, pour la première fois, la représentation des lignes imaginaires par des longueurs perpendiculaires à la direction des lignes réelles.[...] Si juste cependant que soit la solution donnée par Buée, on ne peut nier qu'elle ne repose sur des arguments plus métaphysiques que mathématiques, et sur une extension mal justifiée des règles du calcul algébrique. Aussi son travail n'a-t-il pas attiré l'attention qu'il aurait méritée, malgré quelques erreurs qui le séparent. (paragraphe 11)

Houël arrive au début du XIXe siècle de son historique et à Argand (1806), dont le nom est couramment associé à la représentation géométrique des complexes actuellement :

> Dans la même année 1806, Robert Argand, de Genève, fit imprimer à Paris un opuscule intitulé : *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*. Cet ouvrage, sans nom d'auteur, n'a pas été mis dans le commerce. Nous le connaissons par un extrait qu'en a donné l'auteur dans les *Annales de Gergonne* (t. IV, 1813), et par une note de Cauchy[12]. Argand établit d'abord, en suivant la méthode de Buée, la représentation de racine de -1 par une longueur portée dans une direction perpendiculaire à celle des lignes réelles. Il généralise cette conception, en introduisant la représentation, par un symbole unique, d'une ligne considérée à la fois en grandeur et en direction. Il définit comme nous le ferons plus tard, les opérations de multiplication et d'addition effectuées sur les lignes dirigées […] Il établit ainsi la formule $1_p.1q = 1_{p+q}$ qui n'est autre chose que la formule de Moivre, et il en déduit toutes les formules de trigonométrie. Argand termine son Mémoire en exposant géométriquement la démonstration par Legendre de la proposition fondamentale de la théorie des équations algébriques : Toute équation algébrique, à coefficients réels ou imaginaires, a au moins une racine représentée sur une ligne dirigée, c'est-à-dire une racine réductible à la forme a + b racine de (-1). (paragraphe 12)

et à Français, qui eut une influence non négligeable :

> Les communications d'Argand avaient eu lieu à l'occasion d'un article publié dans le même recueil scientifique par J.-F. Français, professeur à l'Ecole d'Artillerie de Metz. Celui-ci, d'après quelques indications qui lui étaient parvenues sur les idées d' Argand, sans qu'il en connût l'auteur, avait réussi à en retrouver les principaux résultats, et en avait fait l'objet d'une Note[13], à la suite de laquelle Argand réclama la priorité. On remarque dans la Note de Français, le premier emploi de la notation r_p, pour désigner une ligne de longueur r et faisant avec un axe fixe l'angle p, notation très simple, que Cauchy a fini par adopter. (paragraphe 13)

---

[11] (Cauchy 1840)
[12] Ibid.
[13] (Français 1816)

Enfin, Houël cite Mourey et Warren qui reprirent les idées d'Argand, de manière un peu compliquée :

> Parmi les auteurs qui, depuis Argand jusqu'à Cauchy, ont traité le même sujet, nous citerons seulement Mourey et Warren, dont les travaux ont paru dans la même année 1828. Mourey, dans une brochure qui a pour titre : La vraie théorie des quantités négatives et des quantités prétendues imaginaires dédié aux amis de l'évidence, et qui a été réimprimée en 1861, développe complètement les règles de calcul des lignes dirigées, et donne une nouvelle démonstration de la proposition fondamentale de la théorie des équations. Malheureusement, la lecture de ce travail remarquable est rendue difficile par une profusion de termes nouveaux et de notations bizarres, le plus souvent inutiles. (paragraphe 14) [...]
>
> John Warren, fellow à l'Université de Cambridge, puis passeur à Huntingdon, a fait imprimer une brochure intitulée : A Treatise on the geometrical representation of the square roots of negative quantities. Cambridge, 1828 (154 pages grand in-8°). […] Le travail de Warren est plus complet et plus étendu que l'opuscule de Mourey. La discussion des racines de l'unité y est faite avec soin. L'auteur termine par une démonstration des principales formules de la trigonométrie, et par diverses applications au calcul intégral et à la mécanique. (paragraphe 15)

Pour conclure son approche historique, précise que Cauchy s'est inspiré de Warren et Mourey pour parfaire la théorie des « quantités complexes » :

> Les deux ouvrages que nous venons de citer renferment complètement la théorie élémentaire de la représentation géométrique des imaginaires, ou, si l'on veut, de la représentation par un symbole imaginaire d'une droite quelconque tracée dans un plan. Cette théorie a été reprise et coordonnée par Cauchy, dans le tome IV de ses *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique* (pp. 157-355), et l'on peut dire maintenant qu'elle a reçu sa forme définitive. (paragraphe 16)

Houël cite également d'autres travaux sur ces thèmes sans les préciser :

> Il n'entre pas dans notre plan de traiter des applications à la géométrie pure et à la mécanique qu'a reçues la théorie dont nous nous occupons. Nous nous contenterons de mentionner les travaux de Scheffler[14] sur l'usage des imaginaires en géométrie analytique, et le mémoire de Siebeck[15] sur les transformations géométriques déduites de la théorie des imaginaires. Nous ne pouvons non plus nous occuper du travail considérable publié par M. Maximilien Marie sur les fonctions de variables imaginaires[16], ce travail étant fondé sur un système de représentations des imaginaires essentiellement différent de celui qu'ont adopté Cauchy et Riemann. (paragraphe 17)

V. CONCLUSION

L'introduction de l'*Algèbre des quantités complexes* est très intéressante d'un point de vue pédagogique – de nos jours -, quoique parfois trop rapide dans les explications – certaines phrases sur l'algèbre auraient sans doute mérité quelques précisions. Houël y explique d'une part que les « quantités complexes » ont été, au XVIII^{e} siècle, présentées par d'Alembert et Euler notamment, comme permettant de lever « l'impossibilité de certains problèmes » : dans la résolution d'équations algébriques. D'autre part, Houël comprend la difficulté des commençants en algèbre du fait de « l'usage que l'on y fait de notions mystérieuses en apparence, comme celles des quantités négatives et des quantités imaginaires ». Pour rendre tangibles ces notions, à la suite de Descartes, il en donne une interprétation géométrique, ce qui permet aux commençants d'avoir un support visuel et géométrique. Enfin, Houël en donne un aperçu historique assez détaillé, comme un petit article d'histoire des mathématiques : il y détaille les idées de Kühn, d'Argand et Français, cite d'autres personnages ayant une importance mais peu connus comme Truel, Normand, Buée puis d'autres mathématiciens plus récents comme Warren et Mourey, Cauchy. Il cite également ses sources historiques : Cauchy, Montucla, Minizka (1850). Ce ne sont donc pas juste quelques phrases sur

---

[14] (Scheffler 1851).
[15] (Siebeck 1858).
[16] (Maximilien 1858-1862).

l'historique de la question mais bel et bien les méandres et dédales de la notion,qui n'est donc pas si évidente que cela. Dans la fin de cet aperçu, Houël cite d'autres travaux sur les fonctions à variable complexe et même un travail original de M. Marie qui en a fait une théorie sans le formalisme de Cauchy-Riemann. On voit à quel point, Houël a fait « le tour » du sujet avant de l'enseigner. Houël aspire à l'exhaustivité car cela fait partie du sujet : l'historique ainsi que la tangibilité et la rigueur sont indissociables du sujet lui-même.

REFERENCES

Argand R. (1806) *Essai sur une manière de représenter les Quantités Imaginaires dans les Constructions Géométriques*. Réed (1874, 1971) Préface par J. Hoüel ; introduction de J. Itard. Paris : Blanchard.

Barbarin P. (1926) La correspondance entre Houël et De Tilly. *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques* 50(2), 50-62 et 74-88.

Beltrami E. (1998) *La découverte de la géométrie non euclidienne sur la pseudosphère*. *Les lettres d'Eugenio Beltrami à Jules Houël (1868-81)*. Introduction, notes et commentaires critiques par L. Boi, L. Giacardi, R. Tazzioli. Préface de C. Houzel et E. Knobloch. Paris : Albert Blanchard.

Cauchy A.-L. (1840) *Exercices d'analyse et de physique mathématique*. Tome IV. Paris : Mallet-Bachelier.

Comte A. (2001) *Cours de philosophie positive*. Charleston : BookSurge.

Français J.-F. (1816) Nouveaux principes de géométrie de position, et interprétation géométrique des symboles imaginaires. *Annales de mathématiques pures et appliquées* 4, 61-71.

Gispert H. (1987) La correspondance de G. Darboux avec J. Houël. Chronique d'un rédacteur (déc. 1869 - nov. 1871). *Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques* 8, 67-202.

Grassmann H. G. (1994) *La Science de la Grandeur extensive*. Flament D. (Trad.) Paris : Blanchard.

Houël J. (1855) *Sur l'intégration des équations différentielles dans les problèmes de mécanique.* Paris : Mallet- Bachelier.

Houël J. (1855) *Sur le développement en fonctions périodiques de la fonction perturbatrice de Jupiter.* Paris : Mallet-Bachelier.

Houël J. (1867) *Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire ou commentaire sur les XXXII premières propositions d'Euclide.* Paris : Gauthier-Villars.

Houël J. (1869) *Sur le calcul des équipollences (Méthode d'analyse géométrique de M. Bellavitis).* Paris : Gauthier-Villars.

Houël J. (1871) *Sur l'impossibilité de démontrer, par une construction plane, le principe de la théorie des parallèles du postulatum d'Euclide.* Paris : Gauthier-Villars.

Houël J. (1878-1881) *Cours de calcul infinitésimal*. Paris : Gauthier-Villars.

Houël J. (1867-1873) *Théorie élémentaire des quantités complexes* (quatre tomes). Paris : Gauthier-Villars.

Lespiault G. (1887) *Notice sur Guillaume-Jules Houël* (Extrait du *Mémorial de l'Association des anciens élèves de l'Ecole Normale*). Versailles : Cerf.

Maximilien M. (1858-1862) Nouvelle théorie des fonctions de variables imaginaires. *Journal de mathématiques pures et appliquées (Journal de Liouville).*

Matzka W. (1850) *Versuch einer richtigen Lehre von der Realität der vorgeblich imaginären Grössen der Algebra u. s. w.* Prague.

Neuenschwander E. (1984) *Die Edition Mathematischer Zeitschriften im 19. Jahrhundert und ihr Beitrag zum Wissenschaflichen Austausch zwischen Frankreich und Deutschland*. Göttingen: Mathematisches Institut der Universität Göttingen.

Neumann C. (1865) *Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale*. Leipzig: B. G. Teubner.

Scheffler H. (1851) *Der Situationskalkul*. Braunschweig: F. Vieweg und Sohn.

Siebeck P.(1858) Über die graphische Darstellung imaginärer Funktionen. *Journal de Crelle* 4, 221-253.

Stubhaug A. (2006) *Gösta Mittag-Leffler: a man of conviction.* Nunnaly T. (Trad.) Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag.

Zerner M. (2008) *La transformation des traités d'analyse (1870-1914)*. http://hal-unice.archives-ouvertes.fr/hal-00347740/fr/

ENSEIGNEMENT ET APPRENTISSAGE DES MATHEMATIQUES : INTERACTIONS AVEC LES AUTRES DISCIPLINES SCOLAIRES ET LES PRATIQUES PROFESSIONNELLES

Compte-rendu du Groupe de Travail n°5 – EMF2012

Cissé BA[*] – Annie BESSOT[**] – France CARON[***]

I. INTRODUCTION

Ce sujet revient pour la quatrième fois dans le cadre de l'EMF. Une telle longévité s'explique en partie par l'importance de ce thème dans nos sociétés actuelles : contextualisation des apprentissages, interdisciplinarité, intégration des matières, apprentissage par projets, développement de compétences, etc. Elle trouve aussi sa justification dans les défis et problèmes que continuent de poser les interactions entre les disciplines enseignées au sein des institutions de formation, tant générales que professionnelles.

Il serait inapproprié de voir dans les difficultés que posent ces interactions autant de raisons pour revenir à un enseignement des mathématiques coupé de tout contact avec le monde extérieur. En effet, les rapports que les mathématiques entretiennent avec les autres disciplines et des secteurs de l'activité humaine ont participé (et participent) à l'évolution des mathématiques et expliquent la place qu'elles occupent actuellement, tant dans la société, que dans les cursus scolaires. Faire silence sur ces rapports n'est pas sans conséquence sur l'engagement des élèves à l'endroit de l'apprentissage des mathématiques et sur la capacité des citoyens à s'en prévaloir, autant comme outil d'analyse que comme source de développement.

En particulier, il semble vital, dans la formation professionnelle, de repenser le rapport des mathématiques aux pratiques des métiers dans lesquelles elles deviennent invisibles, pour pouvoir repenser l'enseignement des mathématiques dans les filières professionnelles.

La modélisation apparaît comme un lieu privilégié d'interactions entre les mathématiques, les autres disciplines et les pratiques professionnelles. En effet, la modélisation peut d'abord servir de levier pour problématiser un savoir mathématique à partir d'un questionnement fondamental : au travers de principes issus d'une autre discipline ou d'une situation réelle qui commande un recours à plusieurs disciplines ou vise une finalité professionnelle. Par ailleurs, elle peut aussi être envisagée comme un objet d'apprentissage à part entière dans les cours de mathématiques, même si cette seconde approche ne paraît pas faire l'unanimité.

Une des difficultés liées à l'intégration de la modélisation comme objet d'apprentissage vient du fait qu'elle constitue à bien des égards et pour la plupart des systèmes d'enseignement actuels une rupture – ou à tout le moins une modification profonde – du contrat didactique dans l'enseignement des mathématiques, remettant en cause à la fois les responsabilités respectives de l'élève et de l'enseignant et l'objet de l'institutionnalisation et de l'évaluation. Si la nature des épreuves d'évaluation nationales reflète à des degrés divers, selon l'époque et le pays, les objectifs à long terme et les priorités que se donne un État dans l'éducation et la formation de ses citoyens, on pourrait être porté à conclure, malgré certains énoncés de

[*] Université Cheikh Anta Diop – Sénégal – cisseba2000@yahoo.com
[**] Université Joseph Fourier, Grenoble 1– France – Annie.Bessot@imag.fr
[***] Université de Montréal – Canada – france.caron@umontreal.ca

© Ba C., Bessot A., Caron F. (2012) Enseignement et apprentissage des mathématiques : Interactions avec les autres disciplines scolaires et les pratiques professionnelles – *Compte-rendu du Groupe de Travail n°5*. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT5, pp. 663–667). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

principes, que la modélisation ne se retrouve pas au cœur des visées que l'on poursuit avec l'enseignement des mathématiques aujourd'hui. Devrait-elle l'être, au regard des enjeux sociaux et défis actuels qui se posent avec une nouvelle acuité ? Des distinctions s'imposent-elles ici entre la formation générale et la formation professionnelle ?

Les deux axes suivants ont donc orienté le travail du groupe.

1. La modélisation comme lieu privilégié d'interactions entre les mathématiques et d'autres disciplines scolaires

2. Le cas particulier de la formation professionnelle

Vingt-cinq personnes ont participé au travail du groupe. Elles provenaient de secteurs divers : recherche en didactique des mathématiques, enseignement de mathématiques à différents niveaux – allant de l'université (dans différentes facultés) à l'enseignement spécialisé, formation à l'enseignement des mathématiques. Neuf pays étaient représentés : Allemagne, Belgique, Burkina Faso, Canada, France, Maroc, Sénégal, Suisse, Viêt Nam.

Les dix communications retenues concernaient des thèmes variés comme probabilités et statistique dans la formation médicale (Croset et al., Lê et al.,), praxéologies et transposition didactique dans des formations professionnelles comme celles d'ingénieur ou en économie (Castela ; Xhonneux), modélisation dans la formation professionnelle – de la formation d'apprentis à la formation de haut niveau pour l'industrie (Favre ; Godlewski ; Straesser), modélisation dans l'enseignement général en mathématiques (Cabassut ; Soury-Lavergne et al. ; Moulin et al.).

Un constat est que sept des dix communications ont porté sur la formation professionnelle. Cette centration de fait sur la formation professionnelle atteste de la nécessité de maintenir un espace de partage des études didactiques sur les formations professionnelles mais aussi, et surtout, d'initier des recherches sur le terrain même des pratiques professionnelles visées par ces formations, où peuvent intervenir des mathématiques plus ou moins visibles imbriquées à des savoirs non mathématiques (métaphore des boîtes noires).

II. LA FORMATION PROFESSIONNELLE : DE LA MODELISATION AUX SAVOIRS ENSEIGNÉS

De l'avis unanime des participants, l'entrée dans un processus de modélisation devrait constituer l'un des enjeux sociaux des formations professionnelles. La prise en compte de cet enjeu s'avère essentielle à la formation de véritables professionnels qui puissent justifier ce qu'ils font et porter un jugement critique sur des résultats auxquels leur pratique est susceptible de les confronter.

En particulier cela permettrait de poser les problèmes :

- du choix de l'ouverture ou non de boîtes noires fortement présentes dans les pratiques professionnelles de référence et intimement liées au processus de modélisation ;

- des savoirs mathématiques qui peuvent contribuer au contrôle de l'utilisation de ces boîtes noires et à l'interprétation de leurs productions ;

- de la nature des technologies (au sens praxéologique) qui décrivent, valident, expliquent, facilitent, produisent, évaluent les techniques qui permettent d'accomplir des tâches typiques de la profession.

Dans les pratiques professionnelles et en particulier dans la pratique médicale, les probabilités et la statistique représentent un domaine mathématique de plus en plus présent. On peut donc se demander si les savoirs relevant de ce champ des mathématiques ne sont pas un vivier de boîtes noires qu'il conviendrait d'ouvrir, au moins partiellement. Cela commanderait une plus grande attention à ce champ disciplinaire dans la formation. Une réflexion équivalente pourrait aussi être engagée du côté des mathématiques discrètes et des méthodes numériques.

Par ailleurs, les phénomènes de contre-transposition où des savoirs émergent de la pratique, sans être issus des savoirs savants, questionnent à leur tour la place, la nature et le rôle des enseignements mathématiques dans les pratiques professionnelles, ainsi que la formation des professeurs qui les dispensent. Cette formation permet-elle de lier la culture mathématique aux pratiques professionnelles ? À quelle(s) institution(s) la composante mathématique dispensée dans les formations professionnelles renvoie-t-elle ?

Car il ne suffit pas de chercher à répondre aux exigences perçues par la profession, en adoptant une perspective essentiellement utilitariste. Plusieurs des participants au groupe ont émis la crainte qu'une centration des mathématiques enseignées sur leur utilisation anticipée fasse perdre de vue la nature et le caractère spécifique des mathématiques, ainsi que leur cohérence interne, garante autant de la validité interne des processus mis à contribution que de la résilience des connaissances mathématiques à l'évolution des pratiques. Pour eux, l'enseignement des mathématiques doit d'abord et avant tout participer au développement d'une culture mathématique ; si les applications contribuent à faire évoluer la culture mathématique et peuvent participer à définir l'étendue du territoire à couvrir, elles ne peuvent à elles seules déterminer l'organisation des enseignements mathématiques. Cette résistance s'est exprimée de façon encore plus forte du côté de la formation générale.

III. LA FORMATION GENERALE : DE LA MODELISATION A L'INTERDISCIPLINARITE

On relève que la modélisation est de plus en plus présente dans l'énoncé des programmes de la formation générale. On y voit d'abord l'influence des études PISA de l'OCDE, des préoccupations du Parlement Européen, et d'un certain courant didactique actif de plus longue date dans certains pays (en particulier en Allemagne ou au Royaume Uni) ; en témoigne d'ailleurs la récente étude conjointe ICMI-ICIAM sur les « interfaces » entre l'enseignement des mathématiques et l'industrie, où les pays francophones étaient relativement peu représentés (http://eimi.glocos.org/). Par ailleurs, on peut aussi voir dans la modélisation des liens avec l'approche par problèmes et avec la résolution de situations-problèmes, ce qui contribue à leur légitimation didactique dans les différents systèmes d'enseignement.

Par ailleurs, la présence effective de la modélisation dans l'enseignement des mathématiques reste encore plutôt marginale dans la francophonie. Plusieurs difficultés sont invoquées pour expliquer cette situation. On note d'abord un manque de tradition à cet égard et une interprétation variable dans le milieu éducatif de ce à quoi renvoie la modélisation et des raisons qui militent en faveur de son intégration dans l'enseignement. Certains professeurs sont prêts à accorder une place à la modélisation dans la mesure où elle contribue à la compréhension des mathématiques enseignées, mais ils ne souhaitent pas pour autant qu'elle constitue en elle-même un enjeu de l'enseignement des mathématiques. De plus, les pratiques évaluatives, qui continuent à reposer pour l'essentiel sur des examens relativement courts, se prêtent assez mal à l'évaluation de la capacité à entrer dans un processus de modélisation authentique ; en ce sens, elles paraissent confiner la modélisation à un rôle de soutien à l'apprentissage des mathématiques. On relève aussi la quasi-absence de situations de modélisation dans les manuels scolaires.

La mise en place de projets pour contribuer à l'entrée dans un processus de modélisation, si elle semble appropriée a priori, comporte elle aussi sa part de difficultés et de risques. Rappelons le délai d'appropriation entre la première rencontre de nouveaux savoirs et leur utilisation spontanée et contrôlée pour modéliser une nouvelle situation. Il convient aussi de mettre en garde contre les vastes projets où les mathématiques finissent par occuper une place dérisoire. Tout en reconnaissant qu'il est possible d'éveiller à la modélisation à l'intérieur de situations purement mathématiques (par exemple avec la géométrie dynamique), il faut relever que bien des situations de modélisation intéressantes du point de vue mathématique commandent de mettre aussi à contribution d'autres disciplines dans l'analyse. Néanmoins, la concertation entre enseignants de différentes disciplines continue de poser problème dans un système éducatif qui n'a pas été pensé en ce sens, tant du côté de l'organisation scolaire que de la progression des savoirs et de la formation des enseignants. S'en remettre entièrement aux enseignants de mathématiques qui n'ont été que peu ou pas formés à ces autres disciplines pour conduire à eux seuls la modélisation de telles situations comporte le risque de trahir à la fois la complexité des situations de départ, les savoirs et les techniques développés par les autres disciplines pour en rendre compte, et ultimement, les précautions qu'il convient de prendre dans l'application des mathématiques.

IV. PERSPECTIVES

Ainsi, même si leurs enjeux sont fondamentalement différents, il apparaît pertinent d'étudier plus avant les formations professionnelles avant de chercher à transposer au sein de la formation générale les savoirs, les façons de faire et les interactions institutionnelles qui s'y déploient. En particulier, si les interactions institutionnelles se révèlent incontournables dans les pratiques professionnelles, elles ne sont pas toujours clairement assumées dans les formations qui y préparent. Une plus grande concertation à ce niveau pourrait s'inscrire dans une nouvelle vision du contrat social où la transmission d'un bagage culturel, si elle demeure fondamentale, ne suffit plus, dans les domaines et les formes où l'on paraît l'avoir cantonnée.

Nous proposons donc la poursuite d'échanges sur ce thème, avec pour la prochaine rencontre EMF, le maintien du groupe et une réaffirmation de l'importance d'étudier les pratiques professionnelles et les formations qui y préparent. Des études didactiques sur les pratiques professionnelles faisant intervenir les mathématiques, de façon plus ou moins visible, et sur les formations associées permettraient de documenter plus en détail la modélisation mathématique qui s'y pratique, la présence de boîtes noires dans ces pratiques, ainsi que les savoirs mathématiques mis à contribution (ou qui pourraient l'être) pour exercer davantage de contrôle. Sur ce plan, la place et l'importance des probabilités et de la statistique dans les pratiques et les formations professionnelles mériterait une attention particulière.

CONTRIBUTIONS AU GT5

UN EXEMPLE D'ANALYSE DES CROYANCES DES ENSEIGNANTS ENVERS L'ENSEIGNEMENT DE LA MODELISATION

Richard CABASSUT[*] – Jean-Paul VILLETTE[**]

Résumé – Le contexte international favorise le développement du thème de la modélisation dans l'enseignement des mathématiques. Le projet européen LEMA propose une formation à l'enseignement de la modélisation en mathématiques dès l'école primaire. Les participants à l'expérimentation de cette formation ont renseigné un questionnaire sur leurs croyances envers l'enseignement des mathématiques et de la modélisation. Nous présentons une analyse exploratoire de ces croyances pour mieux comprendre les conditions pour établir la confiance des enseignants dans un enseignement de la modélisation et formuler éventuellement des questions de recherche pour un programme de développement des pratiques de modélisation dans l'enseignement des mathématiques.

Mots-clefs : modélisation, croyance, enseignant, formation, enseignement

Abstract – The international context encourages the development of the theme of modeling in mathematics education. The European project LEMA offers training in the teaching of mathematical modeling from primary school. Participants in the experiment of this training completed a questionnaire on their beliefs about teaching mathematics and modeling. We present an exploratory analysis of these beliefs to better understand the conditions for establishing the confidence of teachers in teaching modeling and the possible formulation of research questions for a program to develop the practice of modeling in the teaching of mathematics.

Keywords: modeling, belief, teacher, training, teaching

Nous présentons d'abord le contexte de cette analyse sur les croyances des enseignants envers l'enseignement de la modélisation : une recommandation du parlement européen, les études de PISA et le programme du collège français au niveau institutionnel, et le projet européen LEMA[1] à l'origine de l'étude. Ensuite nous précisons le cadre conceptuel, les questions de recherche et la méthodologie qui ont structuré l'analyse. Enfin nous exposons les résultats de l'analyse en proposant quatre classes de professeurs, d'après leurs positions sur les croyances sur les mathématiques et l'enseignement et la confiance en soi. Nous terminons en discutant ces résultats et en proposant des conjectures à confirmer par une recherche ultérieure.

I. LE CONTEXTE

1. Contexte institutionnel

(Cabassut 2010) montre que le renouveau de l'enseignement de la modélisation dans trois pays européens, la France, l'Allemagne et l'Espagne, s'appuie sur une recommandation du parlement européen pour une formation tout au long de la vie (Parlement 2006) et sur les résultats des études PISA (OCDE 2006) où la mathématisation désigne le processus fondamental appliqué par les élèves pour résoudre des problèmes de la vie courante représenté par le cycle de modélisation de la figure 1.

[*] LDAR (EA 1547), Université Paris Diderot - IUFM, Université de Strasbourg – France – richard.cabassut@unistra.fr

[**] CNRS UMR 7522, Université de Strasbourg - France

[1] LEMA signifie Learning and Education in and through Modeling and Applications. Le site du projet est : www.lema-project.org

© Cabassut R., Villette J.-P. (2012) Un exemple d'analyse des croyances des enseignants envers l'enseignement de la modélisation. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT5, pp. 668–677). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

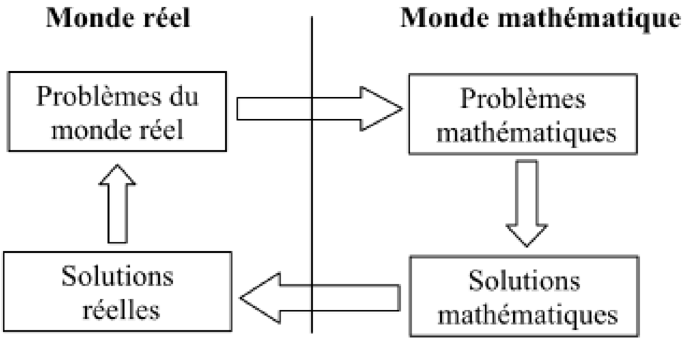


Figure 1 *- cycle de modélisation*

En France, le socle commun (BOEN 2006) se réfère explicitement aux recommandations du parlement européen et de PISA. Les programmes d'enseignement des mathématiques soulignent à tous les niveaux l'importance de la résolution des problèmes en lien avec la vie courante ou les autres disciplines, avec notamment la mise en place des thèmes de convergence au collège et des travaux personnels encadrés au lycée. Le programme de collège (BOEN 2008, p.4) affirme l'importance de la démarche d'investigation qui « présente des analogies entre son application au domaine des sciences expérimentales et à celui des mathématiques », relevant similarités et différences :

> […] proximité de ces démarches (résolution de problèmes, formulation respectivement d'hypothèses explicatives et de conjectures) et des particularités de chacune d'entre elles, notamment en ce qui concerne la validation, par l'expérimentation d'un côté, par la démonstration de l'autre […]. Les mathématiques fournissent des outils puissants pour modéliser des phénomènes et anticiper des résultats, en particulier dans le domaine des sciences expérimentales et de la technologie.

On peut considérer que dans le cycle de modélisation on opère une démarche d'investigation extra-mathématique dans le monde réel, notamment lorsqu'on valide (à la manière des sciences expérimentales) les hypothèses[2] qui permettront de construire le modèle mathématique, ou l'interprétation de la solution mathématique en solution réelle. La validation des sciences expérimentales utilise le raisonnement de plausibilité : "si A alors B" est vrai et B est vrai donc A est davantage plausible ; la validation mathématique utilise le raisonnement de nécessité : "si A alors B" est vrai et A est vrai, donc B est nécessairement vrai. Un élément de complexité est, qu'en phase heuristique lors de la résolution d'un problème mathématique, le raisonnement de plausibilité peut amener à produire des conjectures mathématiques, mais la validation mathématique de ces conjectures ne se fera que par un raisonnement de nécessité. On voit donc que la modélisation est le lieu privilégié de la rencontre entre des démarches d'investigation des sciences expérimentales et des mathématiques : d'une part l'investigation des sciences expérimentales intervient dans la recherche des hypothèses, dans la validation du choix du modèle mathématique du problème de la réalité, dans l'interprétation

[2] On prend ici hypothèse dans le sens mathématique. Une hypothèse est une condition, sur le monde réel, que l'on suppose vraie mais dont on n'a pas établi qu'elle était vraie. Une hypothèse va permettre de produire un raisonnement conditionnel, sous cette hypothèse. En général on étaye la solidité d'une hypothèse par un raisonnement de plausibilité. Par exemple, on peut estimer qu'une photo est une réduction (au sens mathématique) de la réalité. Cependant on sait qu'avec les outils informatiques on peut rétrécir une photo seulement dans le sens de la hauteur, et dans ce cas on n'aura plus une réduction mais une affinité, pour laquelle on ne pourra plus appliquer les propriétés de proportionnalité. Nous distinguerons les hypothèses des faits. Les faits sont des données de la réalité établies comme vraies. Par exemple sur une photo, on peut mesurer les différents objets photographiés. Ces mesures seront des faits des photos des objets. Par contre, lorsqu'on en déduit la mesure réelle des objets photographiés en multipliant ces mesures par le coefficient d'agrandissement des photos d'objets en les objets réels, on utilise l'hypothèse que la réalité est un agrandissement de la photo.

des solutions mathématiques en solutions réelles et dans la validation des solutions réelles ; d'autre part l'investigation mathématique intervient dans la recherche du modèle mathématique, dans la recherche de solutions mathématiques au problème mathématique modélisant le problème du monde réel et dans la vérification des cohérences entre les solutions réelles et les hypothèses. Les programmes de collège (BOEN 2008, p.4) identifient d'ailleurs sept moments essentiels communs aux mathématiques et aux sciences dans la mise en œuvre de la démarche d'investigation dans l'enseignement.

2. *Le projet européen LEMA*

Les contextes international et national d'évolution des programmes d'enseignement des mathématiques valorisent donc la démarche d'investigation et la modélisation mathématique. C'est pourquoi le projet européen LEMA a produit de 2006 à 2009 une formation continue sur l'enseignement de la modélisation à destination des professeurs d'école et des professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire. (Cabassut, Mousoulides 2009) propose une description de cette formation ainsi que le site du projet LEMA (www.lema-project.org). Cette formation continue a été expérimentée dans quatre pays partenaires du projet européen. Avant de participer à la formation, chaque professeur participant a renseigné un questionnaire relatif à sa biographie, et à ses croyances envers l'enseignement des mathématiques et de la modélisation. Nous allons présenter ici une analyse des réponses à ce questionnaire. Nous avons donc précisé le contexte institutionnel (international et national) lié à la démarche d'investigation et à la modélisation, et le contexte local lié au projet européen LEMA. Nous allons maintenant préciser le cadre conceptuel dans lequel nous formulerons les questions de recherche.

II. CADRE CONCEPTUEL ET QUESTIONS DE RECHERCHE

Différents cadres théoriques sont utilisés. Concernant la modélisation, nous utilisons les références de PISA (OCDE 2007) qui base son cycle de modélisation (voir figure 1) sur les travaux de (Blum 1996). En fait, Blum insère un modèle réel entre le problème réel et le problème mathématique. Mais le cycle simplifié de PISA nous paraît suffisant pour décrire la distinction entre le monde mathématique, où a lieu la validation mathématique et le monde réel, où nous placerons les validations extra-mathématiques, du type de celles des sciences expérimentales, utilisant le raisonnement de plausibilité. On peut considérer avec (Maaß 2006, p. 117) que « les problèmes de modélisation sont des problèmes authentiques, complexes, en lien avec la réalité ». Concernant les croyances des professeurs envers l'enseignement des mathématiques voici des extraits du questionnaire basés sur les cadres conceptuels

- de (Grigutsch, Raatz et Törner 1998) sur les croyances des professeurs sur l'enseignement des mathématiques :

> Pour chacune des affirmations suivantes concernant les mathématiques à l'école dans vos leçons, marquez d'une croix x votre degré d'adhésion (cinq degrés sont proposés de « fortement pas d'accord » à « fortement d'accord ») :
> - les mathématiques à l'école sont un ensemble de procédures et de règles qui détermine précisément comment une tâche est résolue ;
> - les mathématiques à l'école sont très importantes pour la vie future des élèves ;
> - les aspects centraux des mathématiques de l'école sont le formalisme parfait et la logique formelle.

- de (Bandura 1997) sur les croyances des professeurs sur l'auto-efficacité et sur l'efficacité personnelle :

> Les affirmations ci-dessous décrivent des situations pertinentes pour l'enseignement avec une approche par la modélisation. Pour chaque situation veuillez évaluer combien vous êtes certain de pouvoir les gérer efficacement. Évaluez votre degré de confiance en indiquant un nombre entre 0 et 100 en utilisant le barème ci-dessous :
> Je me sens capable de faire la distinction entre les tâches de modélisation et d'autres tâches basées sur la réalité.
> Je me sens capable de concevoir mes propres tâches de modélisation.
> Je me sens capable de concevoir des leçons de modélisation qui aident les étudiants à surmonter les difficultés dans toutes les étapes de modélisation (par exemple les problèmes de validation).

- de (Kaiser 2006) sur les connaissances et les croyances des professeurs sur la modélisation :

> Imaginez que vous enseignez à des élèves qui ont l'âge correct pour cette tâche. Les 5 questions suivantes sont toutes en rapport avec la tâche ci-dessous et toutes reliées entre elles.
> C'est le début des vacances d'été et il y a beaucoup de bouchons de circulation. Chris est en vacances en Allemagne et a été pris dans un bouchon de 20 km pendant 6 heures. Il fait chaud et elle a soif. Bien que la rumeur indique que la Croix Rouge est en train de distribuer de l'eau avec un petit chariot, Chris n'a rien reçu. Combien de temps la Croix Rouge a besoin pour fournir chacun en eau ?
> Cette situation est réellement survenue à l'un des partenaires du projet en 2006. La tâche a plusieurs solutions. Les élèves doivent réfléchir à combien de personnes sont prises dans ce bouchon et comment la Croix Rouge distribue l'eau. Les données peuvent être estimées ou évaluées statistiquement.
> Imaginez que vous enseignez à des élèves qui ont l'âge correct pour cette tâche.
> Marquer d'une croix x le degré de probabilité avec lequel vous utilisez ce type de tâche. (cinq degrés sont proposés de « pas du tout probable » à très probable).

Le questionnaire utilisé dans cet article n'a pas été conçu initialement pour cette analyse exploratoire. Il a été conçu pour évaluer les effets de la formation. Le présent article n'étudie pas les effets de la formation, ni la pertinence de ce questionnaire. On renvoie à (Maaß et Gurlitt 2009) pour une description de la conception du questionnaire à partir des différents cadres conceptuels et pour la mesure des effets de la formation. A partir des questionnaires renseignés nous essaierons de répondre aux questions de recherche suivantes : Quelles sont les croyances des professeurs envers l'enseignement de la modélisation ? Y a-t-il un lien entre ces croyances et leurs croyances envers l'enseignement des mathématiques ?

III. METHODOLOGIE : UNE ANALYSE EXPLORATOIRE

Nous utilisons l'analyse exploratoire, développée par (Tukey 1977) pour émettre des hypothèses, qui devront être confirmées par une analyse confirmatoire qui utiliserait la statistique inférentielle pour tester, dans une approche déductive, les hypothèses formulées. Au contraire, l'analyse exploratoire repose sur la statistique descriptive et utilise une approche inductive pour décrire la population (ici des professeurs ayant participé aux formations expérimentales) et formuler des hypothèses. Elle présente l'avantage d'éviter les contraintes de représentativité d'échantillon : en effet les participants à une formation ne sont pas un échantillon représentatif de la population des professeurs, d'autant que les conditions institutionnelles varient grandement d'un pays à l'autre : participant volontaire ou participant désigné par l'autorité scolaire ; stage pendant le temps de travail avec professeur remplacé ou stage hors du temps de travail ; stage pris en compte ou non pour l'avancement dans la carrière... La population étudiée des professeurs ayant participé à la formation expérimentale ne constitue pas un échantillon représentatif de la population des professeurs ou des professeurs qui participeront à la formation.

1. La population étudiée

La population étudiée est composée de 83 professeurs. Le questionnaire est composé de questions (variables) à choix multiples et de questions à réponses quantitatives. Les variables quantitatives sont reconditionnées en deux intervalles en utilisant la médiane pour les séparer. Nous séparons les variables en deux parties : les variables biographiques relatives à la biographie du professeur (pays, âge...), et les variables actives relatives au questionnaire avant la formation (à l'exception des variables biographiques).

2. La méthode d'analyse

Les données recueillies sont complexes : 50 variables à plusieurs modalités de réponses. Nous commençons avec une analyse multiple des correspondances sur les variables actives (36 variables avec deux possibilités de réponses, soit 2^{36} possibilités). Puis nous appliquons une classification hiérarchique ascendante (HAC ou analyse en classes) en utilisant les distances mesurées sur les premières coordonnées entre les professeurs sur les axes factoriels déterminés par l'analyse multiple des correspondances (MCA) . On identifie quatre classes ou groupes (clusters). Dans un groupe, les réponses actives clivantes sont celles dont les pourcentages moyens sont très différents entre le groupe et la population totale. Ces variables clivantes sont interprétées pour décrire chaque groupe.

On exclut des variables clivantes les variables biographiques (âge, sexe, type d'école, nationalité, niveau d'étude ...). Ces variables biographiques seront utilisées après la constitution des classes pour observer comment elles sont représentées dans chaque groupe.

On utilise le logiciel SPAD. Au départ, il y a une classe avec trois professeurs qui ont beaucoup de non réponses. Nous décidons de ne pas prendre en compte ces trois professeurs dans l'analyse en classes. Dans la nouvelle analyse en classes, il y a une classe avec un seul professeur. Nous répétons la procédure précédente et nous obtenons avec 79 professeurs une analyse avec quatre classes.

IV. LES CROYANCES DES PROFESSEURS

On observe une variété de positions sur les croyances et la confiance en soi. Pour décrire chaque classe on regarde la différence entre le pourcentage de réponse entre le groupe étudié et l'ensemble de la population.

1. Première classe

La première classe contient 13 enseignants avec les réponses clivantes suivantes, beaucoup plus répondues dans la classe que dans l'ensemble de la population. Les enseignants sont fortement d'accord sur les éléments suivants. Chaque élève crée ou recrée des parties des mathématiques. Il y a d'habitude plus d'une façon de résoudre des tâches et des problèmes mathématiques à l'école. Les élèves ayant l'âge correct pour la tâche de modélisation proposée sont capables de la résoudre. Cette tâche ne prend pas trop de temps. Si les élèves s'attaquent à des problèmes mathématiques, ils peuvent découvrir quelque chose de nouveau (liens, règles, méthodes). Les enseignants sont fortement pas d'accord sur les éléments suivants. Pour résoudre une tâche mathématique à l'école on doit connaître la procédure unique ou alors on est perdu. La pensée mathématique à l'école est la mémorisation et l'application des définitions, formules, faits mathématiques et procédures. Les mathématiques à l'école sont un ensemble de procédures et de règles qui détermine précisément comment une tâche est résolue. Les enseignants semblent moins confiants que l'ensemble de la population pour tous les items, et spécialement pour donner une rétroaction verbale efficace à des groupes et des élèves afin de les aider à modéliser, ou pour aider les étudiants à développer des compétences en argumentant lors de tâches de modélisation.

Les enseignants de cette classe paraissent positifs envers l'enseignement de la modélisation, exprimant un besoin de soutenir les étudiants dans la modélisation et ayant un esprit ouvert sur les croyances mathématiques à l'école, avec surtout des positions fortes principalement sur ces points (fortement en accord ou en désaccord).

2. *Deuxième classe*

La seconde classe regroupe 31 enseignants avec les réponses clivantes suivantes, beaucoup plus répondues que dans l'ensemble de la population. La plupart des enseignants se sentent moins confiants que la population entière pour enseigner la modélisation. Notamment ils se sentent moins capables de concevoir des leçons de modélisation qui aident les élèves à surmonter les difficultés dans toutes les étapes de la modélisation (par exemple les problèmes de validation). Ils se sentent moins capables d' utiliser les erreurs des élèves pour faciliter leur apprentissage de la modélisation. Ils se sentent moins capables de bien évaluer les progrès des élèves dans leur travail sur des tâches de modélisation, d'adapter les tâches et les situations des manuels pour créer des problèmes ouverts réalistes, et de concevoir leurs propres tâches de modélisation.

Dans cette classe les enseignants semblent moins confiants pour enseigner la modélisation.

3. *Troisième classe*

La troisième classe contient 14 enseignants avec les réponses clivantes suivantes, beaucoup plus répondues que dans l'ensemble de la population. Ils sont fortement d'accord que la pensée mathématique à l'école est la mémorisation et l'application des définitions, des formules, des faits mathématiques et des procédures. Ils sont fortement en désaccord que les mathématiques à l'école sont utiles pour aider les individus à devenir des citoyens critiques responsables, qu'il est possible pour des étudiants de découvrir et d'essayer beaucoup de choses en mathématiques à l'école, que les mathématiques à l'école aident à comprendre des phénomènes de différents domaines de la société. Beaucoup plus que dans toute la population, ils sont neutres sur l'affirmation que les mathématiques sont d'une utilité générale et fondamentale pour la société, qu'il y a d'habitude plus d'une façon de résoudre des tâches et des problèmes mathématiques à l'école, ou que les mathématiques de l'école aident à résoudre les tâches et les problèmes quotidiens. A propos de la confiance en soi, il y a une variation en fonction des items, parfois ils sont moins confiants que l'ensemble de la population, parfois plus à l'aise, sans fortes différences.

Les enseignants de cette classe paraissent conservateurs à propos des mathématiques à l'école et sont moins ouverts pour appliquer les mathématiques de l'école à la vie.

4. *Quatrième classe*

Le quatrième groupe se compose de 21 enseignants. Pour tous les items de confiance en soi, ces enseignants se sentent davantage capables que l'ensemble de la population, et spécialement de concevoir des leçons de modélisation qui aident les élèves à surmonter les difficultés dans toutes les étapes de la modélisation (par exemple les problèmes de validation), de concevoir leurs propres tâches de modélisation, de bien évaluer les progrès des élèves dans leur travail sur les tâches de modélisation, d'élaborer des critères détaillés (liées au processus de modélisation) pour l'évaluation et la notation des solutions des élèves aux problèmes de modélisation, d'utiliser les erreurs des élèves pour faciliter leur apprentissage de la modélisation, d'aider les étudiants à développer des compétences en argumentant lors des tâches de modélisation, de donner une rétroaction verbale efficace à des groupes et des élèves afin de les aider à modéliser. Ils sont fortement d'accord dans l'avenir pour recourir à une approche par la modélisation dans leur enseignement.

Les enseignants de cette classe paraissent très confiants pour enseigner la modélisation.

V. VARIABLES BIOGRAPHIQUES ET CLASSES

Nous pouvons observer maintenant comment les réponses biographiques (sexe, âge, pays ...) sont réparties dans les classes. Nous repérons quelles sont les principales différences entre le pourcentage des réponses biographiques dans la classe et le pourcentage des réponses biographiques de l'ensemble de la population. Lorsqu'une réponse biographique est sur-représentée (ou sous-représentée) dans une classe, on dit que la variable est clivée par la classe. Nous allons essayer d'interpréter la relation entre la biographie et les classes. Mais il est clair qu'on peut trouver le même âge, le même pays ou le même type d'école clivés dans différentes classes.

1. Première classe

Les jeunes enseignants et les professeurs français sont plus nombreux dans ce groupe que dans l'ensemble de la population. Au contraire les enseignants hongrois, du secondaire, plus âgés, ou avec un nombre élevé d'années d'enseignement, sont moins nombreux. Les enseignants de cette classe paraissent positifs envers l'enseignement de la modélisation, exprimant un besoin de soutenir les étudiants dans la modélisation et ayant un esprit ouvert sur les croyances mathématiques à l'école, avec surtout des positions fortes principalement sur ces points (fortement en accord ou en désaccord). Les jeunes enseignants pourraient être d'esprit plus ouverts, car leur formation est plus axée sur la pédagogie de l'éducation et sur la didactique, champs de recherche plus récents et introduits plus récemment dans les formations, que les formations plus anciennes. En France, la résolution de problèmes joue un rôle principal dans l'enseignement des mathématiques. De plus, les professeurs de français du cours de formation étaient des professeurs de l'école primaire où les problèmes de la vie quotidienne sont très importants dans le programme officiel (Cabassut et Wagner 2009). Les enseignants hongrois sont moins présents peut-être parce que leur système scolaire est plus traditionnel (Vancso et Ambrus 2009), (Andrews 2010, pp. 17-18). Les enseignants du secondaire sont aussi moins présents peut-être parce que leurs enseignements sont plus axés sur des contenus mathématiques déconnectés d'activités de modélisation.

2. Deuxième classe

Les enseignants du secondaire, les professeurs allemands, les enseignants plus âgés sont plus nombreux dans ce groupe que dans l'ensemble de la population. Au contraire, les enseignants de l'école primaire et les jeunes enseignants sont moins nombreux.

Les enseignants de ce groupe semblent moins confiants pour enseigner la modélisation, et modérément ouverts à la modélisation. Les enseignants du secondaire sont peut-être plus axés sur le contenu mathématique que les enseignants du primaire et ont une pression institutionnelle pour réaliser le programme officiel. Les professeurs allemands ont connu un grand changement dans leur programme d'études en 2009, où la modélisation devient une idée directrice (Garcia et al. 2007). Ce changement officiel pourrait les rendre ouverts à la modélisation, mais moins confiants parce que c'est une idée nouvelle dans le programme. Les enseignants plus âgés pourraient également être moins à l'aise, si la modélisation correspond à un nouvel enseignement.

3. *Troisième classe*

Les enseignants plus âgés, les enseignants avec un nombre élevé d'années d'enseignement, les enseignants hongrois, les enseignants qui ont étudié les mathématiques au niveau universitaire, les enseignants du secondaire sont plus nombreux dans ce groupe que dans l'ensemble de la population. Au contraire les enseignants allemands, espagnols, avec un faible nombre d'années d'enseignement, les jeunes enseignants sont moins nombreux.

Les enseignants de cette classe paraissent conservateurs à propos des mathématiques à l'école et sont moins ouverts pour appliquer les mathématiques de l'école à la vie. Les enseignants plus âgés ayant une longue expérience pourrait avoir un comportement plus conservateurs que les enseignants jeunes et moins expérimentés. La Hongrie semble avoir un enseignement traditionnel et théorique des mathématiques comme évoqué précédemment.

4. *Quatrième classe*

Les jeunes enseignants, les professeurs espagnols, les enseignants du primaire sont plus nombreux dans ce groupe que dans l'ensemble de la population. Au contraire, les enseignants plus âgés, les enseignants avec un nombre élevé d'années d'enseignement, les professeurs allemands ou, les enseignants du secondaire sont moins nombreux.
Les enseignants de cette classe paraissent très confiants pour enseigner la modélisation. Les jeunes enseignants, mieux formés aux questions pédagogiques et didactiques, ou les enseignants espagnols pour des raisons culturelles (Garcia et al. 2007) sont peut-être plus confiants. Les enseignants du primaire, du fait de leur polyvalence, davantage habitués aux activités interdisciplinaires, sont plus confiants pour enseigner la modélisation. Nous avons expliqué dans la deuxième classe, pourquoi les enseignants allemands, les enseignants plus âgés ou les enseignants du secondaire pourraient être moins confiants pour enseigner la modélisation. Avec la quatrième classe, nous observons que les jeunes enseignants ou des enseignants du primaire semblent être plus ouverts à la modélisation.

VI. DISCUSSION ET CONCLUSION

Cette analyse exploratoire des croyances sur l'enseignement des mathématiques et sur l'enseignement de la modélisation semble inciter à formuler les conjectures suivantes. Certaines conjectures sont liées à la relation entre croyances sur l'enseignement des mathématiques et sur l'enseignement de la modélisation :

- une conception de l'enseignement des mathématiques assez théorique, peu orientée vers les applications dans la vie citoyenne et en société, n'est pas associée à un manque de confiance pour enseigner la modélisation ;
- une conception ouverte vers l'enseignement de la modélisation est compatible avec un manque de confiance pour l'enseigner.

Si ces deux conjectures sont vérifiées, cela signifie que l'enjeu pour développer l'enseignement de la modélisation n'est pas d'essayer des modifier des croyances sur l'enseignement des mathématiques mais plutôt d'analyser les manques de confiance et d'essayer d'y répondre par des contenus ciblés de formation initiale ou continue ou de ressources. Les cibles peuvent être variées : conception de cet enseignement, aide aux élèves, évaluation des élèves...

D'autres conjectures semblent montrer la coexistence d'enseignants plutôt confiants avec des enseignants moins confiants dans l'enseignement de la modélisation. On pourrait questionner l'intérêt d'un travail collaboratif entre pairs pour mettre à l'épreuve cette confiance dans des analyses des pratiques et des ressources professionnelles des uns et des autres.

Concernant les variables biographiques il faudrait confirmer des conjectures sur des facteurs explicatifs biographiques, et s'il y a confirmation les expliquer. Y a-t-il des éléments culturels liés par exemple aux systèmes de formations nationaux ? Dans ces éléments culturels la polyvalence des professeurs joue-t-elle un rôle ? Pourquoi l'âge jouerait un rôle moins favorable à l'enseignement de la modélisation ? En quoi le type d'école primaire/secondaire joue ? Cependant il ne faut pas oublier qu'un premier enseignement de cette étude exploratoire est de confirmer la complexité des variables biographiques qui se répartissent dans les différentes classes : il y a une hétérogénéité des professeurs, y compris au sein d'un même ensemble national, qui ne fait pas apparaître de relations simples entre variables biographiques et variables actives, et qui suggère une étude plus approfondie.

Le questionnaire était adressé à des enseignants de mathématiques, éventuellement polyvalents. Serait-il intéressant d'adapter ce questionnaire à des enseignants n'enseignant pas les mathématiques ? Dans la plupart des pays les maîtres de l'école primaire qui enseignent les mathématiques sont polyvalents. Il serait intéressant de mener une étude spécifique à l'école primaire pour voir dans quelle mesure cette polyvalence peut être une aide à un premier enseignement de la modélisation, et comment les croyances des enseignants de l'école primaire sont structurées par rapport à cette polyvalence.

REFERENCES

Andrews P. (2010) A comparison of Hungarian and English mathematics teachers'professional goals: Manifestations of implicit cultural expectations. In Gagatsis A., Rowland T., Panaoura A., Stylianides A. (Eds.) (pp. 5-20) *Mathematics education research at the University of Cyprus and the University of Cambridge: A symposium.* Lefkosia : School of Social Sciences and Sciences of Education, the University of Cyprus.

Bandura A. (1997) *Self-efficacy: The exercise of control*. New York : Freeman and Company.

Blum W. (1996) Anwendungsbezüge im Mathematikunterricht in der didaktischen Diskussion. *Mathematische Semesterberichte* 32(2), 195-232.

BOEN (2008) Programmes du collège. Programmes de l'enseignement de mathématiques. *ETBulletin officiel spécial n° 6 du 28 août 2008*.

Cabassut R., Wagner A. (2009) Roles of knowledge in the teaching of modelling at primary school through a French-German comparison. Paper presented at *the 14th International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications.* University of Hamburg.

Cabassut R., Mousoulides N. (2009) Theoretical Considerations for Designing and Implementing a Teacher Training Course on Mathematical Modeling: Insights from a French-Cypriot Comparison. In Gagatsis A. et al. (Eds.) *Cyprus and France research in mathematics education.* Lefkosia : University of Cyprus.

Cabassut R. (2007) Examples of comparative methods in the teaching of mathematics in France and in Germany. *Proceedings of 5th Congress of European society for research in mathematics education.* Larnaca, Cyprus.

Cabassut R. (2009) The double transposition in mathematisation at primary school. *Proceedings of 6th Congress of European society for research in mathematics education.* Lyon, France.

Cabassut R. (2010) Impact sur l'enseignement et la formation des évaluations internationales à grande échelle à partir de l'exemple de PISA. In Kuzniak A., Sokhna M. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et développement, enjeux de société et de formation.* Actes du colloque EMF2009. Revue internationale Francophone, numéro spécial.

Garcia F. J., Wake G., Maaß K. (2007) Theory meets practice: working pragmatically within different cultures and traditions. P*aper presented at* the 13th International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications. University of Hamburg.

Grigutsch S., Raatz U., Törner G. (1998) Einstellungen gegenüber Mathematik bei Mathematiklehrern. *Journal für Mathematikdidaktik* 19 (98), 3-45.

Kaiser G. (2006) The mathematical beliefs of teachers about application and modeling results of an empirical study. *30th PME conference*. Prague.

Maass K. (2006). What are modeling competencies? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 38(2).

Maaß K., Gurlitt J. (2009) Designing a teacher-questionnaire to evaluate professional development about modelling. *Proceedings of 6th Congress of European society for research in mathematics education.* Lyon, France.

PISA (2006) *Assessing Scientific, Reading and Mathematical Literacy: A Framework for PISA.* Publisher : OECD.

Tukey J. (1977) *Exploratory Data Analysis.* Reading, Massachusetts : Addison-Wesley.

Vancsó Ö., Ambrus G. (2009) Teaching mathematical modeling in Hungarian schools based on some national traditions. Paper presented at *the 14th International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications.* University of Hamburg.

DES MATHEMATIQUES AUX SCIENCES PHYSIQUES : EXEMPLES D'EFFETS TRANSPOSITIFS

Corine CASTELA*

Résumé – Cette communication s'intéresse aux effets de transposition subis par des praxéologies mathématiques à l'occasion de leur utilisation en Sciences Physiques et de leur enseignement sous la responsabilité de professeurs de cette discipline. A cette occasion, on présentera plusieurs développements du modèle praxéologique proposé par la Théorie Anthropologique du Didactique.

Mots-clefs : Praxéologie, technologie d'une technique, validation, automatique, approximation

Abstract – This proposition is focused on the topic of transposition effects operated on mathematical praxeologies either when used by Physical Sciences or when taught under Physical Sciences teachers' responsibility. Several developments of the Anthropological Theory of Didactics praxeological model will be presented as interesting tools for the transposition analysis.

Keywords: Praxeology, technology of a technique, validation, automatics, approximation

L'objectif de cette proposition est de présenter des développements récents apportés à la notion d'organisation praxéologique ou praxéologie, introduite par Chevallard (1999) au sein de la Théorie Anthropologique du Didactique. Le modèle praxéologique $[\mathrm{T}, \tau, \theta, \Theta]$ fournit une grille d'analyse des ressources produites par un groupe humain ou un individu dans le traitement des situations problématiques qu'il affronte. La notion de type de tâches *T* rend compte d'un processus de repérage d'une généricité qui est une condition nécessaire à l'émergence d'au moins une technique τ permettant de surmonter une certaine proportion de tâches du même type. Une technique est un ensemble de gestes, utilisant certains outils, dans certains dispositifs. $[\mathrm{T}, \tau]$ représentant le savoir-faire (la *praxis*), le bloc $[\theta, \Theta]$ prend en charge le discours rationnel (le *logos)* associé à cette pratique. Selon les définitions introduites par Chevallard (voir Ibid., p.226), la technologie θ de la technique τ est constituée de l'ensemble des savoirs qui permettent de *justifier* τ (prouver que, lorsqu'elle fonctionne, ses productions sont bien celles qui sont requises par la tâche traitée), de la *rendre intelligible* et de la *produire*. La théorie Θ est enfin définie comme la technologie de la technologie, l'ensemble des savoirs qui justifient θ. Si l'on peut postuler que toute technique socialement construite donne nécessairement lieu au développement d'une technologie, il n'en est pas de même de la théorie qui est très souvent embryonnaire. De nombreux travaux de didactique ont utilisé ce modèle praxéologique dans le cas de types de tâches mathématiques (l'usage est alors de parler d'Organisation Mathématique ou *OM*). Le lecteur pourra ainsi trouver différents exemples dans les actes de la 11e école de didactique des mathématiques (2002). Selon la démarche usuelle d'étude de la transposition didactique, on détermine d'abord l'*OM* de référence produite par les mathématiciens. Les descriptions proposées sont en général calquées sur ce qui est présenté dans les traités savants : la technologie est constituée des théorèmes qui permettent de produire la technique et en établissent la validité, de certaines démonstrations considérées notamment comme sources d'intelligibilité ; le triplet $[\mathrm{T}, \tau, \theta]$ apparaît en tant que conséquence d'une théorieΘ. Même si le modèle praxéologique correspond à la volonté de reconnaître que l'origine du savoir mathématique théorique est située dans la résolution de tâches problématiques, les *OM* de référence sont dépouillées de tous les avatars liés à leur invention. Elles sont le résultat d'une ascèse qui ne retient que le savoir minimal nécessaire à assurer la validité des techniques pour l'institution mathématique savante (désignée dans la suite par l'expression *la Recherche en Mathématiques*, les

* LDAR, Université Paris Diderot, Université de Rouen – France – corine.castela@univ-rouen.fr

© Castela C. (2012) Des mathématiques aux sciences physiques : exemples d'effets transpositifs. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT5, pp. 678–688). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

majuscules marquant la dimension institutionnelle). Mais ces *épures praxéologiques*, dont la technologie est centrée sur une fonction de validation éclairée (on sait que la technique produit bien ce qu'on attend d'elle et on comprend comment il se fait qu'elle le fait), satisfont-elles au projet de prendre en compte toutes les ressources cognitives produites dans l'affrontement aux tâches pour lesquelles sont inventées des techniques ? Certains des travaux réalisés autour de la résolution de problèmes en mathématiques produisent une première raison de répondre négativement à cette question. Selon les analyses développées notamment par Schoenfeld (1985) et en France par le courant « méta » (Robert et Robinet 1996), les savoirs nécessaires à l'usage efficace du savoir théorique ne sont pas entièrement pris en charge par ce dernier. L'utilisation par la Recherche en Mathématiques des épures praxéologiques s'accompagne du développement d'éléments technologiques pratiques, construits et validés dans l'empirie de l'activité des mathématiciens. Se situant, comme les travaux précédemment évoqués, dans la perspective d'un accompagnement didactique de la construction par les élèves de tels savoirs et postulant donc la nécessité de leur identification explicite, Castela 2008 (p. 143) propose de les intégrer au modèle praxéologique en distinguant une *composante pratique* θ^{p} *de la technologie*.

$$\left[T,\tau \; \begin{matrix} \theta^{\text{th}}, \Theta \\ \theta^{\text{p}} \end{matrix} \right]$$

Figure 1 *– premier développement du modèle praxéologique*

La *composante théorique* θ^{th} est formée de résultats validés par une théorie, $[T, \tau, \theta^{th}, \Theta]$ est donc l'épure praxéologique à laquelle peut être identifiée l'*OM* relative à *T*. θ^{p} est validée empiriquement et non selon le paradigme mathématique. Si cette composante dépasse la construction individuelle, ce qui apparaît nécessaire dès lors qu'il est par exemple envisagé de la constituer en enjeu identifié de la formation des professeurs, ces savoirs sont légitimés socialement et institutionnalisés grâce à des processus collectifs qui impliquent des praticiens confrontés à la résolution de tâches de type *T*.

Le feuilletage de la technologie ainsi proposé a donc été motivé par les besoins de modélisation du savoir produit dans et pour l'utilisation des *OM* par la recherche mathématique et l'enseignement. Il s'est ensuite révélé particulièrement adapté à l'étude des effets transpositifs subis par les *OM* lors de leur intégration en tant qu'outils pour des domaines de recherches non mathématiques et leurs applications professionnelles. Nous le montrerons dans la première partie de cette présentation. Puis, l'introduction des savoirs empiriques ayant attiré l'attention sur la question de la validation des composants de la praxéologie, nous l'examinerons comme susceptible d'effets transpositifs dans le cas de l'utilisation par les Sciences Physiques de praxéologies mathématiques. Ceci nous conduira à proposer en conclusion un deuxième développement du modèle.

I. LES FONCTIONS DE LA TECHNOLOGIE

Nous faisons référence dans cette partie à un travail réalisé dans le cadre de la thèse de didactique des mathématiques de Romo Vázquez (2009) consacrée à la formation mathématique des ingénieurs. Le contexte étudié est celui d'un Institut Universitaire Professionnalisé. La formation est caractérisée par une liaison étroite avec le monde de l'entreprise, qui se traduit notamment par le dispositif dit des projets d'ingénierie. Le cœur de la thèse porte sur l'étude de la place des mathématiques dans la réalisation de tels projets. L'un d'entre eux confronte les étudiants à un problème d'asservissement d'un système continu. Le traitement proposé s'appuie sur le logiciel Matlab, de nombreux savoirs mathématiques sont en jeu mais ils n'apparaissent pas explicitement. Dans le but de les mettre à jour, ont été examinés plusieurs cours consacrés à la transformation de Laplace et à son utilisation dans la résolution des équations différentielles linéaires : un cours de mathématiques proposé dans un groupe d'écoles d'ingénieurs et deux cours d'automatique relevant de cursus universitaires de formation technologique. Des différences notables sont apparues entre ces textes ; l'effort d'élucidation qu'il a fallu réaliser pour les analyser a conduit à préciser les fonctions attribuées aux savoirs technologiques, de façon à prendre en compte certains savoirs pratiques relatifs à l'utilisation des mathématiques en automatique (Castela et Romo Vázquez 2011).

Les savoirs technologiques d'un bloc [T, τ] peuvent remplir l'une ou l'autre des fonctions suivantes : *décrire, faciliter, motiver, valider, expliquer, évaluer.*

- *Décrire la technique*

La production d'un descriptif des gestes qui composent une technique est prise en compte comme un fait de savoir non identifiable à la maîtrise de la technique elle-même. L'élaboration d'un système de représentations, verbales et plus largement symboliques, des actions est en jeu.

- *Valider la technique*

La fonction considérée correspond à ce qui est en général entendu sous le terme *justifier* dans les textes qui définissent la notion de praxéologie. Les savoirs considérés établissent que la technique et les gestes qui la composent permettent bien d'atteindre les buts qui leur sont assignés.

- *Expliquer la technique*

L'enjeu est ici d'analyser comment il se fait que la technique permet bien d'atteindre les buts visés. Il existe des validations qui n'expliquent pas (par exemple des démonstrations analytiques en géométrie). Il existe aussi des explications qui ne valident pas, parce qu'elles ne respectent pas complètement les normes de la validation dans l'institution qui examine cette question de la validité. Elles insèrent la technique et ce qui en est su dans le tout d'une culture partagée, contribuant à la compréhension des causes par les sujets.

- *Faciliter la mise en œuvre de la technique*

Les savoirs considérés ici permettent d'utiliser avec efficacité mais aussi dans un certain confort la technique. Ils sont porteurs d'améliorations mais aussi d'avertissements permettant d'éviter erreurs et maladresses connues comme fréquentes. Ce domaine de savoirs est le terrain privilégié des élaborations technologiques d'utilisateurs. Il produit des reprises du descriptif, qui l'adaptent aux spécificités du contexte institutionnel d'utilisation et l'enrichissent de la mémoire des expériences accumulées.

- *Motiver la technique et les gestes qui la composent*

Les savoirs de motivation participent d'une intelligence des fins : pour faire quoi accomplit-on tel geste à tel moment ? Ce sont aussi des savoirs sur le type de tâches puisqu'ils en analysent les buts : ceux-ci justifient rationnellement les gestes en montrant leurs raisons d'être. Ils permettent d'anticiper les étapes à atteindre et jouent un rôle heuristique important lorsque la mise en œuvre de la technique nécessite des adaptations.

- *Evaluer la technique*

Les savoirs envisagés ici portent sur les conditions et les limites d'une technique relativement aux tâches du type T, par comparaison avec d'autres techniques possibles s'il en existe. Ils peuvent également concerner l'ergonomie de la technique du point de vue de ses utilisateurs.

Les fonctions évaluer, faciliter et motiver sont parfois intimement associées : la mise en évidence de certaines difficultés (*évaluer)* peut entraîner au bout d'un certain temps la production d'améliorations (*faciliter)* dont la motivation est donc fournie par l'évaluation.

Nous illustrerons ces définitions par quelques extraits du cours d'automatique mis en ligne sur le site national des IUT[1] (Institut Universitaire de Technologie, formant en deux ans des Techniciens supérieurs). Plus précisément, nous examinons les effets d'une double transposition sur l'*OM* de résolution des équations différentielles linéaires impliquant la transformation de Laplace. En effet, la Recherche en Automatique, domaine scientifique orienté vers les applications, utilise des praxéologies mathématiques, qui subissent donc un premier effet transpositif. Cette institution produit elle-même des praxéologies qui à leur tour sont utilisées dans des domaines de recherche plus spécialisés et dans les mondes industriels. Les praxéologies mathématiques poursuivent donc leur parcours transpositif. Celui-ci se prolonge à des fins didactiques dans les institutions de formation de techniciens et d'ingénieurs. Sauf précision contraire, les extraits examinés se situent dans le chapitre 1 « Transformation de Laplace. Relation Equation Différentielle-Fonction de transfert ».

Pour comprendre ce qui suit, quelques éléments concernant les types de tâches traités par l'automatique sont nécessaires. L'auteur du cours analysé précise :

> Notre problème est donc d'asservir une grandeur physique $y(t)$ [ce qui] consiste à essayer d'obtenir $y(t) = y_e(t)$ où $y_e(t)$ représente la loi de consigne qu'on s'est fixée. […] Avant de pouvoir asservir $y(t)$, il faut pouvoir agir sur $y(t)$ par modification d'une grandeur de commande $x(t)$. […] Quand une perturbation [de $y(t)$] se manifeste, il faudra réagir sur la commande pour rétablir $y(t)$ à sa valeur consigne. Ceci ne peut être obtenu que par une boucle fermée. (pp. 2-3)

La commande en boucle fermée suppose qu'un capteur transforme $y(t)$ en une nouvelle grandeur dont les variations doivent enclencher le processus de correction. Le capteur doit être fiable et véloce, c'est-à-dire rendre compte de l'évolution de y en minimisant distorsion et retard. Les éléments suivants (chapitre 2 « Réponse temporelle des Systèmes Linéaires ») sont précisément liés à l'évaluation des qualités d'un capteur, à travers l'estimation du temps qu'il lui faut pour réagir à une variation brutale. Les systèmes considérés sont tels qu'une relation différentielle lie les grandeurs $x(t)$ et $y(t)$. Lorsqu'il s'agit d'une équation linéaire du premier ordre à coefficients constants, celle-ci est présentée sous la forme $\tau \cdot \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = A \cdot x(t)$ et τ est appelée constante de temps. L'extrait de cours suivant (§2.3.3) traite du cas où $x(t) = a \cdot u(t)$ ($u(t) = 0$ pour $t < 0$ et 1 pour $t \geq 0$).

> La fonction de sortie est notée $y_{ind}(t)$: $y_{ind}(t) = aA(1 - e^{-t/\tau}) \cdot u(t)$. C'est une courbe exponentielle qui, à partir de la valeur initiale, varie de $\Delta y = a \cdot A$ où a représente l'amplitude de l'échelon, A le gain position (gain statique) du système. […] nous savons que le régime permanent est atteint au bout d'un temps $t_\infty = 7\tau$.

Donc si une fonction d'entrée passe d'une valeur constante à une autre, il faut un temps estimé à 7τ pour que la fonction de sortie soit elle-même stabilisée. Si le système en question est le capteur contrôlant la grandeur asservie $y(t)$ envisagée plus haut, 7τ est le temps nécessaire à une prise en compte fidèle d'une variation de y. Cette affirmation est *validée* dans ce cours par la résolution de l'équation $e^{-t_a/\tau} = a/100$, en tenant compte de l'usage en vigueur dans le domaine qui admet l'égalité pour une erreur relative inférieure à 1 %. D'autres cas possibles pour la fonction $x(t)$ sont ensuite examinés, l'étude montre alors l'importance de la constante

[1] Verbeken M., *Asservissements continus*. iutenligne.net/ressources/automatique

de temps dans la fiabilité des capteurs. Ceci a des conséquences importantes sur la praxéologie dont nous étudions ici l'évolution, comme nous allons le voir maintenant.

Quelques éléments devraient suffire pour comprendre ce qui est en jeu. La transformation de Laplace est une application linéaire injective définie sur un ensemble de fonctions d'une variable réelle ; sa propriété fondamentale est que si $F(p)$ est la transformée d'une fonction *f*, $p \times F(p) - f(0)$ est celle de la dérivée *f'*. Ceci a pour conséquence que par application de la transformation de Laplace, une équation différentielle à coefficients constants $b_n y^{(n)} + b_{n-1} y^{(n-1)} + ... + b_1 y' + b_0 y = a_m x^{(m)} + a_{m-1} x^{(m-1)} + ... + a_1 x' + a_0 x$ est transformée, si toutes les conditions initiales sont nulles, en l'équation algébrique $b_n p^n Y + b_{n-1} p^{n-1} Y + ... + b_1 pY + b_0 Y = b_m p^m X + b_{m-1} p^{m-1} X + ... + b_1 pX + b_0 X$, où *Y* et *X* désignent les transformées des fonctions *x* et *y*. *Y* est donnée par la formule $Y = T(p) \times X$ où *T*(*p*) qu'on appelle Fonction de Transfert est un rapport de deux polynômes en *p*. La résolution de l'équation différentielle suppose de déterminer la fonction dont $T(p) \times X$ est la transformée de Laplace. Ce type de tâches est traité dans la partie 1.8 « Transformation inverse » du cours :

> 3 méthodes s'offrent à nous, mais seulement la dernière sera exploitée.
> […] 1.8.3. Table de Transformées de Laplace
> C'est grâce à cette table que nous pourrons exprimer les fonctions du temps sans trop de calculs. Elle est parfaitement adaptée à nos besoins en Automatique. Evitez d'utiliser une autre table qui renfermera des éléments inutiles et qui ne donnera pas les fonctions sous leur forme canonique (*évaluer, faciliter*).
> Pour les fonctions *F*(*p*) [la fonction dont on cherche l'inverse] compliquées il faudra faire une décomposition de cette fonction en une somme d'éléments simples puis prendre l'originale de chaque élément afin d'en faire à nouveau la somme (*décrire*).
> Il est préférable d'exprimer une exponentielle en faisant apparaître la valeur de la constante de temps τ plutôt que son inverse *a* (*évaluer, faciliter*). En effet nous montrerons au chapitre suivant que la durée de vie de cette exponentielle est égale à 7 fois τ (*motiver*). Ceci nous oblige à mettre *F*(*p*) sous une forme canonique en mettant toutes les constantes en facteur (*décrire, faciliter*). Par exemple, on transformera (3*p*+2) en 2(1+1,5*p*), la valeur 1,5 représente alors la constante de temps (1,5s) de l'exponentielle qui interviendra dans la fonction *f*(*t*). Ainsi on sait qu'au bout de 7 fois 1,5 soit à peu près 10 secondes, l'exponentielle sera nulle (*motiver*).

L'influence de l'institution d'utilisation sur la praxéologie mathématique apparaît clairement dans cet exemple. La technique mathématique et sa description sont modifiées par rapport à la technique initiale, telle qu'on la trouve exposée dans un cours de mathématiques pour ingénieurs où, dans la décomposition en éléments simples, les dénominateurs sont de la forme $(p - p_i)^k$. Les adaptations proposées augmentent l'ergonomie de la technique compte tenu des besoins spécifiques du contexte d'utilisation, ces motivations sont explicitées dans le texte du cours en ligne, dont une caractéristique est le souci constant de motiver les praxéologies présentées et d'en faciliter l'utilisation, ce qui le conduit à développer la composante θ^p, celle-ci prenant particulièrement en charge les fonctions *Motiver*, *Faciliter* et *Evaluer*. Notons l'intérêt méthodologique de l'étude d'un cours à distance dont le contexte favorise l'explicitation écrite de savoirs qui seraient tus dans des manuels et apparaîtraient au mieux à l'oral dans une formation présentielle.

Nous nous intéresserons dans la suite de cette communication à la question de la validation de la technique et de sa technologie, peu abordée ici. Signalons pour conclure cette première partie que les fonctions de la technologie, définies dans le cas où l'institution utilisatrice de la technique ne relève pas du monde mathématique, se révèlent également pertinentes pour l'analyse des savoirs pratiques produits dans et pour la résolution de problèmes (voir Castela 2011, Chapitre 1).

II. VALIDATION DES COMPOSANTES D'UNE PRAXEOLOGIE

L'introduction des savoirs pratiques, en tant que production des utilisateurs, qu'ils soient mathématiciens ou automaticiens, professeurs ou étudiants, crée une perturbation dans l'épure praxéologique mathématique. En effet, construits dans l'empirie, ces savoirs ne vivent pas au régime des assertions mathématiques, ils ne sont le plus souvent ni universels, ni nécessaires et ne se valident pas par démonstration. Ils ne relèvent pas de la fécondité des théories développées par la science mathématique. Le modèle présenté en figure 1 laisse vide l'instance de la théorie en regard de la composante θ^p. Par son caractère radical, cette représentation veut mettre en exergue un fait nouveau relativement aux *OM* : le modèle praxéologique laisse échapper une partie décisive des bases de la validation et par suite de l'institutionnalisation de certaines ressources cognitives liées à la pratique. Même si l'on avance, comme Chevallard, que toute technologie est dotée d'un embryon de discours de justification, on doit soupçonner *a priori* qu'une telle théorie évanescente ne contribue que modérément aux processus qui fonderont une conviction partagée dans des mondes scientifiques ou professionnels de la validité de certains savoirs pratiques. Ce point ne sera pas développé ici, faute de recherche permettant de l'explorer.

Mais la nécessité de réexaminer la nature des formes de la validation ne concerne pas les seuls savoirs pratiques. Nous nous intéressons dans cette partie aux effets transpositifs subis par une *OM* lors de son utilisation par une autre science et lors de la reconstruction didactique opérée dans le cadre d'un Enseignement de cette même science. Les différents exemples examinés ici relèvent des sciences physiques. On doit envisager que la praxéologie enseignée soit marquée, jusque dans les modalités de validation par la Recherche en Sciences Physiques qui est l'institution de référence de l'institution d'enseignement considérée. Ceci est d'autant plus plausible que dans son histoire, la Recherche en Sciences Physiques a, régulièrement, développé et reconnu des techniques de résolution de certains types de tâches mathématiques, non formellement validées par la Recherche en Mathématiques, faute d'un cadre théorique adéquat qui ne serait produit qu'ultérieurement. Ainsi, à la fin du XIX^{e} siècle, Oliver Heaviside (1850-1925), chercheur en physique, développe, dans le cadre de ce qu'il appelle calcul symbolique, une technique formellement identique à celle que fonde de nos jours la transformée de Laplace. Celle-ci lui permettra de répondre aux besoins mathématiques soulevés par l'étude des régimes transitoires dans les phénomènes électriques. Heaviside ne se soucie pas de questions de validité mathématique, le calcul symbolique fonctionne comme un outil heuristique permettant de trouver l'expression de solutions dont l'existence est établie du fait que les équations à résoudre modélisent des phénomènes physiques effectifs, et que le physicien peut valider en dernier ressort par retour à ces mêmes phénomènes. Heaviside valide par induction les techniques de résolution proposées en comparant les solutions symboliques avec les solutions explicites connues. Les travaux scientifiques de Heaviside furent reconnus par ses pairs, bien avant que, vers la fin des années 1930, l'emploi du calcul symbolique ne soit justifié à partir des intégrales de Carson et de Laplace. L'histoire des sciences est jalonnée de telles validations *a posteriori* par les mathématiciens. Celles-ci sont connues de la Recherche en Sciences Physiques mais la question de leur transposition didactique est ouverte, notamment si elle est placée sous la responsabilité d'une institution d'enseignement de sciences physiques. L'étude relative à la transformée de Laplace a ainsi mis en évidence, au sein des deux cours d'automatique, diverses modalités de validation des énoncés mathématiques, interprétées en terme de références à la Recherche en Mathématiques (Castela et Romo Vázquez 2011, pp. 104-113) : celle-ci peut être *convoquée* (une démonstration plus ou moins conforme aux normes mathématiques est proposée), *invoquée* (l'existence d'une garantie mathématique est mentionnée), *ignorée* (le caractère problématique de l'énoncé n'est pas explicité –par exemple, l'injectivité de la transformée de Laplace-, et donc non plus l'existence d'une preuve). Ainsi la transposition didactique peut dépouiller l'*OM* de la théorie qui valide la technique et sa technologie θ^{th}. Mais ceci n'a pas pour conséquence irrémédiable la présentation d'une praxéologie incomplète puisque l'enseignement peut s'appuyer sur la praxéologie première développée par la Recherche en Sciences Physiques en respectant sa propre épistémologie. On trouvera dans l'article cité (pp. 114-116) un cas relatif à l'impulsion de Dirac δ (*t*). Après avoir invoqué la théorie des distributions, le cours étudié développe le cadre mathématiquement approximatif des fonctions généralisées, antérieure à la formalisation théorique proposée par Schwartz (1950) ; il peut ainsi justifier le fait que l'intégrale de la fonction δ (*t*) vaut 1, essentiel pour le calcul de la transformée de Laplace. Ce premier niveau de validation est ensuite complété en référence aux phénomènes physiques modélisés. La forme transposée de l'*OM* se trouve dotée d'un discours de validation enrichi de plusieurs points de vue dont on peut penser qu'il bénéficie aux yeux du physicien d'une force de validation plus convaincante et d'un pouvoir explicatif bienvenu.

La Recherche en Mathématiques étaie au plan théorique avec retard certaines des inventions mathématiques de la Recherche en Sciences Physiques. Néanmoins, dans l'ensemble des affirmations mathématiques produites par les physiciens, une certaine proportion demeure non établie mathématiquement. Hypothèses intervenant dans la modélisation d'un phénomène physique, elles sont validées en tant que telles dans le mouvement même de validation du modèle par confrontation aux phénomènes expérimentaux. Illustrons cette affirmation dans le domaine des approximations. Rogalski (2006) s'intéresse aux modélisations par équations différentielles, il illustre la procédure utilisée en physique par la situation d'un écoulement dans une canalisation poreuse :

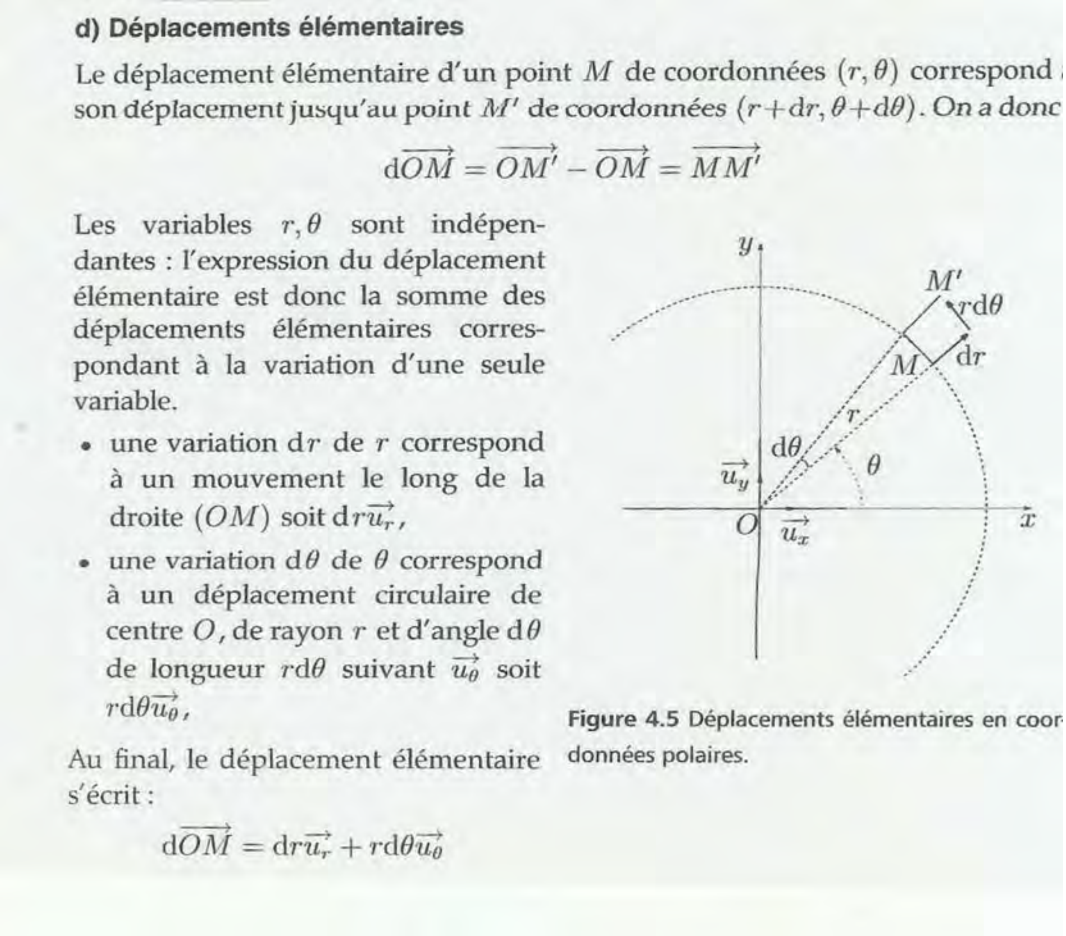
> On étudie les pertes d'eau le long d'une canalisation poreuse cylindrique, de rayon R, on suppose que sur un petit segment, la fuite est à peu près proportionnelle à la surface du segment et au débit. Si $\delta(x)$ désigne le débit à l'abscisse x de la canalisation, la variation $\Delta\delta$ correspondant à un accroissement Δx de l'abscisse est donnée par l'approximation : $\Delta\delta \approx -2\pi Rk \cdot \delta(x) \cdot \Delta(x)$. Par passage à la limite, on obtient lorsque Δx tend vers 0 l'équation différentielle $\dfrac{d\delta}{dx} = -2\pi Rk \cdot \delta$

L'approximation présentée en premier lieu constitue un écart avec la réalité physique puisque le débit n'est pas constant. Pour que le passage à la limite soit valide, il faut que l'erreur sur $\dfrac{\Delta\delta}{\Delta x}$ tende vers 0 en même temps que Δx. Donc le modèle proposé postule une certaine qualité de l'approximation différentielle adoptée. La validation d'une telle hypothèse peut être fondée mathématiquement dans certaines situations, Rogalski (Ibid.) en propose plusieurs exemples. Mais un tel contrôle par les mathématiques peut être complexe ou impossible, il n'est pas nécessairement privilégié par les physiciens. S'appuyant sur un sens physique de l'approximation valide, construit dans l'expérience, ceux-ci proposent des modèles qui peuvent toujours être évalués *a posteriori* par confrontation aux phénomènes expérimentaux. Si leur intuition du négligeable a été mise en défaut, le modèle sera rejeté. Ce processus de contrôle relève de l'essence même des sciences physiques qui s'émancipent ainsi des manques mathématiques. Mais son existence peut induire une prise de distance avec les développements de nature mathématique qui, dans certains cas, permettent d'évaluer *a priori* les erreurs provoquées par les approximations appliquées par les physiciens à des objets mathématisables. Nous allons voir un exemple d'une telle option, issu d'un manuel de Physique de première année du supérieur[2].

---

[2] Sanz M.-N., Badel A.-E., Clausset F. (2002) *Physique Tout-en-un 1ère année*. Collection *J'intègre*. Paris : Dunod (pp. 94-95)

Le chapitre considéré est consacré à la cinématique du point matériel, nous examinons un extrait (Figure 2) consacré à l'expression du déplacement élémentaire en coordonnées polaires.



d) Déplacements élémentaires

Le déplacement élémentaire d'un point M de coordonnées (r, θ) correspond à son déplacement jusqu'au point M' de coordonnées $(r+\mathrm{d}r, \theta+\mathrm{d}\theta)$. On a donc

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM'}$$

Les variables r, θ sont indépendantes : l'expression du déplacement élémentaire est donc la somme des déplacements élémentaires correspondant à la variation d'une seule variable.

- une variation $\mathrm{d}r$ de r correspond à un mouvement le long de la droite (OM) soit $\mathrm{d}r\overrightarrow{u_r}$,
- une variation $\mathrm{d}\theta$ de θ correspond à un déplacement circulaire de centre O, de rayon r et d'angle $\mathrm{d}\theta$ de longueur $r\mathrm{d}\theta$ suivant $\overrightarrow{u_\theta}$ soit $r\mathrm{d}\theta\overrightarrow{u_\theta}$,

Au final, le déplacement élémentaire s'écrit :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\overrightarrow{u_r} + r\mathrm{d}\theta\overrightarrow{u_\theta}$$

Figure 4.5 Déplacements élémentaires en coordonnées polaires.

Figure 2 – *Extrait de manuel, p. 94*

La base locale polaire est formée des vecteurs unitaires $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$. On a dans cette base $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$. Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est donc une fonction vectorielle de 2 variables r et θ, que nous notons $\vec{F}$. L'objet de l'étude est de déterminer $\vec{F}(r+dr, \theta+d\theta) - \vec{F}(r, \theta)$. Un théorème relevant de la théorie des fonctions de plusieurs variables (différentielle) établit que :

> Si la fonction $\vec{F}$ possède des dérivées partielles premières continues sur un ouvert U de IR², alors on a : $\vec{F}(r+dr, \theta+d\theta) - \vec{F}(r, \theta) = \frac{\partial \vec{F}}{\partial r}dr + \frac{\partial \vec{F}}{\partial \theta}d\theta + \vec{\Delta}(dr, d\theta)$, $\vec{\Delta}$ étant un $o(\sup(|dr|, |d\theta|))$.

Ce résultat est un exemple de résultat mathématique qui détermine l'ordre de l'approximation (ici linéaire) qui sera retenue. Mais ce manuel ne fait pas référence à ce résultat.

Le raisonnement est mené par égalités (aucun signe ≈), ce qui interdit toute interrogation quant à l'ordre de l'erreur commise. Or plusieurs approximations se succèdent. Si $N = M(r, \theta+d\theta)$ et $N' = M(r+dr, \theta)$, le quadrilatère MNM'N' est identifié à un parallélogramme puis $\overrightarrow{MN}$ est égalé à $r\,d\theta\,\vec{u}_\theta$ alors qu'il ne lui est pas véritablement colinéaire et qu'il est plus court. Il était possible de calculer dans le repère fixe

($\vec{u_x}, \vec{u_y}$) les composantes du vecteur $\overrightarrow{MM'} - \overrightarrow{dOM}$, on aurait vérifié alors en utilisant les DL des fonctions cosinus et sinus que l'erreur commise est bien d'ordre 1 par rapport aux accroissements élémentaires de r et θ.

A la page suivante du manuel (figure 3), sont déterminées les dérivées des vecteurs unitaires de la base polaire par rapport à θ. On notera cette fois une certaine reconnaissance du processus d'approximation et de l'ordre de l'erreur (« premier ordre en dθ »), énoncé qui reste sans justification. On peut supposer qu'intervient ici un savoir relatif à la qualité de l'approximation obtenue en identifiant une courbe à sa tangente mais celui-ci n'est pas explicité.

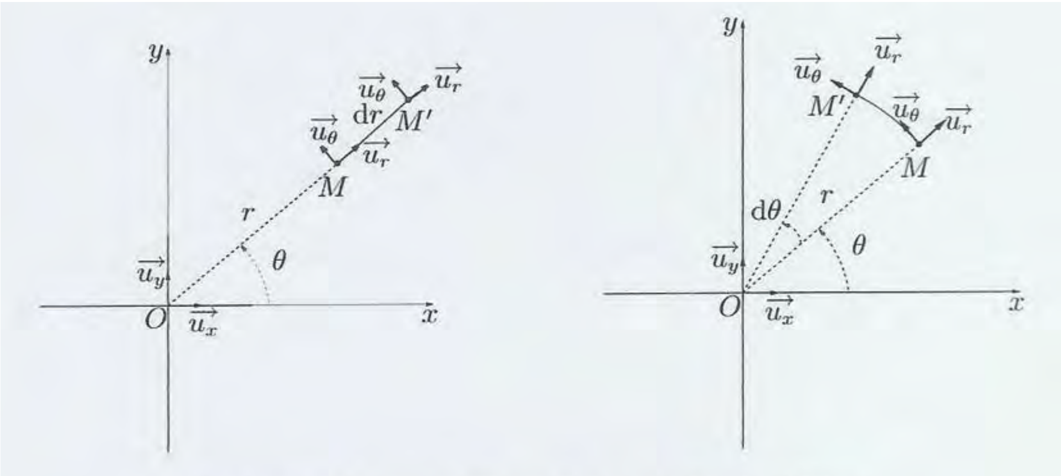


Figure 4.6 Déplacements élémentaires en coordonnées polaires.

Sur la figure de droite, l'angle $d\theta$ a été fortement exagéré pour la clarté du schéma, l'arc de cercle MM' est en réalité assimilable à un segment de droite et la base polaire en M' est la même qu'en M (au premier ordre en $d\theta$).

En dérivant par rapport à θ les expressions précédentes, on déduit :

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{u_r}}{d\theta} = -\sin\theta\vec{u_x} + \cos\theta\vec{u_y} = \vec{u_\theta} \\ \dfrac{d\vec{u_\theta}}{d\theta} = -\cos\theta\vec{u_x} - \sin\theta\vec{u_y} = -\vec{u_r} \end{cases}$$

Figure 3 *– Extrait de manuel, p. 95*

Remarquons enfin que la nécessité d'avoir une approximation d'ordre 1 n'est pas motivée. Pourtant la notion même de vitesse fournit dans ce contexte une raison d'être facilement accessible : le vecteur vitesse étant la limite du vecteur $\dfrac{\overrightarrow{MM'}}{dt}$ lorsque $dt \to 0$, il faut que le vecteur par lequel on approche $\overrightarrow{MM'}$ lui soit équivalent au sens mathématique (quotient tendant vers 1).

Comme nous en avions envisagé la possibilité, cet extrait montre une option didactique qui réduit le discours mathématique de validation de la technique d'approximation utilisée. Mais, ce qui est étonnant pour un mathématicien, est l'absence d'expansion d'un discours du physicien qui exprimerait certaines exigences relativement à la qualité de l'approximation, les motiverait et établirait qu'elles sont satisfaites, dans le cadre de l'épistémologie de la discipline. Tout se passe comme si, ce discours, peut-être justement parce que ne relevant pas des épures praxéologiques des Sciences Physiques, n'accédait pas aux manuels de la discipline. La mise en texte du savoir, notamment à des fins didactiques, se traduisant par l'effacement des processus non théoriques de validation, la question de leur remplacement doit être posée, en tant que dimension de toute étude transpositive. Ceci conduit à proposer de nouveaux développements du modèle praxéologique (Castela 2011, Chapitre3).

III. CONCLUSION

Ce modèle se présente de la façon suivante :

$$I \rightarrow \left[T,\tau, \begin{matrix} \theta^{r}, \Theta \\ \theta^{p} \end{matrix} \right] \begin{matrix} \leftarrow I_r \\ \leftarrow I_u \end{matrix}$$

Figure 4 *– second développement du modèle praxéologique*

La partie gauche du schéma explicite le fait que le développement praxéologique est initié par l'existence d'un besoin institutionnel, la droite fait apparaître les institutions qui ont à faire avec la praxéologie Π considérée et, figurés par les flèches situées à droite, les processus de validation et plus largement d'institutionnalisation de Π réalisés dans et par ces institutions. I_r, généralisation des institutions Recherche en Mathématiques et Recherche en Sciences Physiques, désigne des *institutions de recherche*, c'est-à-dire dont le rôle social est de créer des praxéologies : la fonction institutionnelle des chercheurs n'est pas limitée au traitement de tâches de *T*, elle est de développer et valider une praxéologie relative à *T*. Ce détour par rapport à la pratique et ses contraintes, ce délai par rapport à ses rythmes, n'est pas l'apanage de la science. Ainsi la recherche technique, pourtant prioritairement intéressée par la pratique et le développement des techniques (alors que la science a d'abord des visées épistémiques), se donne le temps d'une validation organisée et systématique de ses inventions. Ce faisant, elle développe une technologie, laquelle peut être exclusivement expérimentale : en résistance des matériaux par exemple, de très nombreuses formules en jeu dans le bâtiment résultent de processus de modélisation-vérification expérimentale en laboratoire. $[\mathrm{T}, \tau, \theta^{r}, \Theta]$ est une généralisation de la notion d'épure praxéologique considérée précédemment, θ^{r} étant composée de savoirs validés selon les normes en vigueur dans I_r. D'autres institutions I_u reconnaissent la validation réalisée par les institutions de recherche et s'approprient les praxéologies produites pour les utiliser. Elles développent des savoirs technologiques pratiques θ^{p} qu'elles valident pour elles-mêmes. Remarquons que le travail praxéologique de I_r peut dans certains cas s'appuyer sur des praxéologies $[\mathrm{T}, \tau, \theta^{p}, -]$ développées dans des institutions ayant affaire à *T*.

Les exemples présentés ont montré que l'utilisation d'une épure praxéologique dans une institution I_u pouvait avoir des effets transpositifs sur les quatre composantes de cette épure, bloc $[\theta^{r}, \Theta]$ compris, les évolutions étant soumises à de nouveaux processus de validation impliquant transactions entre les institutions concernées, confrontation/conciliation entre des normes différentes, au sein d'une institution spécifique notée I^*_r qu'il paraît raisonnable de qualifier de noosphérienne. Ceci aboutit à un dernier modèle, où le symbole * exprime l'existence d'une transposition de la praxéologie initiale :

$$I \rightarrow \left[T^*, \tau^*, \begin{matrix} \theta^{*r}, \Theta^* \\ \theta^{p} \end{matrix} \right] \begin{matrix} \leftarrow I^*_r \begin{matrix} \mathrm{Ir} \\ \mathrm{Iu} \end{matrix} \\ \leftarrow I_u \end{matrix}$$

Figure 5 *– un modèle pour guider l'étude des effets transpositifs de la circulation praxéologique*

REFERENCES

Castela C. (2011) *Des mathématiques à leurs utilisations, contribution à l'étude de la productivité praxéologique des institutions et de leurs sujets. Le travail personnel au cœur du développement praxéologique des élèves en tant qu'utilisateurs de mathématiques*. Note de synthèse présentée en vue de l'Habilitation à Diriger des Recherches. Paris : Université Paris Diderot.

Castela C. (2008) Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignorés par les institutions d'enseignement. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 28(2), 135-182.

Castela C., Romo Vázquez A. (2011) Des mathématiques à l'automatique : étude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 31(1), 79-130.

Chevallard Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19(2), 221-266.

Dorier J.-L., Artaud M., Artigue M., Berthelot R., Floris R. (Eds) (2001) *Actes de la 11ème école d'été de didactique des mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Robert A., Robinet J. (1996) Prise en compte du méta en didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 16(2), 145-176.

Rogalski M. (2006) Mise en équation différentielle et mesure des grandeurs. Un point de vue mathématique sur la collaboration avec la physique. *Repères IREM* 64, 27-48.

Romo Vázquez A. (2009) *La formation mathématique des ingénieurs.* Thèse de doctorat. Université Paris Diderot.

Schoenfeld A. H. (1985) *Mathematical Problem Solving.* Orlando, FL : Academic Press.

Schwartz L. (1950) *Théorie des distributions Tome 1.* Paris : Hermann.

UNE ARTICULATION DE LA STATISTIQUE AVEC LE SAVOIR MEDICAL : LE PROJET LOE

Marie-Caroline CROSET* – Muriel NEY** – Hamid CHAACHOUA**

Résumé – À l'université de médecine de Grenoble, en France, un projet d'enseignement et de recherche s'est construit autour d'un module de biostatistique : le projet LoE. Dans cet article, nous présentons trois hypothèses de recherche qui ont permis de le mettre en œuvre avec en particulier une volonté d'articuler connaissances théoriques en statistique et connaissances professionnelles de médecine. Nous étayons ensuite ces hypothèses par des études tant quantitatives que qualitatives.

Mots-clefs : biostatistique, épidémiologie, dévolution, jeu sérieux, lecture critique d'articles

Abstract – At medical school of Grenoble, France, The Laboratorium of Epidemiology (LOE) was collaboratively designed as both an educational project and a research project, as part of a course in biostatistics. In this article, three research hypotheses are presented. They allowed carrying out the project with an articulation between theorical knowledge in statistics and real professional situations. We support these hypotheses by different studies.

Keywords: biostatistics, epidemiology, devolution, serious game, Critical Reading of Article

En France et dans de nombreux pays, la biostatistique est enseignée au début des études de médecine. La biostatistique est utile principalement dans le cadre de l'épidémiologie. La finalité de l'épidémiologie est « le progrès des connaissances dans le domaine de la santé et de la santé publique, c'est à dire l'état de santé de la population, des mécanismes qui le déterminent, des facteurs qui le menacent et des moyens qui sont mis en œuvre pour l'améliorer » (Coquidé et Lange 2006, p. 11). Les méthodes de l'épidémiologie se sont construites avec l'évolution de la pratique de la médecine, d'une pratique empirique du diagnostique au chevet du malade et basée sur des faits cliniques observés, jusqu'à l'utilisation de résultats validés, soit par l'usage des statistiques soit par l'expérimentation animale. En particulier, les statistiques au service de l'épidémiologie permettent, en l'absence de certitude, de décider et d'agir grâce à l'établissement d'une présomption causale.

L'usage des statistiques en médecine arrive au XVII^e siècle avec une montée en puissance des chirurgiens et du rôle des hôpitaux et sous l'impulsion de mathématiciens, comme Bernoulli puis Laplace, qui proposent d'appliquer à la médecine des mathématiques nouvelles (Coquidé et Lange 2006). Plus récemment, dans le monde anglo-saxon, le mouvement de l'*evidence-based medicine* pousse à une médecine basée sur des faits prouvés : elle intègre, dans la décision du médecin, son expérience et les préférences du patient mais aussi les résultats de la recherche. Cette approche propose également de classer les résultats publiés dans les articles médicaux en fonction de leur niveau de preuve. Des types d'études comme les essais comparatifs randomisés de forte puissance sont au plus haut niveau, tandis que, par exemple, les études épidémiologiques transversales descriptives sont classées au plus bas niveau de preuve.

Selon Coquidé et Lange (2006), un enseignement de l'épidémiologie et des méthodes statistiques qui l'accompagne (biostatistique) permet de familiariser les apprenants à une culture du risque et à l'incertitude et de faire appréhender la nature des savoirs scientifiques et

* Techniques de l'Ingénierie Médicale et de la Complexité (TIMC), Université Joseph Fourier – France – marie-caroline.croset@imag.fr
** Laboratoire d'Informatique de Grenoble (LIG), CNRS et Université Joseph Fourier – France – muriel.ney@imag.fr, hamid.chaahoua@imag.fr

© Croset M-C., Ney M., Chaachoua H. (2012) Une articulation des statistiques avec le savoir médical : le projet LoE. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21^e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT5, pp. 689–698). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

médicaux ainsi que leurs enjeux économiques, sociétaux, etc. Ces auteurs prônent une initiation à l'épidémiologie au collège et au lycée.

Dans un ouvrage de biostatistique collectif destiné au premier cycle des études médicales, cet enseignement est justifié, entre-autres, par le fait que pour réaliser une bonne lecture critique d'article, on a besoin d'une culture biostatistique de base (Valleron 2010). Celle-ci doit en effet permettre de comprendre la méthodologie conduisant aux résultats de recherche clinique pour majorité basés sur des statistiques. A partir de 2009, le ministère de l'éducation français met en place une épreuve de Lecture Critique d'Articles médicaux scientifiques (LCA) aux Epreuves Nationales Classantes (ENC), ancien concours de l'internat, qui clôt les 6 premières années d'études. L'enseignement de la biostatistique, souvent au niveau L2, va contribuer à la préparation de l'épreuve de LCA. Les objectifs de cette épreuve sont (http://www.cnci.univ-paris5.fr/medecine/) : Identifier l'objet d'un article médical (type d'étude et hypothèses), analyser la méthodologie (type de population, sélection des sujets et des groupes, cohérence de la méthode, analyses statistiques, respect des règles d'éthiques…), analyser la présentation des résultats (précision, lisibilité, présence d'indicateurs de variabilité …), critiquer l'analyse des résultats et la discussion (relever les biais, vérifier que les résultats apportent un réponse à la question posée au départ, vérifier que les conclusions sont justifiées au vu des résultats…), évaluer les applications (discuter les applications cliniques potentielles de l'étude) et enfin analyser la forme de l'article (titre, références, structure).

A la faculté de médecine de Grenoble, les mathématiques sont enseignées en première année (année de préparation au concours), en particulier les statistiques descriptives et inférentielles. Cet enseignement est orienté vers les objectifs du concours et ses modalités (répondre à des QCM en temps limité) et déconnecté des situations professionnelles. En revanche, dès la deuxième année, un enseignement de biostatistique (12h de cours magistral et 32h de travaux pratiques) est articulé avec le savoir professionnel et les besoins qui en ressortent. Nous allons étudier en détail dans cet article et nous le considérons comme un enseignement qui articule deux types de savoirs : statistiques et médical ; les statistiques y étant enseignées pour répondre à des finalités professionnelles. Parmi tous les objectifs d'apprentissage de ce module, ceux qui concernent directement les savoirs statistiques, sont de savoir mettre en œuvre et interpréter les statistiques univariées descriptives, les tests d'hypothèse, les risques relatifs et les *odds ratio* (rapports des chances ou des risques), la qualité d'un test, les biais en épidémiologie et la construction d'un seuil de décision (courbe ROC).

A Grenoble en 2008, un projet d'enseignement et de recherche autour du module de biostatistique de 2^{e} année a vu le jour, fruit d'une collaboration étroite entre des épidémiologistes, médecins, statisticiens et didacticiens. C'est ce projet, nommé LoE (*Laboratorium of Epidemiology*), que nous allons décrire dans cet article : dans une première partie nous décrirons les réflexions pédagogiques et les choix didactiques qui ont guidé son élaboration et, dans une deuxième partie, les études qui ont été menées pour étayer les hypothèses de travail énoncées dans la première partie. Nous conclurons sur une discussion qui propose de relire ce projet comme une situation a-didactique.

I. LE PROJET LOE

1. Les hypothèses sous-jacentes au projet

Le *Laboratorium of Epidemiology* LoE (http://loe3.tel-laboratorium.fr/, Ney et Balacheff 2008, Gonçalvès, Ney, Balacheff et Bosson 2009) est un *jeu sérieux* (Sanchez, Ney et Labat,2011) qui simule une situation réelle dans laquelle les étudiants de médecine doivent réaliser une mission où ils jouent le rôle de médecin en santé publique sur plusieurs semaines. Les étudiants doivent concevoir et effectuer une étude épidémiologique puis écrire un article scientifique qu'ils devront présenter à un congrès simulé. Cet enseignement se déroule sur un semestre pédagogique. Ce projet repose sur le constat fait par les doyens de médecine et le ministère de l'enseignement supérieur que :

> Avec l'accélération de la recherche, les étudiants en médecine ont besoin de compétences spécifiques pour comprendre et interpréter les résultats du progrès médical. […] Décrypter, décoder et restituer sont des compétences exigibles d'un professionnel de la santé qualifié. (Communiqué du 26 juillet 2007 de V. Pecresse, http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr/cid20100/lecture-critique-d-article-a-l-examen-national-classant-de-2009.html)

En parallèle, à Grenoble, l'équipe enseignante avait amorcé une réflexion sur l'enseignement des statistiques en partant d'un double constat :

- un manque d'intérêt chez les étudiants de médecine pour l'apprentissage de la statistique, du moins telle qu'elle leur est enseignée (Valleron 2010) ;
- et dans le même sens que la réflexion ministérielle précitée, cet enseignement était dispensé jusqu'alors sans une véritable articulation avec des besoins professionnels ; ce manque renforçant, par ailleurs, probablement l'absence d'intérêt décrite ci-dessus.

A Grenoble, pour accompagner cette formation et répondre à cette demande ministérielle, le projet LoE a été lancé. Il s'est ainsi construit autour de trois objectifs :

- Motiver les étudiants à l'apprentissage de la statistique ;
- Répondre à la demande ministérielle d'éduquer le regard à la lecture d'articles scientifiques rapportant une étude d'observation ou expérimentale[1] ;
- Donner du sens aux statistiques.

Pour ce faire, LoE s'est basé sur trois hypothèses de travail, décrites ci-après.

- Hypothèse 1 : *Jouer un rôle et s'approprier une mission augmente la motivation*.

Nous distinguons deux points qui ont pour effet de motiver, au sens d'intéresser et d'impliquer, les étudiants. D'une part, il y a l'appropriation (Goncalves et al. 2009), autrement dit la prise de responsabilité, de la mission et des problèmes conçus pour l'apprentissage (Brousseau 2004). D'autre part, le jeu de rôle proposé dans LoE est basé sur des interactions humaines (Ney, Gonçalvès, Balacheff, Schwartz et Bosson 2010), ce qui pourrait favoriser aussi la motivation.

- Hypothèse 2 : *Mettre les étudiants en situation de production d'articles contribue à répondre au développement de la LCA*.

Le but est d'apprendre en faisant vivre aux étudiants toutes les étapes qui conduisent à la rédaction d'un article. Les étudiants vont ainsi résoudre un problème complexe et, ce faisant, en apercevoir les difficultés et les limites. Ce qui devrait leur permettre d'acquérir des connaissances pour voir ces difficultés et ces limites dans les articles écrits cette fois-ci par d'autres auteurs.

- Hypothèse 3 : *Articuler le savoir statistique avec des besoins professionnels permet de donner du sens aux statistiques*.

La mission proposée consiste à traiter un problème médical dont la résolution nécessite la mobilisation de connaissances statistiques. Nous souhaitons que les étudiants donnent du sens aux statistiques comme outil pour résoudre des problèmes de la profession qu'ils seront

[1] Bulletin officiel du Ministère de l'Education Nationale n° 31 du 30 août 2001

amenés à exercer. Le problème médical peut ainsi être vu comme une raison d'être professionnelle des savoirs statistiques.

Les hypothèses 1 et 3 répondent au premier objectif du manque de motivation. Les hypothèses 2 et 3 répondent au deuxième objectif sur la LCA et l'hypothèse 3 répond au troisième objectif à propos du sens à donner aux statistiques.

2. *Présentation du dispositif*

Le jeu LoE est entièrement intégré dans le programme pédagogique de la faculté de médecine de Grenoble. Il a été mis en place dans le cadre d'un module de biostatistique de 2e année qui dure quatre mois et inclut huit sessions de travaux pratiques de quatre heures en présence d'un tuteur et six cours magistraux de deux heures chacun. Dès 2008/2009, le jeu LoE est imposé à un groupe de 28 étudiants (sur une promotion de 164 étudiants). Depuis 2009/2010, il est généralisé pour l'ensemble des étudiants (une promotion de 170 étudiants).

Aujourd'hui, les étudiants se voient confier une mission où ils jouent le rôle d'une équipe de médecins en santé publique. Ils se retrouvent dans une situation professionnelle autrement inaccessible pour eux, puisqu'elle implique d'enquêter sur l'incidence d'une maladie (la maladie thromboembolique veineuse ou MTE) dans plusieurs hôpitaux. Une étape de leur enquête importante au regard des objectifs d'apprentissage concerne l'analyse statistique d'une base de données médicales. Cette analyse doit être faite pour une publication scientifique mais aussi pour proposer un outil décisionnel d'examens qui permette aux médecins hospitaliers d'optimiser les soins et la prévention de la MTE. La solution attendue est d'utiliser des tests d'hypothèse comme preuve scientifique à leur enquête.

Les règles du jeu sont à découvrir par les étudiants lors du premier des huit TP en explorant la plate-forme web du jeu. Elles se présentent sous la forme de tâches à réaliser et de moments de rétroactions à certaines de leur production. Les interactions ne se déroulent pas en présentiel dans le but d'inciter les étudiants à jouer le jeu de ces interactions de manière réaliste. Derrière ces rétroactions, se cachent des tuteurs ou des professionnels de santé qui collaborent à ce projet. Les tâches avec leurs objectifs d'apprentissage sont indiquées dans le tableau suivant. Il est structuré selon les huit TP (colonne de gauche). Ces tâches sont exécutées par des équipes de trois à quatre étudiants. Sont indiquées également, les sources de rétroactions envoyées aux étudiants via l'environnement informatique.

TP	Tâches	Objectifs d'apprentissage	Source de la rétroaction
1	Faire une recherche bibliographique, choisir l'objectif principal de son étude et planifier son travail	Acquérir des connaissances sur une maladie spécifique et la méthodologie utilisée dans le cadre de la recherche en épidémiologie	Experts MTE (via un forum)
2	Concevoir une enquête épidémiologique et envoyer le protocole pour validation	Construire et structurer une enquête (qualité des données, qualité des indicateurs, des considérations éthiques)	Experts du Comité de Protection des Personnes (par mail)
3	Effectuer l'enquête auprès de patients dans un ou plusieurs hôpitaux après en avoir fait la demande.	Mettre en œuvre une enquête (traduire le langage des patients en données, contrôler et organiser les données)	Responsables d'unités à l'hôpital (par téléphone) donnant la permission d'interroger des patients (filmés)
4 et 5	Le nombre de patients « virtuels » interrogés étant insuffisant, demander des données supplémentaires au Département d'Information Médicale. Analyser les données de l'enquête.	Organiser et mettre en œuvre une analyse des données à l'aide d'un logiciel de statistique (en particulier le logiciel R2web proposé sur la plate-forme) et proposer des interprétations des résultats	Rétroactions du logiciel

5 et 6	Rédiger un article et le soumettre à un congrès	Comprendre comment un article de médecine est structuré, comment sélectionner et présenter des résultats et des éléments de preuve statistique	Rapporteurs du congrès (via la plate-forme web)
7	Remplir un bon de demande d'examen hospitalier. Intégrer les remarques du rapporteur et préparer un exposé	Synthétiser les résultats en prenant en considération les commentaires du rapporteur	Experts assistant au congrès
8	Participer à un congrès médical	Argumenter les choix diagnostics découlant des travaux précédents	Experts assistant au congrès

Tableau 1 *– Tâches des étudiants, objectifs d'apprentissage et les sources des rétroactions*

Parmi toutes les possibilités de contrôler leurs productions offertes aux étudiants (voir les sources de rétroactions dans le tableau 1), trois sont des moments de validation obligatoires : une autorisation d'interroger des patients (qui sont en fait des vidéos préenregistrées de patients) doit être obtenue avant d'aller visiter les chambres, le protocole doit être validé par le Comité de Protection des Personnes avant d'être implémenté à l'hôpital et l'article doit être accepté par le comité scientifique du congrès. Dans le premier cas, il s'agit d'une demande formulée sur une boite vocale qui est ensuite acceptée ou refusée (notification par SMS ou par téléphone). Dans les deux derniers cas, les étudiants auront à revoir leur production écrite, si cela leur est demandé.

De plus, il y a un système de récompense. Les équipes d'étudiants les plus performantes gagnent le droit de présenter leurs résultats dans une communication longue (10 minutes au lieu de 5 pour les autres) lors du congrès qui se déroule le dernier jour. Un tiers des articles (15/45) a été sélectionné pour une communication longue en 2010 et un peu plus du quart (13/47) en 2011.

II. RETOUR SUR LES HYPOTHESES

Lors de la mise en place d'un changement pédagogique d'une telle envergure, il est légitime de se demander si les étudiants ayant suivi le nouvel enseignement ne sont pas, au moins, défavorisés par rapport aux étudiants ayant suivi l'enseignement avant changement. Mais l'évaluation d'un enseignement et de son impact est compliquée. Nous avons cherché à faire une relecture de nos trois hypothèses de travail et évaluer a posteriori leur réelle mise en place, leur faisabilité et leur pertinence. Pour ce faire, nous avons exploité différentes productions (éléments de cet enseignement atypique, études réalisées par notre équipe,…) issues des trois dernières années scolaires où LoE a été utilisé :

- Certaines *interactions* au cours du jeu entre les étudiants et des personnages du jeu. Elles peuvent être des moments de validation et de contrôle (cf. tableau 1) ou non. L'analyse de ces interactions a été utilisée pour étayer l'hypothèse 1, ce qui sera présenté en section II.1.
- Des *entretiens* de 5 minutes menés par un membre de notre équipe auprès des étudiants ayant suivi l'enseignement du projet LoE. Environ la moitié des équipes, soit une moyenne de 22 étudiants par séance, a été ainsi interrogé juste après chacun des huit TP. Lors de ces entretiens, le chercheur-interviewer demandait d'abord à l'étudiant ce que son équipe avait produit le jour même, pour lui remettre en mémoire la séance ; puis trois questions suivaient invariablement : « Qu'avez-vous produit aujourd'hui ? », « Avez-vous trouvé crédible ce que vous avez fait aujourd'hui ? », « Pensez-vous que ce que vous avez fait aujourd'hui soit utile pour votre formation ? ». Le chercheur interagissait très peu afin de laisser les étudiants expliciter spontanément leur ressenti. Ces entretiens ont été utilisés pour étayer l'hypothèse 1.

- Les résultats à différents *examens* de la promotion de l'année scolaire 2008/2009 où LoE a été « imposé », comme nous l'avons dit plus haut, à un groupe de 28 étudiants alors qu'en parallèle, un enseignement de biostatistique « sans jeu » (celui prodigué les années précédentes) était dispensé au reste de la promotion (136 étudiants). Ces enseignements en parallèle ont permis de revenir sur l'hypothèse 2.
- Les réponses à un *questionnaire* posé à cette même promotion 2008/2009. 19 étudiants du groupe LoE et 20 sans LoE ont été interrogés sur leurs impressions (Chazot 2010 ; Ney, Croset, Chazot et Gonçalvès 2010). Elles ont permis d'étayer les trois hypothèses.
- Enfin, les *témoignages* des enseignants, relecteurs des articles, permettent un retour sur l'hypothèse 3.

Nous expliquons maintenant comment chacune de ces productions a permis de revenir sur les trois hypothèses.

1. *Retour sur l'hypothèse 1 : analyse des interactions, des entretiens et du questionnaire*

La première hypothèse concerne l'appropriation d'une mission, incluant un rôle et des interactions avec divers personnages, pour augmenter la motivation. Cette appropriation est le résultat d'un transfert de responsabilité de la résolution des problèmes posés par la mission, des enseignants vers les équipes d'étudiants.

Cette hypothèse induit deux questions : est-ce que les conditions mises en place pour permettre l'appropriation ont effectivement conduit à cette prise de responsabilité et est-ce que cette appropriation a conduit à une plus grande motivation. Nous n'avons pas testé de manière expérimentale ces questions, mais nous avons des éléments de réponses directs sur la première et indirects (des indications de motivation sans lien causal prouvé avec l'appropriation) sur la deuxième.

Nous avons analysé les *interactions* décrites précédemment. Ce sont les moments où les étudiants interagissent par téléphone, par mail ou avec des vidéos (tableau 1). En analysant ces données, nous cherchions à identifier des signes d'appropriation de leur rôle chez les étudiants. Nous avons constaté que les étudiants jouent le jeu demandé par ces interactions mais pas toujours. Par exemple, les étudiants ont jugé l'interaction par téléphone non crédible sur la base principalement du canal de communication (laisser un message vocal sur un répondeur) ce qui a pu entrainer un manque d'engagement dans l'activité se traduisant notamment par un contenu des appels incomplet et donc des objectifs d'apprentissage sans doute non atteints. Par contre, les interactions par mail ou par vidéo ont été plus effectives en terme d'appropriation de la mission, des problèmes et du rôle. Les *entretiens* des étudiants « à chaud » juste après chaque TP ont confirmé ces résultats. Il ressort de ces entretiens également que l'appropriation ne s'est pas faite dès le premier TP, sans doute à cause d'une rupture du contrat didactique qui laisserait les étudiants dans un état plus passif que prévu.

A propos de la motivation, nous avons exploité le *questionnaire* passé auprès des étudiants ayant suivi l'enseignement avec ou sans LoE. Nous montrons que le sentiment d'utilité du jeu pour la formation évolue positivement au cours des semaines. En effet, les ressentis des étudiants du projet LoE (évalués sur une échelle à quatre valeurs) évoluent positivement au cours des travaux pratiques. Une analyse des différences entre les deux scénarios d'enseignement, sur lesquels nous revenons dans la section suivante, a permis de relier cette motivation grandissante à deux facteurs principaux : l'obtention de reconnaissance (par exemple celle liée au congrès simulé) et le fait de jouer un rôle (celui d'un médecin) (Croset, Ney, Gonçalves, Balacheff, Schwartz et Bosson 2011).

2. Retour sur l'hypothèse 2 : analyse des résultats aux examens et du questionnaire

La deuxième hypothèse fait le pari qu'en demandant aux étudiants de produire eux-mêmes un article, ils seront à mêmes de porter un regard critique sur d'autres articles. Nous nous sommes alors posés deux questions : les étudiants ayant été insérés dans le projet LoE ont-ils été défavorisés lors d'examens de biostatistique par rapport aux étudiants ayant suivi le module « sans jeu » ? En allant plus loin, ces étudiants seraient-ils même plus compétents lors d'une lecture critique d'articles de biostatistique ? Pour répondre à ces questions, nous avons exploité les résultats aux *examens* de la promotion pilote 2008/2009.

Présentons sommairement les différences et ressemblances entre les deux enseignements de biostatistique, avec et sans LoE, ayant eu lieu cette année-là. Les deux groupes d'étudiants[2] avaient le même type de travail à effectuer et sur un calendrier identique, à savoir une enquête, une analyse statistique et un article à rédiger puis à présenter oralement à la fin du module. On peut cependant noter quelques différences entre les deux types d'enseignement. Tout d'abord, dans le module sans LoE, les étudiants devaient mener une enquête afin de répondre à une question de leur choix. Ils étaient donc libres de choisir le sujet de leur enquête qui était bien souvent sans rapport avec le médical. En revanche, avec LoE, les étudiants devaient choisir une question dans le cadre de la problématique des MTE. De plus, dans le module sans LoE, la majorité des étudiants ont réalisé leur enquête auprès de personnes dans la rue ou d'étudiants sur le campus, manquant très souvent au final d'effectif suffisant pour leur enquête. Avec LoE, les étudiants ont interrogé des patients à l'hôpital (certes, de façon virtuelle, les patients étant des vidéos préenregistrées) et ils ont eu accès à une base de données leur permettant de faire des analyses sur de plus grands échantillons. Enfin, le gain et l'enjeu étaient plus importants pour le groupe LoE puisqu'il y avait une sélection des articles en communication longue ou courte et une présentation formelle en congrès simulé.

Nous avons comparé les résultats obtenus par les 28 étudiants du groupe LoE et les 136 étudiants sans LoE à trois examens qui ont lieu en 2^e^ année (à l'issu du module de biostatistique) et en 3e année (après deux sessions d'entraînement à la LCA). La comparaison des notes obtenues à l'examen de 2^e^ année montre que LoE a un effet significativement positif sur les questions de biais des études et sur leur capacité à détecter l'objectif principal de l'étude. En revanche, il semble que LoE a un effet négatif sur l'aspect purement calculatoire tel que le calcul des bornes de l'intervalle de dispersion. LoE aurait aussi un impact positif sur la rétention (compétence des étudiants à long terme) puisque les étudiants ayant suivi l'enseignement avec LoE réussissent significativement mieux à l'examen de 3^e^ année de LCA que les autres étudiants (Croset et al. 2011), cf. figure 1.

[2] La répartition des étudiants avait été faite alphabétiquement. De plus, un test de Mann-Whitney sur leur rang de sortie de 1re année de médecine a montré qu'il n'y avait pas de différence significative de niveau entre ces deux groupes.

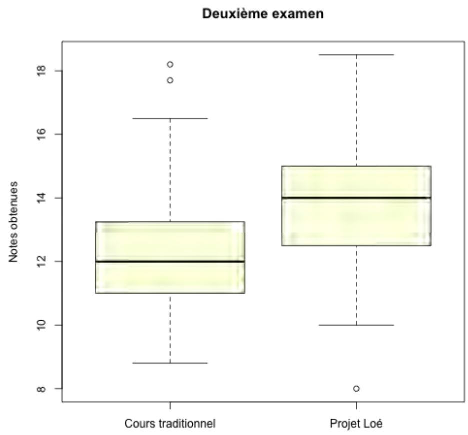


Figure 1 *– La comparaison des notes obtenues à l'examen de 3e année par les 28 étudiants du projet Loé et par les 136 étudiants de l'enseignement traditionnel relève que la moyenne est significativement plus élevée (p-valeur < 0,01) en faveur des étudiants du projet Loé.*

L'étude de réponses au *questionnaire* va dans le même sens. En effet, des questions mesurées sur une échelle de Likert de quatre valeurs portaient sur l'impact de l'enseignement de biostatistique sur la LCA. Par exemple, « est-ce que la démarche apprise lors des TP vous sert pour votre formation / la lecture critique d'articles / votre culture générale ? » ou « est-ce que le recueil de données était utile pour votre formation / la lecture critique d'articles / votre culture générale ? ». Les étudiants ayant suivi le module avec LoE ont répondu significativement plus souvent la LCA : (19 étudiants du projet LoE ont répondu que la démarche apprise leur servirait la LCA) que les étudiants du cours sans LoE (au nombre de 12). Cela va dans le sens des résultats aux examens : les étudiants LoE semblent être mieux préparés que les autres pour la Lecture Critique de l'Article et en avoir conscience.

3. Retour sur l'hypothèse 3 : analyse du questionnaire et des impressions des enseignants-relecteurs

La troisième hypothèse porte sur l'articulation de l'enseignement de la biostatistique aux besoins de la profession médicale pour donner du sens aux statistiques. Les réponses au questionnaire nous aident à nouveau à étayer cette hypothèse. En effet, les réponses (toujours données sur une échelle de Likert) à la question « grâce aux TP, savez-vous mieux utiliser les tests statistiques ?[3] » montrent là-aussi une différence significative entre les deux groupes d'étudiants : les étudiants du groupe LoE se sentent plus en confiance avec les tests statistiques que les étudiants du groupe dit « sans LoE ».

Par ailleurs, depuis 3 ans, nous recueillons les commentaires des enseignants ayant en charge le module basé sur l'utilisation de LoE. Avant la mise en place de LoE, ces mêmes enseignants enseignaient déjà pour le module de biostatistique. Leurs impressions nous semblent donc intéressantes pour évaluer et améliorer le système d'année en année mais aussi pour revenir sur l'hypothèse 3 puisque ces enseignants sont experts à la fois en statistiques et en besoins de la profession médicale, étant pour la plupart médecins. Nous présentons les commentaires qu'ils ont faits à la suite de la relecture des articles (quatre relectures environ par enseignant).

[3] Les tests principalement enseignés (comme faisant partie des objectifs d'enseignement) aux étudiants sont les tests de comparaison de moyennes.

Globalement, les enseignants sont satisfaits de la bonne utilisation et compréhension des tests statistiques ce qui était l'un des objectifs d'apprentissage du TP. Les articles leur semblent même d'année en année de meilleure facture avec moins d'erreurs. Ils notent que la principale difficulté reste, cependant, pour les étudiants, de contextualiser les méthodes et de mêler raisonnement médical et résultats statistiques. Ainsi, les étudiants sont capables d'écrire un article sur l'étude d'un facteur de risque, à partir d'un échantillon cas-témoins, en concluant qu'il y a un facteur de risque avéré, sans jamais donner la fréquence de la maladie dans les deux groupes. Malgré la volonté du projet LoE de contextualiser les statistiques, les étudiants ont encore tendance à s'accrocher à l'idée que c'est un enseignement de statistiques et à oublier leurs autres connaissances et le contexte professionnel. Par exemple, dans un article, sur 400 patients, seulement 12 n'avaient pas reçu de traitement préventif et les étudiants n'ont pas eu le réflexe de regarder les particularités éventuelles de ces cas (telle que l'âge) ou de refaire une étude en les excluant. A contrario, certains étudiants, lors des TP, ont eu de mal à mobiliser les connaissances théoriques statistiques vues et apprises l'année précédente. Alors que ces étudiants ont montré des compétences indéniables pour un apprentissage par cœur des statistiques lors du concours de 1re année, ils ont des difficultés à exploiter ces mêmes connaissances dès lors qu'elles sont contextualisées dans un cadre différent.

Nous avons donné des indications de la pertinence des trois hypothèses de travail qui ont été à l'origine du dispositif LoE, concernant l'amélioration de la motivation, une meilleure réussite à la LCA, et un sens accru donné aux tests d'hypothèse. Cependant, pour chacune de ces hypothèses, nous avons aussi vu des limites ou des améliorations à apporter au projet, un temps important pour une bonne appropriation, des difficultés chez les étudiants à mettre en œuvre certains calculs ou à mobiliser des connaissances théoriques en contexte professionnel.

III. DISCUSSION

Comme nous venons de l'évoquer à nouveau à propos de l'hypothèse 1, les étudiants ont mis du temps pour s'approprier la mission. La situation étant nouvelle, elle nécessite la mise en place de nouvelles règles du contrat didactique. Nous considérons que cette phase est importante dans notre dispositif car elle détermine la dévolution de la situation (Brousseau 2004). Ce point est interrogé dans le travail de thèse de Gonçalvès (Gonçalvès et al. 2009). Plus largement, nous nous demandons si le dispositif LoE se donne les moyens pour que la situation soit vécue comme a-didactique. Le dispositif n'a pas été conçu a priori avec cette volonté-là. Cependant, les hypothèses d'apprentissage sous-jacentes ont abouti à la construction d'une situation dans LoE qui nous semble répondre aux critères d'une situation a-didactique ou qui pourraient évoluer dans ce sens-là.

En effet, dans ce dispositif, la situation a été proposée de telle sorte que les étudiants construisent leur rapport à l'objet de connaissance ou plutôt modifient ce rapport comme réponse aux exigences du milieu et non au désir de l'enseignant (Brousseau 2004). L'analyse du dispositif montre qu'il y a bien eu un transfert de responsabilité par rapport au savoir de l'enseignant vers les étudiants (partie II1.). La connaissance visée, par exemple « utilisation de test statistique » est envisagée par les étudiants comme une réponse optimale pour mener à bien la mission car elle est seule capable d'apporter une preuve scientifique à leur résultat. Le milieu permet des rétroactions (tableau 1) permettant la validation de la procédure par l'étudiant. Enfin, le dispositif permet aussi de répéter certains aspects du jeu tel que refaire un test statistique en fonction de la rétroaction renvoyée par le logiciel d'analyse statistique (intégré à l'environnement informatique de LoE), réinterroger les patients des hôpitaux ou encore améliorer son article suite aux commentaires des relecteurs.

Enfin, nous considérons le dispositif mis en place, présenté dans le tableau 1, comme une AER (Activités d'étude et de recherche) au sens de Chevallard (2005). En effet, ces activités permettent l'étude par la construction collective du savoir comme une recherche de réponse à un problème dévolu aux étudiants et la réponse au problème de départ constitue une raison d'être du savoir statistique visé.

REFERENCES

Brousseau G. (2004) *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chevallard Y. (2005) Place des mathématiques vivantes dans l'éducation scolaire : transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire. In *Actes de l'université d'été d'Animath à Saint-Flour en Août 2004*, Brochure APMEP n° 168 Ed. APMEP.

Coquidé M., Lange J.-M. (2006) Introduction de l'ouvrage collectif. In Coquidé M., Lange J.-M., Tirard S. (Eds) *Epidémiologie, pour une éducation raisonnée à l'incertitude.* Paris : Vuibert Adapt-snes.

Croset M.-C., Ney M., Gonçalves C., Balacheff N., Schwartz C., Bosson J.-L. (en révision en 2011) Evaluation of immersive experiences in a medical game: student exchanges with characters of the game. *Simulation and gaming: an interdisciplinary journal*.

Gonçalvès C., Ney M., Balacheff N., Bosson J.-L. (2009) *Student's Problem Appropriation in an Epidemiology Game*. Paper presented at ECGBL 2009, European Conference on Game-Based Learning. Graz, Austria.

Ney M., Balacheff N. (2008) *Learning aware environment: a Laboratorium of epidemiological studies*. Paper presented at the Adaptive Hypermedia Conference, Workshop on Technologies for Mobile and Wireless Adaptive E-learning Environments. Hanover, Germany.

Ney M., Croset M.-C., Chazot D., Gonçalvès C. (2010) Evaluer l'impact d'un jeu sérieux sur les compétences et les perceptions des étudiants. *Actes de la conférence TICE 2010 (Technologies de l'Information et de la Communication pour l'Enseignement)*. Nancy, décembre 2010.

Ney M., Gonçalvès C., Balacheff N., Schwartz C., Bosson J.-L. (2010) Phone, Email and Video Interactions with Characters in an Epidemiology Game: towards Authenticity. *Lecture Notes on Computer Science (LNCS), Transactions on Edutainment IV*, 241-255.

Sanchez E., Ney M., Labat J.-M. (2011) Jeux sérieux et pédagogie universitaire : de la conception à l'évaluation des apprentissages. *Revue internationale des technologies en pédagogie universitaire* vol. 8, n°1-2.

Valleron A.-J. (2010) Préface de l'ouvrage collectif. In Beuscart R., Benichou J., Roy P., Quantin C. (Eds) *Biostatistique, licence PCEM/PCEP*. Paris : OmniScience.

NARRER POUR PROBLEMATISER DANS LE CONTEXTE DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE D'APPRENTIES EN DIFFICULTÉ D'APPRENTISSAGE

Jean-Michel FAVRE[*]

Résumé – Ce texte présente un centre de formation professionnelle et sociale (CFPS) pour apprenties en difficulté d'apprentissage et décrit les grands traits des conditions dans lesquels l'enseignement s'y déroule. Il envisage l'usage de la narration comme un outil de restitution et de problématisation des interactions didactiques qui ont lieu dans les classes, permettant de dépasser les enjeux relationnels qui s'y nouent. Il propose un exemple de narration concernant un objet d'enseignement continument sensible dans ce contexte : la proportionnalité.

Mots-clefs : didactique des mathématiques, formation professionnelle, difficultés d'apprentissage, narration, proportionnalité

Abstract – This text presents a professional and social training centre (CFPS) for apprentices in difficulty and describes the main features of the conditions in which the teaching takes place. We experiment “narration” as a tool to restore and question didactic interactions taking place in the classes, allowing to overcome the relationship difficulties. We propose an example of narration about a teaching object always important in this context: proporzionality.

Keywords: didactic of mathematics, professional training, learning difficulties, narration, proportionality.

I. INTRODUCTION

Après plus d'une vingtaine d'années passées dans l'enseignement spécialisé et la formation des enseignants spécialisés, j'ai découvert, depuis une année et demi environ, le monde qui jouxte ce dernier dans son aval, et dans lequel les élèves qui sortent de l'enseignement spécialisé au terme de leurs années d'école obligatoire ont de bonnes chances d'aboutir : le monde de la formation des apprentis empêchés par des difficultés d'apprentissage de suivre une formation professionnelle ordinaire.

La spécificité du centre dans lequel je travaille désormais est de vouloir offrir aux apprenties[1] qu'il accueille une formation globale, c'est-à-dire une formation qui leur permette d'apprendre un nouveau métier et qui participe conjointement à l'évolution de leurs compétences personnelles et sociales, ultérieurement susceptibles de favoriser une insertion sociétale adéquate. De fait, la formation se déroule essentiellement dans trois lieux distincts :

- les secteurs professionnels dans lesquels travaillent des maîtres socioprofessionnels qui accompagnent les apprenties dans le processus d'appropriation progressive d'un métier ;
- le secteur éducatif dans lequel travaillent des éducateurs qui soutiennent les apprenties dans le processus de construction de leur identité personnelle et sociale ;
- le secteur enseignement dans lequel travaillent des enseignants spécialisés qui participent auprès des apprenties à l'acquisition de connaissances culturelles, de compétences en matière de communication et de stratégies d'apprentissage.

Je ne m'étends pas ici plus avant sur la description du fonctionnement de ces trois lieux, ni sur celui du centre dans son ensemble, si ce n'est pour indiquer que ces trois « lieux pour apprendre » constituent, de par les différents corps de métier qui y sont représentés et par les

[*] CFPS du Château de Seedorf – Suisse – jmfavre@cfps-seedorf.ch

[1] J'utiliserai le substantif « apprentie » tout au long de ce texte, puisque le centre de formation dans lequel je travaille accueille un public exclusivement féminin.

© Favre J.-M. (2012) Narrer pour problématiser dans le contexte de la formation professionnelle d'apprenties en difficulté d'apprentissage. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT5, pp. 699–710). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

enjeux d'apprentissage qui les caractérisent, trois cultures spécifiques où les modalités d'enseignement diffèrent tant au niveau des conditions qui y président, des acteurs qui s'y trouvent, des moyens qui y sont engagés, que des méthodes qui s'y pratiquent.

M'intéressant depuis longtemps à l'enseignement et à l'enseignement des mathématiques dans le contexte particulier de l'enseignement spécialisé, je suis arrivé dans ce nouvel univers fort d'une curiosité aiguisée par les observations et les expériences qu'il allait m'être possible d'y réaliser et du renouveau que celles-ci seraient en mesure d'occasionner à mes questionnements et mes réflexions. J'imaginais en effet qu'il existait tout à la fois des continuités et des ruptures entre le monde de l'école et celui de la formation professionnelle, tant au niveau des contenus qui y étaient enseignés qu'à celui des procédés didactiques qui étaient utilisés pour le faire. J'étais également intéressé par les façons dont les apprenties parvenaient à faire fonctionner les contenus qui leur avaient été précédemment enseignés à l'école, comment elles se les réappropriaient différemment ou comment elles en rencontraient et en apprenaient de nouveaux. Enfin, j'espérais pouvoir observer dans ce nouveau cadre, les rapports qui pouvaient exister, du point de vue de l'enseignement, entre la formation et la production[2].

II. ENSEIGNER DANS LE CONTEXTE DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE D'APPRENTIES EN DIFFICULTÉ D'APPRENTISSAGE

Au cours de la première année que j'ai passée au CFPS, je me suis retrouvé en situation, pour quelques heures hebdomadaires, de donner à des jeunes femmes de seize à vingt-et-un ans des cours de culture générale. Dans le contexte de la formation professionnelle, l'enseignement de la culture générale réfère à un plan d'études cadre spécifique[3] qui propose des thèmes de réflexion et d'études, abordés au travers de deux domaines, intitulés « langue et communication » et « société ». Les cours de culture générale visent le développement de la personne, de sa capacité et de son envie d'apprendre, ainsi que son aptitude à évoluer dans la vie de manière autonome et responsable et à s'intégrer dans la société. L'enseignement de la culture générale ne comprend plus de contenus mathématiques en tant que tels, même s'il advient que l'on en rencontre parfois, à l'occasion de l'étude d'un thème particulier[4]. Dans la formation, les mathématiques intègrent en effet les cours spécifiquement consacrés à l'enseignement des branches professionnelles qui, au sein du CFPS, sont donnés par les maîtres socioprofessionnels.

Une des premières choses qui m'a beaucoup frappé dans ce nouveau contexte est que le rapport des apprenties à la classe se transforme entièrement, en ce sens qu'elle n'est plus le lieu d'occupation prioritaire des « élèves », puisque c'est le travail dans les secteurs professionnels, et le nouveau statut d'apprentie qu'il leur octroie, qui mobilise la plupart de leur temps, de leur énergie, voire de leur motivation. La « chose scolaire » est en quelque sorte reléguée au second plan et investie de façon très diverse. Certaines apprenties arrivent ainsi en classe avec un besoin manifeste de se reposer et d'opérer une coupure avec une réalité professionnelle parfois épuisante (au point de s'y endormir !). D'autres y viennent avec l'idée d'y passer un moment différent et de s'y laisser conduire au gré des choix et des propositions

---

[2] Ainsi l'exemple d'une apprentie, à qui l'on demandait dans une tâche de combinatoire, de trouver tous les menus qu'il était possible de réaliser à partir de x entrées, y plats principaux et z desserts, qui refusait l'une des combinaisons, parce que le menu serait « un peu trop lourd ».

[3] Il s'agit, dans le cas particulier, du « plan d'études des écoles cantonales pour l'enseignement de la culture générale (PEEC eCG Fribourg) » (version 1.0 du 21 juillet 2008).

[4] Un exemple que j'ai rencontré en début d'année concerne la lecture des grands nombres quand il s'est agi d'appréhender le déficit de l'assurance-invalidité en Suisse à l'occasion d'une votation qui avait lieu à ce sujet.

d'activités de l'enseignant. D'autres encore projettent sur ces moments de classe des attentes quelque peu démesurées, imaginant qu'il leur sera possible d'y « rattraper » la plupart de ce qu'elles n'ont pas pu s'approprier jusqu'alors.

Pour l'enseignant, il n'est donc pas simple, à l'intérieur d'un programme pourtant assez souple, de trouver des terrains capables de mobiliser l'attention des apprenties, de solliciter de leur part un investissement raisonnable et adapté (c'est-à-dire à leur mesure), qui leur permettra d'accroître des connaissances, améliorer leurs manières de communiquer et développer des stratégies d'apprentissage censées contribuer à une plus grande autonomie dans leur vie professionnelle et privée. Ce d'autant que si la classe n'est plus désormais le lieu prioritaire de l'apprentissage, les enjeux relationnels qui s'y jouent restent immenses : accepter ou refuser d'entrer dans une tâche ; montrer ou dissimuler ses capacités et ses lacunes ; dominer ou se laisser dominer par l'autre, etc. constituent effectivement pour les apprenties autant de dilemmes renouvelés sans cesse, et dont il leur est difficile de se départir. Ces enjeux relationnels se traduisent ainsi chaque semaine en classe par des moments de discussions, de négociations, par des éclats de voix, de rire aussi parfois. Il s'agit également d'apprendre à composer avec les absences répétées de certaines d'entre elles qui participent à une forme de discontinuité de l'enseignement et en constituent une contrainte majeure. Au sein de la classe, certaines apprenties restent en outre très en retrait de l'échange, d'autres sont toujours sur le qui-vive, alors que d'autres encore recherchent le conflit, prennent la parole de manière intempestive, jouent avec les règles, testent les limites…

Avec des enjeux relationnels aussi présents, comme c'est le cas dans de nombreux lieux de l'enseignement spécialisé, il paraît indispensable de s'interroger, quand on est enseignant et que l'on a en priorité pour mandat l'enseignement de contenus définis dans un programme, sur les instruments qui permettent de continuer à s'intéresser aux aspects didactiques pour construire et conduire son enseignement. Autrement dit, comment il est possible d'échafauder un questionnement didactique susceptible d'engager des actions sur un terrain qui tout à la fois prend en compte, mais ne se laisse pas noyer par les enjeux relationnels qui s'y révèlent.

III. DES NARRATIONS POUR DÉPASSER LES ENJEUX RELATIONNELS DE LA CLASSE ET ÉLABORER DES ÉBAUCHES DE PROBLÉMATISATION DIDACTIQUE

Dans le groupe ddmes[5] auquel j'appartiens, nous recourons depuis plusieurs années à la narration pour rendre compte des interactions qui ont lieu lors des expérimentations que nous menons dans le cadre de l'enseignement spécialisé. Nous envisageons la narration comme une description orale ou écrite d'un entretien ou d'une séquence d'enseignement, faite « à chaud » à partir des souvenirs qu'on en a conservés et des productions d'élèves qu'on y a récoltées. La narration s'articule autour d'un ou de plusieurs événements qui se sont produits dans la séquence et qui nous ont particulièrement surpris. Elle vise à rendre compte des interactions qui ont eu lieu durant la séquence, en relatant ce qui s'y est passé - et non pas ce qui aurait dû s'y passer - à quelqu'un qui n'y était pas présent. En tant que reconstruction de la réalité observée faite par l'un de ses acteurs, la narration se révèle subjective, incomplète et pas entièrement fiable. Elle n'en consiste pas moins à notre point de vue, un excellent support pour raisonner, tant pour celui qui la réalise que pour celui qui en prend connaissance.

[5] Le groupe ddmes (didactique des mathématiques dans l'enseignement spécialisé) est un groupe de recherche soutenu financièrement par l'AVOP (Association Vaudoise des Organismes Privés pour enfants, adolescents et adultes en difficulté). Pour une présentation du groupe ddmes et de ses perspectives de travail actuelles, on peut se référer à Conne (2010).

Nous avons en effet pu remarquer que grâce à sa fonction de communication, la narration tout à la fois révèle et occasionne des expériences à ceux qui s'y livrent et à ceux qui en prennent connaissance. Elle est souvent porteuse de nouvelles idées susceptibles de prolonger de telles expériences de pensée. A ce titre, on peut dire que la narration procède d'un double enjeu. Le premier enjeu est de permettre à celui qui se livre à l'exercice d'une narration de mettre de l'ordre dans les expériences qu'il a menées, de mieux saisir ce qu'il a fait, d'en rechercher le sens et d'envisager de nouvelles perspectives pour les poursuivre. Le second enjeu est d'inviter ou de donner envie à la personne qui en prend connaissance de reproduire tout ou partie de ce qui s'est passé, en lui fournissant tout à la fois les moyens nécessaires à cette reproduction et/ou à des alternatives envisageables.

Dans la suite de ce texte, je propose d'utiliser la narration dans une troisième perspective. Il s'agit de montrer comment il est possible de faire usage de la narration dans le contexte de la formation des apprenties en difficulté d'apprentissage, pour tenter de dépasser les enjeux relationnels qui s'y révèlent et échafauder des essais de problématisation didactique. Pour ce faire, je vais rendre compte d'une brève séquence d'enseignement qui a eu lieu au CFPS vis-à-vis d'un objet très sensible dans ce contexte : la proportionnalité.

IV. UN EXEMPLE DE NARRATION EN PROVENANCE DU CFPS

1. Compte-rendu (1ère partie)

Cela se passe un mardi, en fin de matinée. Les apprenties de la classe sont toutes allées à la salle informatique pour faire une petite activité de recherche documentaire sur Wikipédia. Je suis en passe de les rejoindre, quand Na, l'une d'entre elles, redescend les escaliers, me dit que Ma lui a pris sa place habituelle, qu'il ne reste plus que cinq minutes avant qu'elle ne doive partir (elle est de service pour le repas de midi) et que, par conséquent, cela ne sert plus à rien de se mettre à la tâche. J'hésite un peu entre lui dire de remonter avec moi à la salle informatique ou à la laisser partir, mais finalement, anticipant qu'elle n'aura pas vraiment le temps de se mettre en activité, j'opte pour la seconde solution et lui dis : « Ok, allez-y ! ».

Empruntant le chemin de la classe pour aller y déposer ses feuilles de travail, Na se retourne alors et me lance : « Alors, comme ça, vous me fichez à la porte ». Piqué au vif par le propos de Na, et plutôt amusé à la fois, je lui enjambe le pas en répliquant : « Ah non, loin de moi l'idée de vouloir vous mettre à la porte ; d'ailleurs, vu qu'il ne reste que cinq minutes, on a tout juste le temps de faire un petit problème de maths ». Je profite de l'occasion pour tenter le coup ; d'une part, parce que dans ma position d'enseignant de culture générale, je n'ai pas vraiment le mandat d'enseigner les mathématiques et, d'autre part, parce que Na m'a déjà dit à plusieurs reprises qu'elle détestait cette matière – elle s'affiche volontiers (!) comme « nulle en maths » – et qu'elle ne voulait en aucun cas en faire avec moi. Cependant, comme les autres apprenties de la classe ne sont pas présentes, je me dis que le contexte peut être favorable.

Piquée à son tour, Na me répond assez étonnamment par l'affirmative, « sauf », ajoute-t-elle, « s'il y a des divisions », parce qu'elle ne sait pas les faire. Je lui tends donc une calculette pour « le cas où il y aurait des calculs qu'elle ne saurait pas faire », un objet qu'elle accepte non sans avoir un brin protesté, disant qu'ainsi, c'est un peu « triché »…

J'enchaîne en rédigeant un énoncé de problème au tableau. Il s'agit d'un énoncé très classique (ce n'est pas seulement un manque d'inspiration, mais surtout parce que je sais que c'est ce type de problème qu'elle rencontre en priorité dans le cadre des cours professionnels), qui peut se résoudre à l'aide de la fameuse « règle de trois », que je « contextualise » autour d'une recette de fondue (ça, ce n'est pas de l'inspiration, mais de l'expérience, car mangée la veille) :

Pour faire une fondue, il faut 800 grammes de fromage pour 4 personnes…

A peine ai-je terminé d'écrire cette première phrase que Na propose 1200 comme réponse au problème. Je lui suggère toutefois d'attendre un peu et de me laisser terminer l'écriture de l'énoncé avant de proposer une solution. Je poursuis en écrivant :

Combien de fromage faudra-t-il acheter pour 12 personnes[6] *?*

Au terme de l'écriture, je lis l'énoncé à l'intention de Na, tout en lui donnant une feuille de papier pour qu'elle puisse noter ce dont elle a besoin pour résoudre le problème. Na réfléchit un bon moment avant de saisir la calculette, d'y réaliser un calcul et de donner 9600 comme réponse (elle n'a pas utilisé la feuille de papier). Je note le résultat qu'elle a donné sur le tableau, tout en lui demandant de préciser : « 9600 quoi ? ». Na répond d'abord « kilos », avant de rectifier par « grammes ».

2. Commentaires

1° Un premier point à relever dans ce compte-rendu concerne le jeu que j'initie en profitant d'un moment dérobé pour engager un échange autour d'un problème de proportionnalité. Comme je l'ai précisé plus haut, je ne suis pas légitimé institutionnellement pour le faire, même si j'ai été interpellé plusieurs fois par Na, par la négative, à propos de ses difficultés en mathématiques. De manière assez surprenante, Na accepte pourtant l'invitation, peut-être parce que ses autres collègues de classe ne sont pas là et que leur regard ne va pas trop peser sur les difficultés qui risquent de se manifester, mais aussi peut-être, parce que l'échange sera forcément bref et qu'il pourra donc être interrompu à tout instant.

2° Un deuxième point concerne le résultat de 1200 que Na suggère avant même d'avoir entendu la fin de l'énoncé du problème. S'il est probable que Na ait combiné les nombres 800 et 4 pour obtenir 1200, ce qui frappe avant tout, c'est l'immédiateté de la réponse, comme si la seule lecture de deux nombres dans le cadre de la résolution d'un problème en mathématiques impliquait un calcul et une réponse immédiats. Ce phénomène n'est pourtant pas nouveau, je l'ai déjà observé à de nombreuses reprises dans le contexte de l'enseignement spécialisé, mais ce qui est intéressant, c'est de le voir ici reproduit, de façon si soudaine, dans un contexte où l'enjeu didactique pourrait être a priori considéré comme moins, voire peu signifiant.

3° Le troisième point à relever est intrinsèquement lié au précédent. Il concerne le deuxième résultat donné par Na, soit 9600, résultat de 800 par 12. On assiste à nouveau à une combinaison de deux nombres figurant dans l'énoncé, mais avec l'utilisation d'une autre opération. La multiplication, qui est l'opération adéquate pour lier les quantités en jeu dans le problème, apparaît, probablement grâce au soutien technique constitué par la calculette.

4° Enfin, le quatrième point à souligner concerne la « correction » grammes/kilos effectuée par Na. Cette correction semble en effet témoigner d'une prise de conscience sur le fait que le nombre 9600 ne peut signifier un nombre de kilos de fromage adéquat pour réaliser une

[6] Je précise que si le problème peut être considéré comme bien peu original (avec une connotation scolaire manifeste), il ressemble pourtant beaucoup à ceux qui sont proposés aux apprenties employées de cuisine durant leurs examens de fin de formation. Par ailleurs, les nombres qui figurent dans l'énoncé ont bien été « réfléchis » avant d'être proposés ; en choisissant quatre personnes, il est en effet possible de trouver le nombre de grammes de fromage pour deux et pour une personne, en partageant la quantité de huit cent grammes par deux, puis encore par deux, voire directement par quatre ; alors que le nombre de grammes pour douze personnes peut quant à lui être obtenu directement par la multiplication d'un entier (trois), ce qui n'aurait pas été le cas pour des nombres comme dix ou sept personnes.

fondue pour douze personnes. On assiste peut-être ici à l'activation d'un savoir issu de la pratique (de la cuisine) qui vient invalider le résultat d'un calcul produit à l'occasion de la résolution d'un problème rencontré hors de ce contexte.

3. Eléments pour une problématisation

Sachant que l'interaction directe, selon les canons habituels du travail en classe, aboutissent fréquemment à des retraits sous forme de désinvestissement ou de non-investissement des tâches proposées, quelles conditions ou quelles contraintes sont susceptibles de favoriser l'engagement effectif des apprenties dans une démarche de résolution de problèmes ?

La résolution des problèmes présentés sous la forme d'un énoncé écrit, sans rétroaction directe de la part du milieu (ce qui est le lot de la majorité des problèmes soumis aux apprenties dans le contexte des cours professionnels) aboutit à l'immédiateté d'une réponse donnée en combinant les nombres figurant dans la donnée. Comment dès lors surseoir à cette immédiateté et accompagner les apprenties à la prise en compte de l'ensemble de l'énoncé et de la question posée ? Est-il pertinent de vouloir tenter de le réaliser dans ce cadre ou est-il au contraire plus adéquat de vouloir le réaliser sur d'autres supports, dans d'autres contextes[7] ?

Précisons, à ce propos, que la question de l'immédiateté d'une réponse face à un problème donné, n'est pas, et de loin l'apanage des seuls sujets considérés comme en difficulté d'apprentissage. Il suffit, pour s'en convaincre, d'envisager certains problèmes « classiques » comme celui de la mare aux nénuphars (voir ci-dessous), où tout un chacun, qui n'en connaît pas la solution, est irrémédiablement tenté de proposer 15 comme résultat.

Un nénuphar double de surface chaque jour. Il met 30 jours pour occuper l'ensemble de la surface d'un lac. Combien de temps mettront deux nénuphars pour occuper ensemble toute la surface de ce lac ?

Figure n°1 *– le problème des nénuphars*

Néanmoins, à la différence de ce qui se passe pour Na ci-dessus, on observera probablement une plus grande prudence vis-à-vis de la formulation de ce résultat à l'intention de celui qui a posé le problème, probablement parce que l'on se méfie et que l'on pense qu'il y a un piège (car autrement pourquoi nous l'aurait-il posé) ? Il est en outre assez piquant de remarquer que, dans ce cas particulier, l'on peut précisément considérer ce résultat de 15, comme une forme d'attribution erronée d'un rapport de proportionnalité à l'encontre d'une situation qui n'en relève pas.

Quel rôle peut jouer la calculette (même si son usage est considéré comme « triché » par certaines apprenties) dans la dévolution d'un problème et comment celle-ci peut-elle être en mesure de constituer un étayage pour favoriser l'apparition de certaines procédures dont la résolution technique n'est pas maîtrisée par les apprenties ?

Quelles fonctions peuvent jouer, dans le contexte de la classe, à l'égard des problèmes qui sont ceux que les apprenties auront à résoudre durant leurs examens de fin d'apprentissage, les savoirs acquis par les apprenties dans leur contexte professionnel ? Est-il possible de tirer

[7] Dans le contexte professionnel où je travaille, les enseignants tentent d'atteindre cet objectif à l'aide de méthodes d'apprentissage apparentées au courant d'éducabilité cognitive, comme le PEI (programme d'enrichissement instrumental) de Feuerstein, le programme DELF (découvrez vos capacités, réalisez vos possibilités, planifiez votre démarche et soyez créatifs) de Büchel ou les ARL (ateliers de raisonnement logique) de Higelé, Hommage et Perry

parti, d'un point de vue didactique, de ces savoirs issus de la pratique, pour aider les apprenties à concevoir, contrôler et réguler des procédures de résolution de ces problèmes[8] ?

4. Compte-rendu (2ème partie)

Je dis à Na que ce genre de problèmes peut efficacement se résoudre à l'aide d'un tableau (en ajoutant que les enseignants qu'elle a rencontrés durant sa scolarité le lui ont sans doute déjà montré) que je me mets à dessiner juste au-dessous de l'énoncé. J'inscris ensuite les données du problème dans le tableau, tout en en ajoutant d'autres et en précisant que la première réponse à trouver (la quantité de fromage pour douze personnes) n'est peut-être pas la plus simple à découvrir.

p	4	12	2	1	10	1257	3
gr.	800						

Tableau n°1

Je demande alors à Na si elle saurait trouver la quantité de fromage nécessaire à la réalisation d'une fondue pour deux personnes, ce à quoi elle répond 600 (« parce qu'il faut enlever 200 », ai-je cru l'entendre murmurer ?) que je note dans le tableau. Je poursuis en lui demandant la quantité de fromage à acheter pour une personne, ce à quoi elle répond 200, que je note également dans le tableau. Je tente alors de lui demander la quantité nécessaire pour dix personnes, mais Na répond qu'elle ne sait pas. J'essaie encore pour trois personnes, mais Na ne veut plus rien dire, prétextant (à raison, car il est temps) qu'elle doit partir.

p	4	12	2	1	10	1257	3
gr.	800		600	200			

Tableau n°2

En l'accompagnant un bout de chemin le long du couloir qui mène à la sortie, je lui dis que j'ai bien envie de proposer ce même problème aux autres apprenties du groupe l'après-midi. Na ne répond rien, mais me lance au moment de se quitter : « Vous voyez, je vous avais bien dit que j'étais nulle en maths ».

5. Commentaires

1° On observe tout d'abord que le recours à un tableau pour figurer les données du problème ne constitue pas, pour Na, une aide à la résolution, tout au moins pas de manière explicite. Les relations numériques multiplicatives qui lient horizontalement le 4 et le 12 ou verticalement le 4 et le 800 ne sont pas prises en compte pour lui permettre d'engager une nouvelle conduite dans la résolution du problème.

2° En revanche, on voit que la transformation du problème – chercher la quantité de fromage pour deux personnes – induit quelque chose de nouveau : soustraire 200 au 800 de l'énoncé. La diminution du nombre de personnes est donc traduite par une quantité de fromage à soustraire ou à enlever, ce qui peut être à nouveau considéré comme un savoir lié à la pratique de cuisine. Difficile pourtant de savoir d'où vient le nombre 200 choisi par Na et qu'elle reprend ensuite comme réponse à la quantité de fromage à utiliser pour une personne. A-t-elle tiré parti du rapport entre 4 et 800 qui figurent dans le tableau ? Propose-t-elle d'enlever 200

[8] Sachant que la question inverse, liée à la fonctionnalité des savoirs appris en classe dans le cadre de la pratique professionnelle, est tout aussi sensible et délicate.

parce qu'il y a deux personnes en moins ou parce qu'il n'y a plus que deux personnes en jeu ? Recourt-elle à un autre savoir issu de la pratique de cuisine qui veut que l'on compte 200 grammes de fromage par personne pour préparer une fondue ?

3° On remarque enfin que les deux nouvelles transformations du problème – chercher la quantité de fromage pour dix, puis pour trois personnes – provoque la rupture de l'échange. Il est évidemment possible de penser que celui-ci n'avait que trop duré (on était allé bien au-delà des cinq minutes initiales qui étaient prévues) et qu'il était temps pour Na d'y mettre un terme. On observe cependant que le passage par l'unité ne sert ici à Na ni pour produire une itération du 200 (à 10 ou à 3 reprises), ni pour extraire la relation multiplicative qui lie le 1 et le 10 ou le 1 et le 3. En outre, la rupture de l'échange m'empêche de considérer avec Na le fait qui aurait pu lui paraître surprenant, et qui veut que, selon les résultats produits, la somme des quantités de fromage pour deux et pour une personne soit un peu bizarrement égale à la quantité de fromage pour quatre personnes.

6. *Eléments pour une problématisation*

Le recours à un tableau ne favorise pas le repérage des relations multiplicatives qui existent entre les données. Le passage par l'unité non plus. Quelles conditions faut-il dès lors réunir pour que le tableau et/ou le passage par l'unité, souvent cités comme facilitateurs de la résolution de problèmes de proportionnalité, deviennent des instruments effectifs au service de l'apprentie ? Plus généralement, on peut également se demander l'impact que les connaissances numériques de l'apprentie, c'est-à-dire les relations numériques qu'elle a pu (ou n'a pas pu) établir antérieurement entre les nombres qui sont en jeu dans le problème, exercent sur sa capacité à imaginer des procédures de résolution adéquates.

La transformation du problème – chercher la quantité de fromage pour deux personnes – semble coïncider avec un réel investissement cognitif de l'apprentie. Celui-ci se traduit par le recours à une soustraction, plutôt qu'à un partage par la moitié. Quels jeux sur les variables seraient susceptibles de favoriser l'utilisation d'une procédure de partage ? Est-il nécessaire de recourir à d'autres types de problèmes (et si oui lesquels ?) pour être en mesure de le faire ?

On ne sait trop comment les savoirs acquis dans la pratique professionnelle interviennent dans la résolution du problème. Il semble bien que le fait de réduire les quantités au cas où le nombre de personnes diminue est bien présent. En revanche, on ne sait trop d'où vient l'idée du 200g de fromage par personne et on ne parvient pas non plus à déterminer le rôle, tantôt facilitateur, tantôt « distracteur » que peuvent jouer ces savoirs dans le cadre de la résolution d'un problème. On peut d'ailleurs raisonnablement penser qu'une procédure et/ou une solution incorrecte découverte dans le cadre de la résolution d'un problème pourrait être validée en cuisine : retirer 200 g de fromage au 800g prévus pour quatre personnes et préparer une fondue avec 600 grammes de fromage pour deux gros mangeurs pourrait paraître adéquat[9].

7. *Compte-rendu (3ème partie)*

L'après-midi, j'annonce aux apprenties que, contrairement à l'habitude, la leçon va débuter par la résolution d'un problème de maths (j'ai laissé l'énoncé au tableau, mais effacé le tableau de proportionnalité et les réponses de Na). Je lis le problème, distribue à chacun un papier, leur demande d'essayer de le résoudre, puis de noter leur résultat, sans le montrer, sur le morceau

[9] Il en est peut-être de même des trois autres propositions qui lui sont liées : une procédure et/ou une solution correcte découverte en résolution d'un problème pourrait être invalidée en cuisine ; une procédure et/ou une solution incorrecte découverte en cuisine pourrait être validée en résolution d'un problème ; une procédure et/ou une solution correcte découverte en cuisine pourrait être invalidée en résolution d'un problème.

de papier. Na est présente, mais elle prend une autre feuille et se met à dessiner. Ma demande à pouvoir se rendre aux toilettes et les quatre autres apprenties se mettent à la tâche.

200		800	4
12		800	200
400			
2000	2 k400g		
2400	Il faut 2400g de fromage pour 12 p		
	1P = 200g		
	12P = 2400g		

Figure n°2 *– La production de Lu*

Je dois alors préciser que je n'ai pas pu récolter les papiers de chacune d'entre elles au terme de la leçon, mais je sais que Bi n'a rien écrit et il me semble me souvenir que Ni et Ca ont chacun tenté de multiplier par écrit 800 par 12. Seule Lu, de son côté, a soigné ses écrits. Elle a d'ailleurs insisté à plusieurs reprises pour me montrer ce qu'elle avait fait. Quant à Ma, j'ai retrouvé l'inscription 199 d'un côté de son papier et 9000 2k de l'autre.

Une fois que les apprenties ont terminé leur calcul, et sans leur demander de communiquer les réponses qu'elles ont trouvées, je repars avec le dessin d'un tableau.

p	4	12	2	1	10	8	427
gr.	800						

Tableau n°1

J'indique que la quantité de fromage à trouver dans le problème (pour douze personnes) n'est peut-être pas la plus simple. Je réalise à côté le dessin d'une assiette contenant un monticule de fromage avec l'inscription 800 grammes juste au-dessous, en précisant que l'on peut plus facilement trouver la quantité de fromage qu'il s'agit d'acheter pour deux personnes. Lu trouve immédiatement la bonne réponse : elle a en effet compris qu'il suffit de multiplier chaque nombre de la première ligne par 200 pour obtenir son « correspondant » dans le tableau. Ni propose 400 grammes en ayant vraisemblablement procédé par un partage par deux, tandis que Ca, Bi et Ma disent ne pas savoir. Je prends note de la réponse de Ni et poursuis avec la quantité de fromage à acheter pour une personne ; et là, c'est Ma qui intervient en disant : « 100 grammes » en expliquant que : « avec 100 grammes cela suffit pour une personne, si on n'a pas trop faim ». Bi est d'accord avec 100 grammes, alors que Ni et Lu penchent plutôt pour 200 grammes. Ca dit ne pas savoir, tandis que Na dessine toujours.

Après avoir relevé au tableau les deux réponses que je considère concurrentes, j'invite les apprenties à trancher. Lu prend la parole et explique qu'il suffit de multiplier à chaque fois par 200 le nombre de la première ligne du tableau pour obtenir le correspondant de la seconde ligne. Elle montre ainsi comment passer de 10 à 2000, de 8 à 1600 et même, après avoir effectué le calcul par écrit, de 427 à 85400. A la fin des explications de Lu, je remarque pourtant que si j'y ai été particulièrement attentif, les cinq autres apprenties présentes ont en revanche toutes « décroché » et que je me retrouve dans l'impossibilité manifeste de les « ramener à la tâche ». Le moment de maths que j'ai voulu soutirer aux activités habituelles du mardi après-midi s'en trouve ainsi irrémédiablement terminé.

8. Commentaires

1° On assiste premièrement à une nouvelle illustration de la fragilité de l'échange, mais en situation de groupe, cette fois-ci. Na n'y entre à aucun moment (de manière explicite s'entend, impossible de savoir ce qu'elle prend ou ne prend pas des interactions lorsqu'elle dessine). Ma part aux toilettes au moment de se mettre à la tâche, puis écrit sur son papier des nombres – 199, 9000, 2k – qu'il est difficile de décoder et qu'elle ne parviendra pas non plus à expliquer. Bi n'écrit rien et ne dit quasiment rien non plus. Ca pose un seul calcul, puis dit ensuite qu'elle ne sait pas. Finalement, seules Ni qui propose un calcul, puis une réponse pour le cas de la quantité à prévoir pour deux personnes et surtout Lu, qui sait déjà (!) comment résoudre l'entier du problème, acceptent d'entrer dans l'échange de manière directe. Cette dernière prend d'ailleurs soin non seulement de faire, mais également de signifier en détails comment elle s'y est prise pour faire. Et c'est elle qui occupera finalement tout l'espace de dialogue qui ponctuera l'échange, ce qui aura pour conséquence de provoquer le désinvestissement général de l'ensemble des autres apprenties présentes dans la classe.

2° Deuxièmement, on remarque que les deux propositions de Ni et de Ca sont les mêmes que celle de Na en fin de matinée, soit : $800 \times 12 = 9600$. La multiplication apparaît donc à nouveau, incidemment ou à propos (difficile de trancher), favorisée par l'étayage technique constitué par la calculette. On voit en outre que le dessin d'une assiette semble permettre à Ni d'engager une procédure de partage par la moitié, alors que celui-ci est ignoré par Lu qui a privilégié la recherche de la quantité par l'unité. Une façon de faire qui lui permettra ensuite, de façon systématique, de trouver l'ensemble des solutions figurant dans le tableau.

3° Troisièmement, de façon on ne peut plus explicite, on observe l'apparition, de la bouche de Ma, d'un nouveau savoir issu de la pratique, lorsqu'elle avance que : « 100 grammes, cela suffit pour une personne, si elle n'a pas trop faim. »

9. Eléments pour une problématisation

La question de la conduite de l'échange, de la part de l'enseignant, est très délicate, aussi bien quand celui-ci est déserté ou au contraire sur-occupé par telle ou telle apprentie. On attribue volontiers ces mécanismes de sous-investissements (retraits) et de surinvestissements (omniprésence) au passé scolaire des apprenties (emprunt d''échec) et/ou à leurs difficultés spécifiques, mais ces attributions ne donnent pourtant aucune piste pour y faire face en situation. Comment peut-on dès lors chercher à dynamiser l'échange et faire en sorte qu'il soit possible pour chacune d'y trouver une place, sa place, sans que celle-ci ne soit trop exposée, mais permette néanmoins de s'approprier tout ou partie des enjeux des savoirs qui s'y trouvent engagés ?

Si le recours au dessin semble avoir permis à une apprentie d'imaginer une procédure de résolution (le partage par la moitié), le recours au tableau, quant à lui, n'apparaît à nouveau pas comme un facilitateur : soit l'apprentie (comme Lu) sait auparavant comment s'y prendre pour résoudre le problème et le tableau peut dès lors favoriser le développement d'une certaine systématique ; soit l'apprentie ne sait pas et le tableau ne permet pas d'extraire les relations numériques susceptibles de permettre un traitement adéquat du problème. La question de savoir comment faire d'un tableau de proportionnalité, un instrument au service de la résolution d'un problème est donc à nouveau posée.

Enfin, on assiste, au sein de l'échange, à l'apparition d'un savoir provenant de la pratique professionnelle, lequel s'avère tout à fait pertinent en cuisine, mais qui se trouve invalidé (pas du point de l'apprentie qui le propose s'entend) dans le cas de la résolution d'un problème de proportionnalité. La question de devoir trancher pour déterminer quel est le résultat adéquat entre 100 et 200 grammes de fromage perd ainsi tout son sens, puisqu'elle réfère à deux univers distincts qui permettent l'un comme l'autre de valider au moins l'un des deux résultats[10].

V. CONCLUSION

Au début de ce texte, j'ai considéré la narration comme une reconstruction partielle d'une réalité observée qui se révèle de la sorte subjective, incomplète et pas entièrement fiable. J'ai toutefois posé qu'elle n'en consistait pas moins, tant pour celui qui se livre à l'exercice narratif qu'à celui qui en prend connaissance, un excellent support pour raisonner. Afin d'illustrer cette fonction de la narration, j'en ai proposé un exemple, extrait de la réalité d'enseignement qui a été la mienne l'an dernier, alors que je découvrais le monde de la formation professionnelle. L'idée étant de pouvoir montrer que le recours à la narration peut permettre, dans le cadre d'une classe d'un centre accueillant des apprenties en difficulté d'apprentissage, d'aller au-delà des enjeux relationnels qui s'y révèlent en priorité et d'élaborer des ébauches de raisonnement et de problématisation didactique. Celles-ci concernent principalement :

- la façon d'animer, de nourrir et de faire durer l'échange didactique au sein des classes du CFPS ;
- les possibilités d'enrichir et de diversifier les relations numériques (additives et multiplicatives) que les apprenties ont construites vis-à-vis des nombres qui entrent en jeu dans les problèmes qu'elles rencontrent ;
- l'usage qu'elles font ou qu'elles ne font pas, qu'elles manifestent ou qu'elles ne manifestent pas de ces relations numériques au cours de la résolution d'un problème ;
- le recours au tableau de proportionnalité comme organisateur de données et de la calculette comme étayage technique qui ne vont pas de soi ;
- l'articulation qu'il y a lieu d'établir entre les savoirs issus de la pratique professionnelle des apprenties et les savoirs qu'elles apprennent en classe, qu'elles importent et qu'elles exportent d'un lieu vers un autre.

Partant de ces questionnements, il est maintenant possible d'engager de nouvelles expérimentations qui permettent à la fois d'y apporter des éléments de réponses, tout en suscitant d'autres raisonnements et de nouvelles questions susceptibles de dynamiser l'enseignement de la proportionnalité prodigué au sein du centre. D'un point de vue général, on pourra s'inspirer pour le faire, des principes que définit Jacinthe Giroux dans un texte tout récent (Giroux, à paraître), en forme de réponses aux difficultés d'apprentissages des élèves en mathématiques. On pourra également explorer des situations de proportionnalité qui rompent entièrement avec la réalité professionnelle des apprenties et d'autres, au contraire, qui épousent cette réalité en recourant à des astuces (autres que des calculs de proportions) qui y sont effectivement utilisées. On pourra aussi chercher à employer le tableau de proportionnalité et la calculette pour partir à la découverte de nouvelles relations entre nombres (multiples, diviseurs…) et suites de nombres. On pourra enfin essayer d'alimenter l'échange didactique de tâches qui visent à prendre en compte et à enrôler les relations numériques explicitées par les apprenties, plutôt que de les rejeter en cherchant à les mettre en défaut.

[10] On se trouve peut-être ici, même si le rapprochement est quelque peu aventureux, dans une situation proche de celle qui prévaut en géométrie, quand les arguments des élèves réfèrent pour certains à leur perception de l'espace sensible, tandis que d'autres se fondent sur l'espace géométrique et les propriétés des figures (Berthelot et Salin 1992). Impossible, par exemple, de considérer le carré et le rectangle autrement que comme deux formes distinctes dans le premier, alors que l'on pourra/devra définir le carré comme un rectangle particulier dans le second.

Plus largement pour terminer, et pour revenir au thème de la narration, on pourra également considérer comment, à partir d'un texte comme celui-ci, il peut être possible d'inviter les enseignants spécialisés qui travaillent dans des conditions similaires, à réaliser leurs propres narrations, pour conduire leurs propres raisonnements, élaborer leurs propres questionnements et engager à leur tour les expérimentations qui en procèdent.

RÉFÉRENCES

Berthelot R., Salin M.-H. (1992) *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*. Thèse de doctorat. Université de Bordeaux.

Commission PEEC eCG (2008) *Plan d'études des écoles cantonales pour l'enseignement de la culture générale (PEEC eCG Fribourg).* Fribourg : Service de la Formation Professionnelle. http://www.fr.ch/sfp/files/pdf17/sfp_peec_ecg_fr_f_v1.0.pdf [consulté le 07.12.2010].

Conne F. (2010) *Le groupe didactique des mathématiques de l'enseignement spécialisé (ddmes) : descriptif et perspectives actuelles*. Berne : Centre Suisse de Pédagogie Spécialisée.http://www.cspsszh.ch/fileadmin/data/1_szhcsps/7_zeitschrift/Archiv/Conne.2010.04.06.pdf [consulté le 07.12.2010].

Giroux J. (à paraître). Pour une différenciation de la dyscalculie et des difficultés d'apprentissage en mathématique. In *Actes du colloque du Groupe de didacticiens des mathématiques, Moncton, 10-12 juin 2010*.

PROGRAMME DE FORMATION PROFESSIONNALISANTE DE NIVEAU MASTER EN MATHEMATIQUES

Edwige GODLEWSKI*

Résumé – Il s'agit de présenter, à partir d'une expérience acquise comme responsable d'un master « ingénierie mathématique », les grands traits de cet enseignement professionnel et d'en questionner les pratiques, en rapport avec le monde de l'université et de l'entreprise.

Mots-clefs : master professionnel, ingénierie mathématique, modélisation

Abstract – From the experience at the head of a Diploma in applied mathematics at the master's level for many years, we draw in the presentation the main lines of these curricula for industrial mathematics and address some issues concerning the links with industry.

Keywords: master programme, mathematical engineering, modelling

I. INTRODUCTION

La présentation a pour objectif de tirer des enseignements à partir de l'exemple d'une formation universitaire niveau master en ingénierie mathématique. Elle ne repose pas sur une étude statistique ou une enquête mais sur une expérience assez longue de responsable d'une telle formation. Les formations universitaires font l'objet de peu d'études de nature didactique, mais le renouveau du sujet « interactions maths-industrie », tant au niveau de la recherche que de l'enseignement, conduit les responsables de ce type de formations (qui souvent y enseignent eux-mêmes) à vouloir communiquer leur expérience (comme enseignant et organisateur des autres enseignements), expérience encore mal connue des collègues effectuant une recherche « fondamentale » ou de ceux s'intéressant à la formation des enseignants. Cela les conduit aussi à se poser des questions sur la pertinence des contenus, et donc à s'intéresser aux groupes de travail proposant de réfléchir sur leurs pratiques. En effet, si le groupe de travail « Enseignement et apprentissage des mathématiques : interactions avec les autres disciplines scolaires et les pratiques professionnelles », dans le cadre de l'EMF, s'intéresse principalement aux "élèves" de l'enseignement secondaire, la plupart des questions posées sont tout aussi pertinentes pour les "étudiants" de l'enseignement supérieur, avec la différence qu'il s'agit alors de formations susceptibles de donner un diplôme terminal débouchant sur un emploi dans l'industrie (au sens large).

Les réflexions menées ici prennent pour acquis l'enseignement que les étudiants ont eu avant d'arriver dans ces formations, sans le remettre en cause, sans quoi le sujet serait trop vaste.

Ces formations universitaires professionnelles en mathématiques existent depuis une quarantaine d'années, nous ferons un rapide historique de leur création. On s'intéressera ici essentiellement au niveau Master, c'est-à-dire aux quatrième et cinquième années d'études après le baccalauréat français[1].

Dans le contexte français de l'enseignement supérieur, il convient de remarquer que ces formations qui serviront d'exemples sont dispensées au sein de l'université, et non dans les écoles d'ingénieurs, autre voie de formation sur des thèmes similaires. Les deux cursus sont

* UPMC-Paris 6, LJLL – France – edwige.godlewski@upmc.fr

[1] en France, cet examen se situe en fin d'études dites secondaires au lycée, c'est à dire après quatre ans de collège et trois années au lycée ; il ouvre aux études universitaires qui elles commencent par les trois années de Licence.

© Godlewski E. (2012) Programme de formation professionnalisante de niveau Master en mathématiques. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21^{e} siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT5, pp. 711–719). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

différents dans leurs modalités de recrutement et d'organisation, ainsi que dans les modes pédagogiques et les moyens disponibles. Pour ce qui concerne les mathématiques, le niveau des formations universitaires est reconnu. D'ailleurs, les élèves des écoles d'ingénieurs qui choisissent cette spécialité, suivent souvent des formations de deuxième année de master cohabilitées avec l'université, et enseignées à l'université par des enseignants-chercheurs de haut niveau. De plus, ils choisissent souvent des masters dits « recherche », voie considérée comme plus prestigieuse, quoique les masters professionnels ouvrent aussi la voie à la thèse en centres de recherches appliquées ou en entreprise.

Après avoir décrit les particularités de ces formations universitaires, on s'attachera à étudier deux aspects, selon les deux axes retenus par le groupe de travail, la modélisation et l'aspect professionnel. On posera également des questions sur l'évolution de ces formations. L'évolution des contenus est reliée naturellement au développement de la recherche (développement de méthodes numériques plus performantes par exemple), à l'augmentation des performances du matériel informatique, à l'introduction de nouveaux logiciels… Elle est aussi rendue nécessaire par la diminution des programmes de mathématiques enseignés en amont. Enfin, le constat d'une baisse assez générale des effectifs étudiants inscrits en master de mathématiques en France, lié à la croyance forte, partagée par le corps enseignant, que ces formations peuvent être utiles à la vie économique du pays, pose la question de comment attirer plus d'étudiants.

II. LES FORMATIONS D'INGENIERIE MATHEMATIQUE

1. Historique

Les maîtrises d'ingénierie mathématique (appellées MIM) ont été créées en France en 1983. Définir "ingénierie mathématique" par rapport à "mathématique" (sans "ingénierie") ou "mathématiques appliquées" n'est pas facile, mais ce vocabulaire est utilisé couramment (voir le rapport CNE 2002 pour une meilleure définition des contenus) ; le terme "ingénierie" fait bien sûr référence au terme ingénieur, donc à un métier (sinon au titre, qui, lui, est délivé en France par les écoles d'ingénieur) visé en sortie de ces formations.

Les maîtrises d'ingénierie mathématique complétaient alors les maîtrises de mathématiques et applications fondamentales qui datent de 1965. Les premiers DESS (diplôme d'études supérieures spécialisées, destiné à une orientation professionnelle immédiate, alors que la voie parallèle de DEA, diplôme d'études approfondies, destinait les étudiants plutôt à la recherche) en ingénierie mathématique remontent à 1974. De telles formations ont ensuite ouvert un peu partout en France et assuraient de très bons débouchés professionnels. Ces formations ont souvent été mises en place grâce à des initiatives locales d'enseignants-chercheurs intéressés à développer les interactions avec le monde professionnel. Avec le passage au LMD (organisation du cursus universitaire en trois étapes : licence, master, doctorat[2]), les DESS sont devenus des "spécialités" de Master, au départ qualifiées de "masters professionnels". Bien qu'ils continuent à assurer de bons débouchés, ils commencent à souffrir d'une baisse d'effectifs, inégale suivant les établissements.

[2] La mise en place de cette organisation relève du « processus de Bologne » qui vise à à construire un espace européen de l'enseignement supérieur, processus initié lors de la conférence de Bologne de juin 1999.

2. *Les contenus*

De manière générale, le contenu des enseignements développés dans ces formations est dépendant en amont de l'enseignement assuré dans les années qui précèdent et en aval des besoins liés aux débouchés professionnels potentiels (voir Friedman et Lavery 1993).

Il existe des formations relativement spécialisées, par exemple en statistique, voire bio-statistique, cryptographie, ingénierie financière, etc. Leur contenu est plus facile à définir car elles sont spécifiquement adaptées à des débouchés dans des secteurs qui recrutent et qui sont par définition plus étroits. On s'intéressera donc ici essentiellement aux formations professionnelles de niveau Master les plus généralistes.

Celles-ci ont pour caractéristiques le fait qu'on y enseigne des mathématiques appliquées (et peu de mathématiques fondamentales) associant souvent plusieurs disciplines (analyse numérique, méthodes d'approximation, EDP, optimisation, contrôle, probabilités, analyse des données, ...), et qu'on y facilite l'insertion professionnelle des étudiants en leur permettant d'acquérir une maîtrise de l'informatique et en proposant des enseignements complémentaires (Anglais, préparation du CV, préparation d'exposés...). Elles associent naturellement l'apprentissage par projets à des cours théoriques plus traditionnels, et assurent le développement de compétences, dont des compétences en "informatique" au sens large (en programmation, utilisation/développement de logiciels, en algorithmique, simulation numérique, visualisation, voire en calcul scientifique haute performance). Des professionnels interviennent, par exemple des ingénieurs R&D pour l'apprentissage d'un code, ou des représentants d'un métier (comme analyste quantitatif en finances). Le ou la responsable de la formation suscite de telles participations de professionnels et veille à assurer une certaine cohérence avec les enseignements traditionnels. Ce (ou cette) responsable est un enseignant-chercheur, et la formation, à laquelle il participe, s'appuie sur les compétences des équipes de recherche.

Les cours de mathématiques dispensés dans ces formations sont par exemple les méthodes numériques (déterministes ou probabilistes) ou l'optimisation. L'enseignement a notamment pour objectif de définir les conditions d'utilisation des modèles mathématiques, en introduisant les variables les caractérisant, des équations qui les constituent, en définissant le cadre mathématique théorique et en explicitant les modalités de mise en œuvre de méthodes numériques permettant d'en calculer une solution (avec une discussion sur la validation). Le propos ci-dessus est assez général car le contexte peut être celui de la finance (voir l'analyse de Rama Cont), comme celui de l'environnement (par exemple pour modéliser des phénomènes hydro-sédimentaires).

Les étudiants sont ensuite supposés savoir utiliser le modèle sur les cas concrets qui leur seront soumis, car ils en auront bien compris les fondements et les limites. On compte aussi que cette bonne compréhension leur permette de suivre une démarche analogue (formaliser, exprimer les hypothèses, valider l'approche choisie) faite sur un autre modèle, fut-il très différent. Cette conviction est à la base de tout l'enseignement des mathématiques.

Les compétences minimales attendues au terme d'une formation professionnelle sont la capacité à représenter mathématiquement une situation concrète (formalisation ou modélisation), et la capacité à résoudre le problème : choix du mode de résolution, mise en œuvre de la méthode choisie. Ces capacités doivent être développées dans des champs disciplinaires suffisamment étendus (analyse, probabilités, statistique…). Une réflexion en cours sur la notion d'approche « compétences » reliées aux « connaissances » devrait conduire à pouvoir présenter ces enseignements théoriques en les reliant à des compétences et donc à en justifier de fait l'enseignement.

3. *L'enjeu de l'enseignement*

Ainsi, la difficulté est de concilier une approche suffisamment générale et théorique pour permettre aux étudiants pendant le stage et dans leur vie professionnelle :

- d'appréhender des contextes applicatifs très variés ;
- d'apporter des solutions innovantes à des problèmes concrets ;
- de s'insérer rapidement dans un métier technique.

C'est dans ce contexte que se dégage la valeur ajoutée d'une formation en mathématique par rapport à une formation d'ingénieur généraliste (qui est plus portée sur la physique ou, d'une manière générale, les applications).

Avant de continuer, interrogeons-nous quelques instants sur les objectifs de toute évolution de la formation induite par les réflexions que nous menons ici. S'agit-il de :

- mettre en place un format de master plus robuste, un modèle de master (voir à ce propos l'annexe 2, du Forward Look de l'ESF), moins exigeant pour le ou la responsable et pouvant survivre aux mouvements des enseignants ;
- former plus d'étudiants ;
- « mieux » former les étudiants actuels, "mieux" au sens des enseignants ? des employeurs ? des étudiants ?
- prendre en compte de manière plus adaptée les besoins des industriels ;
- pénétrer de nouveaux secteurs (par exemple les PME), anticiper des besoins à venir.

Suivant l'objectif que l'on retient, les évolutions à mettre en place sont différentes. Quoiqu'il en soit, les moyens (temps, compétences) dont disposent les enseignants sont toujours limités, et les ambitions infinies : il s'agit donc d'un problème d'optimisation sous contrainte, dans lequel il faut définir les variables à optimiser et les contraintes (et le problème sera évidemment mal posé !).

III. ENSEIGNER LA MODELISATION

1. *Problématique*

Le fait que la modélisation est un « lieu privilégié d'interactions » entre différentes disciplines est un acquis, quel que soit le domaine d'application : mécanique, physique, chimie, environnement, biologie, risque, finance, etc. Pour autant, cela ne signifie pas qu'un enseignement de modélisation au niveau Master soit facile à assurer ou qu'il soit simple d'en définir un programme.

On ne s'attaque pas ici à discuter de la définition de la modélisation (pour un cadrage théorique à propos du processus de modélisation, on peut se référer aux débats du Comité scientifique des Irem[3] sur la modélisation qui s'est tenu en 2003, en particulier la contribution de M. Legrand). Mais prenons l'exemple concret de modélisation issu de la mécanique pour lequel on dispose des équations : le chauffage lié à la ventilation d'un bâtiment, donc l'étude d'un problème d'aérothermique. Faut-il parler d'approximation variationnelle et d'espaces de Sobolev avant d'avoir étudié le problème et familiariser ainsi l'étudiant aux outils théoriques, certes difficiles, mais auxquels il pourra faire appel ultérieurement pour justifier toute

---

[3] Irem : Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques, voir le site http://www.univ-irem.fr/.

l'approche ? Faut-il plutôt étudier le modèle (les équations de Navier-Stokes incompressibles corrigées avec un terme de Boussinesq et couplées avec une équation d'advection-diffusion pour la température) d'abord « avec les mains » et conduire l'étudiant à la découverte des outils nécessaires à son étude ? Faut-il même laisser l'étudiant établir le modèle, se débrouiller, être créatif ?

Sans se prononcer sur le bien-fondé de cet état de fait, on peut noter que l'enseignement français traditionnel repose principalement sur la première approche pour plusieurs raisons, parmi lesquelles :

- le fait que l'on considère qu'un étudiant qui a acquis de « bonnes bases » théoriques va être capable d'appréhender rapidement toutes sortes de domaines d'application, ce qui est un des objectifs de la formation, comme nous avons pu le dire ci-avant ;
- le souci d'efficacité vis-à-vis de l'étudiant : on ne peut laisser l'étudiant tout réinventer ;
- le souci d'efficacité vis-à-vis de l'enseignant : dans l'état actuel de formation des enseignants à l'université, l'enseignement traditionnel présentant la théorie avant l'application est plus facile à reproduire, et l'enseignant se sent souvent plus compétent dans cette appoche. Nous allons donner quelques éléments sur ce point ci-dessous.

2. *La formation à la modélisation*

L'approche privilégiant la théorie est plus facile pour l'enseignant-chercheur qui en a la maîtrise. Il a l'impression d'avancer dans le programme et d'utiliser ses compétences. Les autres approches supposent d'autres compétences, encore peu mises en avant. De fait, il est difficile de trouver actuellement (dans le contexte français) des enseignants-chercheurs bien formés à la modélisation, c'est-à-dire dans la situation qui nous intéresse ici (formation professionnalisante), capables de dialoguer avec un industriel non spécialiste des mathématiques appliquées, et de parvenir à traduire le problème que celui-ci pose en termes mathématiques. Cela suppose une expérience certaine conjuguant une bonne connaissance des outils théoriques, une assez grande culture mathématique, une pratique de la collaboration industrielle et une aptitude à l'innovation. L'évaluation de la recherche se faisant sur des critères de qualité des publications, cela ne pousse pas l'enseignant chercheur à consacrer du temps à cette activité de collaboration avec l'industrie, mais la situation évolue.

Des expériences sont actuellement menées pour développer ces compétences chez les jeunes chercheurs. On peut citer les initiatives d'ECMI (European Consortium for Mathematics in Industry)[4] ; en France une première Semaine d'Etude Maths-Entreprises (SEME) a été organisée en avril 2011 : elle a impliqué de jeunes doctorants ou post-doctorants, ainsi que des encadrants juniors ou « seniors » issus du monde académique. Ils ont travaillé sur des problèmes de nature mathématique directement liés à l'industrie et présentés par des industriels. Une deuxième SEME aura lieu fin 2011. Nous ne disposons pas encore de véritable retour sur ces expériences. On peut néanmoins penser que de telles initiatives, qui devraient se reproduire, feront évoluer la situation d'ici quelques années.

Enfin, il serait souhaitable qu'il y ait plus de passerelles entre les deux mondes, académique et industriel. Il existe quelques postes (peu nombreux) de « professeur associé »,

[4] Exemple : groupes d'étude ESGI (European study group with industry), semaines « modelling weeks », groupes de travail « student modelling workshop », écoles d'été ESSIM (European summer school in industrial mathematics).

sur lesquels des industriels assurent une demi-charge d'enseignement. Par ailleurs, quelques enseignants-chercheurs essaient l'immersion complète dans la recherche en milieu industriel par des détachements longs (plusieurs mois, voire une ou deux années) dans l'entreprise. Ces échanges sont à encourager et permettront à ces chercheurs qu'ils fassent profiter directement de leur expérience les formations professionnelles.

3. *Les applications*

L'enseignement ne privilégie en général pas une approche "inductive" permettant d'avoir l'intuition de la théorie à partir d'un problème concret de modélisation ; il a recourt plutôt à une approche "déductive" permettant d'appliquer la théorie à des problèmes concrets.

Il n'est pas difficile, et c'est la condition nécessaire d'un enseignement de cette nature, de trouver des enseignants qui ont déjà une pratique de ce que à quoi les mathématiques qu'ils connaissent et enseignent à ce niveau Master peuvent servir : c'est l'apport d'une formation en mathématiques dites appliquées, par rapport à une formation en mathématiques dites fondamentales. Il n'est pas accepté de développer un sujet qui n'aurait pas un lien explicite, en amont ou en aval quand ce n'est pas le cœur du sujet, avec les applications. Les sujets de thèse ont donc presque toujours un ancrage applicatif. Citons quelques exemples rencontrés récemment : la modélisation du ruissellement, le problème de contact d'un pneumatique, la propagation d'une fissure, ou le mouvement de troupeaux de moutons. Les modèles mathématiques correspondant comportent des équations aux dérivées partielles qui rentrent dans des "catégories" bien identifiées ; des équations génériques correspondant à des cas très simplifiés peuvent être étudiées au niveau master de façon « abstraite » (plus ou moins détachée de leur contexte) mais en les motivant par ce contexte, et cela se fait très fréquemment.

4. *Les compétences informatiques*

Le modèle mathématique est le plus souvent utilisé pour mettre au point des programmes informatiques qui simulent la situation, l'objet ou la structure modélisée. La mise en œuvre de la modélisation, quelque soit le domaine d'application, nécessite ainsi des moyens informatiques, et suppose des compétences en programmation, utilisation ou développement de logiciels, simulation numérique, etc. Il s'agit donc que les étudiants acquièrent une autonomie face à certains langages de programmation plus ou moins élaborés (C, C++, par exemple) et maîtrisent l'utilisation de certains logiciels (VBA, matlab,...).

Au niveau de compétences d'un Master, l'informatique est le plus souvent une discipline à part entière et l'enseignement est assuré par des spécialistes (qui peuvent être des enseignants-chercheurs ou des ingénieurs de recherche du CNRS, Centre National de la Recherche Scientifique, ou de centres de recherche de l'industrie). L'expérience montre que si un enseignant-chercheur peut encore préparer un nouveau cours de modélisation à partir de ses propres connaissances théoriques et d'ouvrages, il lui est beaucoup plus difficile de construire des enseignements de calcul scientifique s'il n'a pas déjà acquis une maîtrise du sujet notamment pendant son doctorat.

L'importance relative de cet enseignement dépend de la thématique principale de la formation et varie suivant les Masters généralistes. Et dans une formation donnée, les étudiants n'ont pas tous la même maîtrise en sortie car, pour certains, les compétences relèvent du "don" et ils acquièrent une réelle expertise du calcul scientifique, quand pour d'autres, l'apprentissage est plus fastidieux. Il est toutefois toujours exigé un minimum, et c'est une matière éliminatoire, au sens où il n'est pas possible d'avoir le diplôme sans avoir validé ces compétences minimales, car ce sont elles qui sont exigées en sortie et permettent à l'étudiant de trouver un emploi (les matières « théoriques » relèvent de la continuité de la formation et ont été plus ou moins évaluées les années antérieures). Pour que les étudiants atteignent ce niveau, et la réussite est essentielle pour une formation professionnalisante, il est accepté de mettre en œuvre des moyens matériels et humains conséquents, permettant d'organiser des séances de travaux pratiques dans des salles bien équipées (en matériel informatique et logiciels). Des heures en « libre-service » sont aussi proposées ; une partie du travail est effectuée en binôme. Les étudiants ont ainsi la possibilité d'apprendre, de pratiquer et d'acquérir les compétences demandées.

IV. FACILITER L'INSERTION PROFESSIONNELLE

1. La motivation des étudiants

Les étudiants ont du mal à se motiver pour des études qu'ils jugent encore assez théoriques, alors même qu'on leur dit qu'il n'y a plus de théorèmes dans l'industrie. L'obtention du diplôme requiert l'acquisition d'un certain nombre d'ECTS[5] (60 en deuxième année de master, répartis en au moins 30 sur plusieurs cours et projets, et le complément pour le stage), qui suppose un investissement personnel important de la part des étudiants. Cependant, pour obtenir ces "crédits", ils ne travaillent pas nécessairement de façon "intelligente" (il arrive par exemple, qu'ils copient un programme informatique, sans s'approprier le contenu, ou ils peuvent prendre un exemple tout fait sur internet, sans réfléchir ou sans rapport avec la thématique) ; ils ne savent pas approfondir les notions et au lieu de réaliser au mieux les projets, ils se contentent souvent de résultats moyens.

Heureusement, les stages constituent un moment privilégié entre formation et vie professionnelle, qui contribue beaucoup à la motivation des étudiants et à leur prise de conscience des enjeux de l'enseignement qu'ils ont eu. L'enseignant est souvent ravi de voir revenir ses étudiants transformés à la fin de leur stage, et apprécie que certains aient mis une énergie insoupçonnée pour réussir cette première expérience professionnelle. Il aimerait néanmoins avoir profité un peu plus de cette motivation et de ce dynamisme au premier semestre universitaire, et se pose des questions du « comment faire » pour rendre son enseignement plus attractif.

Il y a donc souvent un « fossé » alors même que les deux parties —formés / formateurs— ont une bonne volonté et des intérêts communs. Comment y remédier ?

D'autres initiatives pourraient être plus développées : si l'on fait déjà régulièrement appel aux témoignages d'anciens étudiants, si les présentations d'entreprise sont déjà très pratiquées on pourrait aller plus loin. Imaginer faire appel à un vrai tutorat de la part des alumni en poste dans des entreprises du secteur, ou d'ingénieurs en entreprise intéressés par un tel « compagnonnage » (on se heurte là à des problèmes de moyens : cela suppose un meilleur suivi des anciens diplômés et une organisation plus lourde).

2. Le rôle des stages

Tels qu'ils sont conçus actuellement, les stages sont un élément primordial dans le dispositif de formation et pour une insertion professionnelle efficace. Ils sont aussi un moteur pour l'évolution des formations. Les étudiants d'université, contrairement aux élèves des écoles

[5] ECTS signifie European Credits Transfer System ; le Système européen de transfert et d'accumulation de crédits est un système de points développé par l'Union Européenne qui a pour but de faciliter la lecture et la comparaison des programmes d'études des différents pays européens.

d'ingénieur en France, n'ont pour la plupart pas d'occasion d'immersion dans l'entreprise autre que par les « petits boulots » qui ne sont pas faits dans l'idée de se préparer au métier qu'ils exerceront, mais purement pour la subsistance quotidienne ou pour se payer des « extras » (sorties, vacances). Et il est difficile, surtout pour les scientifiques, de trouver des activités rémunérées en lien avec le domaine de la formation (à part dans les « petits cours » de maths).

La période de stage de M2 (de six mois en second semestre de la deuxième année de formation de Master) est une période de formation à la vie professionnelle irremplaçable, car elle ouvre à un domaine d'activité à un niveau et dans les conditions proches du métier réel auquel les étudiants peuvent prétendre. C'est une période « protégée », pendant laquelle l'étudiant dispose de la formation et d'un encadrement adapté sur un sujet préparé et généralement bien délimité. La plupart des encadrants en entreprise acceptent ce rôle à ce niveau car c'est « gagnant-gagnant » : un stagiaire bien formé peut apporter par son travail des résultats significatifs. Certains tuteurs estiment aussi qu'il est de leur devoir de citoyen d'assurer à leur tour le service dont ils ont eux-mêmes bénéficié.

Ces encadrants avec lesquels les responsables de formation ont des échanges apportent leur vision de la formation à travers les retours d'évaluation de stage. Par ailleurs, la fréquence de certaines thématiques dans les sujets proposés (par exemple l'optimisation, le calcul parallèle, la programmation sur carte graphique,...) incite les enseignants à développer les items correspondants dans leurs cours.

3. *D'autres initiatives à développer*

- Les projets

On pourrait penser travailler essentiellement sous la forme de projets, de nature « industrielle », les enseignements théoriques venant au moment voulu, et non précédant leur utilisation. Cette initiative relève principalement de la bonne volonté du corps enseignant qui devra se coordonner autour d'un sujet se prêtant à une interaction (modélisation-informatique-théorie). Une telle approche est assez contraignante à mettre en place, mais on peut penser qu'elle modifierait les conditions d'apprentissage et serait attractive pour les étudiants.

- Le mentorat / compagnonnage

Déjà mentionné, il n'est pas encore dans les usages à l'université, mais pourrait s'envisager sur des petites promotions. Ce type d'initiative implique des intervenants extérieurs et est plus lourd à mettre en œuvre sans nouveaux moyens humains.

- Conseil de perfectionnement

Il pourrait associer quelques anciens en poste, des ingénieurs ayant participé à l'encadrement, des recruteurs... et bien sûr les enseignants les plus impliqués, voire des enseignants de formations proches. Cette instance aurait l'intérêt d'associer des extérieurs apportant leur vision des besoins de l'entreprise et des enseignants motivés pour justifier leur pratique et acceptant de la faire évoluer si nécessaire. De l'énergie (et du temps) est nécessaire aux responsables pour monter une telle structure.

- Les visites d'entreprises

Les étudiants n'ont pas l'occasion au cours de leurs études d'être confrontés à la réalité du travail auquel ils se destinent. Le stage est une immersion longue, il serait intéressant qu'ils aient pu avoir avant l'occasion d'expériences courtes, en lien avec la formation. Là encore, de l'énergie est nécessaire pour mettre en route ces initiatives.
Cependant, on peut penser que certaines expériences pourraient être mutualisées au niveau de l'établissement, c'est à dire l'université, la plupart cherchant à intensifier leurs relations avec

les entreprises, grandes ou petites, et celles ci pouvant également bénéficier de relations privilégiées avec une université leur donnant accès à des compétences établies.

V. CONCLUSION

Cette contribution pose les jalons d'une réflexion qu'il serait utile de mener avec d'autres responsables de formations analogues. Il ne s'agit pas de changer radicalement des pratiques qui de fait ont connu un réel succès, puisque les débouchés se révèlent très bons, et que les retours de l'industrie sont assez positifs. Il s'agit de les faire évoluer en tenant compte :

- des changements qui interviennent dans la société et en particulier l'enseignement (plus diversifié, moins approfondi et souvent moins théorique) qui précède ;
- de l'innovation technologique
- de l'industrialisation en Europe
- et bien sûr des nombreuses initiatives « mathématiques-industrie » qui sont lancées à différents niveaux (sociétés savantes, comme la SMAI, société de mathématiques appliquées et industrielles, instances comme le CNRS, laboratoires d'excellence[6]…), tant en France qu'en Europe (voir aussi l'initiative ICMI/ICIAM « Educational Interfaces between Mathematics and Industry » EIMI-Study).

Il est par ailleurs très important de mieux former les enseignants (de l'école primaire, ou de l'enseignement secondaire) pour qu'ils soient conscients des enjeux de ces interfaces. Donc il serait bon, pour qu'ils se sentent concernés par les relations mathématiques-industrie, qu'il y ait aussi des passerelles entre ce type de formations professionnelles et celles qui préparent au métier d'enseignant, en tout cas que les enseignants-chercheurs des formations professionnelles apportent aux futurs enseignants une connaissance minimale du sujet.

La communauté est sensible au fait qu'il faut continuer à former des scientifiques de haut niveau dans nos sociétés occidentales, et d'aider à en former dans les pays en voie de développement. Les mathématiciens sont convaincus que leur discipline pourrait jouer un rôle encore plus important et font un effort pour le faire savoir à la société et mieux communiquer sur l'intérêt de leur discipline.

REFERENCES

CNE (2002) *Les formations supérieures en mathématiques orientées vers les applications*. rapport du Comité National d'Evaluation, juillet 2002. France (ISSN : 0983-8740)

Comité scientifique des IREM (2003) *La modélisation*. novembre 2003. www.univ-irem.fr/IMG/pdf/Mod-Recueil.pdf

Cont R. (2009) Risques financiers : quelle modélisation mathématique ? *Pour la Science* 375, 24-27.

European Science Foundation (2010) Forward Look « Mathematics and Industry », November 2010.

Friedman A., Lavery J. (1993) *How to start an industrial mathematics program in the university*. Society for Industrial and Applied Mathematics (Philadelphia).

[6] En France, le projet AMIES (Agence pour les mathématiques en interaction avec l'entreprise et la société), déposé par l'INSMI (Institut national des sciences mathématiques et de leurs applications, institut du Cnrs), dans le cadre des Laboratoires d'excellence a été retenu en 2011, voir le site http://www.agence-maths-entreprises.fr/.

UNE ETUDE SUR LA PRATIQUE D'ENSEIGNEMENT DES PROBABILITES DANS LA FORMATION DES MEDECINS

Hoai-Châu LE* – Hong-Nam DAO**

Résumé – Le modèle des seuils a été choisi dans le but d'étudier l'enseignement des mathématiques dans la filière des médecins. Notre étude institutionnelle montre le manque d'une technique mathématique dans la praxéologie présentée aux étudiants. Des techniques mathématiques ont été introduites séparément mais ne sont pas exploitées dans la situation d'essai thérapeutique. La tendance selon laquelle il n'y a que des savoirs académiques à enseigner domine l'enseignement des mathématiques, y compris dans la formation professionnelle des médecins qui sont souvent confrontés à des problèmes pour lesquels les probabilités sont nécessaires.

Mots-clefs : praxéologie, organisation didactique, probabilité, modèle des seuils, situation thérapeutique

Abstract: The threshold model was chosen by us in order to study the teaching of mathematics in the physician sector. Our institutional review showed a lack of mathematical technique in the praxeology presented to students. Mathematical techniques have been introduced separately, but are not used for testing therapeutic situations. The trend by which only academic knowledge is introduced still prevails in the teaching of mathematics, even in the professional training of physicians who often face problems for which probabilities are needed.

Keywords: praxeology, didactics organization, probability, the threshold model, therapeutic situation.

I. INTRODUCTION

La théorie des probabilités, via les statistiques, est l'un des domaines mathématiques présents, implicitement ou explicitement, aussi bien dans la vie de tous les jours que dans les autres sciences. La médecine est de ce point de vue un domaine remarquable. Toutefois, nous avons constaté que beaucoup d'étudiants de l'Université de médecine et de pharmacie d'Ho-Chi-Minh ville montrent leurs difficultés lors qu'ils doivent utiliser des connaissances de probabilités pour analyser les données obtenues dans le cadre du mémoire de fin d'études. Cette constatation nous a menés à la question du lien entre l'enseignement des probabilités et la formation professionnelle.

Parmi les nombreux concepts de probabilité qui interviennent en médecine et pharmacie, le modèle des seuils P-K choisi est un savoir enseigné au Viêt Nam, et vu comme nécessaire à la pratique professionnelle des médecins dans le diagnostic et le traitement des patients. Nous avons analysé les praxéologies à enseigner pour construire des éléments de référence à notre étude de la pratique d'enseignement du modèle des seuils. L'analyse, menée du point de vue de la Théorie Anthropologique du Didactique (Chevallard 1998), nous permet d'expliquer l'embarras des étudiants dans l'utilisation des probabilités dans leurs activités professionnelles.

II. MODELE DU SEUIL ET PRAXEOLOGIES A ENSEIGNER

1. Modèle des seuils

L'une des besognes professionnelles des médecins est l'établissement d'un diagnostic. Ce dernier terme contient en soi le sens de probabilité. Concrètement, avec la notion de modèle

* Université pédagogique de Ho-Chi-Minh ville – Viêt-Nam – lethihoaichau@gmail.com
** Université des sciences médicales de Ho-Chi-Minh ville – Viêt-Nam – dhnamyd@yahoo.com

© Le H.-C., Dao H.-N., (2012) Etude sur la pratique d'enseignement des probabilités dans la formation des médecins. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT5, pp. 720–729). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

des seuils, nous allons montrer comment le diagnostic des médecins fait intervenir la théorie des probabilités.

Décelant un symptôme anormal concernant sa santé, le patient vient voir le docteur. La présence de ce symptôme incite le docteur à penser qu'il est possible que le patient ait contracté une maladie B. Que faut-il faire ? Le médecin doit prendre les décisions les plus rationnelles possibles. Pour cela, outre l'expérience, les outils servant le diagnostic et le traitement jouent un rôle important. Les tests constituent de tels outils : mais il y a le risque que le médecin demande plusieurs tests dont certains ne sont pas nécessaires ou se trompe sur le test à réaliser. En plus du coût, ces erreurs peuvent même avoir des conséquences néfastes sur l'état de santé du malade. En outre, la prise de décision du médecin deviendra difficile s'il consulte un grand nombre de tests car ce nombre peut perturber les informations. Ainsi, le choix des tests à faire est important dans le diagnostic et le traitement.

Avant de décider de faire faire un test T, le médecin se base d'une part sur son expérience et d'autre part sur les rapports portant sur les personnes ayant contracté la maladie B, pour donner une probabilité $P(B^+)$, appelée probabilité *a priori* : $P(B^+)$ est une estimation de la probabilité que le patient porte la maladie B. La valeur de $P(B^+)$, donnée dans la pratique des médecins sous la forme d'un pourcentage, appartient à l'intervalle [0 ; 1]. L'intervalle [0 ; 1] est divisé en trois zones : surveillance, test, traitement. Les repères notés T_t et T_γ sont appelés seuils, T_t étant le seuil de test, T_γ le seuil de traitement.

Si $P(B^+) < T_t$ le médecin décide de ne pas faire le test T et de ne pas traiter non plus le malade mais de le surveiller.

Si $P(B^+) > T_\gamma$ il décide de le traiter immédiatement, le test T étant inutile.

Si $T_t < P(B^+) < T_\gamma$ le médecin doit indiquer le test T (et d'autres tests de plus, s'il les croit nécessaires) qui peuvent l'aider à poser un diagnostic.

Non traitement Surveillance	Test	Traitement

0 T_t T_γ 1

Figure 1 *– Modèle des seuils*

Les valeurs de T_t et $T\gamma$ fluctuent en fonction de nombreux facteurs : le risque et le coût du test T, l'intérêt et la dangerosité du traitement de la maladie B.

Dans le cas où le médecin déciderait du test T à faire, le résultat obtenu peut faire changer l'estimation $P(B^+)$. La nouvelle probabilité est appelée *a posteriori* et est notée par p. Si p sort de l'intervalle $[T_t, T_\gamma]$, alors la décision du médecin est considérée comme pertinente (parce que p permet de conclure sur la nécessité ou non du traitement). Sinon le test T n'a pas de valeur, parce qu'il ne permet pas d'affirmer que le patient ait contracté ou non la maladie B.

Le modèle des seuils ci-dessus a été proposé en 1980 par Pauket et Kassier et est appelé modèle P-K. Dans ce qui suit, nous l'appellerons *le modèle des seuils*.

2. Les praxéologies du modèle des seuils à enseigner

Pour mettre en évidence les praxéologies à enseigner, nous avons analysé l'ouvrage *Probabilité – Statistiques* utilisé à l'Université des sciences médicales d'Ho-Chi-Minh ville. L'équipe d'auteurs est composée de trois mathématiciens et d'un médecin qui a obtenu un master 1 en mathématiques. Nous utilisons la lettre V pour indiquer cet ouvrage.

Lors de l'analyse des praxéologies, nous nous arrêterons à la détermination des technologies, sans indiquer de façon précise les éléments théoriques. Évidemment, la théorie des probabilités est une référence fondamentale pour parler de ces éléments, ainsi que les savoir du domaine médical.

Dans l'ouvrage V, *le modèle de seuil* est introduit dans le dernier chapitre intitulé *Probabilité pour diagnostic*. Ce chapitre est précédé des chapitres suivants :

- Algèbre combinatoire
- La notion de probabilité et les formules de calcul des probabilités (probabilité produit, probabilité conditionnelle, …)
- Les distributions (Bernoulli, binomiale, normale, …)
- La théorie des échantillonnages
- La théorie d'estimation
- Test d'hypothèses.

Le chapitre *Probabilité pour diagnostic* comporte les objets suivants :

- Liens entre probabilité et diagnostic
- Précision d'un test
- Les méthodes de calcul de la probabilité *a posteriori* : méthode du tableau 2x2, méthode de Bayes, méthode du rapport des chances.
- Modèle des seuils P – K

Notre analyse montre que les praxéologies concernant le modèle des seuils s'organisent autour de quatre types de tâche notés par nous T_1, T_2, T_3, T_4.

T_1 : Estimer la probabilité $P(P^+)$

T_2 : Déterminer les seuils T_t, T_γ

T_3 : Prendre une décision pour le diagnostic

T_4 : Calculer la probabilité *a posteriori*

A partir de l'introduction brève du modèle des seuils ci-dessus, on trouve qu'en effet T_1, T_2, T_4 sont des sous-types de tâche de la T_3. Cela sera expliqué clairement plus loin quand nous analyserons les techniques introduites par V.

- **T_1 : Estimer la probabilité *a priori* $P(B^+)$**

La technique τ_1 est présentée comme suit dans V : poser un diagnostic (prévoir la probabilité $P(B^+)$, c'est-à-dire estimer la probabilité que le patient porte la maladie B) en demandant l'histoire du patient.

La technologie θ_1 qui explique τ_1 est donnée ainsi par V: En médecine, l'estimation de P(B+) est prévue en s'appuyant d'une part sur la proportion des gens (par rapport à la population générale) portant la maladie ou statistique de la clinique, et d'autre part sur l'expérience du médecin.

- **T_2 : Déterminer les seuils T_t, T_γ**

τ_2 : s'appuyer sur des éléments comme le risque du test, le coût et le niveau de précision du test, l'intérêt et l'inconvénient du traitement selon que le patient porte ou non la maladie, ...

Dans l'ouvrage V, technique τ_2 et technologie θ_2 sont indissociables, comme le montre la citation suivante :

> Les valeurs de T_t et $T\gamma$ varient en fonction de plusieurs facteurs: le risque associé au test, le coût du test, l'intérêt et le danger du traitement si le patient porte ou non la maladie. Elles sont déterminées par le

docteur en s'appuyant sur des éléments comme la proportion des patients qui portent la maladie, les propriétés du test, ...
Deux valeurs T_t et T_γ divisent l'intervalle [0, 1] en trois zones : zone de surveillance (sans traitement), zone de test, zone de traitement. La largeur de chaque zone dépend des T_t et T_γ, c'est-à-dire de la nature du test T et de l'intérêt du traitement.
Lorsque le test est sûr, peu risqué et peu coûteux, les médecins préconisent souvent le test, même si la valeur de P(B+) est grande ou petite : la zone de test est large. Inversement, si le test comporte un risque, les médecins sont réticents à indiquer ce test : la zone de test est étroite. (Chu et al. 2008, p. 219)

• ***T_3* : Prendre une décision pour le diagnostic**

Ici, on utilise le modèle des seuils en se basant sur la probabilité *p*. *p* désigne $P(B^+)$ ou PA (appelée probabilité *a posteriori*, calculée en fonction du résultat positif ou négatif du test qui a été effectué) suivant le moment dans le processus du diagnostic. La technique τ_3 est décrite comme suit :

- Si $p < T_t$: ne pas traiter
- Si $p > T_\gamma$: traiter immédiatement
- Si $T_t < p < T_\gamma$: indiquer le test à faire (si *p* est $P(B^+)$ ou un autre test (si *p* est PA) pour pouvoir estimer mieux la probabilité qu'on peut attacher à la possibilité que le malade porte la maladie.

θ_3 : Voici le discours sur la technique introduit par V :

Le modèle des seuils explique la décision prise par le médecin. Le fait qu'il décide de traiter ou non la maladie B, ou de choisir ou non le test T à faire dépend à la position de *p* par rapport aux trois zones du modèle des seuils. La largeur de chaque zone dépend des seuils T_t et T_γ. Ces seuils à leur tour dépendent :
- Du risque, du coût et de la précision du test T
- De l'intérêt et de l'inconvénient du traitement si le patient ne contracte pas la maladie B. (Chu et al. 2008, p. 220)

Ainsi, θ_3 est le modèle des seuils P – K.

• ***T_4* : calculer la probabilité *a posteriori***

Dans le cas où le médecin a choisi le test T, il doit consulter le résultat obtenu pour T afin d'estimer la probabilité que le patient contracte la maladie B. Autrement dit, il doit accomplir le type de tâche T_4 – calculer la probabilité *a posteriori*.

Dans V, on donne trois techniques pour résoudre ce type de tâche.

- τ_4 : Utiliser la formule de Bayes

Si T^- apparaît (résultat du test T négatif), alors $p = P(B^+/T^-)$. Donc, $p = \dfrac{p(B^+)p(T^-/B^+)}{p(T^-)}$.

Si T^+ apparaît (résultat du test T positif), alors $p = P(B^+/T^+)$. Donc, $p = \dfrac{p(B^+)p(T^+/B^+)}{p(T^+)}$.

La technologie θ_4 permettant de faire vivre τ_4 est la notion de probabilité conditionnelle et la formule de Bayes ($P(B|A) = \dfrac{P(B).P(A|B)}{P(A)}$) que les étudiants ont étudiée auparavant.

- τ'_4 : Utiliser la méthode *« tableau 2 × 2 »*

Le tableau 2 × 2 présente la sensibilité et la spécificité du test T (deux paramètres permettant d'estimer le degré de certitude du test T).

T^+, T^- sont respectivement les événements *« obtenir le résultat positif ou négatif du test T »*. B^+, B^- les événements *« le patient a contracté ou non la maladie B »*. La sensibilité correspond à la probabilité d'obtenir le résultat positif T^+ chez un patient ayant contracté la maladie B. Elle est définie par $P(T^+/B^+)$. La spécificité correspond à la probabilité d'obtenir le résultat négatif T^- chez un patient qui ne porte pas B. Elle est définie par $P(T^-/B^-)$.

Un échantillonnage de N personnes est pris pour faire le test T. Il est divisé en deux sous-groupes dont l'un contient des personnes portant la maladie B, l'autre des personnes ne la portant pas, ce qui est résumé dans le tableau 2 × 2 de la figure 2.

	B^+	B^-	
T^+	a	b	a + b
T^-	c	d	c + d
	a + c	b + d	N = a + b + c + d

Figure 2 *– Tableau 2 × 2*

Quatre formules sont introduites par V pour calculer la sensibilité et la spécificité du test T :

$$P(T^+/B^+) = \frac{a}{a+c}\ ;\ P(T^-/B^+) = \frac{d}{b+d}\ ;\ P(T^+/B^-) = \frac{b}{b+d}\ ;\ P(T^-/B^-) = \frac{c}{a+c}\ .$$

Etant donné N la taille de l'échantillon, l'effectif de chaque groupe (portant ou non la maladie B), la sensibilité et la spécificité, on peut calculer a, b, c, d, puis la probabilité *a posteriori* $p = P(B^+/T^+)$ si T^+ et $p = P(B^+/T^-)$ si T^-.

- τ''_4 : Utiliser la méthode *« rapport des chances »*

Le rapport des chances de l'événement A, noté LR(A), est déterminé par la formule $LR(A) = \dfrac{p(A/B^+)}{p(A/B^-)}$

Dans l'ouvrage V, on montre que : si A est T^+, alors $LR(T^+) = \dfrac{p(T^+/B^+)}{p(T^+/B^-)}$, noté LR^+ ; si A est T^-, alors $LR(T^-) = \dfrac{p(T-/B^+)}{p(T^-/B^-)}$, noté LR^+.

V introduit ensuite les formules permettant de calculer la probabilité *a posteriori*. Ces formules tiennent compte de $P(B^+)$, de la sensibilité et du résultat du test. Elles sont assez complexes. Nous ne les présenterons pas dans le cadre de cet article.

En résumé, il y a 4 types de tâche concernant le modèle des seuils. De quelle nature sont-ils ?

T_4 (calculer la probabilité *a posteriori*) est un type de tâche mathématique. L'une des technique revient à utiliser la formule de Bayes introduite précédemment dans l'ouvrage V.

T_1 (estimer la probabilité *a priori* $P(B^+)$) n'est pas un type de tâche mathématique bien que la technique τ_3 comporte une comparaison numérique. On peut dire que c'est aussi le cas de T_3 (prendre une décision pour le diagnostic).

T_2 (déterminer les seuils T_t, T_γ), telle qu'elle est présentée dans l'ouvrage V, n'est pas non plus un type de tâche mathématique. La technique introduite dans V doit *s'appuyer sur des éléments comme le risque, le coût, la sensibilité et la spécificité de l'examen qu'on peut* *choisir en espérant avoir des informations permettant d'affirmer la présence ou non chez le patient de la maladie. Elle doit aussi prendre en compte l'intérêt et l'inconvénient du traitement que le patient porte ou non la maladie, ...* Par exemple, si le malade a un cancer à la dernière étape, le médecin considère que l'intervalle [T_γ, 1], zone de traitement, est très étroit.

Or, la théorie des probabilités fournit la formule suivante pour déterminer les seuils T_t, T_γ :

$$T_t = \left[1 + \frac{B}{R}.LR^+\right]^{-1} ; T_\gamma = \left[1 + \frac{B}{R}.LR^-\right]^{-1}$$

où R est la proportion de Risque, B la proportion de Bénéfice du traitement, LR^+, LR^- sont des rapports de chances. R et B sont donnés (à partir des recherches médicales). LR^+, LR^- peuvent être trouvés grâce à deux formules présentées ci-dessus.

Ainsi, la technique mathématique qui permet de diminuer l'aspect subjectif dans le diagnostic n'est pas présentée dans l'ouvrage.

III. ANALYSE D'UNE PRATIQUE D'ENSEIGNEMENT DU MODELE DES SEUILS

L'enseignement concerné est celui de première année de l'Université des sciences médicales d'Ho-Chi-Minh ville. La séance observée est celle de l'étude du modèle des seuils P –K. Les deux séances consacrées aux exercices seront les deux dernières séances du module *Probabilités – Statistique* du programme de formation des médecins.

Le protocole a été reconstruit à partir de l'enregistrement audio de la séance et des notes des observateurs. L'analyse de la pratique d'enseignement est faite du point de vue de la théorie anthropologique du didactique. Qu'enseigne-t-on aux futurs médecins à propos de l'utilisation du modèle des seuils dans une situation thérapeutique ? Dans le cadre de cette communication, nous ne présenterons que certains points de notre analyse.

Dans l'approche anthropologique, l'activité d'enseignement est considérée comme l'étude d'une (des) praxéologie(s) concernant un objet de savoir O. L'organisation didactique de cette étude est examinée selon six moments: (1) le moment *de la première rencontre* avec le type de tâche *T ;* (2) le moment d'*exploration* du type de tâche *T* et *de l'émergence de sa technique* τ*;* (3) le moment *technologico-théorique*, qui voit la création (ou l'identification) du bloc [θ/ Θ] ; (4) le moment *du travail de l'organisation mathématique* créée (ou en cours de création), pour assurer la résistance des éléments praxéologiques et, le cas échéant, pour les améliorer, et en même temps pour permettre *la maîtrise* de cette organisation praxéologique, en particulier de la technique τ élaborée ; (5) le moment *de l'institutionnalisation* de la praxéologie construite ; (6) le moment *de l'évaluation* non seulement de la maîtrise de la praxéologie créée, mais aussi de cette praxéologie elle-même. (Cf. Chevallard 2002).

Dans la partie ci-dessous, les citations sont issues du protocole, découpé en 48 paragraphes.

• Paragraphes 1 – 8 : Le professeur (P) commence par la présentation du modèle des seuils. C'est le moment de la première rencontre avec le type de tâche T_3 *– prendre une décision clinique:*

7. (P) : Aujourd'hui, nous allons étudier une autre méthode qui sert à diagnostiquer une maladie en s'appuyant sur la fréquence des malades et sur le résultat de l'examen. C'est la méthode du modèle des seuils.

On voit que le type de tâche T_3 est étudié avant les types de tâche T_1, T_2 *et* T_4. Le modèle des seuils est l'élément technologique de τ_3.

La technique τ_3 est introduite explicitement tout de suite dans le paragraphe 8, sans exemple.

> 8. (P) : … si la probabilité *p* exprimant la possibilité de porter la maladie est faible, alors surveiller sans traiter, n'indiquer non plus aucun examen à faire.
> Traiter toute de suite si la probabilité *p* est assez importante, c'est-à-dire *p* permet de prendre la décision de traitement.
> Indiquer un examen si la probabilité *p* ne permet pas d'affirmer que le patient porte ou non la maladie.

• Paragraphes 9 – 14 : étude du type de tâches T_1 – estimer la probabilité *a priori*. C'est le moment de la première rencontre avec T_1 :

> 9. (P) : Le problème qui se pose est comment faire pour estimer la probabilité que le patient porte la maladie avant l'examen ?

C'est aussi le moment d'exploration de la technique. Comme nous l'avons dit, T_1 n'est pas un type de tâche mathématique. La technique émerge d'un exemple à propos du diagnostic de la maladie de Wilson.

> 12. (P) : Chez un patient ayant des mains tremblantes et un haut rythme cardiaque, le risque d'une hyperthyroïdie (80%) est beaucoup plus grand que celui de contracter la maladie de Wilson (1%). Cependant, après avoir su que le frère du patient a porté la maladie de Wilson, le risque de contracter la maladie de Wilson du patient augmente de 95%.
> 14. (P) : Cette probabilité est donnée en se basant sur l'incidence des maladies. Elle est donnée en pourcentage au lieu d'utiliser le mot « suspect », « peut » ou « plus probable ».

• Paragraphes 15 -18 : retour au type de tâches T_3**.**

> 15. (P) : Lorsqu'on a la probabilité *a priori,* comment utilise-t-on le modèle des seuils ?
> 16. (E) : La prise de décision dépend de l'intervalle à laquelle cette probabilité appartient.
> 17. (P) écrit au tableau :
> Lorsque la probabilité $P(B^+)$ (probabilité *a priori*) a été donnée, alors nous utilisons le modèle des seuils pour prendre la décision. Plus précisément :
> - Déterminer l'intervalle où se trouve *p*
> - Si $P(B^+) < Tt$: ne pas traiter, ne pas proposer non plus le test, mais surveiller le patient
> - Si $P(B^+) > T\gamma$: décider du traitement
> - Si $Tt < P(B^+) < T\gamma$: indiquer le test à faire

C'est le moment du travail de la praxéologie concernant T_3 au travers de l'exemple du diagnostic de l'asthme.

> 18. Dans l'asthme, nous avons choisi le seuil du test comme étant de 10%, le seuil du traitement de 80%. On a (P écrit au tableau) :

Zone de Surveillance	Test	Zone de Traitement
0 — 0,1	0,1 — 0,8	0,8 — 1

Figure 3 – *Modèle des seuils écrit au tableau*

> Après l'examen, le docteur estime la probabilité $P(B^+)$. Si $P(B^+) < 0{,}1$, il ne traitera pas et n'indiquera pas non plus le test, mais il surveillera le patient. Si $P(B^+) > 0{,}8$, il faut traiter. Si $0{,}1 < P(B^+) < 0{,}8$, il faut décider du test à faire.

Ainsi, les étudiants travaillent sur le modèle des seuils introduit précédemment (paragraphe 8), au travers d'un exemple où T_t et T_γ sont donnés ($T_t = 0{,}1$; $T_\gamma = 0{,}8$). Mais P ne fournit aucune explication sur la façon dont ces valeurs ont été calculées.

Ce moment de travail avec la technique τ_3 est effectué par P sans contribution des étudiants. L'étude de cet exemple joue le rôle de support à l'institutionnalisation de la technique τ_3. La technologie expliquant τ_3 est introduite par P.

• Paragraphes 19 – 25 : moment de l'étude du type de tâche T_2.

L'exemple précédent crée le besoin d'étudier le type de tâche T_2. Ce besoin est exprimé par un étudiant.

19. (E) : Comment sait-on que $T_t = 0{,}1$ et $T_\gamma = 0{,}8$? Comment sont déterminés ces deux seuils ?

Deux techniques pour déterminer les seuils (T_2) sont alors introduites par P.

21. (P) : On a deux méthodes permettant de déterminer les seuils.
22. (P) : Les seuils sont déterminés par le docteur en s'appuyant sur des éléments comme la proportion des patients qui portent la maladie, les propriétés du test, ... Lorsque le test est sûr, peu risqué et peu coûteux, les médecins préconisent souvent le test. La zone de test est large. Inversement, si le test comporte un risque, les médecins hésitent à recommander ce test. La zone de test est alors réduite.

Cette technique τ_2 correspond à celle présentée dans l'ouvrage V : elle ne contient aucun élément numérique et s'appuie sur des considérations de la profession. Le professeur se dissocie de V en commentant la méthode qu'il vient d'introduire et en la complétant par la donnée de deux formules (technique τ'_2).

25. (P) : Pour éviter le défaut de cette méthode basée essentiellement sur l'expérience, certains auteurs proposent les deux formules suivantes :

$$T_t = \left[1 + \frac{B}{R}.LR^+\right]^{-1} ; T_\gamma = \left[1 + \frac{B}{R}.LR^-\right]^{-1}$$

Où R est la proportion de Risque, B est la proportion de Bénéfice.

On voit que la nouvelle technique τ'_2 est introduite sans autre explication que « le défaut de la méthode τ_1 ». Les éléments théoriques ne sont pas présentés.

• Paragraphes 26 – 27 : travail de τ'_2 sur un exemple dans lequel sont données les valeurs nécessaires pour l'application des deux formules précédentes.

• Paragraphe 29 : rappel de la technique τ_3 qui a été institutionnalisée au paragraphe 17. Pourtant, à ce moment-là, $p = P(B^+)$ est la probabilité *a priori*. Ce rappel est fait dans le but d'introduire le type de tâche T_4 – déterminer la probabilité *a posteriori*, qui apparaît comme un sous-type de tâche de T_3.

29. (P) : … Nous avons dit que dans le cas où $T_t < P(B^+) < T_\gamma$, il faut indiquer le test à faire. Si la probabilité *a posteriori* n'est pas au-delà des deux seuils, le test n'est pas valable et nous devrions rejeter ce test.
30. Comment détermine-t-on la probabilité après avoir obtenu le résultat du test ?

Ainsi, c'est le moment de la première rencontre avec T_4.

• Paragraphes 30 – 34 : moment du travail de la technique τ_4

32. (P) : Faisons attention, ce sont des probabilités conditionnelles. Nous pouvons donc utiliser des formules de probabilité conditionnelle introduites antérieurement pour calculer cette probabilité. Une des formules est celle de Bayes.

Si T^+ (le résultat du test est positif) : $P(B^+|T^+) = \frac{P(B^+).P(T^+|B^+)}{P(T^+)}$;

Si T^+ (le résultat du test est négatif) : $P(B^+|T^-) = \frac{P(B^+).P(T^-|B^+)}{P(T^-)}$

La Technique τ_4 revient sur l'usage de la formule de Bayes.

Rappelons que pour résoudre T_4 il existe deux autres techniques – celle du tableau 2×2 et celle du rapport des chances, qui ont été abordées avant l'étude du modèle de seuil. *Pourtant, l'enseignant ne mentionne aucune de ces deux techniques. Une occasion permettant de comparer les techniques et de les évaluer n'est pas saisie, les deux techniques non mentionnées étant rejetées sans explication.*

• Paragraphes 35 – 45 : moment du travail des quatre types de tâche précédents et des techniques enseignées. Les différentes techniques fonctionnent au travers d'un exemple de diagnostic de la maladie B chez monsieur M.

35. (P écrit au tableau) : Dans le modèle de seuil P-K, on prend $T_t = 0{,}25$ et $T_\gamma = 0{,}7$. Le docteur diagnostique qu'il est possible que monsieur M ait la maladie B. Il demande donc de faire l'examen T_1. Si le résultat obtenu par l'examen est T^-, il ne va pas traiter, au contraire il va le faire si le résultat est T^+. La décision est-elle bonne ? Pourquoi ?

Les étudiants résolvent le problème, guidés par P.

• Paragraphes 46 – 47 : institutionnaliser encore une fois les techniques présentées précédemment. Les éléments de technologie et la théorie ne sont pas repris.

47. (P) : Pour résoudre des situations cliniques compliquées, l'utilisation du modèle des seuils pour analyser des décisions cliniques est un outil scientifique important qui aide le médecin à prendre la bonne décision.

IV. EN CONCLUSION

L'analyse présentée ci-dessus montre que dans la séance observée une seule praxéologie est enseignée autour du seul type de tâche T_3 « *prendre une décision pour le diagnostic* ». Dans cette praxéologie enseignée, T_1, T_2, T_4 sont trois sous-types de tâche de T_3 et de ce fait, participent à la technique enseignée pour prendre une décision dans le diagnostic d'une maladie.

Seuls T_2 et T_4 sont des types de tâche pour lesquelles existent des techniques mathématiques. L'enseignant en plus de la technique de l'ouvrage V, technique s'appuyant sur l'expérience professionnelle du médecin, introduit la technique mathématique τ'_2 absente de V. Pour T_4, seule l'une des trois techniques mathématiques présentes dans V est enseignée. On peut donc dire que la praxéologie enseignée autour de T_2 est une praxéologie mixte, combinant des savoirs mathématiques et des savoirs professionnels.

À propos de l'organisation didactique de la séance observée, c'est-à-dire du point de vue des moments de l'étude, on voit que :

- Les moments de la première rencontre avec les quatre types de tâches sont initiés par l'enseignant à partir de questions ou d'exemples de situations thérapeutiques.

- Les moments d'exploration des praxéologies sont entièrement sous la responsabilité de l'enseignant, laissant peu de place à l'étudiant.

- L'institutionnalisation est réalisée à plusieurs moments dans la séance, en particulier les techniques et les éléments de technologie à retenir sont écrits au tableau par l'enseignant.

- Les techniques des quatre types de tâches sont travaillées de façon coordonnée lors de l'étude d'exemples de situations thérapeutiques.

- L'évaluation praxéologique est réalisée par l'enseignant lui-même qui commente les points positifs et négatifs des techniques utilisées dans l'étude d'un exemple.

Quant à l'élaboration d'éléments technologiques et théoriques, ils sont principalement de nature professionnelle en référence avec l'expérience médicale de telle ou telle maladie : les éléments technologico–théoriques de nature mathématique de la praxéologie enseignée sont absents alors même que certaines techniques enseignées sont mathématiques. On peut se demander quelles sont les conséquences d'une telle incomplétude de la praxéologie enseignée, la maîtrise du diagnostic pour traiter un patient étant cruciale pour les médecins.

REFERENCES

Dawson B, Trapp R. G. (2004) *Basic & Clinical Biostatistics*. Hill Publ.Comp.

Chevallard Y. (1991) Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 12(1), 73-112.

Chevallard Y. (2002) Organiser l'étude 1. Structures et Fonctions. Organiser l'étude. In J.-L. Dorier et al. (Eds.) (pp. 3-22 et pp. 41-56). *Actes de la 11ème école d'été de didactique des mathématiques –Corps, 21-30 Août 2001*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chu Văn Thọ, Phạm Minh Bửu, Trần Đình Thanh, Nguyễn Văn Liêng (2008) *Probabilités – Statistiques.* Université des sciences médicales de Ho-Chi-Minh ville – Viêt-Nam.

INSCRIRE LES PROBLEMES DE MATHEMATIQUES DANS DES RECITS EMPRUNTES A LA LITTERATURE DE JEUNESSE

Marianne MOULIN* – Virginie DELOUSTAL-JORRAND*
Eric TRIQUET* – Catherine BRUGUIERE*

Résumé – Nous étudions la question de la modélisation par le récit des situations et objets dans les problèmes de mathématiques. Notre expérimentation met en évidence les apports d'une telle approche en amenant notamment les élèves à acquérir un regard critique sur les récits et les problèmes de mathématiques qui y sont inscrits. Ils travaillent ainsi sur la détermination des données mathématiques à l'intérieur du champ de la fiction. Nous ouvrons ainsi plusieurs pistes pour la construction d'ingénieries dans lesquelles nous proposons d'inscrire des problèmes de mathématiques dans des récits empruntés (ou non) à des ouvrages destinés à la jeunesse.

Mots-clefs : problèmes de mathématiques, résolution de problème, récits de fiction, manuel scolaire, ingénierie didactique

Abstract – We study the question of modeling situations and object with stories in mathematic word problems. Our experiment shows the benefits of this approach. Indeed it leads students to build an expert eye on stories and problems written in theses stories. They make a difference between what belongs to mathematics in the field of fiction. This way, we present different experiment proposal in which we put down word problem in stories that came from children's storybooks.

Keywords: Mathematic word problems, problem solving, fictional stories, textbooks, experiment.

Le travail que nous proposons s'inscrit dans une recherche menée par une équipe du laboratoire S2HEP (Sciences et Société : Historicité, Education et Pratiques) de l'Université Claude Bernard Lyon 1. Cette recherche porte sur les interactions entre sciences et récits dans différents supports de médiation et sur l'étude des fonctions du récit dans les apprentissages scientifiques (problématisation, explication, représentation et modélisation). Au sein de ce groupe, nous développons depuis deux ans, grâce à un premier mémoire de recherche[1] en 2010 (niveau master) qui se poursuit actuellement en thèse[2], un travail de recherche plus spécifique en didactique des mathématiques. Dans ce texte, nous présentons cette recherche dont l'objectif est de déterminer les spécificités, les avantages et les limites de la médiation par le récit de l'activité de résolution de problèmes.

Ce travail est motivé par différentes recherches en didactique des mathématiques qui mettent en évidence, que confrontés à des énoncés stéréotypés ou *énoncés canoniques* (Descaves 1992) les élèves ont recours à des « procédures automatiques » (Bulten et Pezard 1992). Comme par exemple celle qui consiste à résoudre les problèmes en se contentant d'appliquer la dernière opération apprise aux deux uniques nombres présents dans l'énoncé. Dans ce cas largement étudié dès 1979 par l'IREM de Grenoble (1979) dans *L'âge du capitaine*, les élèves ne développent pas les connaissances espérées par la pratique de la résolution de problèmes. *Résoudre un problème* se limite, pour les élèves confrontés très souvent à ce genre d'énoncés, à *faire un calcul*, ce qui met de côté les dimensions liées à la compréhension et au raisonnement. Ce mode de traitement des problèmes s'explique par le fait que les énoncés des problèmes proposés par les manuels sont trop épurés et pas assez

* S2HEP (Sciences et Société : Historicité, Epistémologie et Pratiques) – France – marianne.moulin@univ-lyon1.fr, virginie.deloustal-jorrand@univ-lyon1.fr, eric.triquet@ujf-grenoble.fr, catherine.bruguière@univ-lyon1.fr

[1] Moulin M. (2010a) *Des textes de fiction pour lire les énoncés de problèmes de mathématiques en classe de CM2 : explicitation des contrats en jeu*. Sous la direction de Catherine Bruguière et Virginie Deloustal-Jorrand dans le cadre d'un master recherche Histoire Philosophie et Didactique des sciences.

[2] Thèse de Marianne Moulin sous la direction de Eric Triquet et Virginie Deloustal-Jorrand.

© Moulin M, Deloustal-Jorrand V., Triquet E., Bruguiere C. (2012) Inscrire les problèmes de mathématiques dans des récits empruntés à la littérature de jeunesse. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT5, pp. 730–741). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

résistants pour placer les élèves dans des situations de recherche du sens mathématique. C'est la raison pour laquelle nous faisons l'hypothèse que l'inscription des énoncés dans des récits de fiction place les élèves dans des situations qui suscitent chez eux nécessairement un effort de compréhension et d'interprétation.

Dans cette présentation, nous interrogeons plus spécifiquement la modélisation par le récit des situations et objets mathématiques dans les problèmes de mathématiques. D'un point de vue scolaire, la mise en récit des énoncés de problèmes met en jeu une interaction entre les disciplines des mathématiques et du français. Le genre textuel des énoncés de problèmes, les procédures de mise en récit et leurs conséquences sur la structure de ces énoncés, l'interaction des dimensions langagières et mathématiques au niveau de la résolution de problèmes sont différents niveaux de cette interaction sur lesquelles nous reviendrons. Pour cela, nous développons cette présentation dans trois directions :

Dans la première, nous poserons quelques limites du fonctionnement des énoncés narratifs issus des manuels scolaires dans la résolution de problèmes mathématiques. Nous montrerons ainsi dans une deuxième étape comment certains récits de littérature de jeunesse en jouant sur le contrat de lecture peuvent susciter chez les élèves la nécessité de l'expliciter et par là-même les amènent à reconsidérer leur lecture des énoncés[3]. Dans le but d'exploiter plus en avant cette potentialité des récits littéraires nous envisagerons, dans une troisième étape, l'étude via des outils d'analyse du récit des énoncés de problèmes afin de mettre en place les bases d'une ingénierie didactique qui repose sur la construction d'énoncés porteurs d'intrigue par les élèves eux-mêmes.

I. LIMITES DU FONCTIONNEMENT DES ENONCES NARRATIFS ISSUS DES MANUELS SCOLAIRES

Dans l'enseignement, un problème de mathématiques peut se concevoir comme la donnée d'une situation et d'une (ou plusieurs) question(s) à laquelle (auxquelles) l'élève ne peut répondre qu'après élaboration d'un raisonnement (basé sur sa compréhension de l'énoncé et une sélection pertinente des données). A l'école primaire, la majorité des problèmes de mathématiques sont proposées sous forme narrative, et de fait, sont « toujours assortis d'une histoire » (IREM de Rennes 1998, p. 96). Les récits proposés par les énoncés sont le support de la modélisation des situations et objets mathématiques en jeu dans le problème. En plaçant les élèves dans une situation qui leur est familière, ou du moins accessible, le récit fournit une mise en perspective des objets mathématiques qui doit permettre aux élèves de s'approprier les notions et les procédures au cœur du problème. Ces énoncés ont par conséquent des caractéristiques (forme narrative et présence de personnages par exemple) qui mettent en jeu des dimensions langagières. Nous présentons les rôles et conséquences de deux de ces caractéristiques dans les deux premiers points avant de nous attarder sur quelques extraits de manuels scolaires et sur les possibilités de pluridisciplinarité entre mathématiques et littérature dans les deux derniers points.

1. *Interaction entre langage naturel et langage mathématique*

Les énoncés de problèmes font interagir trois codes de langage très différents : la langue naturelle, le langage mathématique et le symbolisme (Boule et Vasserer 1998). En effet les énoncés que les élèves rencontrent à l'école primaire et dans la suite de leur scolarité sont principalement rédigés en langue naturelle. Ils contiennent de plus, des termes spécifiques au

[3] Séquence mise en place lors de l'expérimentation du mémoire de Master (Moulin 2010a)

langage mathématique ainsi que différents symboles (des nombres, des lettres et des signes). C'est dans cette interaction que se construit le sens du problème.

Ce mélange de trois codes pose des difficultés de compréhension : l'élève doit être capable de jongler entre ces trois codes afin de saisir toutes les informations présentes dans l'énoncé du problème. En effet certains des termes spécifiques au langage mathématique, comme par exemple le mot division, ont également un sens en langue naturelle. Si le choix des mots utilisés en langage mathématique est généralement fait pour illustrer au mieux le concept en jeu, l'usage de ces mêmes mots dans le langage courant peut faire obstacle à la compréhension du sens mathématique. Par conséquent, les élèves auront le plus souvent tendance à exploiter uniquement les éléments qu'ils utilisent le plus en cours de mathématiques : les nombres.

2. Construction d'un scénario autour de données numériques

Peroz (2000) présente l'énoncé de problèmes comme la donne de données numériques et d'un « scénario ». Il met lui même le terme de « scénario » entre guillemets afin de lui accorder un statut particulier. En effet, la mise en récit d'un problème de mathématiques ne peut pas être neutre. Son premier rôle est avant tout mathématique. Il s'agit d'inscrire l'objet étudié dans une situation qui lui confère du sens, situation basée sur une modélisation simplifiée de l'objet dans un de ses contextes d'utilisation. La situation proposée permet de créer des relations entre les différentes valeurs numériques fournies par l'énoncé, ce sont ces relations entre grandeurs qui permettent de construire les problèmes (Vergnaud 1981).

Le philosophe Ricœur (1984) nous dit que la mise en intrigue permet de rendre cohérent un ensemble disparate. Si on le suit, on peut donc postuler que le récit peut contribuer à la résolution de problèmes. Ainsi, tout en articulant les données, la mise en récit permet de créer une situation qui se rapproche de celles connues des élèves et ainsi leur facilite l'accès au problème. Cependant, il convient d'être attentif au fait que le scénario peut aussi être une « source de malentendus absente des données initiales » (Peroz 2000, p. 55). Nous tiendrons donc compte dans notre travail de cet obstacle potentiel.

3. Regard sur les énoncés de problèmes dans les manuels scolaires

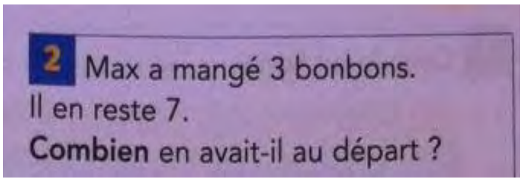
Descaves (1992), dans *Comprendre des énoncés, résoudre des problèmes*, s'intéresse aux récits contenus dans les énoncés de problèmes de mathématiques et s'interroge sur la complexité de leur construction. Il met en évidence certaines caractéristiques représentatives d'un type d'énoncé qu'il qualifie de *canonique* :

> Lexique réduit utilisant des termes inducteurs d'opérations mathématiques ; données numériques en nombre nécessaire et suffisant ; questions à la fin du texte ; progression fortement liée à la procédure de résolution que l'on attend des élèves ; l'ordre d'apparition des nombres étant au moins partiellement ou totalement celui de leur utilisation. (Decaves 1992, p. 20)

Tous les manuels scolaires ne proposent pas uniquement des énoncés de ce type. Cependant, certaines approches mettent en évidence des énoncés canoniques. Le plus flagrant se retrouve dans la comparaison problème additif / problème soustractif. Certains manuels proposent des séries de problèmes que l'élève doit résoudre avec une addition ou une soustraction. Activité intéressante mais le choix de l'opération peut se faire uniquement en regardant l'ordre dans lequel sont proposés les nombres : lorsqu'il faut faire une soustraction, le plus grand est placé avant le plus petit ; pour une addition, le plus petit est placé avant le plus grand.

3. Au cours de deux sorties noctures, le lapin a rapporté 57 carottes. Lors de sa deuxième sortie, il en rapporté 31. **Combien de carottes a-t-il rapportées lors de sa première sortie ?**	**4.** Pour aider son ami, l'écureil a pris 17 noisettes dans sa réserve. « Il m'en reste encore 41 »,dit-il. **Combien de noisettes avait-il dans sa réserve ?**

Image 1 *– Extrait Maths + CP (2009), p. 125*


2 Max a mangé 3 bonbons.
Il en reste 7.
Combien en avait-il au départ ?

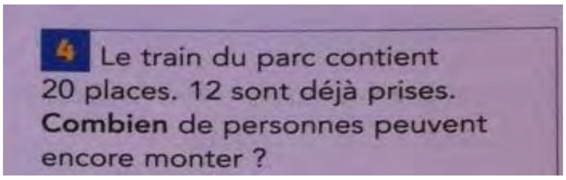
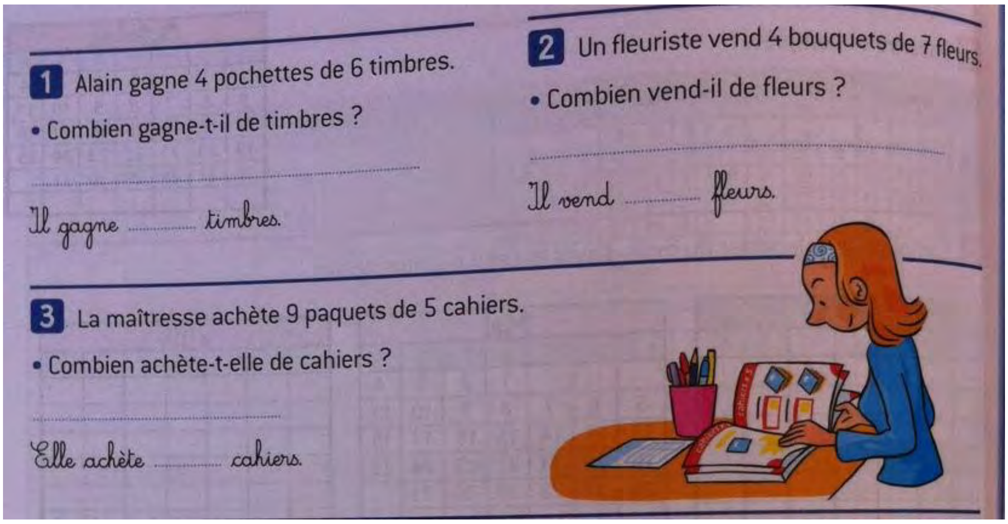

4 Le train du parc contient 20 places. 12 sont déjà prises.
Combien de personnes peuvent encore monter ?

Image 2 *– Extrait Place aux maths CP (2008), p. 85*

D'une autre manière, certains manuels semblent proposer un apprentissage qui se construit autour d'une succession d'énoncés ayant une structure similaire. Par exemple pour les situations multiplicatives :


1 Alain gagne 4 pochettes de 6 timbres.
• Combien gagne-t-il de timbres ?
Il gagne .... timbres.

2 Un fleuriste vend 4 bouquets de 7 fleurs.
• Combien vend-il de fleurs ?
Il vend .... fleurs.

3 La maîtresse achète 9 paquets de 5 cahiers.
• Combien achète-t-elle de cahiers ?
Elle achète .... cahiers.

Image 3 *– Extrait La clé des maths CE1 (2008), p. 85*

La structure est toujours identique : nombre – objet – « *de* » – nombre – objet. Cette répétition n'est sans doute pas sans conséquences, l'élève peut associer cette structure à la multiplication et de fait résoudre les problèmes de cette forme de manière automatique avec une multiplication même si ceux-ci n'en nécessitent pas.

Tous les énoncés présentés dans ces exemples proposent une histoire simplifié à l'extrême (un personnage – un évènement). Comme nous l'avons indiqué dans l'introduction de cette présentation, la simplification des énoncés est selon nous une cause importante dans l'apparition de procédures automatiques. En effet, la systématisation des procédures de résolution liée à des énoncés similaires peut amener les élèves à s'appuyer sur un contrat didactique erroné dans lequel la résolution d'un problème passe obligatoirement par l'application de la dernière opération apprise aux deux uniques nombres de l'énoncé.

4. Des manuels aux ouvrages de littérature jeunesse

Dans un ouvrage de littérature de jeunesse, la forme et le rôle du récit sont plus riches et plus complexes que dans un énoncé de problème de mathématique scolaire. Nous pensons que l'étude de récits de fiction peut permettre aux élèves d'acquérir les automatismes nécessaires à leur pratique des mathématiques tout en incitant les élèves à produire un raisonnement. Nous avons mis en place une première expérimentation construite autour de deux ouvrages de littérature de jeunesse. Cette approche sans doute un peu surprenante s'inscrit pourtant totalement dans les programmes scolaires français qui indiquent qu'il est indispensable :

> […] que tous les élèves soient invités à réfléchir sur des textes et des documents, à interpréter, à construire une argumentation, non seulement en français mais dans toutes les disciplines, qu'ils soient entraînés à mobiliser leurs connaissances et compétences dans des situations progressivement complexes pour questionner, rechercher et raisonner par eux-mêmes. Ils doivent pouvoir partager le sens des mots, s'exprimer à l'oral comme par écrit pour communiquer dans un cercle élargi. (Bulletin officiel, hors-série n°3 du 19 juin 2008, p. 10)

En effet, comme l'a souligné Rubliani (2002) l'interdisciplinarité par les ouvrages de littérature permet d'augmenter la curiosité et l'intérêt des élèves (en particulier pour ceux qui sont en difficulté) et appellent une réflexion en exerçant le jugement et l'esprit critique. Plus récemment Triquet (2007) et Triquet et Bruguière (2010) ont mis en avant le rôle de levier de l'intrigue pour développer un questionnement scientifique et l'apport de la projection dans l'univers de la fiction pour se représenter le monde.

II. INFLUENCE DE DEUX RECIT DE LITTERATURE DE JEUNESSE DANS LA LECTURE DES ENONCES DE PROBLEMES

L'approche par le récit via littérature de jeunesse est une pratique qui se développe en sciences expérimentales et qui repose sur le « caractère heuristique » des récits de fiction (Bruner 2005). Différentes recherches sur le thème *Sciences et Récit* ont en effet mis en évidence les potentialités des ouvrages de littérature de jeunesse dans le questionnement et la remise en cause de conceptions initiales (Bruguière et al. 2007). Les écrits de Bruner (1996, 2000) à propos des caractéristiques du récit et de ces potentialités éducatives et ceux de Tauveron (2004) qui nous indiquent que la compréhension des implicites d'une histoire repose sur l'engagement du lecteur dans un travail cognitif et culturel nous amène à l'idée que si les informations manquantes d'une histoire sont liées aux mathématiques, le lecteur doit engager un travail mathématique pour les comprendre.

En nous appuyant sur ces potentialités, nous avons proposé à une classe de CM2 (10-11 ans), d'étudier deux ouvrages de littérature de jeunesse afin de travailler sur leur lecture des énoncés de problèmes de mathématiques (Moulin 2010a, 2010b). Pour les élèves, l'objectif était en effet de travailler sur leur lecture des énoncés de problèmes grâce à l'étude de ces deux récits qui mettent en jeu certains contrats inhérents à la résolution de problème. Notre intention était de voir en quoi ces ouvrages pouvaient amener les élèves à se questionner sur les problèmes de mathématiques et à remettre en cause leurs pratiques habituelles de résolution.

1. Mise en place d'un contrat de lecture des énoncés de problèmes

Nous nous sommes tout d'abord interrogés sur l'existence (implicite ou explicite) d'un contrat spécifique (conséquence directe ou non du contrat *didactique* de Brousseau, 1998) en lecture et compréhension des énoncés de problèmes de mathématiques. En effet, face à un texte quelqu'il soit, le lecteur suit un ensemble de règles qui peuvent orienter sa lecture. Par exemple nous pouvons accepter (et apprécier) la présence d'un monstre imaginaire ou même un anachronisme, indulgence que nous ne pouvons pas avoir face à un article scientifique ou un texte historique. Notre attention portera sur des éléments différents selon que nous lisons un texte pour nous détendre ou pour le travail. Eco (1996) défini un ensemble de règles qu'il appelle contrat de lecture[4] régissant les règles entre auteur et lecteur. En nous appuyant sur ce contrat et sur les instructions officielles pour l'école primaire de 2008, nous avons défini un contrat *de lecture des énoncés de problèmes* avec deux règles principales :

- Faire la distinction entre le monde réel et le monde mathématique créé par l'énoncé du problème, plus précisément comprendre comment le monde réel est modélisé dans l'énoncé ;
- Séparer les mots de l'énoncé en deux catégories : ceux qui relèvent des données et ceux qui relèvent de l'habillage.

Notre hypothèse dans la construction d'une séquence autour de ce contrat de lecture est que le travail sur les ouvrages de littérature va permettre aux élèves d'expliciter ces règles. En effet, en proposant

> […] des mondes alternatifs, en offrant des « expériences de pensées » et donc de nouvelles occasions d'imaginer des possibles, la fiction nous entraîne dans un processus de questionnement à propos du réel et d'interrogation de notre relation au monde et aux objets. Elle pose la question de la vérité via la confrontation croyance / savoirs universels mais surtout suspend momentanément la question du vrai et du faux pour celle du possible et de l'impossible ; et celle du vraisemblable ce qui nous place dès lors dans le registre épistémologique de la problématisation scientifique. (Triquet et Bruguière 2010, p. 3)

2. *Présentation des ouvrages : des ruptures de contrat à la construction de la séquence*

Les ouvrages que nous avons retenus pour cette expérimentation s'intitulent tous deux *Le problème*[5]. Le premier, de Marcel Aymé (1939) est extrait des contes du chat perché. Le second est une pièce de théâtre de Christian Lamblin (2000) à destination des enfants. Ces deux ouvrages ont la particularité d'être construits autour d'énoncés de problèmes de mathématiques. Les personnages qui doivent les résoudre assimilent le monde mathématique proposé dans l'énoncé au monde qui les entoure. De fait, du point de vue mathématique, ils n'entrent pas dans une activité de résolution conforme à celle attendue dans le cadre scolaire en rompant les règles que nous avons définies précédemment.

Dans le conte de Marcel Aymé, les deux héroïnes doivent résoudre un problème qui commence par « Les bois de la commune ont … ». Elles imaginent que les « bois de la commune » dont parle le problème sont effectivement les bois de *leur* commune et vont compter directement les arbres dans la forêt pour résoudre leur problème. Dans la pièce de théâtre de Christian Lamblin ce sont les mots « mon papa » qui vont être l'origine de la confusion. Pensant que l'énoncé se réfère effectivement à *leur* papa, les personnages vont modifier l'énoncé pour le rendre conforme à leur réalité. Dans les deux ouvrages, les auteurs jouent sur la double signification des mots de l'énoncé. Les mots de l'énoncé peuvent s'interpréter selon différentes références. « Les bois de la commune » sont tout d'abord, détachés de toute réalité pour les fillettes au début de l'histoire, puis réels et enfin imaginaires pour la maîtresse. « Mon papa » est tour à tour, le papa du problème, le papa du maître, le papa d'un élève et de tous les élèves.

Il y a donc un décalage qui se crée entre « mon papa » et « les bois de la commune » vus comme des éléments génériques (un élément de l'ensemble des papas et des bois) et des

---

[4] « Auteur et lecteur modèle sont deux images qui (…) se construisent réciproquement », la voix de l'auteur modèle « se manifeste comme une stratégie narrative, comme ensemble d'instructions nous étant imparties auxquelles on doit obéir lorsqu'on décide de se comporter en lecteur modèle ». Le lecteur doit adhérer à un « principe de confiance », il doit accepter le monde créé par l'auteur comme vraisemblable. Réciproquement, l'auteur se doit de respecter une certaine cohérence, « même le monde le plus impossible doit avoir un fond réel » (Eco,1996, p. 25)

[5] Aymé M. (1998) (Texte de 1939) *Le problème* (illustré par Roland et Claudine Sabatier). France : Folio Cadet
Lamblin C. (2000) *Le problème* (suivi de *Le discours*). France : Broché

éléments instanciés. Cette caractéristique permet un travail sur les jeux de langage dont le rôle dans la construction de savoir est présenté dans *Jeux et enjeux de langage* (Durand-Guerrier et al. 2006). Les auteurs y montrent sur :

> […] des exemples de séquences en classe, comment les jeux de langage produits par l'étude de situations problématiques peuvent être guidées, utilisées par le maître pour favoriser l'élaboration de connaissances. (Durand-Guerrier et al. 2006, 4ème de couverture).

Nous avons donc construit la séquence autour de ces jeux de langage en proposant aux élèves :

- d'étudier les liens entre l'idée des personnages qui est d'aller compter les arbres dans la forêt et la construction de l'intrigue du conte (*Séance 1*). Les élèves devaient notamment commenter l'idée des personnages en expliquant pourquoi ils pensaient que la solution trouvée était juste ou fausse ;
- d'étudier les liens entre l'idée des personnages et l'énoncé du problème proposé par l'auteur dans l'histoire (*Séance 2*). Les élèves ont du à nouveau commenter l'idée des personnages après avoir effectué un travail plus poussé sur l'énoncé du problème ;
- de résoudre eux même le problème de Marcel Aymé (*Séance 3*). L'objectif de cette séance, construite en dehors de la référence au récit, étant pour eux de sélectionner les données utiles à la résolution du problème ;
- de réinvestir les connaissances sur le contrat de lecture des énoncés acquises lors de l'étude du conte de Marcel Aymé dans l'étude du livre de Christian Lamblin (*Séance 4*).

3. Quelques résultats

L'étude de ces deux ouvrages a permis aux élèves d'améliorer leurs connaissances en résolution de problèmes sur différents points. Nous ne donnons ici que les résultats de l'expérimentation (pour plus de détails sur les réponses des élèves se référer à l'article *Mathématiques et récits : des textes de fiction pour « bien lire » les énoncés de problèmes en classe de CM2* (Moulin 2010b)).

Leurs réponses mettent en évidence que le questionnement de l'intrigue de ces deux ouvrages leur a permis de comprendre comment le monde réel peut être modélisé dans les énoncés de problèmes. Ils se sont en effet positionnés en observateurs critiques de la modélisation du monde réel dans les énoncés de problèmes, témoignant ainsi d'une lecture approfondie et critique. Ils ont discuté entre eux et avec leur professeur et ont défini différents types de problèmes : les problèmes réels (basés sur une situation qui leur arrive effectivement et dont les objets sont à leur portée physique), les problèmes réalistes (sur des situations qui pourraient exister avec des données plausibles mais pas forcément réelles) et les problèmes fictifs (sur des situations qui ne peuvent pas réellement se produire, qui sont uniquement fabriquées pour faire des mathématiques). Ils mettent ainsi en évidence leur réflexion sur la nature des objets en jeu dans les problèmes de mathématiques.

Ils ont également pu questionner la nature des différents mots de l'énoncé et ainsi faire la distinction entre données et habillage. Par exemple, les mots « les bois de la commune » ont pour les personnages le rôle de donnée ce qui n'a pas été le cas pour les élèves lors de la résolution du problème en séance 3. Grâce à la mise en scène de Christian Lamblin qui repose sur la création d'une succession d'énoncés intermédiaires produits par les personnages qui modifient l'énoncé (les données et/ou l'habillage), les élèves ont pu observer la manière dont la modification des mots de l'énoncé peut influer (ou non lorsque la modification porte uniquement sur l'habillage) sur le travail à réaliser pour la résolution d'un problème. En observant directement ce rôle lors de leur travail de résolution, ils ont acquis « en acte » les concepts de données et d'habillage. Ils ont pu réinvestir ces connaissances directement sur le problème de Marcel Aymé en sélectionnant correctement les données utiles pour résoudre le problème, ce qu'ils n'avaient pas réussi même en ayant résolu le problème en séance 3.

Cette activité a permis aux élèves d'acquérir un regard critique sur la formulation des énoncés de problèmes en les invitant à faire la part des choses entre fiction narrative et données mathématiques. Ils arrivent ainsi à déterminer les données pertinentes pour répondre à la question mathématique posée par le problème dans un champ plus large de données. Par ce travail nous avons pu traiter de la question de la lecture / analyse d'un énoncé de mathématiques produit par un auteur de littérature extérieur à la classe. Nous souhaiterions a présent aborder les questions de production / analyse de résolution d'un problème à l'intérieur d'un récit produit (ou non) par les élèves eux mêmes. Nous pourrions ainsi aborder la question de la résolution de problèmes numériques dans son ensemble en allant au delà d'un simple travail sur la lecture / compréhension.

III. APPORTS DU SCHEMA NARRATIF DE LARIVAILLE DANS L'ETUDE DES ENONCES DE PROBLEMES DE MATHEMATIQUES

Dans cette partie, nous présentons une étude, basée sur un outil d'analyse des textes littéraire – le schéma quinaire de Larivaille (1974) – qui nous permettra de déterminer les bases d'une ingénierie croisant problèmes de mathématiques et récits. Nous montrerons notamment que les énoncés de problèmes classiques se basent sur des schémas narratifs simples (voire même simplistes). De fait, ces énoncés manquent de « résistance » (Tauveron 1999) ce qui ne permet pas la mise en œuvre d'un travail porteur de sens pour les élèves. En effet pour engager un travail de compréhension et d'interprétation, il est important que les élèves soient confrontés à des textes suffisament riches et complexes.

Triquet (2007) a mis en évidence les points communs entre la construction d'une intrigue et d'un problème scientifique. Il note notamment l'analogie entre la pratique scientifique – en particulier avec le problème empirique de Laudan (1977) – et les histoires de fiction dans la manière dont le questionnement scientifique et l'intrigue se créent (Bruner 2005).

> La fiction […] a le pouvoir de bousculer nos habitudes à l'égard de ce que nous considérons comme la norme. […] C'est là une (autre) similitude avec le problème scientifique qui émerge bien souvent à l'occasion d'une mise en défaut de conceptions initiales. (Triquet 2007, p. 109).

Ces parentés entre mise en récit et mise en problème ainsi que la forme narrative des énoncés de problèmes proposés par l'école primaire nous invitent à considérer les énoncés de problèmes de mathématiques comme des histoires inachevées que l'élève doit terminer en répondant à la question posée.

Nous proposons donc de nous appuyer sur un outil d'analyse des textes littéraires – le schéma quinaire de Larivaille (1974) – pour analyser des énoncés de problèmes de mathématiques. Ce schéma est un outil qui permet de rendre compte de la structure d'un récit. Dans ce modèle, un récit est vu comme la transformation d'un état (initial) en un autre état (final). Cette transformation est constituée :

- d'un élément (complication) qui permet d'enclencher l'histoire et de sortir de l'état initial (qui pourrait durer éternellement sans la complication),
- de l'enchainement des actions (la dynamique),
- d'un autre élément (résolution) qui conclut le processus des actions en instaurant un nouvel état qui perdurera jusqu'à l'intervention d'une nouvelle complication.

Une histoire se présente donc, selon ce schéma, comme la succession de cinq étapes : Etat initial – Complication – Dynamique – Résolution – Etat final[6] (la complication, dynamique et résolution étant les trois étapes de la transformation). Ces cinq étapes peuvent être répétées au sein de l'histoire et donner ainsi lieu à différents assemblages (schéma narratifs).

Dans le tableau (tableau 1) ci après, nous présentons un récit découpé selon les étapes du schéma quinaire. Ce récit est constitué d'un état initial « Pierre part à l'école avec 5 billes bleues et vertes » (qui est composé de deux sous-situations initiales), d'une dynamique « Pierre a gagné 6 billes dans la journée », d'une situation finale « A la fin de la journée Pierre a 11 billes » et également d'un état complémentaire « Marc a 15 billes ». Il faut noter que ce récit ne comporte pas d'étape de complication et de résolution.

Etapes du schéma quinaire	**Etapes du récit**	**Codage**
Situation initiale (composée de deux sous-situations initiales)	**Pierre part à l'école avec ses 5 billes bleues et vertes.**	**INIT**
	Sous-situation : Pierre a 3 billes vertes.	**IN1**
	Sous-situation 2 : Pierre a 2 billes bleues	**IN2**
Dynamique principale (scindée en deux étapes)	**Pierre a gagné 6 billes dans la journée.**	**DY**
	Etape 1 : Le matin, Pierre gagne 2 billes.	**DY1**
	Etape 2 : L'après midi, Pierre gagne 4 billes.	**DY2**
Situation finale	**A la fin de la journée, Pierre a 11 billes.**	**FIN**
Etat complémentaire composée d'un état statique	**Marc a 15 billes.**	**FIM**
	Comparaison entre FIN et FIM : Marc a 4 billes de plus que Pierre.	**DIF**

Tableau 1 *– Détails du schéma narratif sur un récit*

A partir de ce récit, il est possible de reconsituer différents problèmes numériques « classiques » en combinant différentes étapes du récit, certaines étant données comme informations (données du problèmes) et d'autres étant transformées en questions (questions mathématiques du problème). Par exemple, si nous nous basons sur la typologie des problèmes additifs proposée par Vergnaud (1981), nous pouvons reconstruire tous les problèmes de transformation d'état en sélectionnant l'étape principale de la situation initiale (INIT), l'étape principale de la dynamique (DY) et l'étape finale (FIN) comme dans le tableau 2.

Etapes du schéma quinaire	**Etapes du récit**	**Codage**
Situation initiale	**Pierre part à l'école avec ses 5 billes bleues et vertes.**	**INIT**
Dynamique	**Pierre a gagné 6 billes dans la journée.**	**DY**
Situation finale	**A la fin de la journée, Pierre a 11 billes.**	**FIN**

Tableau 2 *– Schéma quinaire adapté aux problèmes de transformation d'état*

En faisant varier étapes données et étapes questionnées entre les trois étapes du tableau 2, il est possible de retrouver tous les types de problèmes de transformation d'état (Tableau 3).

[6] Reuter (2009) met en garde contre une utilisation systématique de ce schéma qui ne permet pas de rendre compte de la richesse des récits. Cependant, dans notre cas, les énoncés de problèmes proposés à l'école primaire sont des récits assez courts et sans grande complexité, le schéma quinaire est donc tout à fait adapté.

Type de problème (Vergnaud)	Etapes données	Etape questionnée	Problème obtenu
Recherche de l'état final	Etat initial (INIT) Dynamique (DY)	Etat final (FIN)	Pierre part à l'école avec ses 5 billes. Pierre a gagné 6 billes dans la journée. Combien Pierre a-t-il de billes à la fin de la journée ?
Recherche de la transformation	Etat initial (INIT) Etat final (FIN)	Dynamique (DY)	Pierre part à l'école avec ses 5 billes. A la fin de la journée, Pierre a 11 billes. Combien Pierre a-t-il gagné de billes en tout ?
Recherche de l'état initial	Dynamique (DY) Etat final (FIN)	Etat initial (INIT)	Pierre a gagné 6 billes dans la journée. A la fin de la journée, Pierre a 11 billes. Combien avait-il de billes au début de la journée ?

Tableau 3 *– Variations des étapes des problèmes de transformation d'état*

Nous laissons aux soins du lecteur la mise en relation du tableau 1 et des autres types de problèmes proposés par Vergnaud (1981). Ces combinaisons ne sont pas exhaustives mais permettent de rendre compte des liens qui peuvent exister entre schéma narratif et type de problème. La structure d'un récit peut être liée à celle d'un problème de mathématique. Elles permettent également de se rendre compte des différences de structure (liées au récit) entre les problèmes de mathématiques.

Le schéma narratif que nous avons mis en évidence pour chacun des exemples est caractéristique d'un type de problème dans le sens où les étapes qui le composent sont à la fois nécessaires et suffisantes. Nécessaires car, par exemple, il n'est pas possible de faire un problème de transformation s'il n'y a pas de transformation dans l'énoncé. Suffisantes car il n'y a pas besoin de plus d'étapes que celles cités pour faire un problème « qui marche ».

IV. CONLUSION : PISTES OUVERTES

Ce qu'il faut noter c'est que la complication au sens de Larivaille (1974) n'apparaît ni dans les exemples tirés des manuels que nous avons examinés en partie I, ni dans ceux que nous venons de présente. Les schémas narratifs proposés par les énoncés restent simples et ne mettent pas en jeu de réelles complications, résolutions, perturbations. De fait, le travail nécessaire à la compréhension du problème et à la construction du raisonnement est réduit et ne permet pas réellement aux élèves de développer les connaissances nécessaires en les orientant vers des procédures automatisées. Dans l'ingénierie que nous souhaitons mettre en place dans la suite de notre travail de thèse nous souhaitons renforcer la complexité du schéma narratif pour produire des énoncés plus « résistants » (Tauveron, 1999) et porteurs de sens.

Tauveron (1999) insiste sur la nécessité de travailler sur des textes résistants pour développer des capacités de compréhension et d'interprétation. Elle s'intéresse, dans cet article, uniquement à la compréhension des textes littéraires mais nous pouvons faire l'hypothèse qu'en travaillant la compréhension d'un récit (contenant un énoncé de problème), les élèves vont travailler leur compréhension du problème. Actuellement, notre objectif est de construire une ingénierie didactique de co-construction avec les élèves d'énoncés de problèmes de mathématiques inscrits dans des récits afin d'évaluer le potentiel effectif des récits dans la résolution de problèmes de mathématiques à l'école primaire.

La première piste vient de la remarque faite dans le point précédent sur étapes nécessaires et suffisantes. La combinaison des étapes du schéma narratif étant liée à un type de problème, il est possible d'apporter des informations supplémentaires (données inutiles) dans un problème en ajoutant une étape non nécessaire au schéma narratif. Ainsi donc, il paraît envisageable d'inscrire un énoncé de problème dans un schéma narratif plus complexe comme un récit de fiction afin d'imposer aux élèves une lecture attentive de l'énoncé en vue de sélectionner les données utiles à la résolution du problème. Nous envisageons, dans ce cadre là, d'inviter les élèves à « décortiquer » un récit dans lequel problème de mathématique et intrigue seraient imbriqués[7].

Nous envisageons également un travail sur d'écriture et/ou de réécriture d'énoncés de problèmes mathématiques inscrits dans un récit. Notre hypothèse est qu'en plaçant les élèves dans une situation dans laquelle ils doivent construire une intrigue en interaction avec un problème mathématique, non seulement ils sont amenés à donner du sens aux objets mathématiques, mais au-delà, ils sont invités à envisager les notions et procédures de résolution qui sont en jeu. Mais comme la tâche est complexe, il pourrait leur être proposé de partir d'intrigues relativement simples qu'il conviendrait de complexifier progressivement, par l'ajout de nouvelles complications et données mathématiques. Parallèlement il serait intéressant de leur demander de rédiger les récits de résolution qui peuvent être associés à chaque problème. Ainsi, du côté de l'enseignant, une opportunité est offerte d'explorer les modes de raisonnement mis en œuvre par les élèves.

[7] Nous avons conscience que le recours à des énoncés plus complexes (c'est à dire mettant en jeu plus de personnages et/ou plus d'évènements) peut faire penser que l'on va vers d'autres difficultés liées à la compréhension du vocabulaire et du contexte. Cependant, la complexification d'un texte n'impose pas un vocabulaire plus compliqué et la compréhension du texte par les élèves n'est selon nous pas remise en cause si le niveau du texte et le vocabulaire sont adaptés à l'âge des élèves.

REFERENCES

Bulletin officiel, hors-série n°3 du 19 juin 2008.

Aymé M. (1998) (Texte de 1939) *Le problème*. Paris : Folio Cadet.

Boule F., Vasserer C. (1998) Lecture des énoncés mathématiques. *Grand N* 42, 11-19.

Brousseau G. (1998) *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : la Pensée Sauvage.

Bruguière C., Herault J.-L. (2007) Mondes possibles et compréhension du réel. *Aster* 44, 69-106.

Bruner J. (1996) *L'éducation entre dans la culture*. Paris : Retz.

Bruner J. (2005) *Pourquoi nous racontons nous des histoires ?* Paris : Pocket.

Bulten D., Pezard M. (1992) *Une expérience d'enseignement à des élèves en difficulté dans une ZEP.* Cahier de didirem 13. Université Paris VII.

Descaves A. (1992) *Comprendre des énoncés, résoudre des problèmes, Pédagogie pour demain*. Paris : Hachette éducation.

Durand-Guerrier V., Heraud J.-L., Tisseron C. (2006) *Jeux et enjeux de langage dans l'élaboration de savoirs en classe.* Lyon : PUL.

Eco U. (1996) *Six promenades dans les bois du roman et d'ailleurs*. Paris : Grasset.

Groupe IREM/INRP (1998) *Les énoncés de problème au collège*. IREM de Rennes.

IREM de Grenoble (1979) Quel est l'âge du capitaine ? *Grand N* 19, 64-70.

Lamblin C. (2000) *Le problème (*suivi de, *Le discours).* France : Broché.

Larivaille P. (1974) L'analyse morphologique du récit. *Poétique* 19, 368-388.

Laudan R. (1977) *Dynamique de la science*. Bruxelles : Mardaga.

Moulin M.(2010a) *Des textes de fiction pour lire les énoncés de problèmes en classe de CM2, explicitation des contrats en jeu*. Mémoire de Master HPDS. Université de Lyon.

Moulin M. (2010b) Mathématiques et récits : des textes de fiction pour « bien lire » des énoncés de problèmes de mathématiques en classe de CM2. *Grand N* 86.

Peroz P. (2000) Des problèmes dans les énoncés. *Grand N* 19, 55-70.

Reuter Y. (2009) *L'analyse du récit*. Paris : Colin.

Ricœur P. (1984) *La configuration dans le récit de fiction e mps et récit* . Paris : Le Seuil.

Rubiliani C. (2002) *Sciences et français l'interdisciplinarité par les albums*. Paris : éditions du CRDP.

Tauveron C. (1999) Comprendre et interpréter le littéraire à l'école : du texte réticent au texte proliférant. *Repères* 19, 9-38.

Tauveron C. (2004) *Lire la littérature à l'école* Paris : Hatier pédagogie.

Triquet E. (2007) Elaboration d'un récit de fiction et questionnement scientifique au musée. *Aster* 44, 107-134.

Vergnaud G. (1981) *L'enfant les mathématiques et la réalité*. Berne : Peter Lang.

Triquet E., Bruguière C. (2010) Etude comparée de deux albums de « fiction réaliste » : comment l'intrigue questionne les connaissances sur le réel. In *Actes du congrès de l'Actualité de la recherche en éducation et en formation (AREF)*. Université de Genève, septembre 2010.

Triquet E., Orange-Ravachol D. (2007) Sciences et récits, des rapports problématiques. *Aster* 44, 7-22.

MODELISATION DE PHENOMENES VARIABLES A L'AIDE DE LA GEOMETRIE DYNAMIQUE

Sophie SOURY-LAVERGNE[*] – Annie BESSOT[**]

Résumé – Au travers d'une ingénierie didactique, nous proposons une analyse d'un processus de modélisation s'incarnant dans une succession de modèles intermédiaires et dont la finalité est de produire un modèle calculable pour résoudre un problème de coïncidence de deux phénomènes périodiques. Nous tentons de dévoluer aux élèves une part du processus de modélisation en organisant un milieu pour la validation en référence à la réalité grâce à la géométrie dynamique.

Mots-clefs : modélisation, covariation, fonction périodique, variable indépendante, géométrie dynamique, milieu

Abstract – We present the analysis of a modelling process framed by a didactical engineering. It consists of a series of intermediate models producing a calculable model to solve a problem of two periodic phenomena coincidence. We try to delegate to the students a part of the modelling process. Therefore, with dynamic geometry, we organise a milieu for the validation of the models in reference to the reality.

Keywords: modelling, dynamic geometry, periodic function, independent variable

La modélisation prend une place de plus en plus importante dans les programmes de mathématiques de nombreux pays. Or les professeurs se trouvent démunis pour fabriquer des situations de modélisation absentes des manuels et pour gérer de telles situations en classe. Ainsi la rareté d'authentiques activités de modelisation décrite par Blum (2002) reste valable. De plus, l'entrée dans le processus de modélisation semble une étape difficile pour les élèves. Le projet de recherche MIRA[1] a eu pour objectif de concevoir une ingénierie didactique permettant de dévoluer aux élèves une part de responsabilité dans le processus de modélisation et proposant aux enseignants des situations. Mais que recouvre au juste l'expression « processus de modélisation » ?

I. MODELES ET PROCESSUS DE MODELISATION

Un modèle est « une *machine* dont la mise en fonctionnement permet *de produire des connaissances* relatives au système modélisé » (Chevallard 1992, p. 77). Nous n'appelons pas modélisation le fait de travailler avec un modèle tout fait, « naturalisé » ou « habillé » par le réel (Blum 2002), c'est-à-dire une modélisation *« 'prétexte' qui consiste à plaquer un 'réel' qui servirait de support concret au modèle mathématique qu'on veut enseigner ou faire fonctionner »* (Legrand 2003, p. 34). Modelisation renvoit au processus de résolution de problème qui consiste à construire un modèle à partir d'une situation réelle (Blum et Niss 1991).

Ci-après un schéma, construit à partir des travaux de Coulange (1998) et Rodriguez (2007), résumant ce que nous considèrerons comme étant un processus de modélisation. Ce schéma découpe le processus de modélisation en quatre phases :

Phase 1. Passage du système extramathématique à un ou plusieurs modèles intermédiaires

[*] Institut français de l'Education – France – sophie.soury-lavergne@ens-lyon.fr
[**] Université Joseph Fourier Grenoble 1 – France – annie.bessot@imag.fr

[1] Participent au projet de recherche coopératif franco – vietnamienne financé par la région Rhône-Alpes (MIRA Mobilité International Rhône – Alpes) : Annie Bessot, Alain Birebent, Claude Comiti, Colette Laborde, Lê Thai Bao Thien Trung, Lê Thi Hoai Chau, Nguyen Chi Thanh, Nguyen Thi Nga, Sophie Soury Lavergne.

© Soury-Lavergne S., Bessot A (2012) Modélisation de phénomènes variables à l'aide de la géométrie dynamique. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21[e] siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT5, pp. 742–753). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

Phase 2. Passage des modèles intermédiaires à un modèle mathématique calculable permettant de reformuler les questions initiales en un problème mathématique.

Phase 3. Phase de calcul dans le modèle mathématique pour produire les réponses au problème mathématique.

Phase 4. Retour à la situation étudiée pour transformer les réponses au problème mathématique en des réponses aux questions initiales et les confronter à la réalité modélisée.

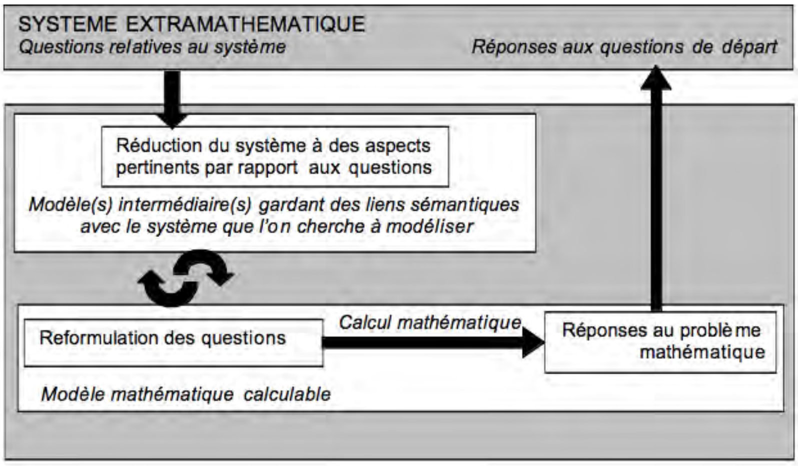


***Figure 1** – Schéma du processus de modélisation (d'après Coulange 1998)*

Notre proposition est d'accorder une attention particulière à la notion de modèle intermédiaire au cœur de la dynamique du processus de modélisation tel que nous l'avons représenté. En effet, l'évolution des recherches relatives à la modélisation mathématique consiste à mettre l'accent sur les modèles intermédiaires entre réalité et modèle mathématique calculable : modèle pseudo-concret (Henri 2001) ou modèle réel de la situation (Blum 2002) par exemple. Ces modèles intermédiaires entre la situation extramathématique et le modèle mathématique à construire représentent un premier niveau d'abstraction de la « réalité » ; ils évoluent au fur et à mesure du travail de modélisation pour être plus ou moins proche sémantiquement de la situation réelle considérée ou du modèle mathématique à construire. Ce qui caractérise un modèle intermédiaire n'est pas sa nature mathématique ou non mais d'abord son insuffisance pour répondre aux questions de départ et du coup son apparition puis son évolution dans le processus de modélisation.

II. REDUCTION DU PROCESSUS DE MODELISATION DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES AU SECONDAIRE

Dans l'enseignement secondaire, il y a une propension à enseigner des modèles existants fournissant des éléments de savoir bien définis et négociables (Rodriguez 2007). L'organisation de réelles activités de modélisation dans les cours de mathématiques se heurte au cloisonnement disciplinaire des savoirs, caractéristique des institutions scolaires.

De plus comme l'écrit Chevallard :

> […] bien qu'acceptable dans son principe, cette activité, se référant nécessairement à une réalité extramathématique, pose problème aux mathématiciens, dans la mesure où elle introduit *donc du non mathématique dans un enseignement de mathématique*. (Chevallard 1989, p. 147. c'est l'auteur qui souligne).

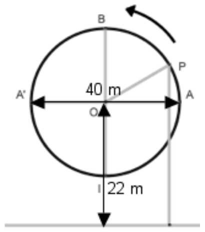
A partir d'une analyse de manuels du Viêt Nam et de la France pour le secondaire, Nguyen Thi (2011) confirme la réduction de l'enseignement de la modélisation à l'enseignement de modèles tout faits se référant à une réalité extramathématique. Elle illustre cette réduction par deux versions d'un même problème représentatives d'énoncés de manuels.

Dans l'exercice à la façon vietnamienne (Figure 2), les modèles géométrique et algébrique sont donnés et ne sont pas à construire par les élèves. La figure géométrique est fournie ainsi que l'expression $\lambda = 22 - 20\cos\frac{\pi x}{2}$. Le recours au modèle géométrique n'est pas attendu institutionnellement pour répondre aux questions, son rôle est celui d'une simple illustration. Ce type d'exercice fait entrer l'élève dans le contrat didactique de la résolution d'équations trigonométriques.

Dans la version française (Figure 2), le modèle algébrique est lui aussi donné tout fait avec l'expression $h(t) = 22 - 20\cos\frac{\pi t}{2}$. La dernière question (question 4) sur la représentation graphique de la fonction *h(t)* ne sert pas à répondre au problème de départ, mais est un observable du contrat didactique en jeu dans cet exercice, celui de l'étude d'une fonction.

À la façon vietnamienne

Un parc d'attraction de Ho Chi Minh ville possède une grande roue de 40 m de diamètre dont l'axe de rotation est situé à 22 m du sol (voir figure). Au début du voyage, Minh s'assoit dans une cabine.



Quand la roue tourne régulièrement dans le même sens, la distance y (en mètre) au sol de la cabine de Minh, associée au point P, est calculée par la formule :

$$\lambda = 22 - 20\cos\frac{\pi x}{2}$$

où x est la durée en minute de la rotation du manège.

a) A quel instant Minh est-il à la position la plus basse ?

b) A quel instant est-il à la position la plus haute ?

c) Quand est-il distant du sol de 23 m pour la première fois ?

À la façon française

Un parc d'attraction de Ho Chi Minh ville possède une grande roue de 40 m de diamètre dont l'axe de rotation est situé à 22 m du sol. Au début du voyage, Minh s'assoit dans une cabine.

Quand la roue tourne régulièrement dans le même sens, la distance h (en mètre) au sol de la cabine de Minh est calculée par la formule :

$$h(t) = 22 - 20\cos\frac{\pi t}{2}.$$

où t est la durée en minute de la rotation du manège.

1) Quelle est la période T de la fonction $t \to h(t)$?

2) Quelle est la valeur maximale de h ? Sa valeur minimale ?

3) À l'instant t = 3 min, quelle est la distance au sol de la cabine de Minh ?

4) Représenter la fonction h dans un repère orthogonal, où l'on prendra pour unités : 1 cm pour 1 min en abscisse ; 1 cm pour 5 m en ordonnée.

***Figure 2** – Problème de manège : formulations conformes aux institutions scolaires Viêt Nam et France (Nguyen Thi 2011, p. 192).*

En conclusion de l'étude conduite par Nguyen Thi, il apparaît que dans les deux systèmes d'enseignement, à partir de la référence à une même réalité extramathématique, le modèle donné appartient au domaine des fonctions et est exprimé dans le registre algébrique (avec des ostensifs différents, propres à chacune des institutions : $y = f(x)$ pour le Viêt Nam et $t \to f(t)$ pour la France).

Notre question est alors relative à la possibilité de proposer une ingénierie didactique dans laquelle les différents modèles seront construits effectivement, apparaîtront comme nécessaires pour répondre aux questions posées, tout en restant compatibles avec les contraintes des institutions d'enseignement considérées.

III. CHOIX POUR UNE INGENIERIE DIDACTIQUE SUR LA MODELISATION ET LES FONCTIONS PERIODIQUES

L'objectif est d'enseigner le processus même de modélisation et de l'articuler à un enseignement du concept de fonction périodique, les deux objectifs interagissant de façon dialectique.

Pour la conception de l'ingénierie, un principe est de respecter les contraintes des institutions d'enseignement (par exemple être conforme au programme de mathématiques). Le domaine extramathématique choisi privilégie une modélisation mathématique par les fonctions, les modèles fonctionnels étant majoritairement présents dans l'enseignement secondaire. De plus, la situation de covariation de grandeurs quantifiables peut être considérée comme une situation fondamentale pour la notion de fonction (Krysinska et al. 2009), notion au cœur des apprentissages mathématiques du secondaire.

1. Conception dynamique et conception statique de la notion de fonction

Les recherches sur la notion de fonction distinguent deux conceptions de cette notion que l'on peut repérer comme se succédant dans l'histoire :

- la covariation de deux grandeurs. Nous parlerons de conception dynamique de la notion de fonction, décrite par Euler en 1755 :

> Si certaines quantités dépendent d'autres quantités de telle manière que si les autres changent, ces quantités changent aussi, alors on a l'habitude de nommer ces quantités fonction de ces dernières. (Euler 1755)

- la correspondance associant un nombre unique à un nombre donné. Nous parlerons de conception statique de la notion de fonction, définie par Hankel en 1870 de la façon suivante :

> On dit que y est fonction de x si à chaque valeur de x d'un certain intervalle correspond une valeur bien définie de y sans que cela exige pour autant que y soit défini pour tout l'intervalle par la même loi en fonction de x, ni même que y soit défini par une expression mathématique explicite de x. (Hankel 1870)

La conception statique, basée sur la correspondance, s'est imposée dans l'enseignement actuel, obscurcissant les significations de variable et de fonction. Or, de nombreuses recherches montrent que les notions de variable et de dépendance (variable indépendante et variable dépendante), propres à la conception dynamique, posent problème aux élèves (Falcade 2002). Ces notions de variable et de dépendance prennent sens en particulier dans les situations de variation :

> En effet, le seul moyen de s'apercevoir qu'une chose dépend d'une autre est de les faire varier chacune à leur tour afin de constater quel effet a la variation mais tant et aussi longtemps qu'il n'y aura pas de variation, il sera presque impossible de savoir s'il y a dépendance. (René de Cotret 1988, p. 7)

C'est cette conception qui sera visée en premier lieu dans notre ingénierie.

2. La géométrie dynamique comme environnement privilégié pour la construction d'un modèle intermédiaire

Une des hypothèses de travail est qu'un environnement de géométrie dynamique rend possible une première étape du processus de modélisation en produisant u modèle géométrique intermédiaire d'une situation de covariation de grandeurs.

En effet, les objets de la géométrie peuvent être considérés comme des émergents d'un processus de modélisation de la réalité spatiale et sont donc disponibles pour rendre compte de la co-variation de grandeurs spatiales.

Dans l'environnement de géométrie dynamique retenu, Cabri 2+, la modélisation de grandeurs variables se fait par la création de points qui se déplacent dans le plan. Un point M peut être libre dans le plan, contraint sur un objet géométrique ou ne pouvant bouger que par l'intermédiaire du déplacement d'un autre point P. *Dans ce dernier cas, nous disons que le point P pilote le point M.* Les points P et M mobiles à partir d'une origine fixe peuvent modéliser effectivement différentes grandeurs variables possibles, comme la longueur et le temps. Ils sont les prémisses aux notions de variables indépendante et dépendante. Cette modélisation géométrique garde perceptivement la trace matérielle du phénomène de variation (proximité sémantique) qui, en revanche, disparaît dans le symbolisme formel (rupture sémantique), ultime étape du processus de modélisation. Elle peut donc jouer le rôle d'une modélisation intermédiaire.

3. Les situations clefs de l'ingénierie didactique

Pour concevoir les situations de l'ingénierie, nous reprenons une idée de Burgermeister (2009) qui est de modifier des énoncés de problèmes scolaires, représentatifs d'un certain rapport institutionnel à la modélisation. Nous modifions ainsi le problème du manège (figure 2), pour aboutir à l'étude des coïncidences de deux phénomènes périodiques, problème de physique à l'origine de la méthode dite « des coïncidences »[2] (Nguyen Thi 2011). On ne peut pas répondre d'emblée aux questions initiales de coïncidence, le processus de modélisation devant aboutir à la production de réponses.

Le système extramathématique que l'on cherche à modéliser :

Un parc d'attractions de Ho Chi Minh ville possède une grande roue. Au début du voyage, Minh s'assoit dans une cabine. Une lumière rouge éclaire par intermittence un endroit fixe du manège où passent les cabines. Si une cabine est éclairée, son occupant gagne un voyage gratuit. Ci-contre la photo d'une grande roue

Figure 3 *–Photo d'une grande roue*

L'étude que l'on veut mener sur le système :

Le but du travail que nous allons faire ensemble est de chercher dans quelles conditions Minh peut gagner un voyage.

En d'autres termes, Minh gagne s'il y a coïncidence entre la position de sa cabine et l'éclairage de cette position par la lumière rouge.

Le schéma (figure 4) présente la logique des deux situations de notre ingénierie en ce qui concerne les étapes du processus de modélisation engagé.

[2] La méthode des coïncidences est une réponse au problème de détermination de la période inconnue d'un phénomène périodique : elle permet le calcul de cette période par l'étude des coïncidences du phénomène avec un second phénomène de *période connue.*

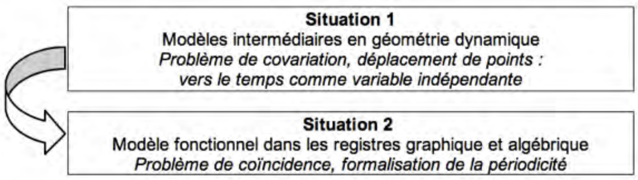


Figure 4 *– Schéma de l'ingénierie didactique*

Dans la première situation, découpée en 3 phases, nous cherchons à dévoluer aux élèves une part de responsabilité dans le processus de modélisation fonctionnelle d'une situation de covariation. L'enjeu est de construire un premier modèle intermédiaire sémantiquement proche de la réalité du manège et de le faire évoluer. La question de la représentation du déplacement d'une cabine sur le manège en fonction du temps devient, dans la géométrie dynamique, celle du déplacement d'un point sur un cercle piloté par un autre point. Cette question est initiée d'abord par la recherche d'une représentation du manège, de la cabine et du déplacement de la cabine. Cela revient à construire un cercle et un point se déplaçant sur le cercle par l'intermédiaire d'un autre point se déplaçant sur une droite (phase 1). Dans un second temps, le déplacement du point pilote sur une droite va modéliser l'écoulement linéaire du temps. On obtient alors une modélisation du déplacement de la cabine en fonction du temps, construite comme variable indépendante (phases 2 et 3).

La deuxième situation introduit la question des moments où la cabine est éclairée par la lumière rouge intermittente. Ce problème de coïncidence de deux phénomènes périodiques nécessite la formalisation des deux périodes comme outil de solution et fait évoluer le modèle intermédiaire construit précédemment vers un modèle fonctionnel calculable. L'analyse de cette deuxième situation n'est pas présentée (voir Nguyen Thi 2011).

IV. D'UN MODELE « MECANIQUE » A UN MODELE « TEMPOREL »

Un préalable à la première situation est d'amorcer une genèse instrumentale[3] relative à certains outils et fonctionnalités essentielles de la géométrie dynamique, en particulier la commande « report de mesure » et le déplacement des points comme élément d'un milieu pour la validation. De même, la notion *de point piloté par un autre point* a aussi été explicitée : un point M, que l'on ne peut saisir directement à la souris et qui ne peut être déplacé que par le déplacement d'un autre point P, est dit piloté par le point P.

Nous présentons maintenant des éléments des analyses a priori et a posteriori, l'expérimentation finale ayant été réalisée au début de l'année scolaire 2010-2011. Cette expérimentation concerne 12 élèves (répartis en 6 binômes) d'une classe équivalente à la terminale française d'un lycée d'Hô Chi Minh ville.

1. Phase 1 : émergence de modèles mécaniques

Les élèves ouvrent la figure Cabri ci-dessous (figure 5) et reçoivent la consigne suivante :

> Construire dans Cabri une figure géométrique représentant le manège et la cabine de Minh de façon à ce que le déplacement du point P pilote le mouvement de la cabine du manège.

[3] Le terme genèse instrumentale (Rabardel 1995) désigne le processus qui transforme un artefact (objet créé par l'homme pour assister son activité, comme par exemple la commande « report de mesure », en un instrument qui associe l'artefact à des schèmes d'usage de cet artefact dans une activité finalisée, ici l'utilisation du report de mesure pour obtenir un point M appartenant au cercle et ayant le comportement souhaité.

Dans cette première partie, il s'agit de faire entrer les élèves dans le processus de modélisation et donc de poser la question du choix des éléments de la pseudo réalité qu'il faut représenter. Nous faisons l'hypothèse que la grande roue du manège sera représentée par un cercle et la cabine par un point du cercle. Cependant, le statut du cercle changera au cours de la situation, au moment où il s'agira de représenter le déplacement de la cabine : de représentant de la roue il deviendra aussi trajectoire de la cabine. Le centre du cercle peut être choisi n'importe où dans le plan, sur la demi-droite ou pas, sauf au point P (dans la réalité, la roue ne se déplace pas). Son rayon pourra être choisi lui aussi librement, vraisemblablement de façon à ce que le cercle soit visible à l'écran.

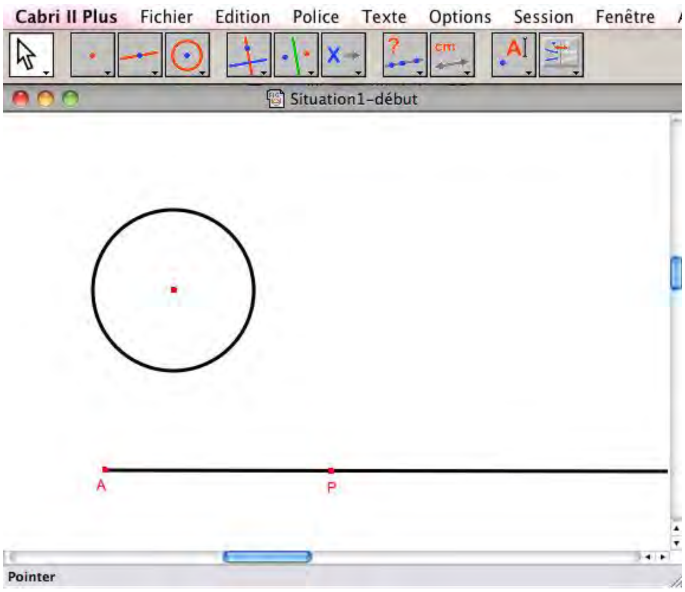


Figure 5 *– Figure Cabri au début de la première situation. Le point P se déplace sur la demi-droite.*

Le sol, présent sur la photo (figure 3), pourra ou non être représenté soit par la demi-droite présente à l'écran soit par un autre objet construit. La position respective du cercle et de la demi-droite donnée est elle-même libre (extérieure, tangente, sécante).

Les stratégies possibles pour qu'un point M-cabine tourne sur le cercle-roue grâce au déplacement d'un point sont de deux types. Certaines ont recours à la mesure de la distance AP, comme la stratégie « report de mesure », et d'autres n'y ont pas recours, par exemple la stratégie « stéréographique » (d'autres stratégies sont présentées dans (Soury-Lavergne 2010).

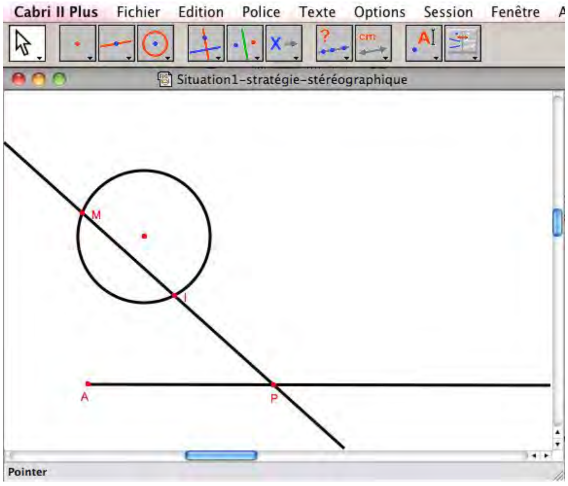


Figure 6 – *Modèle intermédiaire obtenu par la stratégie stéréographique.*

Stratégie « stéréographique » : construction d'un point fixe I sur le cercle, de la droite (PI) puis de l'intersection M de (PI) avec le cercle. Le point M ainsi construit est mobile sur le cercle et se déplace en fonction de P (figure 6).

Stratégie « report de mesure » : il s'agit de reporter la mesure de la distance AP sur le cercle. Pour cela, construire un point I sur le cercle, mesurer la distance AP, reporter la mesure AP sur le cercle à partir de I avec l'outil « report de mesure ».

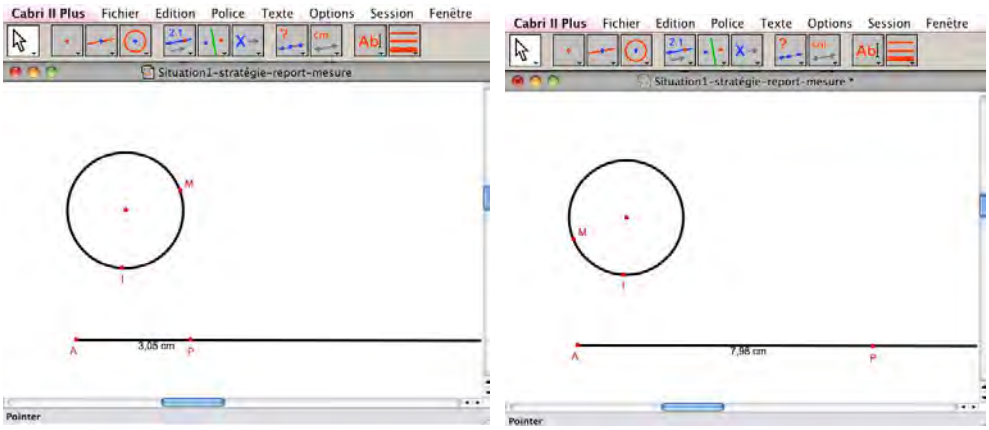


Figure 7 – *Deux états du modèle obtenu par la stratégie report de mesure.*

La situation organise un milieu pour la validation des modèles produits. En effet, l'analyse a priori montre que les stratégies autres que celle du report de mesure sont soit trop coûteuses, soit productrices de modèles non compatibles avec la réalité. Certains éléments du milieu permettent de rejeter ou d'accepter les différents modèles intermédiaires produits. Le comportement des modèles construits, obtenu par déplacement du point P doit être cohérent avec la réalité extramathématique du manège. Par exemple, la cabine peut faire autant de tours que l'on veut. *Le modèle obtenu avec la stratégie stéréographique ne permet ni plusieurs tours ni même un tour complet, il sera invalidé*. En revanche, le modèle obtenu par « report de mesure » est le seul qui respecte chacune des contraintes (stratégie optimale).

Un des principaux résultats issus de l'analyse a posteriori est que les six binômes commencent par la stratégie « stéréographique » qui apparaît donc comme une stratégie de base. Tous l'invalident par référence à la réalité. La stratégie « report de mesure » apparaît alors dans les stratégies de deux groupes sur six. Mais cette stratégie n'aboutit pas à cause de difficultés instrumentales liée notamment à la nécessaire construction d'un point origine sur le cercle. Par exemple, un binôme reporte la mesure AP sur le cercle à partir d'un point qu'il nomme malencontreusement M et obtient un autre point qu'il ne nomme pas, sans doute par ce qu'il ne reconnaît pas ce point comme le représentant de la cabine. De plus, ce binôme ne valide pas sa construction (correcte) par le déplacement du point P, ce qui lui aurait permis du même coup d'identifier le point mobile représentant la cabine.

2. Phase 2 : le temps discret comme variable indépendante

Les élèves disposent d'une nouvelle figure Cabri (figure 8), dans laquelle apparaît le modèle issu du report de mesure institutionnalisé à la fin de la phase 1. Un point I « origine » a été punaisé sur le cercle, il s'agit d'un point fixe. Le sol n'est pas représenté et la demi-droite est placée à droite du cercle pour qu'il ne puisse pas y avoir confusion.

La consigne suivante leur est donnée :

A l'écran, vous pouvez voir un point P sur la demi-droite d'origine A, un point fixe I sur le cercle et un point M qui se déplace sur le cercle, piloté par le point P.

Placer sur la demi-droite [AP) le point P_1 correspondant à un tour de la cabine M, le point P_2 correspondant à 2 tours de la cabine M, le point P_3 correspondant à 3 tours de la cabine M.

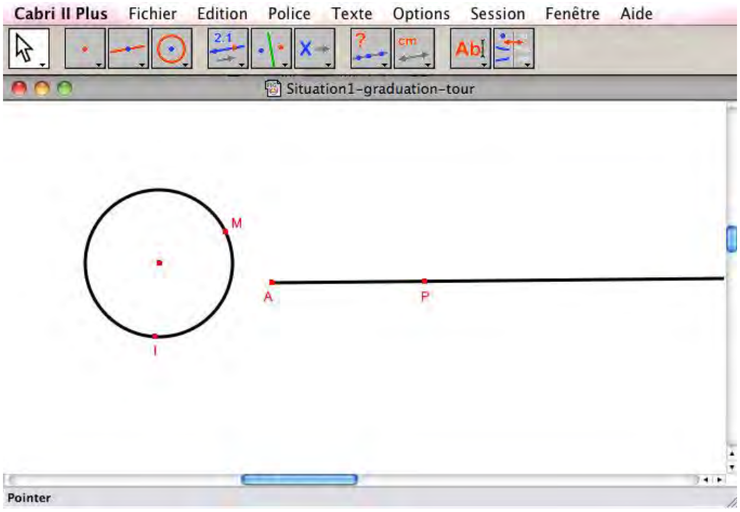


Figure 8 *– Modèle de la grande roue à l'ouverture de Cabri (lorsque P est en A, le point M est en I).*

La construction demandée correspond à la réalisation d'une graduation de [A,P), avec comme unité un « tour ». Avec la graduation en tours, le repérage du déplacement continu du point P devient discret. Cette unité « tour » peut être conçue comme une unité de longueur mais aussi comme un intervalle de temps, si l'on fait l'hypothèse implicite que chaque tour a la même durée (sans que le mouvement soit nécessairement uniforme). Elle conduit à une première modélisation discrète du temps qui le représente par une longueur, alors que, dans l'enseignement secondaire, que ce soit en mathématiques ou en physique, la représentation du temps est un donné préconstruit.

Les stratégies possibles pour le placement des points P_1, P_2 et P_3 se répartissent entre des stratégies d'ajustements perceptifs et des stratégies de construction, géométriques ou numériques. Les stratégies de construction des points P_2 et P_3 ne sont pas contraintes par la stratégie choisie pour P_1. Elles peuvent donc être différentes des stratégies que nous énonçons ci-dessous.

Stratégie « ajustement perceptif » : Positionner P en A (donc le point M est en I), puis déplacer P à partir de A sur la demi-droite [AP) pour que le point M se déplace sur le cercle jusqu'à revenir à la position I. Construire alors un point P_1 sur [AP) et le faire glisser sur la demi-droite de façon à le superposer à P. Déplacer le point P pour le distinguer de P_1.

Cette stratégie permet de placer le point P_1 mais ne permet pas d'obtenir les points P_2 et P_3 sans diminuer la taille du cercle. *De plus, cette construction de P_1 n'est pas robuste par déplacement, en particulier si le rayon du cercle est modifié. Ainsi elle sera invalidée lors de la construction des points P_2 et P_3 à condition que la modification du cercle soit requise et possible.* Deux variables didactiques sont ainsi identifiées : la taille initiale du cercle, et la taille modifiable ou non du cercle. Dans la situation retenue, la taille du cercle est modifiable et son périmètre initial ne peut être reporté plus d'une fois à l'écran. On organise ainsi un milieu qui invalide la stratégie d'ajustement.

Stratégie « report de mesure » : Mesurer le périmètre du cercle, reporter à partir de I la mesure du périmètre sur [AP) avec report de mesure. Le point ainsi construit est P_1. Construire alors P_2 par symétrie de A par rapport à P_1, puis P_3 par symétrie de P_1 par rapport à P_2.

Cette stratégie est optimale. Elle produit une graduation dépendante du rayon du cercle choisi pour représenter la grande roue et reste valide lorsque le cercle change de périmètre. La modification du cercle permet d'introduire la notion de changement d'échelle, notion importante dans le processus de modélisation. En rapport avec la réalité, un changement de la taille du cercle revient à regarder le manège de plus loin ou de plus près.

Le point P variable sur un axe gradué en nombre de tours contribue ainsi à une première modélisation discrète du temps, un « temps-tour ».

De notre analyse a posteriori, il ressort que la stratégie « ajustement perceptif » est la stratégie initiale de deux binômes sur six, pour placer P_1. Ils essaient de marquer P_2 et P_3 de la même façon, mais le cercle disparaît de l'écran, les conduisant à changer de stratégie. Tous les binômes utilisent la commande report de mesure, mais seuls deux binômes aboutissent au modèle complet par la stratégie optimale. Trois autres binômes sont engagés dans des stratégies impliquant le report de mesure, construisent P_1, mais ne changent pas la taille du cercle et n'aboutissent pas à la graduation complète, vraisemblablement par faute de temps. Par exemple l'un de ces binômes anticipe : « La distance de A à P_1 correspond à un tour. On la mesure et la multiplie par 2 pour avoir la distance de A à P_2. ». Le dernier binôme reporte la mesure AP sur le cercle à partir de M, ce qui semble indiquer une incompréhension du rôle de M dans le modèle mécanique initial et de la nécessité d'une origine fixe.

A la fin de cette phase, l'enseignant institutionnalise la stratégie « report de mesure » et introduit le changement d'échelle.

3. *Phase 3 : passage au temps continu*

Les élèves reçoivent la consigne suivante :

> « On sait de plus qu'un tour complet de la grande roue dure 5 minutes.
>
> Placer le point U pour que quand P se déplace de A à U, M se déplace dans la première minute du voyage. »

L'introduction du numérique, par la donnée de la durée d'un voyage en minutes, conduit à la construction d'une seconde graduation de [AP). Elle correspond au temps continu mesuré en minutes, une minute correspondant à 1/5ème de la durée d'un tour en faisant l'hypothèse implicite du mouvement uniforme de la roue. La graduation discrète « temps-tour » est transformée en une graduation continue « temps-minute ».

Parmi les stratégies possibles pour le placement du point U, la stratégie d'ajustement perceptif est possible, bien que coûteuse, mais son invalidation dans la phase précédente la rend improbable. Les autres stratégies envisageables sont des divisions numériques ou géométriques qui opèrent sur le cercle ou sur le segment [AP_1] (quatre stratégies valides). Par effet du contrat résultant des institutionnalisations répétées du report de mesure, les stratégies numériques utilisant le report de mesure devraient être majoritaires, comme par exemple la stratégie *« diviser numériquement AP_1 »* : mesurer la distance AP_1, avec la calculatrice de Cabri diviser AP_1 par 5, reporter le résultat sur [AP) avec l'outil report de mesure, le point obtenu est U (voir Nguyen Thi ibid. pour plus de détails).

Pendant l'expérimentation, en quinze minutes, cinq binômes sur six sont arrivés à construire le point U, en divisant le périmètre du cercle ou la longueur AP_1 en 5, puis en reportant cette mesure sur la demi-droite. Le dernier binôme échoue : il reporte la mesure à partir du point mobile P et non à partir de A. Cette erreur récurrente est révélatrice d'une difficulté dans la genèse instrumentale de la commande « report de mesure » qui concerne plus généralement la nécessité d'une origine fixe pour la mesure, que ce soit dans Cabri ou ailleurs.

A la fin de cette séance, l'enseignant introduit explicitement la notion « d'axe du temps » :

> Quand P se déplace de A à U, M se déplace dans la première minute du voyage. […] On dit qu'on a construit un axe du temps en minutes.

V. CONCLUSION

A l'issue de cette première situation, les élèves disposent d'un modèle fonctionnel de nature géométrique où le déplacement du point M représentant une cabine du manège varie sur un cercle en fonction du temps, variable indépendante. Il constitue le point de départ de la deuxième situation qui pose le problème de coïncidence entre deux phénomènes périodiques.

Ce modèle est l'aboutissement d'une succession de modèles intermédiaires :

- un premier modèle « mécanique » : un point sur une demi-droite pilote le déplacement d'un point sur le cercle.
- deux modèles « temporels » successifs : le point sur la demi-droite représente graphiquement une variable indépendante, d'abord discrète puis continue, formalisant ainsi un axe du temps gradué en minutes.

L'ingénierie vise la dévolution aux élèves de choix significatifs quant au processus de modélisation sans pour autant que cette prise en charge soit totale. En particulier, nous avons mis en place des conditions qui permettent une formalisation graphique du temps comme variable indépendante. Pour favoriser l'entrée dans le processus de modélisation, l'introduction d'informations numériques a été différée, défavorisant les stratégies de calcul au profit de modèles mécaniques issus de stratégies géométriques. L'introduction de données numériques provoque alors le passage d'un modèle temporel discret au modèle temporel continu.

Un des rôles de l'environnement de géométrie dynamique a été d'organiser un milieu pour la notion de fonction comme covariation de deux grandeurs (Falcade 2002). Ce milieu mis en place dans la première situation va permettre dans la seconde situation (non présentée ici) de prolonger le processus de modélisation vers un modèle fonctionnel de nature algébrique lié à la périodicité. Cependant la genèse instrumentale de la commande « report de mesure » a interféré dans le processus de modélisation initié dans la première situation en révélant un rapport incomplet au mesurage : la nécessité d'une origine fixe devra être problématisée dans une reprise de l'ingénierie. Par contre, le déplacement propre à Cabri, notamment le déplacement d'un point piloté par un autre, a contribué tout au long du processus de modélisation à enrichir un milieu pour la validation des modèles intermédiaires dans leur rapport à la réalité.

REFERENCES

Blum W., Niss M. (1991) Applied Mathematical Problem Solving, Modelling, Applications and Links to Other Subjects - State, Trends and Issues in Mathematics Instruction. *Educational Studies in Mathematics* 22(1), 37-68.

Blum W. et. al. (2002) ICMI Study 14: Applications and Modelling in Mathematics Education - Discussion Document. *Educational Studies in Mathematics* 51(1/2), 149-171.

Burgermeister P.-F. (2009) Modélisation mathématique de problèmes extramathématiques au lycée. Vers une praxéologie consistante de la modélisation. In Kuzniak A., Sokhna M. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et développement, enjeux de société et de formation. Actes du colloque EMF2009. Revue internationale Francophone*, numéro spécial.

Chevallard Y. (1989) Arithmétique, algèbre, modélisation, étapes d'une recherche. *Publication de l'IREM d'Aix-Marseille*.

Chevallard Y. (1992) Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 12(1), 73-112.

Coulange L. (1998) Les problèmes concrets à mettre en équation dans l'enseignement. *Petit x* 47, 33-58.

Euler L. (1755) *Opera Omnia ser.1*. vol. VIII. Editions A. Kazer & F. Rudio (1922).

Falcade R. (2002) L'environment Cabri-géomètre outil de médiation sémiotique pour la notion de graphe d'une fonction. *Petit x* 58, 47-81.

Hankel H. (1870) *Untersuchungen über die unendlich oft oszillierenden und unstetigen Funktionen.* Tübingen (Dissertation).

Krysinska M., Mercier A., Schneider M. (2009), Problème de dénombrement et émergence de premiers modèles fonctionnels, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 29(3), 247-305.

Legrand M. (2003) Différents types de modélisation dans l'enseignement. Recueil des contributions présentées à la séance du *Comité Scientifique des IREM* le 26 novembre 2003. 34–-5.

Nguyen Thi N. (2011) *La périodicité dans les enseignements scientifiques en France et au Viêt Nam : une ingénierie didactique d'introduction aux fonctions périodiques par la modélisation*. Thèse de doctorat. Université Joseph Fourier Grenoble 1 et Université Pédagogique d'Ho Chi Minh Ville.

Rabardel P. (1995) *Les hommes & les technologies : approche cognitive des instruments contemporains*. Paris : Armand Colin.

René de Cotret S. (1988) Une étude sur les représentations graphiques du mouvement comme moyen d'accéder au concept de fonction ou de variable dépendante. *Petit x* 17, 5-27.

Rodriguez R. (2007) *Les équations différentielles comme outil de modélisation mathématique en Classe de Physique et de Mathématiques au lycée : une étude de manuels et de processus de modélisation d'élèves en Terminale S.* Thèse Université Joseph Fourier Grenoble 1.

Soury-Lavergne S. (2010) *Modélisation mathématique de phénomènes variables, dans l'enseignement, à l'aide de la géométrie dynamique*. Rapport MIRA Région Rhône-Alpes.

INTERFACES EDUCATIVES ENTRE MATHEMATIQUES ET INDUSTRIE

Rudolf STRAESSER*

Résumé – La contribution décrit l'étude Educational Interfaces between Mathematics and Industry (EIMI study) lancée par les deux organisations « Commission Internationale sur l'Enseignement Mathématique » (CIEM) et International Congress on Industrial and Applied Mathematics(ICIAM). Partant du document de discussion de l'étude, j'indique quelques points importants de l'étude elle-même – à mentionner les difficultés de communication entre les systèmes éducatifs des divers pays, la séparation des mathématiques pures et des mathématiques de l'entreprise. L'utilisation des machines à mathématiques (les « technologies modernes ») et leurs conséquences (boîtes noires, algorithmisation, le rôle de l'enseignement pour comprendre ces boîtes noires) sont commentées.

Mots-clefs : étude CIEM, Mathématiques comme discipline scientifique, entreprise, boîte noire, modélisation, communication

Abstract – The contribution describes the study on « Educational Interfaces between Mathematics and Industry (EIMI-study) » sponsored by the International Commission on Mathematics Instruction (ICMI) and the International Congress on Industrial and Applied Mathematics (ICIAM). With the Discussion Document as a starting point, some important issues of the study will be mentioned: difficulties in communicating between mathematics in educational systems, as a scientific discipline and mathematics in companies. The use of mathematical machines ('modern technology') and its consequences (black boxes, algorithmisation, role of education to understand black boxes) will also be an issue.

Keywords: ICMI-study, Mathematics as a scientific discipline, company mathematics, black box, modelling, communication

I. L'ETUDE « EDUCATIONAL INTERFACES BETWEEN MATHEMATICS AND INDUSTRY » (EIMI)

En 2009, la *Commission International sur l'Enseignement des Mathématiques* (CIEM) et *l'International Council for Industrial and Applied Mathematics* (ICIAM) ont lancé une étude commune sur *Educational Interfaces*[1] *between Mathematics and Industry* (EIMI)[2]. Pour la CIEM, cette étude EIMI est la vingtième, mais représente la première coopération avec une autre association (ICIAM) pour analyser et tenter de donner des éléments de réponse à une question vive de l'enseignement des mathématiques.

Toutes les études CIEM suivent un processus analogue à celui qui a abouti à l'étude EIMI : la CIEM lance le projet par un document de discussion préparé par une commission internationale de programme (CIP) nommée par la CIEM et, dans le cas de l'étude EIMI, en concertation avec l'ICIAM. Pour l'étude EIMI, la moitié des membres appartenait à la CIEM, l'autre moitié à l'ICIAM. Puis le document de discussion est publié et distribué dans les journaux et les communautés concernées de la façon la plus large possible pour susciter des commentaires et des textes sur l'objet de l'étude. En s'appuyant sur ces textes et leurs auteurs, la CIP lance des invitations à une conférence d'étude du sujet (*study conference*), durant laquelle les participants exposent, échangent et débattent dans le but de préparer une livre d'étude (*study book*) qui rassemble et synthétise le travail effectué. La publication du *study book* est l'aboutissement d'une étude CIEM, qui espère ainsi avoir recueilli et regroupé les connaissances disponibles sur le sujet de l'étude concernée.

* Justus-Liebig-Universitaet Giessen – Allemagne – rudolf.straesser@uni-giessen.de

[1] Le terme de Educational Interfaces ne se réfèrent pas seulement aux « mathématiques scolaires » c'est-à-dire aux savoirs mathématiques présents dans l'enseignement des écoles, collèges et lycées.

[2] Organisation for Economic Co-operation and Development.

© Straesser R. (2012) Interfaces educatives entre mathématiques et industrie. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT5, pp. 754–759). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

Cette vingtième étude était motivée par l'importance de l'utilisation et le développement des mathématiques dans l'industrie, dans les entreprises ainsi que dans le secteur publique et les activités de tous les jours des citoyens pour gagner leur vie. En conséquence, selon le document de discussion (voir Damlamian et Straesser 2009), qui a lancé l'étude CIEM - ICIAM, le mot « industrie » est à prendre dans un sens large :

> ... as any activity of economic or social value, including the service industry, regardless of whether it is in the public or private sector. (OECD[3] 2008, p. 4)[4]

Pour le document de l'OECD 2008, les mathématiques :

> ...comprises any activity in the mathematical sciences, including mathematical statistics. (Op. cité)

Le document de discussion est moins précis dans la définition de ce qui est mathématique mais son contexte indique clairement que « mathématiques » dans cette étude est à prendre au sens le plus large possible, en incluant les mathématiques cachées et les mathématiques non considérées habituellement comme mathématiques. Par exemple en Allemagne, l'impôt sur le revenu est calculé d'après une formule non connue, sinon incompréhensible par le citoyen « normal » – ce sont donc des mathématiques invisibles. Normalement, le calcul d'un intérêt sur une somme d'argent donnée n'est pas considéré comme une opération mathématique, mais comme une procédure de nature financière – peut-être à réaliser à l'aide d'un tableau donné à l'avance ou d'une feuille de calcul préfabriquée.

Dès le commencement de l'étude, il est apparu comme évident que la difficulté la plus grande allait être de faire communiquer et coopérer les participants de l'étude venant de communautés souvent séparées : les mathématiciens de l'université, les didacticiens des mathématiques, les professeurs de mathématiques et les gens de l'industrie – un problème que l'on rencontre sans qu'il soit complètement résolu à l'intérieur même de la communauté des mathématiciens avec la séparation mathématiques pures et appliquées.

II. DEUX QUESTIONS ATTRACTIVES

Parmi toutes les questions traitées dans les actes (voir Araújo 2010) et les discussions de la conférence d'octobre 2010, je me contenterai ici d'en mentionner deux que je considère comme particulièrement intéressantes du point de vue des participants à l'étude.

1. Les difficultés de communication

Outre les difficultés de communication qui évidemment existent entre les systèmes éducatifs des divers pays, les mathématiques éducatives et les mathématiques utilisées dans les entreprises se différencient profondément. Normalement, les mathématiques dans l'entreprise, quand elles sont « visibles » et acceptées comme mathématiques (voir section 3), tendent à faire appel à des savoirs mathématiques avancées et liées à des sous-domaines mathématiques disciplinaires repérés au niveau universitaire : par exemple beaucoup de problèmes de l'industrie relèvent du domaine d'application des équations différentielles à dérivées partielles. Les mathématiques éducatives, surtout celles des écoles, collèges et lycées, sont quelques fois très élémentaires, parfois simples comme celles de l'arithmétique élémentaire, mais sont à développer, sinon à construire par les apprenants. Par conséquent, quand on parle de « mathématiques » dans les deux sortes d'institutions, on parle de réalités différentes : peut-être arithmétique élémentaire versus équations différentielles à plusieurs variables.

[3] Organisation for Economic Co-operation and Development.
[4] D'après mes recherches, il n'y a pas de version française.

De plus, les deux communautés ont des horizons de temps de travail tout à fait différents, habituellement beaucoup plus court dans l'entreprise qu'à l'école.

D'autre part, les mathématiques de l'industrie sont impliquées dans un système d'objectifs explicites avec des critères de succès explicites et effectifs. En contraste, les systèmes scolaires ont souvent des objectifs incertains alliés à une évaluation problématique du succès de l'enseignement.

Néanmoins, les participants de l'étude ont pensé qu'il valait la peine de parler d'une unité des mathématiques, même s'il est nécessaire d'accepter les différences sur le plan politique et scientifique.

Pour augmenter encore les problèmes de la communication, les communautés utilisent des « jargons » qui leur sont spécifiques. D'autre part, un même terme peut avoir des significations très éloignées d'une communauté à l'autre, d'autant plus que ces communautés sont complexes. Par exemple, le concept d'« institutionnalisation » de la didactique des mathématiques française prend une signification tout autre dans les entreprises ou la sociologie disciplinaire. La recherche de Castela et Romo Vásquez (2011) fournit un exemple prototypique et supplémentaire de l'usage de jargons différents dans des institutions et des communautés différentes. Pour la communication entre les communautés, il faut alors s'efforcer de trouver des métaphores compréhensibles et acceptables pour surmonter cette difficulté.

2. La modélisation des situations extra-mathématiques, surtout industrielles

Une autre différence dans les approches de l'industrie et de l'éducation est la relation avec la modélisation. Pour l'industrie, la modélisation est l'entrée dans l'utilisation des mathématiques. Normalement et typiquement dans l'entreprise, les objectifs sont hors des mathématiques, les mathématiques sont un outil (parmi d'autres), un instrument pour attaquer une question hors des mathématiques. Au moins dans la sous-communauté didactique et éducative d'une majorité de pays, la modélisation a pris place comme un objectif important d'enseignement. Mais souvent la modélisation n'est qu'une compétence à développer sans prise en compte de questions hors mathématiques. Le fameux cercle de modélisation (voir figure 1 ci-après) est devenu un but d'enseignement pour lui-même.

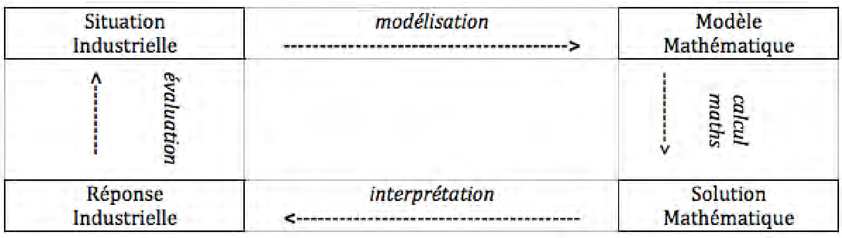


***Figure 1** – Le cercle de modélisation*

Dans le système éducatif, les conséquences sont évidentes : pour la modélisation, on part d'une position « méta », intéressée à enseigner le cercle complet de la modélisation : situation extra-mathématique, identification de la question à résoudre, modélisation de la situation et de la question par une mathématisation, résolution mathématique de la question, interprétation des résultats dans le contexte extra-mathématique. Parfois plusieurs répétitions du cercle de modélisation sont nécessaires (pour une description acceptée par la majorité des didacticiens des mathématiques voir Blum et al. 2002). Il y a même des publications didactiques qui discutent l'enseignement des compétences partielles de ce cercle (comme le passage de la situation/question hors mathématiques au modèle mathématique, la « mathématisation » proprement dite), ce qui rend secondaire et même éphémère la question du but de l'utilisateur des mathématiques, qui est l'aspect essentiel dans une modélisation industrielle. De mon point de vue, dans une école laïque et neutre, les étudiants doivent comprendre que toute modélisation implique un choix de perspectives et de valeurs concernant l'utilisation des mathématiques. Enseigner la modélisation doit rendre visible le contexte et les buts d'une utilisation des mathématiques – dans le sens technique, politique et social.

III. UNE QUESTION MOINS ATTRACTIVE

Dans le document de discussion de l'étude EIMI, est apparue une discussion assez élaborée d'une problématique, qui n'a pas été vraiment traitée dans la conférence : la visibilité ou l'invisibilité des mathématiques dans la vie quotidienne et dans les entreprises. Je donne un exemple de la disparition des mathématiques dans la figure 2 ci-dessous (les photos ont été fournies par l'entreprise BIZERBA, producteur de balances).

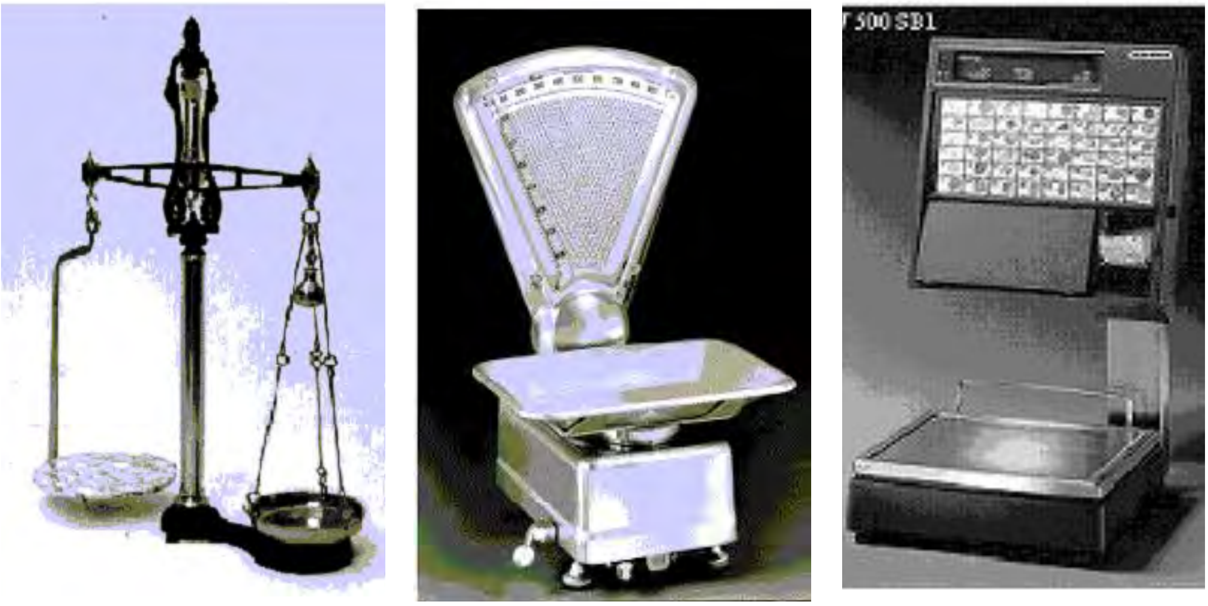


Figure 2 *– Evolution des instruments de pesée et de la procédure de calcul du prix d'une marchandise.*

Dans les prescriptions politiques et pédagogiques on entend beaucoup de discours portant sur l'importance des mathématiques. Cependant si on demande aux gens de citer des savoirs mathématiques qu'ils ont utilisées dans leur vie quotidienne ou professionnelle, souvent seuls l'arithmétique élémentaire et les pourcentages sont nommés. De plus, et plus nocif encore pour les mathématiques du point de vue pédagogique, les mathématiques ne sont plus enseignées et étudiées de façon approfondie. Comment comprendre ce « paradoxe » – importance et invisibilité des mathématiques ?

Une explication donnée dans le document de discussion est celle du phénomène des boîtes noires et de l'algorithmisation. Dans la vie quotidienne et dans les situations routinières des entreprises, les mathématiques sont « encapsulées » dans des procédures mixtes automatiques pour gérer les situations :

> (…) packaging mathematics with other conceptual and material tools into (hopefully) automatic solutions to problems, with the consequence of hiding the mathematics from the immediate view of the users. This packaging can be anything from a fast food cash register, where the keys show only pictures of the items instead of numbers, to the search algorithm in Google™. (Damlamian et Straesser 2009, p. 527).

Dans (Straesser 2002) est décrite la construction sociale d'une telle « boîte noire » qui prend comme illustration le développement de la procédure de pesée et du calcul du prix d'une marchandise (voir figure 2). On y explique comment l'attribution d'un prix (souvent proportionnel au poids d'une marchandise) se déplace graduellement de la lecture du poids et d'un calcul mental du vendeur à un algorithme programmé dans une machine à peser qui se charge du calcul et de l'impression du prix – quand ce prix n'est pas déterminée dans la procédure de production de la marchandise et étiqueté directement sur cette marchandise (code barre). En tout cas, le calcul des prix dans les grandes surfaces et les hyper-marchés n'est plus visible pour les acheteurs. Ce qui reste – dans le cas le plus favorable – est une documentation imprimée et collée à la marchandise. Il n'est plus nécessaire de savoir peser et calculer les prix – ni de la part du vendeur ni de la part de l'acheteur.

Plus loin, le document de discussion de l'étude EIMI commente les conséquences d'une utilisation progressive des boîtes noires qu'on ne peut ouvrir pour les comprendre :

> Just knowing how to apply black boxes has many shortcomings:
>
> • It limits innovation, critical analysis and adjustments to the techniques.
>
> • It does not allow analysis in case of failure of the black box.
>
> • It makes it harder for people to judge the appropriateness of various techniques and the validity of the output.
>
> The exact balance of emphasis between analysis and black box techniques and the various levels of description of the inner workings of the black boxes will depend on the nature of the application. (Damlamian et Straesser 2009, p. 527)

D'autre part, il est évident que l'utilisation des technologies modernes contribue au développement de la mise en boîtes des mathématiques, défavorisant ainsi une compréhension conceptuelle de ce qu'on utilise de façon routinière. Pour l'industrie d'aujourd'hui, ne pas ouvrir une boîte noire peut être une stratégie pour conserver le marché par rapport à des entreprises concurrentes et les empêcher d'entrer dans un marché déjà existant. Contrairement à l'industrie, ces boîtes noires pourraient représenter un enjeu vis-à-vis du processus de l'apprentissage, et motiver leur ouverture pour mieux comprendre les activités de la vie quotidienne et des entreprises qui les utilisent. Par conséquent, les deux communautés (les éducateurs et les industriels) doivent se poser et chercher à répondre à la question : quelle boîte noire est à ouvrir, à rendre grise ou même blanche et transparente ?

Pour avoir des citoyens bien informés, sinon critiques, il apparaît comme une nécessité de savoir comment ouvrir les boîtes noires, d'en avoir une expérience et d'en tirer les conséquences sociales et politiques. Il en découle que même s'il est impossible d'ouvrir toutes les boîtes noires dans une société industrielle, il me semble souhaitable que la procédure d'ouverture des boîtes noires soit présente au moins dans l'enseignement des mathématiques au collège et au lycée. Cette ouverture peut aider aussi à la compréhension des boîtes noires industrielles et peut permettre de réintégrer la dimension technique des mathématiques dans leur contexte social et politique. Cette question importante du point de vue politique, économique et pédagogique n'a guère été abordée durant la conférence ou dans les actes déjà parus (cf. Araújo et al. 2010).

IV. REMARQUES FINALES

Le résultat le plus important de l'étude EIMI – de mon point de vue – est le simple constat qu'il n'y a pas de pôle de recherche sur les mathématiques dans l'industrie dans le monde d'aujourd'hui. L'étude de l'utilisation des mathématiques dans l'industrie (au sens large de l'étude EIMI) vient de commencer dans diverses institutions et disciplines, comme la

« didactique professionnelle » en France, la sociologie du travail ou la didactique des mathématiques en général. Toutes les contributions de l'étude EIMI viennent de personnes travaillant dans des institutions qui n'ont pas pour mission la recherche et le développement des mathématiques dans l'industrie ou dans l'enseignement technique et professionnel. D'après ce que je connais, du moins en Allemagne, il y a eu seulement un poste de professeur qui avait pour vocation l'enseignement des mathématiques dans l'enseignement technique et professionnel – mais le professeur qui a obtenu ce poste ne travaille plus sur cette problématique ! Par conséquent, la recherche dans le cadre de cette problématique est souvent une œuvre personnelle, et même parfois privée, qui ne peut guère compter sur un support institutionnel. Ces conditions font que les progrès sont lents quand il y en a. Les méthodes de recherche suivent les modes des disciplines voisines qui, parfois, sont peu adaptées au sujet de recherche. Dans l'industrie elle-même, une réflexion théorique sur des pratiques bien établies, et perçues comme nécessaires, commence seulement au sein des organisations professionnelles.

Pour conclure, je tiens à mentionner que tout ce qui est dit dans ce texte relève de mon interprétation personnelle de l'étude EIMI. Je n'ai eu aucune autorisation de la part de la CIEM ou de la part de l'ICIAM. Le texte n'a été lu ni par des collègues du comité de programme ni par mon co-chair Alain Damlamian. J'ai voulu ici exprimer mon expérience et mes jugements personnels. En particulier la section 3 (sur l'importance des boites noires et les problèmes qui en résultent) est marquée d'un jugement qui m'est propre. Pour avoir une interprétation plus équilibrée et partagée, au moins au sein du comité de programme international, il faudra attendre la parution du livre de l'étude (study book) au courant de l'année 2012 chez Springer.

REFERENCES

Araújo A., Fernandes A., Azevedo A., Rodrigues J. F. (Eds.). (2010) *Proceedings. EIMI 2010 Conference. Educational Interfaces between Mathematics and Industry*. Lisbon / Bedford, MA: CIM / Comap.

Blum W. et. al. (2002). ICMI Study 14: Applications and Modelling in Mathematics Education - Discussion Document. *Educational Studies in Mathematics* 51(1/2),149-171.

Castela C., Romo Vásquez A. (2011) Des mathématiques à l'automatique : étude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 31(1), 79-130.

Damlamian A., Straesser R. (On behalf of the International Program Committee, 2009). ETICMI-study 20: educational interfaces between mathematics and industry. *ZDM Mathematics Education* 41(4), 525-533.

Organisation for Economic Co-operation and Development, Global Science Forum (2008) *Report on Mathematics in Industry*. http://www.oecd.org/dataoecd/47/1/41019441.pdf

Straesser R. (2002) On the disappearance of Mathematics from society's perception. Developments in Mathematics Education in German-speaking Countries. In Weigand H.-G. et al. (Eds.) (pp. 124-133) *Selected Papers from the Annual Conference on Didactics of Mathematics, Bern 1999.* Hildesheim – Berlin : Franzbecker.

LE THEOREME DE LAGRANGE EN MATHEMATIQUES ET EN ÉCONOMIE : UNE ETUDE DIDACTIQUE DU SAVOIR ENSEIGNE

Sebastian XHONNEUX* – Valérie HENRY*

Résumé – La recherche d'extremum sous contraintes d'égalité est présentée dans la plupart des cours de calcul différentiel et intégral à l'université destinés à des étudiants non seulement en mathématiques mais aussi en économie. Ce texte rend compte d'une recherche sur l'enseignement du Théorème de Lagrange dans ces deux disciplines. Premièrement, nous présentons l'élément clé de notre unité d'analyse des processus didactiques qu'est notre modèle épistémologique de référence du Théorème de Lagrange. Deuxièmement, en nous situant dans le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique, nous comparons deux cours enseignés à des étudiants en première année de bachelier en Sciences mathématiques et en Sciences économiques respectivement dans les universités de Louvain et de Liège (Belgique). Le but de cette comparaison est d'illustrer les points communs, mais aussi les différences entre les organisations didactiques observées relatives au Théorème de Lagrange dans deux institutions données.

Mots-clefs : Théorème de Lagrange, optimisation, transposition didactique, Théorie Anthropologique du Didactique, modèle épistémologique de référence

Abstract – Because of its many uses, the constrained optimization problem is presented in most undergraduate mathematics courses dealing with calculus for both mathematicians and economists. Our research focuses on the teaching of Lagrange's Theorem in both branches of study, mathematics and economics. This paper addresses two objectives. First, we describe our epistemological reference model of the didactic transposition of Lagrange's Theorem in university courses. Secondly, we compare two mathematics courses dealing with Lagrange's Theorem given at the universities of Namur and Liège by means of this model and the Anthropological Theory of Didactics. This comparison is evidence of the manifold designs the teaching of Lagrange's Theorem can take.

Keywords: Lagrange's Theorem, optimization, didactic transposition, Anthropological Theory of Didactics, epistemological reference model

I. INTRODUCTION

En raison de ses nombreuses utilisations, l'optimisation est un champ important en mathématiques, en sciences appliquées mais aussi en économie. En effet, plusieurs problèmes fondamentaux en économie se ramènent à optimiser une fonction particulière tout en respectant certaines contraintes d'égalité. Ainsi, un consommateur souhaitera maximiser sa satisfaction, modélisée par sa fonction d'utilité, tout en étant limité par des contraintes budgétaires. De même un producteur cherchera à minimiser son coût de production en étant astreint à produire une quantité définie. Après avoir modélisé mathématiquement ces problèmes, on peut les résoudre à l'aide de la méthode des multiplicateurs de Lagrange (nommé après le mathématicien Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)).

De nombreuses difficultés nous semblent accompagner l'apprentissage de ce théorème et plus largement du traitement des problèmes d'optimisation sous contraintes dans la plupart des cours de calcul différentiel et intégral à l'université destinés à des étudiants non seulement en mathématiques mais aussi en économie. Premièrement, la conceptualisation de ce type de problème nous apparaît déjà comme difficile et liée au délicat problème, plus général, de la modélisation, que ce soit au sein des mathématiques ou en provenance du domaine économique, voire d'un autre champ d'application. Ensuite, la forte composante technique du théorème, en ce sens que son application peut se réduire assez rapidement à la mise en œuvre

* Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix, Namur – Belgique – sebastian.xhonneux@fundp.ac.be, valerie.henry@fundp.ac.be

© Xhonneux S., Henry V. (2012) Le théorème de Lagrange en mathématiques et en économie : une étude didactique du savoir enseigné. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT5, pp. 760–771). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

de procédures algorithmisées, nous paraît de nature à occulter les nombreux éléments technologiques nécessaires à sa conceptualisation (Sfard, 1992), en particulier le fait que celui-ci fournit une condition nécessaire mais non suffisante pour déterminer un extremum. Enfin, le statut des multiplicateurs de Lagrange, outil important dans le domaine économique, reste, d'après notre expérience comme assistant à l'université, très flou pour les apprenants.

Notre étude de l'enseignement du Théorème de Lagrange en mathématiques et en économie essaie d'apporter des éléments de réponse aux questions suivantes :

- Quelles formes d'enseignement du Théorème de Lagrange rencontre-t-on ?
- Quel rôle joue la preuve du Théorème de Lagrange dans l'enseignement mais aussi dans l'apprentissage du Théorème de Lagrange ?
- A quelles difficultés un étudiant en mathématiques ou en économie est-il confronté lorsque le Théorème de Lagrange lui est enseigné ?

Afin de fournir des éléments de réponses aux questions posées ci-dessus et au vu de nos premières observations, le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique (Chevallard 1991, 1992) et en particulier la transposition didactique nous semblent particulièrement adapté pour fournir une base solide à nos analyses. Néanmoins, nous nous permettrons d'élargir, dès que cela s'avérera opportun, notre champ de travail au modèle général de formation d'un concept proposé par Sfard (1992).

La première section décrit dans un premier temps l'essentiel des cadres de l'inscription théorique de notre recherche, à savoir la « Théorie Anthropologique du Didactique » (TAD) (Chevallard 1991, 1992) avec les notions de transposition didactique et de modèle épistémologique de référence (MER) en particulier.

Pour étudier comment est conçu et géré le processus didactique qui permet aux étudiants d'étudier les types de tâches associées au Théorème de Lagrange, nous donnons dans la deuxième section une description de notre MER à partir des OM savantes légitimant les pratiques enseignantes. Cette construction d'un modèle épistémologique de référence nous permettra d'interpréter et de décrire, de manière relativement précise, l'activité mathématique relative au Théorème de Lagrange.

La troisième section illustre la construction des organisations didactiques (OD) empiriques sur base de l'observation du savoir enseigné (ici, les observations de cours magistraux) dans deux cours différents : le premier cours est enseigné à des étudiants en première année de bachelier[1] en Sciences mathématiques à l'université de Louvain-la-Neuve (Belgique), tandis que le deuxième s'adresse à des étudiants en première année de bachelier en Sciences économiques à l'université de Liège (Belgique).

Une comparaison entre ces cours enseignés est fournie dans la conclusion et aboutit sur quelques remarques et perspectives de notre recherche.

II. APPROCHE ANTHROPOLOGIQUE DU DIDACTIQUE

1. *Praxéologies mathématiques et didactiques*

Afin d'analyser et modéliser les pratiques institutionnelles et sociales, et l'activité mathématique en particulier, la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) considère que :

[1] Le niveau « Première année de bachelier » correspond à la première année postsecondaire en Belgique, à savoir à la première année dans l'enseignement supérieur (Hautes-écoles et Universités).

> toute activité humaine consiste à accomplir une tâche t d'un certain type T, au moyen d'une technique τ, justifiée par une technologie θ qui permet en même temps de la penser, voire de la produire, et qui à son tour est justifiable par une théorie Θ. (Chevallard 2002, p. 1)

Le postulat émis par Chevallard (1999, pp. 2-6) est alors que toute activité humaine met en œuvre une organisation qu'on note $[T/\tau/\theta/\Theta]$ et nomme « praxéologie » ou « organisation praxéologique ».

Ayant qualifié les organisations praxéologiques relatives aux activités mathématiques « organisations mathématiques » (OM), Chevallard propose de passer à une analyse du processus didactique en lui-même en termes de praxéologie. La notion de praxéologie permet alors de reformuler et d'étudier la tâche que la société attribue aux professeurs de mathématiques : enseigner, ou, en termes de la TAD, faire reconstruire aux étudiants des organisations mathématiques. Pour accomplir cette tâche particulière, les différentes formes possibles dans une institution donnée sont appelées « organisations didactiques » (OD). Ainsi, nous pouvons identifier des tâches professorales, des techniques dont l'enseignant dispose ou qu'il élabore et adapte, ainsi que des systèmes d'argumentations justificatives et interprétatives de ces techniques.

Les organisations didactiques s'intéressent aux phénomènes liés à l'enseignement, la transmission et la diffusion des mathématiques. Une OD renvoie donc à la reconstruction ou la transposition d'une OM en classe. Chevallard (1999, p. 19) définit six moments de l'étude qui permettent de décrire une organisation didactique et qui doivent être prévus et organisés par le professeur dans le cadre des activités en classe. Les six moments sont :

1. la première rencontre avec l'organisation enjeu de l'étude ;
2. l'exploration du type de tâches T et l'élaboration d'une technique relative à ce type de tâches ;
3. la constitution de l'environnement technologico-théorique relatif à T ;
4. le travail de la technique ;
5. l'institutionnalisation ;
6. l'évaluation.

2. *Transposition didactique*

La transposition didactique a été définie par Chevallard (1991, p. 38) pour témoigner de la nécessité de considérer le contenu des savoirs à enseigner - et finalement enseignés - comme produit d'un processus qui « transpose » un certain savoir savant d'une institution en-dehors de l'établissement scolaire vers cet établissement dans le but social de le diffuser, de l'enseigner.

Le processus de transposition didactique est représenté sur la Figure 1.

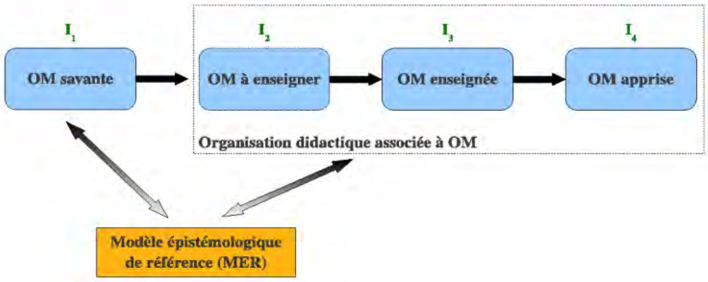


Figure 1 *– L'unité d'analyse des processus didactiques (Bosch et Gascón, 2005, p. 117)*

Dans ce schéma, I_1 représente l'institution auteure du savoir mathématique savant, I_2 la noosphère, I_3 l'institution scolaire et plus particulièrement le professeur et I_4 l'ensemble des élèves ou des étudiants communément appelé classe. Ce même schéma introduit en même temps l'« unité d'analyse » (Bosch et Gascón 2005, p. 116), qui permettra de définir le rapport entre le cadre théorique et les données empiriques de notre recherche.

3. *L'unité d'analyse des processus didactiques*

D'après la Figure 1, il est clair que l'organisation didactique inclura les contraintes qui proviennent des différentes étapes de la transposition didactique. Il est également évident que nous serons amenés à donner une description différente pour chaque OD rencontrée dans nos analyses puisque chaque OD sera dépendante de l'institution considérée. Notons encore que l'OD dépend non seulement des objectifs que l'institution définit à propos des caractéristiques du savoir appris auquel doit conduire le processus didactique mais aussi des OM disponibles dans la classe.

Dans le processus de la transposition didactique, l'OM à enseigner a un rôle central. Elle se trouve à la base de l'OD bien que ni le professeur, ni l'institution n'en disposent explicitement.

> Mais cette influence ne peut être adéquatement interprétée si nous ne disposons pas d'un point de vue épistémologique. Ce point de vue est fourni par une organisation mathématique *de référence* dont la description se fait généralement à partir des OM *savantes* légitimant le processus d'enseignement. (Bosch et Gascón 2005, p. 117)

La section suivante définit notre MER relatif au Théorème de Lagrange.

III. MODELE EPISTEMOLOGIQUE DE REFERENCE DU THEOREME DE LAGRANGE

Fabriqué empiriquement à partir des textes « savants », comme les articles mathématiques, et des praxéologies à enseigner, comme les manuels ou les supports de cours universitaires (voir Xhonneux et Henry (*à paraître*)), notre première étape d'analyse de l'enseignement du Théorème de Lagrange (voir Annexe A pour une formulation mathématique du théorème) consiste en la construction d'un MER sur le contenu mathématique en jeu. Dans le cadre de la TAD, ce modèle se formule en termes de praxéologies. Notre MER inclut cinq organisations mathématiques, OM_1, OM_2, OM_3, OM_4 et OM_5, relatives aux types de tâches suivants :

- T_1 : Chercher des candidats à être extremum d'un problème d'optimisation sous contraintes d'égalité.
- T_2 : Résoudre un problème d'optimisation sous contraintes d'égalité.
- T_3 : Exploiter la signification du multiplicateur de Lagrange.
- T_4 : Construire les éléments théoriques relatifs au Théorème de Lagrange.
- T_5 : Construire les éléments théoriques relatifs au multiplicateur de Lagrange.

Précisons dès à présent que les tâches T_4 et T_5 pourraient être considérées, au premier abord, comme les éléments technologico-théoriques des tâches T_1, T_2 et T_3 respectivement. Néanmoins, la spécificité des enseignements théoriques à l'université nous a amenés à les considérer comme des types de tâches à part entière bien que d'un genre différent des trois premières. Cette distinction est explicitée plus loin dans cette section.

Il est possible de décrire les relations qui existent entre ces OM, mais nous nous limitons aux commentaires suivants dans cet article[2] : OM_1 est issue des œuvres de Lagrange où la

[2] Des exemples de tâches de type T_1, T_2, T_3, T_4 et T_5 sont présentés dans l'Annexe B.

méthode des multiplicateurs apparaît comme une technique particulière pour décrire la solution d'un problème bien précis. Cette OM concerne donc le Théorème de Lagrange vu comme condition nécessaire d'optimalité du premier ordre, tandis que OM_2 contient tout ce qui est mis en œuvre pour résoudre un problème d'optimisation sous contraintes d'égalité. Le Théorème de Lagrange peut ou peut ne pas intervenir dans la technique de OM_2 ce qui entraîne qu'accomplir OM_1 peut constituer une première étape pour la réalisation d'OM_2 . OM_4 est considérée comme un type de tâches construit sur les discours technologico-théoriques d'OM_1 mais aussi d'OM_2. Nous disons qu'OM_4 « transforme la théorie en tâches » (Winsløw 2006, p. 4). En ce qui concerne les praxéologies OM_3 et OM_5, elles considèrent respectivement le multiplicateur de Lagrange comme outil mathématique et comme objet mathématique (Douady 1986).

4. *Types de tâches procédurales et structurales*

L'analyse du savoir à enseigner relatif au Théorème de Lagrange (Xhonneux et Henry *à paraître*) nous a amenés à utiliser la distinction entre deux genres de type de tâches différents : procédural et structural (Sfard 1992, pp. 5-6) lesquels renvoient à deux visions complémentaires du savoir mathématique à enseigner. L'idée est de classifier les types de tâches comme suit.

- Tâches procédurales : Le qualificatif « procédural » résume le caractère à la fois « dynamique, séquentiel et détaillé » (Sfard 1992, p. 4) dans les tâches proposées. Un type de tâches est dit « procédural » lorsqu'il fait appel au caractère procédural d'un concept mathématique (le concept comme processus). Les types de tâches procédurales expriment une suite d'opérations qu'il faut effectuer pour accomplir la tâche demandée. Nous associons la mise en fonctionnement d'un concept mathématique au niveau procédural d'une tâche, où l'élève utilise les processus liés à la connaissance de ce concept, sans que ces processus soient nécessairement transformés en objet.
- Tâches structurales : La construction des opérations sur des procédures détermine, pour une part importante, l'appropriation des apprentissages. C'est pourquoi un type de tâches est dit « structural » lorsqu'il fait appel au caractère objet d'un concept mathématique (le concept comme objet). Ce sont les types de tâches qui se définissent par « expliquer », « interpréter », « définir », « analyser », « résumer », etc.

Nos praxéologies OM_1, OM_2 et OM_3, sont associées à des types de tâches procédurales, OM_4 et OM_5 sont basées sur des types de tâches structurales. En effet, les blocs technologico-théoriques d'OM_1 et d'OM_2 (respectivement d'OM_3) constituent le bloc practico-technique d'OM_4 (respectivement d'OM_5) dans l'enseignement universitaire du Théorème de Lagrange.

On peut supposer que l'activité mathématique essaie d'allier le côté structural avec le côté procédural. Cependant, l'importance accordée à chacun de ces deux aspects de l'activité mathématique dans les processus d'enseignement et d'apprentissage et dans la réalisation des tâches inhérentes à chaque type d'activité varient d'une institution à l'autre.

Il est certain que la possibilité de mobiliser le côté adéquat d'un concept mathématique pour la résolution d'une tâche donnée, d'établir et d'organiser des liens entre des tâches procédurales et des tâches structurales, requiert une certaine flexibilité de pensée chez l'étudiant. Selon l'approche de Sfard (1992), cette flexibilité de pensée est liée aux possibilités d'organisation et de généralisation des objets construits dans des structures de d'unités cognitives, de plus en plus développées. Ce modèle d'explication de l'acquisition d'un concept, basé sur l'idée de « réification », nous permet d'inclure une dynamique dans notre MER, ce que nous présentons à la section suivante.

5. *Le MER du Théorème de Lagrange*

Basé sur la TAD et la théorie de Sfard, nous construisons notre MER du Théorème de Lagrange comme sur la Figure 2.

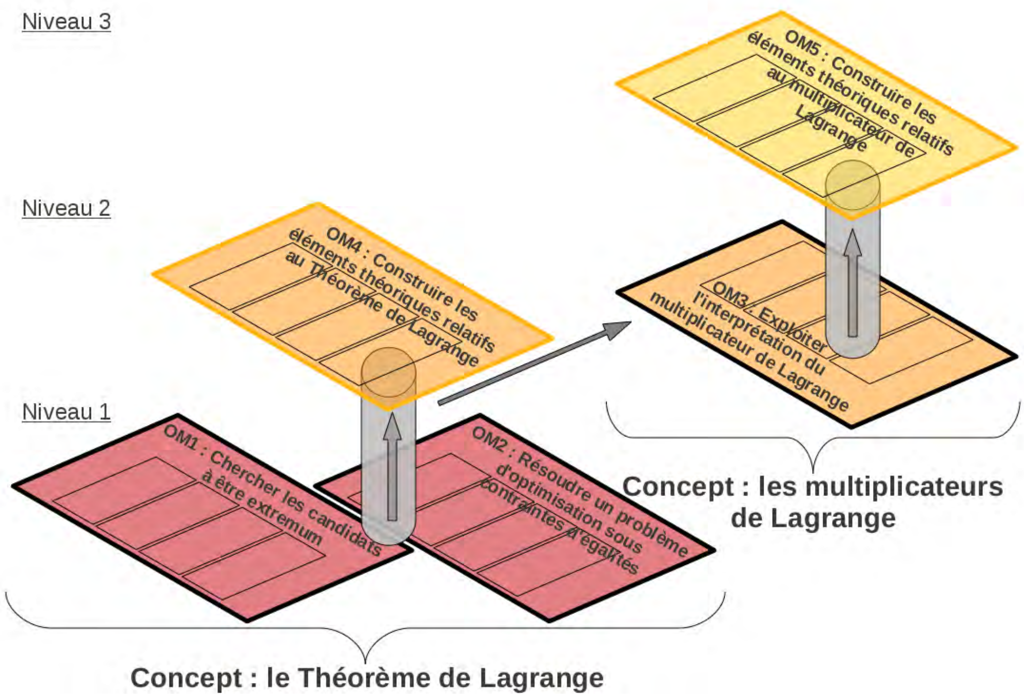


Figure 2 *– Représentation schématique de notre MER du Théorème de Lagrange*

La représentation de notre MER s'interprète de la façon suivante. Le schéma présente trois niveaux. Les OM ayant un contour gras et noir sont relatives aux types de tâches procédurales, les autres sont relatives aux types de tâches structurales. Le processus de réification des concepts mathématiques est indiqué par une flèche grise ascendante sur le schéma de la Figure 2.

Au premier niveau se trouvent OM_1 et OM_2. En effet, la recherche des candidats à être extremum et la résolution de problèmes d'optimisation sous contraintes d'égalité font souvent intervenir le Théorème de Lagrange et se réalisent en appliquant des processus élémentaires comme le calcul de dérivées partielles ou la résolution de systèmes d'équations. Le Théorème de Lagrange est alors perçu comme un processus d'opérations. Au deuxième niveau nous trouvons le type de tâches structurales T_4. Ces activités transforment les blocs technologico-théoriques des praxéologies OM_1 et OM_2 en tâches comme décrit par Winsløw (2006). L'ensemble constitué d'OM_1, OM_2 et OM_4 doit mener à l'appropriation de l'objet « Théorème de Lagrange ».

Nous sommes ensuite en mesure de définir des procédures sur cet objet. L'organisation OM_3 reprend les tâches qui sont relatives aux multiplicateurs de Lagrange. La mise au point de l'objet « multiplicateur de Lagrange » est alors, au troisième niveau, l'objet de l'OM_5. La réification des multiplicateurs de Lagrange complète le processus de conceptualisation.

IV. COMPARAISON ENTRE DEUX SAVOIRS ENSEIGNES

À l'aide notre MER, deux cours magistraux, présentés respectivement aux universités de Louvain-la-Neuve et de Liège en Belgique, sont analysés et comparés. Cette comparaison se réalise en termes du modèle des moments de l'étude qui constitue une grille d'analyse des processus didactiques mis en place. L'objectif de chacun des cours était d'introduire le problème d'optimisation sous contraintes d'égalité et le Théorème de Lagrange en particulier. Les cours observés sont des séances ordinaires de cours d'analyse en première année de bachelier en Sciences Mathématiques (Louvain-la-Neuve) et en Ingénieur de Gestion (Liège) dans le sens où ils n'ont pas fait l'objet d'une ingénierie de recherche.

6. *Analyse mathématique 2 – Fonctions de variables vectorielles (Université de Louvain-la-Neuve)*

Le cours observé se place dans le cadre du calcul différentiel et intégral et le Théorème de Lagrange y est présenté durant une seule séance de deux heures. Le professeur met en place une organisation didactique dans laquelle on peut dégager quatre moments :

1. un moment de première rencontre avec l'enjeu de la séance, à savoir résoudre des problèmes d'optimisation sous contraintes d'égalité (OM_2) ;
2. un moment d'élaboration d'une technique relative à ce type de tâches qui aboutit au Théorème de Lagrange (OM_1), ainsi que des germes d'une constitution de l'environnement technologico-théorique associé à T_1 (tâches d'OM_4) ;
3. un moment plus long de travail de la technique (T_1 et T_2) et
4. un long moment de constitution de l'environnement technologico-théorique associé à T_1, à savoir prouver le Théorème de Lagrange (tâche d'OM_4).

Le bref moment de la première rencontre se résume à la présentation du problème général :

> Minimiser (ou maximiser) une fonction f sur un ensemble $\{x \in U \subseteq \mathbb{R}^n \mid g(x)=0\}$. (Prof. A.)

À l'aide d'un graphique,

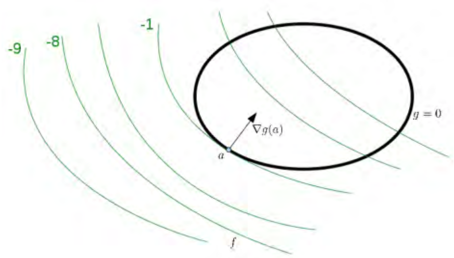


Figure 3 *– Dessin au tableau (Prof. A.)*

le professeur essaie ensuite d'élaborer un aperçu de la technique des multiplicateurs de Lagrange, technique que nous associons à l'OM_1 (qui n'est qu'une partie d'une technique d'OM_2). En effet, l'enseignant ne mentionne pas explicitement que le critère exploré n'est pas suffisant, à défaut d'autres informations sur le problème, pour résoudre une tâche du type T_2 :

> on a envie de dire : $\nabla f(a) = \lambda \nabla g(a)$. (Prof. A.)

Le discours donné sur ce même graphique peut être considéré comme élément justificatif de la technique. Ces explications aboutissent à l'énoncé du Théorème de Lagrange.

Le troisième moment présent est celui du travail de la technique. Deux problèmes d'optimisation sous contraintes d'égalité sont présentés et résolus :

> Déterminer le point où la fonction $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x)=x_1+x_2-x_3$ atteint son minimum restreint à l'ensemble $S=\{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1^2+x_2^2+x_3^2=1\}$;
>
> Déterminer le point où la fonction $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x)=x_1^2+x_2^2-x_3^2$, atteint son minimum sur la droite définie par les équations $x_1+x_2-x_3=1$ et $x_1-x_2+2x_3=0$.

le premier par le professeur au tableau tandis que le deuxième est laissé à charge des étudiants.

Nous relevons deux instants particuliers à l'intérieur de ce moment de l'étude : premièrement, le professeur – après écriture du premier problème au tableau – fait remarquer qu'il faut

> toujours s'assurer de l'existence d'une solution du problème d'optimisation. (Prof. A.)

Ceci doit expliquer aux étudiants pourquoi la résolution d'une tâche de type T_1 donne en même temps la solution à la tâche de type T_2 : lorsque l'existence d'une solution du problème est assurée, la solution se trouve parmi les candidats à être extremum. Deuxièmement, il mentionne qu'

> il n'est pas vraiment nécessaire de connaître α et γ (les multiplicateurs de Lagrange). Dans les applications physiques et économiques, on s'intéresse aux valeurs de α et γ, mais dans les problèmes d'optimisation en mathématiques cela est sans grande importance. (Prof. A.)

Le professeur se limite donc aux OM relatives au Théorème de Lagrange (OM_1, OM_2 et OM_4) et ne se préoccupe pas de celles relatives aux multiplicateurs de Lagrange (OM_3 et OM_5).

La deuxième heure de cours est entièrement consacrée à une tâche de type T_4, à savoir prouver le Théorème de Lagrange. Remarquons que le cours réalise ses deux objectifs (trouver une technique de résolution de T_2 et démontrer le Théorème de Lagrange) l'un à la suite de l'autre. Le développement des tâches procédurales se fait alors de manière déconnectée du travail des quelques tâches structurales, en conséquence de quoi les techniques d'OM_2 ne sont rendues intelligibles qu'implicitement par les tâches structurales d'OM_4. La pause entre les deux heures marque cette séparation nette.

L'OD observée s'inscrit principalement dans un modèle d'« OD classique » (Bosch et Gascón 2002), modèle selon lequel

> l'activité mathématique serait presque déterminée par le bloc technologico-théorique, d'où découleraient techniques et problèmes en tant que simples « applications » des définitions, axiomes et théorèmes. (Bosch et Gascón 2002, p. 10)

D'autres moments de l'étude sont alors laissés aux séances d'exercices ou sous la seule responsabilité de l'étudiant.

7. *Analyse mathématique 2 – Fonctions de variables vectorielles (Université de Liège)*

Le cours observé se place également dans le cadre du calcul différentiel et intégral. Le Théorème de Lagrange y est présenté pendant 3h de cours, la séance des deux premières de ces heures est rapportée ici. Le professeur met en place une organisation didactique dans laquelle on peut dégager les moments suivants :

1. un moment de première rencontre mélangé à un moment d'élaboration d'une technique pour résoudre des problèmes d'optimisation sous contraintes d'égalité et qui mène vers le Théorème de Lagrange (OM_1 et OM_2).

2. un moment de constitution de l'environnement technologico-théorique associé à T_1 (différentes tâches d'OM_4) lié à un moment d'institutionnalisation.

Le moment de première rencontre est un exposé sur différents problèmes d'optimisation rencontrés jusque-là et leurs techniques de résolution respectives (dans un cadre graphique et dans un cadre analytique). La nécessité de résoudre des problèmes d'optimisation sous contraintes d'égalité est alors mise en avant (OM_2). À l'aide d'un exemple concret à deux dimensions sous une seule contrainte d'égalité, maximiser $\cdot\ (x,y)$ sous la contrainte $g(x,y)=b$, un premier moment d'élaboration d'une technique adaptée au type de tâches T_2 est abordé :

> il faut démontrer que $grad \cdot\ (p) \,//\, grad\ g(p)$. (Prof. B.)

Ce dernier moment est suivi d'un moment de constitution de l'environnement technologico-théorique associé à T_1, où différentes tâches d'OM_4 sont traitées, notamment différentes définitions spécifiant l'environnement théorique du Théorème de Lagrange, la présence d'une condition de régularité, la signification de l'équation de Lagrange et la définition de la fonction lagrangienne. Une preuve, basée sur des courbes de niveau tangentes, de cette condition nécessaire d'optimalité est présentée et aboutit à un moment d'institutionnalisation où le professeur éclaire les étudiants sur l'organisation mathématique construite et institutionnalise ainsi les nouveaux concepts vus au cours. Notons encore que le professeur profite de ce moment pour attribuer au multiplicateur de Lagrange le statut de variable de la fonction lagrangienne ce qui peut être considéré comme une tâche de type T_5.

Nous relevons encore un bref moment lors de la constitution de l'environnement technologico-théorique. Bien que le but premier ne soit pas le travail de la technique, la présentation d'un exemple, appelé par le professeur « exemple de Courant »,

> maximiser $f(x,y)=y$ sous contrainte que $x^2+y^3=0$. (Prof. B.)

est un moment par lequel on perfectionne la maîtrise des techniques qui lui sont associées. En même temps, cet exemple de Courant est montré aux étudiants dans le but de souligner l'importance de la condition de régularité dans les hypothèses du Théorème de Lagrange (tâche de type T_4) et constitue donc un moment d'institutionnalisation pour le professeur.

Notons que les tâches structurales s'imbriquent dans les tâches procédurales et rendent ainsi une séparation nette entre les moments technique et technologico-théorique impossible. Il y a intégration du type de tâches T_1 dans l'OM par un discours technologique qui trouve son soutien dans la réalisation de nombreuses tâches structurales.

Nous qualifions l'OD observée d'« OD constructiviste » (Bosch et Gascón 2002) dans le sens où ces OD

> prennent en charge, simultanément, les moments technologico-théorique et exploratoire et se caractérisent par le fait de contextualiser l'activité de résolution de problèmes en la situant dans une activité plus large de construction de connaissances ainsi que le fait de considérer que l'apprentissage est un processus actif de construction à partir d'acquis antérieurs et sous des contraintes déterminées. (Bosch et Gascón 2002, pp. 10-11)

8. Comparaison

Sur base de nos observations dans les deux institutions, nous faisons les constats suivants :

- la possibilité de constituer des blocs technologico-théoriques qui rendent intelligible le fonctionnement des techniques d'OM_2 et de leur résultat, est présente dans les deux cours mais cette tendance est tantôt prononcée et tantôt elle l'est moins,

- les organisations mathématiques sont constituées d'une importante composante technologico-théorique aussi bien dans le cours en mathématiques qu'en économie,
- le travail sur les multiplicateurs de Lagrange est absent dans le cours destiné aux futurs mathématiciens,
- d'un côté, l'organisation didactique en mathématiques semble être en rapport avec un « modèle enseignant classique », qui privilégie le moment de la constitution de l'environnement technologico-théorique au détriment d'autres moments. De l'autre côté, l'organisation didactique en économie a été qualifiée de « constructiviste ». Finalement, deux discours technologico-théoriques fort différents sont utilisés pour justifier le Théorème de Lagrange.

En conclusion, dans l'enseignement universitaire, les constructions d'organisations mathématiques relatives au Théorème de Lagrange sont issues de modèles variés (classique et constructiviste en occurrence) et centrées sur la question de résoudre un problème d'optimisation sous contraintes d'égalité. En même temps, nos analyses témoignent de l'importance attribuée à l'activité de démonstration à l'université.

V. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Cet extrait d'analyse du savoir enseigné met en lumière notre MER comme élément clé de l'unité d'analyse des processus didactiques relatifs au Théorème de Lagrange. En particulier, ce MER met en évidence la puissance explicative de la TAD comme outil d'analyse des pratiques enseignantes et de la transposition didactique du Théorème de Lagrange.

Nous avons utilisé dans cet article notre MER pour analyser, en termes des moments de l'étude, deux cours magistraux s'adressant à deux publics différents. Évidemment, les résultats obtenus sont à prendre avec précaution, car ils ne concernent que deux enseignements observés. Néanmoins, nous avons observé que différentes organisations didactiques de la même discipline – l'analyse mathématique – et relatives au même objet – le Théorème de Lagrange – peuvent être assez dissemblables. Il semble même que l'OD mise en place change de forme, qu'elle soit présentée à des futurs mathématiciens ou à des futurs économistes et ingénieurs de gestion. Maintenant, conclure que deux cours donnés dans des institutions différentes ne sont pas semblables ne suscite certainement pas un grand étonnement. À l'inverse, il est plus intéressant d'évoquer que, malgré les particularités relevées, nous avons mis le doigt sur quelques points communs entre les différentes OD en mathématiques et en économie.

Les résultats des analyses de nos données expérimentales nous incitent fortement à continuer l'investigation. D'autres analyses, notamment du savoir appris, doivent être entamées dans le futur et complèteront notre vision de l'enseignement du Théorème de Lagrange en mathématiques en en économie. Une perspective de recherche serait alors d'envisager une ingénierie didactique au sens d'Artigue, rapportant ainsi des qualités essentielles du Théorème de Lagrange et contribuant à la compréhension des pratiques des enseignants confrontés à l'enseignement de ce théorème.

REFERENCES

Artigue M. (1989) Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 9(3), 281-308.

Bosch M., Gascón J. (2002) Les praxéologies didactiques : Organiser l'étude. 2. Théories et empiries. In Dorier J.-L., Artaud M., Artigue M., Berthelot R., Floris, R. (Eds.) *Actes de la 11e École d'Été de Didactique des Mathématiques*. *Cédérom*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Bosch M., Gascón J. (2005) La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. In Mercier A., Margolinas C. (Eds.) (pp. 107-122) *Balises pour la didactique des mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chevallard Y. (1991) *La transposition didactique - du savoir savant au savoir enseigné.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chevallard Y. (1992) Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 12(1), 73-112.

Chevallard Y. (1999) Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19(2), 221-265.

Chevallard Y. (2002) Les praxéologies didactiques : Organiser l'étude. 1. Structures et fonctions. In Dorier J.-L., Artaud M., Artigue M., Berthelot R., Flori, R. (Eds.) *Actes de la 11e École d'Été de Didactique des Mathématiques*. *Cédérom*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Douady R. (1986) Jeux de cadre et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques 7*(2), 5-31.

Sfard A. (1991) On the dual nature of mathematical conceptions : reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics* 22(1,) 1-36.

Winsløw C. (2006) Transformer la théorie en tâches : La transition du concret à l'abstrait en analyse réelle. In Rouchier A., Bloch I. (Eds.) *Actes de la 13e École d'Été de Didactique des Mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Xhonneux S., Henry V. (*à paraître*) A didactic survey of the main characteristics of Lagrange's Theorem in mathematics and in economics. *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Rzeszów. Pologne (9-13 février 2011).

ANNEXE A

Entre la découverte de la technique pour résoudre des problèmes d'optimisation sous contraintes d'égalité à la fin du 18$^{\text{ème}}$ siècle et les cours magistraux qui l'enseignent à l'heure actuelle, le savoir mathématique en question a évolué et changé de forme. Lagrange publie son principe pour maximiser une fonction n variables sous une ou plusieurs contraintes dans sa "Théorie des fonctions analytiques" en 1797 et depuis, des mathématiciens émanant de différents domaines mathématiques ont donné des formulations diversifiées (mais cohérentes et mathématiquement équivalentes) du théorème, appelé aujourd'hui « Théorème de Lagrange » (en optimisation). Il donne une condition nécessaire pour l'existence d'un extremum local d'une fonction qui est soumise à des contraintes d'égalité. Il peut être formulé comme suit:

Soit le problème d'optimisation sous contraintes d'égalité

$$(P_E)\ \begin{cases} \min\limits_{x\in\mathcal{U}} & f(x) \\ \text{SC} & g_i(x)=0, \quad i=1,\ldots,k\,, \end{cases}$$

où · · · U· ℝ est une fonction de classe C^1 sur un ensemble U· ℝ· ouvert et g_i : $\mathbb{R}^3$ · · ℝ, $i=1,\ldots,k$, sont des fonctions de classe C^1 sur U. Supposons que x^* est un extremum local du problème (P_E). Supposons en plus que la matrice Jacobienne $J_g(x^*)$ est de rang k[3]. Alors il existe un vecteur λ· · · λ_1· · ...,λ_k· · ∈ $\mathbb{R}^k$ vérifiant

$$\nabla f(x^*)+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^*\nabla g_i(x^*)=0.$$

Les composantes du vecteur λ· sont les multiplicateurs de Lagrange. Les premiers pas des mathématiciens en direction de la dualité en optimisation ont réussi, au 20ème siècle, à attester aux multiplicateurs de Lagrange le statut de variables. Mieux encore, l'analyse de sensibilité ou autrement dit les effets éventuels induits par des changements dans les données (contraintes) d'un problème d'optimisation sous contraintes sur la solution du problème, s'exprime en termes des multiplicateurs de Lagrange et permet d'éviter de devoir résoudre un nouveau problème d'optimisation. C'est cette dernière utilité qui apporte à l'économie mathématique l'intérêt d'exploiter les problèmes duaux et l'interprétation du multiplicateur de Lagrange.

ANNEXE B

Voici différents exemples de tâches de type T_1, T_2, T_3, T_4 et T_5 :

- T_1 : Déterminer les candidats à un extremum de la fonction $f(x,y)=x^2y$ sous contrainte $g(x,y)=2x^2+y^2=3$; déterminer les candidats à un extremum de la fonction $f(x,y)=1-x^2-y^2$ sous contrainte $g(x,y)=(x-1)^3-y^2=0$; etc.
- T_2 : Déterminer le point où la fonction f· · · $\mathbb{R}^3$ →· ℝ, $f(x)=x_1+x_2-x_3$ atteint son minimum restreint à l'ensemble $S=\{(x_1,x_2,x_3)|x_1^2+x_2^2+x_3^2=1\}$; maximiser $f(x,y)=y$ sous contrainte que $x^2+y^3=0$; déterminer la distance minimale de l'origine du plan Oxy à l'hyperbole d'équation $x^2+3xy+y^2=5$; etc.
- T_3 : Écrire et résoudre le problème dual ; étudier la sensibilité du problème du minimum (ou maximum) par rapport à une variation de la contrainte ; déterminer une approximation de la variation du coût optimal suite à une diminution unitaire de la commande ; etc.
- T_4 : Démontrer le Théorème de Lagrange ; définir les équations de Lagrange ; expliciter la condition de régularité ; relever l'importance du fait que le Théorème de Lagrange est une condition nécessaire d'optimalité ; relever le fait que le Théorème de Lagrange permet seulement de trouver des extrema locaux ; généraliser le Théorème de Lagrange à n dimensions sous k contraintes d'égalité ; etc.
- T_5 : Définir le multiplicateur comme coût implicite ou « shadow price » ; démontrer la propriété concernant l'interprétation des multiplicateurs de Lagrange ; définir explicitement le multiplicateur de Lagrange comme variable duale (de la fonction lagrangienne) ; définir la fonction duale ; etc.

---

3 Cette hypothèse est appelée « condition de régularité ».

RESSOURCES ET DEVELOPPEMENT PROFESSIONNEL DES ENSEIGNANTS

Compte-rendu du Groupe de Travail n°6– EMF2012

Fernando HITT* – Michela MASCHIETTO**
Jana TRGALOVA*** – Moustapha SOKHNA****

Le bouleversement des savoirs et de l'accès aux savoirs provoqué par l'introduction des technologies dans l'enseignement des mathématiques (Hoyles et Lagrange 2010) a été régulièrement discuté lors des précédentes rencontres EMF. Dans les travaux récents, les technologies sont considérées comme faisant partie de tout un éventail de ressources de types très différents, comme des logiciels éducatifs, des calculatrices, des activités en ligne pour la classe, mais également des instruments géométriques plus traditionnels, des manuels, etc. Le thème de ce groupe de travail a tenu compte de cette évolution et s'est proposé d'approfondir les réflexions sur les ressources en relation avec le développement professionnel des enseignants.

Les contributions à ce groupe de travail ont été organisées autour de trois pôles, en accord avec le texte d'appel à communications (Hitt et al. 2011) : conception et usage de ressources, ressources et dispositifs de formation, et ressources et collectifs d'enseignants.

Ce texte qui résume le travail du groupe est organisé en cinq parties. La première présente le groupe en quelques chiffres, les deuxième, troisième et quatrième parties sont dédiées à la présentation des contributions selon trois aspects qui sont apparus comme les plus significatifs dans les discussions, et enfin la cinquième partie contient quelques conclusions et ouvre des perspectives pour la prochaine édition du colloque.

I. LE GROUPE DE TRAVAIL EN QUELQUES CHIFFRES

Le groupe de travail a compté 31 participants venus de 11 pays différents, au-delà du cercle de la francophonie. Parmi les participants, il y avait des chercheurs, des formateurs, des enseignants de tous les ordres d'enseignement scolaire, des étudiants. Ces origines et cultures diverses ont certainement contribué à la richesse des échanges qui ont eu lieu pendant les sessions de travail.

Parmi les 15 contributions retenues, dont 11 articles et 4 affiches, la répartition par rapport aux trois pôles cités plus haut est la suivante : conception et usage des ressources – 8 contributions, ressources et dispositifs de formation des enseignants – 3 contributions, et ressources et collectifs d'enseignants – 4 contributions. Notons que toutes les contributions retenues, articles et affiches, ont pu être présentées et discutées au sein du groupe.

Les échanges et discussions ont fait émerger trois aspects importants relatifs au thème du groupe qui sont développés dans la suite : les approches théoriques (section II), les différentes

* Université du Québec à Montréal, Québec – Canada – hitt.fernando@uqam.ca
** Università di Modena e Reggio Emilia – Italie – michela.maschietto@unimore.it
*** IUFM et S2HEP, Université Claude Bernard Lyon 1 – France – jana.trgalova@univ-lyon1.fr
**** Faculté des Sciences et Technologies de l'Éducation et de la Formation, Université Cheikh Anta Diop de Dakar – Sénégal – moustapha.sokhna@ucad.edu.sn

© Hitt F., Maschietto M., Trgalová J., Sokhna M. (2012) Ressources et développement professionnel des enseignants – *Compte-rendu du Groupe de Travail n°6*. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT6, pp. 772–783). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

significations attribuées au mot « ressource » (section III) et les divers dispositifs de développement professionnel des enseignants (section IV).

II. DIALOGUE ENTRE CADRES THÉORIQUES

Les présentations au sein du groupe de travail ont mis en évidence une multiplicité de cadres théoriques, par rapport auxquels les problématiques liées aux ressources et au développement professionnel ont été abordées. Les discussions pendant les sessions de travail ont permis de voir une certaine cohérence entre les diverses recherches par rapport au thème et des liens entre elles. Mais, en même temps, elles ont amené à s'interroger de manière plus approfondie sur leurs relations à l'égard des cadres de référence.

Dans ces dernières années, la recherche en didactique des mathématiques a questionné l'intégration des cadres théoriques (Artigue et al. 2006). Une telle problématique porte l'attention d'une part sur le fait qu'une seule théorie ne semble pas être suffisante pour traiter des phénomènes didactiques, d'autre part sur l'intérêt d'étudier si des approches différentes peuvent avoir des éléments en commun ou être complémentaires. Prediger et al. (2008) proposent une échelle de degrés d'intégration des cadres théoriques (Figure 1). Entre les deux extrémités, il y a des catégories intermédiaires comme « comparer et contraster »[1], « combiner et coordonner »[2] et « synthétiser et intégrer »[3].

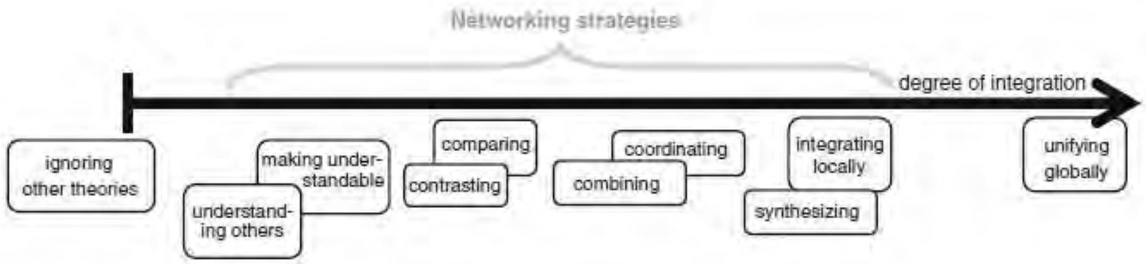


Figure 1 *– Networking strategies (Prediger et al. 2008, p. 170)*

Nous utiliserons cette grille pour lire les références théoriques des contributions du groupe, d'une part pour chercher des pistes de réflexion, d'autre part pour rendre compte de ce qui est ressorti dans les discussions sur la complexité de la recherche, qui doit forcément prendre en compte plusieurs aspects. Les cadres théoriques ont été récoltés dans le Tableau 1.

Le Tableau 1 montre que les approches instrumentale (Rabardel 1995) et documentaire (Gueudet et Trouche 2008) sont les références théoriques les plus partagées dans le groupe. Parmi les travaux, il y en a certains qui se développent principalement dans ce cadre (comme *Trgalová et Richard*), tandis que d'autres l'articulent à d'autres cadres théoriques.

[1] « Comparing and contrasting only differ gradually, but not in substance. Whereas comparing refers to similarities and differences in a more neutral way of perceiving theoretical components, contrasting is more focused on stressing differences » (p. 171).

[2] « typical for conceptual frameworks which do not necessarily aim at a coherent complete theory but at the use of different analytical tools for the sake of a practical problem or the analysis of a concrete empirical phenomenon » (p. 172). Le mot « coordonner » est utilisé « when a conceptual framework is built by well fitting elements from different theories », tandis que le terme « combiner » est utilisé si les approches théoriques sont seulement juxtaposées.

[3] « When theoretical approaches are coordinated carefully and in a reflected way, this can be a starting point for a process of theorizing that goes beyond the better understanding of a special empirical phenomenon and helps to develop a new piece of synthesized or integrated theory » (p. 173).

La recherche de *Sabra* articule les travaux de Gueudet et Trouche (2008) avec ceux de Wenger (1998) portant sur les communautés de pratique pour étudier les documentations communautaires, en développant de nouveaux outils d'analyse. Il s'agirait d'un exemple de « synthétiser et intégrer » car de nouveaux éléments de la théorie semblent se définir.

Cadres théoriques	**Contributeurs au groupe de travail**
Approche instrumentale (Rabardel) et documentaire (Gueudet et Trouche)	*Abboud-Blanchard, Aldon, Berg, Georget et Labrousse, Maschietto, Trgalová et Richard, Sabra, Sokhna et Diarra, Tempier*
Communauté de pratique (Wenger) et/ou communauté d'*inquiry* (Jaworski)	*Sabra, Berg, Georget et Labrousse*
Théorie de l'activité (Engeström)	*Berg*
Théorie des Situations Didactiques - TDS (Brousseau) et structuration du milieu (Margolinas)	*Aldon, Tempier, Vivier*
Ingénierie didactique et du développement (Perrin-Glorian)	*Tempier*
Théorie Anthropologique du Didactique - TAD (Chevallard)	*Chenevotot-Quentin et al., Tempier*

***Tableau** 1 – Approches théoriques de référence*

La notion de communauté de pratique (Wenger 1998) est également considérée dans la recherche de *Georget et Labrousse*, même si l'analyse qui y est faite ne prend en compte que l'activité d'un seul enseignant. Dans la discussion, l'émergence d'une communauté de pratique est considérée comme importante dans la pratique des situations de recherche et de preuve entre pairs et dans sa diffusion.

La théorie des situations didactiques (TDS – Brousseau 1998) et la structuration du milieu sont considérées par *Aldon* en lien avec l'approche documentaire. Du point de vue de *networking strategies*, on peut dire qu'elles sont en général dans le degré « combiner et coordonner » et le volet « combiner », étant donné que l'auteur souligne que la TDS est suffisamment précise pour rendre compte des interactions élèves-professeurs. C'est sur l'étude du milieu que l'approche documentaire est « coordonnée » avec la structuration de celui-ci, ayant comme point de départ le fait que le milieu intègre les ressources du professeur.

Berg développe sa recherche dans la théorie de l'activité (Engeström 1999) suivant l'approche méthodologique issue de la recherche de développement. Dans le cadre théorique de cette recherche, on trouve la notion de communauté d'*inquiry* (Jaworski 2005), dérivant de la notion de communauté de pratique. L'auteur propose d'analyser d'une part la préparation d'un atelier dans le cadre de son projet Teaching Better Mathematics (TBM), d'autre part la tension éprouvée par l'enseignant à travers les outils de l'approche documentaire. Il s'agit de croiser les cadres théoriques, celui de la recherche TBM (résultant lui aussi d'un processus de *networking strategies* plutôt vers le pôle « intégrer ») avec l'approche documentaire. Ce type d'étude pourrait être placé du côté du degré « combiner et coordonner », volet « combiner », avec l'objectif d'utiliser des outils d'une autre approche pour analyser un phénomène. Dans la discussion, la question générale sur le degré « synthétiser et intégrer » s'est également posée, en relation à la cohérence épistémologique entre les approches.

Dans un autre degré on peut placer le travail de *Tempier* à l'égard de l'approche documentaire : dans sa contribution, une telle approche est évoquée, mais elle ne semble pas être prise en compte dans la conception de la ressource et dans les premières expérimentations, conduites en combinant la TDS et la théorie anthropologique du didactique (TAD - Chevallard 1998). L'auteur souligne la perspective de rencontre de la conception *pour l'usage* et *dans l'usage*.

Dans le cadre de *networking strategies*, il semble que d'autres dialogues pourraient être ouverts et approfondis par rapport à ceux mis en évidence dans ce groupe. Par exemple, il pourrait être intéressant de comparer la recherche de développement cité par *Berg* et l'ingénierie du développement présente dans le travail de *Tempier.* Toujours dans le même esprit, il pourrait être fructueux de voir selon le degré « comparer et contraster » le rôle du chercheur dans l'approche documentaire comme *Sabra* l'a caractérisé, où il est en dehors de la communauté d'enseignants, et l'idée de collaboration chercheurs – enseignants, vue par *Berg* en termes de co-apprentissage, du point de vue du suivi du travail collectif.

D'autres cadres et outils théoriques ont été convoqués, comme des approches expérimentales en didactique (*Freiman et al.*, *Georget et Labrousse*) et au laboratoire de mathématiques (*Maschietto*), à la construction de ressources et aux questions d'ergonomie (*Vivier*, *Tempier*, *Georget* et *Labrousse*, *Chenevotot-Quentin et al.* et *Freiman et al.*) ou encore à la pratique enseignante (*Abboud-Blanchard*).

III. DIFFÉRENTES SIGNIFICATIONS DU MOT « RESSOURCE »

Différentes significations sont attribuées au mot « ressource » par les auteurs des contributions à ce groupe de travail. En général, les auteurs sont proches de ce que le dictionnaire propose comme signification du mot « ressource » : « Ce qu'on emploie pour se tirer d'un embarras, pour vaincre des difficultés ». Dans notre contexte, la ressource a été prise comme élément pour résoudre un problème d'enseignement. Ainsi, certains auteurs considèrent les ressources comme des objets externes aux individus, d'autres parlent de la ressource comme d'une faculté interne.

Concernant la conception de ressources, les auteurs proposent :

- des modèles spécifiques de co-construction dans une ambiance de collaboration (*Aldon*) ;
- la production de ressources qui permettent la communication entre chercheurs et enseignants (*Berg*) ;
- la construction d'exercices en ligne (*Chenevotot-Quentin et al.*), d'activités sur des notions de probabilité en ligne (*Freiman et al.*), d'activités papier-crayon et technologiques en prenant en compte des aspects généraux (*Hitt et al.*) ;
- la conception et expérimentation d'une ressource pour la mise en place de situation de recherche et de preuve entre pairs (*Georget et Labrousse*) ; d'une ressource pour la numération décimale (*Tempier*) ;
- la construction d'un questionnaire d'évaluation des ressources pour les enseignants (*Trgalová et Richard*) ;
- l'étude d'obstacles linguistiques dans la conception et usage des ressources (*Sokhna et Diarra*), du rôle des incidents dans la documentation documentaire (*Sabra*) ;
- la construction d'un algorithme sur la somme de deux rationnels en écriture décimale (*Vivier*) ;

- la conception de ressources et formation des formateurs (*Abboud-Blanchard*), de ressources pour enseigner et apprendre des mathématiques avec les TICE (*LeFeuvre*) ; pour la manipulation des machines mathématiques (*Maschietto*).

Spécifiquement, dans les différents travaux, nous avons pu distinguer trois aspects de l'utilisation du mot ressource entre les auteurs :

- Ressources du type financier : liées à l'achat d'objets (ordinateurs, logiciels, manuels, etc.)
- Ressources de type externe : logiciel, plateforme d'exercices en ligne, algorithme, manuel scolaire, histoire d'une idée mathématique, programmes scolaires, questionnaire, activités avec possibilité de téléchargement, activités virtuelles pour travailler en ligne, etc.
- Ressources de type interne : ressource d'une langue, volonté de transmettre des ressources.

Les différents auteurs ont discuté prioritairement des ressources de type externe. La préoccupation des auteurs semble être dirigée vers l'amélioration des ressources pour les enseignants et pour leurs étudiants. Différentes références aux cadres théoriques ont été soulevées dans leur discussion (voir section II). Ainsi, plusieurs auteurs ont considéré la position de Gueudet et Trouche (2008) sur la notion de ressource dans un contexte de genèse documentaire. Aussi, nous trouvons des références aux travaux de Rabardel (1995) portant sur la notion d'artefact et sa transformation en instrument à travers une genèse instrumentale (Trouche 2005). C'est dans le processus de genèse documentaire que nous trouvons des références théorico-pratiques autour de la construction d'une ressource et de son évaluation. Aussi, de nouvelles notions autour des ressources sont proposées par exemple par *Sabra* :

- ressource comme « ingrédient » ;
- système de ressources : comme un ensemble des ressources ;
- incident documentaire communautaire : comme toute intégration, volontaire ou non, d'une ressource, dans le système de ressources communautaire qui modifie le cours de la documentation communautaire.

1. Éléments à considérer dans la construction d'une ressource

Selon Georget (2010), si les enseignants trouvent les ressources disponibles complexes du point de vue de leur implémentation dans la classe, la position de l'enseignant par rapport à son enseignement ne change pas. Cette position ne change pas non plus si les ressources n'ont pas une forme qui permette aux enseignants d'avoir des informations suffisantes pour les exploiter. *Hitt et al*. prônent pour les activités papier-crayon, l'intégration de l'histoire des idées mathématiques, la manipulation des objets physiques et l'utilisation de la technologie. Ces idées trouvent l'écho dans la proposition de *Maschietto* qui présente la manipulation de machines mathématiques où la formation des schèmes a une grande importance.

2. Évaluation des ressources numériques pour l'enseignement des mathématiques

Grâce à l'Internet, l'enseignant de mathématiques trouve une quantité immense d'informations. Lesquelles peut-il considérer comme ressource ? Cette question a été largement abordée dans plusieurs contributions et largement discutée au sein du groupe. Les auteurs proposent différentes approches pour sélectionner l'information qu'ils trouvent et filtrer les ressources pour l'enseignement. Par exemple, *Freiman et al.* suggèrent d'analyser les ressources informatiques du point de vue de la pertinence par rapport au programme d'étude, de l'apport d'un outil virtuel et des besoins technopédagogiques.

L'évaluation des ressources semble être une partie importante de réflexion chez différents auteurs. Par exemple, *Aldon* en citant Adler (2010) propose d'évaluer les ressources sous trois angles : visibilité, invisibilité et transparence. *Tempier* suggère d'utiliser la proposition de Tricot et al. (2003) autour de l'utilité de la ressource, de son utilisabilité et acceptabilité. *Georget et Labrousse* proposent d'expérimenter la ressource pour l'évaluer. *Sokhna et Diarra* proposent d'analyser le contenu linguistique de la ressource avant son utilisation dans la classe. Finalement, *Abboud-Blanchard* suggère l'évaluation de la ressource autour de la formation des formateurs.

Trgalová et Richard proposent d'évaluer des ressources de géométrie dynamique à travers un questionnaire en ligne, en distinguant neuf dimensions centrées sur leur qualité mathématique, didactique, pédagogique, technique et ergonomique : 1) métadonnées, 2) aspect technique, 3) dimension mathématique du contenu, 4) dimension instrumentale du contenu, 5) valeur ajoutée de la géométrie dynamique, 6) implémentation didactique, 7) implémentation pédagogique, 8) intégration dans une progression, et 9) aspect ergonomique.

3. *Quelques questionnements des participants*

Les participants à ce groupe de travail ne se questionnent pas seulement sur l'évaluation des ressources, par exemple, l'approche de *Georget et Labrousse* sur la potentialité d'une ressource fait référence à la possibilité de transformer l'information trouvée en ressource. Dans ce même sens, *Freiman et al.* interrogent :

- Comment adapter les ressources à d'autres contextes afin de maximiser leur impact sur les apprentissages des élèves ?
- Quel type d'accompagnement techno-pédagogique et didactique permet de multiplier ces pratiques innovatrices ?
- Comment poursuivre le développement de nouvelles ressources techno-pédagogiques en mathématiques et dans d'autres matières ?

IV. DISPOSITIFS DE FORMATION D'ENSEIGNANTS

Le développement professionnel des enseignants de mathématiques est naturellement au cœur de la plupart, sinon de toutes les contributions. Certaines contributions visent l'amélioration des pratiques des enseignants de mathématiques de manière générale (*Berg*, *Georget et Labrousse*, *Sokhna et Diarra*, *Vivier*, *Maschietto*), d'autres le développement de compétences spécifiques liées à des thèmes mathématiques particuliers ou à l'intégration des TICE. Concernant le développement de compétences relatives à des thèmes mathématiques spécifiques, citons par exemple l'algèbre (*Chenevotot-Quentin et al.*), les probabilités dans le contexte de jeux de hasard (*Freiman et al.*) ou encore les apprentissages fondamentaux à l'école élémentaire (*Tempier*, *Perrin-Glorian*). Concernant l'intégration des TICE dans les pratiques des enseignants, il s'agit encore soit du développement de compétences générales (*Hitt et al.*, *Abboud-Blanchard*), ou de compétences liées à un type d'outils spécifique tel que l'environnement TI-Nspire (*Aldon*), des logiciels de géométrie dynamique (*Trgalová et Richard*) ou le logiciel Casyopée (*LeFeuvre*).

Les dispositifs de formation présentés dans le groupe peuvent être regroupés dans trois catégories : (1) dispositifs de formations initiale ou continue, (2) dispositifs pour le développement de compétences spécifiques et (3) production et diffusion de ressources visant l'évolution des pratiques des enseignants. Dans la suite, nous décrivons chacun de ces types de dispositifs, présentons les principales idées sous-jacentes et les questions de recherche qu'ils soulèvent.

4. *Formations initiale et continue*

Le cadre des formations initiale ou continue a permis de questionner les besoins des enseignants en termes de ressources, d'étudier les conditions d'appropriation de ressources existantes par les enseignants ou encore de mettre en place des dispositifs de travail collaboratif des enseignants autour de la conception de ressources pour la classe.

La recherche de *Sokhna et Diarra* a mis en évidence la difficulté à s'approprier les ressources disponibles par des enseignants exerçant ou se préparant à exercer dans un contexte langagier et socioculturel différent de celui dans lequel ces ressources ont été créées. Les auteurs en arrivent à la conclusion qu'une forte contextualisation de la ressource n'en facilite pas les usages, ce qui soulève la question cruciale de la prise en compte des usages de ressources dès leur conception.

Freiman et al. ont interrogé un groupe d'enseignants, ayant participé à une formation sur l'apprentissage des probabilités en utilisant des simulateurs de jeux de hasard, sur leurs visions de l'utilité de ces outils technologiques et sur les conditions de leur intégration dans les pratiques. Pour ces enseignants, deux conditions ont paru essentielles pour intégrer ces outils dans leurs classes : (1) ils doivent être en adéquation avec le programme d'enseignement des mathématiques et (2) les enseignants ont besoin de percevoir clairement leur apport pour l'enseignement et l'apprentissage. Suite à cette étude, les auteurs interrogent les moyens d'adaptation de ressources existantes à différents contextes institutionnels, ainsi que les moyens d'accompagnement didactique, pédagogique et technique de pratiques innovantes.

En partant du constat que l'opposition entre les dimensions techniques et conceptuelles de l'activité mathématique, qui domine dans l'opinion concernant les technologies dans l'enseignement, est un des obstacles majeurs à l'intégration des TICE (Artigue 2000), *Hitt et al*. prônent la formation des enseignants à une utilisation réfléchie des technologies, notamment avec des « *activités orientées vers une approche expérimentale des mathématiques, pour promouvoir la conjecture, la nécessité de démontrer, et de générer des processus de généralisation* ». Ils soulignent également l'importance de l'équilibre entre la manipulation des objets physiques, le travail avec la technologie et l'activité papier-crayon.

Maschietto présente la mise en place d'une formation continue des enseignants basée sur la méthodologie d'un laboratoire mathématique qui consiste à faire vivre aux enseignants, dans un premier temps, une situation de découverte des machines telles que des traceurs de transformations ou de courbes et des contenus mathématiques sous-jacents, puis à les amener à concevoir des ressources autour de ces machines et à les expérimenter en classe. Une plateforme a été mise en place pour soutenir le travail collaboratif de conception de ressources et des échanges d'expériences de leur utilisation en classe par les enseignants. Cette recherche soulève des questions méthodologiques essentielles sur le suivi de l'évolution à long terme des pratiques des enseignants grâce à ce genre de dispositif. La contribution de *Sabra* propose des pistes dans cette direction.

Le dispositif de formation de formateurs proposé par *Abboud-Blanchard* est fondé sur un partenariat entre chercheurs et praticiens et s'intéresse au rôle du travail documentaire (Gueduet et Trouche 2008) dans l'intégration des TICE. Un environnement collaboratif mis en place vise à la fois à soutenir les échanges des enseignants futurs formateurs sur leurs expériences, pratiques et visions relatives à l'intégration des TICE dans l'enseignement et à aider ces enseignants à accéder aux résultats des recherches relatifs à ce domaine dans l'objectif de faire évoluer leurs propres pratiques. De nombreuses questions sont soulevées par l'auteur, d'une part sur le rôle du travail collectif dans le développement professionnel des individus et d'autre part sur le lien entre le développement professionnel des stagiaires en tant qu'enseignants mais également en tant que formateurs.

De même, *Berg* propose un dispositif de formation basé sur une collaboration entre chercheurs et enseignants. Ce dispositif est organisé en ateliers de travail permettant (1) l'exploration conjointe d'un thème mathématique donné à partir d'un choix de tâches mathématiques opéré par les chercheurs, (2) la préparation par les enseignants de tâches mathématiques pour leurs élèves, et (3) la réflexion sur la mise en œuvre de ces tâches dans les classes des enseignants. Cette recherche permet de questionner les dimensions collectives en relation à la collaboration entre chercheurs et enseignants, et les dimensions individuelles en relation au travail documentaire d'un enseignant individuel.

Notons que ce même questionnement est également présent dans la contribution de *Sabra* qui étudie la documentation communautaire d'un groupe d'enseignants réuni autour d'un projet de conception d'un manuel numérique.

5. Dispositifs pour le développement de compétences professionnelles spécifiques

Ces recherches explorent les moyens de soutenir le développement professionnel des enseignants de manière non formelle, en dehors des temps de formation nécessairement limités. Les auteurs reconnaissent tous le rôle important des ressources dans les processus de développement professionnel et cherchent à concevoir et à mettre à disposition de la communauté des enseignants des ressources visant un double objectif : (1) faciliter l'activité quotidienne des enseignants, et (2) faire évoluer leurs pratiques. Ces recherches interrogent plus particulièrement les processus d'appropriation et d'intégration de ces ressources par des enseignants et soulèvent les questions d'accompagnement et de suivi de ces processus.

LeFeuvre et son groupe, constitué de chercheurs et d'enseignants, développent un environnement dédié aux fonctions, Casyopée. Afin de faciliter l'appropriation de cet environnement par des enseignants, ils mettent en place un dispositif de soutien de ses utilisateurs grâce aux outils tels que des mini-sites présentant des expérimentations réalisées et mettant à disposition diverses ressources (fiches élèves, analyse des séances et des productions d'élèves…) ou des vidéos permettant de mieux cerner le travail des élèves et de l'enseignant avec l'environnement.

Chenevotot et al. cherchent à disséminer des résultats de recherche sur le diagnostic en algèbre élémentaire en les implémentant dans une base d'exercices en ligne, LaboMep de Sésamath, afin de fournir aux enseignants des outils pour gérer l'hétérogénéité des apprentissages des élèves et pour organiser la différenciation de l'enseignement en fonction des besoins des élèves.

En partant de l'hypothèse que l'appropriation d'une ressource par l'enseignant passe par son analyse approfondie, *Trgalova et Richard* explorent l'idée de l'implication des enseignants dans l'analyse de ressources de géométrie dynamique (GD) comme un moyen de leur développement professionnel visant l'intégration de logiciels de GD. Cette analyse s'appuie sur un questionnaire, implémenté sur la plateforme i2geo.net dédiée aux usages de la GD, qui a été conçu en s'appuyant sur des recherches relatives à la qualité des ressources et aux usages de la GD dans des classes de mathématiques. Les résultats de cette recherche montrent la complexité de la tâche de l'analyse des ressources cadrée par le questionnaire du fait de l'imbrication de deux processus : genèse instrumentale relative au questionnaire considéré comme artefact et genèse documentaire relative aux ressources analysées.

6. Conception et diffusion de ressources visant l'évolution des pratiques des enseignants

Une dernière série de contributions présente des recherches visant la production et la diffusion de ressources dans le but de susciter des réflexions menant à une évolution des pratiques des enseignants. Ces recherches partagent deux aspects fondamentaux. D'une part, elles s'attachent à proposer un modèle de ressources dans le souci d'en faciliter l'appropriation et garantir l'adaptabilité. D'autre part, elles reposent sur le principe de conception dans l'usage nécessitant une collaboration étroite entre chercheurs et praticiens. Les questions soulevées par ces recherches concernent notamment les moyens de diffusion des ressources, de suivi de leurs usages et d'accompagnement des processus de leur appropriation.

La contribution d'*Aldon* présente le processus de conception de ressources permettant d'intégrer dans des classes de mathématiques du lycée un environnement informatisé d'apprentissage, TI-Nspire. En s'appuyant sur une analyse didactique, l'auteur considère les éléments suivants comme des composantes essentielles d'une ressource : fichier élève combiné avec fichier technique, fiche professeur, scénario testé en classe et pistes pour faire évoluer et modifier la situation mathématique proposée.

Georget et Labrousse développent et expérimentent une ressource permettant la mise en place de situations de recherche et de preuve entre pairs à l'école élémentaire. Ils s'attachent à en analyser les potentiels de recherche, de résistance, de débat ainsi que le potentiel didactique et ils proposent un modèle de ressource comprenant une description rapide du contenu, la solution du problème et des procédures envisageables, des pistes pour une mise en œuvre, des exemples d'énoncés pour les élèves et des conseils pédagogiques pour l'enseignant.

Les recherches de *Tempier* et *Perrin-Glorian* ont pour objectif de produire des ressources pour soutenir l'enseignement des contenus fondamentaux de l'école élémentaire, tels que la numération, les nombres ou la géométrie. Le défi pour eux consiste à produire des ressources qui sont à la fois compatibles avec les programmes et les pratiques ordinaires des enseignants pour qu'ils les y intègrent mais qui, en même temps, amènent des éléments de réflexion et de questionnement pour faire évoluer leurs pratiques.

V. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Les différentes contributions au GT6 ont fait émerger les principaux cadres théoriques utilisés pour aborder les questions de recherche liées aux ressources et le développement professionnel des enseignants (voir aussi Tableau 1). Il s'agit de l'approche instrumentale et documentaire développées spécifiquement pour conceptualiser et analyser le travail des sujets avec des artefacts ou des ressources ; des concepts de communauté de pratique ou de communauté d'*inquiry*, permettant d'appréhender les phénomènes liés aux activités des collectifs ; de la théorie de l'activité qui permet d'étudier l'activité des sujets dans un contexte plus large incluant d'autres acteurs de l'activité et des artefacts ; de la théorie des situations didactiques et la théorie anthropologique du didactique permettant d'étudier les situations proposées par les ressources, leur mise en œuvre en classe et leur adéquation vis-à-vis des besoins institutionnels ; de l'ingénierie didactique de développement (Perrin-Glorian 2011) permettant de traiter des questions liées à l'élaboration de ressources. Devant cette multitude d'approches théoriques, les participants ont exprimé le besoin d'interroger leur portée et leurs limites et notamment de travailler dans la direction de leurs possibles articulations (par exemple, approche documentaire du milieu) et de leur développement (par exemple notion de distance documentaire).

Les ressources évoquées dans les contributions sont de nature diverse, aussi bien interne et externe, tant en ce qui concerne les élèves comme les enseignants. Les ressources internes ont été évoquées par rapport à leur développement dans la classe de mathématiques. Les ressources externes ont été liées à la technologie ou à la construction des artefacts pour appuyer l'apprentissage. Le développement des ressources internes chez les élèves a une longue histoire, en revanche le développement de ce type de ressources chez les enseignants est plus récent. Les discussions au sein du groupe ont montré un intérêt croissant pour les ressources à destination des enseignants qui commencent à être perçues comme de véritables leviers du développement professionnel. De nombreuses questions restent ouvertes et demandent la poursuite des recherches dans ces directions : Quelles ressources pour quel milieu ? Comment concevoir les ressources qui sont proches des pratiques ordinaires des enseignants de manière à en faciliter leurs usages, mais qui apportent suffisamment d'éléments pour susciter le questionnement et la réflexion de la part des enseignants sur leurs propres pratiques ? Quels sont les éléments des ressources qui en favorisent l'appropriation ? Quelles sont les conditions pour leur diffusion et leur intégration dans les pratiques enseignantes ?

Enfin, divers dispositifs de formation d'enseignants, formelle ou non formelle, ont été présentés et discutés. Ces présentations ont permis d'interroger notamment l'intérêt d'un travail collaboratif des enseignants ou d'une collaboration entre enseignants, formateurs et/ou chercheurs autour de la conception et l'usage de ressources pour la classe. Les participants ont exprimé le besoin de pouvoir suivre l'évolution de ces dispositifs afin de pouvoir mettre en lumière leur impact sur l'évolution des compétences professionnelles des enseignants, mais aussi sur les apprentissages des élèves, destinataires finaux des ressources. Ceci nécessite la mise en place de méthodologies spécifiques permettant un suivi des pratiques à long terme. Echanger sur les approches méthodologiques existantes semble indispensable pour faire avancer les recherches dans cette direction. La reconduite de ce groupe de travail lors de la prochaine édition du colloque EMF ne fait donc aucun doute chez les participants du groupe !

REFERENCES

Artigue M. (2000) Instrumentation issues and the integration of computer technologies into secondary mathematics teaching. In *Proceedings of the Annual Meeting of GDM* (pp. 7-17). Potsdam, Germany. http://webdoc.sub.gwdg.de/ebook/e/gdm/2000, consulté le 19 avril 2012.

Artigue M., Bartolini-Bussi M., Dreyfus T., Gray E., Prediger S. (2006) Different theoretical perspectives and approaches in research in mathematics education. In Bosch M. (Ed.) (pp. 1239-1243) *Proceedings of the 4th Congress of the European society for Research in Mathematics Education* Barcelona : Fundemi IQS.

Brousseau G. (1998) *Théorie des Situations Didactiques*. Grenoble : La pensée sauvage.

Chevallard Y. (1998) Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. In *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques, Actes de la IX^e Ecole d'Eté de la Rochelle* (pp. 91-120). IREM de Clermont-Ferrand.

Engeström Y. (1999) Activity theory and individual and social transformation. In Engeström Y., Miettinen R., Punamäki R.-L. (Eds.) (pp. 19-39) *Perspectives on Activity Theory. Learning in Doing: Social, Cognitive et Computational Perspectives* New York: Cambridge University Press.

Georget J.-P. (2010) Apport de l'ergonomie des EIAH pour l'analyse et la conception de ressources. In Kuzniak A., Sokhna M. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et développement : enjeux de société et de formation. Actes du colloque international de* *l'Espace Mathématique Francophone 2009*. http://fastef.ucad.sn/EMF2009/Groupes%20de%20travail/GT6/georget.pdf, consulté le 29 novembre 2011.

Gueudet G., Trouche L. (2008) Du travail documentaire des enseignants : genèses, collectifs, communautés. Le cas des mathématiques. *Education et didactique* 2(3), 7-33.

Hitt F., Maschietto M., Trgalová J., Sokhna M. (2011) *Ressources et développement professionnel des enseignants*. Texte introductif du Groupe de Travail n°6, Colloque international de l'Espace Mathématique Francophone (3-7 février 2012), Genève. http://www.emf2012.unige.ch/index.php?option=com_contentetview=article&id=36, consulté le 19 avril 2012

Hoyles C., Lagrange J.-B. (Eds.) (2010) *Mathematical Education and Technology-Rethinking the Terrain*. The 17th ICMI Study, New ICMI Study Series, Vol. 13. New-York : Springer.

Jaworski B. (2005) Learning communities in mathematics: Developing and studying inquiry communities. In Barwell R., Noyes A. (Eds.) (pp. 101-120). *Papers of the British Society for Research into Learning Mathematics*, *Research in Mathematics Education,* Vol. 7 London: BSRLM.

Perrin-Glorian M.-J. (2011) L'ingénierie didactique à l'interface de la recherche avec l'enseignement. In Margolinas C.et al. (Eds.) (pp. 57-78) *En amont et en aval des ingénieries didactiques*. Grenoble : La pensée sauvage.

Prediger S., Bikner-Ahsbahs A., Arzarello F. (2008) Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: First steps towards a conceptual framework. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education* 40, 165-178.

Rabardel P. (1995) *Les hommes et les technologies : Approche cognitive des instruments contemporains*. Paris :Armand Colin.

Trouche L. (2005) Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques : nécessité des orchestrations. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 25(1), 91-138.

Wenger E. (1998) *Communities of practice: Learning, meaning and identity*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

CONTRIBUTIONS AU GT6

ALDON G. – Conception collaborative de ressources : l'expérience e-Colab.

BERG C. V. – L'impact d'un projet de recherche sur le développement professionnel d'un enseignant : exploration de la notion de fonction.

CHENEVOTOT-QUENTIN F., GRUGEON-ALLYS B., PILET J., DELOZANNE E. – De la conception à l'usage d'un diagnostic dans une base d'exercices en ligne.

FREIMAN V., SAVARD A., LAROSE F., THEIS L. – Les simulateurs virtuels pour soutenir l'apprentissage de probabilités : un outil pour les enseignants.

GEORGET J.-P., LABROUSSE B. – Expérimentation d'une ressource pour une situation de recherche et de preuve entre pairs.

HITT F., CORTES-ZAVALA C., RINFRET M. – Utilisation des technologies dans la classe de mathématiques au secondaire : des outils sous-exploités.

SABRA H. – Le rôle d'un incident dans la documentation communautaire : (le) cas de la conception des ressources « fonctions » pour le manuel numérique de Sésamath.

SOKHNA M., DIARRA B. – Les obstacles linguistiques à la conception et à l'usage des ressources dans l'enseignement des mathématiques.

TEMPIER F. – Quelle ressource pour enseigner la numération décimale ? Présentation d'une ingénierie didactique de développement en cours.

TRGALOVA J., RICHARD R. P. – Analyse de ressources comme moyen de développement professionnel des enseignants.

VIVIER L. – Construction d'une ressource pour l'enseignant : un algorithme de somme de deux rationnels en écriture décimale.

Affiches (publiées sous forme de textes courts)

ABBOUD-BLANCHARD M. – En quoi la conception de ressources pourrait-elle intervenir dans la formation des formateurs ?

LE FEUVRE B. – Enseigner et apprendre des mathématiques avec les TICE, le cas des fonctions au lycée avec Casyopée.

MASCHIETTO M. – Les machines mathématiques comme ressources : de la formation à la classe.

PERRIN-GLORIAN M.-J. – Produire des ressources pour les enseignants à l'articulation école-collège.

CONCEPTION COLLABORATIVE DE RESSOURCES : L'EXPERIENCE E-COLAB

Gilles ALDON*

Résumé – La théorie des situations didactiques et plus particulièrement la notion de milieu couplé à l'approche instrumentale et documentaire fournit des outils d'analyses puissants pour penser, créer et partager des ressources dans un environnement technologique. En partant de l'exemple du travail e-CoLab et des observations de classes, cet article propose de montrer en quoi ces analyses sont des éléments prépondérants de la création et de la mise en œuvre d'un modèle de ressources en vue d'une diffusion auprès des enseignants de mathématiques.

Mots-clefs : Approche documentaire, théorie des situations didactiques, analyse, conception collaborative, observation de classes

Abstract – The Theory of Didactical Situations and particularly the concept of « milieu », when crossed with instrumental and documentational approaches gives powerful tools to think, to create and to share resources in a technological environment. Starting from the work of the e-CoLab team, this paper aims to show how theses analyses are predominant in order to create a model of resources with a view to disseminate to mathematics teachers.

Keywords: Documentational approach, theory of didactical situations, analysis, collaborative design, class observations

I. INTRODUCTION

Depuis plusieurs années l'équipe e-CoLab[1] travaille à la conception, l'analyse et la mise en œuvre de ressources permettant d'intégrer dans le cours de mathématiques du lycée un environnement informatisé d'apprentissage[2].

Les caractéristiques de cet environnement en font un outil :

- Qui peut être exploité indifféremment sur une calculatrice ou sur un ordinateur, les deux types de supports pouvant être interconnectés facilement, ce qui permet des jeux multiples entre des configurations nomades et des configurations fixes. On retrouve alors, sur la calculatrice, les fonctionnalités de base d'un ordinateur, c'est-à-dire une structure de gestion de fichiers. On a donc là une technologie bien adaptée aux questions actuelles, centrées sur les ressources et leur conception collaborative.
- Qui intègre la majeure partie des logiciels de mathématiques utilisés dans la classe de mathématiques (géométrie dynamique, tableur, grapheur, calcul formel et approché). Toutes ces applications communiquent entre elles ce qui facilite la multi-représentation des objets mathématiques.

Les travaux de l'équipe, composée de chercheurs, de formateurs et d'enseignants, ont déjà débouché sur la rédaction de trois ouvrages d'une même collection Hachette Education : « Mathématiques dynamiques en... » pour les classes de seconde, première et terminale. Ces réalisations sont le résultat d'un travail collaboratif entre professeurs et chercheurs de construction de situations de classe, alliant des analyses *a priori*, des expérimentations croisées dans les classes et les mises en perspective des résultats des observations.

La question mise à l'étude dans cet article peut se formuler de la manière suivante :

* Ifé, S2HEP (EA 4148) Université Claude Bernard Lyon 1 et Ecole Normale Supérieure de Lyon – France – gilles.aldon@ens-lyon.fr

[1] Expérimentation collaborative de laboratoires mathématiques

[2] TI-Nspire™ de la société Texas Instruments

© Aldon G. (2012) Conception collaborative de ressources : l'expérience e-CoLab. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT6, pp. 784–798). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

Comment les analyses didactiques participent à la construction collaborative de ressources ?

Pour tenter d'apporter des éléments de réponse à cette question, l'article, après une présentation des cadres théoriques et du contexte de la recherche s'appuiera sur une double analyse d'une situation de classe pour dégager les éléments clefs conduisant à la construction d'un modèle de ressources.

II. CADRE THEORIQUE

Que ce soit pour (Piaget 1967) ou pour (Vygotsky 1934), les théories de l'apprentissage insistent sur le rôle des interactions dans les processus d'apprentissage. Il est maintenant assez établi que ces interactions ne se limitent pas aux interactions dans la classe mais se modélisent plus profondément en utilisant des cadres de pensée qui permettent de prendre en compte l'environnement tout entier des acteurs, connaissances et conceptions y compris.

Le cadre choisi permettant de comprendre, d'expliquer et de modéliser le « jeu » d'enseignement et d'apprentissage est celui de la Théorie des Situations Didactiques (TSD) (Brousseau 2004) ; il est suffisamment précis pour décrire et rendre compte de la complexité des interactions qui se nouent entre élèves et professeurs dans un temps long. Plus particulièrement, la notion de *milieu* donne un cadre permettant de prendre en compte à la fois le point de vue du professeur et celui des élèves. Dans cette théorie de l'enseignement et de l'apprentissage, Brousseau définit une situation comme

> l'ensemble des circonstances dans lesquelles se trouve l'élève, les relations qui l'unissent à son milieu, l'ensemble des données qui caractérisent une action ou une évolution. (Brousseau 1986, p. 155)

L'enseignement est alors un projet social qui vise à la modification du système de connaissances d'un ou de plusieurs individus dans un environnement donné. La modélisation d'une situation d'enseignement conduit à décrire les relations existantes entre les différents systèmes en jeu dans la production d'un savoir visé. Une situation peut se caractériser par l'ensemble des rôles des actants et de leurs relations avec le milieu dans une institution donnée. L'hypothèse fondamentale d'apprentissage piagetienne est alors que le sujet apprend en s'adaptant à un milieu que Brousseau définit comme :

> Le milieu est le système antagoniste du système enseigné, ou plutôt, précédemment enseigné. (Ibid., p. 340)

Le rôle du maître dans l'organisation et la présentation du milieu est important et conduit à penser le milieu en fonction des postures des sujets ce qui conduit à proposer une structure de ce milieu. Initié par Brousseau, il a été affiné et complété par de nombreux travaux, dont (Margolinas 1998, 2004), (Perrin-Glorian et Hersant 2003). Le tableau 1, page suivante, donne une illustration de cette structuration, tableau qu'il s'agit de lire avec le milieu de niveau n comme situation de niveau n-1 : $M_n=S_{n-1}$, la situation S étant constituée des rapports existants entre M, E et P. Les niveaux positifs sont qualifiés de situations sur-didactiques, et les niveaux négatifs, de situations a-didactiques.

L'analyse d'une situation partant de la situation S+3 pour aller de plus en plus profondément dans la structure des milieux est nommée *analyse descendante*, c'est, en quelque sorte une analyse prenant le point de vue du professeur. Au contraire, partir de la situation S-3 pour « remonter » dans cette structure sera nommée *analyse ascendante* et prendra le point de vue de l'élève.

Parallèlement, l'ergonomie cognitive (Mumford 1983 ; Sperandio 1984 ; puis Rabardel 1995) permet d'interroger les interactions entre les acteurs en posant le regard sur l'activité de chacun. Les artefacts sont des éléments médiateurs de l'activité et sont transformés par l'activité en même temps qu'ils s'insèrent dans une pratique sociale.

Niveau	E	P	Situation	Milieux
M+3 M-Construction		P-noosphérien P+3	S+3 : Situation noosphérienne	Niveaux sur-didactiques
M+2 : M-projet		P-constructeur P+2	S+2 : Situation de construction	
M+1 : M-Didactique	E+1 : E-réflexif	P+1 : P-projeteur	S+1 : Situation de projet	
M0 : M-Apprentissage	E0 : Elève	P0 : Professeur	S0 : Situation didactique	
M-1 : M-Référence	E-1 : E-apprenant	P-1 : P-Observateur	S-1 : Situation d'apprentissage	Niveaux sous-didactiques
M-2 : M-Objectif	E-2 : E-agissant		S-2 : Situation de référence	
M-3 : M-Matériel	E-3 : E-objectif		S-3 : Situation objective	

***Tableau 1** – La structuration des milieux selon (Margolinas 2004)*

Cette médiation incite à étudier les artefacts non pas seulement à partir de leurs propriétés mais surtout depuis le statut que les sujets leur attribuent, et construisent au cours de leur activité pour le transformer progressivement dans un long cheminement dans un *instrument* (Trouche 2005). Un instrument est alors défini comme un artefact auquel est associé des schèmes d'utilisation. Le processus d'instrumentation concerne l'émergence, le développement et l'affinement de schèmes d'utilisation de l'artefact à des fins précises. Celui d'instrumentalisation est relatif aux transformations et au développement de l'artefact par le sujet. L'importance de la documentation pour le travail du professeur a conduit (Gueudet et Trouche 2008) à prolonger l'approche instrumentale. Considérant les ressources disponibles comme des artefacts, dont le fonctionnement dépend du contexte d'utilisation dans une pratique contextualisée, Adler (2010) propose d'utiliser les concepts de visibilité, invisibilité et transparence pour aborder le rôle des ressources dans la complexité de l'enseignement. Une ressource sera dite *visible* si « l'attention des élèves, du professeur, est centrée sur cette ressource », avec le risque de cacher derrière l'utilisation de cette ressource les concepts mathématiques en jeu, *invisible* lorsque la ressource, bien que présente et potentiellement utilisable, est ignorée dans le contexte de la classe et *transparente* lorsque les potentialités de la ressource sont utilisées en respectant les objectifs d'apprentissage. L'approche documentaire modélise les interactions des sujets avec les ressources à leur disposition, le mot *ressource* étant entendu dans un sens large,

> un manuel scolaire, les programmes scolaires, un logiciel dédié à l'enseignement, sont, bien entendu des ressources ; [...] une copie d'élève, les interactions dans la classe, un conseil donné par un collègue, constituent également des ressources pour le professeur. (Gueudet et Trouche 2008)

Le professeur intègre ces ressources dans son milieu de construction, et construit dans *le travail documentaire*, ses documents reliés à une classe de situations. Le processus de transformation des ressources en document, la *genèse documentaire* est tout comme la genèse instrumentale le résultat d'un double mouvement, du sujet vers les ressources (l'intrumentalisation) et des ressources vers le sujet (l'instrumentation). L'instrumentalisation apparaît alors comme le façonnage, la mise en forme d'un ensemble de ressources pour les propres usages du sujet, l'instrumentation modifiant les usages du sujet. A un instant donné, le document est alors le résultat des ressources prises en main et d'un schème d'utilisation dans un contexte donné. Le processus ne se termine pas, puisque les documents ainsi constitué peuvent être considérés comme de nouvelles ressources. Dans une position de P-projeteur dans une situation de projet, le milieu du professeur peut être considéré comme l'ensemble de ses ressources. Les ressources utilisées par les enseignants sont des éléments de structuration de leurs actions dans la classe et le processus de genèse documentaire relie une « instrumentalisation » de ces ressources aux conceptions des enseignants vis à vis à la fois des mathématiques et de leur profession. Parallèlement, dans leurs apprentissages, les élèves se construisent et utilisent des ressources. Une situation presque symétrique peut alors être modélisée. Le milieu objectif des élèves contient leurs ressources. Il est, dans une situation didactique, augmenté des éléments apportés par le professeur qui peuvent venir en contradiction ou en accompagnement des ressources des élèves.

Les deux regards, didactique et ergonomique s'articulent pour prendre en compte les évolutions dans le temps de la position des ressources numériques dans la structure des milieux parallèlement à la transformation des artefacts en instruments et en documents pour l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques.

III. CONTEXTE

1. *Le projet e-CoLab*

Depuis 2006, trois équipes travaillant dans les IREM de Paris 7, Montpellier et Lyon et dont j'ai assuré la coordination pour l'INRP, sont composées de professeurs de lycée, de chercheurs et de formateurs. Ils ont travaillé collaborativement à la construction, l'analyse et la mise en œuvre de ressources pour les enseignants de mathématiques s'appuyant sur la notion de laboratoire mathématique (Maschietto et Trouche 2010). La réflexion sur les registres de représentations sémiotiques (Duval 1993) et les apports des multireprésentations (Arzarello et Robutti 2010) pour l'apprentissage des mathématiques a conduit cette équipe à s'intéresser à la technologie TI-Nspire, et à construire des activités intégrant ces potentialités. Dans le cadre d'un partenariat avec la société Texas Instruments, et dès le début du projet, les classes des enseignants ont été équipées de calculatrices, depuis son état de prototype non encore commercialisé jusqu'à aujourd'hui où la version 3 du logiciel est disponible. Le travail de l'équipe a participé au *modelage social de la technologie* (MacKenzie et Wajcman 1985), (Williams et Edge 1996) en confrontant les avancées techniques à la réalité de la classe et en renvoyant au constructeur des remarques issues de la pratique permettant de faire évoluer la technologie. Les travaux de cette équipe se situent dans une thématique qui questionne les processus par lesquels les professeurs s'approprient, modifient et conçoivent des ressources pour leur enseignement et les élèves utilisent, complètent ces ressources pour leurs apprentissages dans le contexte particulier d'utilisation de cette technologie.

On retrouve dans ce projet les deux aspects de la recherche évoquée dans le paragraphe précédent, de mise à l'épreuve de cadres théoriques et de confrontation à la contingence d'une part et le développement de ressources s'appuyant sur des situations mathématiques permettant de proposer des situations didactiques fécondes, d'autre part. Ainsi, dans le projet e-CoLab, la recherche a construit un modèle de document facilitant la construction et l'analyse coopératives de situations de classes utilisant la technologie (Aldon 2008) et d'autre part la réalisation effective de documents pour la classe (Aldon et al. 2009, 2010, 2011). Les questions de recherche ont amené :

- À comparer le nouvel environnement technologique (TI-Nspire™) avec les environnements antérieurement étudiés : quelles en sont les nouvelles potentialités et les nouvelles contraintes, avec quels effets sur les apprentissages des élèves et le travail des enseignants ? En quoi répond-il aux problèmes identifiés dans les travaux antérieurs ? Quelles sont aussi ses limites et quelles suggestions d'amélioration peut-on faire le concernant ?
- À tester les ressources antérieurement réalisées dans ce nouvel environnement.
- À identifier les adaptations et enrichissements nécessaires et possibles.
- À penser la conception de nouvelles ressources permettant notamment de prendre en compte les genèses instrumentales c'est-à- dire les processus via lesquels les artefacts deviennent des instruments du travail mathématique des élèves (Guin et Trouche 2002) dans la durée.
- À tester la viabilité de dispositifs de conception de ressources numériques dans ce nouveau contexte et à en penser des évolutions adaptées.
- À étudier, enfin les propriétés documentaires des technologies (Aldon 2010).

IV. UNE SITUATION, DEUX ANALYSES

La situation analysée ci-dessous se déroule dans une classe de Terminale S, dans une salle informatique avec des ordinateurs équipés du logiciel TI-Nspire™. Les quatre pages de l'énoncé proposé aux élèves sont reproduites en annexe. Les deux analyses descendantes et ascendantes sont directement liées à la structuration des milieux présentée dans le paragraphe « cadre théorique ». La genèse documentaire apparaît comme essentielle à deux niveaux :

- D'une part, pour comprendre et préciser la place de l'artefact utilisé dans le système de ressources des élèves et du professeur, en lien avec la construction d'un milieu matériel de la situation par le professeur et aux apprentissages mathématiques des élèves dans la situation d'apprentissage.
- D'autre part, pour comprendre et analyser les éléments de la ressource facilitant ou retardant les apprentissages dans une perspective de construction et de diffusion dans des contextes différents et conduisant à la construction d'un modèle de ressources.

1. Analyse descendante

La situation noosphérienne relève ici de la position du professeur dans l'expérimentation. Volontaire pour accepter d'enseigner dans une classe dont tous les élèves sont équipés de la calculatrice, ce professeur accepte de plus l'intrusion d'un chercheur dans sa classe, alors que, de ses propres dires, elle n'est pas à l'aise avec la technologie. Elle prépare, par ailleurs ses élèves à l'épreuve expérimentale de mathématiques[3]. Dans ce cas, la situation S+3 du professeur peut être décrite comme :

P+3 cherche à entrainer ses élèves pour l'épreuve expérimentale de mathématiques (EPM). Elle souhaite donc que les élèves utilisent dans une situation d'autonomie le logiciel sans pour autant perdre de vue le nécessaire entraînement au programme de mathématiques de Terminale S.

[3] Durant l'année de cette expérimentation, l'épreuve pratique expérimentale avait été généralisée et le lycée participait à sa mise en place.

La situation de construction prend en compte la contradiction entre la volonté de laisser une autonomie aux élèves et le désir de faire en sorte que les élèves ne passent pas tout le temps sur le logiciel mais arrive dans l'heure à aborder ce que ce professeur appelle la partie théorique[4].

Dans cette situation S+2, *P+2 construit une succession de questions permettant, un peu à la manière d'un tutoriel d'avancer dans la réalisation de la figure pour faire apparaître la conjecture souhaitée et pour permettre aux élèves d'arriver à la question de la démonstration de la conjecture*.

La situation de projet met en œuvre cette construction en insérant les choix didactiques à la fois concernant la volonté de faire apprendre aux élèves le fonctionnement du logiciel et de mener à bien la résolution du problème mathématique.

La présentation du TP commence par un énoncé de type mathématique introduisant les objets en jeu : deux points A et B, le cercle trigonométrique C, un point M de ce cercle et l'application de C dans qu'il s'agira d'étudier. Cette partie a été photocopiée sur un manuel.

Le titre encadré : réalisation de la figure et conjectures met en jeu à la fois les mathématiques (conjectures) et l'utilisation de l'instrument (réalisation de la figure) ; en revanche, dès la première consigne, le choix de l'outil technique est imposé :

Ouvrir un classeur. Graphiques et géométrie

Les différentes étapes de l'énoncé montrent bien cette alternance entre des explications et des questions mathématiques et des conseils et des constructions avec le logiciel.

Il est également intéressant de noter que le but du TP apparaît seulement au bas de la première page après un ensemble de consignes facilitant la construction de la figure initiale : l'étude des variations de f en fonction de l'angle α dans un type mathématique suivi d'une remarque de type instrumentale sur les capacités du logiciel à ne mesurer que des angles géométriques, remarque illustrée de deux dessins faisant apparaître dans deux positions du point M la valeur positive en radian de l'angle. Dans le langage mathématique, la différence entre angle géométrique et angle orienté est expliquée pour justifier la manipulation instrumentale demandée et partant du constat que le logiciel ne sait pas gérer les mesures des angles orientés, le professeur fait construire la mesure de l'angle orientée à partir du signe de l'ordonnée du point du cercle trigonométrique et de la mesure de l'angle géométrique. Les explications sont d'abord d'ordre mathématiques (lorsque α appartient à l'intervalle $]-\pi;\pi]$, les signes de et de α sont les mêmes) puis d'ordre technique : comment faire calculer une formule au logiciel ?

Dans la situation S+1, *P+1 choisit d'intégrer les questions mathématiques dans les questions d'ordre technologique*.

La situation didactique S0 va mettre en œuvre les choix didactiques locaux : permettre un travail en autonomie et un apprentissage des fonctionnalités du logiciel en gardant un contenu mathématique consistant. La façon dont P0 place la situation montre cette double volonté contradictoire d'autonomie et de guidage tutoriel :

> Bon, ouvrez l'ordinateur et regardez si ça marche. Allez… (brouhaha) ; le professeur navigue dans la classe, et intervient auprès des élèves :
> A tu vas maintenant te mettre là… Les écrans, ils marchent ou pas ? C'est la séance cinéma aujourd'hui.
> J. tu te mets à côté d'A… Ça y est, ça marche. Bon alors on commence à… page 1, 2, 3, 4… Alors vous allumez l'écran, s'il vous plait, rapidement… Ça marche ou pas ? Oui, ça marche… Allez !

---

[4] En référence, d'ailleurs au modèle d'épreuves déjà expérimentées de l'EPM.

> Donc on commence par la page 1… d'accord ! C'est numéroté page 1, 2, 3, 4…Allez, c'est parti… Je vous guide pas mal, là. Ça vous permet de vous réapproprier certains trucs, certains menus.
> Bon alors, c'est validé… maintenant pointeur, tu te mets sur les coordonnées… là, voilà, pointeur, coordonnées, vas y ! Voilà, non tu sélect… tu… enter, voilà !

L'organisation de la salle de classe et l'attitude de P0, dès l'entrée montre que l'utilisation du logiciel est d'une manière contrainte par les conditions extérieures, et que l'objectif mathématique (théorique dit le professeur) est d'une plus grande importance. Dans cette brève introduction, on entend : *vous allumez l'écran, s'il vous plait, rapidement*, *séance cinéma aujourd'hui Je vous guide pas mal, là*, *réapproprier certains trucs, certains menus* ; autant de positions visant à accélérer les manipulations *pratiques*.

P0 cherche à faire en sorte que les élèves s'appuient sur la dimension expérimentale du TP pour les faire arriver rapidement vers une construction théorique.

La position dans la situation S-1 du professeur est alors toute tracée : P-1 cherche à faire construire et expérimenter sur le logiciel dans les cadres exacts fixés par les questions du TP. La première partie est alors en dehors du contexte de l'apprentissage des mathématiques ; on verra en effet, que les interactions avec les élèves se situent dans le domaine technique.

De ce fait, P-1 observe les élèves de manière à ce qu'ils avancent quasi simultanément dans la partie expérimentale du TP.

Les allers-retours entre les positions S+3 (nécessité de laisser une autonomie aux élèves) et S-1 (volonté de faire avancer conjointement la classe) contraignent le professeur à des interventions difficilement compréhensibles par les élèves.

> E : Madame, pourquoi il met tout le temps positif alors qu'on a fait u OM ; il devrait être négatif…
> P : Et ouais, alors, là tu regardes, je t'explique ça ; tu vois le problème c'est que des angles géométriques, tu vois, alors justement, tu vois, je t'ai donné un exemple, là ; alors essaye de voir un peu l'astuce pour essayer de mettre le signe…Donc je vous explique un petit peu…Donc, vous m'expliquez pourquoi, il propose cette solution…Non, non, mais…Vous lisez le haut de la page et vous essayez de voir si vous êtes d'accord ou pas.
> E : Oui, ici on peut bien faire de ce côté…
> P : oui de 0 à 2π. C'est ça que tu veux faire ?
> E : c'est la même chose.
> P : oui, oui, bien sûr.
> E : bon, ben c'est bon.
> P : Mais pour la deuxième question, qu'est ce qu'il suffit de montrer simplement ?

Dans cet extrait, les différents niveaux de langages apparaissent : la question posée par l'élève est d'ordre technique (le logiciel ne fait pas ce que cette élève souhaite). Le professeur répond en renvoyant aux explications données sur les fiches (page 2 et 3 figure 1) ; l'élève reprend alors sur une question d'ordre mathématique (est-il équivalent de faire varier la mesure de l'angle entre 0 et 2π ou entre $-\pi$ et π ?) ; du coup les explications de l'énoncé n'ont plus de sens. Le professeur passe alors à autre chose sans que l'incident ne soit réglé. Dans cet extrait E-2 dans une situation S-2 ne rencontre pas P-2.

2. *Analyse ascendante*

Cette analyse permet de construire le point de vue de l'élève pris au sens générique en se détachant des intentions du professeur. Le problème engendre une situation pour l'élève qu'il s'agit d'abord de comprendre puis de confronter à la réalité d'un ou de plusieurs élèves.

Dans la situation objective (S-3), E-3 est confronté au milieu matériel. Le fait que l'élève se place dans la position E-3 est un effet de contrat : le TP prépare à l'épreuve expérimentale de mathématiques, je dois m'y conformer.

L'énoncé, par son titre place d'emblée dans le milieu matériel M-3 le domaine des nombres complexes et le domaine des fonctions[5], et la position dans la salle informatique de la séance met l'ordinateur comme outil matériel utile à la résolution du problème. Les connaissances de géométrie élémentaire et d'analyse font implicitement partie du milieu matériel.

Dans la situation de référence (S-2) le milieu objectif (M-2) est constitué des interactions sujet-milieu de la situation S-3. Ici, les interactions de E-2 avec le logiciel sont des éléments du milieu objectif ; en particulier, les rétroactions du logiciel font partie intégrante de ce milieu et détermine la position de l'élève dans les situations objective ou de référence. Dans cette situation d'action, E-2 construit l'expérience sur les objets naturalisés présents dans la situation objective : objets de la géométrie élémentaire et leurs représentations dans un registre de représentation spécifique imposé par l'usage de l'application.

Dans cette position, E-2 est dans une position d'expérimentateur proposant des expériences sur des objets mathématiques qui sont représentés dans un environnement dynamique.

La situation d'apprentissage (S-1) place E-1 dans un rôle d'interprétation et de formulation des résultats des expériences réalisées. Les rétroactions du milieu M-1 (le milieu de référence) vont rentrer en résonance ou en conflit avec les connaissances mathématiques des objets manipulés et avec les observations des représentations des objets. C'est aussi dans cette situation que les validations permettront de construire des connaissances nouvelles tant du point de vue technologique que mathématique :

- Faire calculer une expression en fonction des grandeurs variables construites.
- Relier les résultats numériques aux positions des objets dans le plan complexe.
- Construire sur ces liens une relation fonctionnelle de P dans R.
- Interpréter sa restriction au cercle trigonométrique comme une fonction de R dans R.

Le professeur dans la position P-1 observe les interactions de E-1 et de M-2. Lorsque les élèves l'interpellent et le questionnent, il peut ou non changer de position. Dans tous les cas il est un élément du milieu M-1 en interagissant avec E-1.

Dans la situation didactique (S0) se joue la rencontre entre les intentions du professeur et les apprentissages des élèves. Dans le milieu M0, les expériences ont été réalisées et E0 rend compte des constats qui peuvent être faits. Le professeur dans la position P0 relie les résultats des expériences et les connaissances visées. Il n'y a pas de chronologie entre les positions des acteurs dans les différentes situations, et dans cette première observation, on peut voir les positions des acteurs changer en fonction des interactions. L'analyse des incidents et des perturbations montre bien ces changements de position dans la structure du milieu.

Dans la situation S+1, l'élève revient sur les apprentissages et analyse les difficultés rencontrées en croisant les intentions du professeur et ses propres apprentissages : dans ce cas, E+1 peut interroger la méthode générale de l'expérience proposée. M+1 portant à la fois les techniques mise en œuvre pour traiter le sujet mais aussi la méthode reproductible de l'expérience : à partir d'une figure de géométrie, définir des variables à partir de grandeurs mesurées, stocker des valeurs de variables dans des listes, représenter le nuage de points dans un système d'axes et conjecturer les extrema.

Cette analyse de la situation permet de comprendre ce qui peut être perçu des intentions du professeur dans cette séance.

---

[5] En classe de terminale S, les problèmes d'optimisation rencontrés sont étroitement liés à la recherche des minima ou des maxima d'une fonction dérivable.

3. *Un modèle de ressources*

En partant des analyses des observations de classe, et de la volonté de transmettre des ressources, un modèle de ressource a progressivement émergé. L'intégration de la technologie au sein de l'activité mathématique était présente dès le début de l'expérimentation. Les premières ressources élaborées se sont pourtant souvent réduites soit uniquement à une fiche élève comportant l'énoncé du problème (dont la résolution sous-entendait néanmoins l'utilisation de la calculatrice), soit uniquement à un fichier informatique chargé sur les unités nomades. Les contraintes imposées dans l'équipe d'échanges et d'expérimentation en classe de ces ressources ont bien vite montré la nécessité de construire les ressources sur un modèle commun prenant en compte les potentialités de mise en relation des différentes applications de la calculatrice. Une *unité* « fiche élève - fichier calculatrice », véritable *duo* a émergé comme représentatif de l'activité conjointe mathématique et instrument.

Pour prendre en compte les analyses descendantes, des fiches professeur ont également été crées, permettant notamment aux auteurs de la ressource de préciser les objectifs de la séquence et d'étayer leurs choix pédagogiques mais aussi de proposer des pistes pour modifier la situation en fonction de la réalité des classes. De même, un scénario testé en classe est proposé permettant de projeter la situation dans une situation didactique et permettre à des enseignants d'expérimenter dans leur classe une ressource dont ils ne sont pas les auteurs. Les choix didactiques qui ont été effectués, les variables didactiques sur lesquelles on peut « jouer », les réponses attendues des élèves, les difficultés à prévoir, les différentes étapes du déroulement de l'activité font partie de ce scenario.

Enfin, pour prendre en compte les genèses documentaires des professeurs et des élèves, la ressource propose des pistes pour faire évoluer et modifier la situation en intégrant éventuellement d'autres artefacts susceptibles de devenir instruments, et de participer à la construction du système de ressources des élèves et du professeur.

Les expérimentations en classe permettent également de confronter les analyses ascendantes et descendantes à la contingence et s'avèrent des aides pour l'évolution même des ressources. Toutes ces composantes « annexes » aux ressources sont essentielles dans un travail collaboratif comme e-CoLab.

V. CONCLUSION

La construction collaborative de ressources s'est appuyé à sur deux regards complémentaires, d'analyse didactique de la situation et de la position des ressources dans les milieux des professeurs et des élèves pour faire émerger un modèle de ressources permettant de partager et de pouvoir adapter à des contextes et des classes différents des situations construites.

L'exemple d'analyse utilisant la structuration du milieu dans un environnement technologique développée dans cet article met en relation les observations de classe et la création de ressources. La construction collaborative de ressources met en jeu d'autres éléments qui ne sont pas développés ici. De même, la spécificité de l'environnement utilisé est un élément de l'ensemble documentaire des élèves et des professeurs et mériterait d'être étudié sous cet angle. Cependant, les analyses et leurs confrontations à la contingence ont montré toute leur efficacité dans la construction, la réalisation et la diffusion de ressources pour l'enseignement des mathématiques.

RÉFÉRENCES

Adler J. (2010) La conceptualisation des ressources. In Gueudet G., Trouche L. (Eds.) (pp. 23-37). *Ressources vives.* Rennes : Presses Universitaires de Rennes et INRP.

Aldon G. (2008) *Analyse du rôle d'une ressource numérique dans la mise en place de problèmes de recherche dans la classe de mathématiques*. Lyon : Université Lyon 1.

Aldon G. (2010) Handheld calculators between instrument and document. In Drijvers P., Weigand H.-G. (Eds.) *ZDM The International Journal on Mathematics Education* 42 (The role of handheld technology in the mathematics classroom), 733-745.

Aldon G., Baroux-Raymond D., Bonnafet J.-L., Combes M.-C., Meny J.-M., Hérault F., Nowak M. et al. (2009) *Mathématiques dynamiques en seconde*. (Aldon G., Ed.). Hachette Education-INRP.

Aldon G., Baroux-Raymond D., Bonnafet J.-L., Combes M.-C., Meny J.-M., Hérault F., Nowak M., et al. (2010) *Mathématiques dynamiques en première*. (Aldon G., Ed.). Hachette Education-INRP.

Aldon G., Baroux-Raymond D., Bonnafet J.-L., Combes M.-C., Meny J.-M., Hérault F., Nowak M., et al. (2011) *Mathématiques dynamiques en terminale*. (Aldon G., Ed.). Hachette Education-INRP.

Arzarello F., Robutti O. (2010) Multimodality in multi-representational environments. In Drijvers P., Weigand H.-G. (Eds.) *ZDM The International Journal on Mathematics Education* 42 (The role of handheld technology in the mathematics classroom), 715-731.

Brousseau G. (1986) Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 7(2), 33-115.

Brousseau G. (2004) *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La pensée sauvage éditions.

Duval R. (1993) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives* 5, 37-65.

Gueudet G., Trouche L. (2008) Du travail documentaire des enseignants : genèses, collectifs, communautés. Le cas des mathématiques. *Education et didactique* 2 (3), 7-33.

Guin D., Trouche L. (Eds.) (2002) *Calculatrices symboliques : transformer un outil en instrument du travail mathématique, un problème didactique*. Grenoble : La pensée Sauvage éditions.

MacKenzie D., Wajcman J. (Eds.) (1985) *The Social Shaping of Technology: How the Refrigerator Got Its Hum*. Milton Keynes, Open University Press.

Margolinas C. (1998) Étude de situations didactiques « ordinaires » à l'aide du concept de milieu : détermination d'une situation du professeur. *Actes de la huitième école d'été de didactique des mathématiques.*

Margolinas C. (2004) *Points de vue de l'élève et du professeur Essai de développement de la théorie des situations didactiques*. Université de Provence.

Maschietto M., Trouche L. (2010) Mathematics learning and tools from theoretical, historical and practical points of view: the productive notion of mathematics laboratories. *ZDM The International Journal on Mathematics Education* 42(1), 33-47.

Mumford E. (1983) *Designing human systems for new technology: the ETHICS method*. Manchester: Manchester Business school.

Perrin-Gloria M.-J., Hersant M. (2003) Milieu et contrat didactique, outils pour l'analyse de séquences ordinaires. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 23(2), 217-276.

Piaget J. (1967) *Logique et connaissance scientifique*. Paris : ESF.

Rabardel P. (1995) *L'homme et les outils contemporains*. Paris : A. Colin.

Sperandio J.-C. (1984) *L'ergonomie du travail mental*. Paris : Masson.

Trouche L. (2005) Des artefacts aux instruments, une approche pour guider et intégrer les usages des outils de calcul dans l'enseignement des mathématiques. *Actes de l'Université d'été de Saint Flour. Le calcul sous toutes ses formes* (pp. 265-290). http://www3.ac-clermont.fr/pedago/maths/pages/site_math_universite/CD-UE/Texte_16.doc (Dernier accès avril 2012)

Vygotsky L. (1934) *Pensée et langage*. Paris: Editions la dispute.

Williams R., Edge D. (1996) The social shaping of technology. *Research Policy* 25, 856-899

ANNEXES

1

Optimisation et complexes.

Dans un repère orthonormal direct, on considère les points A et B d'affixes $z_A = 1 + i$ et $z_B = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i$. On appelle $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1.

1. Donner la forme exponentielle de z_A et z_B.
2. On considère le point M d'affixe $e^{i\alpha}$ avec $\alpha \in]-\pi ; \pi]$ Justifier que M appartient au cercle $\mathscr{C}$.

On considère l'application f qui à tout point M de $\mathscr{C}$ associe $f(M) = MA \times MB$.

Réalisation de la figure et conjectures.

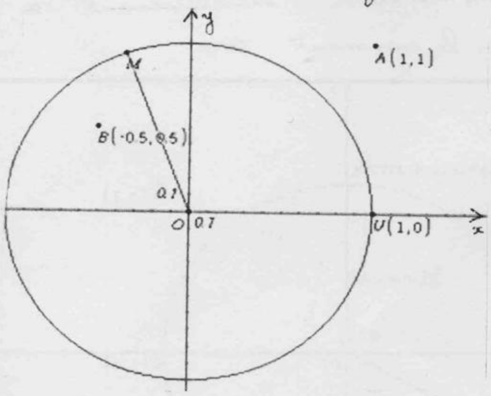
Ouvrir un classeur. Graphiques et géométrie.

* Nommer O l'origine du repère ; U (1 ; 0). Placer A et B.

Méthode : placer approximativement les points (icône point), les nommer immédiatement, faire apparaître leurs coordonnées et corriger si besoin est. (en sélectionnant chacune des coordonnées)

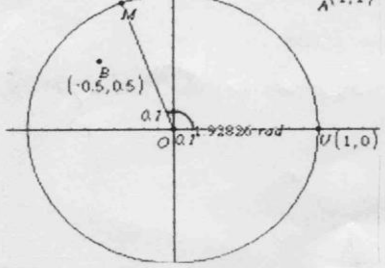
* Tracer le cercle $\mathscr{C}$ (cercle de centre O qui passe par U !)

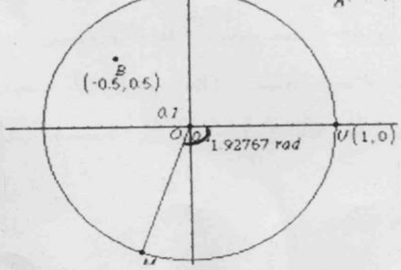
Placer M sur $\mathscr{C}$ et tracer le segment [OM].



Le but du TP est d'étudier les variations de f en fonction de α.

Le logiciel ne nous permet que de mesurer des angles géométriques (icône mesures → angle montrer U puis O puis M)





2

si $\alpha \in [0 ; \pi]$ $\quad \alpha = \text{mes } \widehat{UOM}$

si $\alpha \in]-\pi ; 0]$ $\quad \alpha = - \text{mes } \widehat{UOM}$

Constat : si $\alpha \in [0, \pi]$ ordonnée de M $\geqslant 0$ $\quad y_M \geqslant 0$

si $\alpha \in]-\pi ; 0]$ ordonnée de M ≤ 0 $\quad y_M \leq 0$

donc signe de α = signe de $\dfrac{y_M}{|y_M|}$

* Stocker, dans un coin de l'écran, la mesure de l'angle géométrique → a

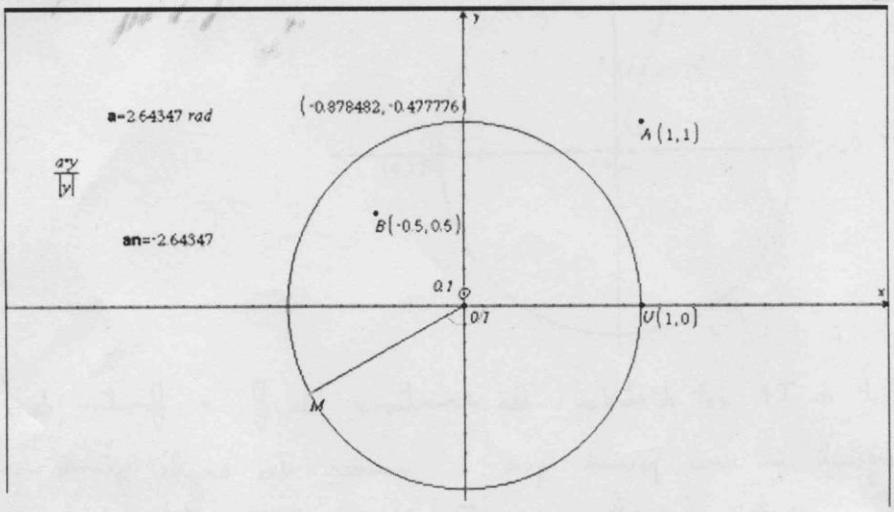
Nous allons créer une nouvelle variable $a \dfrac{y}{|y|}$. Pour cela :

→ afficher les coordonnées de M

→ taper, dans un coin de l'écran, le texte $\dfrac{a \cdot y}{|y|}$

→ calculer l'expression (en montrant successivement a et y_M)

→ stocker le résultat en le nommant an



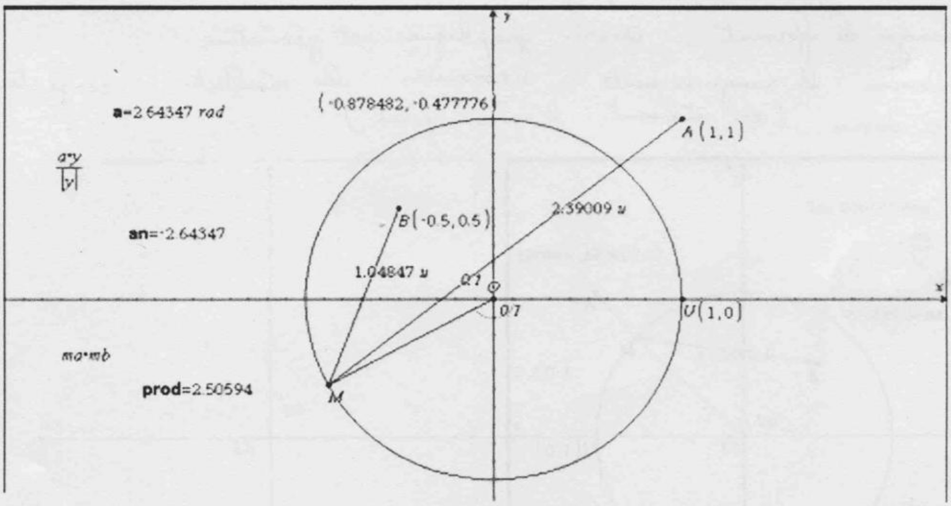
* Tracer les segments [MA] et [MB]. Mesurer les.

Taper, dans un coin de l'écran, le texte ma . mb.

Calculer l'expression (en montrant successivement les mesures de [MA] et [MB])

Stocker le résultat en le nommant prod.

3



Pouvez-vous, en déplaçant le point M, conjecturer les variations de f(M) en fonction de α ?

* Représentons le nuage de points associé.

Ouvrir une nouvelle page Tableur et listes.

Capturer les valeurs de an en colonne A et celles de prod en B.

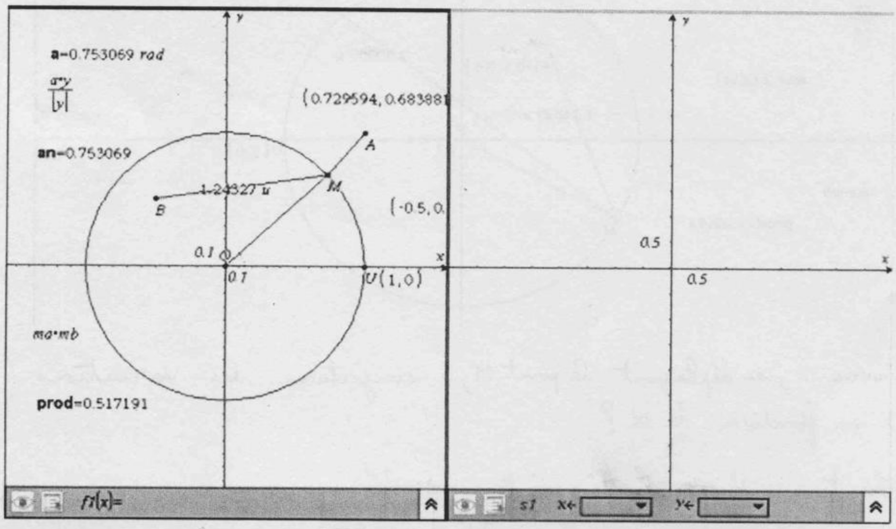
Nommer les colonnes.

	A lx	B ly	C
◆	=capture(an,1)	=capture(prod,1	
1	-2.38186	2.92058	
2	-2.33268	2.98919	
3	-2.29815	3.03534	
4	-2.28763	3.04905	
5	-2.23683	3.11297	
6	-2.19402	3.16376	
7	-2.15398	3.20863	
8	-2.14781	3.2153	
9	-2.08927	3.27554	
10	-2.04571	3.31657	
11	-2.03211	3.3287	
12	-2.0286	3.33179	
13	-1.84849	3.4597	
14	-1.66802	3.52618	
15	-1.47709	3.52685	
16	-1.37242	3.49671	
17	-1.30746	3.4673	

A ly:=capture(prod,1)

4

Revenir sur la 1ère page.
Changer de format. Ouvrir graphiques et géométrie
Dessiner le nuage de points. Retrouver les résultats conjecturés ci dessus (en utilisant l'icône point)



$\boxed{\text{Partie théorique}}$

3°) Montrer, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'égalité :

$$e^{i2\alpha} - 1 = 2i \sin \alpha e^{i\alpha}.$$

Montrer l'égalité :

$$f(M) = \left| e^{i2\alpha} - 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} i\right) e^{i\alpha} \right|.$$

En déduire que $f(M) = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(-\frac{3}{2} + 2 \sin \alpha\right)^2}$.

4°) **a.** En utilisant les résultats précédents, montrer qu'il existe deux points M de $\mathscr{C}$, dont on précisera les coordonnées, pour lesquels $f(M)$ soit minimal. Donner cette valeur minimale.

b. Montrer qu'il existe un unique point M de $\mathscr{C}$, dont on donnera les coordonnées, pour lesquels $f(M)$ soit maximal. Donner cette valeur maximale.

L'IMPACT D'UN PROJET DE RECHERCHE SUR LE DEVELOPPEMENT PROFESSIONNEL D'UN ENSEIGNANT : EXPLORATION DE LA NOTION DE FONCTION

Claire Vaugelade BERG[*]

Résumé – Le but de cet article est d'analyser l'impact d'un projet de recherche effectué au sein d'une université en Norvège sur le développement professionnel d'un enseignant en mathématique au niveau secondaire et plus particulièrement sur son approche documentaire. A travers sa participation à ce projet, l'enseignant est amené à questionner sa compréhension de la notion de fonction et son utilisation du logiciel GeoGebra. L'analyse montre que ce questionnement permet à l'enseignant d'élargir sa compréhension de la notion de fonction. Le cadre théorique utilisé dans cet article s'inspire de la théorie de l'activité et de l'approche documentaire.

Mots-clefs : Notion de fonction, utilisation de GeoGebra, théorie de l'activité, approche documentaire, développement professionnel

Abstract – The aim of this article is to analyse the impact of a developmental project conducted at a university in Norway on a teacher's professional development, and more specifically on his documentational approach. Through his participation to the project, the teacher started to question both his own understanding of the notion of function and his use of GeoGebra. Results from data analysis show that by engaging in this process, the teacher was able to develop his understanding further. The theoretical approach used in this article is elaborated both on activity theory and on documentational approach.

Keywords: Notion of function, the use of GeoGebra, activity theory, documentational approach, teachers' professional development

I. INTRODUCTION

Nous proposons, dans cet article, d'examiner l'influence d'un projet de recherche effectué en Norvège sur la pratique d'un enseignant en mathématiques au niveau du secondaire. Plus particulièrement, la participation de cet enseignant au projet de recherche *Teaching Better Mathematics* (TBM) lui permet de résoudre une tension éprouvée au niveau de son approche documentaire (Gueudet et Trouche 2009) liée à la notion de fonction et à l'utilisation du logiciel GeoGebra. L'utilisation et les mutations engendrées par différents programmes ont été largement examinées, par exemple Falcade, Laborde et Mariotti (2007) ainsi que Drijvers, Doorman, Boon, Reed et Gravemeijer (2010) ont analysé les différents challenges rencontrés aussi bien par les étudiants que par les enseignants. Dans cet article, je propose de suivre l'approche documentaire (Gueudet et Trouche 2008) comme cadre théorique et ainsi de pouvoir suivre le travail de préparation d'un enseignant et les difficultés qu'il rencontre lors de cette préparation. En particulier le but de cet article est d'analyser la tension que l'enseignant éprouve entre sa propre compréhension de la notion de fonction et sa façon d'utiliser le programme GeoGebra. Cette tension sera mise à jour à la suite d'un atelier de travail, élément central du projet TBM, et résolue pendant un entretien avec le chercheur au cours duquel ces problèmes ont été discutés. La collaboration entre enseignants participant au projet de recherche et chercheurs est articulée suivant le cadre théorique de la théorie de l'activité développée par Engeström (1999).

La structure de l'article est la suivante : les principes de base du projet sont présentés dans la première partie de l'article et sont conceptualisés à l'aide de la théorie de l'activité. La deuxième partie explique le cadre méthodologique suivi pour l'articulation de la collaboration

[*] University d'Agder, Kristiansand– Norvège – claire.v.berg@uia.no

© Berg, C. V. (2012) L'impact d'un projet de recherche sur le développement professionnel d'un enseignant : exploration de la notion de fonction. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT6, pp. 799–807). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

entre chercheurs et enseignants et le rôle central de l'approche documentaire dans le travail de l'enseignant. Après l'analyse des données, les différentes implications de cette recherche pour la collaboration entre enseignants et chercheurs sont discutées. Le but de cet article est de répondre aux questions suivantes : comment observer, conceptualiser et analyser une forme particulière de collaboration, celle développée au sein du projet *TBM*, entre enseignants et chercheurs ? Et quelle est la nature de la tension éprouvée par l'enseignant lors de son approche documentaire ?

II. PRINCIPES DE BASE DU PROJET *TEACHING BETTER MATHEMATICS* ET CADRE THEORIQUE

Le projet TBM a été initié en 2007 et s'est terminé en 2010. Il s'organise autour d'une collaboration entre chercheurs appartenant à l'université d'Agder et enseignants travaillant à différents niveaux scolaires. Au sein de notre projet, nous travaillons avec des enseignants issus de 4 jardins d'enfants, 6 écoles primaires et secondaires, et 3 lycées. Notre collaboration avec les enseignants est articulée autour des axes suivants : d'une part, l'organisation d'ateliers de travail au cours desquels chercheurs et enseignants se réunissent pour explorer ensemble un thème particulier en mathématiques et d'autre part, la visite des différentes écoles participant au projet. Les ateliers de travail sont organisés autour d'une présentation en séance plénière d'un thème mathématique choisi à l'avance par les chercheurs en collaboration avec les enseignants, et ensuite de groupes de travail au cours desquels enseignants et chercheurs travaillent ensemble sur plusieurs tâches préparées à l'avance. La visite des différentes écoles participant au projet offre aux chercheurs la possibilité de discuter les impacts possibles du projet sur leur travail d'enseignants et ainsi suivre leur développement professionnel. Deux idées fondamentales constituent la base de notre projet : nous considérons notre collaboration avec les enseignants en termes de co-apprentissage (*co-learning aggreement*, Wagner 1997), et l'établissement de « communautés d'*inquiry* » aussi bien au niveau des chercheurs au sein de l'université, des enseignants au sein de leur école respective, et aussi au niveau de la rencontre entre ces deux communautés. L'idée de communauté d'*inquiry* (Jaworski 2007) dérive de la notion de communauté de pratique (Wenger 1998) à laquelle s'ajoute la notion d'*inquiry*. Dans cet article, j'utilise la notion d' « inquiry », c'est une notion riche et complexe et il n'existe pas d'équivalent, ni en français ni en norvégien. Dans notre travail avec les enseignants nous utilisons le terme anglais d'*inquiry* ce qui nécessite un travail d'exploration et d'explication de la signification de cette notion dans les pratiques enseignantes. Le terme le plus proche en français est probablement « investigation ». Le fait d'adopter la perspective théorique de « communauté d'*inquiry* » nous permet d'articuler la reconnaissance d'un groupe social, ce qui dans cet article signifie groupe de chercheurs, ou groupe d'enseignants, ou bien la collaboration entre ces deux groupes, comme formant une communauté ayant un objectif précis, l'amélioration de l'apprentissage mathématique des élèves, objectif partagé par les différents membres de la communauté en question. Ici le terme « communauté d'*inquiry* » implique une démarche de recherche et d'investigation suivant trois axes différents :

1) *inquiry* au niveau des tâches mathématiques proposées par les enseignants aux élèves ;
2) *inquiry* au niveau de la préparation des tâches mathématiques par les enseignants ;
3) *inquiry* au niveau de la recherche sur la dynamique de développement présentée en 1) et 2).

En adoptant la perspective offerte par la théorie de l'activité il est possible de conceptualiser les aspects systémiques d'une communauté d'*inquiry* de la façon suivante (voir Figure 1) : si l'on considère la communauté d'*inquiry* (*community*) constituée par les chercheurs (*subject*), un des buts de leur activité est de préparer les ateliers de travail (*object*) et de les organiser régulièrement (*outcome*).

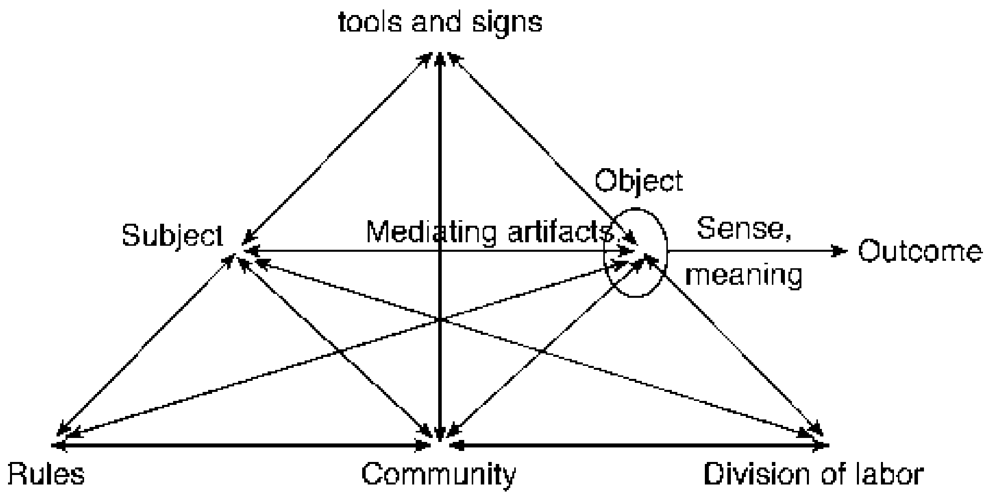


Figure 1 *– The structure of a human activity system (Engeström 1987, p. 78)*

Dans le cadre de cet article, je considère particulièrement la genèse de l'atelier de travail du mois d'avril 2009 au cours duquel la notion de fonction a été présentée et discutée. La présentation en plénière était sous ma propre responsabilité et je considère que la théorie de l'activité me permet, en tant que chercheur, de conceptualiser le processus de genèse de cet atelier. Dans ce cas précis, le terme communauté correspond à notre groupe de chercheurs comportant 6 à 7 personnes. Les décisions concernant la désignation du responsable du prochain atelier de travail ainsi que la préparation de cet atelier (*division of labor*) ont été prises au sein du groupe. Il s'agit maintenant d'étudier mon rôle (*subject*) dans la préparation de l'atelier de travail (*object*), ce qui constitue le but de l'activité du groupe. Lors de la préparation, j'ai effectué un travail documentaire, c'est-à-dire, consultation de différentes ressources :

- manuels utilisés par les enseignants au niveau collège de façon à recueillir des renseignements sur les méthodes utilisées par ces différents manuels pour introduire la notion de fonction ;
- manuels utilisés au niveau universitaire de façon à recueillir des renseignements sur les méthodes utilisées pour étudier cette notion dans les cours de Calculus ;
- informations sur internet sur différents sites norvégiens de ressources pour enseignants au niveau du collège ;
- ma propre expérience en tant qu'enseignante aussi bien au niveau collège qu'au niveau universitaire.

Afin de tenir compte de la variété des niveaux scolaires des enseignants participant au projet TBM (de la maternelle jusqu'au lycée) j'ai cherché à introduire dans ma présentation des exemples tirés de la vie de tous les jours. Mon but était de pouvoir offrir à tous les enseignants, indépendamment de leur niveau, une présentation qui pourrait être intéressante et pertinente pour leur enseignement. Je considère l'utilisation de ces différentes ressources (livres, informations sur internet, ma propre expérience) comme correspondant aux « *tools* *and signs* » de la théorie de l'activité. Ce travail m'a permis de proposer un premier document à mes collègues chercheurs. Leurs commentaires ont portés sur les aspects suivants :

- les avantages et inconvénients de commencer ma présentation de façon pragmatique, c'est-à-dire par des exemples de tous les jours ;
- quels exemples choisir, et dans quel ordre les présenter compte tenu de la variété des niveaux des différents enseignants ;
- les avantages et inconvénients de présenter la notion de fonction de plusieurs façons différentes.

A partir de leurs commentaires, j'ai eu la possibilité de développer un second document, plus élaboré, et considéré comme pouvant constituer une base pour l'élaboration de l'atelier de travail, c'est-à-dire objet de notre activité (*object*). L'un des buts de ma présentation était d'introduire la notion de fonction comme correspondance entre deux ensembles, c'est-à-dire entre le domaine de la fonction et son image, et créer ainsi une approche différente permettant d'éviter la réduction de la notion de fonction à seulement une expression algébrique (ce qui est très souvent le cas dans les manuels scolaires en Norvège au niveau du collège). Il me semblait aussi important de souligner qu'une expression algébrique constitue l'une des différentes représentations de la notion de fonction (Duval, 1995) et qu'il est nécessaire de différencier un concept mathématique de sa représentation.

J'ai ensuite présenté ce document (présentation PowerPoint) pendant la séance plénière d'avril 2009 (*outcome of the activity*). Je considère que le fait de rendre visible les différentes étapes du processus d'élaboration de ce document illustre le caractère de processus en cours et ainsi la nature dialectique de la relation entre ressources et documents est soulignée (Gueudet et Trouche, 2009). Ainsi la séance plénière au cours de laquelle la notion de fonction a été présentée et discutée peut être conceptualisée comme le résultat (*outcome*) du système d'activité (*activity system*) me comprenant comme sujet (*subject*) au sein du groupe de chercheurs (*community*), et dans lequel l'approche documentaire joue un rôle crucial. Je considère que cette approche théorique permet de mettre en valeur la complémentarité de la théorie de l'activité et de l'approche documentaire, en ce sens que la seconde permet d'appréhender de façon plus approfondie le processus d'élaboration de l'objet de l'activité (*objec*t).

Comme il n'est pas possible d'évoquer dans cet article toute la complexité de l'interaction entre ces deux systèmes d'activité (chercheurs au sein de l'université, enseignants au sein de leur école respective), je propose d'étudier plus particulièrement les difficultés rencontrées par un enseignant (Richard) lors de son approche documentaire au sujet de la notion de fonction et de la résolution de cette tension suite à un atelier de travail et d'une discussion entre Richard et un chercheur (moi-même). Un des aspects central de l'approche documentaire est la reconnaissance de l'importance du processus en cours :

> A documentational genesis must not be considered as a transformation with a set of resources as input, and a document as output. It is an ongoing process. (Gueudet et Trouche 2009, p. 206)

Le but de cet article est d'illustrer la nature de ce processus, de montrer la genèse de l'atelier de travail d'avril 2009 et l'influence de celui-ci sur la façon dont Richard cherche à créer un document pertinent pour son enseignement de la notion de fonction. Il s'agit donc de suivre une des étapes du processus de l'approche documentaire de Richard liée à l'utilisation du logiciel GeoGebra.

Le processus d'élaboration d'un document nécessite la combinaison de différentes ressources et de schèmes d'utilisation (*scheme of utilization*) de la part de l'enseignant

(Gueudet et Trouche, 2009). Ce document résulte d'un processus d'instrumentalisation et d'instrumentation entre l'enseignant et un ensemble de ressources. Certains aspects systémiques de la communauté d'*inquiry* constituée par les enseignants et les chercheurs peuvent influencer ces processus et c'est dans cette perspective que s'inscrit cet article (Figure 2).

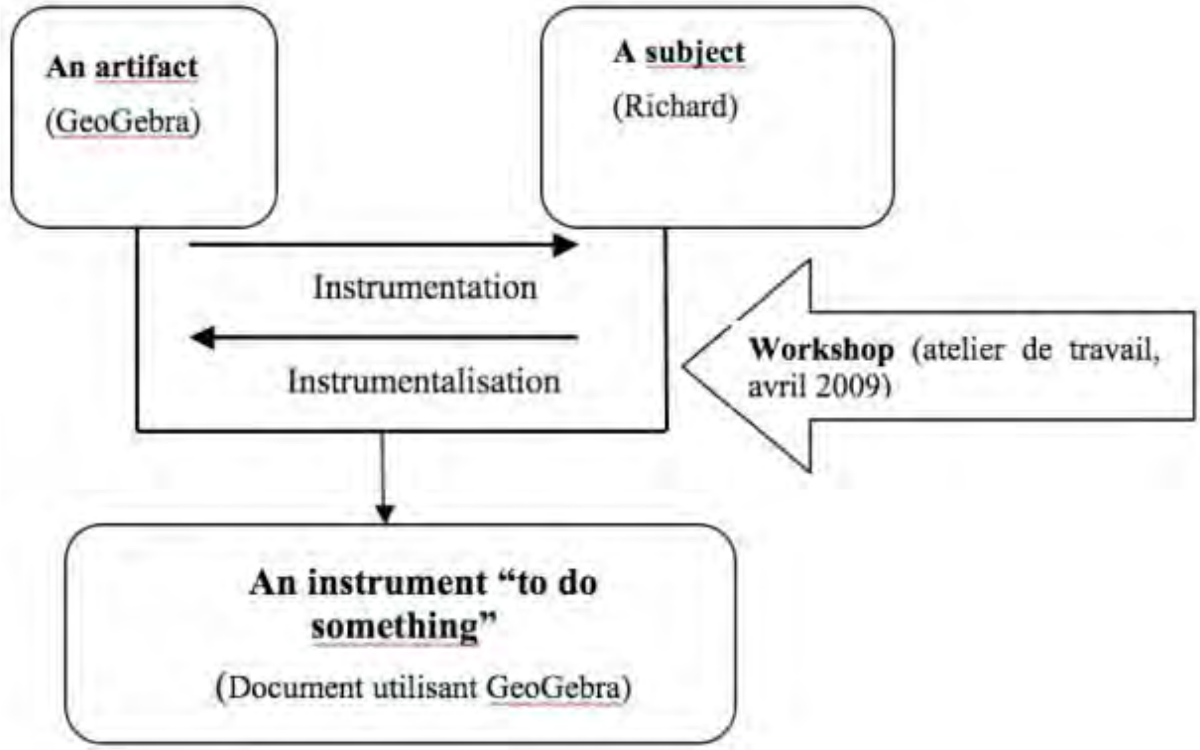


***Figure** 2 – L'influence de l'atelier de travail (avril 2009) sur le processus d'élaboration d'un document utilisant GeoGebra (adaptation de Trouche 2005)*

C'est la raison pour laquelle je considère que l'introduction de la théorie de l'activité permet de conceptualiser l'influence du projet TBM sur le travail documentaire de Richard. Ainsi il est possible de suivre les formes de collaboration entre enseignants et chercheurs développées au cours du projet TBM et d'évaluer les effets de cette collaboration sur le développement professionnel d'un enseignant individuel. Plus précisément, je propose d'étudier comment une présentation en plénière (*outcome*) du système de l'activité des chercheurs est source d'interrogation pour l'enseignant (Richard) et comment ce questionnement va mettre en lumière la tension qu'il a éprouvée lors de précédentes utilisations du logiciel GeoGebra en relation à la notion de fonction. Cette recherche va influencer la genèse d'un nouveau document, issu du travail d'investigation et de réflexion de la part de Richard, qui lui permettra d'approfondir sa compréhension de la notion de fonction et de résoudre cette tension.

III. APPROCHE METHODOLOGIQUE

L'approche méthodologique adoptée au cours de cette recherche s'inscrit dans le cadre de la recherche de développement (Freudenthal 1991 ; Gravemeijer 1994 ; Goodchild 2008). Cette approche est caractérisée par un processus cyclique entre recherche et développement, en ce sens que notre recherche est guidée par des cadres théoriques (approche socioculturelle des apprentissages et reconnaissance de notre collaboration avec les enseignants en termes de communauté de pratique) et, réciproquement, ces cadres théoriques influencent la façon dont nous préparons le développement au sein de notre collaboration avec les enseignants (préparation et réalisation des ateliers de travail). De plus, c'est en prenant en compte les résultats obtenus lors de la réalisation des activités avec les enseignants que nous pouvons envisager un nouveau cycle de développement. Une présentation plus approfondie de notre approche méthodologique est présentée dans un autre article (Berg, 2010). L'approche méthodologique répondant à la problématique présentée dans cet article se définie suivant une approche phénoménologique de l'analyse des données (Miles et Huberman, 1994) ce qui implique un engagement rétrospectif avec les données issues de différentes sources (notes personnelles concernant mon travail documentaire, interview et correspondance avec Richard).

IV. CONTEXTE DE LA RECHERCHE ET EXEMPLE DE L'INFUENCE DU PROJET TBM SUR L'APPROCHE DOCUMENTAIRE DE RICHARD

Richard enseigne au collège depuis de nombreuses années. Il emploie régulièrement avec ses élèves des logiciels de géométrie dynamique, particulièrement GeoGebra. Richard fait partie d'un groupe d'enseignants responsables de l'implémentation dans leur école des idées proposées au cours des ateliers de travail qui sont régulièrement organisés par le projet TBM. Cette école a une grande expérience de participation à des projets de recherche, puisque Richard et certains de ses collègues ont déjà participé à des projets similaires (Jaworski 2007). Cet article présente des épisodes extraits de plusieurs interviews qui ont eu lieu en mai 2009 et d'une correspondance par e-mail en mai 2010. A l'origine, le but de l'interview était de suivre le processus d'implémentation d'une tâche présentée lors d'un atelier de travail (Berg 2010 ; sous presse). Dès le début de l'interview, Richard demande s'il sera aussi possible de discuter la notion de fonction et il exprime le souhait de parler du challenge qu'il ressent par rapport à cette notion. D'après Richard, ces questions résultent d'une part de sa propre expérience avec la notion de fonction et d'autre part de la présentation et discussion de cette notion en plénière lors de l'atelier de travail d'avril 2009.

1. Expérience et challenges rencontrés par Richard

C'est pendant l'interview en mai 2009 que Richard m'explique en ces termes les problèmes qu'il rencontre par rapport à la notion de fonction :

> … mais j'ai un problème ici. Tu as dit [pendant la séance plénière de l'atelier de travail] que à chaque élément de A [domaine de la fonction] correspond un élément unique dans B [image de la fonction]. … Mais si on prend l'exemple d'un cercle, parce que il y a quelque chose que je ne comprends pas ici, si on prend un cercle avec le centre à l'origine [d'un système de coordonnées] et avec un rayon 5. Alors ce cercle aura la courbe $x^2 + y^2 = 25$, et si on fait quelques changements on peut écrire $y = (25 - x^2)^{½}$. Mais si tu prends [la valeur de x égale à] 3 alors tu as *deux* valeurs [sur la courbe représentant le cercle], mais est-ce-que ce n'est pas une fonction ? Et puis j'ai essayé avec GeoGebra et il s'est passé quelque chose de bizarre, parce que si je prends $(25 - x^2)^{½}$, comme ça, il [GoeGebra] ne prend que la partie supérieure [de la courbe représentant le cercle], ici [montrant sur l'écran de son ordinateur], …, tu vois ?

La tension ressentie par Richard provient, d'un coté du fait que la notion de fonction a été présentée en insistant sur le caractère de correspondance unique entre un élément du domaine de la fonction et un élément de son image, et de l'autre coté de sa propre expérience résultant de l'utilisation de GeoGebra. Richard explique ce point en détails en prenant l'exemple du cercle $x^2 + y^2 = 25$. Il propose ensuite de « faire quelques changements », c'est-à-dire qu'il souhaite exprimer cette relation sous la forme « y est égal à une expression en x ». Le challenge vient du fait que, en utilisant GeoGebra, l'expression $x^2 + y^2 = 25$ donne la courbe du cercle où le point $x = 3$ a deux valeurs correspondantes, alors que le caractère unique de l'image d'un élément par une fonction a été souligné pendant l'atelier de travail. De plus lorsque Richard compare avec la courbe $(25 - x^2)^{1/2}$ à l'aide du logiciel GeoGebra, il s'aperçoit que seulement « la partie supérieure de la courbe » est représentée. Ici il est important de souligner l'équation $y = -(25 - x^2)^{1/2}$ qui n'a pas été mentionnée par Richard et qui permet d'expliquer les deux valeurs du point x = 3. Je considère que la tension ressentie par Richard lors de son utilisation de GeoGebra provient du manque de reconnaissance de ce que toutes les courbes ne représentent pas nécessairement une fonction. Ici la distinction entre le graphe d'une fonction et une courbe représentant une expression algébrique est centrale. Je considère que la question de Richard « mais est-ce-que ce n'est pas une fonction ? » offre une preuve de sa recherche d'une meilleure compréhension de la définition de la notion de fonction. Par cette question, Richard montre les difficultés qu'il rencontre au cours du processus d'approche documentaire. Il est possible que ces difficultés soient dues à la fois à son utilisation du logiciel GeoGebra (*instrumentalisation*), à la « réponse » donnée par celui-ci (*instrumentation*), et à ses réflexions suite à la présentation en plénière de l'atelier de travail d'avril 2009. Suite à notre discussion, Richard me fait part de sa volonté d'élaborer une activité dans sa classe au cours de laquelle ses élèves pourront explorer la notion de fonction à l'aide du logiciel GeoGebra. Malheureusement, je n'ai pas eu l'occasion de pouvoir observer Richard lors de l'implémentation de cette activité et d'étudier le document préparé à cet effet.

2. Evolution de la compréhension de la notion de fonction

Environ une année plus tard, j'ai repris contact avec Richard pour lui demander des informations au sujet de son enseignement de la notion de fonction. Le but de ma demande était de suivre une possible évolution aussi bien de son approche documentaire que de sa pratique enseignante, et de prendre note de ses réflexions. Ce sont les raisons pour lesquelles je lui ai envoyé le mail suivant (mai 2010) :

> J'aimerais te demander quelques renseignements au sujet de la notion de fonction. Durant ma présentation en séance plénière, j'ai présenté la notion de fonction comme une correspondance entre deux ensembles (sets). Mon but était d'offrir une perspective plus large de cette notion et pas seulement en relation à une expression algébrique. Lors de ma dernière visite, nous avons eu l'occasion de discuter quelles sont les courbes qui représentent une fonction et celles qui ne les représentent pas. Ma question est la suivante : de quelle façon cette discussion a-t-elle modifiée ta compréhension de la notion de fonction (si cela a eu un impact), quel genre de réflexions …, et est-ce-que cette discussion a eu un effet sur ta pratique enseignante et si oui, quels sont ces effets ?

Quelques jours plus tard, j'ai reçu la réponse suivante :

> Ta présentation en séance plénière du 29 avril 2009 était vraiment intéressante. Je dois dire que j'ai travaillé avec la notion de fonction pendant de nombreuses années sans avoir le genre de réflexions et de compréhension que tu as provoqué ce jour là. Il y a deux choses qui m'ont particulièrement marquées : la façon dont tu as présenté la définition de la notion de fonction, avec plusieurs exemples pris dans la vie de tous les jours, et la présentation de la matrice de Janvier. Dans le passé, je n'ai pas fait tellement attention au fait que quand une valeur de x est donnée il y a une et une seule valeur de y qui correspond. C'est la raison pour laquelle j'ai eu des problèmes avec les cercles et autres genres de paraboles. J'ai remarqué que quand j'utilise GeoGebra, si j'écris $f(x) = x^{1/2}$, alors le programme montre le graphe seulement pour les valeurs positives de y. La même chose se passe pour un cercle. Maintenant, je sais pourquoi ! (réponse de Richard par e-mail, mai 2010)

Le but de mes questions était de savoir si l'atelier de travail consacré à la notion de fonction avait eu un impact sur l'approche documentaire de Richard et de suivre cet éventuel développement. A partir des réponses de Richard, je considère qu'il est possible de suivre son développement et il semblerait que deux aspects ont particulièrement retenu son attention : la définition de la notion de fonction, présentée comme une correspondance entre deux ensembles, c'est-à-dire entre le domaine de la fonction et son image. En suivant cette approche, mon but était de présenter la notion de fonction sous un aspect différent, permettant ainsi d'éviter la réduction de la notion de fonction à seulement une expression algébrique (ce qui est très souvent le cas dans les manuels scolaires en Norvège au niveau du collège). Il semblerait que cette perspective ait attiré l'attention de Richard puisqu'il explique les problèmes qu'il a eu en utilisant GeoGebra par un manque de conscience de cet aspect. Un autre aspect souligné par Richard concerne la matrice de Janvier (voir annexe 1). Celle-ci permet de mettre en valeur les différentes approches possibles pour travailler avec toutes les représentations de la notion de fonction. Ainsi je considère que cette matrice permet de souligner les différentes représentations possibles de la notion de fonction (expression algébrique, graphe, situation, etc.) et l'importance de pouvoir passer d'une représentation à une autre (Duval, 1995). Cet aspect a été aussi souligné lors de la séance plénière. Ainsi au travers des réflexions de Richard il est possible de suivre quels éléments ont été importants pour le développement de sa compréhension de la notion de fonction.

V. CONCLUSION

Le but de cet article était d'une part d'examiner et de conceptualiser une forme particulière de collaboration entre chercheurs et enseignants, et d'autre part d'analyser la nature de la tension éprouvée par l'enseignant lors d'une des étapes du processus de l'approche documentaire. La théorie de l'activité a été utilisée comme cadre théorique permettant de conceptualiser les aspects systémiques de la communauté d'*inquiry* constituée par les chercheurs au sein de l'université et de considérer l'organisation de l'atelier de travail d'avril 2009 comme résultat (*outcome*) de leur activité. Par ailleurs, l'approche documentaire a permis de conceptualiser d'une part la préparation de l'atelier de travail d'avril 2009 et d'autre part la tension éprouvée par l'enseignant résultant de son utilisation du logiciel GeoGebra et de son manque de compréhension de la notion de fonction. Je considère que cet article permet d'étudier la possibilité de combiner la théorie de l'activité et l'approche documentaire de façon à pouvoir conceptualiser, dans toute sa complexité, une des étapes du travail documentaire d'un professeur au sein de sa participation au projet TBM.

Ainsi l'approche théorique et l'approche méthodologique adoptées dans cet article permettent à la fois d'étudier les dimensions collectives en relation à la collaboration entre chercheurs et enseignants, et les dimensions individuelles en relation au travail documentaire d'un enseignant individuel. L'analyse a permis d'articuler et de comprendre le challenge de l'enseignant lors de sa préparation d'une leçon au sujet de la notion de fonction et des difficultés éprouvées dues à une compréhension limitée de cette notion. Je considère que l'atelier de travail peut être considéré comme un catalyseur permettant le développement de sa compréhension de la notion de fonction et l'avancement dans son travail documentaire. Dans le cas de cette recherche, il est ainsi possible de suivre et d'évaluer les effets de la collaboration entre enseignants et chercheurs et l'impact de cette collaboration sur le développement professionnel d'un enseignant individuel.

REFERENCES

Berg C. V. (2010) Le projet TBM : un exemple de modalité de collaboration entre chercheurs et praticiens en Norvège. *Revue Recherches en Education 1*, 130-146. Nantes, France.

Berg C. V. (sous presse) Adopting an inquiry approach to teaching practice: The case of a primary school teacher. In *Proceedings of the 7th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education. February 2011*. University of Rzeszow, Poland.

Drijvers P., Doorman, M., Boon P., Reed H., Gravemeijer K. (2010) The teacher and the tool: instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics 75*, 213-234.

Duval R. (1995) *Sémiosis et pensée humaine. Regitres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang, Collection Exploration.

Engeström Y. (1987) *Learning by expanding: An activity-theoretical approach to developmental research*. Helsinki: Orienta-Konsultit.

Engeström Y. (1999) Activity theory and individual and social transformation. In Engeström Y., Miettinen R.,. Punamäki R.-L (Eds.) *Perspectives on activity theory (learning in doing: social, cognitive, and computational perspectives).* New York : Cambridge University Press.

Falcade R., Laborde C., Mariotti M. A. (2007) Approaching functions: Cabri tools as instruments of semiotic mediation. *Educational Studies in Mathematics 66*, 317-333.

Freudenthal H. (1991) *Revisiting mathematics education*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Goodchild S. (2008) A quest for "good" research. In Jaworski B., Wood T. (Eds.) (pp. 201-220). *International handbook on mathematics teacher education: Vol. 4. The mathematics teacher educator as a developing professional: Individuals, teams, communities and networks* Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Gravemeijer K. (1994) *Developing realistic mathematics education*. Utrecht, The Netherlans: Freudenthal Institute.

Gueudet G., Trouche L. (2008) Du travail documentaire des enseignants : genèses, collectifs, communautés. Le cas des mathématiques. *Éducation et didactique 2*(3), 7-33.

Gueudet G., Trouche L. (2009) Towards new documentation systems for mathematics teachers ? *Educational Studies in Mathematics*,*71*, 199-218.

Janvier C. (1978) *The interpretation of complex Cartesian graphs – Studies and teaching experiments.* Nottingham: Shell Centre for Mathematics Education.

Jaworski B. (2007) Theoretical perspectives as a basis for research in LCM and ICTML. In B. Jaworski et al. (Eds.) *Læringsfellesskap i matematikk – learning communities in mathematics*. Bergen: Caspar Forlag.

Miles M. B., Huberman M. A. (1994) *Qualitative data analysis 2nd ed*. Thousand Oaks, CA: Sage.

Trouche L. (2005) An instrumental approach to mathematics learning in symbolic calculator environments. In Guin D., Ruthven K., Trouche L. (Eds.) (pp. 137-162)*The didactical challenge of symbolic calculators: turning a computational device into a mathematical instrument*. New York : Springer.

Wagner J. (1997) The unavoidable intervention of educational research: a framework for reconsidering researcher-practitioner cooperation. *Educational Researcher*,*26*(7), 13-22.

Wenger E. (1998) *Communities of practice: Learning, meaning and identity*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Annexe 1 ***:Matrice de Janvier (adaptée de Janvier 1978) par Claire Vaugelade Berg***

From / To	**Situation**	**Table**	**Graph**	**Algebraic expression**
Situation	------------	measuring	drawing	modelling
Table	reading	------------	plotting	adjusting from table
Graph	interpreting	reading	------------	adjusting from graph
Algebraic expression	recognising	calculating	plotting	-------------

DE LA CONCEPTION A L'USAGE D'UN DIAGNOSTIC DANS UNE BASE D'EXERCICES EN LIGNE

Françoise CHENEVOTOT-QUENTIN* – Brigitte GRUGEON-ALLYS** – Julia PILET*** – Élisabeth DELOZANNE****

Résumé – Cet article expose la stratégie de dissémination de résultats de recherche portant sur un diagnostic en algèbre élémentaire dans la plateforme *LaboMEP* de l'association Sésamath[1]. L'enjeu de l'intégration d'un diagnostic dans une base d'exercices en ligne est de mettre à la disposition des enseignants des outils pour organiser la gestion de l'hétérogénéité des apprentissages et leur permettre la différenciation des enseignements en fonction des besoins des élèves de la classe.

Mots-clefs : Environnements Informatiques d'Apprentissage Humain (EIAH), Didactique des mathématiques, Différenciation des apprentissages, Diagnostic cognitif, Algèbre élémentaire

Abstract – This article deals with the dissemination of research results concerning assessment of algebra ability through the Sésamath association's *LaboMEP* platform. The aim of the integration of the assessment in an online database system is to provide teachers with the tools to manage students' heterogeneity and to allow differenciation in learning depending on the pupils in the class.

Keywords: E-learning environment, Mathematics education, Differentiated learning, Cognitive diagnosis, School algebra.

I. PROBLÉMATIQU

Notre contribution relève du groupe de travail n°6 consacré aux ressources et au développement professionnel des enseignants. Plus précisément, nous nous intéressons à la conception et aux usages de ressources de diagnostic et de différenciation (pôle 1 du GT6). Le succès auprès des enseignants de la plateforme *MathEnPoche* (MEP) de l'association Sésamath montre que la mise à disposition d'outils informatiques d'assistance à l'activité des enseignants correspond bien à un besoin grandissant (Artigue et Gueudet 2008).

Notre travail s'inscrit dans le contexte des projets Pépite et Lingot[2], projets de recherche pluridisciplinaire en EIAH (Environnements Informatiques d'Apprentissage Humain), fruits d'une longue collaboration entre chercheurs en didactique des mathématiques et en informatique (Delozanne et al. 2010), sur l'apprentissage de l'algèbre à la fin de la scolarité obligatoire (16 ans en France).

Nous présentons ici la dissémination des résultats de nos recherches sur le diagnostic dans la base d'exercices en ligne *LaboMEP* de Sésamath afin de fournir aux enseignants des outils pour gérer l'hétérogénéité des apprentissages en algèbre et organiser la différenciation de l'enseignement en fonction des besoins des élèves. Ce travail s'inscrit dans le cadre d'un

* Laboratoire de Didactique André Revuz (LDAR) et Université d'Artois – France – francoise.chenevotot@univ-paris-diderot.fr
** Laboratoire de Didactique André Revuz (LDAR) et Université de Picardie – France – brigitte.grugeon@univ-paris-diderot.fr
*** Laboratoire de Didactique André Revuz (LDAR) – France – julia.pilet@univ-paris-diderot.fr
**** L'UTES, Université Paris VI – France – elisabeth.delozanne@lip6.fr

[1] Site de l'association Sésamath : http://mathenpoche.sesamath.net/

[2] Le projet Pépite (de 1995 à 2002) a conduit à l'élaboration du logiciel *Pépite* qui construit un profil cognitif en algèbre d'un élève de niveau fin de scolarité obligatoire à partir de ses réponses à un test spécialement élaboré à cet effet. Le projet Lingot (de 2002 à 2008) a conçu, réalisé et évalué des environnements informatiques de diagnostic et d'apprentissage en algèbre (Delozanne et al. 2005a).

© Chenevotot-Quentin F., Grugeon-Allys B., Pilet J., Delozanne E. (2012) De la conception à l'usage d'un diagnostic dans une base d'exercices en ligne. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT6, pp. 808–823). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

projet de recherche en réponse à un appel d'offres PICRI de la région Ile de France, débuté en 2009[3].

Voici nos questions de recherche. Quelles sont les conditions permettant d'assurer la viabilité du transfert d'un outil de diagnostic, développé dans des laboratoires de recherche, vers une plateforme d'exercices en ligne largement utilisée par les enseignants de mathématiques de collège (élèves âgés de 11 à 15 ans) ? Comment mesurer la robustesse de l'outil de diagnostic implémenté dans la plateforme ? Comment les professeurs de mathématiques intègrent-ils cet outil de diagnostic dans leurs pratiques de différenciation ?

Dans le paragraphe 2, nous présentons les éléments théoriques sous-jacents à notre approche articulant le cognitif et l'anthropologique. Au paragraphe 3, nous exposons les modalités du diagnostic individuel depuis le choix des tâches composant le test jusqu'à l'élaboration du profil de l'élève en algèbre. Le paragraphe 4 expose l'intérêt et les modalités du diagnostic collectif. Dans le paragraphe 5, nous présentons le transfert de notre diagnostic dans la base d'exercices en ligne de Sésamath. Nous évoquons l'instrumentation de l'activité de diagnostic de l'enseignant dans le paragraphe 6. Enfin, nous concluons.

II. ELEMENTS THEORIQUES

1. *Approche cognitive*

Grugeon (1997) a défini la compétence algébrique en fin de scolarité obligatoire, référence pour y organiser un diagnostic. Les connaissances algébriques sont structurées selon deux principales dimensions, dépendantes l'une de l'autre et partiellement hiérarchisées, les dimensions *outil* et *objet*, termes pris selon l'acception de Douady (1985).

Sur le plan *outil*, la compétence algébrique s'évalue à travers la capacité à produire des expressions et des relations algébriques pour traduire un problème, à les interpréter puis à mobiliser les outils algébriques adaptés à leur résolution. Cette dimension *outil* de l'algèbre s'exerce dans des contextes variés sur des problèmes de généralisation et de preuve, de modélisation et « d'arithmétique traditionnelle » visant la mise en équation. Parmi ces différents types de problèmes, l'utilisation de l'algèbre comme outil pour prouver des conjectures numériques revêt une importance toute particulière.

Sur le plan *objet*, nous prenons en compte le double aspect syntaxique et sémantique des expressions algébriques afin que leur manipulation formelle redonne sa juste place à la dimension technique du traitement algébrique. Ainsi la compétence algébrique s'évalue à travers des capacités techniques d'ordre syntaxique et des capacités interprétatives mettant en jeu dénotation, interprétation et sens des expressions.

Au niveau scolaire considéré (enseignement secondaire), deux éléments supplémentaires interviennent également dans l'évaluation de la compétence algébrique :

- L'entrée dans l'algèbre suppose une rupture épistémologique avec l'arithmétique (Vergnaud et al. 1987, Kieran 2007).
- L'efficacité algébrique requiert, d'une part, une capacité à interpréter des expressions algébriques à la fois au niveau procédural et au niveau structural (Sfard 1991) et, d'autre part, une capacité à adapter l'interprétation des expressions à la variété des usages visés.

[3] Projet PépiMEP codirigé par Brigitte Grugeon (LDAR, Université Paris Diderot) et Elisabeth Delozanne (LIP6, UPMC).

A partir d'une synthèse des travaux internationaux de didactique de l'algèbre, Kieran (Kieran 2007) a proposé le modèle GTG (Generational/Transformational/Global-meta level) de conceptualisation de l'activité algébrique qui différencie trois aspects complémentaires :

- L'activité générative concerne la génération des différents objets de l'algèbre : expressions algébriques (généralisant des règles numériques), formules (traduisant des relations entre des variables dans différents cadres) et équations (à une ou plusieurs inconnues modélisant un problème), identités.
- L'activité transformationnelle concerne l'utilisation de règles de transformation (règles relatives à la substitution de valeurs numériques dans des expressions, à la factorisation, au développement, à la résolution d'équations et d'inéquations).
- L'activité globale au niveau méta concerne la mobilisation et l'usage de l'outil algébrique pour résoudre différents types de problèmes (de modélisation, de généralisation, de preuve).

Cette approche permet de caractériser les types de problèmes du domaine algébrique (problèmes de généralisation, de production de formule dans différents cadres, de preuve, de reconnaissance d'expressions, de calcul algébrique) à prendre en compte pour définir un test diagnostic et les différents aspects de l'analyse multidimensionnelle nécessaire pour caractériser l'activité des élèves en algèbre élémentaire.

2. *Approche anthropologique*

L'approche cognitive mentionnée ci-dessus ne prend pas en compte l'institution dans laquelle l'élève apprend et les praxéologies mathématiques (Chevallard 2002) impliquées dans la résolution des problèmes proposés dans l'institution[4]. Au-delà de la recherche des conceptions sur les notions en jeu, les pratiques d'évaluation doivent permettre de situer la praxis des élèves dans la résolution des types de tâches travaillés à un niveau scolaire donné et les éléments technologiques investis dans leur résolution par rapport aux praxéologies mathématiques idoines.

Chaque tâche diagnostique du test peut être caractérisée par : un type de tâche, des techniques attendues relativement aux éléments technologiques et théoriques visés, les cadres et registres de représentation, la complexité des expressions en jeu, le niveau d'intervention des organisations mathématiques dans la tâche prescrite (Castela 2008). Ce point de vue nous a permis d'adapter le diagnostic à différents niveaux d'enseignement (Chenevotot-Quentin et al. 2011).

III. DIAGNOSTIC INDIVIDUEL

1. *Pratiques d'évaluation et diagnostic*

Bien que faisant partie intégrante de l'activité de l'enseignant, le diagnostic peut avoir différents sens. Ketterlin-Geller et Yovanoff (2009) ont proposé plusieurs définitions du diagnostic en mathématiques. Dans une perspective éducative, le diagnostic renseigne sur les connaissances aussi bien que sur les habiletés ou conceptions erronées des élèves. Il permet alors à l'enseignant de repérer ce que ses élèves savent ou ne savent pas faire par rapport aux attentes institutionnelles.

[4] Les praxéologies sont définies à partir de l'étude des programmes, des documents d'application et des principaux manuels utilisés dans les classes.

Par ailleurs, ces auteurs distinguent deux types de pratiques d'évaluation. La première, l'analyse des réponses des élèves à des tests dédiés, renseigne sur les connaissances et les habiletés en cours de construction par les élèves. Si elle permet d'avoir accès aux conceptions erronées, elle donne peu d'informations sur les erreurs mathématiques persistantes. La deuxième, l'évaluation diagnostique cognitive, donne des informations sur le processus cognitif de l'élève. Elle est basée sur la connaissance du savoir mathématique en jeu et sur une analyse statistique des réponses. Dans les deux cas, l'enjeu porte donc principalement sur une étude locale des conceptions erronées.

Nous nous intéressons à un diagnostic cognitif dont le rôle est de permettre la prise de décisions concernant les apprentissages. Au-delà de l'étude des conceptions erronées, notre enjeu consiste à étudier globalement les cohérences de fonctionnement des élèves dans un domaine mathématique donné, ce qui nécessite l'analyse des réponses des élèves dans un domaine organisé.

2. *Modalités du diagnostic individuel*

Le premier outil de diagnostic, d'abord un outil papier/crayon (Grugeon 1997), a donné lieu à une implémentation informatique partielle avec la conception du logiciel *Pépite* (Jean et al. 1998). *Pépite* construit en partie automatiquement le profil cognitif en algèbre d'un élève à la fin de la scolarité obligatoire à partir de ses réponses à un test systématique spécialement conçu à cet effet. Ce profil est une description de l'activité de l'élève en algèbre élémentaire repérant ses cohérences de fonctionnement.

Le test est composé de 22 tâches diagnostiques (51 items) choisies en croisant à la fois les différents aspects de la compétence algébrique, pris comme référence, et les types de tâches développés dans les programmes pour le niveau considéré. Ces tâches recouvrent les différents problèmes du domaine algébrique : problèmes de mathématisation pour généraliser, modéliser, prouver ou mettre en équation (12 items), exercices techniques de calcul (22 items) ou de reconnaissance (32 items).

Ces tâches diagnostiques impliquent différents types de tâche des programmes de collège et de seconde comme on peut le voir dans le tableau 1 :

- De calcul algébrique : développer ou factoriser des expressions algébriques, résoudre des équations du (ou se ramenant au) premier degré.
- De production d'expression, de formule ou de mise en équation pour traduire des relations entre variables selon les conditions de l'énoncé.
- De traduction ou de reconnaissance de relations mathématiques d'un registre de représentation dans un autre.
- De résolution de problèmes dans différents cadres (numérique, algébrique, géométrique, fonctionnel) en mobilisant l'outil algébrique pour prouver des propriétés, pour mettre en équation.

Types de tâches	**Nombre d'items du test**	**Items du test**
de calcul algébrique	15 sur 51	1.1 / 1.2 / 1.3 / 1.4 / 6 / 8.1 / 8.2 / 9.1 / 9.2 / 9.3 / 9.4 / 17 / 18.1 / 19.1 / 21
de production d'expression	10 sur 51	3.1 / 10 / 11.1 / 12 / 15.1 / 15.2 / 15.3 / 16 / 19.2 / 20.2
de traduction ou de reconnaissance	19 sur 51	2.1 / 2.2 / 2.3 / 3.2 / 4.1 / 4.2 / 4.3 / 4.4 / 4.5 / 5.1 / 5.2 / 7 / 8.1 / 8.2 / 11.2 / 13 / 14 / 18.2 / 20.1
de résolution de problèmes dans différents cadres	3 sur 51	15.3 / 16 / 20.3

***Tableau 1** — Organisation praxéologique du test composé de 22 tâches*

Les tâches diagnostiques peuvent être des QCM ou de exercices à énoncés plus ou moins ouverts. En voici quelques exemples pour chaque type de tâche.

3. *Exemples de tâches composant le test diagnostic*

L'exercice 9 (items 9.1 et 9.2) présenté en figure 1 est un exemple de tâche en calcul algébrique. Il permet de repérer si un élève reconnaît la structure d'une expression et utilise les identités mises en jeu en fonction du but visé. Dans le cas négatif, l'analyse didactique caractérise les règles erronées utilisées.

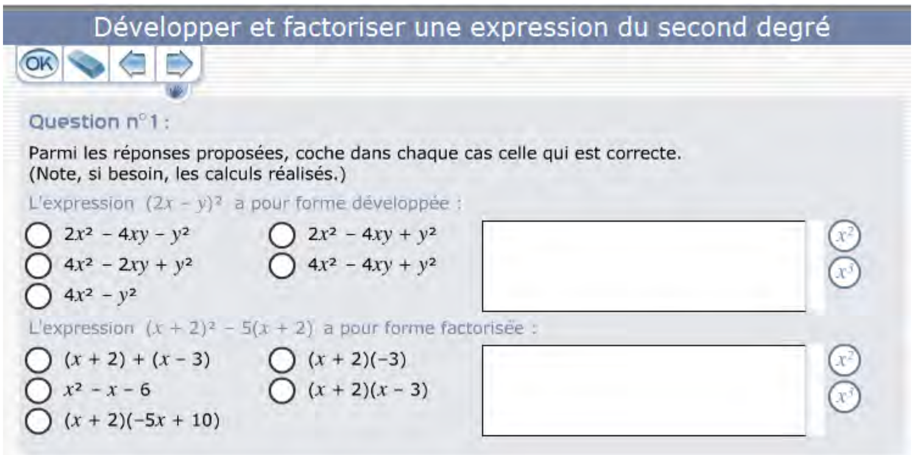


***Figure 1** — Exemple de tâche en calcul algébrique*

L'exercice 3 (item 3.1) présenté en figure 2 est une tâche de production d'expression. Il permet d'étudier si un élève sait exprimer l'aire d'un domaine plan par une expression algébrique. L'analyse des réponses donne accès aux règles de traduction et/ou de transformation utilisées par les élèves pour passer d'une représentation géométrique à une écriture algébrique.

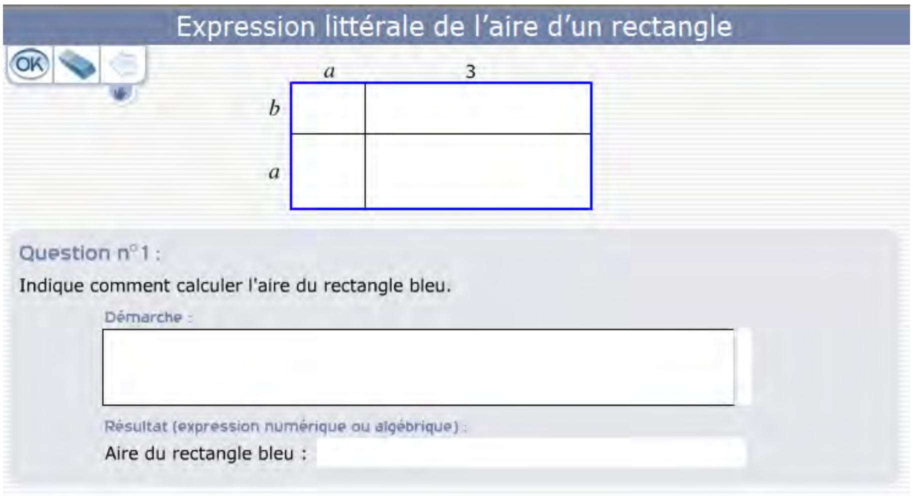


***Figure 2** – Exemple de tâche en production d'expression*

L'exercice 2 (items 2.1, 2.2 et 2.3) présenté en figure 3 est un exemple de tâche en reconnaissance d'expression. Il permet de repérer si un élève reconnaît la structure des expressions et les règles de formation des écritures algébriques qu'il a mobilisées. Le choix d'une justification (figure 4 ou 5) donne accès au niveau de rationalité mis en jeu par les élèves (Grugeon 1997) : preuve pragmatique par l'exemple numérique, preuve algébrique ou preuve par injonction (il faut que...).

***Figure 3** – Exemple de tâche en reconnaissance de la structure d'une expression*

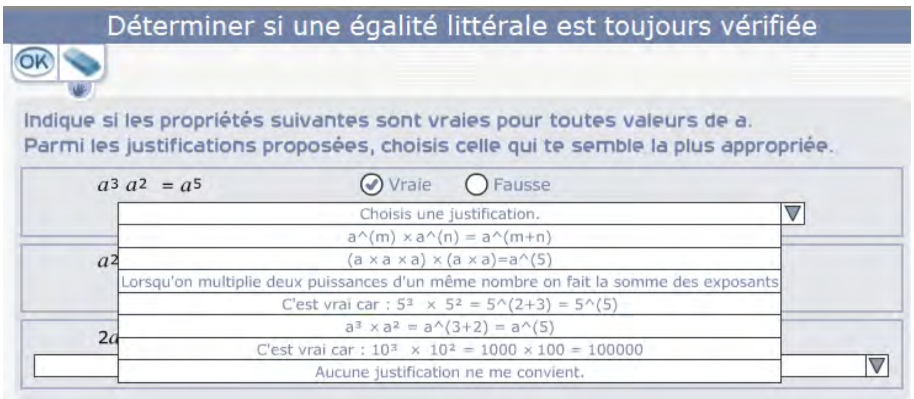


***Figure 4** – Justifications proposées dans le cas où l'élève a choisi « Vraie »*

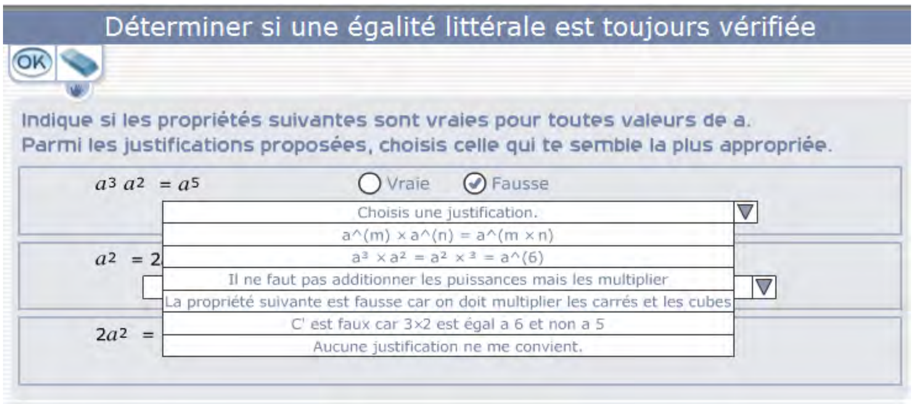


Figure 5 – *Justifications proposées dans le cas où l'élève a choisi « Fausse »*

L'exercice 16 (item 16) présenté en figure 6 concerne la preuve d'une propriété numérique. Il permet de tester la capacité des élèves à mobiliser l'outil algébrique pour produire une expression algébrique résultant d'un algorithme de calcul, puis prouver que l'expression obtenue est toujours égale à 7. La génération de l'expression donne accès au niveau de preuve mis en jeu (exemple numérique ou preuve algébrique), aux règles de traduction et de transformation utilisées pour développer et réduire l'expression.

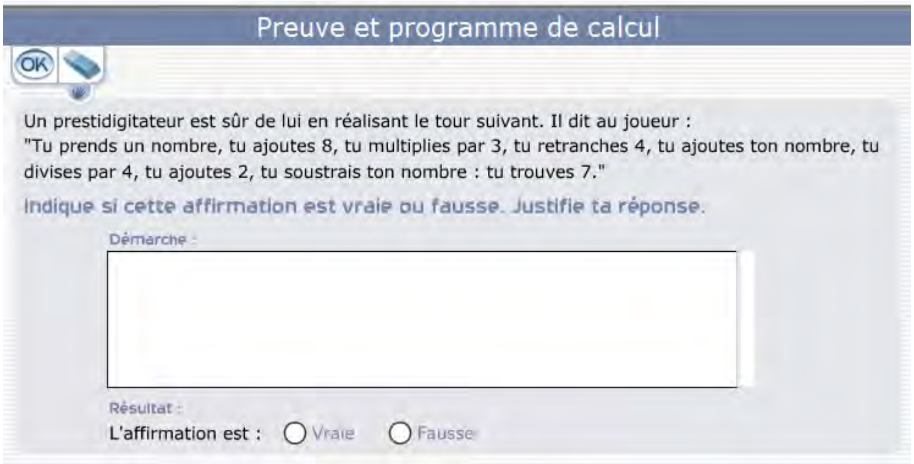


Figure 6 - *Exemple de tâche de résolution de problème*

4. *Profil d'un élève en algèbre*

Dans notre approche, les réponses des élèves ne sont pas seulement analysées en termes de réussite/échec mais aussi codées en termes de cohérences définies par une analyse *a priori*, correspondant soit à des technologies institutionnellement reconnues (i-technologie), soit à des technologies qui justifient et légitiment pour les élèves des techniques erronées récurrentes dans cette institution (e-technologie)[5].

Le codage des réponses des élèves aux différentes questions du test diagnostique s'effectue grâce à une grille d'analyse multidimensionnelle (Grugeon 1997), selon cinq dimensions : V,

[5] Ce point de vue est proche de celui introduit par Croset (2009, pp.264) :
« Ces comportements stables dans l'erreur doivent, selon nous, pouvoir s'expliquer, se justifier par la présence d'une technologie-en-acte chez ces élèves. C'est parce qu'ils ont en tête des éléments technologiques (erronés) qu'ils sont capables d'avoir un comportement stable (dans l'erreur) ».

L, EA, T et J[6]. Une analyse transversale du codage obtenu permet de construire un profil de l'élève en algèbre.

Nous définissons le profil d'un élève en algèbre élémentaire comme une description des principaux traits de son activité algébrique, situés par rapport aux praxéologies mathématiques attendues à ce niveau scolaire. Il est à la fois quantitatif, en termes de taux de réussite selon les types de tâches diagnostiques et, qualitatif, en termes de e-technologies dominantes qui décrivent les praxéologies développées globalement par les élèves sur l'ensemble des tâches. Les éléments technologiques convoqués éclairent des conceptions inadaptées sous-tendant les connaissances et techniques mises en jeu par les élèves.

IV. DIAGNOSTIC COLLECTIF

Le modèle précédent fournit une description du profil cognitif de chaque élève. Pour les enseignants, dont l'objectif est d'exploiter le diagnostic pour réguler les apprentissages des élèves, une photographie de groupes d'élèves ayant des praxis voisines en algèbre a semblé plus opérationnelle.

Un stéréotype (Delozanne et al. 2010) est défini comme une classe de profils équivalents, c'est à dire un ensemble de profils pour lesquels les e-technologies des élèves en algèbre peuvent être jugées suffisamment proches pour travailler sur des situations ayant les mêmes objectifs prioritaires d'apprentissage.

Pour spécifier le modèle de stéréotype en algèbre élémentaire, nous avons privilégié trois composantes :

- UA : l'usage de l'algèbre pour résoudre des problèmes (dimension outil de résolution et de preuve de l'algèbre). Cette composante permet d'étudier la capacité de l'élève à mobiliser algébriquement les différents types de problèmes via les équations ou via des relations fonctionnelles, les problèmes pour généraliser, prouver ou démontrer.
- TA : la traduction d'une représentation à une autre. Il s'agit ici d'étudier la capacité de l'élève à interpréter des écritures algébriques en articulation avec les autres registres de représentation (langage naturel, graphique, figure géométrique).
- CA : le calcul algébrique (dimension objet de l'algèbre). Cette composante sert à évaluer le degré de maîtrise du calcul algébrique et la nature des techniques de calcul mises en jeu par l'élève.

Pour chaque composante, différents niveaux e-technologiques ont été identifiés (tableau 2) ; ils permettent de définir des seuils d'idonéité relativement à une composante donnée. Des expérimentations réalisées en 2005 (Delozanne et al. 2005b) ont permis de faire émerger une terminologie acceptée par tous pour la restitution des résultats du test aux enseignants et aux élèves. Plus particulièrement, les niveaux technologiques des stéréotypes ont été traduits.

[6] Les cinq dimensions sont : la validité de la réponse (V), le statut des lettres (L), le niveau technologique en jeu dans les écritures algébriques utilisées lors des transformations symboliques (EA), le niveau technologique en jeu dans les représentations utilisées lors d'une traduction (T), le niveau technologique de justification (J).

Composante	**Notation**	**Objectif**	**Niveaux de compétence**
Usage de l'algèbre	UA	Etudier la disponibilité de l'outil algébrique et la capacité à le mobiliser dans des situations de modélisation (production de formules ou mise en équation) et de preuve.	*Niveau 1* : Disponibilité de l'outil algébrique et mobilisation adaptée.
			Niveau 2 : Mobilisation de l'outil algébrique et traduction algébrique adaptée pour au moins un type de problème.
			Niveau 3 : Mobilisation de l'outil algébrique sans cohérence entre le modèle et la situation.
			Niveau 4 : Non disponibilité de l'outil algébrique pour généraliser, prouver ou modéliser et démarches arithmétiques persistantes.
Traduction d'une représentation à une autre	TA	Etudier la capacité à traduire une expression d'un registre à un autre et la flexibilité à interpréter une représentation d'un registre à un autre.	*Niveau 1* : Traduction correcte.
			Niveau 2 : Traduction ne prenant pas en compte la reformulation des relations.
			Niveau 3 : Au moins une traduction sans cohérence (abréviative) entre le modèle et la situation.
Calcul algébrique	CA	Etudier la capacité à calculer algébriquement.	*Niveau 1* : Traitement algébrique prenant en compte les aspects syntaxique et sémantique des expressions s'appuyant sur une adaptabilité dans l'interprétation des expressions selon les usages visés (conception structurale).
			Niveau 2 : Traitement essentiellement syntaxique avec des erreurs récurrentes de transformation privilégiant une conception procédurale des expressions.
			Niveau 3 : Traitement s'appuyant sur une conception pseudo-structurale, mettant en jeu des règles de formation et de transformation incorrectes du type concaténation.

***Tableau 2** – Echelles par seuils pour chaque composante des stéréotypes*

Usage de l'Algèbre UA Niveau 3	UA3 Mobilisation de l'outil algébrique sans cohérence entre le modèle et la situation.	Exercices de mathématisation Taux de réussite : **18 %** **Fragilités** Encore des démarches arithmétiques
Traduction d'une représentation à une autre TA Niveau 2	TA2 Traduction ne prenant pas en compte la reformulation des relations.	Exercices de reconnaissance et de traduction Taux de réussite : **50 %** **Leviers** Traduction algébrique correcte pour modéliser (e=6P ; x-2=y+2)
Calcul Algébrique CA Niveau 3	CA3 Traitement s'appuyant sur une conception pseudo-structurale, mettant en jeu des règles de formation et de transformation incorrectes du type concaténation.	Exercices techniques Taux de réussite : **14 %** **Fragilités** Rôle des opérateurs non maîtrisé ($4a^3+3a^2=7a^5$) Utilisation de règles de transformation fausses ($(a+2)^2=a^2+4$; $a^m a^n=a^{m.n}$; $ax=b \rightarrow x=-b/a$)

***Tableau 3** – Stéréotype en algèbre élémentaire de Jules, élève de seconde*

Voici, par exemple, le stéréotype en algèbre élémentaire de Jules tel qu'il est présenté aux enseignants (tableau 3). Jules est en difficulté en calcul algébrique (CA3) et dans son usage dans la résolution de problèmes (UA3). Par contre, Jules traduit algébriquement, sans reformulation, des relations mathématiques entre variables dans un cadre donné (TA2). Il reste à confirmer la robustesse du diagnostic par une expérimentation portant sur un nombre d'élèves et de classes beaucoup plus grand. C'est l'enjeu du transfert du diagnostic dans la base d'exercices *LaboMEP* de Sésamath débuté en 2008.

V. TRANSFERT DU DIAGNOSTIC DANS UNE BASE D'EXERCICES EN LIGNE

1. La base d'exercices de Sésamath

L'association Sésamath occupe aujourd'hui une place centrale dans la création de ressources en ligne libres avec près de 1,5 millions de visites en mars 2011 sur son site *MathEnPoche* (MEP). Depuis sa création en 2001, l'association Sésamath a développé des ressources diversifiées (bases d'exercices en ligne, manuels scolaires) couvrant les programmes de mathématiques du collège. Elle fonde son succès sur sa très grande sensibilité aux besoins des enseignants utilisateurs ainsi qu'à leurs contraintes. Par ailleurs, elle a su mettre en place des mécanismes de conception collaborative pour produire, réviser et faire évoluer ses ressources. Enfin, ces dernières années, Sésamath a établi des collaborations avec des chercheurs afin d'analyser les aspects mathématiques, épistémologiques, didactiques et ergonomiques des ressources, gage d'une production de contenus mathématiques de qualité.

Les enseignants peuvent utiliser cette ressource pour proposer des exercices adaptés aux besoins des élèves sous la forme de parcours d'enseignement portant sur des thèmes mathématiques enseignés en classe. Le plus souvent, ces exercices sont choisis en fonction des scores obtenus par les élèves dans *LaboMeP* et sont proches des exercices déjà rencontrés. Aujourd'hui, aussi bien les concepteurs, que les enseignants utilisateurs de ces ressources, ressentent le besoin d'appuyer davantage le suivi des élèves et la proposition de parcours d'enseignement sur un diagnostic plus élaboré que les scores actuellement produits.

2. Transfert du diagnostic Pépite dans la base d'exercices de Sésamath

Tout d'abord, les enseignants demandent des outils d'évaluation adaptables à leur stratégie de régulation de leur enseignement mais aussi économes en temps. Or, *Pépite* est un test systématique qui élabore son évaluation à partir de l'ensemble des 22 tâches diagnostiques du domaine algébrique. Peut-on réduire le nombre de tâches diagnostiques composant le test tout en ayant l'assurance d'établir un diagnostic rapide, valide et fiable ? Quelles tâches diagnostiques faut-il retenir pour leur rôle prédictif ?

Le prototype du diagnostic implémenté dans *LaboMEP* est constitué de 10 tâches diagnostiques, issues des exercices originels de *Pépite*, qui se décomposent en 27 items. Le tableau 4 présente l'organisation praxéologique du test implémenté dans *LaboMEP*. Nous reprenons la répartition par types de tâches du tableau 1.

Types de tâches	**Nombre d'items du test**	**Items du test**
de calcul algébrique	8 sur 27	1.1 / 1.2 / 1.3 / 1.4 / 9.1 / 9.2 / 9.3 / 9.4
de production d'expression	7 sur 27	3.1 / 10 /15.1 / 15.2 / 15.3 / 16 / 20.2
de traduction ou de reconnaissance	11 sur 27	2.1 / 2.2 / 2.3 / 3.2 / 4.1 / 4.2 / 4.3 / 4.4 / 4.5 / 13 / 20.1
de résolution de problèmes dans différents cadres	3 sur 27	15.3 / 16 / 20.3

Tableau 4 *– Organisation praxéologique du test composé de 10 tâches*

Pour permettre d'étudier l'évolution des différents aspects de l'activité algébrique des élèves, des clones des tâches diagnostiques du test ont été conçus et développés (énoncé et analyse *a priori* automatique de chaque tâche) (Prévit 2008). La conception des clones s'appuie sur les variables didactiques caractéristiques des types de tâches et des énoncés en jeu. Les élèves peuvent donc passer le test à plusieurs reprises au cours de la même année scolaire.

Notre méthodologie consiste à développer des prototypes qui sont immédiatement testés par un cercle restreint d'utilisateurs experts, puis modifiés, avant d'être mis à la disposition de tous. Pour le développement informatique, nous nous sommes appuyés sur les développeurs de Sésamath et sur des membres de l'équipe de recherche[7]. L'organisation de Sésamath a déjà montré son efficacité (Artigue et al. 2006) pour développer des logiciels de façon collaborative et très réactive aux besoins et aux contraintes des utilisateurs. Cette méthodologie s'appuie sur une démarche itérative de conception dans l'usage des ressources (Rabardel 1995). Nous procédons par cycles de développement et par intégrations successives. Nous rejoignons l'idée de développement expérimental et d'approche de recherche adaptative (Richard et al. 2011).

3. Validité du transfert

La validité du transfert du diagnostic, depuis le laboratoire de recherche, vers la base d'exercices de Sésamath, a été attestée par une analyse combinatoire complétée par une analyse didactique.

L'analyse combinatoire a été effectuée par Darwesh (2010), dans sa thèse de doctorat. Il a comparé les stéréotypes obtenus, d'une part, avec le test complet composé de 22 tâches et, d'autre part, par des combinaisons de 15 tâches, sur un corpus de 361 élèves. Il a ensuite déterminé les 13 tâches (1/2/3/4/9/10/11/12/13/14/15/16/20) qui interviennent le plus souvent dans les meilleures combinaisons composées de 15 tâches. L'analyse didactique a validé la pertinence du choix de ces 13 tâches et a estimé que leur nombre pouvait être réduit à 10 tâches (1/2/3/4/9/10/13/15/16/20). La comparaison des stéréotypes obtenus, d'une part, avec le test complet composé de 22 tâches et, d'autre part, avec le test réduit composé de 10 tâches, donne un pourcentage d'égalité de 74%.

L'analyse didactique repose sur plusieurs arguments. Le test initial composé de 22 tâches a volontairement été conçu avec des redondances. L'exercice 10 (item 10) présenté en figure 7 relève du même type de tâche (la production d'expression) que l'exercice 3 (item 3.1) déjà présenté en figure 2. Il permet d'étudier si un élève sait traduire algébriquement un énoncé donné en langage naturel. L'analyse des réponses correctes ou erronées permet d'identifier le mode de traduction utilisée (reformulation ou non, schématisation) pour passer d'une relation mathématique exprimée en français vers une relation algébrique.

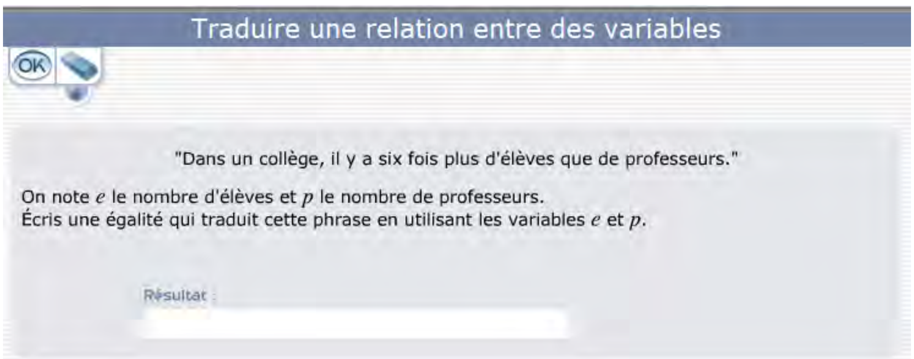


Figure 7 *– Exemple de tâche en production d'expression*

[7] Nous remercions Arnaud Rommens, Christian Vincent, Aso Darwesh, Josselin Allys pour leur contribution à l'implémentation du test diagnostic sur *LaboMEP*.

Ainsi, la détermination de chaque élément du profil repose volontairement sur les réponses de l’élève à plusieurs tâches. Cette stratégie présente des avantages évidents pour la fiabilité du diagnostic. Malheureusement, en raison de sa longueur excessive, le test initial peut ne pas être complètement renseigné par les élèves. Grâce à l’analyse *a priori* des tâches composant le test initial de 22 tâches, nous avons quantifié la richesse de chaque tâche sur le plan du diagnostic et retenu celles qui ont une valeur prédictive importante.

Des expérimentations portant sur la viabilité du transfert du diagnostic ont débuté en 2011. Par exemple, avant l’utilisation de l’outil de diagnostic, un enseignant a constitué quatre groupes d’apprentissage en algèbre dans sa classe de seconde composée de 34 élèves. Ces groupes sont les suivants : les élèves en réussite (groupe 1), les élèves en réussite avec quelques difficultés (groupe 2), les élèves moyens (groupe 3), les élèves en difficulté (groupe 4). L’enseignant souhaite surtout une aide pour clarifier le groupe des élèves moyens (groupe 3). Le diagnostic a conforté les choix faits par l’enseignant en exhibant toutefois quelques différences (tableau 5).

		Groupes constitués par l’enseignant				
		Groupe 1	**Groupe 2**	**Groupe 3**	**Groupe 4**	**Total**
Groupes constitués par Pépite	**Groupe A**	**4**	*4*	*3*	*0*	11
	Groupe B	1	**2**	*4*	*2*	9
	Groupe C	0	1	**5**	*2*	8
	Groupe D	1	0	0	**1**	2
	Total	6	7	12	5	30

Tableau 5 *– Comparaison des groupes constitués par l’enseignant et par Pépite pour une classe de seconde*

Ainsi, pour les 30 élèves de la classe présents lors du passage du test diagnostic, les quatre groupes d’apprentissage en algèbre construits à partir de *Pépite* sont les suivants :

- Les élèves donnant du sens au calcul algébrique et commençant à développer une pratique intelligente et contrôlée–CA1 (groupe A).
  - Les élèves pratiquant un calcul algébrique peu contrôlé mobilisant de façon plus ou moins fréquente des règles fausses–CA2 : avec utilisation d’une démarche algébrique adaptée pour résoudre au moins un type de problème (groupe B) ; avec utilisation de démarches numériques ou algébriques inadaptées (groupe C).
- Les élèves donnant peu de sens aux notions et à l’usage de l’algèbre – CA3 (groupe D).

Pour 12 élèves sur 30 (diagonale du tableau 5, en gras), les groupes constitués par l’enseignant et par *Pépite* sont les mêmes. De plus, pour 15 élèves sur 30, les groupes proposés par *Pépite* sont plus favorables que ceux proposés par l’enseignant (partie supérieure droite du tableau 5, en italique). Notre interprétation de ce résultat repose sur trois arguments. Tout d’abord, le test *Pépite* est conçu pour des élèves de fin de $3^{\text{ème}}$/début de 2^{nd} (15 ans) or la classe dans laquelle nous avons effectué nos expérimentations est une classe de 2^{nd} au $2^{\text{ème}}$ trimestre. Ensuite, les élèves disposaient de tout le temps nécessaire pour effectuer le test et n’étaient pas jugés sur leur rapidité à répondre aux exercices. Enfin, l’environnement informatique propose quelques interactions à l’élève, facilitant sa remise en question. Par ailleurs, le diagnostic a aussi aidé l’enseignant en pointant des difficultés qui nécessitent des apprentissages différenciés spécifiques (partie inférieure gauche du tableau 5) pour 3 élèves sur 30 pour lesquels les groupes basés sur les stéréotypes sont plus défavorables que ceux initialement constitués par l’enseignant.

Le diagnostic basé sur le test à 10 tâches implémenté sur *LaboMEP* est donc conforté par l’étude de cette classe. Il reste à le valider à une plus grande échelle.

VI. INSTRUMENTATION DE L'ACTIVITÉ DE DIAGNOSTIC DES ENSEIGNANTS

1. *Scénarii d'usage*

Comment les enseignants utilisateurs de *LaboMEP* s'approprient-ils l'outil de diagnostic *Pépite* mis à leur disposition ? Comment cet outil peut-il s'insérer dans l'activité de diagnostic des enseignants ? Nous proposons trois scénarii d'usage, exposés sur l'écran de présentation accompagnant l'outil de diagnostic sur *LaboMEP* :

- En 3$^{\text{ème}}$ ou en 2$^{\text{nd}}$, avant de commencer le chapitre sur le calcul algébrique, pour faire des séances différenciées de rappels en fonction des besoins des élèves de la classe,
- En 3$^{\text{ème}}$ ou en 2$^{\text{nd}}$, pendant le chapitre sur le calcul algébrique, pour préparer un contrôle au moyen d'une séance d'entraînement différenciée selon les besoins,
- En fin de 3$^{\text{ème}}$, pour organiser une révision pour le Brevet.

L'approche instrumentale de l'activité développée par Rabardel (1995) a été mise en œuvre dans l'analyse de l'intégration des logiciels dans l'enseignement du point de vue des élèves.

Rogalski (Delozanne et al. 2005a) souligne la faible part des publications s'intéressant au point de vue de l'enseignant. Pour analyser l'instrumentation de l'activité de diagnostic de l'enseignant de mathématiques et la possibilité que *Pépite* soit placé en situation d'instrument, Rogalski propose de s'interroger sur :

- Quel est l'objet de l'action ? La classe ? Des groupes d'élèves ? Des élèves individuels ?
- Quel est le but du diagnostic ? Permettre la catégorisation de sous-groupes ? Aider à prendre des décisions relatives à l'adaptation de l'enseignement, à la remédiation ou encore en matière d'orientation scolaire ?

Selon l'objet et le but visé, un outil peut être plus ou moins aisément situé en position d'instrument. A sa conception, *Pépite* est destiné à des élèves individuels (diagnostic individuel) puis à la classe (diagnostic collectif) dans le but de constituer des groupes d'élèves ayant des praxis voisines en algèbre élémentaire. Le but du diagnostic est de favoriser la régulation de l'enseignement en fonction des besoins des élèves.

2. *Parcours différenciés d'enseignement*

Nous souhaitons fournir aux enseignants des outils pour gérer l'hétérogénéité des apprentissages en algèbre et organiser la différenciation de l'enseignement en fonction des besoins des élèves. A partir des différents stéréotypes des élèves, nous constituons des groupes (3 ou 4) d'élèves de profils voisins à qui nous proposons de travailler sur un même parcours d'enseignement.

Nous présentons un parcours d'enseignement (succession de tâches) destiné à des élèves dont le profil est semblable à celui de Jules (tableau 3). Ces élèves donnent peu de sens aux lettres et mobilisent peu l'outil algébrique, ou de façon non adaptée, pour résoudre des problèmes du domaine algébrique. Ils donnent peu de sens au calcul algébrique, souvent sans lien avec le numérique, et utilisent des règles de transformation sans contrôle, par exemple des règles de concaténation ($4a^3+3a^2 \rightarrow 7a^5$) ou de fausse linéarité ($a^2 \rightarrow 2a$). Mais ces élèves réussissent à traduire algébriquement, lorsqu'il n'y a pas besoin de reformulation, des relations mathématiques entre variables dans un cadre donné : c'est un levier à exploiter.

Les objectifs d'apprentissage retenus pour ces élèves sont les suivants :

- Motiver et donner du sens aux lettres comme nombres généralisés via des exercices mettant en jeu des situations de généralisation et de preuve, par exemple à travers l'étude de l'équivalence de programmes de calcul.
- Déstabiliser les conceptions erronées sur les lettres, les règles de transformation ou de traduction via des contre-exemples numériques ou en changeant de cadre.
- Développer des techniques contrôlées de calcul algébrique.

Les tâches constituant le parcours d'enseignement sont caractérisées par : un type de tâche, une technique relativement à la technologie, une théorie attendue à ce niveau scolaire, et différents niveaux d'intervention (Castela 2008). En voici quelques exemples :

- Des tâches pour montrer les limites du numérique et travailler la nécessité d'introduire les lettres dans des problèmes de généralisation et de modélisation.
- Des tâches pour déstabiliser les identités fausses en amenant les élèves à articuler les cadres algébrique et numérique à travers l'usage de contre-exemples pour prouver qu'une identité est fausse telle que celle de la figure 8.
- Des tâches pour travailler les liens entre différentes représentations à partir des exercices du site http://www.fi.uu.nl/wisweb/.
- Des tâches pour développer l'habileté en calcul algébrique (développer, factoriser,…) en contrôlant l'équivalence des expressions après transformation, par exemple avec un logiciel de calcul formel.

Les égalités suivantes sont-elles vraies pour toutes valeurs de a ? Justifier votre réponse.
$(a+b)^2 = a^2 + b^2$ → → $3a+5 = 8a$ → → $a+a^2 = 2a^3$ → → $(a+b)^2 = 2(a+b)$

***Figure 8** – Tâche pour déstabiliser les identités fausses*

Des parcours globaux seraient difficilement exploitables par les enseignants en raison de leur longueur excessive. Il est nécessaire de travailler sur des thèmes spécifiques et de définir des objectifs d'apprentissage ciblés, par exemple en lien avec la préparation d'un contrôle ou la stabilisation des acquis.

VII. CONCLUSION

Ce projet de recherche a permis d'apporter quelques éléments de réponse aux questions initialement posées.

La viabilité du transfert d'un outil de diagnostic, développé dans des laboratoires de recherche, vers une plateforme d'exercices en ligne largement utilisée par les enseignants de mathématiques de collège, repose à la fois sur une analyse combinatoire et sur une analyse didactique que nous avons présentées. Actuellement, la plateforme *LaboMEP* propose aux enseignants plusieurs clones des tâches diagnostiques du test : un clone pour le niveau 3ème et deux clones pour le niveau 2nd.

La robustesse de l'outil de diagnostic implémenté dans la plateforme a fait l'objet d'une première expérimentation positive mais restreinte à une classe qu'il restera à conforter à plus large échelle. De nouvelles expérimentations sur la plateforme *LaboMEP* sont en cours avec quatre classes de 3ème et une classe de 2nd.

L'étude montre que le diagnostic a un rôle prédictif pour le choix de parcours d'enseignement adaptés aux besoins des élèves ; nous l'avons illustré succinctement. Plus précisément, deux thèses sont en cours[8]. La première thèse, par Julia Pilet, vise à modéliser des parcours différenciés d'enseignement que les enseignants pourront utiliser sur *LaboMeP* pour gérer l'hétérogénéité des élèves. La deuxième thèse, par Soraya Bedja, concerne l'étude de l'instrumentation de ces ressources par les enseignants.

REFERENCES

Artigue M., Abboud-Blanchard M., Cazes C., Vandebrouck F. (2006) Suivi de l'expérimentation de la région Ile de France : ressources en ligne pour l'enseignement des mathématiques en classe de seconde. Rapport interne IREM de Paris 7.

Artigue M., Gueudet G. (2008) Ressources en ligne et enseignement des mathématiques, *Actes de l'Université d'été de mathématiques*, *Saint-Flour*. http://www3.ac-clermont.fr/pedago/maths/pages/UE2008/prog_UE_2008.htm

Castela C. (2008) Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignorés par les institutions d'apprentissage. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 28(2), 135-182.

Chenevotot-Quentin F., Grugeon B., Delozanne E. (2011) Vers un diagnostic cognitif dynamique en algèbre élémentaire. In Kuzniak A., Sokhna M. (Eds.) (pp. 827-842) *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone EMF2009, Enseignement des mathématiques et développement : enjeux de société et de formation*. Dakar. http://educmath.inrp.fr/Educmath/ressources/actes-en-ligne/emfgt6/

[8] Laboratoire de Didactique André Revuz (LDAR), Université Paris Diderot.

Chevallard Y. (2002) Structures et fonctions. In Dorier J.-L., Artaud M., Artigue M., Berthelot R., Floris R. (Eds.) (pp. 3-32) Actes de la XIème école de didactique des mathématiques. Corps (Isère) : La Pensée Sauvage.

Croset M.-C. (2009) *Modélisation des connaissances des élèves au sein d'un logiciel éducatif d'algèbre. Etude des erreurs stables inter-élèves et intra-élève en termes de praxis-en-acte*. Thèse de doctorat. Université Joseph Fourier.

Darwesh A. (2010) *Diagnostic cognitif en EIAH : le système PépiMEP*. Thèse de doctorat. Université Pierre et Marie Curie.

Delozanne E., Chenevotot-Quentin F. (coordonnateurs) (2005a) Projet de recherche « Modélisation et mise en œuvre d'environnements informatiques pour la régulation de l'apprentissage, le cas de l'algèbre avec le projet LINGOT ». *Rapport de recherche, Projet Cognitique 2002, Programme « Ecole et sciences cognitives : les apprentissages et leurs dysfonctionnements » du MRT, Rapport de fin de projet, mars 2005*. http://lutes.upmc.fr/delozanne/Publi2000-.htm.

Delozanne E., Vincent C., Grugeon B., Gélis J.-M., Rogalski J., Coulange L. (2005b) From errors to stereotypes: Different levels of cognitive models in school algebra. In Richards G. (Ed.) (pp. 262-269) *Proceedings of World Conference on E-Learning in Corporate, Government, Healthcare and Higher Education.* Chesapeake, VA: AACE.

Delozanne E., Prévit D., Grugeon-Allys B., Chenevotot-Quentin F. (2010) Vers un modèle de diagnostic de compétence. *Revue Techniques et Sciences Informatiques* 29(8-9), 899-938.

Douady R. (1985) The interplay between different settings. Tool-object dialectic in the extension of mathematical ability: Examples from elementary school teaching. In Streefland L. (Ed.) (Vol. 2, pp. 33-52) *Proceedings of the ninth international conference for the psychology of mathematics education*. Utrecht : State University of Utrecht.

Grugeon B. (1997) Conception et exploitation d'une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire. *Recherche en Didactique des Mathématiques* 17(2), 167-210.

Jean S., Delozanne E., Jacoboni P., Grugeon B. (1998) Cognitive profile in elementary algebra : the PEpite test interface. *IFIP-TC-3 Official Journal Education and Information Technology* 3, 1-15.

Ketterlin-Geller L.R., Yovanoff P. (2009) Diagnostic assessment in mathematics to support instructional decision making. Practical Assessment. *Research&Evaluation* 14(16). http://pareonline.net/getvn.asp?v=14&n=16

Kieran C. (2007) Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. In Lester F. K. (Eds.) (pp. 707-762). *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* Charlotte, NC: Information Age Publishing Inc.

Prévit D. (2008) *Génération d'exercices et analyse multicritère automatique de réponses ouvertes*. Thèse de doctorat. Université Pierre et Marie Curie.

Rabardel P. (1995) *Les hommes et les technologies, une approche cognitive des instruments contemporains*. Paris : Colin.

Richard P.-R., Fortuny J.-M., Gagnon M., Leduc N., Puertas E., Tessier-Baillargeon M. (2011) Didactic and theoretical-based perspectives in the experimental development of an intelligent tutorial system for the learning of geometr. *ZDM The International Journal on Mathematics Education* 43(3), 425-439.

Sfard A (1991) On the dual nature of mathematics conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics* 22, 1-36.

Vergnaud G., Cortes A., Favre-Artigue P. (1987) Introduction de l'algèbre auprès de débutants faibles, Problèmes épistémologiques et didactiques. *Actes du colloque de Sèvres : Didactique et acquisition des connaissances scientifiques* (pp. 259-288). Grenoble : Editions La Pensée Sauvage.

LES SIMULATEURS VIRTUELS POUR SOUTENIR L'APPRENTISSAGE DE PROBABILITÉS : UN OUTIL POUR LES ENSEIGNANTS

Viktor FREIMAN[*] – Annie SAVARD[**] – François LAROSE[***] – Laurent THEIS[****]

Résumé – Dans le courant du renouvellement des pratiques pédagogiques, l'interactivité des outils techno-pédagogiques peut-elle servir aux enseignants de mathématiques ? Notre étude exploratoire a permis aux enseignants du Nouveau-Brunswick, Canada, d'essayer le simulateur virtuel de jeux de hasard développé par une équipe de techno-pédagogues, enseignants et didacticiens du Québec. Lors d'entretiens semi-structurés, les participants ont semblé être enthousiastes face au potentiel d'enrichir leurs pratiques d'enseignement en lien avec le programme d'études en mathématiques et les situations de vie courante. De plus, ils anticipent une meilleure compréhension chez leurs élèves. Les besoins d'un accompagnement techno-pédagogique et didactique ont été également ressortis.

Mots-clefs : enseignement/apprentissage de probabilités, simulateurs virtuels, mathématiques et TIC

Abstract – In the wave of the renewing teaching practices, one can ask of the possibilities to use increasingly interactive technology by mathematics teachers. Our exploratory study allowed New-Brunswick's Canadian teachers to try out virtual simulators of games of chance that have been developed by a team of teachers, mathematics educators and specialists in educational technology from Quebec. In semi-structured interviews that followed the experimentation, the teachers-participants seem to uncover potential enriching opportunities for their students related to curriculum and real-life situations. They also anticipate better understanding in their students. The need for techno-pedagogical and didactical follow-up was also expressed by teachers

Keywords: probability teaching and learning, virtual simulators, mathematics and technology

I. CONTEXTE DE RECHERCHE

Au Nouveau-Brunswick, province canadienne, l'enseignement systématique de la statistique et des probabilités a débuté dès l'an 2000 étant associé à la reforme graduelle des programmes d'études en mathématiques qui met l'accent sur la résolution de problèmes en lien avec la vie réelle, le raisonnement, la communication mathématique et la capacité de faire le lien entre les branches de mathématiques, les mathématiques et les autres disciplines, ainsi qu'entre les mathématiques et la vie de tous les jours, tout en voulant donner du sens aux apprentissages et développer la pensée critique chez tous les élèves (MENB 2005).

Or, un faible rendement des élèves dans les épreuves provinciales (MEDPE 2010), pancanadiennes et internationales (OCDE 2003) reflète de nombreux défis auxquels les enseignants[1] font face. Notons également les défis liés au contexte d'un milieu linguistique minoritaire dans lequel vivent les francophones de la province, tels que le manque du personnel qualifié, le manque de ressources financières, matérielles et humaines (Freiman 2010) auquel s'ajoutent les défis de renouvèlement de pratiques pédagogiques conformes au cadre théorique du programme d'études (Landry 2011, sous presse)[2]. Cette situation stimule la recherche de nouvelles approches et ressources pour améliorer les apprentissages dont l'utilisation des dispositifs numériques.

[*] Université de Moncton – Canada – viktor.freiman@umoncton.ca
[**] Université McGill – Canada – annie.savard@mcgill.ca
[***] Université de Sherbrooke – Canada – francois.larose@usherbrooke.ca
[****] Université de Sherbrooke – Canada – laurent.theis@usherbrooke.ca

[1] Dans ce texte, nous utiliserons le masculin afin d'en alléger la lecture, sans préjudice au genre des personnes ayant été impliquées dans les travaux dont il sera fait mention.

[2] Pour plus de détails sur le contexte du Nouveau-Brunswick, veuillez-vous référer au texte de Freiman, Richard et Jarvis présenté au colloque EMF2012, dans le cadre du projet spécial 3.

© Freiman V., Savard A., Larose F., Theis L. (2012) Les simulateurs virtuels pour soutenir l'apprentissage de probabilités : un outil pour les enseignants. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT6, pp. 824–837). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

En mathématiques, la croissance constante d'applications numériques s'accompagne d'un questionnement sur leur apport réel pour les apprentissages. Garofalo, Drier, Harper, Timmerman et Shockey (2000) ont mentionné que le transfert des méthodes traditionnelles d'enseignement sur support papier-crayon vers les environnements informatiques n'apporte pas nécessairement d'avantages perceptibles pour l'apprenant ou l'enseignant. Au contraire, ce type d'usage peut même nuire à la diversification des usages scolaires des TIC en les faisant percevoir comme peu utiles au plan didactique ou pédagogique (Grenon et Larose 2006, Larose, Grenon, Lenoir et Desbiens 2007).

Plusieurs auteurs suggèrent que les bénéfices de l'intégration des TIC se situent essentiellement au plan contextuel. La contextualisation des apprentissages, permise notamment par la mise en œuvre des technologies numériques et des caractéristiques du Web 2.0, présente un potentiel intéressant au plan de l'approfondissement des apprentissages (Caron 2007, Pernin, Emin et Guéraud 2009). Cela notamment à cause d'une certaine interactivité entre l'apprenant, l'objet d'apprentissage et un contexte plus ou moins authentique, comme c'est le cas avec les simulations (Garofalo et al. 2000). À cet égard, pour Herrington et Oliver (2000), des activités d'apprentissage authentiques se caractérisent par leur pertinence par rapport au monde réel, leur faible structuration, leur complexité, leur transdisciplinarité ainsi que leur durée soutenue permettant l'exploration, l'analyse et la collaboration. Tel que préconisé par le programme d'études québécois, ces activités suivent le modèle SAE (Situations d'Apprentissage et d'Évaluation), soit les situations qui présentent un contexte associé à une problématique, un ensemble de tâches complexes en visant ainsi la mobilisation des ressources, en sollicitant l'ensemble de la compétence (composantes et critères) et en permettant d'acquérir de nouvelles connaissances (Boucher, Loiselle et Reiber 2006).

Nous avons choisi de développer le simulateur de probabilités mettant en scène des jeux de hasard et d'argent pour favoriser, chez l'élève, l'apprentissage quant au fonctionnement du hasard et à la capacité de distinguer les concepts de chance et de hasard, modifier les représentations au regard de la contrôlabilité de ce dernier et prendre des décisions éclairées quant à leur éventuelle participation aux jeux de hasard et d'argent (Larose, Bourque et Freiman 2010). Nous voulions, enfin, appréhender les phénomènes probabilistes par une approche expérimentale. À cet effet, comme il est difficile d'expérimenter manuellement ce type de phénomène de très grands nombres de fois, par exemple en réalisant 1000 tirages, le simulateur nous semblait être un dispositif intéressant pour aider les élèves dans leur démarche de construction de savoirs.

L'outil a été créé dans le cadre d'un partenariat entre une équipe de professeurs chercheurs soutenus financièrement par deux organismes subventionnaires et le Ministère de l'éducation, du loisir et du sport du Québec, soit le CRSH[3], le FQRSC[4] ainsi que le MELS[5], d'une part et

---

[3] Larose F., Bédard J., Bourque J., Freiman V., Karsenti T., Morin M.-P., Savard A., Theis L. (2007-2010/2011). *Impact du recours à un contexte virtuel à caractère ludique sur l'enseignement et l'apprentissage des probabilités dans deux provinces francophones*. Conseil de recherche en sciences humaines du Canada (CRSH), programme des subventions ordinaires de recherche.

[4] Larose F., Bédard J., Couturier Y., Grenon V., Lavoie L.-C., Lebrun M., Morin M.-P., Savard A., Theis L. (2008-2010/2011). *L'apprentissage des probabilités en contexte ludique : transfert de compétences et impact sur la pratique des jeux de hasard et d'argent chez des élèves à risque du 1e cycle du secondaire*. Fonds québécois de recherche sur la société et la culture (FQRSC), programme des Actions concertées sur les impacts socioéconomiques de jeux de hasard et d'argent.

[5] Larose F., Bédard J., Karsenti T., Morin M.-P., Savard A., Theis L. (2008-2011). *Impact du recours à un contexte virtuel à caractère ludique sur l'enseignement et l'apprentissage des probabilités - Construction et entretien d'un site Internet visant le soutien à l'enseignement et à l'apprentissage des probabilités au 3e cycle du primaire et au 1e cycle du secondaire.* Québec : Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport.

d'autre part, une entreprise spécialisée dans le développement et la gestion de sites techno-pédagogiques, SCOLAB[6] dont le produit phare, *Netmaths*, est le seul site de soutien à l'apprentissage des mathématiques systématiquement utilisé dans les écoles québécoises.

Le contenu du simulateur ainsi que des scénarios d'apprentissage et d'évaluation virtuels correspondants a été développé en collaboration avec des enseignants de mathématiques au secondaire à la commission scolaire Marie-Victorin du Québec ainsi que leur conseiller pédagogique (Larose et al. 2011, Theis et Savard 2010). Lors de la formation et l'accompagnement des enseignants, ceux-ci ont participé au développement et à la validation des simulateurs par la création de situations d'apprentissage et par leur utilisation en classe.

Afin de valider le simulateur et les situations SAE par les enseignants qui œuvrent dans un contexte différent du Québec, nous avons réalisé une étude pilote au Nouveau-Brunswick en présentant le nouvel outil à un groupe d'enseignants du primaire (6-8 années, 12-14 ans). Lors de deux séquences d'ateliers de formation, nous avons interrogé les participants sur leurs perceptions du dispositif technologique présenté et de son usage possible en salle de classe, ainsi que de son apport potentiel aux apprentissages des élèves. Dans notre article, nous présentons une analyse préliminaire de thèmes qui émergent dans ces entretiens qui ont été audio-enregistrés.

II. ENSEIGNEMENT DES PROBABILITES ET LES TIC

Il existe trois modes de construction du concept de probabilités (Briand 2005, Caron 2004), selon les approches théorique, fréquentielle ou expérimentale et subjective. Ainsi, l'approche théorique est présentée comme le rapport entre le nombre de cas favorables et le nombre de cas possibles d'un évènement quelconque lorsque tous les cas sont jugés équiprobables. Cette approche est fréquemment utilisée dans les situations d'apprentissage proposées aux élèves. L'approche fréquentielle est entendue comme la mesure de la fréquence relative d'un évènement par rapport à un ensemble de référence. Les probabilités sont abordées via les statistiques, ce qui permet d'établir des liens entre ces deux univers conceptuels. La troisième approche, l'approche subjective ou le modèle Bayésien, évalue « la mesure de certitude associée à certains évènements » (Caron 2004, p. 88).

Les traces de chacune de ces approches se retrouvent dans les programmes d'études du Québec et du Nouveau-Brunswick en permettant aux élèves de 12 à 14 ans d'expérimenter afin de construire du sens et surtout de tisser des liens entre les apprentissages scolaires et les situations de la vie quotidienne. D'ailleurs, l'utilisation de contextes familiers et issus du quotidien pour introduire ces concepts probabilistes semble être une approche privilégiée par plusieurs chercheurs (Borovcnik et Peard 1996, Briand 2005, Régnier 2003, Savard 2008). Nous partageons l'avis de Munisamy et Doraisamy (1998) en ce qui concerne l'introduction de situations qui favorisent la simulation et l'expérimentation et qui mettent l'accent sur la création de méthodes de traitement des données. Le raisonnement probabiliste peut ainsi se développer en cohérence avec la vision du monde de l'élève (Larrick 2004).

Les outils virtuels sont utilisés à différents niveaux d'enseignement de mathématiques. Seal et Przasnyski (2005) ont analysé les bénéfices découlant de l'utilisation de simulations de jeu de roulette à l'aide de feuilles de calculs du logiciel Microsoft Excel dans les cours de statistique universitaires. Selon ces auteurs, les simulations dans cet environnement virtuel rendent les apprentissages non seulement attrayants, mais permettent également d'étudier

[6] https://www.scolab.com/Default_fr.aspx

différentes stratégies de jeu sans recours aux mathématiques complexes et ce, à partir de multiples perspectives.

Des simulations probabilistes ont été menées par de petits groupes d'étudiants adultes via le système d'apprentissage distribué synchrone Kansas (*A Networked, Shared Application Space*). Ces simulations ont permis de conduire plusieurs fois les expériences probabilistes selon le modèle '*observe – predict – explain*' (Hennessy et al. 1995). Scanlon et al. (1997) rapportent que la technologie a permis d'obtenir les résultats d'un grand nombre d'essais, mais la capacité des groupes d'expliquer le phénomène observé restait limitée.

Utilisés dans la formation initiale des enseignants du primaire (Godino, Cañizares et Díaz 2003), les simulateurs ont permis d'aborder les conceptions probabilistes de façon authentique, de simuler des évènements probabilistes autrement difficilement observables, de faire des liens entre les probabilités théoriques et expérimentales, ainsi que de créer de nouveaux espaces de discussion et de dialogue. Toutefois, les auteurs expriment quelques réserves par rapport à l'impact de cette forme d'apprentissage relatant les difficultés de participants de distinguer les résultats estimés par l'expérimentation de ceux obtenus de façon théorique, de même que l'habileté d'expliquer le phénomène observé n'est pas affectée par les simulations (Godino et al. 2003, Batanero et al. 2005).

Les auteurs étudient également le rôle de simulateurs virtuels dans le développement de concepts probabilistes et plus particulièrement en ce qui concerne les conceptions erronées typiquement ancrées chez les élèves. Ainsi, une étude a été menée par Bill et Gayton (2010) auprès d'élèves de 10e année dans laquelle les élèves avaient pour tâches de lancer des pièces de monnaie (pile ou face) de façon séquentielle (probabilité d'avoir la séquence FPFPFP vs FPFFPP, tâche 1) ou combinée (on compare les résultats totaux de six lancers, tâche 2). Les élèves ont effectué les expériences physiques (lancer des pièces de monnaie réelles) et virtuelles à l'aide de l'outil *Fathom*™ simulation (idem). Les auteurs relatent que l'utilisation de deux types d'outils physique et virtuel a été appréciée par les élèves et les enseignants comme stratégie efficace d'enseignement permettant d'atteindre plus de profondeur dans la compréhension conceptuelle de phénomènes de hasard.

Konold et Kazak (2008) soulignent l'importance d'expériences probabilistes à répétition pour permettre aux élèves, dès le jeune âge, de développer les conceptions et perceptions de chance et de hasard en parallèle, comme, par exemple, le fait que les résultats obtenus varient d'une expérience à l'autre. La modélisation virtuelle à l'aide du *TinkerPlots* permet aux élèves d'explorer à répétition les situations de lancement de deux dès ou de rotation d'une roue chanceuse renforçant ainsi des liens entre les perceptions et les conceptions (idem.).

À la lumière des écrits recensés, en lien avec une approche didactique expérimentale, nous avons opté pour un outil virtuel proposant une simulation de jeux de hasard permettant de faire rapidement un grand nombre d'essais, accompagnée d'une présence des graphiques avec les pourcentages qui permettent de visualiser la variabilité de résultats d'essais due au hasard et d'illustrer la loi des grands nombres. Ceci donnera à l'enseignant une possibilité d'introduire les variables didactiques de différentes manières. Puisque l'outil virtuel a été créé au Québec, nous voulions investiguer, comme objectif principal, son utilité dans un contexte scolaire différent, soit celui du Nouveau-Brunswick qui a son propre régime pédagogique, ses programmes d'études et ses ressources didactiques.

Plus spécifiquement, nous voulions étudier, dans le cadre de ce projet, la sensibilité des enseignants (DeBlois, 2006) utilisateurs envers les environnements informatisés mis à leur disposition, en fait les milieux (c'est-à-dire tout ce qui agit sur l'enseignement et l'apprentissage ou ce sur quoi agit l'enseignement et l'apprentissage) vers lesquels ils porteront leur attention. Afin de pouvoir identifier les milieux auxquels les enseignants sont sensibles, nous nous sommes interrogés sur les représentations des enseignants par rapport au simulateur virtuel et aux scénarios d'enseignement-apprentissage possibles qui l'intègrent. Finalement, nous voulions mettre ces représentations en perspective de développement professionnel didactique des enseignants et le rôle que peuvent y jouer des ressources virtuelles telles que les simulateurs de jeux de hasard.

III. METHODOLOGIE

Tel que mentionné, l'essentiel du dispositif technologique développé a fait l'objet d'une mise en ligne et a été rendu accessible à l'ensemble des élèves et des enseignants des classes abonnées à *Netmaths*. Cependant, la pauvreté des connexions Internet disponibles dans certaines écoles a créé le besoin d'élaborer une version portable (sur clé USB) du simulateur et des situations de jeu associées pour permettre un usage local, par exemple dans le cadre du recours à un laboratoire portatif.

Le simulateur comme tel présente à l'élève huit situations ludiques, à caractère aléatoire, soit : un jeu de « pile ou face », de trois portes (Monty Hall), de roue chanceuse, de boulier pour tirage de type loto, un jeu de dés, un jeu de blackjack, une simulation de tirage (avec ou sans remise) de type loterie 6/49 et un jeu de roulette de type casino. Chaque situation de jeu est multiparamétrable et produit une représentation des résultats de tirage aléatoire en temps réel (ou au ralenti) sur graphe. Le choix des simulations contextualisées n'était pas le produit du hasard mais bien de la proximité avec à la fois les SAE utilisées en classe et avec des situations de jeu de hasard et d'argent vécues par l'élève ou observées dans son entourage proximal, sa famille ou ses pairs.

Les SAE en version informatisée, pour leur part, se présentaient sous la forme d'une invitation à parcourir une fête foraine et à interagir avec des bonimenteurs (animateurs virtuels) dans chaque kiosque correspondant à une situation de jeu particulière. L'interaction dynamique entre l'élève et le bonimenteur permet au premier de problématiser, de réfléchir sur une stratégie d'action (jeu), de la mettre à l'épreuve en suivant un processus de résolution de problème en temps réel, d'estimer ses probabilités de gain, de constater l'évolution de la situation de tirage et de réfléchir après le fait sur la justesse de la stratégie de jeu adoptée ainsi que sur son rapport aux probabilités réelles de gain.

À titre d'exemple, nous présentons (Fig. 1) le jeu de dés qui permet de lancer un certain nombre de dés (de 1 à 6) un certain nombre de fois (de 1 à 1000) tout en variant le montant (en $) et les conditions de gain ou de perte, ainsi que la vitesse de simulation (lente – rapide).

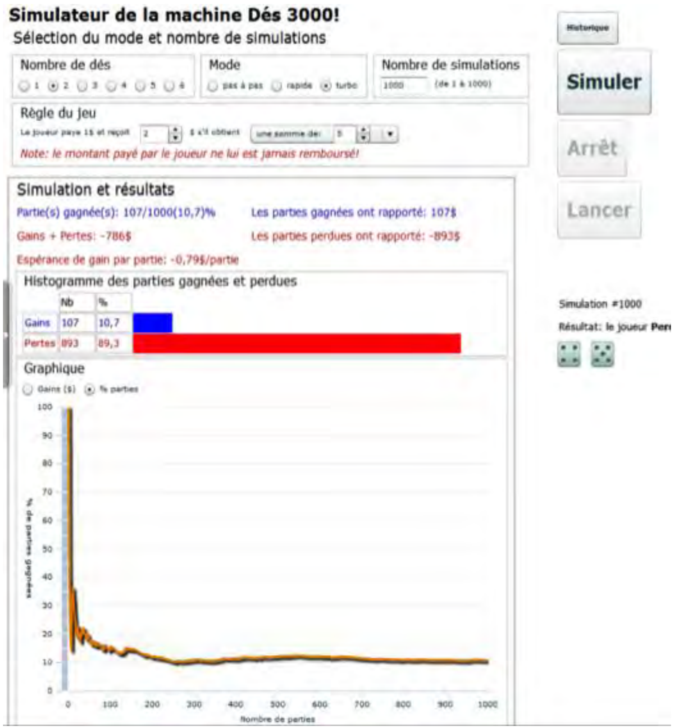


Figure 1 – *Exemple du protocole de simulation d'un jeu de hasard*

Dans la version informatisée (*Fête foraine* – Fig. 2), l'exploration est guidée par un personnage (bonimenteur) qui mène un dialogue avec l'élève.

Figure 2 – *Exemple d'introduction d'une mise au jeu dans l'option Fête foraine*

L'élève est donc invité à suivre le dialogue entre deux autres personnages, Maxime et Amanda ; en donnant des conseils aux personnages (Fig. 3).

Figure 3 *– Exemple du dialogue avec l'élève*

En proposant à l'élève un choix de réponses, on l'invite explicitement à faire des prédictions, qui, selon les recherches, seront souvent basées sur l'intuition (dans ce cas, par exemple, que chaque somme donnée par les dés serait équiprobable, ou que le 9 va être plus fréquent, car 9 est plus grand que 7, ou bien l'élève peut se fier tout simplement sur 'son nombre préféré', comme la date de naissance). Chaque choix de l'élève doit être accompagné d'une explication permettant de conserver les traces numériques de son raisonnement. Dès que les choix sont faits, l'élève sera invité à faire une expérimentation à l'aide du simulateur. Ainsi, il pourra observer les résultats et les confronter à ses prédictions. Il porte ainsi un jugement sur les règles du jeu.

Dans le cadre de notre étude exploratoire, deux séquences d'ateliers ont été offertes par le premier auteur à des enseignants du Nouveau-Brunswick (niveau primaire, 6-8 années), quatre ateliers par tour. Les enseignants participants ont été soit invités par le chercheur sur la base de travail conjoint précédent sur d'autres projets de recherche, soit sur appel à volontaires par les agents en mathématiques des districts scolaires. Au total, 18 enseignants (en quatre groupes de 2-2-6-8 participants) ont pris part au projet. La première séquence d'ateliers visait à introduire le simulateur.

Un mois et demi entre les deux séquences de formation a permis aux participants d'explorer les simulateurs à leur guise. 15 de ces enseignants ont pris part à la deuxième séquence en partageant ainsi leurs expériences. La deuxième séquence a ainsi permis de recueillir les premières représentations des participants et leur vision des possibilités d'utilisation (explorées ou anticipées).

Lors des entrevues semi-structurées de groupe (trois groupes de deux, cinq et six participants respectivement), des questions ont été posées par rapport à l'exploration réalisée (« *Qu'avez-vous fait avec les simulateurs ?* »), aux simulateurs eux-mêmes (« *Comment avez-vous trouvé l'outil ?* »), au potentiel de leur utilisation en salle de classe et en dehors (« *Que les simulateurs vous apportent-ils pour l'enseignement des probabilités* ? ») et aux besoins futurs en ressources et en support techno-pédagogique (« *Quelles sont vos suggestions pour la* *suite du projet ?* »). Les entretiens ont été audio-enregistrés et analysés par les chercheurs de façon préliminaire. Par la suite, nous associons ces résultats aux milieux dans le sens qu'indique DeBlois (2006), soit vers quoi ils dirigent leur attention.

IV. RESULTATS PRELIMINAIRES

Dans cette section, nous présentons les résultats des entretiens lors du deuxième tour d'atelier, suite aux expérimentations faites ou non par les participants. En lien avec notre question de recherche, les thèmes ressortis ont été regroupés autour de trois milieux : l'adéquation au programme d'études, la qualité du dispositif technologique sur le plan du design et du contenu pour l'apprentissage des élèves et des enseignants et le développement futur (besoin en ressources et en formation).

1. *Premier milieu : adéquation au programme d'études*

Dans tous les trois groupes, les enseignants ont été d'avis que les simulateurs virtuels et les SAE créés en lien avec les programmes de mathématiques au Québec sont également pertinents pour le Nouveau-Brunswick, mais qu'il y a une adaptation à faire, la nature de cette adaptation n'a pas été explicitée. On peut quand-même avancer qu'au Nouveau-Brunswick, les enseignants suivent le programme à partir d'un répertoire de résultats d'apprentissages spécifiques (RAS). Ces RAS sont rattachés aux domaines du programme d'études pour chaque niveau scolaire (nombres et opérations, régularités et relations, formes et espace, statistiques et probabilités). Le programme ne prescrit pas l'ordre dans lequel les RAS doivent être abordés ; chaque enseignant peut faire ses propres choix d'activités. Toutefois, avec l'implantation de Communautés d'Apprentissages Professionnelles (CAP), les enseignants se concertent, surtout au niveau d'évaluations ; ceci implique la nécessité de synchroniser le parcours dans différentes classes d'un même niveau. Certains participants ont même relaté les difficultés d'innover dans de telles circonstances. Un autre aspect important est ressorti de nos entretiens touchant spécifiquement le domaine des probabilités, soit le poids faible de ce domaine dans l'épreuve provinciale (12%) par rapport aux autres domaines (par exemple nombres avec 40%). Ceci explique une moindre importance accordée à ce domaine, en la tassant vers la fin de l'année scolaire ('si le temps le permet'). Certaines CAP ont quand-même commencé à introduire le domaine progressivement tout au long de l'année.

Par rapport aux principes didactiques du programme d'études, selon les participants, le matériel présenté permet d'établir des liens entre les mathématiques et la vie réelle, entre les mathématiques et d'autres matières scolaires et entre différents modules dans le cours de mathématiques. Donc, conformément aux programmes d'études du Nouveau-Brunswick, cette affirmation reflète le principe didactique mettant de l'emphase sur le développement des habiletés de faire des liens chez l'élève. Notons que les autres principes didactiques (gérer et résoudre une situation-problème, communiquer et raisonner mathématiquement) sont moins explicités dans les propos des enseignants.

Toujours en lien avec le programme d'études, les enseignants ont mentionné le potentiel du site en ce qui concerne le développement de la pensée critique envers les jeux de hasard et d'argent, ce qui, selon eux, est très important au niveau des résultats des apprentissages transdisciplinaires. Ainsi, au-delà de donner du sens aux résultats des apprentissages spécifiques des probabilités, ils trouvent que la simulation virtuelle pourrait sensibiliser les jeunes aux dangers associés à une approche non-critique envers les options que ces jeux proposent dans la vraie vie.

Plus particulièrement, leurs propos font référence au module qui simule le contexte du jeu de loterie de 6 sur 49. En réalisant, par exemple, un grand nombre d'essais (10 000) sur le simulateur, selon un enseignant, les élèves peuvent non seulement '*réaliser les faibles probabilités (de gagner), mais aussi faire le lien avec l'achat des billets de loterie'* (sujet 10). Sa collègue abonde dans le même sens en affirmant que la ressource permet de '*sensibiliser les jeunes au casino, se rendre compte que c'est du rêve'* et ainsi contribuer à la prévention, sensibilisation dès leur jeune âge à une dépendance qui peut les affecter eux-mêmes ainsi que leurs proches, à la famille perdant de l'argent (sujet 12). En interprétant ces propos, on peut se demander, de quelle façon ces transferts entre les situations de la vie réelle faisant appel au jugement critique de jeunes et les simulations virtuelles peuvent être explicités.

2. Deuxième milieu : l'apport perçu de l'outil virtuel à l'apprentissage

Parallèlement aux remarques d'ordre général par rapport à la qualité de l'outil (« *Bel outil ! »* (Sujet 6), « *Beau médium à travailler avec ! »* (Sujet 1)), les enseignants ont mentionné que les options qu'il offre peuvent leur permettre d'aller plus loin en comparaison avec les autres ressources disponibles, telles que le manuel ou matériel de manipulation physique :

Sujet 2 : Ça me donne des outils pour aller plus loin.

Un autre enseignant précise :

Sujet 1 : Première fois que je vois, comme option pédagogique, un simulateur qui permet de varier les paramètres (nombre d'essais, nombre de dés, etc.) de façon interactive et ainsi observer les effets des changements sur les fréquences.

Ce dernier commentaire est particulièrement intéressant, car il reflète explicitement les bénéfices possibles du simulateur mentionnés dans les écrits recensés, soit le fait de jouer sur les variables didactiques, incluant une possibilité de faire un grand nombre d'essais dans une courte période de temps. Ainsi, en prenant connaissance de ce nouvel outil, un participant (sujet 10) dit ne pas en avoir connu d'autres permettant de faire un aussi grand nombre d'essais en si peu de temps. Parmi d'autres outils disponibles, une enseignante a nommé les options de simulations de jeux de hasard avec un logiciel pour le Smartboard (tableau blanc interactif) qu'elle a déjà expérimentées et qui possèdent également des applications pour les probabilités.

Le fait d'avoir une option de « visualiser » le phénomène de hasard avec un outil virtuel peut stimuler le questionnement par rapport aux résultats qui, dans le cas de situations probabilistes vont souvent à l'encontre de l'intuition, comme c'est le cas du jeu des trois portes (Monty Hall). Ainsi, un enseignant dit être étonné d'observer chez l'élève l'émergence d'un questionnement par rapport aux résultats de simulation virtuelle de ce jeu :

Sujet 1 : Le simulateur nous a mis en questionnement. Alors que tout le monde pense à la probabilité de ½ de gagner dans le cas de maintien du premier choix ou de changement de porte, le simulateur montre autre chose, qui va à l'encontre de cette prédiction initiale (en effet, la probabilité devient 2/3 lors du changement) et ça amène les élèves à questionner sur le phénomène.

Ceci ouvre un débat, une discussion pour essayer de donner du sens aux résultats obtenus :

Sujet 1 : Ça oblige l'enseignant à passer par le questionnement, ainsi que les jeunes, ça donne le départ au questionnement.

Cependant, dans d'autres cas, où le questionnement n'apparait pas naturellement, un travail didactique plus nuancé serait requis de la part de l'enseignant. Ceci jette la lumière sur l'appréciation de l'environnement plus structuré comme dans l'option *Fête foraine* qui est perçue par une enseignante comme utile :

> Sujet 5 : Ces scénarios (*Fête foraine*) avec des suggestions des 'bonnes' questions à poser aux élèves donnent un modèle de comment les faire questionner.

Dans un même ordre d'idées, le fait de proposer des scénarios concrets pourrait être utile pour les enseignants moins expérimentés (débutants) :

> Sujet 9 : Enseignants débutants commencent avec un outil de qualité, au même titre qu'un enseignant d'expérience.

Au-delà d'un questionnement de résultats obtenus suite à une expérience virtuelle, il y a toujours la question des liens avec le calcul théorique des probabilités en tenant compte de tous les cas possibles. Au primaire, le comptage est supporté par une représentation à l'aide d'arbres de probabilités. Ainsi, en analysant les résultats d'une expérience, les élèves peuvent, dans certains cas, comprendre le mécanisme de comptage de toutes les possibilités :

> Sujet 10 : L'analyse des simulateurs amène des liens avec l'enseignement sans l'ordinateur (entre autre, calcul de probabilité théorique) : on pense aux arbres de combinaisons – c'est difficile avec loterie 6/49, mais possible avec les dés. Toutefois, même avec les dés, il y des limites au comptage de toutes les possibilités (avec les arbres), selon les contextes.

Effectivement, le travail de théorisation à partir des expériences virtuelles peut devenir plus explicite, mais il reste à savoir comment cette explicitation peut être exploitée en salle de classe en anticipant une résistance possible de la part des élèves qui vont voir les résultants de l'expérience comme 'preuve théorique'. Ainsi, les affirmations de certains participants que l'approche expérimentale soutenue par le simulateur permet '*d'accélérer les processus de compréhension des élèves'* (sujet 8) doivent être cautionnées davantage, ce qui pourrait mener à des recherches plus poussées.

Du côté des caractéristiques de nature techno-pédagogique, nos participants se montrent unanimes dans les constats que le simulateur est une ressource virtuelle très attrayante et dynamique pour les élèves en leur permettant une interaction avec le logiciel. Ainsi, ils témoignent de son impact déjà observé ou anticipé sur l'intérêt des élèves. Ils voient que la motivation des élèves augmente lorsqu'ils travaillent avec les simulateurs virtuels par rapport au même type de travail (expériences probabilistes) dans un environnement physique. Les enseignants qui ont essayé l'outil dans leurs classes constatent que l'intérêt des élèves envers les probabilités, déjà présent au départ, accroit lorsqu'on ajoute le simulateur sans toutefois fournir les détails d'un tel constat ni comment ceci affecte les résultats d'apprentissages.

Selon nos participants, l'option *Fête foraine* s'avère particulièrement intéressante sur le plan esthétique tout en présentant des possibilités de faire des mathématiques autrement :

> Sujet 14 : Outil qui va servir pour beaucoup de gens et pour longtemps.

Ces éloges, sont-elles faites sur le coup d'émotion témoignant de l'appréciation immédiate de l'outil ou suite à une mûre réflexion sur son impact réel et/ou anticipé sur les apprentissages des élèves ? Nos données sont muettes à ce sujet.

De plus certains enseignants ont fait remarquer que le fait d'utiliser le logiciel *Flash* pour démarrer les jeux (dans la version *Fête Foraine*) pourrait créer des obstacles pour l'utilisation de la ressource. Selon un enseignant, au niveau de soutien technologique, il faut que les districts scolaires aient des versions plus récentes de logiciels upportant les sites (par exemple *Flash*) et qu'elles soient régulièrement mises à jour.

3. Troisième milieu : leurs besoins techno-pédagogiques et didactiques

Bien que certaines opinions exprimées par nos participants ouvrent sur les usages possibles du simulateur pour enrichir les pratiques pédagogiques, ce milieu doit être présenté avec plusieurs précautions : le temps d'utilisation était trop court pour bien saisir toutes les options, le temps de validation lors des ateliers était également limité, ce qui limite par conséquence l'étendue des données et leur interprétation en termes de besoins futurs.

Ainsi, par rapport aux aspects didactiques, les enseignants ont exprimé leur besoin de savoir comment aborder les conceptions erronées à l'aide de simulateurs. Selon eux, dans l'espace d'activités *Fête foraine* il faudra prévoir une possibilité de rétroaction à l'élève en lui donnant une réponse et une explication :

> Sujet 7 : Avoir évaluations formatives et sommatives, éléments d'évaluation que l'on pourrait choisir selon nos besoins (site, outils performants).

Un enseignant (sujet 1) relate qu'un tel outil d'évaluation aurait permis de dégager plus de temps pour d'autres éléments essentiels de son travail. Les participants aimeraient également avoir des outils leur permettant d'explorer d'autres contextes de vie réelle qui sont liés aux jeux de hasard (jeux de cartes) ou non (probabilités des précipitations météorologiques). Les enseignants souhaitent avoir une banque leur permettant de trouver plus des problèmes sur les probabilités, en lien avec le contenu de l'examen provincial.

Un enseignant (sujet 2) suggère de faire un site semblable pour tous les domaines des mathématiques (géométrie…), ainsi qu'une possibilité d'utiliser d'autres ressources virtuelles, comme *Sésamath* et *Mathenpoche*.

Une enseignante aimerait plus de ressources-maison (faites au Nouveau-Brunswick) pour répondre à des besoins spécifiques de ses élèves. Entre autres, elle propose la création de séquences vidéo en français pour montrer aux autres comment intégrer les TIC en salle de classe :

> Sujet 11 : Beaucoup de ressources en anglais, mais peu en français (sur YouTube) - On pourrait construire nos propres vidéos.

Selon cette enseignante, les vidéos sont importantes pour toutes les matières « *pour aider les enseignants qui ne sont pas formés dans toutes les matières, (il faut aussi) une vidéo à présenter pour les élèves plutôt que l'enseignant fasse des démonstrations (sciences)* ».

V. CONCLUSION

Les résultats obtenus dans le cadre de ce projet de recherche ont permis d'identifier trois milieux auxquels les enseignants utilisateurs sont sensibles, soit la pertinence au programme d'étude, l'apport de l'outil virtuel ainsi que leurs besoins techno-pédagogiques. Ces milieux possèdent tous la caractéristique suivante, soit d'être d'abord et avant tout une ressource au service de l'enseignant.

Le premier milieu auquel les enseignants utilisateurs se sont montrés sensibles a trait à la pertinence du contenu mathématique des simulateurs. L'outil répond aux visées institutionnelles qui sont aussi les visées des enseignants utilisateurs. Le deuxième milieu est lié à l'apport de l'outil virtuel, tant du côté de l'enseignement que du côté de l'apprentissage. La possibilité d'intervenir sur les variables didactiques en les modifiant, la possibilité d'intervenir directement sur les conceptions des élèves et le fait que l'outil permet aux enseignants d'apprendre à questionner les élèves pour faire émerger les conceptions sont les aspects ressortis par les enseignants. Le troisième milieu auquel les enseignants se sont montrés sensibles est lié à leurs besoins en formation et en ressources-maison.

Suite aux analyses préliminaires, nos résultats semblent indiquer que l'outil développé suscite l'intérêt des enseignants. Toutefois, l'intégration de l'outil à leurs pratiques demande un soutien sur le plan de changements conceptuels des élèves et l'évaluation. De nouveaux questionnements à des fins didactiques émergent ainsi :

- Comment adapter les ressources à d'autres contextes afin de maximiser leur impact sur les apprentissages des élèves ?
- Quel type d'accompagnement techno-pédagogique et didactique permet de multiplier ces pratiques innovatrices ?
- Comment poursuivre le développement de nouvelles ressources techno-pédagogiques en mathématiques et dans d'autres matières ?

Ces questions nous amènent à approfondir nos analyses des données de cette recherche et en entreprendre d'autres. Il devient donc nécessaire d'étudier les pratiques des enseignants et les activités des élèves dans des situations intégrant les simulateurs virtuels.

REFERENCES

Batanero C., Godino J. D., Cañizares M. J. (2005) Simulation as a tool to train pre-service school teachers. In Adler J. (Ed.) *Proceedings of ICMI First African Regional Conference* [CD]. Johannesburg: International Commission on Mathematical Instruction. http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/CMIRCr.pdf, consulté le 27 novembre 2011.

Bill A., Gayton P. (2010) Coin-sequences and coin-combinations taught as companion tasks. In Reading C. (Ed.) *Data and context in statistics education: Towards an evidence-based society*. *Proceedings of the 8th International Conference on Teaching Statistics* (ICOTS8, July, 2010), Ljubljana, Slovenia. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute. http://eprints.utas.edu.au/10016/. consulté le 27 novembre 2011.

Borovcnik M., Peard R. (1996) Probability. In Bishop A. J. et al. (Eds.) (pp. 239-287). *International Handbook of Mathematical Education* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Boucher A., Loiselle A., Reiber D. (2006) *Les situations d'apprentissage et d'évaluation…: Lexique*. Qc : Commission scolaire des Patriotes.

Briand J. (2005) Une expérience statistique et une première approche des lois du hasard au lycée par une confrontation avec une machine simple. *Recherches en didactique des mathématiques* 25(2), 247-281.

Caron F. (2004) Splendeurs et misères de l'enseignement des probabilités au primaire. *Actes du Colloque GDM 2002 : Continuités et ruptures entre les mathématiques enseignées au primaire et au secondaire*. Trois Rivières : Université du Québec à Trois Rivières.

Caron P.A. (2007) Contextualisation de dispositifs pédagogiques sur des applications Web 2.0. Le projet Bricoles. In Marquet P.et al. (Eds.) *Actes du congrès AREF 2007 - Actualité de la Recherche et de l'éducation en Formation*. Strasbourg : Université Louis-Pasteur. http://www.congresintaref.org/actes_pdf/AREF2007_Pierre-Andre_CARON_501.pdf, consulté le 27 novembre 2011

DeBlois L. (2006) Influence des interprétations des productions des élèves sur les stratégies d'intervention en classe de mathématiques. *Educational Studies in Mathematics* 62(3), 307-309.

Freiman V. (2010) Complexité de la formation initiale des enseignants en mathématiques au primaire en milieu francophone minoritaire : le cas du Nouveau-Brunswick. In Proulx J.et Gattuso L. (Eds.) (pp. 201-214. *Formation des enseignants en mathématiques : tendances et perspectives actuelles.* Sherbrooke, Qc : Éditions du CRP.

Garofalo J., Drier H. S., Harper S., Timmerman M. A., Shockey T. (2000) Promoting appropriate uses of technology in mathematics teacher preparation. *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education* 1(1), 66-88. http://www.citejournal.org/vol1/iss1/currentissues/mathematics/article1.htm, consulté le 27 novembre 2011.

Godino J. D., Cañizares M. J., Díaz C. (2003) Teaching probability to pre-service primary school teachers through simulation. Paper presented at the *54th Session of the International Statistical Institute*. Berlin, Germany. http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/3/2989.pdf, consulté le 27 novembre 2011.

Grenon V., Larose F. (2006) L'informatique scolaire chez les enseignants du primaire : une ressource additionnelle ou un dispositif pédagogique alternatif. In Lebrun J.et al. (Eds.) (pp. 327-352) *Le matériel didactique et pédagogique : soutien à l'appropriation ou déterminant de l'intervention éducative*. Québec : Les presses de l'Université Laval.

Hennessy S., Twigger D., Byard M., Driver R., Draper S., Hartley R., Mohamed R., O'Malley C., O'Shea T., Scanlon E. (1995) A classroom intervention using a computer-augmented curriculum for mechanics. *International Journal of Science Education* 17, 189-206.

Herrington J., Oliver R. (2000) An instructional design framework for authentic learning environments. *Educational Technology Research and Development* 48(3), 23-48.

Konold C., Kazak S. (2008) Reconnecting Data and Chance. *Technology Innovations in Statistics Education* 2(1). http://escholarship.org/uc/item/38p7c94v#page-1, consulté le 27 novembre 2011.

Landry L. (2011, sous presse) L'enseignement des mathématiques au Nouveau-Brunswick francophone : vers la réussite scolaire et des apprentissages durables pour tous les élèves. In Freiman V. (Ed.) *Actes du Colloque GDM 2010 - L'enseignement de mathématiques dans et à travers des contextes particuliers : quel support didactique privilégier ?* Moncton : Université de Moncton.

Larose F., Bédard J., Couturier Y., Grenon V., Lavoie L.-C., Lebrun J., Morin M.-P., Savard A., Theis L. (2011) *L'apprentissage des probabilités en contexte ludique : transfert de compétences et impact sur la pratique des jeux de hasard et d'argent chez des élèves à* *risque du 1er cycle du secondaire.* Rapport de recherche FQRSC Sherbrooke : Université de Sherbrooke. http://www.crie.ca/Recherches/Documents/Rapport_final_révisé_09-2011_AC-2008_124845_Larose_et_Al.pdf, consulté le 27 novembre 2011.

Larose F., Bourque J., Freiman V. (2010) The effect of contextualising probability education on differentiating the concepts of luck, chance, and probabilities among middle and high school pupils in Quebec. In Reading C. (Ed.) *Data and context in statistics education: Towards an evidence-based society. Proceedings of the 8th International Conference on Teaching Statistics* (ICOTS8, July, 2010), Ljubljana, Slovenia. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute. http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/icots8/ICOTS8_C133_LAROSE.pdf, consulté le 27 novembre 2011.

Larose F., Grenon V., Lenoir Y., Desbiens J.-F. (2007) Le rapport des futurs enseignants à l'utilisation de l'informatique pédagogique : Fondements et trajectoire longitudinale. In Charlier B., Peraya D. (Eds.) (pp. 171-188) *Transformation des regards sur la recherche en technologie de l'éducation.* Bruxelles : De Boeck-Université.

Larrick R. P. (2004) Debiasing. In Koehler D. J., Harvey N. (Eds.) (pp. 316-337) *Blackwell Handbook of Judgment and Decision Making*. London: Blackwell Publishers.

Ministère de l'éducation et du développement de la petite enfance du Nouveau-Brunswick (MEDPE) (2010) *Résultats des examens : Districts scolaires francophones*. Fredericton : Gouvernement du N.-B.

Ministère de l'éducation du Nouveau-Brunswick (MENB) (2005) *Programme d'études en mathématiques. 5^{e} année*. Fredericton: Gouvernement du N.-B.

Munisamy S., Doraisamy L. (1998) Levels of Understanding of Probability Concept among Secondary School Pupils. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* 29(1), 39-45.

Organisation de Coopération et de Développement Economiques (OCDE) (2003) *Apprendre aujourd'hui, réussir demain : premiers résultats de PISA 2003*. OCDE.

Pernin J.-P, Emin V., Guéraud V. (2009) Intégration de la dimension utilisateur dans la conception de systèmes pour l'apprentissage : Scénarisation pédagogique dirigée par les intentions. *Ingénierie des Systèmes d'Information* 14(3), 9-30.

Régnier J.-C. (2003) A propos de la formation en statistique. Approches praxéologiques et épistémologiques de questions du champ de la didactique de la statistique. *Revue du Centre de Recherche en Éducation* 22/23, 157-201.

Savard A. (2008) *Le développement d'une pensée critique envers les jeux de hasard et d'argent par l'enseignement des probabilités à l'école primaire : Vers une prise de décision.* Thèse inédite. Université Laval, Québec.

Scanlon E., O'Shea T., Smith R. B., Li Y. (1997) Supporting the Distributed Synchronous Learning of Probability: learning from an experiment. In *Proceedings of CSCL'97*. http://gerrystahl.net/cscl/cscl97/papers/scanlon.pdf, consulté le 29 novembre 2011.

Seal K. C., Przasnyski Z. H. (2005) Illustrating Probability through Roulette: A Spreadsheet Simulation Model. *Spreadsheets in Education* 2(1). http://epublications.bond.edu.au/ejsie/vol2/iss1/4/, consulté le 29 novembre 2011.

Theis L., Savard A. (2010) Linking Probability to Real-World Situations: How do Teachers Make Use of the Mathematical Potential of Simulation Programs? In Reading C. (Ed.) *Data and context in statistics education: Towards an evidence-based society - Proceedings of the 8th International Conference on Teaching Statistics* (ICOTS8, July, 2010), Ljubljana, Slovenia. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute. http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/icots8/ICOTS8_C126_THEIS.pdf, consulté le 27 novembre 2011.

EXPERIMENTATION D'UNE RESSOURCE POUR UNE SITUATION DE RECHERCHE ET DE PREUVE ENTRE PAIRS

Jean-Philippe GEORGET* – Baptiste LABROUSSE**

Résumé – Cette contribution présente une expérimentation testant une ressource destinée à un enseignant de l'école primaire. Elle fait suite à une recherche présentée à EMF2009. Cette ressource doit permettre la mise en œuvre d'une situation de recherche et de preuve entre pairs par un enseignant novice dans la mise en œuvre de ce type de situations. La contribution aborde les problèmes posés par ce projet puis explicite les moyens mis en œuvre pour élaborer la ressource et la méthodologie d'expérimentation dans une classe. Enfin, des résultats sont donnés en illustrant la complexité des processus en jeu.

Mots-clefs : ressource destinée aux enseignants, ergonomie, situations de recherche et de preuve entre pairs (RPP)

Abstract – This paper is about an experiment with the goal of testing a primary teacher's resource. This is the next part of a research presented at EMF2009. This resource must help a teacher to practice a research and proof activity between peers with her pupils even she had never done this before. The paper presents the problems given by this project and describes the means to build the resource and the methodology of the experiment with some classmates. The results are given illustrating the complexity of the underlying process.

Keywords: resource for teachers, ergonomics, situations of research and proof between peers (RPP)

Depuis de nombreuses années, les programmes scolaires de nombreux pays, la France en particulier, demandent aux enseignants de faire vivre à leurs élèves des situations de recherche et de preuve entre pairs (situations RPP) en classe de mathématiques. Pour autant, malgré les demandes institutionnelles renouvelées, les formations d'enseignants mises en place, les recherches et les expérimentations scientifiques menées dans le domaine, les pratiques ordinaires n'évoluent pas sensiblement (Artigue et Houdement 2007, Georget 2009, 2010). Cet état de fait témoigne en partie de la complexité du projet consistant à provoquer des évolutions des pratiques enseignantes en ce domaine. Deux éléments principaux contribuent à l'expliquer, la complexité des situations RPP et le manque d'ergonomie des ressources enseignantes (Georget 2009, 2010).

Une première expérimentation s'est attachée à étudier sur trois ans des moyens de favoriser la pratique de situations RPP par une dizaine d'enseignants de l'école primaire quasiment tous novices dans cette pratique (Georget 2009). Il s'agissait de s'appuyer sur l'émergence d'une communauté de pratique (Wenger 1998). L'expérimentation présentée ici (menée par un étudiant de Master d'enseignement) s'appuie sur ces travaux exploratoires et s'attache à étudier comment une ressource peut aider un enseignant à mettre en œuvre une situation de recherche et de preuve entre pairs donnée. Le contexte contraint de ce travail explique en grande partie le fait que la méthodologie soit relativement restreinte par endroits.

I. LES SITUATIONS RPP

L'expression *situations de recherche et de preuve entre pairs* (situations RPP) a été proposée pour désigner des situations dans lesquelles on place les élèves ou les étudiants dans des situations proches de celle d'un mathématicien lorsqu'il cherche un problème nouveau (Georget 2009). Cette nouvelle expression regroupe diverses situations de classe comme les *problèmes ouverts* (Arsac et Mante 2007), les *situations de recherche en classe* (Grenier et

* Université de Caen Basse-Normandie, CERSE, EA 965 – France – jean-philippe.georget@unicaen.fr
** Université de Tours – France – baptiste.labrousse@etu.univ-tours.fr

© Georget J-P., Labrousse B. (2012) Expérimentation d'une ressource pour une situation de recherche et de preuve entre pairs. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT6, pp. 838–848). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

Payan 2002) et d'autres encore. Ces dernières appellations désignent peu explicitement les objectifs visés par ces situations par lesquelles on souhaite développer chez les élèves, voire parfois chez les enseignants, des savoirs et des savoir-faire propres aux débats mathématiques (par exemple le statut des conjectures, des preuves, des exemples et contre-exemples, etc.). En particulier, la qualification RPP a pour premier intérêt d'évoquer explicitement la composante « preuve » de ces situations, caractéristique primordiale fréquemment absente des déroulements dans les classes ordinaires, ainsi que la composante sociale « entre pairs », fréquemment délaissée, elle aussi, au profit de preuves relativement formelles dont la logique et le déroulement échappent à nombre d'élèves. Le second intérêt de cette appellation est de désigner une classe de situations similaires, posant de ce fait la question de leur efficacité respective. Une étude comparative a été menée en se basant sur une revue de littérature (Georget 2009). Elle a mis en évidence la particulière pertinence de l'approche des *problèmes ouverts* proposée par Arsac et Mante (2007). En effet, celle-ci nécessite peu de moyens à mettre en œuvre pour espérer obtenir des résultats similaires à ceux des autres approches, modulo le fait que l'évaluation de l'efficacité des différentes approches restent particulièrement sujette à caution du fait des méthodologies employées ou du manque d'explicitation de ces méthodologies dans la littérature.

Il ressort de la même étude que des situations RPP peuvent être proposées en classe dès l'enseignement primaire. Se pose alors la question du manque de diffusion de ces pratiques de classe hors des cadres expérimentaux. Les réponses sont multiples et cette contribution ne cherchera pas à en dresser une liste. Nous nous limiterons aux réponses envisageables concernant les caractéristiques de ces situations, leurs potentiels, et l'ergonomie des ressources destinées aux enseignants.

1. Potentiels des situations RPP et processus dynamiques en cours de séance

Les situations proposées aux élèves doivent bien sûr permettre aux élèves de chercher. Ceci suppose que la solution ne soit pas déjà connue des élèves concernés, qu'elle ne paraisse pas évidente et peut-être aussi que plusieurs pistes paraissent intéressantes à explorer aux yeux des élèves, même si une unique solution s'avère pertinente au final. C'est le potentiel de recherche de la situation (Georget 2009). Il paraît aussi nécessaire que la situation ne soit pas résolue trop rapidement par les élèves, c'est à dire qu'elle leur résiste. C'est son potentiel de résistance. Si le problème paraît toujours insoluble tout au long de la recherche des élèves, ces derniers risquent de se démobiliser. La résistance de la situation RPP face aux tentatives des élèves doit donc varier, ce que nous appelons sa résistance dynamique. Enfin, la situation doit permettre à l'élève d'apprendre quelque chose, sous peine de quoi sa présence à l'école deviendrait problématique. C'est son potentiel didactique. Toutes ces caractéristiques s'actualisent différemment durant un déroulement de séance donné en fonction de multiples facteurs et dans des processus dynamiques qui ne sont pas toujours contrôlables, d'où l'usage du terme *potentiel* (Georget 2009).

Les situations de recherche ne permettent pas toujours à l'enseignant de mener des débats mathématiques dans sa classe, c'est pourquoi nous avons aussi défini la notion de potentiel de débat. La possibilité d'organiser de tels débats est susceptible d'évoluer au cours d'une séance et dépend, elle aussi, de multiples facteurs. En premier lieu, pour assurer un potentiel de débat intéressant, le problème choisi peut par exemple permettre à plusieurs solutions différentes d'apparaître, ce qui renforcera la conviction chez les élèves que des argumentations puis des preuves ou des ébauches de preuve sont nécessaires. L'expérience de l'enseignant et sa gestion de la séance sont d'autres facteurs permettant à ce potentiel de s'exprimer. Les consignes employées par les enseignants au moment où tout semble propice pour que des débats mathématiques émergent sont souvent non pertinentes. Par exemple, les enseignants demandent fréquemment aux élèves de « dire ce qu'ils ont fait », c'est à dire de raconter leur processus de recherche, mais sans pour autant leur demander de se prononcer sur la validité de la démarche et des résultats et sans solliciter des échanges entre pairs. *In* fine c'est alors à l'enseignant d'initier et de gérer des processus de preuve par des questions fermées. Sans doute aussi fréquemment, les enseignants valident certaines productions d'élèves avant toute mise en commun des productions, parfois involontairement ou implicitement. Les élèves sont alors moins motivés pour défendre leur travail puisque, bien que comptant sur eux pour lancer des processus de preuve, l'enseignant se sera prononcé sur la validité de leur travail. L'expérience des élèves est aussi un élément important qui joue dans l'actualisation du potentiel de débat. Par exemple, même si les consignes de l'enseignant ne sont pas adéquates, les élèves qui ont l'expérience des situations RPP ne les suivront pas à la lettre et auront un comportement pertinent (Georget 2009). À l'inverse, si les élèves n'ont pas suffisamment d'expérience, ils ne pourront pas anticiper la démarche sous-jacente à la situation.

En conclusion de cette partie, il est donc évident que, pour favoriser la pratique des activités RPP dans les classes, il faut proposer aux enseignants des situations ayant les potentiels suffisants pour le faire. Sachant que l'expression de ces potentiels dépend des déroulements des séances, il faut aussi proposer ces situations sous la forme de ressources permettant aux enseignants d'avoir l'information suffisante pour les exploiter, c'est à dire ayant des caractéristiques ergonomiques suffisantes.

2. *Ergonomie des ressources*

Des concepts utilisés dans les recherches sur l'ergonomie des environnements informatiques pour l'apprentissage humain (EIAH) sont pertinents pour analyser et élaborer des ressources destinées aux enseignants, que ces ressources soient numériques ou non (Georget 2010). Les concepts d'utilité et d'utilisabilité sont deux d'entre eux. L'évaluation de l'utilité d'une ressource destinée à un enseignant consiste à évaluer si elle lui permet effectivement d'atteindre l'objectif que l'on a fixé a priori à la ressource, c'est à dire ici de lui permettre de faire vivre aux élèves une situation RPP. Quant à l'évaluation de l'utilisabilité d'une ressource, elle consiste à évaluer si l'enseignant peut l'adapter à sa pratique et si elle prend en compte son degré d'expertise. L'évaluation de l'utilité et de l'utilisabilité peut s'effectuer *a priori*, c'est à dire hors de toute utilisation réelle de la ressource, et *a posteriori*, c'est à dire par l'observation et l'analyse des effets produits par son utilisation réelle par un enseignant.

Une étude de ressources existantes a montré la possibilité d'améliorer leur utilité et leur utilisabilité en proposant, implicitement ou explicitement, des options d'utilisation aux enseignants là où les ressources ne donnent souvent qu'une seule façon de mener une situation donnée (Georget 2009). C'est en effet un moyen possible de favoriser des genèses documentaires prolixes (Gueudet et Trouche 2008) et de provoquer des exploitations optimales ou minimales, des situations mathématiques proposées, c'est à dire en préservant au moins leur statut de situation RPP. Ceci semble particulièrement pertinent lorsque l'on s'adresse à des enseignants expérimentés mais novices en matière de situations RPP, ceux-ci ne souhaitant pas toujours qu'une ressource leur dise ce qu'ils ont à faire de manière plus ou moins péremptoire, à tort ou à raison.

II. UNE NOUVELLE EXPERIMENTATION

Dans l'expérimentation menée précédemment (Georget 2009), un collectif d'enseignants était concerné. La présente expérimentation concerne un unique enseignant de CM1 (9-10 ans), volontaire, bénévole et expérimenté (10 ans de pratique). Il est relativement novice dans la pratique des situations RPP et il lui a juste été demandé de lire la ressource et de mettre en œuvre le problème à sa manière. Contrairement à la première expérimentation, il n'a pu s'appuyer ni sur un temps long ni sur une communauté de pratique initiée pour l'occasion pour faire évoluer sa pratique. Nous allons ici supposer en première approximation que la ressource proposée sera le principal élément d'aide pour lui permettre de mettre en place la situation RPP proposée. Dans ce contexte, la ressource préalablement utilisée dans la première expérimentation a été retravaillée.

1. Une ressource retravaillée

Dans la précédente expérimentation, plusieurs informations étaient, d'une part, disponibles sur un site Web conçu à cet effet et, d'autre part, étaient discutées entre les participants durant les réunions qui ont eu lieu tout au long des trois années. Elles étaient aussi évoquées dans les comptes-rendus d'expérience qu'ont pu rédiger et échanger les enseignants. Pour résumer, ces informations étaient susceptibles de rester à l'esprit des enseignants pour plusieurs raisons et ont pu influencer leur pratique. Ici, le seul moyen de communiquer des informations utiles est la ressource destinée à l'enseignant. Elle doit donc être claire, concise, précise, tout en offrant une utilisabilité supposée optimale (Georget 2010). Cette ressource est basée sur le problème consistant à dénombrer les cordes joignant un nombre fixé de points disposés sur un cercle (ERMEL 1999). En plus de travailler des compétences liées aux situations RPP, les élèves peuvent développer des compétences relatives au dénombrement exhaustif d'objets vérifiant des propriétés données et à la généralisation à partir de quelques cas particuliers, toutes deux au cœur de cette situation. Nous avons vérifié que le problème offrait *a priori* des potentiels suffisants pour des élèves de la fin de l'école primaire (Georget 2009). Par ailleurs, le côté « abstrait » est intéressant, car il permet aux enseignants de constater que leurs élèves sont tout à fait capables de s'attaquer à ce type des situations sans qu'un contexte « concret » ne soit nécessaire, ce qui reste envisageable.

Pour l'essentiel, la structure de la ressource (cf. Annexe 1) est la même que celle de l'expérimentation précédente (Georget 2009, 2010). Elle est composée d'une description rapide destinée à l'enseignant, de la solution et des moyens de l'obtenir. Des éléments supplémentaires visent à informer l'enseignant mais ne lui donnent pas une façon unique de mener la séance. Par exemple, il est seulement suggéré de traiter le cas des six points puis celui de dix. L'enseignant a une liberté et les éléments d'information sont là, implicitement ou explicitement, pour le guider dans ses choix. Les éléments de débats possibles, par l'intitulé même de cette rubrique et par la formulation de ses items, laissent une large place à des adaptations. La précédente expérimentation ayant montré que les enseignants avaient largement apprécié nos choix, notamment celui d'une ressource rapide à consulter, ils ont été conservés.

Certains éléments ont été ajoutés ou modifiés. L'énoncé destiné à l'enseignant a été complété par deux exemples d'énoncés destinés aux élèves. Le cas de quinze points est implicitement proposé en supplément des cas six et dix points. Il s'agit d'éléments améliorant l'utilité et l'utilisabilité de la ressource.

La preuve par récurrence, initialement dans la rubrique *Autres éléments de l'activité*, a été déplacée pour homogénéiser la ressource.

La nouvelle rubrique *Conseils pédagogiques* présente un modèle de déroulement de séance qui semble plus opérationnel que celui proposé par Arsac et Mante (2007). En particulier, il propose à l'enseignant de ne pas attendre trop longtemps avant de faire une première médiation pour s'assurer que les élèves ont bien compris le problème initial. En effet, nous avons mis en évidence que des enseignants ne clarifient pas toujours, volontairement ou non, certaines caractéristiques de la situation de départ, ce qui cause des dysfonctionnements parfois jusqu'à la fin des séances (Georget 2009). Ce serait le cas par exemple si l'enseignant ne clarifie pas le fait qu'un diamètre est une corde ou qu'un point peut être l'extrémité de plusieurs cordes. La ressource propose aussi à l'enseignant de ne pas valider de réponses avant la tenue d'un débat. Nous avons vu que cela peut être un élément important pour que des débats puissent naître et vivre dans la classe. Dans un registre plus pédagogique, il est aussi suggéré une utilisation des affiches plus raisonnable que celle souvent observée qui consiste à demander aux élèves d'écrire leur démarche, ceci étant généralement peu productif dans les faits.

2. *Autres éléments méthodologiques*

L'enregistrement vidéo a eu pour objectif d'enregistrer le son pendant le déroulement de la séance et de filmer le tableau car il s'avère parfois très difficile de noter ce qui est écrit dessus lors des phases de mises en commun. Bien qu'il accentue généralement le stress de l'enseignant, ce moyen permet une meilleure récolte de données qu'avec une simple prise de notes, permettant ainsi une reconstruction plus fidèle du déroulement de la séance (Georget 2010).

L'analyse des données consiste en premier lieu à rédiger une narration de la séance (Roditi 2001) à partir des notes prises et de l'enregistrement, c'est à dire un texte racontant son déroulement qui donne une première description appréhendable de la séance. Nous repérons des épisodes (Robert 1999, Roditi 2001) qui correspondent à une activité observée ou potentielle des élèves et qui peuvent correspondre à plusieurs des tâches prescrites ou attendues par l'enseignant (Robert et Rogalski 2002). Nous résumons chaque épisode qui nous semble significatif et indiquons sa durée approximative dans une trame simplifiée de séance. En particulier, certains épisodes tels que des interventions relativement extérieures au déroulement de la résolution du problème ne sont pas retenues dans le corpus (personne frappant à la porte, récréation, etc.). Elle est simplifiée aussi dans le sens où certains épisodes sont compactés en phases afin de faciliter la description de la séance en termes de présentation des tâches prescrites (phases codées par Pres, cf. Tableau 1), de recherches autonomes de véritables problèmes mathématiques par les élèves (RechO), de mises en commun (MC) des productions d'élèves et de véritables échanges entre élèves, de « cours dialogués » (CD), c'est-à-dire d'échanges enseignant-élèves fortement dirigés par l'enseignant pour faire avancer la résolution du problème. Nous étudions ensuite l'évolution des différents potentiels de la situation RPP et le rôle effectif qui nous paraît être celui de l'enseignant dans ces évolutions. Nous en sommes à ce stade réduits à faire des hypothèses sur ses logiques d'action (Robert et Rogalski 2002) en établissant un rapport probable avec le contenu de la ressource. Nous étudions aussi la possibilité d'une optimisation de la gestion de la séance et de la ressource, toutes choses étant supposées égales par ailleurs.

3. *Résultats*

Dans cette section, la trame simplifiée de la séance est donnée dans le Tableau 1. Les durées des épisodes sont arrondies au quart de minute le plus proche. La séance est ensuite étudiée en lien avec la ressource proposée.

La trame simplifiée de la séance permet tout d'abord de constater qu'un certain nombre de conseils donnés dans la ressource semblent suivis. C'est le cas (phase 1) de la présentation orale suivi d'un texte écrit, pratique peu courante à ce niveau d'enseignement chez les enseignants novices (Georget 2009). Par contre, il faut noter que la présentation d'une corde faite par l'enseignant n'est pas optimale puisqu'il ne précise qu'après une douzaine de minutes qu'une corde se trace avec la règle. De plus, la distinction corde-diamètre n'est pas faite clairement. Tout ceci aboutit à des problèmes de compréhension de l'énoncé qui pourraient être évités et qui se retrouvent tout au long de la séance, jusqu'à l'exploitation collective des productions. À cet égard, la ressource ne remplit que partiellement son rôle de ressource utile.

Phases	*Codes*	*Durées*
1. Présentation orale du cas des 6 points (tâche T6), mise au point du vocabulaire, reformulations de la consigne, écriture de la consigne au tableau	Pres	6'
2. Recherche individuelle de T6	RechO	3'30"
3. Reformulation de la consigne	Pres	2'
4. Continuation de la recherche de T6	RechO	30"
5. Précision : la corde se trace avec une règle !	Pres	0"
6. Continuation de la recherche de T6	RechO	1'45"
7. Présentation du cas général et du cas 15 points (tâches Tn, T15)	Pres	4'30"
8. Recherche individuelle de Tn et T15	RechO	5'30"
9. Présentation de la recherche de Tn et T15 en binômes	Pres	2'30"
10. Recherche de Tn et T15 en binômes	RechO	15"
11. Reformulation de la consigne	Pres	45"
12. Continuation de la recherche Tn et T15 en binômes	RechO	1'30"
13. Annonce de la présentation à venir des productions des binômes	Pres	30"
14. Continuation de la recherche Tn et T15 en binômes	RechO	5'30"
15. Présentation quasi exhaustive des productions des binômes (NB. alternances MC/CD non détaillées ici)	MC/CD 12'/8'	20'
Durée totale approximative		54'45"

Tableau 1 *– Trame simplifiée de la séance observée*

Cependant, on trouve aussi (succession des phases 1, 2 et 3) la présence d'une reformulation de la consigne, précédée d'une première courte recherche des élèves et suivie d'une autre recherche autonome des élèves. Bien qu'elle semble relever du « bon sens », cette pratique est peu courante chez les enseignants (Georget 2009). Même si on ne peut le certifier et même si l'enseignant nous a signalé ses difficultés d'organisation dans ce type de séances, il est donc possible que l'enseignant ait adopté le modèle de déroulement de séance proposé dans la ressource. La trame permet ensuite de constater l'absence de tâche fermée lors des épisodes recherches autonomes. Les potentiels de la situation sont donc assez bien préservés jusqu'à l'avant-dernière phase (phase 14). En particulier, l'objectif de faire travailler les élèves sur une véritable situation de recherche est atteint.

À l'inverse, le potentiel de débat et le potentiel didactique ne s'expriment pas ou pas de manière optimale. En effet, l'élaboration de preuves entre pairs est limitée par un ou des épisodes de cours dialogué (CD) pour chaque production. L'étude détaillée de la phase d'exploitation des productions (phase 15, 20') conclut à une durée totale de 8' pour le code CD contre 12' pour le code MC, caractéristique de moments plus favorables à l'élaboration de preuves entre pairs. Il faut retenir ici que l'enseignant prend largement la parole pour diriger la séance, alors qu'il pourrait davantage favoriser des débats mathématiques dans la classe. L'enseignant nous déclare qu'il « parle trop », constat courant chez les enseignants novices, mais c'est ici la pertinence du contenu de ses interventions qui empêchent le potentiel de débat de s'exprimer. Du fait de l'enseignant ou des élèves eux-mêmes, plusieurs occasions existent d'orienter le déroulement de la séance vers un fonctionnement plus en phase avec les objectifs des situations RPP. Elles n'aboutissent pas du fait d'un manque de soutien de l'enseignant. À cet égard, la ressource se révèle peu utile et peu utilisable quand elle évoque un rôle « d'animateur » sans en donner les clés élémentaires. En particulier, l'optimisation de la présentation des productions pouvait se faire ici en tenant compte de résultats redondants et divergents au lieu de poursuivre explicitement une présentation exhaustive. Le choix d'avoir une ressource concise a bien sûr pesé sur ses manques, mais certains gagneraient visiblement à être comblés. L'autre facteur explicatif de la main mise de l'enseignant sur les débats est sa volonté manifeste de faire résoudre le problème en une unique séance. En témoigne par exemple l'introduction (phase 7) de la tâche Tn de recherche du nombre de cordes en fonction du nombre de points dans le cas général, alors que les élèves n'ont même pas encore débattu du cas des 6 points, débat potentiellement prometteur puisque tous les élèves n'avaient toujours pas le même résultat à l'issue de la séance. Le déroulement de la séance révèle aussi une tension tenace entre cette volonté de tenir les délais et la volonté de laisser les élèves débattre et avancer eux-mêmes dans la résolution du problème. Sur ce point, la façon de compléter la ressource de façon utile, utilisable et acceptable reste pour nous ouverte. Enfin, vraisemblablement à cause du temps disponible, aucune phase de conclusion n'est présente, ne permettant pas au potentiel didactique de s'exprimer, même *a minima*. La ressource n'évoquait pas ce point.

III. CONCLUSION

Dans l'expérimentation décrite, il était attendu que la ressource soit utile, c'est à dire permette à un enseignant de mettre en œuvre une situation de recherche et de preuve entre pairs dans sa classe malgré son manque d'expérience en ce domaine. Des dynamiques problématiques ont subsisté. En particulier, si les potentiels de recherche, de résistance et de résistance dynamique se sont bien exprimés, le potentiel de débat et le potentiel didactique ont été bridés par des interventions de l'enseignant. Les élèves ont donc bien vécu une situation de recherche mais ils n'ont que peu ou pas été en situation d'élaborer des preuves entre pairs. Ceci témoigne, d'une part, de la complexité intrinsèque de ces séances (Georget 2009), l'enseignant ayant été confronté à des dynamiques problématiques qu'il n'a pas su gérer de manière optimale, et d'autre part, de la présence de défauts ergonomiques dans la ressource qui lui a été proposée, défauts dont certains peuvent probablement être comblés facilement sans remettre en cause l'acceptabilité de la ressource. Enfin, même si le cadre d'expérimentation a été contraint (contexte de travail d'un étudiant de Master d'enseignement), la présente contribution montre aussi combien l'élaboration d'une ressource ergonomique peut être un processus complexe. Les outils pour élaborer ce type de ressources semblent pertinents mais restent à affiner pour obtenir des résultats qui ne se bornent pas à des hypothèses, parfois périlleuses, concernant l'impact d'une ressource donnée sur la pratique d'un enseignant donné. En effet, nous avons considéré une ressource comme facteur explicatif essentiel de l'activité de l'enseignant mais la méthodologie employée ne permet pas de prouver la pertinence de cette analyse, elle ne permet que de l'envisager.

REFERENCES

Arsac G., Mante M. (2007) *Les pratiques du problème ouvert*. CRDP de l'académie de Lyon, France.

Artigue M., Houdement C. (2007) Problem solving in France: didactic and curricular perspectives. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education* 39, 365-382.

ERMEL (1999) *Apprentissages numériques et résolution de problèmes, CM2*. Paris : Hatier.

Georget J-P. (2009) *Activités de recherche et de preuve entre pairs à l'école élémentaire : perspectives ouvertes par les communautés de pratique d'enseignants.* Thèse de doctorat. Université Diderot Paris 7. http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00426603/fr/, consulté le 29 novembre 2011.

Georget J-P. (2010) Apport de l'ergonomie des EIAH pour l'analyse et la conception de ressources. In Kuzniak A., Sokhna M. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et développement : enjeux de société et de formation. Actes du colloque international de l'Espace Mathématiques Francophone 2009*. http://fastef.ucad.sn/EMF2009/Groupes%20de%20travail/GT6/georget.pdf, consulté le 29 novembre 2011.

Grenier D., Payan C. (2002) Situation de recherche (en classe) : essai de caractérisation et proposition de modélisation. In Durand-Guerrier V., Tisseron C. (Eds.) (pp. 189-203). *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques.* ARDM et IREM de Paris 7.

Gueudet G., Trouche L. (2008) Du travail documentaire des enseignants : genèses, collectifs, communautés. Le cas des mathématiques. *Éducation et didactique* 2-3, 7-33.

Robert A. (1999) Recherches didactiques sur la formation professionnelle des enseignants de mathématiques du second degré et leurs pratiques en classe. *Didaskalia* 15, 123-157.

Robert A., Rogalski J. (2002) Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et de la technologie* 2.4, 505-528.

Roditi E. (2001) *L'enseignement de la multiplication des décimaux en sixième, Études de pratiques ordinaires*. Thèse de doctorat. Université de Paris 7.

Wenger E. (1998) *Communities of Practice, Learning, Meaning and Identity.* Cambridge: Cambridge University Press.

ANNEXE 1

1. Le problème

Présentation

Énoncé pour l'enseignant : on place un certain nombre de points sur un cercle. Est-il possible de trouver le nombre de cordes (segment joignant deux points du cercle) ?

Énoncés possibles pour les élèves :

- on place 6 points sur un cercle. Est-il possible de trouver le nombre de cordes ?
- on place 15 points au hasard sur un cercle. Peut-on trouver à coup sûr le nombre de cordes ?

Exemples

On peut commencer par 6 points disposés de façon irrégulière sur un cercle. On obtient 15 cordes. On peut ensuite passer à 10 points ce qui donne 45 cordes. Les élèves ont peu de chance de pouvoir les compter de façon sûre.

Solutions

Si on place n points sur un cercle, le nombre de cordes est égal à : $n(n-1)/2$. Par exemple, pour 6 points, le nombre de cordes est égal à 6*5/2= 15.

2. Les preuves

Preuve additive

La preuve revient à calculer la somme $(n-1) + \cdots + 3 + 2 + 1$.

En effet, on choisit un des points. Il permet d'obtenir $(n-1)$ cordes. En prenant un autre point, on obtient une corde de moins, c'est à dire $(n-2)$ et ainsi de suite jusqu'à l'avant-dernier point qui ne peut être joint qu'au dernier point, ce qui donne une seule corde.

Le calcul de la somme s'effectue de la manière suivante :

$$(n-1) + (n-2) + \cdots + 3 + 2 + 1$$
$$+\ 1 + 2 + \cdots + (n-3) + (n-2) + (n-1) = n + n + \cdots + n + n + n = n(n\text{-}1)$$

On a alors calculé la somme 2 fois, il faut donc diviser l'expression par 2 pour obtenir le résultat.

Preuve multiplicative

Il y a n points. Chaque point est relié à $(n-1)$ points. Mais, avec cette méthode, chaque corde est comptée 2 fois (une fois par extrémité). On obtient donc $n(n-1)/2$ cordes.

Preuve par récurrence

Une variante (raisonnement par récurrence) consiste à déduire par exemple le cas des 6 points de celui des 5 points (que l'on peut calculer à part). Il suffit d'ajouter les 5 nouvelles cordes créées par le sixième point à celles déjà comptées pour les 5 premiers (au nombre de 10). Ainsi, on obtient 5+10 = 15 cordes.

Le fait de proposer successivement certains cas, par exemple le cas de 5 puis de 6 points, risque d'induire cette stratégie.

Éléments de débats possibles

- méthode pour être sûr de compter toutes les cordes sans en oublier ;
- moyen de communiquer sa démarche (les élèves peuvent proposer plusieurs types de codage) ;
- les élèves peuvent proposer la preuve basée sur la multiplication sans qu'ils soient capables de l'expliquer dans un premier temps : cette preuve ne peut pas être considérée comme valide sans une explication acceptée par la classe. À l'issue des débats, l'enseignant peut en proposer une ;
- efficacité des différentes formules : elle dépend du nombre de points considéré.

Autres éléments de l'activité

- certains élèves risquent de confondre cordes et diamètres ;
- un nombre élevé de points oblige la recherche d'une méthode générale ;
- proposer des cas qui se succèdent (5 points, 6 points, etc.) risque d'induire la preuve par récurrence.

3. Conseils pédagogiques

Les conseils suivants ne constituent pas une obligation mais une aide potentielle à des difficultés rencontrées lors des situations de recherche. Libre à l'utilisateur de les suivre ou pas.

La première recherche individuelle sert à trouver des méthodes en vue de la recherche par groupe où elles seront discutées. Une médiation est utile si les élèves n'ont pas compris l'énoncé et s'il y a des précisions à apporter au problème, d'où un retour à la recherche individuelle puisque l'énoncé a changé.

La séance peut prendre la forme suivante :

- présentation du problème ;
- recherche individuelle (relativement courte) ;
- médiation ;
- suite de la recherche individuelle ou nouvelle recherche individuelle ;
- recherche en groupe ;
- mise en commun.

Énoncer le problème à l'oral pour éviter la barrière de l'écrit, le problème pourra être noté par la suite au tableau pour que les élèves n'oublient pas ce qui est cherché.

Composer des groupes de 3-4 élèves maximum pour que les échanges soient productifs et tenter de limiter un rapport de dominants/dominés, dans un binôme, ainsi que le nombre de réponses à exploiter lors des mises en commun.

Ne pas donner des éléments de réponse pendant les phases de recherche (en validant ou en invalidant par la voix ou la gestuelle), ceci évite que certains soient avantagés par rapport à d'autres, et évite des soucis lors de la mise en commun.

Le but est de maintenir le suspens quant à la résolution : ne pas attendre qu'un groupe ou un élève ait trouvé une méthode fiable pour avancer dans les phases si cela induit la fin prématurée de la séance.

Si un élève pense avoir trouvé toutes les solutions (alors que ce n'est pas le cas), soit il est possible de lui dire qu'il en reste ce qui revient à invalider la réponse, soit se contenter de lui demander s'il est sûr et lui montrer en fin de séance que la prochaine fois, il faudra d'avantage chercher.

Adopter une attitude « d'animateur » pendant la phase collective, l'important étant que les élèves se convainquent entre eux.

Les élèves voudront généralement tout expliquer par écrit, ce qui est compréhensible dans ce genre de situations. Une affiche peut constituer une simple aide à la présentation orale des solutions (pour éviter de copier l'ensemble des solutions, l'essentiel étant la démarche).

UTILISATION DES TECHNOLOGIES DANS LA CLASSE DE MATHÉMATIQUE AU SECONDAIRE : DES OUTILS SOUS-EXPLOITÉS

Fernando HITT* – Carlos CORTÉS ZAVALA** – Myriam RINFRET*

Résumé – Voilà plus de 30 ans que des expérimentations et des productions sont menées autour de l'utilisation des technologies dans l'enseignement des mathématiques. Différents cadres théoriques ont ainsi pu être élaborés afin d'expliquer certains phénomènes d'apprentissage et d'améliorer les approches d'enseignement avec les technologies. Nonobstant, l'impact des technologies dans la classe de mathématique demeure largement au dessous de l'impact de celles-ci dans la société. Les chercheurs en didactique des mathématiques tentent de comprendre les obstacles à l'utilisation de la technologie dans les pratiques des enseignants. Dans ce document, une analyse de ces différents obstacles est présentée.

Mots-clefs : TICE, formation des enseignants, école secondaire, modélisation mathématique, visualisation mathématique

Abstract – We have about 30 years of experimentation and production of activities about the use of technologies in the teaching of mathematics. Different theoretical frameworks have been elaborated to explain certain phenomena of learning and to improve teaching approaches with technology. Notwithstanding these developments, the impact of technology in the mathematics classroom remains well below the impact of these in society. Therefore, researchers in mathematics education focused on understanding the obstacles that impede the use of technology in teaching practices. Theses researchers have highlighted factors that explain this situation. In this document, an analysis of these different obstacles is presented.

Keywords: ICT, teacher training, secondary school, mathematical modeling, mathematics visualization

I. INTRODUCTION

La quasi-omniprésence des technologies dans la société est une évidence. Leurs utilisations font désormais partie du quotidien. Des didacticiens enthousiastes développent de plus en plus d'applications pertinentes pour l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques. Alors pourquoi le milieu scolaire semble-t-il tarder à emboîter le pas? Car c'est un constat : les TICE sont très peu présentes dans la classe de mathématiques au secondaire (au Québec, élèves âgés de 12 à 16 ans). Puisque nous croyons que ces outils peuvent avoir un apport enrichissant pour l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques, nous avons cherché à répondre à trois questions pour mieux comprendre cet état de fait. Quelles sont les croyances des enseignants quant à l'utilisation des TICE ? Quels sont les facteurs qui influencent les enseignants dans leurs choix quant à l'utilisation des TICE ? Que propose la recherche en didactique des mathématiques comme piste d'intégration des technologies en enseignement ?

II. CROYANCES CHEZ LES ENSEIGNANTS AUTOUR DE L'UTILISATION DES TICE

Chaque enseignant a son opinion, ses croyances, sur la mathématique[1] et autour de la pertinence de l'utilisation des technologies dans sa vie professionnelle. Voici les principaux arguments que l'on retrouve pour chacune des deux positions antagonistes.

* Université du Québec à Montréal, Québec – Canada – hitt.fernando@uqam.ca, rinfret.myriam@courrier.uqam.ca

** Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo – Mexique – jcortes@zeus.umich.mx

[1] Par exemple, différentes croyances autour de la mathématique en général peuvent être celles signalées par Hagelgans et al (1995, p. 12-13), ils écrivent :

© Hitt F., Cortés Zavala C., Rinfret M. (2012) Utilisation des technologies dans la classe de mathématique au secondaire : des outils sous exploités. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT6, pp. 849–862). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

1. *Non aux technologies dans la classe de mathématique!*

- La technologie s'oppose au développement des habiletés mathématiques. Par exemple, Lazli (2011) mentionne que, dans l'école secondaire où elle a fait son expérimentation avec technologie, la calculatrice est interdite puisqu'on dit que celle-ci détériore les habiletés de calcul des élèves.
- L'enseignement traditionnel est plus efficace. Des chercheurs mentionnent que dans les études PISA et les olympiades mathématiques, les pays asiatiques sont dans les premiers rangs et que dans ces pays l'enseignement est traditionnel, avec tableau à craie.
- Il est trop complexe d'utiliser les technologies. Certains croient qu'il est nécessaire de développer une expertise pour être en mesure de les utiliser adéquatement.
- Les activités technologiques ont un caractère occupationnel plus que pédagogique.
- La technologie est opaque. Elle ne montre pas comment elle a procédé pour obtenir un résultat ou une représentation.
- Le coût de l'équipement technologique rend son utilisation inéquitable, puisque tous les étudiants ne peuvent y avoir accès.
- Développer les habiletés techniques nécessaires à l'utilisation des technologies gruge du temps sur l'appropriation des concepts. Certains ont l'impression de s'éloigner des objectifs d'apprentissage avec les technologies.

2. *Oui aux technologies dans la classe des mathématiques !*

Nous avons des enseignants et chercheurs enthousiastes avec l'utilisation de la technologie, par exemple Arcavi et Hadas (2000), Lagrange (2000, 2003) et Guin et Trouche (1999).

- La technologie aide à la construction des habiletés mathématiques et à la construction des connaissances.
- Ces outils suscitent la motivation chez plusieurs élèves, particulièrement chez les garçons.
- Certains apprentissages peuvent se faire plus rapidement à l'aide de la technologie.
- Les représentations visuelles (graphiques ou constructions géométriques) sont plus précises et faciles à réaliser.
- La technologie est plus dynamique et interactive.
- La technologie est partout, donc « tout » devrait être fait dans l'ambiance technologique, laissant de côté la manipulation des objets physiques et des processus papier - crayon.

Évidemment, nous croyons qu'aucune des deux positions n'a complètement tort ou raison. Une approche technologique seule ne peut être garante d'une pédagogie de qualité. Comme tout outil, les TICE doivent s'inscrire dans un usage réfléchi. Ces deux profils nous amènent à

Les mathématiques sont :
• Un corps de connaissances déjà découvert qui doit être transmis aux générations futures par le transfert de la pensée de l'enseignant à la pensée des étudiants ;
• Un ensemble de techniques pour résoudre les problèmes standards qui doit être pratiqué jusqu'à sa maîtrise ;
• Un recueil de pensées et d'idées que les individus et les groupes d'individus ont créé et construit et que les étudiants pourraient s'attendre à aussi construire ;
• Un ensemble d'applications qui montre seulement la puissance des mathématiques pour décrire, expliquer et prédire.

nous questionner sur le type d'activités qu'il est pertinent de réaliser à l'aide de la technologie. Notre position est de trouver l'équilibre entre le travail papier-crayon et utilisation de technologie (Hitt et Kieran 2009). Nous reviendrons sur ce questionnement.

III. FACTEURS D'INFLUENCE QUANT À L'UTILISATION DES TICE PAR LES ENSEIGNANTS DE MATHÉMATIQUES AU QUÉBEC

Les croyances, qui conditionnent les choix quant à l'utilisation des TICE, peuvent être modifiées ou accentuées tout au long de la vie professionnelle de l'enseignant. Voyons les principaux facteurs.

1. Point de départ : variables qui empêchent l'utilisation des technologies

Dans une approche générale sur les différentes variables qui empêchent l'utilisation des technologies dans la classe de mathématiques, nous avons l'opinion d'Artigue (2000, p. 8-9) qui mentionne quatre points importants à réfléchir :

1. Le manque de légitimité en éducation sur les technologies informatiques par rapport à leur légitimité sociale et scientifique;
2. La sous-estimation des problèmes liés à l'informatisation de la connaissance mathématique;
3. L'opposition dominante entre les dimensions techniques et conceptuelles de l'activité mathématique;
4. La sous-estimation de la complexité des processus d'instrumentation.

Sous ce point de vue, le problème sur l'utilisation des technologies dans la classe de mathématique semble complexe. Dans ce document, nous voulons concentrer notre réflexion sur les trois premiers points (autour du point 4, on peut consulter, par exemple, Guin et Trouche 1999 ; Hoyles, Noss et Kent 2004 ; Lagrange 2000, 2003).

2. Formation des enseignants (réflexions autour du point 1 signalé par Artigue)

Ce facteur est primordial. L'enseignant y puise non seulement des connaissances disciplinaires et didactiques, mais aussi des modèles et des croyances. Quelle place accordent les milieux de formation aux TICE ?

Chaque enseignant a un vécu scolaire qui lui est propre et qui peut, à divers degrés, influencer les choix qu'il fait dans sa pratique enseignante. Dès le primaire, ses croyances autour de l'enseignement des mathématiques se forgent au fil de ses expériences en tant qu'élève. Étant donné notre expérience comme professeurs et chercheurs autour de l'apprentissage des mathématiques à l'école secondaire, nous centrons notre réflexion sur les pratiques des enseignants du secondaire, et essayons de voir quels contacts ceux-ci ont pu avoir avec les technologies au fil de leur formation.

Au Québec, l'accès aux technologies diffère grandement d'une école à l'autre. Certaines écoles sont ouvertes à l'utilisation des technologies, alors que d'autres les bannissent. Bien que la plupart des écoles autorisent la calculatrice, surtout à partir du 2e cycle secondaire, cela ne signifie pas pour autant que le potentiel de cet outil soit développé dans le cadre des cours de mathématiques. Cela semble être le cas ailleurs (voir par exemple, Guin et Trouche 1999, pp. 195-196). D'autre part, il existe des écoles qui offrent des options pour certains groupes qui font tout leur parcours secondaire avec une utilisation massive des technologies (par exemple, le programme PROTIC de l'école secondaire Les Compagnons-de-Cartier de

Québec, http://www.protic.net/). Cependant, ce type d'institution est peu courant. En général, la formation de l'élève autour des technologies à l'école secondaire est principalement liée à l'utilisation de l'ordinateur dans un laboratoire, et ce, pas nécessairement en lien avec les mathématiques. L'élève est essentiellement en contact avec la technologie pour de la recherche d'informations sur Internet, pour l'utilisation de Word, d'Excel et pour des logiciels de présentation (PowerPoint). Il faut aussi mentionner la possible présence d'autres outils, tels les logiciels de géométrie dynamique. Mais encore une fois, leurs utilisations ne s'avèrent guère courantes. Enfin, le tableau interactif fait son entrée depuis quelques années dans les écoles. Bien que son usage ne soit pas encore généralisé, cet outil gagne progressivement du terrain et il sera certainement à surveiller. Cependant, les enseignants en place présentement dans les écoles n'ont pas été en contact avec ce type de tableau en tant qu'élèves.

Pour les élèves qui poursuivent leurs études au Cégep (Collège d'enseignement général et professionnel, âges de 17 et 18 ans), en plus des outils technologiques mentionnés précédemment, s'ajoute l'utilisation de logiciels qui permettent les manipulations symboliques, tel *Maple*. Tout semble indiquer qu'au collégial (Cégep), comme au secondaire, l'utilisation des technologies est restreinte au travail dans un laboratoire et que l'enseignant n'utilise pas ou très peu les technologies dans la classe des mathématiques.

Arrivé à l'université, un étudiant en formation des maîtres est sensibilisé aux TICE par le biais de divers cours selon les institutions. Par exemple, un étudiant à l'UQAM (Université du Québec à Montréal) qui veut être enseignant de mathématiques à l'école secondaire doit suivre quatre cours (15 semaines, 5 heures par semaine) sur l'utilisation de la technologie. Le premier cours vise l'appropriation de logiciels de base, soit *Word*, *Excel* et *GeoGebra*, et de la calculatrice à affichage graphique. La programmation est également abordée avec une initiation au logiciel *Langage Graphique* (Boileau 2011). Le deuxième cours traite davantage des aspects didactiques, où la production d'activités mathématiques pour les élèves de niveau secondaire à l'aide des technologies y est centrale. De plus, l'étudiant est amené à se pencher sur les contenus du programme ministériel et des manuels scolaires en lien avec l'utilisation des TICE. Le troisième cours est lié à la programmation et la production de pages Web en relation aux mathématiques. Finalement, dans le quatrième cours, on demande à l'étudiant de présenter un projet où l'utilisation de la technologie est prioritaire.

En dehors de ces quatre cours spécifiques, à quelques exceptions près, les professeurs de l'université, dans la formation des enseignants au secondaire, utilisent très peu la technologie dans leur enseignement. L'utilisation la plus répandue est le recours aux logiciels de présentation (*PowerPoint*). Mais, pour l'appropriation des concepts mathématiques, le milieu universitaire ne fournit guère plus de modèles d'intégration des TICE que les autres ordres d'enseignement.

On en arrive donc au constat que les enseignants de mathématiques ont été eux-mêmes très peu en contact avec les technologies pour l'apprentissage de cette discipline dans leur vécu scolaire. Il est important de souligner que l'étudiant est en interaction avec les croyances de ses professeurs. Ceux-ci ont une influence implicite ou explicite sur la perception de légitimité et de pertinence des technologies dans la classe des mathématiques. Le manque d'expériences personnelles liant les technologies à l'apprentissage des mathématiques peut donc être un élément qui explique la sous-utilisation de celles-ci par les enseignants.

Cette brève analyse du parcours de formation des enseignants met en lumière les contacts limités que ceux-ci ont pu avoir avec les technologies avant leur entrée dans la profession. Ainsi, le développement de l'utilisation des TICE dépend grandement de la formation continue. Les sources de formations sont variées : l'apprentissage autodidacte, les discussions entre collègues, les ressources en ligne et forums interactifs, les formations organisées dans les écoles ou les commissions scolaires, les revues spécialisées ou encore les congrès et colloques. Certaines personnes ressources, tels les conseillers pédagogiques, peuvent également assurer le développement professionnel.

Cependant, le manque de temps et de ressources monétaires restreint l'accès aux formations. Debien (2010) souligne dans son mémoire les manques de ressources et la dimension particulièrement importante pour les enseignants du temps. Dans ses conclusions, elle suggère des orientations pour élargir la formation continue aux besoins des enseignants, qui sont axés sur les échanges et la pratique locale. De plus, il apparaît que « la recherche en didactique des mathématiques ne contribue pas à préciser l'exercice de la profession enseignante. » Il faut donc repenser les liens entre les résultats de la recherche et les milieux scolaires.

3. Les balises des enseignants

En plus de son parcours de formation et des pratiques en place dans l'institution où il exerce, deux repères importants pour l'enseignant sont les documents ministériels (programmes et orientations) et les manuels scolaires. Ces derniers demeurent les principaux outils où l'enseignant puisse trouver les activités qu'il propose à ses élèves.

Les orientations des programmes d'enseignement et certaines politiques ministérielles peuvent servir de balises pour les enseignants quant à l'utilisation des TICE. Le renouveau pédagogique québécois amène un changement de perspective dans le rôle de l'enseignant. Depuis 2001, les enseignants sont appelés à se professionnaliser. Le ministère (MEQ 2001) a énoncé douze compétences professionnelles pour définir les attentes envers les enseignants. La huitième concerne directement l'utilisation des TICE. En voici l'énoncé : « Intégrer les technologies de l'information et des communications aux fins de préparation et de pilotage d'activités d'enseignement - apprentissage, de gestion de l'enseignement et de développement professionnel. » Cette vision renouvelée de l'enseignant est venue modifier les attentes envers ceux-ci ainsi que leurs responsabilités. Il est tout à fait normal que ces nombreux changements suscitent des réactions et nécessitent des adaptations. On peut penser qu'étant déjà accaparés par l'appropriation de la réforme les enseignants n'ont pas encore tous eu l'occasion de se pencher sur l'intégration des technologies.

Le programme de formation de l'école québécoise est explicite sur l'utilisation des technologies dans la classe de mathématiques. Cependant, on n'y trouve pas d'exemples concrets de leurs utilisations. Quels contenus sont propices aux TICE et comment les traiter dans un environnement technologique ? On mentionne les recherches sur internet d'informations complémentaires quant aux repères culturels entourant les mathématiques, notamment sur l'histoire des mathématiques. L'enseignant et ses élèves sont, selon nous, le plus souvent laissés à eux-mêmes pour l'intégration des TICE.

L'orientation du programme sur le développement des compétences chez les élèves est aussi un facteur quant à l'utilisation des TICE en mathématique. Avant la réforme par compétences au Québec, l'enseignement des mathématiques était fondamentalement basé sur la résolution de problèmes. Les enseignants sont donc plus familiers avec les utilisations de la technologie dans ce type d'approche. L'introduction de la résolution de situations-problèmes de l'approche par compétences bouleverse les repères. Comment utiliser les technologies pour favoriser la pensée divergente propre aux situations-problèmes dans la classe de mathématique ?

Par ailleurs, les contenus des manuels scolaires peuvent également influencer les enseignants. Les manuels scolaires québécois conçus pour le secondaire (élèves âgés de 12 à 16 ans) présentent certaines activités utilisant les TICE. L'utilisation la plus répandue est sans aucun doute la visualisation du rôle des paramètres pour les familles de fonctions à l'aide de la calculatrice à affichage graphique. On retrouve aussi des instructions qui permettent d'introduire d'un point de vue technique les outils technologiques, bref pour se familiariser à leur fonctionnement. Les outils ainsi présentés sont ensuite le plus souvent utilisés comme facilitateurs de calculs. De plus, on trouve quelques utilisations de feuille de calculs *Excel* pour étudier certaines régularités numériques. L'organisation de données et les calculs de régressions sont aussi parfois traités avec *Excel* et un peu avec la calculatrice. Finalement, la référence à l'utilisation de logiciels de géométrie dynamique pour travailler différentes propriétés géométriques est plus rare. On fait ici essentiellement référence à *Cabri Géomètre* (p.e. Breton et al. 2007), *GeoGebra* étant beaucoup plus récent.

En général, il n'y a pas d'utilisation systématique des technologies dans les manuels. Les activités n'exploitent qu'une partie du potentiel de celles-ci et sont présentées de façon plutôt isolée. Nous croyons que les manuels scolaires au Québec ont très peu d'influence dans la pratique des enseignants du point de vue de l'enseignement des mathématiques dans des environnements technologiques. De plus, si dans les manuels scolaires la technologie est utilisée seulement pour la résolution de tâches routinières, l'enseignant peut penser que le développement des habiletés supérieures des élèves n'est pas lié à l'utilisation des technologies.

On se demande pourquoi ni le ministère d'éducation, ni les chercheurs enthousiastes des technologies n'ont pas eu d'influence plus significative chez les auteurs des manuels au Québec quant à l'utilisation des technologies.

4- Un mot sur les obstacles matériels et techniques liés à l'utilisation des TICE

L'accès restreint aux laboratoires ou à d'autres équipements technologiques et le manque de support pour leur installation ou pour régler les problèmes de fonctionnement sont des facteurs qui font également obstacle à un enseignement dans un environnement technologique.

IV. PROPOSITIONS ISSUES DE LA RECHERCHE

Les milieux scolaires ont peu de liens avec les milieux de recherche en éducation. Probablement que les résultats de recherche restent locaux et isolés. Il faudrait trouver des moyens de diffuser un grand nombre d'activités pour que l'enseignant soit à l'aise avec leurs intégrations dans sa pratique. Les chercheurs doivent produire des outils didactiques sous des formes accessibles aux enseignants. C'est pourquoi nous présentons quelques exemples mettant de l'avant une intégration efficace des TICE dans la classe de mathématiques.

Les exemples que nous avons retenus permettent selon nous de mettre de l'avant les avantages de la technologie pour l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques. Notamment, pour favoriser les processus de visualisation, les processus de contrôle et les processus de conjecture et généralisation. Mais surtout, pour favoriser l'exploration et la découverte pour une construction active de connaissances. En effet, nous croyons que la technologie ne révèle pas son plein potentiel pour les séries exercices répétitifs. Dans ces cas, elle fait davantage office d'élément de vérification et de contrôle. Cet usage est tout à fait valable, voire souhaitable. Cependant, la recherche nous montre qu'un concept se bâtit à travers l'articulation entre ses différentes représentations. Dans ce but, il nous apparait que les impacts positifs de la technologie sont davantage mis de l'avant dans l'esprit du renouveau pédagogique. Nous commençons avec des exemples autour du point 2 d'Artigue.

1. *Exemples centrés sur une approche visuelle pour promouvoir la construction de concepts mathématiques*

Un bel exemple que nous pouvons nommer ici, lié à l'approche expérimentale des mathématiques, est celui des nombres polygonaux. En effet, nous pensons qu'une approche visuelle peut aider grandement les élèves dans le passage de l'arithmétique à l'algèbre. Avec les nombres polygonaux, on peut facilement passer d'un processus visuel à un processus numérique (à la Gauss) ou tabulaire et promouvoir, chez les élèves, l'articulation entre représentations (Duval 1995). Pour trouver un nombre polygonal quelconque, on peut promouvoir la conjecture et faire naître le besoin de construire une règle. Cela permet l'ouverture d'une porte vers l'algèbre (Healy et Shutherland 1990 ; Hitt 1994 et 1996 ; Hitt et Cortés, en préparation). Les difficultés mathématiques rencontrées par bon nombre d'élèves avec une approche formelle de l'enseignement de l'algèbre peuvent ainsi être réduites grâce à une approche plus visuelle et expérimentale des mathématiques.

Un autre exemple concerne l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique pour étudier les relations de covariation. Arcavi et Hadas (2000) ont proposé une activité autour des processus de visualisation, d'expérimentation, de surprise, de retour d'information (rétroaction) et sur la nécessité d'argumenter et de prouver. Le logiciel qu'ils ont utilisé pour cette expérimentation est le Geometry Inventor. Ce logiciel est très pertinent pour la modélisation de diverses situations. L'assignation des variables et la réalisation d'une représentation graphique illustrant la relation entre ces variables se font facilement. Ce logiciel est particulièrement intéressant avec des élèves au début du parcours secondaire. Celui-ci permet le développement du concept de covariation chez les élèves comme prélude au concept de fonction. Leur activité est facile à comprendre, et permet aux élèves de s'engager tout de suite dans une démarche de processus de visualisation et expérimentation. Voici l'activité adaptée à cette présentation :

Première partie. Construire un triangle isocèle ABC dans une feuille de géométrie dynamique tel que $\overline{AB} = \overline{BC}$. Ensuite, déplacer le sommet « C » du triangle et analyser ce qui varie et ce qui demeure constant. Trouvez des relations entre les variables et donnez les représentations graphiques et algébriques.
Deuxième partie. Construire un triangle ABC, tel que $\overline{AB} \neq \overline{BC}$. Ensuite, déplacer le sommet « C » du triangle et analyser ce qui varie et ce qui demeure constant. Trouvez des relations entre les variables et donnez les représentations graphiques et algébriques.

Figure 1 *– Adaptation de l'activité (Arcavi et Hadas 2000)*

Les résultats d'Arcavi et Hadas (2000) sont très positifs, tant les élèves que leurs enseignants ont trouvé cette activité riche et porteuse de sens.

Finalement, le théorème de Pythagore peut être utilisé en exemple pour promouvoir une approche visuelle et historique des mathématiques. Le programme du MELS (2007) et les manuels scolaires au Québec présentent le théorème de Pythagore comme une relation entre les côtés d'un triangle rectangle quelconque (il est rare qu'une approche visuelle soit présentée). L'histoire des mathématiques est une source d'activités très riche. Malheureusement, dans les manuels québécois, elle est souvent traitée sous forme de capsules informatives (petite explication encadrée avec informations sur un mathématicien et son œuvre). Zsabó (1960), dans son analyse historique sur la transformation des mathématiques en une science déductive, propose la réflexion autour de la visualisation. À partir de là, nous pouvons imaginer des activités où les processus de visualisation mathématique seraient prioritaires. Par exemple, le processus suivi dans l'antiquité pour découvrir le théorème de Pythagore jusqu'à sa démonstration dans les Éléments d'Euclide est un bon exemple pouvant être travaillé grâce au support visuel offert par les technologies. On peut passer des tablettes babyloniennes, à la démonstration visuelle du double d'un carré comme dans le Menon de Platon (cas particulier du théorème pour les triangles rectangles isocèles), jusqu'au théorème de Pythagore. On peut, avec l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, promouvoir les processus de visualisation et de généralisation. Une telle approche est certainement plus porteuse de sens que de rester centré uniquement sur l'apprentissage d'une formule comme le proposent plusieurs manuels scolaires québécois. Ce type d'approche dynamique de formation de concepts mathématiques permet d'ouvrir la discussion avec les élèves sur :

- L'utilisation d'un exemple de type générique pour transmettre un résultat mathématique (au lieu d'un triangle rectangle général, commencer avec un triangle rectangle isocèle avec un processus de découpage) ;
- L'évidence visuelle par rapport à la présentation de résultats de façon générale (cela fonctionne-t-il pour n'importe quel triangle isocèle ?) ;
- La preuve visuelle dans un cas particulier (triangle rectangle isocèle) du théorème de Pythagore (comme dans le Menon de Platon) ;
- L'approche visuelle n'est pas suffisante. Avec l'approche visuelle, on pourrait croire que $64 = 65$ (Carrol 1961). Nous pouvons provoquer une réflexion et promouvoir la nécessité de prouver ;
- La formalisation mathématique et la généralisation d'un résultat (du Théorème de Pythagore aux lunules d'Hippocrate de Chio).
- Retour au théorème de Pythagore et les lunules d'Hippocrate de Chio en général avec un triangle rectangle quelconque.

2. *L'utilisation de la technologie comme élément de contrôle (autour du point 3 d'Artigue)*

Les enseignants de mathématique se demandent pourquoi les élèves font tant d'erreurs dans la résolution d'exercices routiniers pour lesquels ils ont appris des algorithmes. Une possible explication est liée à ce que les psychologues appellent la courbe de l'oubli : dans l'enseignement secondaire, il y a une quantité énorme de procédures à maîtriser pour les élèves, qu'ils apprennent par cœur, sans développer d'éléments de contrôle pour exécuter ces algorithmes. Par exemple, Sierpinska et Hardy (2011, p. 243) ont présenté une analyse des manuels scolaires où l'on donne une explication aux élèves pour multiplier des binômes : « La méthode FOIL ». En cas d'oublis, la technologie pourrait servir aux élèves comme élément de contrôle dans ce type de tâches. D'ailleurs, l'étude de Karsenty (2002) nous montre la fragilité des connaissances mathématiques. Il a pris une population d'adultes qui avaient fait des études pré universitaires en sciences, mais qui avaient poursuivi leurs études dans une autre branche par la suite. Karsenty (2003) leur a demandé de faire la représentation graphique de fonctions simples, comme $f(x) = 2x$, et un grand pourcentage avait complètement oublié comment faire. Alors, l'utilisation d'une calculatrice avec manipulation symbolique peut donner aux élèves un moyen de contrôle sans toute fois résoudre les problèmes (voir Hitt et Kieran 2009).

En suivant un cadre théorique de Chevallard (1999) sur l'approche Tâche-Technique-Technologie-Théorie, le groupe APTE (http://www.math.uqam.ca/APTE/Taches.html) a proposé plusieurs activités avec la calculatrice explorant les possibilités de manipulation symbolique autour de la factorisation, dont la factorisation de $(x^n - 1) = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1)$ (Hitt et Kieran 2009). En développant la technique de la multiplication télescopique, le groupe de chercheurs a demandé aux élèves de concilier les résultats issus de la calculatrice et leurs résultats issus de la technique télescopique afin de promouvoir les processus de vérification et généralisation.

3. *Un exemple de modélisation mathématique dans un environnement de manipulation des objets physiques et technologiques : « Le réservoir »*

Une approche expérimentale des mathématiques dans un milieu de manipulation des objets physiques et technologiques permet d'aborder des situations-problèmes. Nous croyons que ce type de situation est plus riche et intéressant, plus concret, moins strictement scolaire que les activités rencontrées usuellement dans les manuels. C'est pourquoi nous allons transformer un exercice conçu pour un environnement papier-crayon en une situation-problème dans un environnement de papier-crayon, de manipulations des objets physiques et d'utilisation des technologies.

Il est important de signaler qu'il n'est pas toujours possible d'adapter un problème à une ambiance technologique. Mais cela ne signifie pas qu'il faut faire table rase et réinventer tous les problèmes. Pour preuve, nous sommes partis d'une activité tirée d'un manuel scolaire (Point de vue mathématique, 2e cycle, 1re année, vol. 1, pp. 178-191). Ce manuel amène d'abord une discussion sur le volume de plusieurs récipients, puis propose les formules correspondantes. Une fois la théorie donnée, le manuel passe aux applications, en demandant aux élèves de calculer le volume total de différents récipients. Nous avons choisi l'un de ces problèmes d'application :

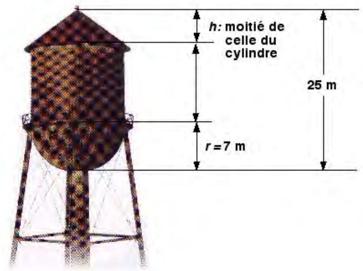
Quelle quantité maximale de liquide chaque partie de ce réservoir contient-elle ? Exprime la réponse en utilisant l'unité la plus appropriée.	
Savoir-faire	
Formules données : $V_{Demi\text{-}sphère} = \frac{2}{3} p r^3$; $V_{cylindre} = p r^2 \times h$; $V_{cône} = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$.	

Figure 2 *– Activité (Guay S. et al. 2007)*

Afin de transformer cette activité en situation-problème ou projet, nous avons modifié la question. Nous la présentons en deux étapes, comme suit :

Première étape : Les étudiants commencent l'activité (guidés par l'enseignant) avec une approche expérimentale sur le calcul du volume d'une calotte.

L'approche expérimentale doit être faite en utilisant des objets physiques permettant de prendre directement les mesures. De plus, il est intéressant d'utiliser une vidéo de la situation qui permet de bien visualiser ce qui se passe. En fait, nous avons utilisé aussi la vidéo avec le logiciel Aviméca en combinaison avec GeoGebra (voir Figure 3, à droite) pour passer à la modélisation avec les technologies.

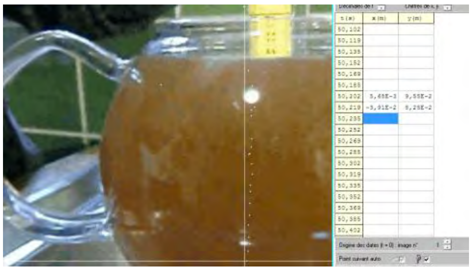
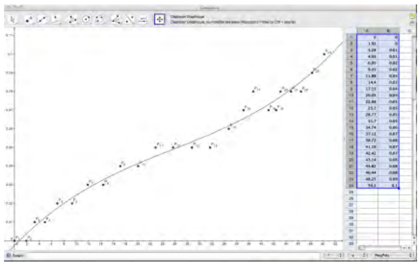
	
Approche techno expérimentale (vidéo et utilisation d'Aviméca)	Approche technologique avec GeoGebra

Figure 3 *– Transformation d'un exercice en une situation problème*

Pour cette approche, nous avons utilisé un appareil photo numérique (pour réaliser la vidéo, nous l'avons aussi analysée avec Aviméca) et le logiciel GeoGebra (pour la modélisation).

Deuxième étape : Voici un récipient d'eau dans une ville. Faites une modélisation de cette situation à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique. Vous devez montrer de façon dynamique la relation entre les variables en jeu. N'hésitez pas à utiliser plusieurs représentations pour expliquer cette situation : dessin, schéma, graphique, algèbre et description en mots.

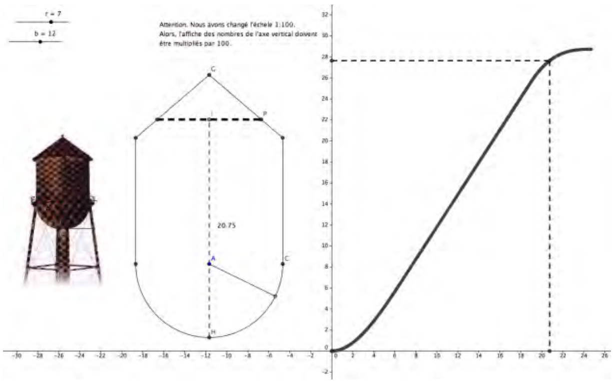


Figure 4 *– Transformation d'un exercice en une situation problème*

Posé de cette façon, cet exercice est transformé en situation-problème. Les élèves doivent identifier les variables et trouver la relation entre celles-ci (concept de covariation entre variables).

4. Vers nouvelle approche du processus de modélisation mathématique

Un aspect très important est la possibilité de manipuler du matériel physique pour avoir une approche réelle de la situation. Ainsi, on donne aux élèves la possibilité de comprendre le phénomène, et de développer des éléments de contrôle, avant de se plonger directement dans les processus algébriques. C'est-à-dire que l'approche expérimentale avec la manipulation des objets physiques va, en continuité avec l'approche technologique, promouvoir la construction de représentations signifiantes pour comprendre le phénomène et pour construire des éléments de contrôle. La promotion du processus algébrique s'inscrit en dernier lieu.

L'approche classique de la modélisation peut être résumée par le schéma suivant :

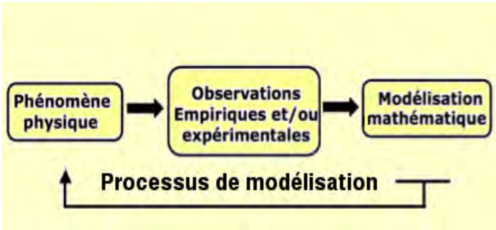


***Figure 5** – approche classique d'un processus de modélisation*

Notre approche du processus de modélisation met davantage l'accent sur l'articulation entre les différentes représentations du concept à l'étude. Elle peut être résumée par le schéma suivant :

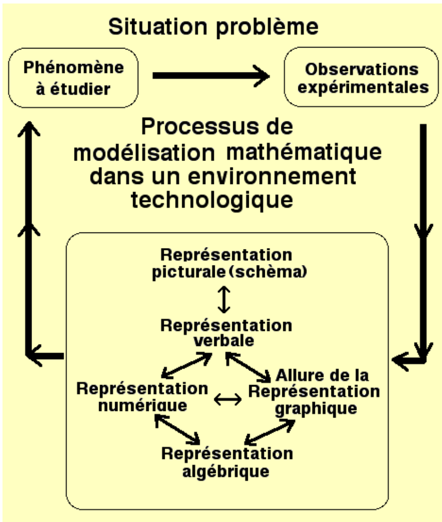


***Figure 6** – nouvelle approche d'un processus de modélisation*

V. EN CONCLUSION

Les chercheurs comme Artigue (2000, 2002) nous proposent une réflexion approfondie pour expliquer la sous-exploitation des technologies comme outils d'apprentissage et d'enseignement dans la classe de mathématique. Nous avons voulu amener dans ce document des pistes pour mieux comprendre les facteurs qui influencent les choix des enseignants quant à l'utilisation des TICE. Notre intention est de promouvoir une utilisation réfléchie des technologies. Notamment, dans des activités orientées vers une approche expérimentale des mathématiques, pour promouvoir la conjecture, la nécessité de démontrer, et de générer des processus de généralisation. Dans cette perspective nous travaillons actuellement pour produire des activités dans un contexte technologique (p.e. avec les nombres polygonaux et le théorème de Pythagore).

On peut penser que les nouvelles cohortes d'enseignants qui auront été elles-mêmes davantage en contact avec les technologies dans leur parcours scolaire seront plus enclines à reproduire cette utilisation dans leurs pratiques enseignantes. Mais pour que cela advienne, il faut que des précurseurs innovent pour introduire ces pratiques. La réflexion sur l'introduction des technologies en enseignement s'inscrit pleinement dans celle sur le renouveau pédagogique. C'est pourquoi nous avons tenu à proposer des exemples intéressants trouvés dans la littérature pour les utiliser dans la classe de mathématiques. Nous croyons que les chercheurs devraient diffuser leurs résultats sous des formes plus accessibles aux enseignants afin que ceux-ci soient en mesure de les transférer dans leurs pratiques. Nous avons également voulu montrer la possibilité de transformer un exercice classique de l'environnement papier - crayon à un environnement intéressant de manipulation physique et d'utilisation des technologies. Cette approche permet selon nous le développement des habiletés mathématiques supérieures.

L'approche par compétences à l'école québécoise et la résolution de situations-problèmes liées aux processus de modélisation mathématique nous indiquent l'importance d'intégrer des activités papier – crayon avec l'utilisation de logiciels comme GeoGebra. Notre approche essaie de donner un équilibre entre la manipulation des objets physiques, l'activité papier - crayon, et la technologie.

REMERCIEMENTS

La recherche présentée dans ce document a été réalisée grâce à la subvention Fonds de la Recherche sur la Société et la Culture du Québec (No. 008-SE-118696), Conseil de Recherche en Sciences Humaines du Canada (No. 410-2008-1836, CID 130252) et Promep du Mexique pour la formation du réseau: Uso de la tecnología para el aprendizaje de las matemáticas.

RÉFÉRENCES

Aviméca (2011) *Logiciel de pointages de clips vidéo*. Université de Rennes. http://www.ac-rennes.fr/pedagogie/scphys/outinfo/log/avimeca/am_h.htm

Arcavi A., Hadas N. (2000) Computer mediated learning: an example of an approach. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *5*, 25-45. Kluwer Academic Publishers.

Artigue M. (2000) Instrumentation issues and the integration of computer technologies into secondary mathematics teaching. In *Proceedings of the Annual Meeting of GDM* (pp. 7-17). Potsdam, Germany. (http://webdoc.sub.gwdg.de/ebook/e/gdm/2000

Artigue M. (2002) Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning 7*, 245-274.

Boileau A. (2011) Site Web: http://www.math.uqam.ca/~boileau/Progiciels.html

Breton E., Breton G., Gervais G. (2007) *Géométrie dynamique et interactive*, cahiers 1 et 2. Québec :Editions CEC.

Carroll L. (1961) *The Unknown Lewis Carroll. Eight Major Works and Many Minor.* New York: Dover Publications, Inc.

Chevallard Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques 19*, 221-266.

Debien J. (2010) *Répertorier les modalités favorisant une démarche de développement professionnel chez les enseignants de mathématique de niveau secondaire*. Mémoire de maîtrise. Université du Québec à Montréal.

Duval Raymund (1995). *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissage intellectuels.* Suisse : Peter Lang.

GeoGebra. Version 3.2.46. http://www.geogebra.org/cms/

Guay S. et al. (2007) *Point de vue mathématique*. 2e cylce secondaire, 1er année, manuel de l'élève, Volume 1. Éditions Grand Duc.

Guin D., Trouche L. (1999) The complex process of converting tools into mathematical instruments: The case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning 3*, 195-227.

Hagelgans N., Reynolds B., Schwingendorf K., Vidakovic D., Dubinsky E., Shahin M., Wimbish J. (1995) *A practical guide to cooperative learning in collegiate mathematics.* The Mathematical Association of America MAA Notes, Number 37.

Healy L., Sutherland R. (1990) The use of spreadsheets within the mathematics classroom. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology* 21(6), 847-862.

Hitt F. (1994). Visualization, anchorage, availability and natural image: polygonal numbers in computer environments. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, Vol. 25 No. 3, 447à455.

Hitt F. (1996). Visualisation mathématique : nombres polygonaux. *Les Revues Pédagogiques* 29, 33-40.

Hitt F., Cortés C. (en préparation). Logiciel sur les nombres polygonaux. Université du Québec à Montréal et Université Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.

Hitt F., Kieran C. (2009) Constructing knowledge via a peer interaction in a CAS environment with tasks designed from a Task-Technique-Theory perspective. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, DOI number: 10.1007/s10758-009-9151-0. http://www.springerlink.com/content/657wt76n04x43rk8/

Hoyles C., Noss R., Kent Ph. (2004) On the integration of digital technologies into mathematics classrooms. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 9, 309-326.

Karsenty R. (2002) What adults remember from their high school mathematics ? The case of linear functions. *Educational Studies in Mathematics* 51, 117-144.

Lagrange J.-B. (2000) L'intégration d'instruments informatiques dans l'enseignement : Une approche par les techniques. *Educational Studies in Mathematics 43*, 1-30.

Lagrange J.-B. (2003) Learning techniques and concepts using CAS: A practical and theoretical reflection. In Fey J. T. (Ed.) (pp. 269-284). *Computer algebra systems in school mathematics* .Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Lazli S. (2011) *Enseignement de la fonction sinus au deuxième cycle du secondaire par le biais de la modélisation et d'outils technologiques*. (Mémoire de maîtrise non-publié). Université du Québec à Montréal.

MELS, Ministère de l'Éducation du Loisir et du Sport. (2007) Programme de formation, Deuxième cycle du secondaire. http://www.mels.gouv.qc.ca/DGFJ/dp /menusec.htm

MEQ, ministère de l'Éducation du Québec. (2001) *La formation à l'enseignement: les orientations, les compétences professionnelles.* Québec : ministère de l'Éducation du Québec.
http://www.mels.gouv.qc.ca/sections/publications/index.asp?page=fiche&id=250

Hardy N., Sierpinska A. (sous presse). Mathematical organization of some French and Englis texbooks used in remedial courses in collèges and universities in North America. In Hitt

F., Cortés C. (Eds) *Actes du colloque Formation à la recherche en didactique des maths*. Montréal 2011.

Szabó Á. (1960) The transformation of mathematics into deductive science and the beginnings of its foundation on definitions and axioms. *Scripta Mathematica XXVII* (I), 27-49 ; (II), 113-139.

LE ROLE D'UN INCIDENT DANS LA DOCUMENTATION COMMUNAUTAIRE : (LE) CAS DE LA CONCEPTION DES RESSOURCES « FONCTIONS » POUR LE MANUEL NUMERIQUE DE SESAMATH

Hussein SABRA*

Résumé – Nous étudions le développement de la *documentation communautaire* dans un projet de Sésamath dédié à la conception d'un manuel numérique pour la classe de seconde, qui a suscité la constitution d'une communauté de pratique d'enseignants. Nous nous intéressons particulièrement à un thème mathématique riche, celui des fonctions. Nous découpons la période de suivi selon des segments temporels séparés par des *incidents* survenant dans cette documentation. Nous étudions deux segments successifs, en analysant l'effet de l'incident sur le *système de ressources* communautaire et *l'organisation de la communauté*. Nous identifions enfin des *connaissances communautaires* construites dans ce travail.

Mots-clefs : documentation communautaire, incidents, système de ressources, organisation de la communauté, connaissances communautaires

Abstract – We study the development of the *community documentation* in a project of Sésamath dedicated to the design of a digital textbook for the grade 10, which prompted the establishment of a community of practice of teachers. We are particularly interested in a rich mathematical topic: the functions. We divide the period of observation in temporal segments separated by *incidents* occurring in this documentation. We study two successive segments; we analyze the effect of the incident on the community *resources system* and the *didactical organization* of the community. Finally, we identify the *community knowledge* constructed in this work.

Keywords: community documentation, incidents, resources system, didactical organization, community knowledge

I. INTRODUCTION

Dans le groupe de travail « Technologie et enjeux de développement : formation à distance, ressources numériques, plate-forme, multimedia…» d'EMF 2009, les questions de développement de ressources et de développement professionnel donnent une place importante aux aspects *collectifs* du travail enseignant (Georget 2010, Kuntz et al. 2010, Gueudet et Trouche 2010a). Notre présent texte, pensé se situant dans le prolongement de ces questions, analyse les effets de la conception collective de ressources pour l'enseignement des mathématiques sur le développement professionnel des professeurs.

Le travail des professeurs intègre toujours une dimension collective, dans ou hors de l'établissement scolaire. Ainsi, en France, certains enseignants participent, volontairement, à des (travaux) collectifs comme dans les Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (IREM) ou à l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public ou bien encore à des dispositifs variés de formation continue. Dans les IREM, des groupes d'enseignants de collège, de lycée et de l'université effectuent en commun des recherches sur l'enseignement des mathématiques et assurent des formations s'appuyant sur ces recherches. Les évolutions technologiques contribuent aussi à cet essor du collectif : le développement d'Internet a rendu ainsi plus rapide la diffusion et les échanges de ressources entre enseignants ; le développement d'outils nomades (clés USB, baladeurs...) a facilité le transport des ressources numériques d'un support à un autre. La mise à disposition, pour autrui, de ses propres ressources est ainsi facilitée. Ces développements donnent de nouvelles occasions de formes collectives de travail centrées sur le partage des ressources.

* S2HEP, Université Lyon 1/ ENS de Lyon – France – hussein.sabra@ens-lyon.fr

© Sabra H. (2012) Le rôle d'un incident dans la documentation communautaire : (le) cas de la conception des ressources « fonctions » pour le manuel numérique de Sésamath. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT6, pp. 863–878). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

Le développement technologique suscite en retour de nouveaux besoins et rend plus complexe le travail des enseignants. Un simple recours à des ressources en ligne, pourtant abondantes sur une variété de sites, ou un simple échange de ressources numériques ne suffisent bien sûr pas à prendre en charge cette complexité. L'ensemble de ces facteurs a favorisé l'émergence des nouvelles formes de travail collectif entre les enseignants de mathématiques (Sabra et Trouche 2009).

Le phénomène le plus significatif de cette tendance, en France, est Sésamath, association en ligne des professeurs de mathématiques, fondé en 2001, visant à fournir aux professeurs de mathématiques des ressources libres. Pour atteindre cet objectif, Sésamath développe un travail collectif entre les enseignants, autour de projets communs (Sabra 2009). Nous traiterons dans cet article deux questions : comment se développe le travail de conception de ressources pour l'enseignement des mathématiques dans Sésamath ? Quelles *connaissances mathématiques* (KM) et *connaissances pour l'enseignement* (KE) sont construites dans ce travail ?

II. CADRE THÉORIQUE

Pour l'étude de ces questions, nous nous appuierons sur une articulation entre *l'approche documentaire* (Gueudet et Trouche 2010b), la théorie des *communautés de pratique* (CoP) (Wenger 1998) et le modèle de *niveaux d'activités* des professeurs de mathématiques (Margolinas 2002).

L'approche documentaire de la didactique (Gueudet et Trouche 2010b) vise essentiellement à analyser le travail du professeur comme un travail sur les *ressources*. Elle introduit une distinction entre ressources et *document*. Elle désigne par ressources tout ce qui peut former un « ingrédient » pour un professeur qui prépare l'enseignement d'une notion mathématique donnée. Nous distinguons différents types de ressources dans l'enseignement des mathématiques : ressources qui permettent à l'enseignant de forger le savoir à enseigner (méthodes mathématiques, représentations graphiques, etc.) ; ressources comme support permettant à l'enseignant de préparer son enseignement (logiciel, rétroprojecteur, textes officiels) ; ressources adaptables et modifiables (des fichiers de logiciels libres, etc.) ; et ressources qui permettent à l'enseignant d'échanger et d'expliciter ses idées (langage, plateformes, forums, etc.). L'approche documentaire place ce secteur étendu, de types de ressources, au cœur de l'activité du professeur. On appelle *système de ressources* l'ensemble des ressources mobilisées par un enseignant dans son travail. Un document est composé des ressources recombinées et d'un *schème* (Vergnaud 1994) (c'est-à-dire une organisation invariante de l'activité pour effectuer un type de tâche). Chaque schème englobe des connaissances donnant forme à l'activité de l'enseignant et qui sont enrichies par cette activité (Sabra et Trouche à paraître).

Le travail documentaire collectif comprend : la sélection de ressources par un membre ou groupe de membres d'un collectif, leur combinaison, leur mise en œuvre en classe, les discussions entre les membres et les modifications qui peuvent avoir lieu tout au long de ce processus. Pour l'étude de ce travail nous utilisons la théorie des *communautés de pratique* (CoP) (Wenger 1998). Les CoP sont des regroupements, souvent professionnels, qui correspondent à un *engagement partagé* de tous leurs membres, qui *collaborent* à un projet commun. La pratique se développe par une articulation dialectique de deux processus : la *participation* et la *réification.* La participation est liée au sentiment d'appartenance que les membres sont susceptibles de développer. Elle repose sur une activité individuelle ou communautaire pour la réalisation du projet commun. La réification est le processus de production des ressources, des outils, des symboles, d'un langage commun, des concepts qui chosifient les objets de pratique. L'équilibre entre participation et réification contribue au développement de la communauté et de sa structure.

Nous proposons une mise en relation entre le processus de participation des membres dans une CoP et les niveaux d'activités d'un enseignant de mathématiques (Margolinas 2002) : commençons par le niveau le plus général du modèle, le *niveau idéologique* (+3), représentant la réflexion du professeur sur l'enseignement des mathématiques ; le niveau suivant (+2) est le *niveau de conception d'un thème mathématique*. A ce niveau le professeur cherche à situer un cours dans une progression mathématique. Ensuite le *niveau du projet de leçon* (+1) qui consiste à traduire et à expliciter un projet d'enseignement. Le *niveau de la situation didactique* (0) est le niveau qui prend en compte l'activité du professeur en classe. Nous considérons que la participation d'un membre dans une CoP s'inscrit dans un niveau donné de ce modèle.

A l'instar de Gueudet et Trouche (2010b), nous appellerons *documentation communautaire* le processus de réification dans une CoP d'enseignants de mathématiques qui intègre les ressources communautaires produites par la participation des membres et les *connaissances communautaires*. On appelle *système de ressources communautaires* les ressources en jeu, mises en partage par les membres pour la réalisation du projet commun. Les connaissances communautaires sont des construits, qui découlent de la résolution des problèmes liés à la pratique dans la CoP (Wenger 1998). Le développement de la documentation communautaire résulte d'un développement conjoint d'une part, du système de ressources communautaires et d'autre part des connaissances communautaires.

Dans une CoP d'enseignants de mathématiques, les échanges sont complexes et de différentes natures : didactique, épistémologique, organisationnelle ou même personnelle. Les échanges complexes et diversifiés entre les membres ouvrent le système de ressources communautaire à un ensemble de ressources importantes à prendre en compte pour la réalisation du projet commun. Les modalités d'échange entre les membres d'une CoP, les différents rôles des membres et les ressources à disposition de la CoP, influencent naturellement la réalisation du projet commun. Nous définissons l'*organisation de la communauté* comme l'arrangement de ces conditions sous lesquelles une communauté est amenée à concevoir des ressources pour la réalisation du projet commun. Nous appelons *incident documentaire communautaire* toute intégration, volontaire ou non, d'une ressource, dans le système de ressources communautaire qui modifie le cours de la documentation communautaire. Les incidents communautaires ne sont pas entendus dans le seul sens négatif, mais ils peuvent naturellement favoriser l'émergence de la CoP.

Nous reformulons nos questions comme suit : comment se développe la documentation communautaire ? Quels effets des incidents communautaires sur ce développement ? Quelles KM et KE communautaires sont construites dans cette documentation ?

III. CONSTRUCTION DU TERRAIN EXPÉRIMENTAL

Pour développer notre questionnement, nous avons fait le choix d'un projet particulier de Sésamath : projet de conception d'un manuel numérique (digital Textbook) pour la classe de seconde (15-16 ans) (nous appelons dans la suite « digiTex » le groupe d'enseignants de Sésamath qui porte ce projet) et d'un thème mathématique : les fonctions. Dans ce qui suit, nous justifierons nos choix et nous présenterons notre terrain expérimental.

Le noyau dur de Sésamath est constitué d'environ une centaine de membres adhérents. Il y a dans Sésamath un partage d'un ensemble de principes inscrits dans une charte : une philosophie commune du service public et de « mathématiques pour tous ». Élu par ce noyau, le conseil d'administration de l'association lance régulièrement de nouveaux projets pour concevoir des ressources correspondant aux besoins des enseignants. Les projets rassemblent des enseignants dont certains sont impliqués dans plusieurs projets en même temps. Ils travaillent principalement à distance, via une plate-forme et des listes de diffusion. Les collectifs réunis autour des différents projets présentent les caractéristiques de la CoP, ils se développent donc en tant que des CoP potentiels (Wenger et *al*. 2002). Parmi les projets lycée de Sésamath, il y a plusieurs qui concernent le niveau du lycée, comme digiTex et Mathenpoche seconde (MeP2$^{\text{nde}}$) qui s'inscrit dans la continuité de MeP collège. DigiTex a été lancé en juin 2009 avant MeP2$^{\text{nde}}$, mais le développement de ces deux projets, comme de tous les projets lycée de Sésamath, n'est pas indépendant.

Comme pour les chapitres de MeP collège, un chapitre de MeP2$^{\text{nde}}$ (figure 1) est constitué d'un rappel des connaissances du collège nécessaires pour ce chapitre, d'une partie qui concerne le cours avec des exercices interactifs d'application et d'une troisième partie évaluation formée d'une QCM et DS avec des corrigés interactifs. Dans notre recherche, nous avons suivi la documentation dans digiTex. Ce choix a été motivé par deux raisons : 1) après avoir conçus des manuels pour le collège (du 6$^{\text{ème}}$ au 3$^{\text{ème}}$), les membres de Sésamath abordent pour la première fois des mathématiques plus complexes, celle de la classe de seconde ; 2) après avoir conçus des manuels en format classique (pdf, fichiers, OpenOffice que les enseignants puissent librement télécharger et modifier), les membres de Sésamath visaient, avec ce projet, de créer un nouveau type de manuel numérique full Web structuré autour d'atomes[1] formulés sous la forme de types de tâche, et constitué de briques au format Web indexées de telle façon que l'enseignant puisse s'approprier et adapter à ses propres besoins. Nous avons supposé que ces nouveaux défis (mathématique et technique) pourraient stimuler la documentation communautaire, et donc la rendre plus intéressante pour notre recherche.

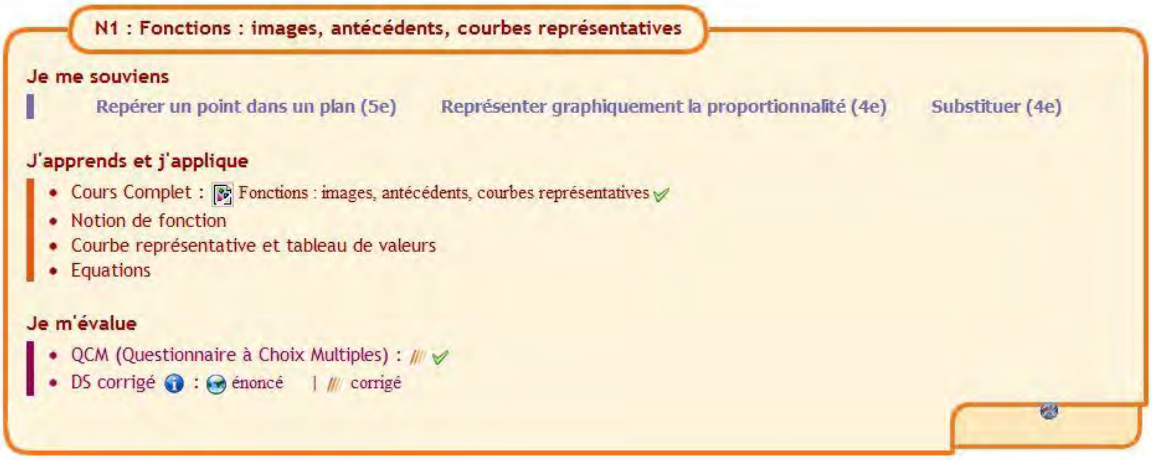


Figure 1 *– Copie d'écran de MeP2$^{\text{nde}}$ présentant les différentes parties d'un chapitre sur les fonctions*

Les membres de digiTex sont en majorité des enseignants en lycée. Lors du démarrage du projet, 8 membres étaient inscrits sur la liste de diffusion de ce projet. Le nombre a augmenté et a atteint une trentaine à la fin de la première année. Durant les trois premiers mois du projet, les membres déposaient et modifiaient les ressources sur un wiki auquel nous avions accès.

Nous nous intéressons au suivi du thème fonction dans ce projet. Nous avons fait ce choix du fait de la complexité de ce thème, susceptible ainsi d'être le lieu d'incidents, révélateurs de

[1] Terme propre aux membres de digiTex.

la documentation communautaire. De nombreux auteurs, comme Bloch (2002), soulignent en effet les difficultés que les enseignants rencontrent pour construire cet enseignement. Nous questionnons le rôle de la documentation communautaire des enseignants pour surmonter les difficultés d'enseignement des fonctions.

IV. MÉTHODOLOGIE

Analyser la documentation communautaire exige de prendre en compte plusieurs paramètres : observation sur le long terme pour mettre en évidence les régularités ; suivi individuel et communautaire, suivi des activités des membres et des ressources conçues, suivi en classe et hors de la classe. Nous effectuons le suivi comme observateur extérieur autant que possible.

Pour le suivi du travail documentaire d'*un* enseignant, Gueudet et Trouche (2010b) proposent une méthodologie : *l'investigation réflexive*. Suivant cette méthodologie, l'enseignant est un acteur essentiel dans le recueil de données et les outils méthodologiques suscitent une réflexivité individuelle. Parmi ces outils : des entretiens avec le professeur à son domicile ; une *représentation schématique du système de ressources* ; un journal de bord dans lequel le professeur relève les éléments marquants de son travail documentaire. L'ensemble des ressources conçues durant la période de suivi est aussi collecté.

Pour le suivi de la documentation communautaire, nous avons conçu une méthodologie dans le prolongement de cette méthodologie d'investigation réflexive. Nous avons d'abord recueilli les ressources naturelles produites dans la dynamique du projet. Parmi ces ressources naturelles la liste de diffusion propre à digiTex qui est un outil d'échanges et de conception de ressources. Nous avons reconstruit les fils de discussion de cette liste. Un fil de discussion est l'ensemble des messages échangés correspondant à un même sujet. La participation des membres à un fil de discussion s'inscrit dans un niveau d'activités (§II) que nous préciserons. Nous avons encore recueilli les ressources conçues pour la réalisation du manuel, plus particulièrement celles liées au thème « fonction ». Nous avons aussi conçu de nouveaux outils méthodologiques suscitant une réflexivité sur les activités communautaires. Parmi ces outils, un Petit Agenda de Suivi (PAS), renseigné par certains membres de la CoP choisis pour leurs rôles dans le projet. Le PAS est formé de plusieurs rubriques : description de l'incident ; acteurs jouant un rôle dans l'incident ; décisions prises ; effets de l'incident.

Nous visons, à travers ce PAS, à identifier, à partir des points de vue de certains membres, les incidents et à analyser leur impact sur la documentation communautaire tout au long de la période du suivi. Nous avons choisi deux membres de digiTex pour renseigner chacun un PAS : BM, membre du CA de Sésamath, facilitateur de l'engagement des membres dans le projet ; AL, coordinateur du débat, responsable de MeP2$^{\text{nde}}$. Nous ne nous limitons pas aux PAS pour repérer les incidents, nous procédons par une confrontation des différents types de données recueillies.

V. ANALYSE DES DONNÉES

Dans cette partie, nous présentons le découpage de la période de suivi, puis nous décrivons la structure de notre méthodologie d'analyse. Nous exposons enfin notre analyse.

1. Découpage par Incident

Nous avons fait un découpage en fonction des incidents communautaires repérés durant la période de suivi. Comme le temps entre un incident et l'observation de ses effets sur la documentation et l'organisation de la communauté n'est pas constant, nous faisons le découpage en fonction de notre observation des effets de l'incident (figure 2).

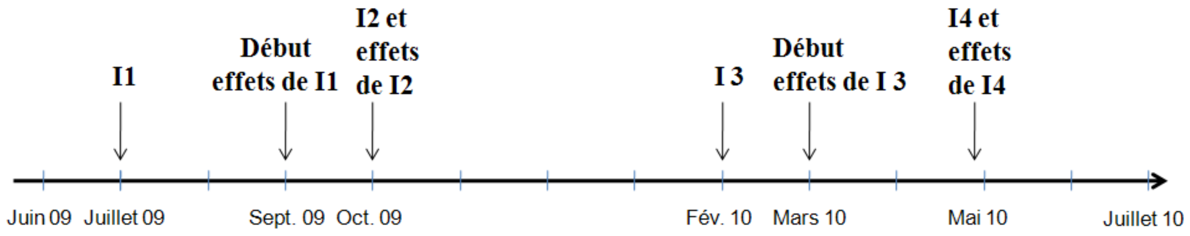


Figure 2 *- les incidents communautaires et leurs effets en fonction de la période de suivi*

La période de suivi est découpée alors en 5 *segments temporels*. Nous choisissons pour analyser dans le présent article :

- le premier segment (début juin 2009 → début septembre 2009) qui correspond à 7 fils de discussion;
- le deuxième segment (début septembre 2009 → début octobre 2009) qui correspond à 6 fils de discussion.

Ces deux segments sont séparés par I1 (l'apparition du nouveau programme de seconde). Le titre que nous indiquons pour chaque fil de discussion est celui donné par les membres de digiTex. Pour chaque segment, nous analyserons d'une part, la participation des membres et l'organisation de la CoP à partir des fils de discussion, et d'autre part le système de ressources communautaires à partir des ressources proposées et conçues par la participation. L'analyse des ressources conçues portera sur leur type ; leur contenu mathématique ; choix didactique ; et la stratégie d'enseignement de fonction dans laquelle elles s'inscrivent. Nous allons procéder pour l'identification des KM et KE communautaires par problème (§II). Nous identifierons un problème lié à la pratique, et nous étudierons le processus de sa résolution par les membres de la CoP.

2. *Analyse du premier segment*

Dans ce segment, la participation des membres s'inscrit dans les niveaux d'activités (+2) et (+3) (§II), sauf pour le fil de discussion « première fiche » qui s'inscrit dans le niveau (+1).

Fil de discussion	**Niveau d'activité**	**Description de l'activité**
entrée fonctionnelle	+2	Conception du thème fonction : progression allant de la $3^{ème}$ à la terminale.
Wiki	+2	Mise en place d'un wiki et processus de dépôt des ressources pour le thème fonction.
	+3	Possibilité de rajouter un onglet pour la statistique.
atomes fonctions seconde	+2	Conception des *atomes* pour le thème fonction : rapport entre atomes et programme de seconde.
Re : [sesamath] sur le manuel numérique	+3	Conception des fichiers mathématiques fullweb.
une première fiche	+1	Proposition d'une ressource « les intervalles » pour l'introduction de la notion de fonction ; Discussion didactique autour de son contenu.

méthode de travail	+3	Activité organisationnelle : fonctionnement du wiki avec des exemples sur la fonction carrée.
méthode de travail-exercices ?	+2	Questionnement autour du modèle des fiches à concevoir.
	+3	Proposition d'une réunion moodle pour faire le point sur le projet (outils et fiches conçues)

Tableau 1 *– la participation sur la liste de diffusion correspondant au 1er segment d'analyse*

Trois ressources sont conçues dans ce segment : les intervalles (première fiche) ; la fonction carrée (méthode de travail) ; les atomes pour le thème de fonction (atomes fonction seconde). Nous présentons dans ce qui suit une analyse didactique de ces ressources.

<u>Les intervalles (Annexe 1)</u>

C'est une fiche de cours où on présente une définition des intervalles comme partie de l'axe des nombres réels. A la fin de la ressource on donne des exemples. La conception de cette ressource ne s'inscrit pas dans le cadre d'une progression explicitée. C'est une fiche de cours où pas de responsabilité à la charge des élèves. La stratégie d'enseignement des fonctions dans laquelle elle s'inscrit n'est pas claire en ce moment de développement du projet. Dans les discussions de cette ressource, il a eu une proposition que le cours sera le résultat d'une activité introductive de la notion d'intervalle. Il n'a pas eu des discussions autour de la gestion didactique de cette ressource dans la classe.

<u>La fonction carrée (Annexe 2)</u>

C'est une fiche de cours où on présente la fonction carrée : définition comme correspondance ensembliste ; étude des variations comme une interprétation de la représentation graphique. La conception de cette ressource ne s'inscrit pas dans le cadre d'une progression explicitée. Il n'y a pas de responsabilité à la charge des élèves. Elle ne s'inscrit pas dans le cadre d'une stratégie explicite d'enseignement des fonctions.

<u>Les atomes pour le thème fonction en seconde (Annexe 3)</u>

C'est une ressource structurant la participation ultérieure des membres autour du thème fonction. Elle est formée d'une liste d'atomes (38 atomes) conçus en fonction du programme de seconde. Il a eu une proposition de construire des cours classiques pour chaque atome suivant le modèle : activité introductive, cours (définitions, théorèmes et méthodes), démonstration et exercices d'application. Nous classons les atomes dans 4 catégories : définition suivant trois entrées (graphique ; algébrique et tableau) ; propriétés des fonctions (sens de variations et extremums) ; différents types de fonctions (affine, carrée, inverse et monographique) ; fonctions et résolution de problèmes (coordination de deux registres, mise en équation, transformations d'expressions algébriques). Certains atomes peuvent s'inscrire dans deux catégories en même temps.

La conception des ressources dans ce segment s'est réalisée dans le cadre du développement d'une méthode de travail pour la réalisation du projet. La mise en place d'un wiki, pour le dépôt des ressources conçues, a déterminé l'organisation de la communauté dans ce segment : la difficulté de la prise en main du wiki par les membres a multiplié les discussions autour de la modification des ressources qui y sont déposées. Les choix didactiques effectués dans la conception des ressources sont très liés au programme, ceci apparaît clairement dans les discussions : *« c'est mentionné dans le programme dans le paragraphe "notations mathématiques" »* (Anaïs, première fiche) ; *« J'ai créé une liste d'atomes pour les fonctions en seconde d'après le programme »* (LZ, atomes fonctions seconde) ; *« J'avais mis ... quelques idées, essentiellement liées au programme de 3e et sur les fonctions en 2e »* (XOB, atomes fonctions seconde).

5 membres ont écrit 82% des messages de ce segment. Nous avons identifié les rôles de 4 membres parmi eux que nous présentons en fonction du pourcentage de leurs messages dans ce segment :

- LZ (30.3%) : concepteur de ressources et modificateur principal (quasi unique) des ressources ;
- AL (10.5%) : coordinateur du débat quand c'est lié à la méthode du travail et l'organisation de la réalisation du projet ;
- BM (21%) : l'animateur du wiki, il a pris à sa charge de faciliter la prise en main du wiki par les membres ;
- Anaïs (13.2%) : relectrice et commentatrice des ressources proposées qui conduiront à des modifications.

Dans le fil « première fiche » (Annexe 4), lors de la conception de la fiche intervalles, les membres ont posé le problème de l'introduction des nouvelles notions dans le manuel, en particulier les intervalles. Il a eu plusieurs propositions : *« peut-être faut-il mettre un exemple introductif »* (Anaïs) ; ensuite, elle précise qu'il vaut que cet exemple soit un exemple de la vie quotidienne : *« Pas si facile de trouver un exemple concret ».* BM fait une proposition d'introduire les intervalles *« à partir des équations et inéquations : on donne le résultat sous la forme S=... »* ; Anaïs insiste sur l'intérêt des exemples concret : *« je trouve que les exemples ... liés à la vie quotidienne, plus parlant que S= pour l'ensemble des solutions d'inéquations ».* XOB propose : *« Mais n'aurait-on pas intérêt à rédiger cela sous forme de questions, pour avoir petit à petit des séries d'activités ? ».* Anaïs rejoint l'idée de XOB : *« il faudrait rédiger une première fiche d'activité qui permet d'introduire naturellement tout ce qui est dans la fiche de cours, qui elle doit être rédigée sous forme de synthèse ».* Cette proposition a été acceptée enfin par les membres.

La KE construite d'après la résolution de ce problème : l'introduction et la définition des nouveaux concepts viennent comme résultat d'une activité mathématique. Les membres s'appuieraient sur cette KE pour la conception des ressources où on introduit des nouveaux concepts et notions.

La participation des membres a conduit au développement d'un système de ressources constitué du : wiki support pour la réalisation du projet ; programme de la classe de seconde support pour le démarrage du projet et des ressources conçues (intervalles, fonction carrée, atomes fonction seconde). Les deux dernières ressources ont été conçues par une participation s'inscrivant dans les niveaux (+2) et (+3). Nous notons une absence d'une stratégie d'enseignement de fonctions dans laquelle s'inscrit la conception de ces ressources. Le seul fil de discussion dont la participation des membres s'inscrit dans le niveau (+1) conduisait à la conception d'une ressource (intervalles) et à la construction d'une KE communautaire. La participation qui a conduit à une construction d'une KE est celle qui a donné objet à une ressource conçue pour le manuel.

3. Analyse du deuxième segment

L'observation des effets d'I1 a commencé au début septembre, lorsque les enseignants ont commencé à prendre en compte le nouveau programme dans leur participation. Dans ce segment, la participation des membres s'inscrit, majoritairement, dans les niveaux (+3) et (+2).

Fil de discussion	Niveau d'activité	Description de l'activité
Progression 2nde	+2	Conception d'une progression pour digiTex et articulation entre plusieurs thèmes (fonction, géométrie, etc.)
	+2	Proposition d'une transition collège/lycée autour du thème fonction.
	+1	Échange didactique autour d'un « problème préparatoire » proposée, qui peut être utilisé en géométrie et fonction.
	+3	Échanges autour de l'enseignement des mathématiques au lycée.
Re : proposition pratique – projet manuel seconde	+3	Explicitation des problèmes révélés par l'apparition du nouveau programme et de la problématique croisée de plusieurs projets lycée (digiTex, Mep Lycée).
Liste mathlycée	+3	Lancement de la liste mathlycée pour mutualiser le travail dans les différents projets lycée.
Jean Paul Quelen	+3	Présentation des projets lycée de Sésamath auxquels digiTex est lié. Des problèmes techniques empêchent le développement d'un manuel full web.
Lancement liste lycée	+3	Lancement de la liste lycée. Concentration durant cette année sur la classe de seconde. Faire un lien fort avec MeP lycée.
	+2	Parler du modèle de ressources dans les projets lycée.
Chapitrage seconde	+2	La conception d'un chapitrage lié au nouveau programme de seconde. le thème fonction prenait une grande partie des discussions didactiques.

Tableau 2 *– la participation dans les fils de discussion correspondant au 2ème segment d'analyse*

Durant ce segment, les membres ont fait une large proposition de ressources sans qu'il y ait une activité de conception importante. Parmi les propositions : 3 progressions pour la seconde ; progression du thème fonction dans deux manuels. Avec le lancement de la liste lycée, les ressources conçues dans les autres projets lycée font partie du système de ressources communautaire. La seule ressource conçue dans ce segment est la progression du thème fonction (progression 2nde). Nous présentons dans ce qui suit une analyse didactique de cette ressource.

Progression du thème fonction

Nous considérons cette ressource comme structurant le thème fonction dans digiTex. Elle est constituée d'un découpage dit « classique », déterminé par les recommandations du nouveau programme. On y présente une définition ensembliste des fonctions, suivi d'une étude des variations, ordre et extremums. Les équations et les inéquations ont le statut d'outils pour l'enseignement des fonctions. Ce choix conduirait à une conception des problèmes de mise en équations au fil des chapitres. Les fonctions de références sont données à titre d'exemples pour illustrer les propriétés des fonctions. Cette ressource a été conçue à la fin de ce segment.

3 membres renseignaient 58.3% des messages de ce segment. Nous y décrivons leurs rôles dans ce qui suit en fonction du pourcentage de leurs messages :

- JV (26.4%) : initiateur d'idées et de décisions prises par Sésamath pour faire face à I1 ;
- AL (11.1%) : coordinateur des débats dans la perspective d'assurer des rapports entre digiTex et les projets lycée ;
- Anaïs (19.5%) : relectrice et commentatrice des ressources proposées, elle a aussi proposé des ressources.

Durant ce segment, SH (3 messages) n'est pas parmi les trois ayant une participation importante, mais ses interventions ont assuré un mouvement systémique des projets lycée de Sésamath. En comparant les rôles des membres entre le premier et le deuxième segment, on remarque qu'il y a des rôles qui ont disparu et d'autres qui ont émergé. Les rôles de BM et LZ ont disparu, parce qu'il n'y avait pas des discussions autour du wiki. AL et Anaïs ont conservé leurs rôles mais ils les ont adaptés à la situation après I1.

Dans le fil « chapitrage seconde », les membres ont rencontré un problème : quelle progression du thème fonction faut-il adopter ? Des propositions ont été indiquées : *« il faut se mettre d'accord pour que ça soit commun à tous les projets »*(AL). JV propose une progression qui considère le nouveau programme : définition et propriétés des fonctions, suivies d'un chapitre sur les fonctions références, les équations et inéquations sont des chapitres transversaux : *«à chaque fois qu'on rencontre un nouveau type de fonction, le calcul d'antécédent donne un nouveau type d'équation »*(JV). Anaïs propose une progression du thème fonction commençant par la définition, suivie par un chapitre sur les équations et les inéquations pour l'étude des fonctions, elle termine sa proposition par des problèmes de synthèse. Les fonctions de références sont présentées transversalement pour *« illustrer tous les aspects des fonctions »*(Anaïs). JV présente son désaccord avec Anaïs suit : *« dans ta progression, les notions transversales (équations, inéquations) font l'objet de chapitres bien identifiés, alors que les fonctions de références ... se retrouvent éparpillées ... J'ai tendance à croire qu'il faudrait faire le contraire »* (JV). SH avait d'autres critères à prendre en compte dans l'élaboration de la progression : *« le mieux serait d'avoir le découpage le plus classique ... c'est à dire celui repris dans la majorité des manuels ».* Après avoir vu les découpages classiques dans les différents manuels, les membres se sont mis d'accord sur un découpage prenant en compte les différents critères suscités : *« On peut utiliser les fonctions de référence pour servir d'exemples dans les chapitres plus généraux… le chapitrage proposé par JV (qui cadre bien avec ceux des manuels déjà édités, ...) me semble convenir, en prenant soin d'introduire très tôt les fonctions de référence dans les exemples »* (SH).

Une KM pour l'enseignement est construite d'après la résolution de ce problème : la progression du thème fonction se présente du général (définition, propriétés) au particulier (fonctions de référence comme exemples), les équations et inéquations ont le statut d'outil dans cette progression. La CoP ferait appel à cette KM lors de la conception des ressources s'inscrivant dans ce thème.

Après I1, il y a eu un déséquilibre entre la participation et la documentation communautaire. L'équilibre est retenu à la fin de ce segment avec la conception de la progression du thème fonction : une participation qui a conduit à une ressource conçue et KM construite. En comparant le premier et le deuxième segment, nous avons remarqué la présence d'une reconfiguration du système de ressources communautaire en fonction de I1 (on ne parle pas des ressources du premier segment sauf des atomes d'une façon marginale).

VI. CONCLUSION

Nous avons présenté dans cet article un modèle théorique et une méthodologie pour analyser la documentation communautaire d'enseignants de mathématiques. Nous avons présenté cette étude dans le cas d'un projet de Sésamath : le projet digiTex.

Au début de la réalisation du projet, l'activité des membres se situe dans le développement d'une méthode de travail. Ils ont pris les fonctions mathématiques comme objet autour duquel ils ont développé cette méthode. Dans le cas étudié, l'incident touchait une ressource jouant un rôle central (le programme de seconde) dans le travail de conception de ressources, ceci a conduit à une réorganisation de ce travail : réorganisation des rôles des membres et propositions de nouvelles ressources par les membres. Créer des rapports entre les différents projets de Sésamath forme un support pour faire face à l'incident. Dans le cas étudié, la construction des KM et KE était le fruit d'une activité de conception de ressources, dans laquelle s'engageaient les membres les plus actifs.

Cette étude a révélé des questions qui mérite plus d'approfondissement : Comment analyser les rapports entre construction des KM et KE et conception collective de ressources ?

RÉFÉRENCES

Bloch I. (2002) Un milieu graphique pour l'apprentissage de la notion de fonction au lycée. *Petit x* 58, 25-46.

Georget J.-P. (2010) Apport de l'ergonomie des EIAH pour l'analyse et la conception de ressources. In Kuzniak A., Sokhna M. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et développement : enjeux de société et de formation.* http://fastef.ucad.sn/EMF2009/Groupes%20de%20travail/GT6/georget.pdf

Gueudet G., Trouche L. (2010a) Développement de ressources pour l'enseignement et dispositifs de formation : éléments de réflexion à partir du dispositif français Pairform@nce. In Kuzniak A., Sokhna M. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et développement : enjeux de société et de formation.* http://fastef.ucad.sn/EMF2009/Groupes%20de%20travail/GT6/Gueudet%20&%20trouche.pdf

Gueudet G., Trouche L. (dir) (2010b) *Ressources vives. Le travail des professeurs de mathématiques*. Rennes : Presses Universitaires de Rennes, et Lyon : INRP.

Kuntz G., Clerc B., Hache S. (2010) Questions à l'association Sésamath : un modèle crédible pour créer, éditer et apprendre des mathématiques ? In Kuzniak A., Sokhna M. (Eds.) (pp. 867-880) *Enseignement des mathématiques et développement:enjeux de société et de formation.* http://fastef.ucad.sn/EMF2009/Groupes%20de%20travail/GT6/kuntz,%20Clerc%20et%20Hache.pdf

Margolinas C. (2002) Situations milieux, connaissances : Analyse de l'activité du professeur. In Dorier J.-L., Artaud M., Artigue M., Berthelot R., Floris R. (Eds.) (pp. 141-155) *Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques*. Grenoble : La pensée sauvage.

Sabra H. (2009) Entre monde du professeur et monde du collectif: réflexion sur la dynamique de l'association Sésamath. *Petit x* 81, 55-78.

Sabra H., Trouche L. (à paraître) Collective design of an online math textbook: when Individual and collective documentation works meet. *Proceedings of CERME 7, 9th to 13th February 2011*. Rzesów, Poland.

Sabra H., Trouche L. (dir.) (2009) *Enseignement des mathématiques et TICE, Revue de la littérature de recherche francophone (2002 – 2008).* Lyon : INRP. http://www.inrp.fr/editions/editions-electroniques/enseignement-des-mathematiques-et-tice

Vergnaud G. (1994) Le rôle de l'enseignant à la lumière des concepts de schème et de champ conceptuel. In Artigue M., Gras R., Laborde C., P. Tavignot (Eds.) (pp. 177-191) *Vingt ans de didactiques des mathématiques en France*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Wenger E. (1998) *Communities of practice. Learning, meaning, identity*. Cambridge: Cambridge University Press.

Wenger E., McDermott R. A., Snyder W. (2002) *Cultivating communities of practice: a guide to managing knowledge*. Boston MA: Harvard Business School Press.

ANNEXE

Annexe 1 : les intervalles

Les intervalles

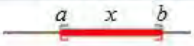
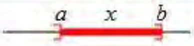
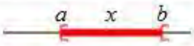
Table des matières

Définitions

On peut identifier l'ensemble de tous les nombres connus (appelés *nombres réels*) à un axe gradué. Un **intervalle** est une partie de cet axe constituée *d'un seul tenant*.

Intervalles bornés

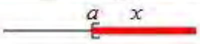
Étant donnés deux nombres a et b, avec $a<b$. On appelle **intervalle de bornes a et b** l'ensemble de tous les nombres x tels que x est compris entre a et b. Il y a quatre possibilités, suivant qu'on considère une inégalité stricte (comme <) ou large (≤).

Notation crochet	Illustration	Condition vérifiée par x	Nom
$x \in [a\ ;\ b]$		$a \leq x \leq b$	intervalle fermé en a et b
$x \in]a\ ;\ b]$		$a < x \leq b$	intervalle ouvert en a et fermé en b
$x \in]a\ ;\ b[$		$a < x < b$	intervalle ouvert en a et b
$x \in [a\ ;\ b[$		$a \leq x < b$	intervalle fermé en a et ouvert en b

Lorsqu'une borne n'appartient pas à l'intervalle, le crochet est tourné vers l'extérieur et on dit que l'intervalle est **ouvert** en cette borne. Lorsqu'une borne appartient à l'intervalle, le crochet est tourné vers l'intérieur et on dit que l'intervalle est **fermé** en cette borne.

On note toujours un intervalle borné avec le plus petit nombre à gauche et le plus grand à droite.

Intervalles non bornés

Notation crochet	Illustration	Condition vérifiée par x
$x \in [a\ ;\ +\infty[$		$a \leq x$
$x \in]a\ ;\ +\infty[$		$a < x$
$x \in]-\infty;\ a[$		$x < a$
$x \in]-\infty;\ a]$		$x \leq a$
$x \in]-\infty;\ +\infty[$		aucune (tous les nombres)

Le signe ∞ se lit *l'infini*.

$-\infty$ ("moins l'infini") signifie que l'intervalle contient des nombres aussi petits que l'on veut. $+\infty$ ("plus l'infini")signifie que l'intervalle contient des nombres aussi grands que l'on veut. Le crochet est toujours situé vers l'extérieur du côté de $-\infty$ et $+\infty$.

Exemples

1. Au bac, les candidats qui obtiennent une mention *Très Bien* sont ceux dont la moyenne est dans l'intervalle [16 ; 20].
2. En France, un mineur est une personne dont l'âge, en année, est dans l'intervalle [0 ; 18[.
3. Pour surgeler des aliments, il est conseillé de régler son congélateur sur une température, en degrés Celsius, comprise dans l'intervalle [-30 ; -25] environ.
4. Les nombres positifs ou nuls constituent l'intervalle [0 ; +∞[.
5. Les nombres strictement positifs constituent l'intervalle]0 ; +∞[.

Annexe 2 : la fonction carrée

La fonction carré

Table des matières

Définition

La **fonction carré** est la fonction qui, à tout nombre x, associe son carré x2.

Quelques valeurs

x	-3	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2	3	4
x2	9	4	1	0,25	0	0,25	1	4	9	16

Variations

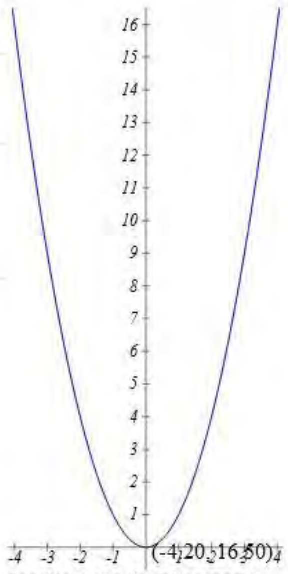
La fonction carré est décroissante sur l'intervalle]—∞; 0] et croissante sur [0 ; +∞[.
Cela signifie que :

- des nombres positifs sont classés dans le même ordre que leurs carrés ;
- des nombres négatifs sont classés dans l'ordre inverse de leurs carrés.

Le tableau de variations de la fonction carré est :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	↘	0	↗

(0.00, 7.00)



Graphe de la fonction carré.

Annexe 3 : fonction atomes seconde

Liste d'atomes en seconde d'après le projet de programme

1. Traduire le lien entre deux quantités par une formule.
2. Pour une fonction définie par une courbe : identifier la variable et, éventuellement, l'ensemble de définition ;
3. Pour une fonction définie par un tableau de données : identifier la variable et, éventuellement, l'ensemble de définition *cf fonction_definie_par_un_tableau_de_donnees* ;
4. Pour une fonction définie par une formule : identifier la variable et, éventuellement, l'ensemble de définition ;
5. Pour une fonction définie par une courbe : déterminer l'image d'un nombre ;
6. Pour une fonction définie par une courbe : rechercher des antécédents d'un nombre.
7. Pour une fonction définie par un tableau de données : déterminer l'image d'un nombre ;
8. Pour une fonction définie par un tableau de données : rechercher des antécédents d'un nombre.
9. Pour une fonction définie par une formule : déterminer l'image d'un nombre ;fct_formule_image_nb Rédigé par Xavier
10. Pour une fonction définie par une formule : rechercher des antécédents d'un nombre.
11. Fonction croissante, fonction décroissante ;
12. maximum, minimum d'une fonction sur un intervalle.
13. Décrire, avec un vocabulaire adapté ou un tableau de variations, le comportement d'une fonction définie par une courbe.
14. Dessiner une représentation graphique compatible avec un tableau de variations.
15. Lorsque le sens de variation est donné, par une phrase ou un tableau de variations : comparer les images de deux nombres d'un intervalle ;
16. déterminer tous les nombres dont l'image est supérieure (ou inférieure) à une image donnée.
17. Transformations d'expressions algébriques en vue d'une résolution de problème.
18. Associer à un problème une expression algébrique.
19. Identifier la forme la plus adéquate (développée, factorisée) d'une expression en vue de la résolution du problème donné.
20. Développer des expressions polynomiales simples ;
21. factoriser des expressions polynomiales simples ;
22. transformer des expressions rationnelles simples.
23. Mettre un problème en équation.
24. Résoudre une équation se ramenant au premier degré.
25. Encadrer une racine d'une équation grâce à un algorithme de dichotomie.
26. Donner le sens de variation d'une fonction affine : cf *variation_d_une_fonction_affine*
27. Donner le tableau de signes de a x + b pour des valeurs numériques données de a et b.
28. Connaître les variations de la fonctions carré. Représenter graphiquement la fonction carré. fonction_carre
29. Connaître les variations de la fonctions inverse. Représenter graphiquement la fonction inverse. fonction_inverse
30. Connaître les variations des fonctions polynômes de degré 2 (monotonie, extremum) et la propriété de symétrie de leurs courbes.
31. Identifier l'ensemble de définition d'une fonction homographique.
32. Résoudre graphiquement des inéquations de la forme : $f(x) < k$.
33. Résoudre graphiquement des inéquations de la forme : $f(x) < g(x)$.
34. Pour un même problème, combiner résolution graphique et contrôle algébrique.
35. Résoudre une inéquation à partir de l'étude du signe d'une expression produit ou quotient de facteurs du premier degré.
36. Résoudre algébriquement les inéquations nécessaires à la résolution d'un problème.
37. « Enroulement de la droite numérique » sur le cercle trigonométrique et définition du sinus et du cosinus d'un nombre réel.
38. On fait le lien avec les valeurs des sinus et cosinus des angles de 0°, 30°, 45°, 60°, 90°.

Annexe 4 : le fil de discussion « première fiche »

M1. LZ, 3 juin 2009, 14h55
Voici un premier brouillon de fiches sur les intervalles :
http://manuel2nde.sesamath.net/doku.php?id=1
Qu'en pensez-vous ?

M2. Anaïs, 3 juin 2009, 15h31
Voici un premier brouillon de fiches sur les intervalles :
http://manuel2nde.sesamath.net/doku.php?id=1
Qu'en pensez-vous ?
@+

c'est très bien
Peut-être faut-il mettre un exemple introductif pour les intervalles non bornés avant le tableau où intervient le symbole de l'infini
Anaïs

M3. LZ, 3 juin 2009, 15h45
Est-ce que je remonte l'exemple sur la majorité à cet endroit-là ?
Mineur -> [0 ; 18[, majeur -> [18 ; +∞[?
À moins que quelqu'un ait une autre idée...
@+

M4. Anaïs, 3 juin 2009, 15h53
Il faudrait trouver un autre exemple parce que vivre l'éternité pour l'instant ce n'est pas gagné ;-) ;-)
Pas si facile de trouver un exemple concret .... une histoire de distance dans l'univers peut être ?
Anaïs

M5. BM, 3 juin 2009, 16h36
Voici un premier brouillon de fiches sur les intervalles :

http://manuel2nde.sesamath.net/doku.php?id=1
Qu'en pensez-vous ?
2 remarques :
- la version actuelle du programme ne mentionne pas du tout les intervalles. Seront-ils toujours au programme ?
- dans ces conditions, je pencherais plutôt pour une introduction à partir des équations et inéquations : on donne le résultat sous la forme S=...

BM

M6. Anaïs, 3 juin 2009, 16h41
Si BM !, c'est mentionné dans le programme dans le paragraphe « notations mathématiques » page 10 et je trouve que les exemples de LZ sont bien intéressants car liés à la vie quotidienne, plus parlant que S= pour l'ensemble des solutions d'inéquations
Anaïs

M7. XOB, 3 juin 2009, 17h04
Voici une très bonne base de départ.
J'aime aussi bien l'exemple d'introduction. Mais n'aurait-on pas intérêt à rédiger cela sous forme de questions, pour avoir petit à petit des séries d'activités ?
Peut-être peut-on mettre un deuxième exemple qui parte de l'aspect inéquation, car c'est finalement le premier contact avec les intervalles (sans le dire) au Collège. Ou de faire un atome qui lie ces deux notions.
Pourquoi ne pas parler des nombres réels dans la définition ?
Dans cette définition, je dirai plutôt : Sur une droite graduée (ou axe), où à chaque point est associé un nombre, et réciproquement, un intervalle correspond à une partie... (la suite idem) Peut-être éventuellement de rappeler la définition de la droite graduée.
Je dirais que l'on distingue deux grandes catégories d'intervalles : les intervalles bornés (4 types) et les intervalles non bornés (5 types) et de mettre l'intervalle]-inf;+inf[dans le tableau. Pour les exercices, je vois déjà bien un exo MeP ;-)

XOB

M8. Anaïs, 3 juin 2009, 17h12

En fait il faudrait rédiger une première fiche d'activité qui permet d'introduire naturellement tout ce qui est dans la fiche de cours, qui elle doit être rédigée sous forme de synthèse, qu'en pensez-vous ?
Anaïs

M9. LZ, 3 juin 2009, 18h04

2 remarques :
- la version actuelle du programme ne mentionne pas du tout les intervalles. Seront-ils toujours au programme ?
Ils sont évoqués dans la partie fonctions « fonction croissante sur un intervalle » etc. C'est pour ça que je les ai rajoutés dans les fonctions.

- dans ces conditions, je pencherais plutôt pour une introduction à partir des équations et inéquations : on donne le résultat sous la forme S=...
Mais si on fait ça, ce n'est plus atomique. Un collègue peut avoir besoin des intervalles avant, dès la définition des fonctions par exemple.
@+

M10. LZ, 3 juin 2009, 18h07

Bonjour,
Voici une très bonne base de départ.
J'aime aussi bien l'exemple d'introduction. Mais n'aurait-on pas intérêt à rédiger cela sous forme de questions, pour avoir petit à petit des séries d'activités ?
Comme dit Anaïs : plutôt des fiches de synthèse. Mais tu as raison : il faudrait penser à l'exemple introductif comme une réponse à une activité. Autrement dit, ce serait bien de rédiger une activité dont la synthèse est l'exemple introductif (si possible).

Ou de faire un atome qui lie ces deux notions.
Oui.

Pourquoi ne pas parler des nombres réels dans la définition ?
Je ne sais pas si ce vocabulaire existe dans les nouveaux programmes.

Dans cette définition, je dirai plutôt :
Sur une droite graduée (ou axe), où à chaque point est associé un nombre, et réciproquement, un intervalle correspond à une partie...(la suite idem)
Peut-être éventuellement de rappeler la définition de la droite graduée.
Je dirais que l'on distingue deux grandes catégories d'intervalles : les intervalles bornés (4 types) et les intervalles non bornés (5 types) et de mettre l'intervalle]-inf;+inf[dans le tableau.
OK.

LES OBSTACLES LINGUISTIQUES A LA CONCEPTION ET A L'USAGE DES RESSOURCES DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

Moustapha SOKHNA* – Bakary DIARRA*

Résumé – Cette contribution, qui s'intéresse à la conception et l'usage de ressources par les enseignants de mathématiques en lien avec l'intégration des technologies dans les classes, aborde les questions suivantes : « Comment prendre en compte, dès la conception de ressources, leurs usages, comment les soutenir, les étudier ? Comment évaluer leurs effets sur les apprentissages des élèves, sur les pratiques des enseignants ? » Les réponses que nous proposons sont des éléments d'une recherche en cours sur le lien entre conception et usage de ressources et développement professionnel de professeurs de mathématiques dans un pays où la langue d'enseignement est une langue seconde non nécessairement maîtrisée par les élèves et parfois par les enseignants.

Mots-clefs : ressource, obstacles linguistiques, langue seconde, professeur de mathématiques, développement professionnel

Abstract – This contribution, which focuses on the design and use of resources by mathematics teachers in relation with the integration of technology in classrooms, addresses the following questions: « How to take into account, from the resource design, its uses, how to support them, study them ? How to evaluate their effects on students' learning, on teachers' practices ? » The answers we offer are elements of an ongoing research on the relationship between design and use of resources and professional development of mathematics teachers in a country where the language of instruction is a second language, not necessarily mastered by the students and sometimes by teachers.

Keywords: resource, language obstacles, second language, mathematics teacher, professional development

I PROBLEMATIQUE

Au Sénégal, une analyse de la situation qui prévaut dans le domaine des mathématiques permet de constater l'existence d'au moins trois paramètres caractéristiques des difficultés liées à l'enseignement-apprentissage de cette discipline. Il s'agit :

- d'un déficit chronique de professeurs de mathématiques de l'enseignement moyen et secondaire (apprenants âgés de 12 à 18 ans). Il en résulte un recrutement massif et récurrent de professeurs de niveau de formation académique sinon faible du moins moyen (niveau baccalauréat) et doublé, pour certains, d'une absence de formation professionnelle (Sokhna 2010) ;
- d'une faible capacité d'accueil des structures chargées d'assurer une formation en présentiel tant initiale que continuée ;
- des conditions de travail difficiles avec une insuffisance de manuels scolaires et de ressources endogènes qui poussent les professeurs de mathématiques, avec la profusion des ressources disponibles sur Internet, à avoir recours à des ressources non nécessairement adaptées au contexte dans lequel ils évoluent.

Aujourd'hui, les bouleversements intervenus dans l'accès et l'appropriation des savoirs mathématiques suite à l'usage de ressources numériques, conséquence de l'introduction des

* Faculté des Sciences et Technologies de l'Éducation et de la Formation, Université Cheikh Anta Diop de Dakar – Sénégal – moustapha.sokhna@ucad.edu.sn, bakary.diarra@ucad.edu.sn

© Sokhna M., Diarra B. (2012) Les obstacles linguistiques à la conception et à l'usage de ressources dans l'enseignement des mathématiques. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT6, pp. 879–891). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

technologies en classe, les tâches de formation et d'enseignement sont rendues encore plus complexes.

De plus en plus, en raison de cette nouvelle situation, la réflexion didactique porte sur l'aide à apporter aux enseignants en vue de leur permettre de faire face à cette dynamique nouvelle devenue réalité incontournable (Sokhna 2007, Gueudet et Trouche 2008, Trouche et al. 2007, Floris et al. 2010 et Hitt et al. 2011).

Dans cette perspective, plusieurs pistes de recherche se font jour, empruntant des paradigmes nouveaux. De ce point de vue, nous nous intéresserons aux questions relatives à la conception et à l'usage des ressources en rapport avec l'intégration des technologies en classe. Nous nous interrogerons plus particulièrement sur la manière de tenir compte, dès la conception des ressources, de leur usage, en rapport avec les contextes langagiers des usagers éventuels.

Dans l'espace francophone, s'il est vrai qu'il est urgent de penser à la mise en place d'un dispositif collaboratif de conception de ressources à distance, il nous semble, qu'il est aussi judicieux d'engager préalablement une réflexion sur les obstacles linguistiques qui font écran à la compréhension des phénomènes mathématiques.

Ainsi, après avoir examiné la situation du statut du français langue d'enseignement dispensant les savoirs disciplinaires, nous traiterons des questions relatives au processus cognitifs qui surviennent pour assurer la compréhension des objets mathématiques.

II SITUATION DU FRANÇAIS ET SES CONSEQUENCES DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

Au Sénégal, le français est la langue officielle et, à côté de cette langue à statut spécifique, coexistent les langues nationales que sont le diola, le malinké, le pular, le sérère, le soninké, le wolof et toute autre langue codifiée (article premier, Constitution du Sénégal du 22 janvier 2001). Dès lors, tous les enseignements de mathématiques dans les collèges et lycées se font en français. En didactique des langues, ces situations où le français est à cette position privilégiée en devenant la langue cible, en contact avec une ou plusieurs langues, sont dénommées sous le terme sociolinguistique de français langue seconde (désormais FLS ou FL2). Ce type de situation d'enseignement – apprentissage diffère de celui du français langue maternelle (désormais FLM ou FL1).

Pour évaluer cette situation du français, la grille de Chaudenson (1991) a été mise en œuvre en 2004 par le Réseau de chercheurs (Seck 2004) pour rendre visible les facteurs sociolinguistiques dans lesquels s'effectuent les activités d'enseignement et d'apprentissage. La démarche d'analyse qu'emprunte cette grille se fonde sur l'opposition entre ce que l'auteur appelle le status et le corpus.

Le status concerne le statut et les fonctions d'une langue ; il s'agit de l'ensemble des données juridiques, politiques et économiques qui ont trait à une langue donnée. Cinq paramètres sont ainsi retenus : possibilités économiques et représentations sociales, usages institutionnalisés, éducation, moyen de communication de masse et officialité.

Le corpus qui est le status informel (de fait) implique : le mode d'appropriation de la langue (acquisition ou apprentissage), la véhicularisation, la compétence linguistique, la production et la consommation langagière.

Nous exploiterons les résultats des enquêtes publiées dans un document intitulé *Rapport Scientifique* (2004) (voir en annexe 1).

L'examen des données sociolinguistiques consignées indique que la situation du français langue seconde se confirme avec un statut élevé (78,35 %) et un corpus faible (45,68 %). Le français, seule langue officielle, est la langue de scolarisation et d'enseignement du préscolaire à l'enseignement supérieur.

Cette langue de scolarisation, de tradition écrite est en contact avec des langues nationales *essentiellement orales*. Cette particularité de l'oralité de nos langues est à souligner parce qu'ayant des implications dans les activités d'apprentissage, contrairement aux situations de FLS des pays du Maghreb (Tunisie, Maroc, Algérie) où le français, langue d'enseignement, fait face à l'arabe, langue d'enseignement de tradition écrite.

Si on y ajoute les différences de culture inhérentes à chaque langue, on peut aisément concevoir les obstacles auxquels se heurte l'enseignement/apprentissage des mathématiques s'effectuant dans des contextes langagiers particuliers. On peut également noter les difficultés, liées à l'éloignement des mathématiques enseignées à l'école par rapport aux réalités des sociétés dans lesquelles cet enseignement est dispensé (Traoré et Bednarz 2008).

Beaucoup de pays francophones d'Afrique de l'Ouest partagent avec le Sénégal ce type d'espace social qui constitue, par la nature des situations, des écrans à la compréhension des notions et concepts mathématiques.

III QUELQUES OUTILS THEORIQUES

Si en didactique du français, ces contextes de FLS ont fait l'objet de travaux pour en tirer les visées méthodologiques et des stratégies d'apprentissage, dans l'enseignement/apprentissage des mathématiques, la réflexion est encore à l'état embryonnaire. Nous nous intéresserons donc à cette problématique de l'enseignement des mathématiques dans un pays où la situation du français langue seconde est étudiée et confirmée avec un status élevé et un corpus faible.

Pour cela, l'un des tout-premiers niveaux linguistiques qui nous semble important, se situe dans ce que les psychologues du langage désignent par la notion « d'opération langagière ». Ces opérations sont des processus cognitifs qui mobilisent et délimitent des schémas d'action. Anderson (1977) considère que les connaissances sont en bonne partie organisées sous forme de schémas ; cette organisation se structure en larges unités que sont les actions, les séquences d'action, les événements ; ce sont ces unités disposées en bloc qu'on nomme schémas et qui sont en fait des concepts génériques culturellement connotés. Les linguistes les considèrent comme des actes de langage. Par exemple, *l'acte de langage « partager un repas »* mobilise un événement dont le déroulement ne s'opère pas de la même manière d'une langue-culture à une autre. Dans la plupart des familles au Sénégal, cette opération langagière mobilise les schémas suivants : se mettre autour d'un bol de forme circulaire pour faciliter l'équidistance des convives par rapport au centre du bol où l'on met la sauce et autres ingrédients *commun* à tous. Ainsi, ici, le terme « *commun* » fait référence à une équidistance plutôt qu'à une « *appartenance* ». Le centre du cercle devient dès lors un élément du cercle alors qu'il ne l'est pas dans une autre langue (culture), en l'occurrence le français. Cela pourrait expliquer les difficultés qu'ont les professeurs de mathématiques à faire comprendre à leurs élèves que le centre du cercle n'est pas un élément du cercle.

En mathématiques, l'appréhension des objets est essentiellement conceptuelle mais, c'est seulement par le moyen de représentations sémiotiques qu'une activité sur les objets est possible (Duval 1993).

Se pose alors la question du comment le sujet, en situation d'apprentissage, peut-il avoir une bonne maîtrise des objets mathématiques si ses représentations linguistiques sont erronées ?

Pour Duval, ces représentations constituent un moyen d'extériorisation des représentations mentales à des fins de communication. Elles permettent, par conséquent, de rendre les représentations mentales visibles et accessibles à autrui. De ce fait elles assurent une fonction de communication. Mais elles remplissent également deux autres fonctions cognitives : la fonction d'objectivation et celle de traitement.

Duval souligne également que l'enseignant de mathématiques est confronté à un paradoxe cognitif de la pensée mathématique : d'une part, l'appréhension des objets mathématiques ne peut être que conceptuelle et, d'autre part, c'est seulement par le moyen de représentations sémiotiques qu'une activité sur les objets est possible. Le problème qui se pose alors est : Comment le sujet en phase d'apprentissage pourrait-il ne pas confondre les objets mathématiques avec leurs représentations ? Si les traits ci-dessous représentent des droites, pourquoi doit-on dire qu'elles sont sécantes ?

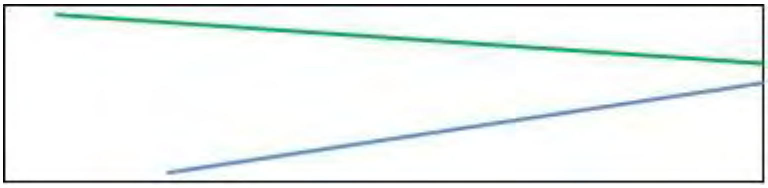


Figure 1 *– Représentation graphique de droites sécantes*

Duval distingue trois activités cognitives qui facilitent la compréhension des objets mathématiques : le traitement, la conversion et la coordination.

1. *Le traitement*

Il s'agit de la transformation d'une représentation dans le registre même où elle a été formée. En voici deux exemples :

- ***Exemple 1*** *:* $(x + 3)^2 + 11 = x^2 + 6x + 20$; $5+3 = 8$. Ces calculs sont une forme de traitement, le premier en écriture algébrique et le second en écriture numérique.
- ***Exemple 2*** *:* Une reformulation d'une phrase dans une même langue est un type de traitement : « Cet article sur *les obstacles linguistiques à l'usage des ressources dans l'enseignement des mathématiques* est produit par un didacticien des mathématiques et un didacticien du français » est un traitement de la phrase « un didacticien des mathématiques et un didacticien du français ont produit cet article *sur les obstacles linguistiques à l'usage des ressources dans l'enseignement des mathématiques* ».

2. *La conversion*

La conversion d'une représentation est la transformation de cette même représentation en une autre dans un autre registre. Pour illustrer cette situation, nous ne retiendrons que les deux exemples ci-dessous.

- ***Exemple 1*** *:* Passer de la représentation symbolique de la fonction numérique à variable réelle f(x) = sin(x)+cos(x) dans [-3 ; 3] à la représentation graphique (Fig. 2) :

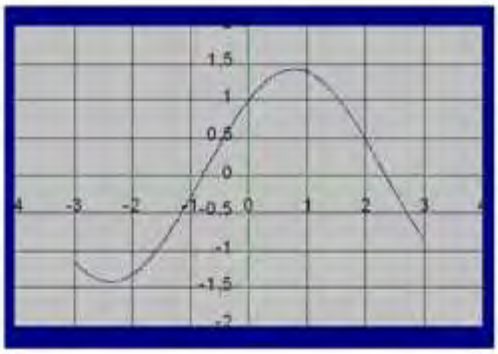


Figure 2 *– Représentation graphique de la fonction x →* $\boldsymbol{\sin(x) + \cos(x)}$

- ***Exemple 2 :*** la traduction du wolof au français par exemple est la conversion d'une représentation linguistique (ici le wolof) en une autre représentation linguistique (le français).

3. *La coordination*

La coordination des registres correspond à la nécessité de faire appel à une diversité de registres dans le fonctionnement de la pensée. En mathématiques, en contexte de FLS, la coordination des registres est complexe. Dans la figure 3, les flèches 1, 2 et 3 vont au delà de la distinction entre représentant et représenté. Elles correspondent à ce que Duval appelle *compréhension intégrative d'une représentation.*

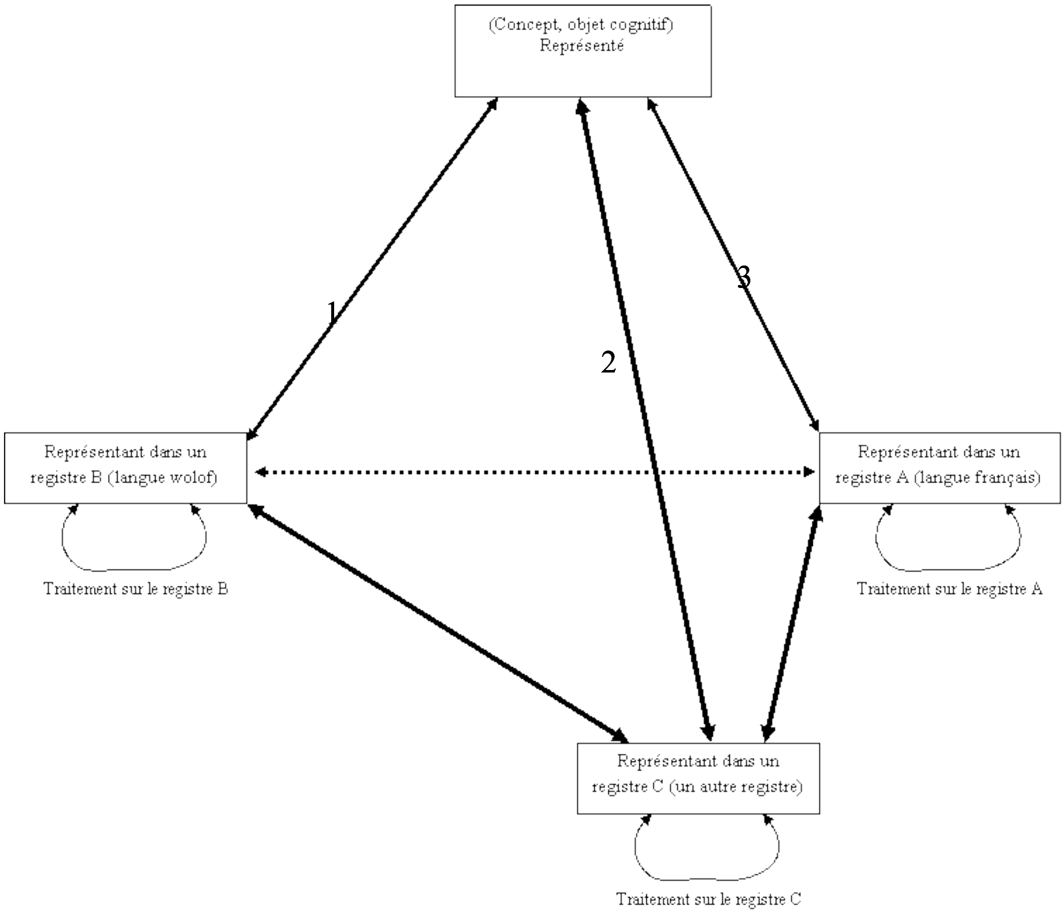


Figure 3 *– Reconstruction de la structure de la représentation en fonction de la conceptualisation de Duval (1993)*

4. RESSOURCES ET OBSTACLES LINGUISTIQUES

Comme précédemment indiqué, la plupart des ressources utilisées au Sénégal ont été conçues sans tenir compte des particularités des contextes sociolinguistiques dans lesquels peut s'effectuer leur usage et donc l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. La langue étant une construction sociale, elle véhicule nécessairement des représentations qui, en situation multilinguistique, comme celle du Sénégal, provoquent des conflits cognitifs à l'origine des obstacles linguistiques auxquelles se heurtent nos enseignants et nos apprenants en mathématiques.

1. Les éléments méthodologiques

Pour mettre à l'épreuve cette hypothèse et ses corollaires, nous avons mis en œuvre une expérimentation en vue d'évaluer la validité et la pertinence de nos présupposées.

Notre échantillon est constitué de l'ensemble des élèves-professeurs de mathématiques et de sciences de la vie et de la Terre en première année de formation. Ils sont tous titulaires du baccalauréat scientifique de l'enseignement secondaire et seront, au bout de deux ans de formation, des enseignants de ces deux disciplines dans les collèges d'enseignement moyen du Sénégal.

La ressource utilisée est puisée dans *Sésamath* (http://www.sesamath.net/). Il s'agit du 2ème sujet de la rubrique narration de recherche (voir figure 4 ci-dessous) que des professeurs de mathématiques peuvent mettre à la disposition des élèves de 4ème (14-15 ans).

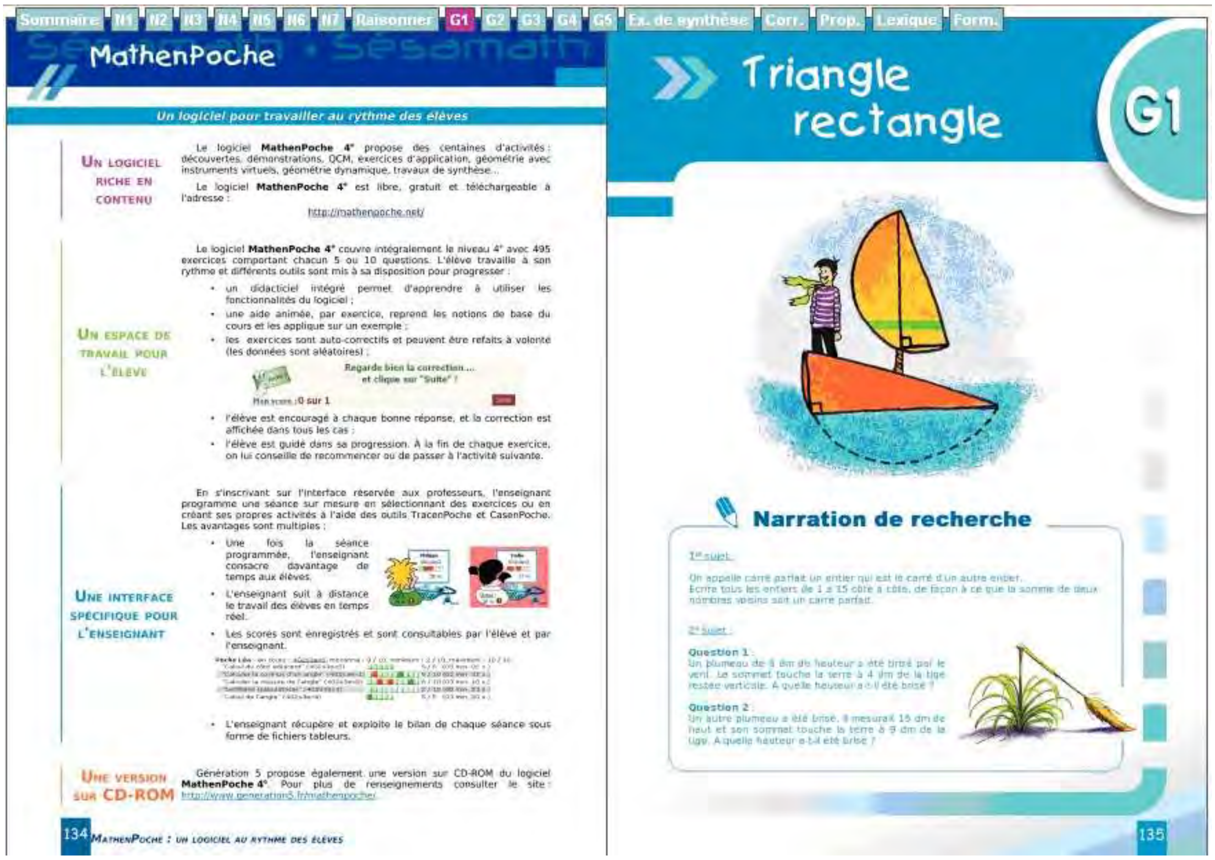


Figure 4 *– Activité se rapportant au théorème de Pythagore (http://mep-outils.sesamath.net/manuel_numerique/index.php?ouvrage=ms4_2007&page_gauche=135)*

Notons que Sésamath est une association française non lucrative qui œuvre pour l'utilisation de l'informatique dans l'enseignement des mathématiques, le travail coopératif et la co-formation entre enseignants et les services d'accompagnement des élèves dans leurs apprentissages.

Le choix de ressource de Sésamath n'est pas seulement motivé par sa gratuité ; il se justifie par la proximité de certaines parties du programme de mathématiques de l'enseignement moyen et secondaire du Sénégal avec celui de la France : le thème « triangle rectangle » et le sous-thème « théorème de Pythagore », par exemple, sont traités dans les deux pays en classe de 4ème. Outre cette similitude, il y a le fait que ces deux espaces ont en commun l'usage du français comme langue d'enseignement.

Nous avons réparti les 178 élèves-professeurs de notre échantillons de façon aléatoire en deux groupes : l'un des groupes, que nous nommons groupe 1, compte 82 étudiants qui ont travaillé sur la version téléchargeable (voir figure 5 ci-dessous). Le groupe 2, lui, compte 96 étudiants (les étudiants venus avec un peu de retard étaient dans ce groupe) et a travaillé sur le format de la figure 4. Les deux groupes ont concomitamment travaillé, pendant une heure, sans collaboration dans des salles distinctes.

Question 1 :
Un plumeau de 8 dm de hauteur a été brisé par le vent. Le sommet touche la terre à 4 dm de la tige restée verticale. A quelle hauteur a-t-il été brisé ?

Question 2 :
Un autre plumeau a été brisé. Il mesurait 15 dm de haut et son sommet touche la terre à 9 dm de la tige. A quelle hauteur a-t-il été brisé ?

Figure 5 *– Questions de l'activité proposée aux élèves-professeurs (http://mep-outils.sesamath.net/manuel_numerique/diapo.php?atome=1596&ordre=1)*

2. Collecte et analyse de données

Comme on pouvait s'y attendre, un nombre important d'étudiants parmi ceux du groupe 2 ont fait une représentation conforme à celle qui est attendue, même si certains ont eu des difficultés à passer de la représentation graphique à la représentation symbolique ou de faire un traitement correct dans le registre symbolique. Ce qui nous a beaucoup frappé dans cette étude, c'est le faible taux de réussite constaté au niveau des deux groupes (seulement 33% de réussite aux deux questions). Ce taux de réussite est particulièrement faible dans le groupe 1 (11%) qui, contrairement au groupe 2, n'avait pas une illustration du plumeau brisé. Le tableau 1 ci-dessous fait le résumé des résultats des deux groupes. A part ce faible taux de réussite, l'étude nous a révélé trois catégories de situations résultant des phénomènes linguistiques.

Groupes	Nombre d'étudiants ayant réussi le passage d'une représentation linguistique à une représentation graphique	Nombre d'étudiants ayant répondu correctement à une des questions au moins	Nombre d'étudiants ayant répondu correctement aux 2 questions	Nombre total d'étudiants par groupe
Groupe 1	24	15	9	82
	29%	18%	11%	
Groupe 2	77	56	49	96
	80%	58%	51%	

Tableau 1 *– Résultats obtenus dans les deux groupes*

Catégorie 1

Nous avons noté un nombre relativement important d'étudiants qui ont eu des difficultés à illustrer correctement la phrase « *le sommet touche la terre à 4 dm de la tige restée verticale* » : 20% des étudiants du groupe 2, malgré le dessin qui accompagne l'énoncé, ont considéré que la distance du sommet à la tige restée verticale est la distance du sommet au point de cassure, en un mot, la longueur de la section brisée (voir dessin 1 de la figure 6).

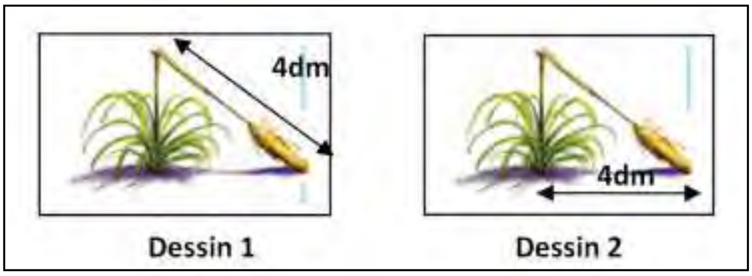


Figure *– Deux illustrations de l'énoncé « le sommet touche la terre à 4 dm de la tige restée verticale »*

Dans le groupe 1, plus de 70 % d'étudiants ont eu des difficultés à faire une illustration adéquate. Nous avons estimé que cette difficulté qui consiste à passer correctement de la représentation linguistique à une représentation figurale est liée à des problèmes de conversion entre la langue française, la langue wolof et « le langage mathématique », comme l'indique le schéma ci-dessous (figure 7).

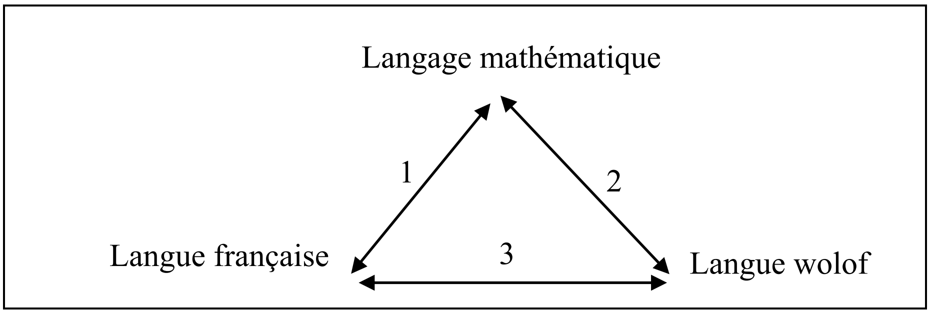


***Figure** 7 – Opération de conversion tridimensionnelle entre le français, le wolof et le langage mathématique*

Si en français, après un traitement, la phrase « *le sommet touche la terre à 4 dm de la tige restée verticale* » peut devenir « *le sommet touche la terre à une distance de 4 dm de la tige restée verticale* », alors cette dernière phrase est congruente à la formulation mathématique. Or, ces élèves-professeurs ont tous étudié la notion de distance d'un point à une droite, ils sont donc censés connaître la distance du sommet à la tige, ce qui devrait les amener à faire le dessin 2 en lieu et place du dessin 1 de la figure 6. On peut donc penser, comme Roussel et al. (2008) que ces étudiants, avec leur maîtrise de la langue française moyenne, ne font pas toutes les connexions nécessaires entre les informations issues de la langue cible et leur propre vie, rythmée ici par la langue wolof. Par contre, les étudiants les plus compétents ont eu une approche globale de la tâche ; ils ont inféré le sens à partir du contexte et ont relié ce qu'ils ont entendu à leur connaissance du monde et à leur expérience personnelle.

L'étudiant que nous nommons Mbaye Diop (voir annexe 2) qui s'est d'ailleurs rendu compte qu'il risquait d'avoir une hypoténuse de même longueur que l'un des côtés de l'angle droit, a alors surélevé la terre du côté du sommet.

Catégorie 2

Le deuxième constat tout aussi inattendu est le cas d'étudiants qui, ayant réussi l'exercice 1, se sont heurtés à la résolution de l'exercice 2. Il est aisé de constater que les valeurs entières 8 et 4 sont de nature à faciliter la résolution de cet exercice. Ce qui, à nos yeux, était moins évident est la décomposition, du reste facile, du nombre 8 en 5+3, opérée par certains étudiants pour vérifier la forme rectangulaire de la figure grâce au théorème de Pythagore. En effet, en wolof, la langue la plus parlée au Sénégal, le nombre 8 se dit « djiourom gneth », littéralement 5 et 3, et forme ainsi avec 4 le bon triplet pythagoricien {5 ; 3 ; 4}. Ainsi, aucun étudiant parmi les 13 qui ont facilement traité l'exercice 1, n'a pu effectuer l'exercice 2. Il faut remarquer que les nombres à virgule ne sont pas connus dans nos langues nationales, il leur est alors difficile d'imaginer le triplet pythagoricien {4,8 ; 9 ; 10,2} pour traiter la 2ème question. L'exemple de l'étudiant que nous nommons Néné Diop est illustratif de cette idée (cf. annexe 3).

Il faut noter cependant que le fait d'avoir dans nos langues les mots-nombres six (5+1), sept (5+2), huit (5+3) et neuf (5+4) sous forme de processus de calcul peut présenter un intérêt certain pour les élèves des petites classes. En effet, le fait que ces mots-nombres sont à la fois processus et objet facilite ainsi leur réification (Sfard 1991) et par conséquent la compréhension des nombres et des calculs.

Catégorie 3

La troisième catégorie de situation faisant obstacle linguistique, qui n'est pas des moindres, est liée au sens du mot « plumeau ». Au regard de la représentation faite par les auteurs dans la figure 4, un plumeau semble être un arbuste avec une tige et un épi. Cette description est loin du sens que l'on donne habituellement à ce mot : un petit balai à plumes qui sert à dépoussiérer, à épousseter. Ce sont du reste les représentations fausses que les étudiants ont eues du mot qui les ont amenés à faire des schémas très éloignés de ce qui devrait être leur objet d'étude (voir annexe 4, copie de l'étudiant nommé Diène Ngom).

CONCLUSION

Un parcours des référentiels de compétences des enseignants en France et au Québec indique que la maîtrise de la langue française est une compétence attendue chez les enseignants dans l'exercice de leur métier. Au Sénégal, malgré le contexte de FL2 avec un status élevé (78,35 %) et un corpus faible (45,68 %) ainsi qu'une maîtrise de la langue, souvent insuffisante, chez certains enseignants, cette aptitude n'est pas une compétence exigible à l'exercice de ce métier. Il s'y ajoute qu'en mathématiques, avec le manque de manuel, de ressources endogènes et de formation, l'usage des ressources conçues dans des contextes culturels et sociolinguistiques différents, pose un certain nombre des problèmes :

- La non disponibilité du matériel informatique chaque fois que de besoin, amène les enseignants à imprimer et à photocopier des ressources pour leur exploitation en classe, sans parfois tenir compte du contexte dans lequel la ressource a été conçue ; il est tout aussi évident que le concepteur n'a, parfois pas, une claire idée du contexte linguistique dans lequel sa ressource sera utilisée. L'expérience montre qu'une forte contextualisation de la ressource ne facilite pas nécessairement les usages. Ainsi pour un enseignant, les variables liées à l'usage de ressources sont à la fois les variables didactiques, le contexte culturel et les aspects sociolinguistiques.

– Un autre point qui mériterait d'être étudié plus en profondeur concerne les conditions de collaboration dans la conception de ressources dans le cadre d'un espace linguistique comme la « francophonie ». D'ailleurs, ce point de vue explique les difficultés que rencontrent les collègues de Sésamath à mettre en place une communauté d'enseignants ouverte sur la conception et l'usage des ressources. En effet nos premiers résultats montrent qu'au-delà du curriculum sur l'enseignement des mathématiques, cette collaboration ne peut pas s'effectuer sans tenir compte du statut des langues nationales et du français comme langue seconde. De plus, l'accent doit être mis sur les pratiques mathématiques développées dans les différentes cultures que sont le comptage, le mesurage, le dising, le jeu, la localisation et les explications (Bishop 1991).

REFERENCES

Anderson R. (1977) The notion of Schemata and the Educational Enterprise: General discussion of the Conference. In Anderson R., Spiro R., Montagne W. (Eds.) *Schooling and Acquisition of Knowledge*. Hillsdale, New Jersey : Lawrence Erlbaum.

Bishop A. J. (1991) *Mathematical enculturation*. Dordrecht : Kluwer.

Chaudenson R. (1991) *La francophonie, représentations, réalités, perspectives*. Paris : Didier Erudition.

Duval R. (1993) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives* 5, 37-65.

Floris R., Touré H., Trouche L., Sokhna M. (2010) Technologie et enjeux de développement : formation a distance, ressources numériques, plate-forme, multimédia (synthèse du groupe de travail 6). In Kuzniak A., Sokhna M. (Dir.) *Enseignement des mathématiques et développement : enjeux de société et de formation. Actes du Colloque Espace Mathématique Francophone* 2009. *Revue Internationale Francophone*. http://fastef.ucad.sn/EMF2009/, consulté le 26 décembre 2011.

Gueudet G., Trouche L. (2008) Du travail documentaire des enseignants : genèses, collectifs, communautés. Le cas des mathématiques. *Education et didactique* 2(3), 7-33.

Hitt F., Maschietto M., Trgalová J., Sokhna M. (2011) Ressources et développement professionnel des enseignants (introduction au groupe de travail 6). *Colloque Espace Mathématique Francophone 2012*. http://www.emf2012.unige.ch, consulté le 26 décembre 2011.

Roussel S., Rieussec A., Nespoulous J.-L., Tricot A. (2008) Des baladeurs MP3 en classe d'allemand - L'effet de l'autorégulation matérielle de l'écoute sur la compréhension auditive en langue seconde ». *Alsic* 11(2). http://alsic.revues.org/index413.html, consulté le 26 décembre 2011.

Seck A. (2004) *Rapport Scientifique*. Dakar : A.U.F. Université Cheikh Anta Diop.

Sfard A. (1991) On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics* 22, 1-36.

Sokhna M. (2007) Formation continue des professeurs de mathématiques au Sénégal : analyse de la transmutation d'un dispositif de formation. In Bednarz N., Mary C. (Dir.) *L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés. Actes du colloque Espace Mathématique Francophone 2006* (cédérom). Sherbrooke : Éditions du CRP.

Sokhna M. (2010). Caractérisation de pratiques enseignantes : schème d'indication topazienne. *RADISMA* 5(28). http://www.radisma.info/document.php?id=885, consulté le 26 décembre 2011.

Traoré K., Bednarz N. (2008) Mathématiques construites en contexte : Une analyse du système de numération oral utilisé par les Siamous au Burkina Faso. *Nordic Journal of African Studies* 17(3), 175-19. http://www.njas.helsinki.fi/pdf-files/vol17num3/traore_bednarz.pdf, consulté le 26 décembre 2011.

Trouche L., Hauchart C., Squalli H. (2006) Systèmes et pratiques de formation continue des enseignants en mathématiques (introduction au groupe de travail 1). In *Actes du Colloque Espace Mathématique Francophone* 2006. http://emf2006.educ.usherbrooke.ca/emf_theme_01.htm, consulté le 26 décembre 2011.

ANNEXE 1 – STATUS ET CORPUS DES LANGUES UTILISÉES AU SÉNÉGAL (SECK 2004)

TABLEAU RECAPITULATIF DES RESULTATS

STATUS

	Français	Wolof	Pulaar	Sereer	Joola
Officialité / 12	12	0	0	0	0
Usages institutionnalisés **Total / 19.30** dont -textes officiels / 4 -textes administratifs nationaux / 4 -justice / 3.80 -administration locale / 3.80 -religion / 3.70	**14** 3.75 3.75 3 3 0.5	**2.60** 0.25 0.25 0.20 0.20 1.70	**1.60** - - 0.20 0.20 1.20	**0.60** - - 0.20 0.20 0.20	**0.50** - - 0.20 0.20 0.10
Education **Total / 29.90** dont -primaire / 9.90 -secondaire / 10 -supérieur / 10	**27** 8 10 09	**1.45** 1 00 0.45	**0.70** 0.50 00 0.25	**0.35** 0.20 00 0.15	**0.35** 0.20 00 0.15
Moyens de communication de masse **Total / 24.40** dont -presse écrite / 4.95 -radio / 4.50 -télévision / 4.95 -cinéma / 5 -édition / 5	13.75 3.50 2 2.25 3 3	7.15 0.40 1.75 2 1.50 1.50	2.15 0.65 0.25 0.50 0.50 0.25	0.85 0.20 0.30 0.10 --- 0.25	0.50 0.20 0.20 0.10 --- ---
Possibilités économiques et représentations sociales / 20	16	13	4	4	4
TOTAL STATUS / 105.60	82.75	24.47	8.45	5.80	5.35

CORPUS

Acquisition / 17.96	0.10	9.84	4.44	2.56	1.02
Apprentissage / 20	13.65	0.10	0.10	0.10	0.10
Véhiculaarisation / 20	10	20	4.32	3.12	---
Compétence linguistique / 20	11	16.40	4.70	2.50	1
Production langagière / 20	10	15	5	3	3
TOTAL CORPUS / 97.96	**44.75**	**61.34**	**18.56**	**11.28**	**5.12**

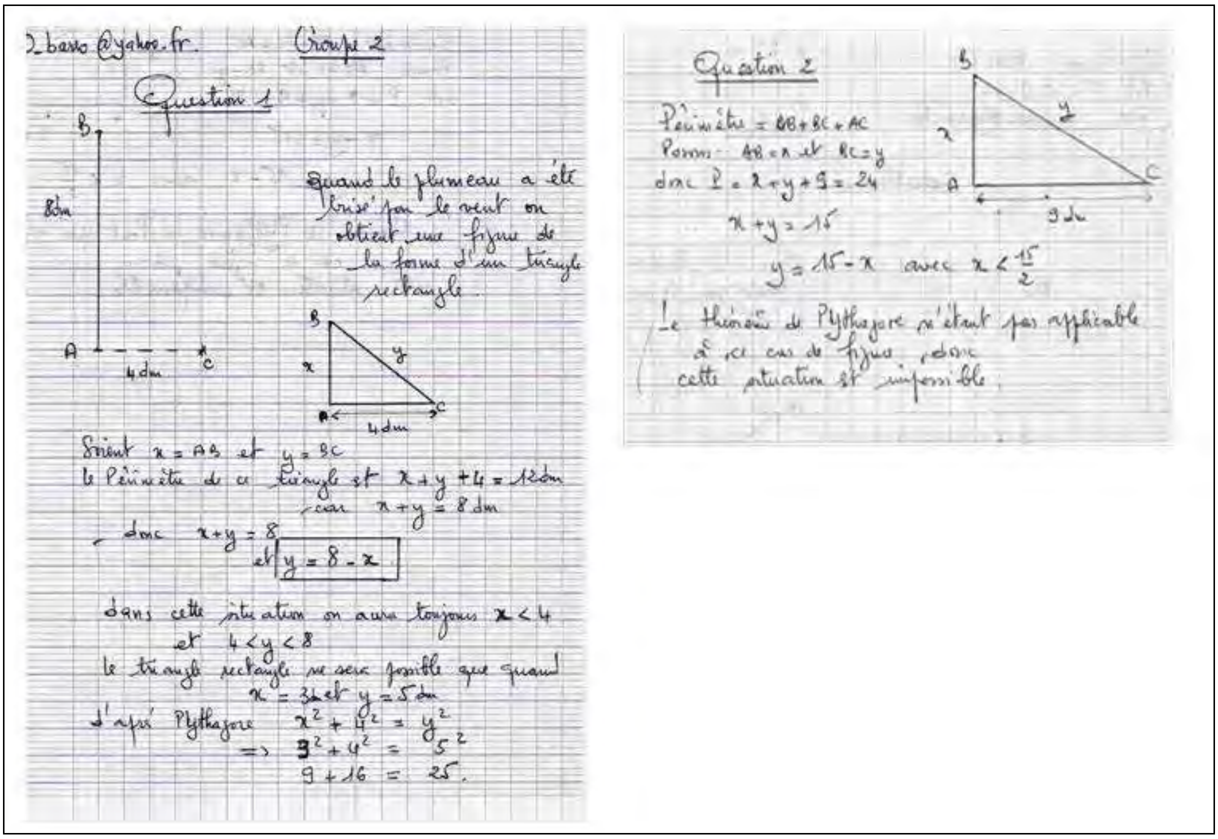
TOTAUX PONDERES

STATUS / 100	78.36	23.12	8	5.49	5.06
CORPUS / 100	45.68	62.61	18.94	11.51	5.22

ANNEXE 2 – COPIE DE L'ETUDIANT MBAYE DIOP (NOM FICTIF)

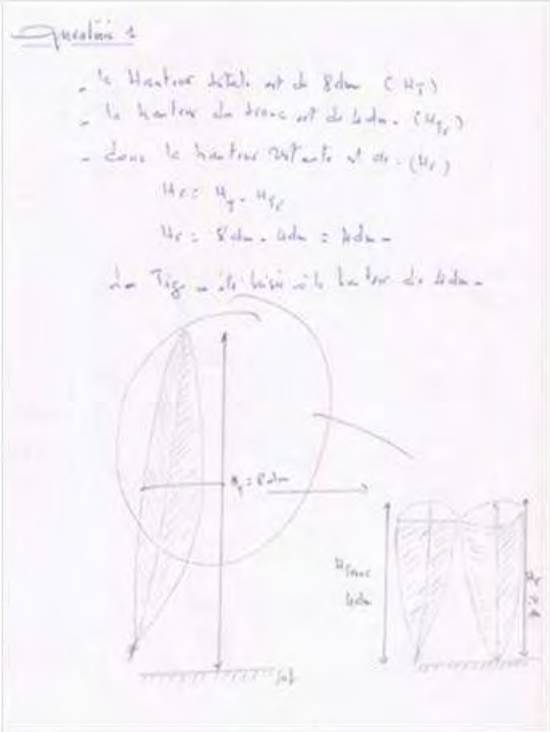

Question 1
- La hauteur où il a été brisé :
8 dm - 4 dm = 4 dm
h = 4 dm
Illustration par un schéma
Echelle : 1 → 1cm
4dm
4dm
B
A
Question 2
- La hauteur où il a été brisé
15 dm - 9 dm = 6 dm
h = 6 dm
Illustration par schéma
Page suivante

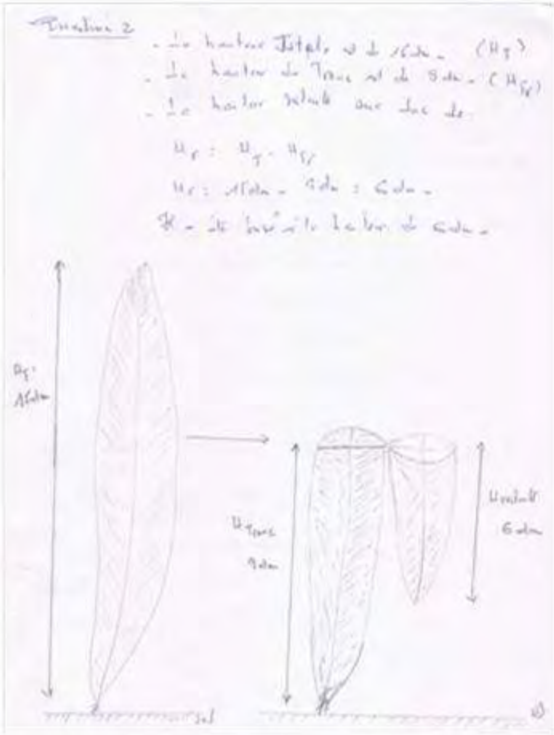
ANNEXE 3 – COPIE DE L'ETUDIANT NENE DIOP (NOM FICTIF)


Groupe 2
Question 1
B
8dm
A
4dm
C
Quand le plumeau a été brisé par le vent on obtient une figure de la forme d'un triangle rectangle.
B
x
y
A
4dm
C
Soient $x = AB$ et $y = BC$
le Périmètre de ce triangle est $x + y + 4 = 12dm$
car $x + y = 8$ dm
donc $x + y = 8$
et $\boxed{y = 8 - x}$
dans cette situation on aura toujours $x < 4$
et $4 < y < 8$
le triangle rectangle ne sera possible que quand
$x = 3$ et $y = 5$ dm
d'après Pythagore $x^2 + 4^2 = y^2$
$\Rightarrow 3^2 + 4^2 = 5^2$
$9 + 16 = 25$.

Question 2
Périmètre = AB + BC + AC
Posons : AB = x et BC = y
donc $P = x + y + 9 = 24$
$x + y = 15$
$y = 15 - x$ avec $x < \frac{15}{2}$
B
x
y
A
C
9 dm
Le théorème de Pythagore n'étant pas applicable à ce cas de figure, donc cette situation est impossible.

ANNEXE 4 – COPIE DE L'ETUDIANT DIENE NGOM (NOM FICTIF)





QUELLE RESSOURCE POUR ENSEIGNER LA NUMÉRATION DÉCIMALE ? PRÉSENTATION D'UNE INGÉNIERIE DIDACTIQUE DE DÉVELOPPEMENT EN COURS

Frédérick TEMPIER*

Résumé – Suite à un constat sur l'enseignement de la numération décimale à l'école primaire en France qui ne prend pas suffisamment en compte l'aspect décimal de la numération, nous avons mis en place une ingénierie didactique de développement. Nous décrivons nos principaux choix pour la conception d'une ressource pour les enseignants, puis nous présentons certains résultats relatifs à l'utilisation de cette ressource par les enseignants et les conséquences que nous en tirons pour le prochain cycle d'expérimentation.

Mots-clefs : ingénierie didactique, développement, numération décimale, ressource, enseignant

Abstract – After presenting the fact, about the teaching of place value at school in France, that it is doesn't take enough account of base-10 system, we construct a didactical design. We describe the methodology used and our main choices for the conception of a resource for teachers, we present some results about the use of this resource by the teachers and the conclusions we draw for the next cycle of experimentation.

Keywords: didactical design, design research, place value, resource, teacher

I. LE POINT DE DEPART

1. *Les constats*

Dans des travaux précédents (Tempier 2009, 2010), nous avons fait un constat concernant les contraintes institutionnelles pesant sur l'enseignement de la numération en France. Notre système de numération est à la fois

- positionnel (le premier rang à partir de la droite correspond aux unités, le deuxième rang aux dizaines, etc.)
- et décimal (10 unités = 1 dizaine, 10 dizaines = 1 centaine, etc.).

Mais il apparaît principalement sous son aspect positionnel dans les manuels du niveau concerné (3ème primaire, élèves de 8/9 ans) ainsi que dans les programmes et évaluations nationales. Les unités de la numération (unités, dizaines, centaines, milliers) apparaissent alors uniquement pour nommer les rangs dans l'écriture en chiffres des nombres mais les relations entre ces unités ne sont pas un enjeu pour l'enseignement.

Par exemple une tâche courante dans les manuels est de décomposer un nombre de manière « canonique ». Par exemple 5324 se décompose 5000 + 300 + 20 + 4 ou encore (5 × 1000) + (3 × 100) + (2 × 10) + 4. Cette tâche ne fait appel qu'à l'aspect positionnel de la numération (il faut savoir que le 5, en quatrième position dans l'écriture en chiffres fait référence à 5 milliers). Il en est de même pour les tâches d'association de l'écriture chiffrée d'un nombre à son écriture en lettres, des tâches de comparaison de nombres. Or notre précédente étude a montré que ces trois types de tâches étaient ceux qui étaient valorisés par l'institution : ce sont eux que l'on trouve majoritairement dans les programmes et évaluations nationales en France, ainsi que dans les manuels de 3ème primaire.

* Doctorant Université Paris 7, LDAR – Formateur Université de Poitiers – France – frederick.tempier@univ-poitiers.fr

© Tempier F. (2012) Quelle ressource pour enseigner la numération décimale ? Présentation d'un travail en cours. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT6, pp. 892–907). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

Or quand on demande de déterminer le nombre de centaines dans 2378 ou bien de donner le nombre correspondant à 35 centaines + 42 unités, cela va mettre en jeu non seulement l'aspect positionnel de la numération mais aussi les relations entre les unités de la numération (aspect décimal). Il faut en effet savoir que 1 millier c'est 10 centaines pour comprendre que 2 milliers et 3 centaines font 23 centaines ou réciproquement que 35 centaines font 3 milliers et 5 centaines. Or ces tâches n'apparaissent pas dans les programmes et évaluations actuelles et quand elles sont travaillées dans les manuels elles sont prises en charge par une technique de lecture directe dans un tableau de numération sans explicitation des relations entre les unités.

Nous avons également pu constater que les guides du maître associés à ces manuels offrent peu d'informations à ce sujet pour permettre aux enseignants de prendre conscience des savoirs en jeu dans les tâches proposées.

Pourtant la connaissance de l'aspect décimal de la numération est nécessaire dans les mathématiques de l'école primaire puisqu'elle est notamment en jeu dans la compréhension des techniques opératoires des quatre opérations. Cet apprentissage tient une place importante à l'école primaire dans les programmes officiels français.

2. Les objectifs, les questions

Notre travail de thèse consiste en la recherche de conditions pour améliorer cet état de fait à travers la conception d'une ressource destinée aux enseignants. Cette ressource se limitera à l'apprentissage de la numération en 3ème primaire pour l'introduction des nombres à 4 chiffres.

A la suite de Ball et Cohen (1996) nous pensons qu'une ressource doit permettre à la fois l'apprentissage des élèves et la formation des enseignants sur la numération. Du point de vue du développement, nous visons donc la conception d'une ressource visant ces deux objectifs.

Plus précisément, du côté des élèves notre objectif est une compréhension de l'écriture chiffrée d'un nombre sous ses deux aspects (position et décimalité). En particulier nous voulons les amener à réussir certaines tâches mettant en jeu l'aspect décimal de la numération. Par exemple nous viserons la résolution de problèmes de recherche de « nombre de » dans des contextes variés (par exemple, nombre maximum de billets de 100 € que l'on peut utiliser pour payer une somme de 2378 €).

Du côté des enseignants, notre objectif est de leur permettre d'exercer une « vigilance didactique[1] » (Charles-Pezard 2010) à la fois lors du travail de préparation de l'enseignant (au niveau global de la séquence ainsi qu'au niveau local pour une séance) et de la mise en œuvre des séances dans la classe. Dans notre cas, elles doivent donc permettre à l'enseignant :

- D'intégrer de manière cohérente cette séquence dans sa programmation annuelle (projet global), en particulier faire émerger l'aspect décimal lors du travail sur d'autres notions mettant en jeu ce savoir, comme le calcul posé par exemple.
- D'élaborer une séquence permettant la construction de ces savoirs (projet local).
- De mettre en œuvre des situations, en classe, avec une gestion adaptée (dévoluer la situation, réguler l'activité des élèves et institutionnaliser les savoirs visés).

[1] Cela met en jeu « des connaissances mathématiques et didactiques nécessaires pour enseigner. Les connaissances mathématiques ne sont pas seulement académiques, elles doivent être finalisées pour l'enseignement. Les connaissances didactiques contribuent à une bonne perception des enjeux d'apprentissage des situations et de leur organisation en vue de l'enseignement de savoirs mathématiques. » (Charles-Pezard 2010, p. 210).

Cette recherche devrait aboutir à la publication d'une ressource ainsi qu'à la mise en évidence de principes de conception (Davis et Krajcik 2005) sur lesquels pourraient s'appuyer des concepteurs de ressources ou encore des chercheurs qui pourraient alors tester la fiabilité de ces principes dans d'autres contextes.

II. LES CADRES THEORIQUES ET LA METHODOLOGIE

Nous nous inscrivons dans le cadre de l'ingénierie de développement dont les caractéristiques sont définies par Perrin-Glorian (2011). Ce type de recherche demande de

> prévoir au moins deux niveaux d'ingénierie (peut-être plus) avec des objectifs différents :
>
> - premier niveau dans des conditions expérimentales spécifiques « protégées » pour tester la validité théorique des situations (i.e. leur capacité à produire les connaissances attendues, on vise moins un théorème d'existence) et dégager les choix fondamentaux de l'ingénierie : qu'est-ce qui est essentiel, incontournable en référence au savoir visé, qu'est-ce qui relève du contexte choisi et pourrait être changé, adapté, ce qui relève du détail en somme ?
> - deuxième niveau pour étudier l'adaptabilité des situations à l'enseignement ordinaire, la négociation de la première ingénierie ; l'écart à la mise en œuvre et les transformations opérées sont prises comme objet d'étude pour des retombées sur l'ingénierie didactique elle-même, la connaissance du fonctionnement des savoirs concernés dans le système scolaire (enseignant, élèves...). Sur quoi peut-on lâcher du lest dans la négociation ? Que va-t-on essayer de sauvegarder ? Pourquoi ? Comment exercer un contrôle sur ce qui peut se passer ? (Op. cité, p. 68)

Nous nous appuyons sur différents cadres théoriques issus de la didactique des mathématiques auxquels nous empruntons des « outils de conception » (Ruthven, Laborde, Leach et Tiberghien 2009) : la théorie des situations didactiques (Brousseau 1998) pour la notion de milieu, de potentiel adidactique, de variable didactique et la théorie anthropologique du didactique (Chevallard 1999) pour la notion d'organisation mathématique (ou praxéologie) et d'ostensif. Ces outils permettent la conception de l'ingénierie de premier niveau.

Notre méthodologie consiste à faire des choix *a priori* de conception pour la ressource (aux deux niveaux d'ingénierie) et à tester leur validité lors de l'utilisation de la ressource par des enseignants (d'au moins cinq années d'expérience). Pour cela nous avons constitué deux groupes d'enseignants qui vont utiliser la ressource :

- un groupe « de travail » (quatre enseignants) pour lequel nous observons les enseignants lors de la mise en œuvre de quelques séances dans leur classe, sans intervenir. Ce groupe participe aussi à la conception de la ressource lors de deux réunions de travail collaboratif avec le chercheur ;
- un groupe « libre » (trois enseignants) pour lequel nous n'intervenons pas du tout au cours de leur utilisation de la ressource.

Pour les enseignants de ces deux groupes nous réalisons des entretiens individuels avant et après la séquence et nous faisons passer deux évaluations aux élèves (avant et après la séquence aussi).

Les choix de conception (1er et 2ème niveau) seront mis à l'étude lors de cette expérimentation. Pour évaluer l'utilisation générale de la ressource par les enseignants nous utilisons les concepts d'utilité, utilisabilité et acceptabilité (Tricot et al. 2003, Georget 2010).

Ces analyses permettront finalement de questionner nos choix de conception (1er et 2ème niveau) et ainsi d'engager un nouveau cycle de conception (et éventuellement de revenir sur la question de départ pour l'affiner, la modifier …).

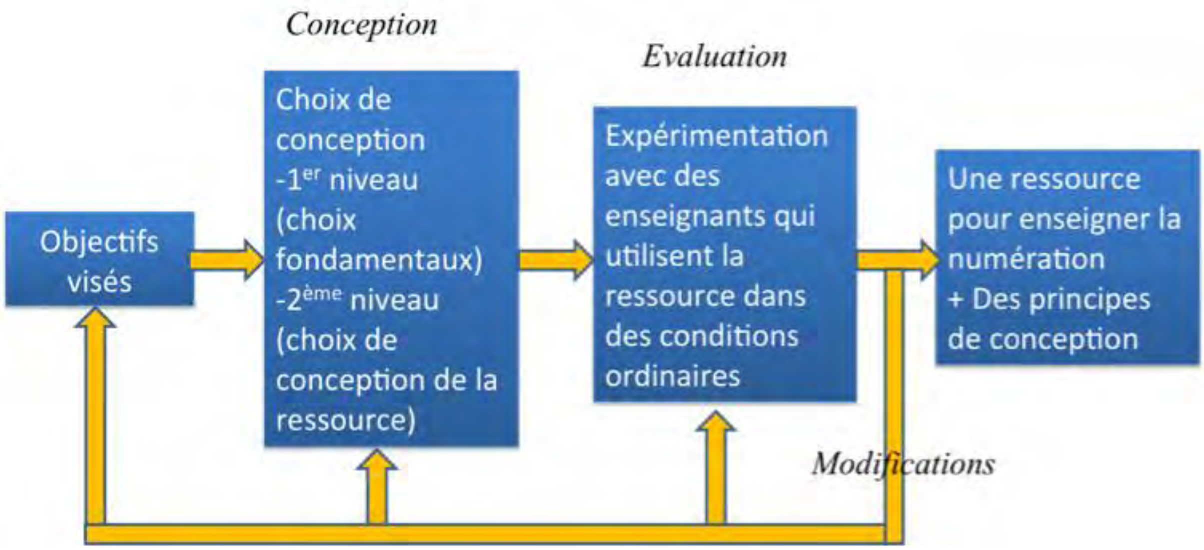


Figure 1 *– Schéma général de la méthodologie*

Ce que nous présentons dans cet article concerne un seul cycle d'expérimentation : nous allons présenter la ressource telle qu'elle a été proposée aux enseignants cette année et l'utilisation que ceux-ci en ont faite.

III. PRESENTATION DE LA RESSOURCE ET DES PRINCIPAUX CHOIX DE CONCEPTION

1. Nos choix d'ingénierie de premier niveau

Pour l'ingénierie de premier niveau nous nous sommes appuyés sur une analyse épistémologique de la numération ainsi que sur une étude de différents choix possibles pour l'enseignement de la numération en appui sur Chambris[2] (2008).

Nous avons choisi d'utiliser la situation de dénombrement de collections dans le sens d'une situation fondamentale (Brousseau 1998), c'est-à-dire une « situation capable d'engendrer par le jeu des variables didactiques qui la déterminent, l'ensemble des situations correspondant à un savoir déterminé » et qui « offre des possibilités d'enseignement mais surtout une représentation du savoir par les problèmes où il intervient permettant de restituer le sens du savoir à enseigner ».

Ce choix permet donc à la fois de construire nos situations d'apprentissage à mettre en œuvre dans les classes (1er niveau) mais aussi de permettre aux enseignants de s'approprier les enjeux (2ème niveau) par une explicitation du lien entre jeu sur les variables de la situation de dénombrement et les savoirs en jeu.

Une des variables didactiques principales concerne le groupement de la collection : si la collection n'est pas groupée (et si la taille de la collection est suffisamment importante, comme par exemple 3246 unités) nous sommes amenés à faire des groupements successifs par 10 (aspect décimal) avant de pouvoir dénombrer (aspect position). Si la collection est totalement groupée (par exemple 3 milliers + 2 centaines + 7 dizaines + 3 unités), il ne reste plus qu'à associer chaque unité à sa position dans l'écriture chiffrée (aspect position). Si la collection est partiellement groupée (par exemple 2 milliers + 15 centaines + 1 dizaine + 5 unités) il faut finir les groupements avant de pouvoir dénombrer.

[2] Chambris a étudié l'évolution de l'enseignement de la numération au cours du XXème siècle en France.

Deux autres variables didactiques entrent en relation avec les types de groupements :

- L'absence de groupement à un ordre (par exemple 3 milliers + 7 dizaines + 2 unités). Cela permet de mettre en jeu le rôle du zéro.
- L'ordre de présentation des unités (par exemple 7 dizaines + 3 milliers + 2 unités). Cela permet de mettre en évidence, pour l'aspect position, qu'il ne s'agit pas d'une simple juxtaposition des chiffres (ce qui est une erreur courante chez les élèves) mais bien une association des milliers au quatrième rang, etc.

Une variante de la situation de dénombrement est la situation inverse : réaliser une collection de cardinal donné, que nous traitons dans des problèmes dits de « commandes ». Une variable didactique essentielle ici est le stock du marchand. Par exemple s'il faut commander 4237 objets et que le vendeur n'a que des objets à l'unité ou groupés par dizaines et centaines, nous sommes amenés à utiliser l'équivalence entre 10 centaines et 1 millier (aspect décimal).

2. Nos choix d'ingénierie de deuxième niveau

Pour permettre aux enseignants de s'approprier ces choix « fondamentaux » et pour atteindre nos objectifs de départ nous avons fait des choix pour la conception de la ressource.

La ressource propose cinq situations « principales » aux enseignants (trois situations de dénombrement et deux situations de commandes). Ces situations utilisent un matériel spécifique (sauf la dernière) : des « bûchettes » (allumettes sans tête qui présentent l'intérêt de travailler avec des grandes collections). Nous proposons également des situations « complémentaires » permettant de travailler d'autres tâches mettant en jeu la numération décimale ou de travailler les techniques apprises dans d'autres contextes (par exemple la monnaie, les timbres …). En particulier les tâches liées à l'ordre des nombres (comparaison, rangement ou placement sur des droites graduées) n'apparaissent pas dans les situations principales car nous nous centrons sur les tâches permettant de travailler plus spécifiquement l'aspect décimal de la numération.

Un choix important à ce niveau concerne les marges de manœuvre données aux enseignants pour :

- La construction des séances et pour leur mise en œuvre dans la classe : dans la description des situations, nous ne donnons que ce qui nous semble essentiel à une mise en œuvre adaptée des situations. Il s'agit de l'enjeu pour l'enseignant, le problème pour les élèves, le matériel nécessaire et des indications de déroulement (cf annexe 1). Nous ne donnons pas de prescription concernant le temps ou l'organisation de la classe (travail individuel, de groupe …).
- La construction de la séquence : l'enseignant a la seule contrainte de mettre en œuvre les cinq situations principales, mais il reste à sa charge de construire sa séquence par la conception des exercices d'entraînement, de situations complémentaires, de traces écrites, d'évaluations.

Nous ne nous sommes pas imposés *a priori* de support particulier pour cette ressource. Elle prend pour le moment, la forme d'un site web en trois parties[3] : des éléments pour comprendre les enjeux de l'enseignement de la numération, des situations à mettre en œuvre dans la classe et des éléments pour aider l'enseignant à construire une séquence. Lors de la première année nous avions utilisé un support papier. Le choix d'un support numérique est lié aux facilités de diffusion que ce support propose (un objectif à moyen terme étant une

[3] Ce site est consultable à l'adresse suivante : http://numerationdecimale.free.fr

diffusion plus large) ainsi qu'aux possibilités de proposer une quantité importante d'informations, liberté étant laissée aux enseignants d'y accéder ou pas, par une organisation en menus et lien hypertextes. En voici la page d'accueil (figure 1) avec les menus sur la gauche de l'écran :

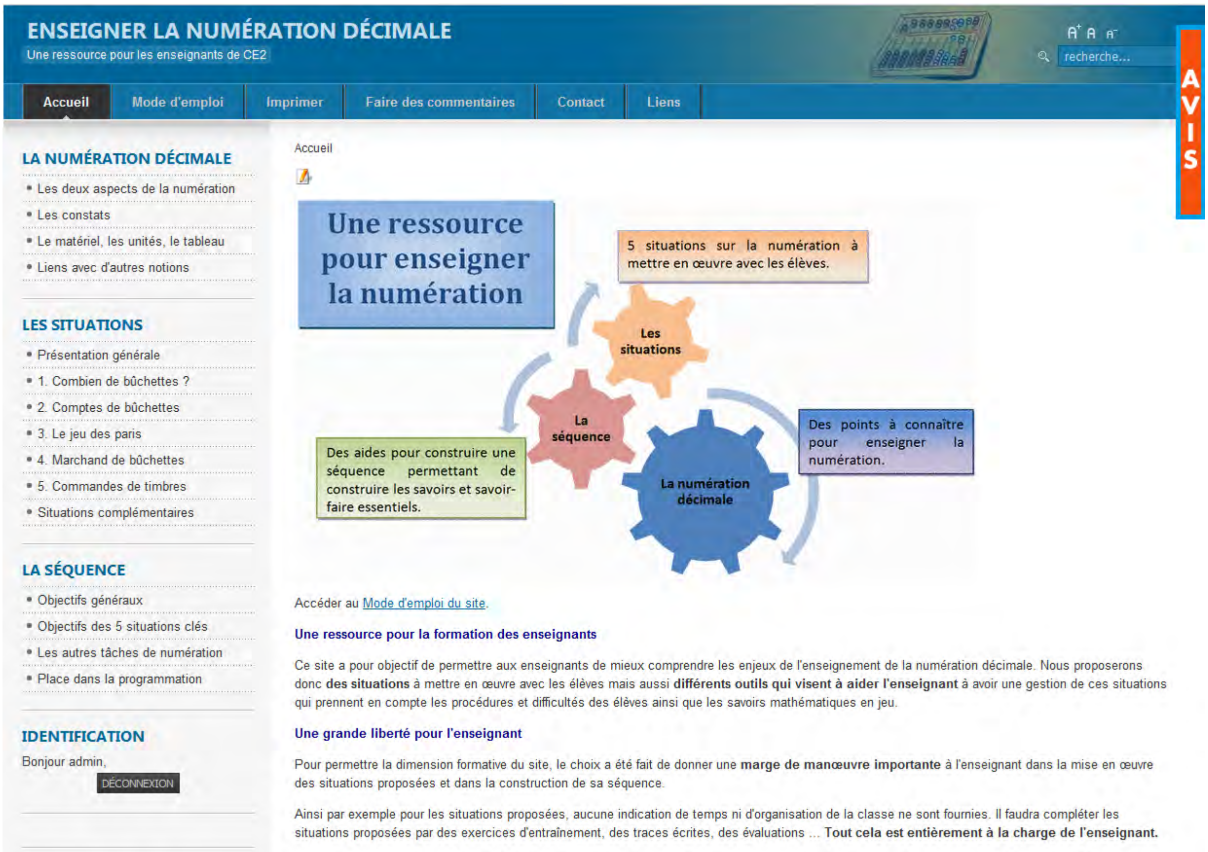


Figure 2 *– Page d'accueil du site*

La première partie (« la numération décimale ») consiste en des apports mathématiques, épistémologiques et didactiques pour l'enseignant. Les deux aspects de la numération sont présentés. Cela permet de pointer tout de suite l'aspect décimal comme enjeu essentiel. Pour appuyer cela, nous indiquons certaines difficultés dans l'apprentissage de la numération qui mettent en jeu principalement ce savoir. Ensuite, nous faisons le constat que l'aspect décimal n'est pas un enjeu dans les activités courantes des manuels et nous présentons quelques considérations didactiques relatives à l'utilisation du matériel de numération, des unités de numération et du tableau de numération. Enfin nous montrons comment l'aspect décimal intervient dans le calcul posé (en revenant sur les quatre opérations) et le lien avec les conversions de mesures de grandeurs (longueurs en particulier).

La deuxième partie (« les situations ») contient les situations principales qui constituent un passage obligé. La description des cinq situations est faite selon le même modèle (on trouvera en annexe 1 un exemple de description d'une situation) :

- Une description rapide du problème posé aux élèves.
- Une description des savoirs en jeu pour l'enseignant : identifier le type de tâche, les techniques et les technologies en jeu.
- Une description de la situation : l'enjeu pour l'enseignant, le problème pour les élèves, le matériel nécessaire, une description rapide de la mise en œuvre : description du problème avec un ou plusieurs exemples de valeurs numériques associées, les variables,

des éléments pour la gestion de la phase collective de validation et indication de conclusion de la situation par une synthèse.
- Des éléments de synthèse pour permettre à l'enseignant de pointer les savoirs en jeu dans la situation (ici dans le contexte de la situation).
- Des compléments qui portent sur des précisions pour la mise en œuvre de la situation dans la classe, sur d'autres situations possibles en prolongement.

On pourra donc remarquer qu'une place très importante est accordée à la description des savoirs en jeu (plutôt qu'aux détails de déroulement). En effet nous suivons Margolinas, Mercier et René de Cotret (2007) dans leur hypothèse : « les professeurs ont plus de liberté de décision d'organisation du travail de leur classe, sont plus disponibles à l'observation de leurs élèves, sont plus ouverts à leurs idées, s'ils sont assurés des savoirs qu'ils cherchent à transmettre ».

Même si la ressource est proposée sur un site web, les situations proposées n'utilisent pas les TICE en classe car nous souhaitons que les enseignants puissent intégrer facilement ces situations à leur pratique de classe habituelle et il nous semble que les enseignants du primaire en France utilisent assez peu les TICE (ce qui est en partie lié à un manque de matériel informatique).

La troisième partie (« la séquence ») expose les contenus des programmes officiels sur la numération en lien avec les tâches travaillées dans les situations. Elle recense également les autres tâches qu'il est nécessaire de travailler dans le cadre d'une séquence sur la numération (avec des exemples mais pas sous forme de situation pour la classe). Enfin les liens avec le calcul posé et les conversions de mesure sont rappelés.

Nous allons maintenant présenter l'utilisation faite par les enseignants au cours de cette deuxième année d'expérimentation.

IV. UTILISATION DE LA RESSOURCE PAR LES ENSEIGNANTS : RETOUR SUR LES CHOIX EFFECTUES.

Dans le cadre de cet article nous allons présenter quelques résultats concernant l'utilisation que font les enseignants de la ressource. Nous avons choisi de nous appuyer uniquement sur les entretiens individuels que nous avons réalisés après la séquence. Nous ne parlerons donc pas des observations de classe.

Lors de ces entretiens nous avons demandé aux enseignants de faire un bilan de leur séquence et d'indiquer des modifications de la ressource qui seraient nécessaires pour une utilisation par des collègues l'an prochain. En associant ainsi les enseignants au travail de conception de la ressource nous obtenons des renseignements essentiels pour une meilleure adaptabilité et acceptabilité de la ressource et nous plaçons l'enseignant dans une posture dans laquelle il est plus apte à se livrer sur le travail qu'il a effectué (ce qui nous permet d'avoir des informations concernant l'utilité du site par rapport à nos objectifs de départ).

Pour les enseignants qui ne travaillaient pas déjà l'aspect décimal de la numération, l'utilisation du site a permis de changer leur façon de voir et de travailler la numération : ils ont pris conscience qu'ils ne travaillaient qu'un seul aspect de la numération. C'est donc l'argument épistémologique que nous avons mis principalement en avant qui est repris par les enseignants. Il reste bien sûr à confirmer cela par des observations de classe pour voir si l'aspect décimal est bien un enjeu dans les situations proposées et comment il intervient dans leur mise en œuvre). Mais certains travaillaient déjà cet aspect décimal. Pour ceux-là l'intérêt semble beaucoup plus limité (apport de situations nouvelles principalement).

L'autre intérêt qui ressort de ces entretiens concerne l'utilisation d'un matériel qui n'était pas habituellement utilisé pour des nombres si grands. Certains évoquent cela comme une aide pour les élèves en difficulté. Mais ce qui est plus surprenant est le fait que l'intérêt pour l'apprentissage des élèves n'est pas toujours mis en avant. Cela nous semble lié au fait que certaines difficultés persistent après la séquence (ce que les enseignants ont pu voir dans l'évaluation proposée en particulier).

Enfin dans tout le site, les mathématiques sont décrites avec la notion d'organisation mathématique (type de tâches, techniques et savoirs). Même si les enseignants ne s'approprient pas cette façon de parler des contenus lors des entretiens, cela leur a été utile et leur a permis de bien identifier les mathématiques en jeu, comme l'explique Sophie : « Ce qui est détaillé c'est au niveau des objectifs c'est précis on sait où on va ».

Tous les enseignants ont mis en œuvre les cinq situations (qui étaient présentées comme des passages obligés) mais pour la construction de leur séquence nous avons pu observer des différences entre les enseignants. La plupart des enseignants ont proposé des situations complémentaires après ces cinq situations, mais peu ont proposé des exercices d'entraînement entre les situations pour permettre une automatisation des techniques construites ou un réinvestissement dans un contexte différent de celui des bûchettes. Pour ceux qui en ont fait, les seuls exercices proposés étaient des exercices d'application directe dans le contexte des bûchettes. Le manque de temps de préparation est évoqué par certains enseignants comme une des raisons. Les enseignants (en particulier ceux qui ne travaillaient déjà pas l'aspect décimal pour les nombres à trois chiffres) nous font également part du fait que pour cette première année d'utilisation de la ressource ils ont plutôt cherché à faire ce qui était proposé en essayant de se laisser guider. Ainsi maintenant qu'ils ont essayé et vu comment cela se passait, ils se sentiront plus à même de proposer des adaptations pour l'année prochaine, comme l'explique Fabrice : « La première fois tu découvres. […] Cette année j'ai suivi alors que maintenant je vais plus m'en détacher ». D'un point de vue méthodologique cela nous montre l'intérêt d'un suivi des enseignants sur plusieurs années, dans ce type de recherche, pour voir comment évolue l'utilisation de la ressource.

Du côté des élèves, dans l'évaluation finale, nous avons pu relever des difficultés liées à ce constat : ils ont eu du mal à utiliser leurs connaissances dans un problème de monnaie (contexte qui n'apparait pas dans les situations principales).

Tout cela nous amène à nous questionner sur des modifications à apporter à notre ressource pour amener tous les enseignants à proposer des exercices d'entraînement et de réinvestissement dans différents contextes. Il semble nécessaire, pour des raisons d'acceptabilité, de proposer des exercices tout faits. Cependant pour permettre aux enseignants d'exercer une certaine responsabilité il est possible :

- De proposer un nombre assez important d'exercices afin qu'ils choisissent ceux qui leur semblent les plus appropriés.
- De les aider par des apports didactiques concernant la question de la décontextualisation.
- D'utiliser un support qui permette une utilisation souple par les enseignants (modifications faciles, copier/coller …).

Enfin il est aussi possible que le fait de proposer un nombre important de situations principales ait pu faire penser aux enseignants que cela constituait une séquence complète. Surtout pour les enseignants qui ne travaillent pas habituellement cet aspect de la numération. De plus comme les cinq situations principales font référence à seulement deux types de problèmes (dénombrer une collection, passer une commande), il serait facile de recentrer sur seulement deux situations tout en faisant apparaître différentes étapes à l'intérieur de ces situations. Cela aurait également l'avantage de donner plus de visibilité pour l'enseignant sur ces deux types problèmes et le jeu sur les variables associés pour faire avancer le savoir au fur et à mesure de la séquence. Nous avons en effet pu constater que les enseignants avaient du mal à se souvenir des situations proposées. Ce nouveau découpage en deux situations devrait aussi permettre d'identifier plus clairement ces deux problèmes fondamentaux.

Les entretiens ont également permis de mettre en évidence leur utilisation de la ressource lors de leur travail de préparation.

Pour la première partie de la ressource, les enseignants expliquent ne l'avoir regardée que très rapidement lors de leur première consultation du site car ils cherchaient plutôt tout de suite des informations relatives à la séquence à mettre en place dans la classe. C'est pourquoi ils sont allés rapidement vers la deuxième partie (« les situations »). Ils ont toutefois regardé la première page sur les deux aspects de la numération et ont souligné son intérêt. La partie sur les constats dans les manuels et les difficultés des élèves les divise davantage : c'est important pour certains mais pas nécessaire pour d'autres, en particulier ceux qui travaillaient déjà l'aspect décimal pour les nombres à trois chiffres. Enfin les parties sur « le matériel, les unités, le tableau » et les « liens avec d'autres notions » ne sont pas regardées. Cette première partie contient beaucoup d'informations et même s'ils font preuve de bonne volonté dans le cadre de cette expérimentation, les enseignants ne se penchent que sur les deux ou trois premières pages. Comme le résume une enseignante : « quand on a commencé tous on a lu les deux aspects de la numération puis le reste pas trop. Après on se jette tout de suite dans nos situations » (Fabrice). De manière générale, pour une meilleure utilisabilité de la ressource par les enseignants, il sera nécessaire de réduire la quantité d'informations. Cela va nous amener à nous interroger sur ce qui est essentiel dans l'ingénierie de premier niveau et qui doit être transmis aux enseignants.

La deuxième partie (« les situations ») est la seule qui est utilisée par la suite (ils ne reviennent plus sur la première partie) avec une centration sur la description de la situation (« la situation ») qui permet à l'enseignant de construire sa séance et sur les « éléments de synthèse » qui permettent à la fois d'identifier les savoirs en jeu (« C'est ce que je ne dois pas perdre de vue … ça me permet de ne pas perdre le fil, ne pas perdre mon objectif de vue », Corinne) et de construire une trace écrite pour la classe (« La synthèse est très intéressante. Celle-ci m'a servie parce que ça m'a permis de faire mon affichage en classe », Fabrice). La description des « savoirs en jeu » avec un autre matériel de numération leur apparait alors pour la plupart comme inutile puisqu'il y a certaines répétitions avec les éléments de synthèse. Un enseignant qui ne travaillait pas l'aspect décimal s'en est toutefois servi : « et même quand t'as enseigné un paquet d'années, que tu t'es plus replongé dans les bouquins pédagogiques, c'est intéressant ».

Enfin la troisième partie sur « la séquence » qui devait permettre à l'enseignant de construire une séquence plus complète sur la numération par la description des instructions officielles et de tâches à travailler, n'a pas été utilisée par les enseignants. Nous interprétons cela principalement par le fait que ces tâches ne sont pas associées à des situations à mettre en place dans la classe, ce qui limite fortement leur intérêt pour les enseignants. Le fait que cette partie soit séparée des situations a sans doute accentué ce phénomène. Les enseignants ont davantage utilisé les situations complémentaires (dans la partie « les situations ») car il s'agissait de situations utilisables directement avec les élèves.

V. CONCLUSION ET POURSUITE DU TRAVAIL

Cette ingénierie didactique de développement nous a amené à faire certains choix pour l'enseignement de la numération (1er niveau d'ingénierie) et à concevoir une ressource pour les enseignants dans laquelle nous proposons des situations à mettre en œuvre dans les classes ainsi que des apports mathématiques, épistémologiques et didactiques (2ème niveau). Nous avons montré ici quelques résultats concernant l'utilisation de la ressource par les enseignants : l'intérêt de son utilisation du point de vue des enseignants, les difficultés liées à la construction d'une séquence (pour la construction d'exercices à proposer entre les situations principales et pour la décontextualisation progressive des connaissances) et l'utilisation générale du site centrée sur les éléments qui permettent à l'enseignant de construire ses séances. Ce dernier constat montre qu'une réflexion sera également nécessaire pour mieux prendre en compte les usages des enseignants, condition *sin equa non* pour une meilleure appropriation de ces apports.

Lors de la conception *pour l'usage* nous avons été amenés à faire des choix d'organisation ou de contenu pour la ressource qui n'entrent pas toujours en accord avec les usages qu'en font les enseignants. Notre objectif était bien de produire un prototype et l'expérimentation de cette année permettra de le faire évoluer en tenant compte des instrumentalisations réalisées par les enseignants dans le cadre de genèses documentaires (Gueudet et Trouche 2010). Ainsi, comme le suggère Folcher (2005), dans une perspective de rencontre de la conception *pour l'usage* et *dans l'usage*,

> la conception, au plan de son résultat, apparaît comme le produit des activités d'une communauté d'acteurs hétérogènes dans leurs compétences, leurs origines, leurs préoccupations mais aussi du fait des situations dans lesquelles ils agissent et mettent à l'épreuve l'artefact conçu. (Op. cité, pp. 208-209).

La division de la ressource en une partie concernant des apports pour l'enseignant et une partie pour la mise en œuvre de séances dans la classe a montré certaines limites liées aux usages des enseignants. Un autre choix possible pour cette ressource aurait été de supprimer la partie sur les situations et de proposer uniquement des éléments pour permettre à l'enseignant de s'approprier les enjeux de la numération à travers un document s'apparentant à un « traité » comme le font actuellement l'équipe Démathé (Margolinas et Wozniak 2010). Les enseignants n'utiliseraient alors pas cette ressource comme un guide pour l'enseignant, ce qui permettrait de centrer sur les apports mathématiques, didactiques et épistémologiques. Même si ce type de ressource présente un intérêt incontestable dans une perspective de formation des enseignants, nous pensons qu'il y a un risque important de non acceptabilité par les enseignants, justement du fait qu'il n'y a pas de situations de classe. De plus, cela pose des problèmes par rapport à notre question de départ puisque l'on trouve peu de situations sur les nombres à quatre chiffres, dans les ressources usuelles, qui permettent de mettre en jeu l'aspect décimal. C'est pourquoi dans notre travail nous devons continuer d'interroger les liens qu'il est possible de faire entre l'activité des enseignants orientée vers la préparation de séances et leur appropriation des enjeux de l'enseignement de la numération. En effet un risque important pour les enseignants dans l'utilisation de ressources de type manuel ou « guide pour l'enseignant » traditionnels est de se centrer uniquement sur la mise en œuvre de situations dans la classe et non sur les enjeux de savoirs.

REFERENCES

Ball D., Cohen D. (1996) Reform by the Book: What Is - Or Might Be - The Role of Curriculum Materials in Teacher Learning and Instructional Reform? *Educational Researcher* 25(9), 6-14.

Brousseau G. (1998) *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : Éditions La Pensée Sauvage.

Chambris C. (2008) *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20e siècle. Connaissances des élèves actuels.* Thèse de doctorat. Université de Paris 7.

Charles-Pezard M. (2010) Installer la paix scolaire, exercer une vigilance didactique *Recherches en didactique des mathématiques* 30/2, 197-261.

Chevallard Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques* 19/2, 221-266.

Davis E. A., Krajcik J. S. (2005) Designing educative curriculum materials to promote teacher learning. *Educational Researcher* 24(3), 3-14.

Folcher V. (2005). De la conception pour l'usage au développement de ressources pour l'activité. In Rabardel P., Pastré P. (Eds.) (pp. 189-210) *Modèles du sujet pour la conception, dialectiques activités développement.* Paris : Octarès.

Georget J.-P. (2010) Apport de l'ergonomie des EIAH pour l'analyse et la conception de ressources. In Kuzniak A., Sokhna M (Eds) *Enseignement des mathématiques et développement : enjeux de société et de formation. Actes du colloque international de l'Espace Mathématiques Francophone.* Dakar, Sénégal.

Gueudet G., Trouche L. (2010). Des ressources aux genèses documentaires. In Gueudet G., Trouche L. (Eds.) (pp. 57-74) *Ressources vives, le travail documentaire des professeurs, le cas des mathématiques.* Rennes : Presses Universitaires de Rennes et INRP.

Margolinas C., Mercier A., René de Cotret S. (2007) Les développements curriculaires dans l'enseignement obligatoire. In Trouche L., Durand-Guerrier V., Margolinas C., Mercier A. (Eds.) (pp. 25–36) *Quelles ressources pour l'enseignement des mathématiques ? Actes des journées mathématiques INRP 2006*. Lyon : INRP.

Margolinas C., Wozniak F. (2010) Rôle de la documentation scolaire dans la situation du professeur : le cas de l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire. In Gueudet G., Trouche L. (Eds.) (pp. 233-249) *Ressources vives, le travail documentaire des professeurs, le cas des mathématiques*. Rennes : Presses Universitaires de Rennes et INRP.

Perrin-Glorian M.-J. (2011) L'ingénierie didactique à l'interface de la recherche avec l'enseignement. Développement de ressources et formation des enseignants. In Margolinas C.et al. (Eds.) *En amont et en aval des ingénieries didactiques.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Ruthven K., Leach J., Laborde C., Tiberghien A. (2009) Design Tools in Didactical Research: Instrumenting the Epistemological and Cognitive Aspects of the Design of Teaching Sequences. *Educational Researcher 38*(5), 329-342.

Tempier F. (2009) L'enseignement de la numération décimale de position au CE2 : étude des relations entre contraintes et libertés institutionnelles et pratiques des enseignants. *Cahier Didirem* 60. IREM Paris 7.

Tempier F. (2010). Une étude des programmes et manuels sur la numération décimale au CE2. *Grand N* 86, 59-90.

Tricot A., Plégat-Soutjis F., Camps J.-F., Amiel A., Lutz G., Morcillo A. (2003) Utilité, utilisabilité, acceptabilité : interpréter les relations entre trois dimensions de l'évaluation des EIAH. *Environnements informatiques pour l'apprentissage humain,* 391-402. ATIEF INRP.

Site Web « Enseigner la numération décimale » : http://numerationdecimale.free.fr

ANNEXE : EXEMPLE DE DESCRIPTION DE LA SITUATION « MARCHAND DE BÛCHETTES »

Marchand de bûchettes

Il s'agit ici de proposer la tâche inverse des situations précédentes : **on part de l'écriture du nombre en chiffres** et on doit passer une commande pour obtenir ce nombre de bûchettes. En amenant certaines contraintes (par exemple : pas de millier disponible), on amène ainsi les élèves à échanger 1 unité contre 10 unités de l'ordre inférieur.

Le problème :

Le marchand possède des bûchettes par :

centaines

dizaines

unités

Nous souhaitons avoir 2615 bûchettes en tout. **Que peut-on commander ?**

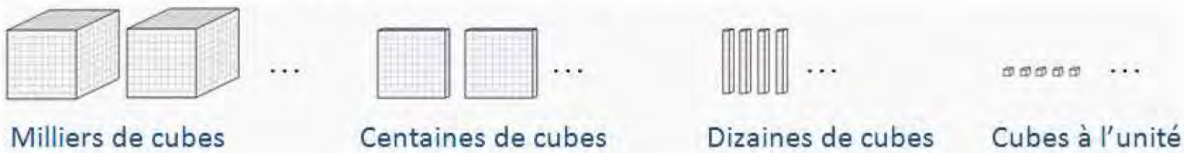
Passer une commande (décomposer un nombre)

Nous avons choisi de traiter la décomposition de nombres à travers des **problèmes de commande.**

1er problème : décomposition canonique

Collection de cubes du marchand

Un marchand possède des cubes groupés par milliers, centaines, dizaines et unités :



Question

Nous souhaitons avoir **3245 cubes**. Que faut-il commander ?

Procédure

Il faut utiliser la valeur des chiffres en fonction de leur position : 3245 c'est 3 milliers de cubes, 2 centaines de cubes, 4 dizianes de cubes et 5 cubes isolés.

Le savoir en jeu

Dans ce problème il suffit de connaître la valeur des chiffres en fonction de leur position : c'est l'aspect position.

2ème problème : décomposition avec contrainte

Collection de cubes du marchand

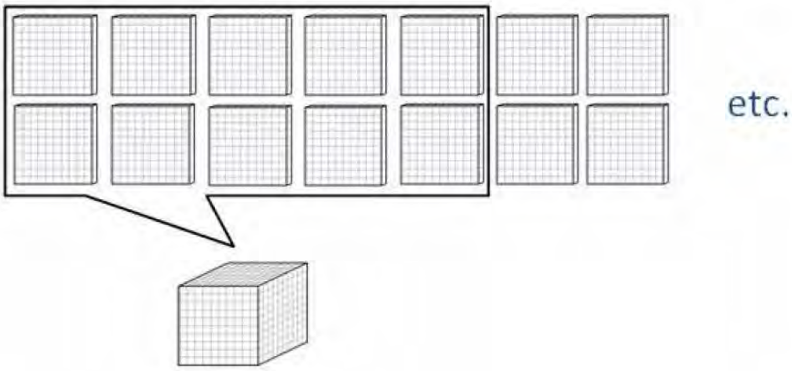
Le marchand possède des cubes groupés par centaines, dizaines et unités. Il n'a **pas de cubes groupés par milliers**.

Question

Nous souhaitons avoir **3245 cubes**. Que faut-il commander ?

Procédure

Comme dans le problème précédent, les élèves doivent utiliser la valeur des chiffres en fonction de leur position : 3245 c'est 3 milliers de cubes, 2 centaines de cubes, 4 dizaines de cubes et 5 cubes isolés. Mais cette fois les élèves sont amenés à **commander des centaines pour faire les milliers** (il faut 32 centaines pour faire 3 milliers et 2 centaines).



Le savoir en jeu

Comme pour le cas précédent l'**aspect position** est en jeu, mais cette fois les élèves sont aussi amenés à utiliser l'**aspect décimal** pour obtenir des milliers avec des centaines.

> *Aspect décimal de la numération*
> *10 unités d'un certain rang équivalent à une unité du rang supérieur.*
> *1 dizaine = 10 unités,*
> *1 centaine = 10 dizaines,*
> *donc 1 centaine = 100 unités*
> *1 millier = 10 centaines,*
> *donc 1 millier = 100 dizaines*
> *et 1 millier = 1000 unités*

Remarque : Il faut donc s'appuyer sur le fait que dans 1 millier il y a 10 centaines. Dans les problèmes de dénombrement **cette relation était utilisée dans l'autre sens** : 10 centaines se groupent en 1 millier.

Marchand de bûchettes : la situation

Enjeux pour l'enseignant

Savoir-faire : décomposer un nombre (de différentes façons), convertir entre unités de numération.

Savoirs : les deux aspects de la numération (position et décimal) mais les relations entre unités se font ici dans le sens des échanges : dans 1 millier il y a 10 centaines, etc.

Problème pour les élèves

Passer une commande pour obtenir le nombre de bûchettes demandées.

Matériel

Le matériel de la situation "combien de bûchettes ?" : les bûchettes, paquets, sachets, boites.

Les bons de commandes.

Description de la situation

Le maître est un marchand de bûchettes : il a devant lui des bûchettes à l'unité, par dizaine, par centaine et par millier. Les élèves vont devoir passer une commande pour obtenir un nombre de bûchettes donné.

Appropriation : commandes sans contrainte

Pour que les élèves s'approprient la situation on commencera par des commandes sans contrainte.

Exemple :

Il nous faut 2615 bûchettes. Combien faut-il commander de milliers de bûchettes, de centaines de bûchettes, de dizaines de bûchettes et de bûchettes seules ?

... milliers de bûchettes
... centaines de bûchettes
... dizaines de bûchettes
... bûchettes

Le problème : commandes avec contraintes

Ensuite on proposera des commandes avec contraintes (sur le nombre de milliers ou centaines, etc.).

Exemples :

a. Il nous faut encore 2615 bûchettes mais l'enseignant n'a plus de milliers de bûchettes. Que faut-il commander ?

.0. millier de bûchettes
... centaines de bûchettes
... dizaines de bûchettes
... bûchettes

b. Maintenant, il n'y a plus qu'un seul millier de bûchettes. Les élèves doivent commander 3167 bûchettes. Que faut-il commander ?

.1. millier de bûchettes
... centaines de bûchettes
... dizaines de bûchettes
... bûchettes

Etc.

Variables

Sans contrainte : présence ou non de **zéro** dans le nombre de bûchettes à commander (par exemple 4020 bûchettes).

Avec contraintes : Nombre d'objets **disponibles** pour chaque unité (nombre de milliers de bûchettes, de centaines de bûchettes, etc.). Par exemple absence de millier de bûchettes, etc. Cela amène les élèves à utiliser les unités du rang inférieur (s'il n'y a pas de millier de disponible, il faut échanger les milliers contre des centaines). On peut aussi **limiter le nombre d'objets disponibles** pour chaque unité pour que les élèves ne commandent pas systématiquement que des bûchettes à l'unité ! (par exemple pour 2615 bûchettes, il faut 2615 bûchettes à l'unité : si on limite à 50 le nombre de bûchettes à l'unité, à la dizaine, ... cela devient impossible).

Mise en commun et validation

L'enseignant recueille les différentes commandes proposées par les élèves. Les élèves comparent leurs solutions et échangent sur leur validité.

Validation collective avec les unités de numération

Comme dans la situation précédente, avant de proposer une validation avec le matériel, il est important **d'amener les élèves à essayer de valider en s'appuyant sur les écritures utilisant les unités de la numération**.

Exemple : 26 centaines + 1 dizaine + 5 unités = 20 centaines + 6 centaines + 1 dizaine + 5 unités = 2 milliers + 6 centaines + 1 dizaine + 5 unités en s'appuyant sur la relation 10 centaines = 1 millier. Le matériel ne peut alors qu'être seulement **évoqué** : par exemple, "20 centaines c'est 2 milliers car si on a 20 sachets on peut les grouper dans 2 boites".

On peut aussi utiliser un **tableau de numération** pour écrire les commandes faites par les élèves et utiliser les relations entre unités quand il y a deux chiffres dans une même colonne.

Validation collective avec le matériel éventuellement

Pour se mettre d'accord, l'enseignant peut toutefois encore proposer d'utiliser **le matériel** (bûchettes, paquets, sachets, boites) **pour réaliser les commandes passées par les élèves** (on peut alors compter oralement ou effectuer les groupements pour voir si on retrouve le nombre de départ).

Synthèse

"Qu'avez-vous appris aujourd'hui ?"

L'enseignant recueille les différentes commandes proposées par les élèves. Les élèves comparent leurs solutions et échangent sur leur validité.

Validation collective avec les unités de numération

Comme dans la situation précédente, avant de proposer une validation avec le matériel, il est important **d'amener les élèves à essayer de valider en s'appuyant sur les écritures utilisant les unités de la numération**.

Exemple : 26 centaines + 1 dizaine + 5 unités = 20 centaines + 6 centaines + 1 dizaine + 5 unités = 2 milliers + 6 centaines + 1 dizaine + 5 unités en s'appuyant sur la relation 10 centaines = 1 millier. Le matériel ne peut alors qu'être seulement **évoqué** : par exemple, "20 centaines c'est 2 milliers car si on a 20 sachets on peut les grouper dans 2 boites".

On peut aussi utiliser un **tableau de numération** pour écrire les commandes faites par les élèves et utiliser les relations entre unités quand il y a deux chiffres dans une même colonne.

Validation collective avec le matériel éventuellement

Pour se mettre d'accord, l'enseignant peut toutefois encore proposer d'utiliser **le matériel** (bûchettes, paquets, sachets, boites) **pour réaliser les commandes passées par les élèves** (on peut alors compter oralement ou effectuer les groupements pour voir si on retrouve le nombre de départ).

Synthèse

"Qu'avez-vous appris aujourd'hui ?"

Marchand de bûchettes : des éléments de synthèse

Rappel : *ces éléments de synthèse sont donnés à titre indicatif. L'objectif est d'aider l'enseignant à faire le lien entre la situation proposée en classe et les savoirs mathématiques en jeu. Cela ne constitue pas une "leçon clé en main". En effet, la synthèse peut se faire par écrit mais aussi oralement, elle peut se faire à "chaud" (à la fin de la séance) ou être repoussée à un autre moment, l'enseignant peut faire participer les élèves et s'appuyer sur leurs formulations, etc. Tous ces choix sont de la responsabilité de l'enseignant.*

Pour commander des bûchettes ...

Pour faire une commande, il faut décomposer le nombre total de bûchettes en milliers, centaines, dizaines et unités.

Par exemple, pour commander 2621 bûchettes, on peut commander :

2 milliers + 6 centaines + 2 dizaines + 1 unité

Car :

Milliers	Centaines	Dizaines	Unité
2	6	2	1

Et si le marchand n'a plus de millier ou centaine ... ?

Voici différents exemples de **commandes avec contraintes**.

<table>
<tr><th>Contraintes</th><th>Procédures</th><th>Savoir en jeu</th></tr>
<tr><td>Il n'y a plus de millier</td><td>Pour obtenir les 2 milliers de 2621 il faut commander 20 centaines :
26 centaines + 1 dizaine + 5 unités</td><td rowspan="3">Aspect décimal de la numération
10 unités d'un certain rang équivalent à une unité du rang supérieur.
1 dizaine = 10 unités,
1 centaine = 10 dizaines,
donc 1 centaine = 100 unités
1 millier = 10 centaines,
donc 1 millier = 100 dizaines
et 1 millier = 1000 unités</td></tr>
<tr><td>Il n'y a plus de centaine</td><td>Pour obtenir les 6 centaines de 2621 il faut commander 60 dizaines :
2 milliers + 61 dizaines + 5 unités</td></tr>
<tr><td>Il n'y a plus de millier ni de dizaine</td><td>Pour obtenir les 2 milliers de 2621 il faut commander 20 centaines et pour les 2 dizaines il faut 20 unités :
26 centaines + 21 unités</td></tr>
</table>

Marchand de bûchettes : compléments

Prolongement 1 : Conversions entre unités

Il est possible de s'appuyer sur la situation des commandes de bûchettes pour travailler les conversions entre unités de numération (par exemple 30 centaines = 3 milliers dans les deux exemples ci-dessous) :

a. Les élèves doivent commander 30 centaines de bûchettes. Il n'y a plus de bûchettes par centaines. Que faut-il commander ?

... milliers de bûchettes
.0. centaine de bûchettes
... dizaines de bûchettes
... bûchettes

b. Les élèves doivent commander 3 milliers de bûchettes. Il n'y a plus de bûchettes par millier. Que faut-il commander ?

.0. millier de bûchettes
... centaines de bûchettes
... dizaines de bûchettes
... bûchettes

Prolongement 2 : le jeu des décompositions

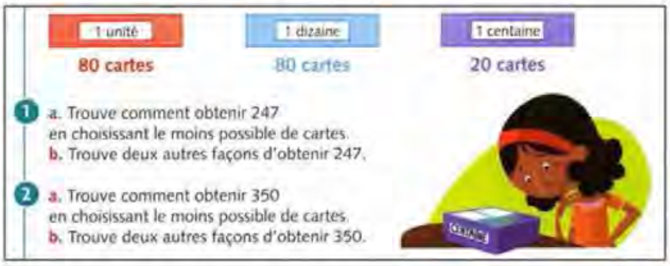
Il s'agit de demander aux élèves de trouver **le plus de façons différentes de décomposer un nombre**.

Pour les élèves, comme il y a plusieurs solutions, il s'agit réellement d'un **problème-défi**.

Exemple :

Chercher les décompositions différentes de 2647.

C'est ce qui est proposé dans cet exercice de manuel (Cap Maths CE2) :


1 unité — 80 cartes
1 dizaine — 80 cartes
1 centaine — 20 cartes

1 a. Trouve comment obtenir 247 en choisissant le moins possible de cartes.
b. Trouve deux autres façons d'obtenir 247.

2 a. Trouve comment obtenir 350 en choisissant le moins possible de cartes.
b. Trouve deux autres façons d'obtenir 350.

Voir analyse de cet exercice dans l'étude des manuels.

Prolongement 3 : Combien de ... ?

Toujours dans le contexte des bûchettes, on peut montrer (ou simplement évoquer) une collection de bûchettes (non groupée) : le problème consiste à chercher **combien de sachets nous allons avoir besoin pour organiser la collection.**

Exemple :

Combien de sachets pour organiser une collection de 2647 bûchettes ?

ANALYSE DE RESSOURCES COMME MOYEN DE DEVELOPPEMENT PROFESSIONNEL DES ENSEIGNANTS

Jana TRGALOVÁ* – Philippe R. RICHARD**

Résumé – Notre contribution explore l'implication des enseignants dans l'analyse de ressources de géométrie dynamique (GD) à l'aide d'un questionnaire comme un moyen de leur développement professionnel visant l'intégration de la GD. Ce questionnaire, élaboré dans le cadre du projet européen Intergeo, a pour but de permettre l'évaluation de la qualité des ressources déposées sur la plateforme i2geo par ses utilisateurs. Dans cette contribution, nous présentons deux expérimentations d'utilisation du questionnaire par des enseignants et nous en tirons des conclusions sur le potentiel de cet outil dans le développement de compétences professionnelles nécessaires pour un usage efficace de la GD en classe.

Mots-clefs : géométrie dynamique, ressource, qualité, genèse instrumentale, travail documentaire

Abstract – Our contribution explores the involvement of teachers in the analysis of dynamic geometry (DG) resources using a questionnaire as a means of their professional development aiming at the DG integration. This questionnaire, developed in the framework of the European project Intergeo, aims at enabling an assessment of quality of resources deposited on the platform i2geo by its users. In this contribution, we present two experiments of the use of the questionnaire by teachers and draw conclusions on the potential of this tool in the development of professional skills necessary for an effective usage of DG in classrooms.

Keywords: dynamic geometry, resource, quality, instrumental genesis, documentational work

I. INTRODUCTION

Ce texte propose une contribution au thème 2 du groupe de travail « ressources et développement professionnel des enseignants » qui porte sur les « dispositifs de formation ». Nous nous intéressons plus particulièrement aux « formes d'accompagnement que l'on peut envisager pour soutenir les enseignants dans leurs efforts d'intégration des technologies dans les classes à plus ou moins long terme ». Il s'agit ici de l'intégration de la géométrie dynamique.

Selon Robert et Rogalski (2005), le choix et la conception de tâches pour la classe relèvent de l'activité professionnelle des enseignants. Si l'utilisation efficace d'un outil technologique demande à concevoir de nouvelles tâches qui donnent du sens aux concepts mathématiques (Laborde 2001, Monaghan 2004), la conception de tâches authentiquement nouvelles est plutôt rare (Laborde 2008). Les enseignants préfèrent modifier et adapter des tâches existantes, ce qui exige la capacité de résolution avec l'outil des tâches et de leur analyse. Cependant, analyser une tâche qui intègre un outil technologique n'a rien d'immédiat. Au contraire, l'exercice est d'autant plus complexe que l'introduction de la composante technologique projette la dimension d'analyse sur toutes les autres, soit les dimensions épistémologique, didactique et institutionnelle. Alors que les enseignants doivent être capables de résoudre la tâche avec l'outil, ils doivent également analyser son rôle dans le processus de résolution et dans la définition même de la tâche. Il en est de même pour l'analyse de la pertinence pour les apprentissages et de la nécessité, voire du coût, d'introduction de nouvelles techniques instrumentées (ibid.). Pour la mise en œuvre de ces tâches en classe, les enseignants doivent avoir la capacité d'anticiper les techniques de

* S2HEP, Université Claude Bernard – Lyon 1 et Ecole Normale Supérieure de Lyon – France – jana.trgalova@univ-lyon1.fr
** Université de Montréal – Québec, Canada et Universitat Autònoma de Barcelona – Espagne – philippe.r.richard@umontreal.ca

© Trgalová J., Richard P. (2012) Analyse de ressources comme moyen de développement professionnel des enseignants. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT6, pp. 908–918). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

résolution possibles, les apprentissages potentiels, ainsi que les orchestrations favorisant les apprentissages visés (Trouche et Drijvers 2010). Ils doivent encore être capables de gérer les relations entre les anciennes et les nouvelles connaissances (Assude et Gélis 2002), ainsi que les articulations entre les techniques instrumentées et les techniques traditionnelles en papier-crayon (Guin et Trouche 1999).

De nombreux dispositifs ont été mis en place pour soutenir les enseignants dans leurs efforts d'utilisation des technologies. Ces dispositifs varient en durée (de quelques jours en formation initiale ou continue, jusqu'à quelques années pour des dispositifs tels que SFODEM[1] en France ou ICTML[2] en Norvège), en modalités (en présence, à distance ou en mode mixte) et en contenu (de l'analyse de quelques ressources en formation continue par exemple, jusqu'à l'accompagnement du processus de conception collaborative de ressources, leur mise en œuvre et le retour réflexif sur les expériences dans SFODEM). Leur efficacité est tout aussi variable de par leur ponctualité et manque du suivi pour des formations courtes ou de par leur coût en temps et en ressources humaines pour des dispositifs tels que SFODEM où un groupe de chercheurs et de formateurs a travaillé avec un petit groupe d'enseignants pendant 6 ans.

Un autre moyen de soutenir l'intégration des technologies est de mettre à la disposition des enseignants des ressources qui proposent des activités faisant appel à des outils technologiques, notamment via l'Internet. C'est le cas de banques de ressources éducatives, appelées aussi banques d'objets d'apprentissage. Cependant, l'accessibilité des ressources n'est pas suffisante, comme le souligne Robertson :

> Dénicher des ressources utiles, crédibles, des contenus éducatifs de qualité mis à jour régulièrement relève bien souvent de l'utopie. En effet, l'utilisateur est souvent confronté à l'absence d'assistance à la recherche (métadonnées vs mots-clefs), au manque d'assurance en ce qui a trait à la qualité des informations. De plus, il n'existe pas, actuellement, de « masse critique de contenu » […], c'est-à-dire qu'il n'existe pas un nombre suffisant d'objets d'apprentissage correctement métaréférencés, aisément accessibles en ligne pour que les enseignants et les apprenants en viennent à consulter toujours plus souvent les référentiels. […], nous avancerions que l'appropriation par les enseignants de matériel pédagogique et didactique complémentaire en soutien aux apprentissages des élèves et en complément aux ressources imprimées (manuels scolaires notamment) semble toujours difficile, même si les technologies sont disponibles à l'école depuis quelques vingt ans. (Robertson 2006, p. 13)

Le manque de métadonnées décrivant précisément le contenu des ressources, l'absence d'indications sur la qualité et la difficulté d'appropriation de ces dernières sont soulevés comme des principaux obstacles à la réutilisation de ressources existantes et, par conséquent, à l'intégration des technologies dans les pratiques des enseignants. Dans ce qui suit, nous explorons l'idée d'impliquer les enseignants dans l'évaluation de la qualité de ressources de géométrie dynamique comme un moyen de pallier aux deux derniers obstacles cités. L'évaluation de la qualité des ressources est cadrée par un questionnaire qui a été élaboré pour les besoins du projet européen Intergeo[3] (Kortenkamp *et al.* 2009) et que nous présentons brièvement en section II. La section III est consacrée à la présentation du cadrage théorique des études empiriques décrites en section IV. Les conclusions tirées de ces études sont proposées en section V.

[1] Suivi de Formation à Distance pour les Enseignants de Mathématiques (Guin *et al.* 2008).
[2] ICT and Mathematics Learning (Fuglestad 2007).
[3] Interoperable Interactive Geometry for Europe, co-funded by the European Union within the eContentPlus programme, 2007-2010.

II. QUESTIONNAIRE D'EVALUATION DE RESSOURCES DE GEOMETRIE DYNAMIQUE

La plateforme i2geo, retombée du projet Intergeo, a pour but de mettre à disposition des enseignants des ressources autour de l'usage de la géométrie dynamique dans des classes de mathématiques. La plateforme est fondée sur le principe du développement communautaire : c'est un environnement ouvert où tout utilisateur peut déposer des ressources pour les mutualiser avec d'autres utilisateurs. Il peut réutiliser les ressources disponibles, les commenter, de même que partager ses expériences avec leur mise en application auprès de ses élèves. Afin de permettre l'amélioration de la qualité des ressources disponibles sur la plateforme, nous avons mis en place une démarche qualité (Trgalová et al. 2011) qui s'appuie sur un questionnaire (cf. annexe). Celui-ci est organisé autour de neuf dimensions de ressources de géométrie dynamique jugées pertinentes pour évaluer sa qualité mathématique, didactique, pédagogique, technique et ergonomique. Ces dimensions sont les suivantes : (1) métadonnées, (2) aspect technique, (3) dimension mathématique du contenu, (4) dimension instrumentale du contenu, (5) valeur ajoutée de la géométrie dynamique, (6) implémentation didactique, (7) implémentation pédagogique, (8) intégration dans une progression, et (9) aspect ergonomique.

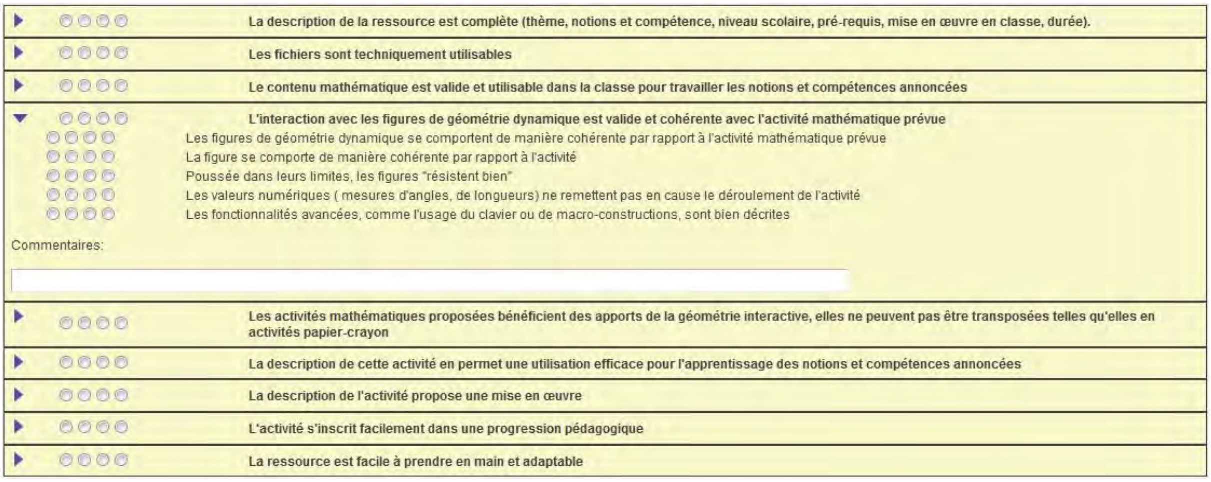

La description de la ressource est complète (thème, notions et compétence, niveau scolaire, pré-requis, mise en œuvre en classe, durée).
Les fichiers sont techniquement utilisables
Le contenu mathématique est valide et utilisable dans la classe pour travailler les notions et compétences annoncées
L'interaction avec les figures de géométrie dynamique est valide et cohérente avec l'activité mathématique prévue
Les figures de géométrie dynamique se comportent de manière cohérente par rapport à l'activité mathématique prévue
La figure se comporte de manière cohérente par rapport à l'activité
Poussée dans leurs limites, les figures "résistent bien"
Les valeurs numériques (mesures d'angles, de longueurs) ne remettent pas en cause le déroulement de l'activité
Les fonctionnalités avancées, comme l'usage du clavier ou de macro-constructions, sont bien décrites
Commentaires:
Les activités mathématiques proposées bénéficient des apports de la géométrie interactive, elles ne peuvent pas être transposées telles qu'elles en activités papier-crayon
La description de cette activité en permet une utilisation efficace pour l'apprentissage des notions et compétences annoncées
La description de l'activité propose une mise en œuvre
L'activité s'inscrit facilement dans une progression pédagogique
La ressource est facile à prendre en main et adaptable

Figure 1 – *Questionnaire de qualité*

Un item général (en gras dans la Figure 1) et ensemble de critères plus détaillés sont associés à chaque dimension. Les items et les critères sont formulés comme des affirmations auxquelles les utilisateurs expriment leur degré de satisfaction sur une échelle quaternaire de « tout à fait d'accord » à « pas du tout d'accord ». Ces réponses peuvent être complétées par des commentaires qualitatifs rédigés librement dans des champs prévus à cet effet. Puisqu'ils doivent permettre d'identifier les faiblesses des ressources évaluées et d'y indiquer des pistes d'amélioration, les champs de commentaires sont déterminants pour l'évolution de la ressource évaluée, mais il n'y a pas de mécanisme particulier pour forcer les commentaires.

III. CADRAGE THEORIQUE : APPROCHES INSTRUMENTALE ET DOCUMENTAIRE

Dans notre dispositif de recherche, nous nous intéressons à la manière avec laquelle les enseignants s'approprient le questionnaire comme outil d'analyse de ressources de géométrie dynamique et dans quelle mesure une telle analyse peut contribuer au développement de leurs compétences professionnelles. Nous adoptons deux points de vue, les perspectives instrumentale et documentaire.

L'*approche instrumentale* (Rabardel 1995) se fonde sur la distinction entre un *artefact*, disponible pour un utilisateur, et un *instrument* que cet utilisateur construit à partir de cet artefact, ou d'une partie de celui-ci, au cours de l'action qui met en jeu son usage. Un artefact devient ainsi un instrument pour cet utilisateur dans un processus, appelé *genèse instrumentale*, qui articule deux processus complémentaires (ibid., p. 111) :

- Les **processus d'instrumentalisation** concernent l'émergence et l'évolution des composantes artefact de l'instrument : sélection, regroupement, production et institution de fonctions, détournements et catachrèses, attribution de propriétés, transformation de l'artefact (structure, fonctionnement etc.) qui prolongent les créations et réalisations d'artefacts dont les limites sont de ce fait difficiles à déterminer ;
- Les **processus d'instrumentation** sont relatifs à l'émergence et à l'évolution des schèmes d'utilisation et d'action instrumentée : leur constitution, leur fonctionnement, leur évolution par accommodation, coordination combinaison, inclusion et assimilation réciproque, l'assimilation d'artefacts nouveaux à des schèmes déjà constitués etc.

Les *schèmes d'utilisation* de l'artefact

> permettent la répétition de l'action en assurant son adaptation aux aspects variables des objets et des situations appartenant à une même classe. Ils ont des capacités accommodatrices pour s'appliquer à des objets, des classes de situations différentes. (Rabardel 1999, p. 209)

Le schème est une organisation invariante de l'activité et de la conduite pour une classe de situations donnée, composée de buts, de règles d'action, d'invariants opératoire ou théorèmes en acte et de possibilités d'inférence. Un instrument est donc une entité composée de l'artefact ou d'une partie de celui-ci, et d'un schème d'utilisation qui peut lui-même se composer de schèmes d'utilisation très élémentaires.

Nous nous appuyons sur cette approche pour étudier le processus par lequel un enseignant transforme le questionnaire, que nous considérons comme un artefact, en un instrument pour l'analyse de ressources.

Les principes fondateurs de l'approche instrumentale ont été repris et approfondis par Gueudet et Trouche (2008, 2009). L'*approche documentaire* ainsi développée permet d'étudier le travail documentaire des enseignants qui consiste à exploiter un ensemble de ressources données, les sélectionner, les adapter et les recombiner pour concevoir de nouvelles ressources. Cette approche propose la distinction entre *ressource*, disponible pour l'enseignant, et *document* construit par l'enseignant dans un objectif précis. Le document résulte donc d'un processus, appelé *genèse documentaire* (figure 2).

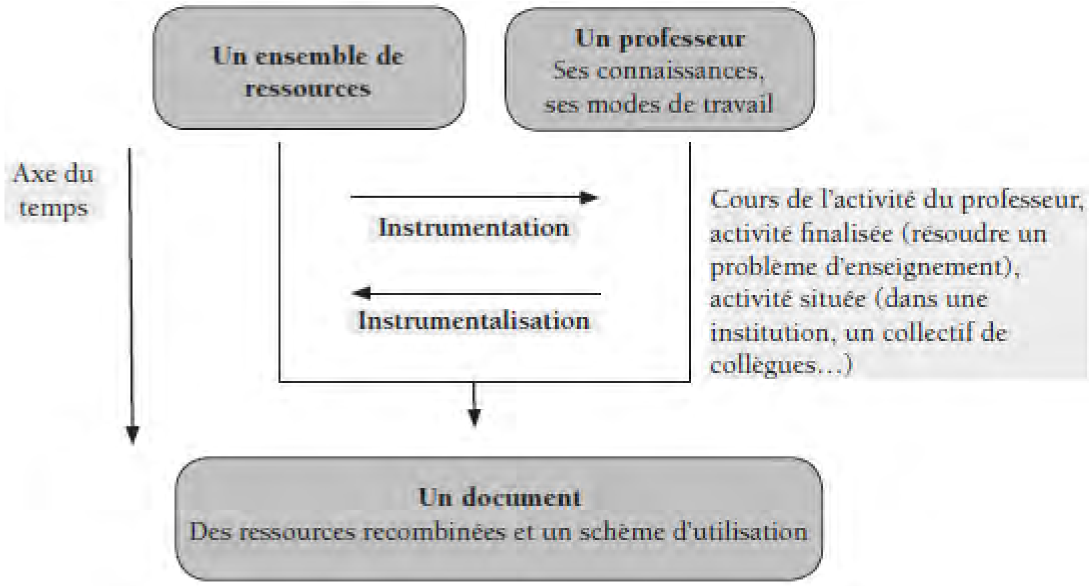


***Figure 2** – Genèse documentaire (Gueudet et Trouche 2008, p. 10)*

L'approche documentaire nous semble particulièrement pertinente pour étudier le travail documentaire des enseignants concerné par le choix, l'analyse et l'adaptation de ressources de géométrie dynamique.

IV. EXPERIMENTATIONS

Dans cette section, nous présentons deux expérimentations menées respectivement en France et au Québec dans le but d'étudier les usages du questionnaire d'analyse de ressources de géométrie dynamique présenté en section II.

Notre objectif de recherche est double. Il s'agit d'abord d'étudier le travail documentaire des enseignants, et plus particulièrement les processus de tri, de sélection et d'adaptation de ressources, et ensuite d'analyser les processus de genèse instrumentale relatifs au questionnaire comme outil d'analyse de ressources.

Les deux expérimentations présentées ci-dessous diffèrent en de nombreux points, qui sont autant de variables dans notre méthodologie :

- *Expérience des enseignants*. En France, des enseignants expérimentés ont participé à l'expérimentation, au Québec, celle-ci a été menée auprès de futurs enseignants. La comparaison des observations devrait nous permettre de comprendre un peu mieux dans quelle mesure l'expérience professionnelle facilite ou non les genèses instrumentales du questionnaire et influence le travail documentaire des enseignants.
- *Durée.* En France, l'expérimentation s'est déroulée sur une courte durée – un temps de prise de connaissance individuelle par les enseignants de ressources proposées et un temps d'analyse de ressources par binômes. Au Québec, l'expérimentation s'est déroulée pendant un cours d'une quarantaine d'heures. Ce choix est dû aux contraintes organisationnelles des contextes dans lesquels ces expérimentations ont eu lieu – mémoire de Master[4] dans le premier cas et formation initiale des futurs enseignants de mathématiques au secondaire dans le second cas.
- *Version du questionnaire utilisé.* L'expérimentation menée en France appartenait au cycle conception/test du questionnaire. Ainsi, une version intermédiaire du questionnaire a été utilisée. Au Québec, l'expérimentation a eu lieu lorsque le questionnaire avait déjà été implémenté sur la plateforme, c'est-à-dire que les étudiants ont utilisé la version actuellement disponible en ligne (cf. annexe).
- *Ressources proposées.* Dans l'expérimentation française, le choix des ressources proposées aux enseignants a été fait par le chercheur pour permettre l'émergence de critères utilisés spontanément par les enseignants lorsqu'ils trient et sélectionnent des ressources pour leurs activités d'enseignement. Au Québec, la plateforme i2geo a été utilisée avec l'ensemble de ressources disponibles, ce qui nous permet d'observer les processus de recherche de ressources par les étudiants, mais aussi l'adaptation de ressources existantes, la création de nouvelles ressources, l'évaluation de ressources par les pairs, la critique du processus d'évaluation et son à-propos relativement aux moyens d'évaluation souhaitables dans le contexte de l'expérimentation.

[4] Cette expérimentation a été menée dans le cadre du travail de mémoire de Master 2 de J- M. Baudoin (Baudoin, 2009).

1. *Expérimentation courte avec des enseignants français*

Avec cette expérimentation nous cherchions à analyser la pertinence et la clarté des critères de qualité dans le questionnaire pour les enseignants, étudier les premiers usages du questionnaire pour l'analyse des ressources et identifier les représentations que les enseignants ont de ressources de « bonne qualité », dont les aspects des ressources qui déterminent leur sélection et ceux qui facilitent leur appropriation pour un usage en classe. Les deux premiers objectifs concernent les genèses instrumentales relatives au questionnaire considéré comme un artefact, tandis que le troisième porte également sur les genèses documentaires relatives aux ressources.

Au moment de l'expérimentation, le questionnaire ne comportait que huit dimensions, la neuvième sur l'aspect ergonomique des ressources a été ajoutée plus tard. Trois ressources ont été proposées aux enseignants, toutes portant sur un même objet de savoir mathématique, les quadrilatères particuliers (niveau 5^{e} de collège français, élèves de 12-13 ans). Les trois ressources étaient composées d'un fichier texte s'adressant soit à l'enseignant, soit aux élèves, soit aux deux accompagné d'un fichier de géométrie dynamique. De plus, les modalités d'utilisation de la géométrie dynamique suggérées par les ressources ont été les mêmes, c'est-à-dire en salle informatique où les élèves manipuleraient eux-mêmes les figures.

Six enseignants français ont participé à cette expérimentation. Ils avaient tous une expérience professionnelle d'enseignement des mathématiques plus ou moins longue, entre 5 et 15 ans, et un niveau d'intégration de technologies très hétérogène. Le travail documentaire des enseignants a été cadré par le protocole suivant :

1) Dans un premier temps, chaque enseignent devait prendre connaissance, individuellement, des contenus des trois ressources.
2) Les enseignants analysaient ensuite les ressources en binômes en utilisant le questionnaire.
3) Enfin, chaque enseignant devait décider individuellement s'il choisirait chacune des ressources analysées pour l'utiliser dans sa classe, avec ou sans modifications, puis éventuellement suggérer des pistes d'amélioration des ressources.

Le choix de faire précéder l'analyse des ressources par une phase de prise de connaissance de leurs contenus avait pour but d'une part de permettre à ce que chaque enseignant puisse se faire sa propre opinion sur les ressources et d'autre part de gagner du temps pour leur analyse avec le questionnaire. Les enseignants ont ensuite été groupés par binômes afin de susciter des échanges et des confrontations de leurs points de vue sur les ressources. L'expérimentation, plus précisément les phases 2 et 3, a duré environ 3 heures. Un observateur a été présent lors du travail d'analyse des ressources pour aider les enseignants à lever d'éventuelles ambiguïtés dans les items du questionnaire ou pour demander davantage de précisions si cela s'avérait nécessaire.

L'analyse des données recueillies durant l'expérimentation a été basée sur la confrontation de l'analyse « experte » des ressources, réalisée par un chercheur en didactique des mathématiques, avec les analyses des ressources réalisées par les enseignants. Les résultats montrent que certains binômes d'enseignants éprouvaient des difficultés à se concentrer sur le strict contenu des ressources dans leur analyse. En effet, leurs réponses à certains items ne correspondaient pas aux informations fournies par la ressource, mais elles reflétaient plutôt des efforts d'interprétation de ces informations à la lumière de leurs propres expériences. Par exemple, à la question « *Les éléments permettant la prise en charge du problème par l'apprenant sont-ils explicites ?* », deux binômes ont répondu « *non pas du tout* » (réponse attendue), tandis que le troisième a répondu « *oui, tout à fait* ». Cette question interroge la phase de dévolution dans l'activité proposée. Voici l'échange entre les enseignants du binôme :

> E1 : « c'est trop directif ; il n'y a pas de prise en charge du problème par l'apprenant. »
>
> E2 : « oui mais en même temps du coup ils font le problème ; moi, je vois la question… imagine quelque chose de très, très ouvert où l'élève n'entre même pas dedans. Là, il n'y a pas de soucis, il sait ce qu'il a à faire. »

Cet échange laisse supposer que l'enseignant E2 interprète la question comme « *Les élèves peuvent-ils facilement comprendre ce qu'il faut faire et s'engager dans la résolution du problème ? »*. E2 anticipe donc la manière dont la dévolution pourrait se faire lors de la mise en place de l'activité en classe au lieu de chercher simplement la présence d'indications à ce sujet dans la ressource, ce qui est demandé dans la question. Selon l'approche instrumentale, il s'agit d'une *catachrèse*, un écart entre le prévu et le réel dans l'utilisation de l'artefact (Rabardel 1999, p. 99), ici de la question donnée du questionnaire. Cette catachrèse n'est cependant pas considérée comme un détournement de l'artefact par rapport aux fonctions prévues, mais plutôt comme un indice du processus d'attribution à l'artefact « *de fonctions non anticipées ou prévues par les concepteurs* » (ibid., p. 101). Il s'agit d'un processus d'instrumentalisation de la question. D'autre part, cette interprétation particulière se traduit par la mise en œuvre de schèmes d'exploration nouveaux amenant l'enseignant à interroger le contenu de la ressource d'une certaine manière portant davantage sur son usage potentiel en classe que sur les informations fournies, ce qui témoigne d'un processus d'instrumentation.

Le questionnaire lui-même a été utilisé différemment par les binômes. Un binôme l'a utilisé dès le départ pour éliminer les ressources les moins pertinentes. Leur analyse avait ainsi pour but d'identifier les dimensions rédhibitoires des ressources. Une fois de telles dimensions déterminées pour une ressource donnée, les enseignants en ont arrêté l'analyse, sans essayer de vérifier si les autres aspects constituent ou non sa force. Par exemple, une des ressources comprenait un fichier de géométrie dynamique défaillant. Les enseignants de ce binôme considéraient inutile de poursuivre l'analyse de la ressource après avoir identifié la faiblesse de la ressource résidant dans le fichier de géométrie dynamique erroné, puisque pour eux, « *la première des choses, c'est la figure* ». Les deux autres binômes ont, en revanche, réalisé une analyse détaillée des toutes les dimensions de la ressource. A la question s'ils auraient choisi cette ressource pour une éventuelle utilisation dans leurs classes, certains enseignants de ces binômes ont pu envisager son utilisation, à condition d'y apporter des modifications permettant d'améliorer les aspects considérés comme faibles. Ils ont été capables de faire abstraction de la défaillance du fichier de géométrie dynamique, comme en témoigne l'affirmation de certains : « *on fait comme si la figure était juste* ». Ainsi, même si tous les binômes ont trouvé cette faiblesse inacceptable, celle-ci n'a pas empêché certains de continuer l'analyse et identifier des points forts de la ressource.

Ces résultats permettent d'anticiper différents usages possibles du questionnaire qui correspondent aux différentes genèses instrumentales conduisant au développement de différents schèmes d'utilisation et, par conséquent, de différents instruments d'analyse de ressources, comme les suivants :

- ne considérer que quelques dimensions essentielles d'une ressource qui seront analysées à l'aide de critères détaillés et analyser les autres seulement à l'aide de l'item général ;
- analyser en détail une dimension importante : si celle-ci est satisfaisante, en analyser une autre, si non, arrêter l'analyse et conclure que la ressource est de « mauvaise » qualité ;
- n'utiliser que les items généraux pour analyser toutes les dimensions de la ressource ;
- utiliser les critères détaillés pour réaliser une analyse approfondie de la ressource.

La manière dont le questionnaire est utilisé, ou, en termes de l'approche instrumentale, la nature du questionnaire comme instrument d'analyse de ressources, est façonné par l'expérience de l'utilisateur. Cependant, la finalité de l'analyse de ressources joue également un rôle important dans la genèse instrumentale. Par exemple, si l'analyse doit permettre l'identification de points faibles de la ressource pour pouvoir l'améliorer, une analyse approfondie de la ressource à l'aide de critères détaillés du questionnaire serait pertinente. Si le but de l'analyse est de mieux comprendre le contenu de la ressource et les intentions didactiques de ses auteurs en vue de la mise en œuvre de la ressource ne classe, l'utilisateur pourra se concentrer sur les dimensions jugées importantes et laisser de côté les autres. Si le but de l'analyse est de faire le choix de la ressource la plus appropriée dans un ensemble de ressources, on pourra se concentrer sur les dimensions considérées comme importantes et rejeter les ressources pour lesquelles ces dimensions seraient jugées insatisfaisantes.

Concernant les critères déterminant les choix de ressources pour une éventuelle utilisation en classe, il apparaît que le contenu mathématique valide est une condition nécessaire. Les enseignants accordent aussi une grande importance à la valeur ajoutée de la géométrie dynamique dans les activités proposées dans la ressource. D'autres dimensions sont considérées comme plus ou moins importantes en fonction de l'expérience des enseignants. Par exemple, les enseignants peu familiers avec l'usage des technologies jugent la dimension relative à l'implémentation didactique de la ressource, c'est-à-dire présence d'indications sur la gestion par l'enseignant des apprentissages des élèves, comme l'une des plus importantes.

Cette étude a également permis de reformuler certains critères afin de lever des ambiguïtés qui étaient parfois à l'origine de réponses contradictoires de la part des binômes.

Les résultats de cette expérimentation montrent que les deux processus, genèse instrumentale portant sur le questionnaire et genèse documentaire portant sur les ressources, s'entremêlent comme, d'une part, le questionnaire est supposé orienter l'analyse des ressources en pointant les dimensions sur lesquelles elle doit porter et, d'autre part, l'analyse des ressources façonne la manière dont le questionnaire est utilisé.

2. *Expérimentation longue avec des étudiants québécois*

Cette expérimentation a eu lieu dans le cadre d'un cours semi-intensif d'environ 6 heures par semaine pendant 7 semaines consécutives, avec des étudiants d'un programme de formation initiale des enseignants de mathématiques au secondaire dans une université québécoise. L'objectif général visait à étudier la manière dont la plateforme i2geo, avec sa collection de ressources et ses outils, peut être mise à profit pour le développement de compétences professionnelles des enseignants, comme porter un regard critique sur les ressources existantes, adapter des ressources conçues pour un système d'enseignement étranger au contexte québécois, concevoir de nouvelles ressources ou encore améliorer des activités suite à des rétroactions des pairs.

Trente-cinq étudiants, groupés par équipes de deux, mais avec une équipe de trois, ont participé à cette expérimentation. Ils ont dû réaliser un dossier comportant la description des activités correspondant aux objectifs mentionnés, des copies d'écran montrant les analyses des ressources réalisées sur la plateforme i2geo à l'aide du questionnaire en ligne, ainsi que leur point de vue argumenté sur l'utilité du questionnaire pour l'analyse de ressources.

Les données recueillies, riches et volumineuses, sont en cours d'analyse. Nous présentons dans la suite seulement quelques éléments concernant le regard critique des étudiants sur le questionnaire.

Treize équipes sur dix-sept ont donné leur avis sur l'utilité du questionnaire, ses points forts et ses points à améliorer. Parmi ces binômes, 11 considèrent le questionnaire d'une grande utilité permettant de réaliser une analyse approfondie de ressources de géométrie dynamique, et 8 équipes soulignent que grâce au questionnaire, ils ont pu réfléchir sur les aspects des ressources auxquels ils n'auraient pas pensé sans le questionnaire. Parmi les points forts du questionnaire, les étudiants relèvent les questions bien élaborées, faciles à comprendre, bien structurées dans de grandes catégories permettant ainsi une analyse rapide et complète des ressources. Certains binômes affirment que le questionnaire leur a été utile également pour concevoir de nouvelles activités et ressources, d'autres soulignent encore son utilité pour l'amélioration des ressources existantes grâce aux avis des évaluateurs. Quelques points à améliorer sont aussi mentionnés : éviter la répétition et la redondance de certains critères, le fait que certains critères ne s'appliquent pas à toutes les ressources et qu'il n'y a pas la possibilité de le signifier. De plus, 4 binômes trouvent que l'évaluation finale réalisée à l'aide du questionnaire ne correspond pas toujours à leur opinion globale sur la qualité de la ressource. Malgré tout, ils trouvent que l'évaluation à l'aide du questionnaire mène à une meilleure évaluation de la ressource que ce qu'ils lui auraient attribué sans le questionnaire.

V. CONCLUSION

L'analyse du travail documentaire des enseignants avec des ressources et des genèses instrumentales relatives à leur usage du questionnaire présentée dans ce texte tend à montrer un impact positif de l'implication des enseignants dans l'analyse des ressources sur le développement de leurs compétences professionnelles visant l'intégration de la géométrie dynamique dans leurs pratiques.

Une première conclusion concerne l'imbrication des genèses instrumentales et documentaires chez les enseignants dans l'analyse des ressources à l'aide du questionnaire. Le questionnaire a pour but d'aider les enseignants à analyser les ressources pour qu'ils puissent choisir celles qui leur conviennent pour une mise en œuvre en classe. De ce point de vue, la genèse instrumentale du questionnaire pour l'analyse des ressources soutient la genèse documentaire. Pourtant, le questionnaire a été utilisé de manière différente, ce qui a conduit au développement de différents instruments menant à de diverses analyses de ressources. Ainsi, l'analyse des ressources et ses différentes finalités ont façonné l'utilisation du questionnaire et, par conséquent, l'instrument qui en résulte pour l'analyse des ressources. De ce point de vue, la genèse documentaire influence à son tour la genèse instrumentale du questionnaire. Cette relation étroite entre les genèses documentaire et instrumentale est l'une des clés du développement professionnel, mais, en même temps, elle présente une grande complexité pour les enseignants.

Les études empiriques menées avec les enseignants ont produit de nombreux résultats significatifs. Nous avons observé par exemple que l'analyse des ressources de géométrie dynamique passe par une vérification explicite de la valeur ajoutée de la géométrie dynamique en comparaison avec l'environnement traditionnel de papier - crayon et une attention particulière est accordée au rôle du déplacement. Il s'agit d'une compétence professionnelle nécessaire pour une analyse efficace des ressources de géométrie dynamique. Son développement a été évidemment visé dès la conception du questionnaire, et les résultats des expériences montrent que le questionnaire permet en effet d'atteindre cet objectif.

Les résultats montrent aussi que les enseignants apprécient l'utilisation du questionnaire leur permettant de faire une analyse complète et détaillée des ressources. Il faudra cependant se pencher à nouveau sur les points critiqués afin de repenser certains critères qui apparaissent redondants et surtout sur les raisons pour lesquelles le résultat de l'évaluation ne correspond pas toujours à l'avis global des évaluateurs sur la qualité de la ressource.

Bien que ce travail montre que l'évaluation de la qualité des ressources de géométrie dynamique peut soutenir le développement professionnel des enseignants, il apparaît également que la complexité d'une telle activité pour les enseignants nécessite un soutien spécifique et à long terme. De nouveaux moyens et outils d'accompagnement de genèses instrumentales et documentaires des utilisateurs de la plate-forme doivent donc être pensés, ce qui ouvre la voie à d'autres projets.

REFERENCES

Assude T., Gélis J.-M. (2002) La dialectique ancien-nouveau dans l'intégration de Cabri-géomètre à l'école primaire. *Educational Studies in Mathematics* 50, 259-287.

Baudoin J.-M. (2009) *Une proposition de grille d'analyse pour l'évaluation de la qualité des ressources de géométrie dynamique*. Mémoire de Master 2 IC2A. Université de Grenoble.

Fuglestad A. B. (2007) Teaching and teachers' competence with ICT in mathematics in a community of inquiry. In Woo J. H. et al. (Eds.) (pp. 249-256) *Proceedings of the 31st Conference of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education*. Seoul : PME.

Gueudet G., Trouche L. (2008) Du travail documentaire des enseignants : genèses, collectifs, communautés. Le cas des mathématiques. *Education et didactique* 2(3), 7-33.

Gueudet G. Trouche L. (2009) Towards new documentation systems for mathematics teachers? *Educational Studies in Mathematics* 71, 199-218.

Guin D., Joab M., Trouche L. (Ed.) (2008) *Conception collaborative de ressources pour l'enseignement des mathématiques, l'expérience du SFoDEM (2000-2006)*. Cédérom, INRP et IREM (Université Montpellier 2).

Guin D., Trouche L. (1999 The complex process of converting tools into mathematical instruments. The case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 3, 195-227.

Kortenkamp U., Blessing A. M., Dohrmann C., Kreis Y., Libbrecht P., Mercat C. (2009) Interoperable interactive geometry for Europe – First technological and educational results and future challenges of the Intergeo project. In Durrand-Guerrier V. et al. (Eds.) (pp. 1150-1160) *Proceedings of the 6th CERME conference*. Lyon, France.

Laborde C. (2001) Integration of technology in the design of geometry tasks with Cabri-geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 6(3), 283-317.

Laborde C. (2008). Multiple dimensions involved in the design of tasks taking full advantage of dynamic interactive geometry. In Canavarro A. P. et al. (Eds.) (pp. 29-43) *Tecnologias e Educação Matemática*. Lisboa: SEM/SPCE.

Monaghan J. (2004) Teachers' activities in technology-based mathematics lessons, *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 9, 327-357.

Rabardel P. (1995) *Les hommes et les technologies : Approche cognitive des instruments contemporains*. Paris : Armand Colin.

Robert A., Rogalski J. (2005) A cross-analysis of the mathematics teacher's activity. An example in a French 10th-grade class. *Educational Studies in Mathematics* 59, 269-298.

Robertson A. (2006) *Introduction aux banques d'objets d'apprentissage en français au Canada*, Rapport pour le Réseau d'enseignement francophone à distance du Canada. http://www.refad.ca/

Trgalová J., Soury-Lavergne S., Jahn A. P. (2011) Quality assessment process for dynamic geometry resources in Intergeo project. *ZDM* 43, 337-351.

Trouche L., Drijvers P. (2010) Handheld technology for mathematics education, flashback to the future. *ZDM* 42, 667–681.

ANNEXE

La description de la ressource est complète (thème, notions et compétence, niveau scolaire, pré-requis, mise en œuvre en classe, durée).

- Le thème mathématique est clairement indiqué
- Les pré-requis mathématiques sont clairement indiqués
- Les prérequis techniques sont clairement indiqués
- Les compétences visées sont indiquées
- Les notions en jeu sont indiquées
- Une mise en œuvre de la ressource est proposée (utilisation en salle informatique, en salle ordinaire avec vidéoprojection...)
- Une durée est proposée

Les fichiers sont techniquement utilisables

- Je peux accéder aux différents fichiers
- Je peux ouvrir les fichiers de géométrie dynamique avec le logiciel de mon choix
- Il n'y a pas de "bugs" informatiques dans les fichiers

Le contenu mathématique est valide et utilisable dans la classe pour travailler les notions et compétences annoncées

- Les mathématiques sont valides
- Le thème, les notions et les compétences indiqués sont conformes au programme pour le niveau annoncé
- Les activités mathématiques proposées sont en adéquation avec le thème, les notions et les compétences annoncés

L'interaction avec les figures de géométrie dynamique est valide et cohérente avec l'activité mathématique prévue

- Les figures de géométrie dynamique se comportent de manière cohérente par rapport à l'activité mathématique prévue
- La figure se comporte de manière cohérente par rapport à l'activité
- Poussée dans leurs limites, les figures "résistent bien"
- Les valeurs numériques (mesures d'angles, de longueurs) ne remettent pas en cause le déroulement de l'activité
- Les fonctionnalités avancées, comme l'usage du clavier ou de macro-constructions, sont bien décrites

La description de cette activité en permet une utilisation efficace pour l'apprentissage des notions et compétences annoncées

- L'activité est conçue de manière à ce que les élèves s'y engagent facilement
- Des conseils sont donnés à l'enseignant pour lancer l'activité
- L'activité est conçue de manière à laisser des initiatives aux élèves
- Des traces de production d'élèves sont disponibles
- Des stratégies prévisibles des élèves, correctes ou erronées, sont décrites
- Les rétroactions du logiciel essentielles pour l'activité sont décrites
- Les rétroactions du logiciel permettent aux élèves d'avancer dans la résolution de l'activité
- Des suggestions pour sortir les élèves de stratégies sans issues sont proposées
- Des actions pour faire évoluer les stratégies de élèves sont proposées
- Des conseils sur les interventions aux moments de synthèse sont donnés
- Des suggestions sur comment, quand et qui valide les productions des élèves sont données
- Les caractéristiques principales de l'activité et les effets de leurs modifications sur les stratégies et les apprentissages des élèves sont décrits

La description de l'activité propose une mise en œuvre

- Une configuration matérielle possible est décrite (un ordinateur par élève, ou classe entière avec vidéoprojecteur)
- L'activité est décomposée en différents rôles et phases
- Une gestion des mises en commun et de la conclusion de l'activité est proposée
- Un déroulement temporel est proposé

L'activité s'inscrit facilement dans une progression pédagogique

- Les apprentissages réalisés peuvent être réinvestis
- Les notions et compétences pré-requises sont cohérentes avec l'activité
- Cette activité contribue à l'avancement des apprentissages prévus dans la progression pédagogique
- Leur réflexion lors de l'activité les introduit à la notion suivante dans ma progression

Le contenu mathématique est valide et utilisable dans la classe pour travailler les notions et compétences annoncées

- Les mathématiques sont valides
- Le thème, les notions et les compétences indiqués sont conformes au programme pour le niveau annoncé
- Les activités mathématiques proposées sont en adéquation avec le thème, les notions et les compétences annoncés

La ressource est facile à prendre en main et adaptable

- La quantité d'information est satisfaisante
- La présentation de l'information est claire
- On peut modifier les éléments de la ressource pour l'adapter à ses besoins.

Commentaires:

CONSTRUCTION D'UNE RESSOURCE POUR L'ENSEIGNANT : UN ALGORITHME DE SOMME DE DEUX RATIONNELS EN ECRITURE DECIMALE

Laurent VIVIER*

Résumé – La recherche mathématique, en produisant de nouveaux savoirs, est une source d'inspiration pour la constitution de ressources pour l'enseignement. Ce point est illustré par la genèse mathématique d'un algorithme de somme de deux rationnels en écriture décimale. Cette nouvelle ressource a fait l'objet d'une situation proposée en formation initiale de professeurs de mathématiques du second degré en France. L'objectif de cette situation, par son potentiel adidactique, est une construction par les étudiants d'un tel algorithme, sans apport mathématique. Les analyses de l'expérimentation menée en formation d'enseignants montrent que l'objectif est globalement atteint.

Mots-clefs : nombre rationnel, algorithme, professeur du second degré, formation initiale

Abstract – The mathematical research, producing new knowledge, is a source of inspiration for the constitution of teaching resources. This point is illustrated by the mathematical genesis of an algorithm for the sum of two rational written in decimal expansion. This new resource was the subject of a situation proposed for pre-service secondary math professors in France. The objective of this situation, by its adidactic potential, is a construction by the students of such an algorithm, without any mathematical addition. The experimentation analyses show that the objective is globally reached.

Keywords: rational number, algorithm, secondary teacher, pre-service training

I. INTRODUCTION

La somme de deux nombres rationnels est définie classiquement par les fractions – cette définition apparaît dès le début du collège en France (grade 6). Mais il est également bien connu que, grâce à l'interprétation d'une fraction comme une division, tout nombre rationnel peut s'écrire à l'aide d'un développement décimal illimité périodique dont le nombre 1/3 joue le rôle de paradigme. Se pose alors la question de savoir effectuer la somme de deux rationnels en écriture décimale. On peut évidemment convertir les nombres dans le registre fractionnaire pour faire la somme puis, éventuellement, reconvertir le résultat obtenu en décimal. Mais cela bloque le développement des praxis (Chevallard 1999) interne à un registre de représentation (Duval 1995) comme cela est développé dans (Nikolantonakis et Vivier 2010) au sujet des opérations sur les entiers naturels en base quelconque pour des étudiants-professeurs du premier degré.

Parallèlement à ce constat, une recherche sur le codage de nombres en base exotique (Rittaud et Vivier 2011a) a mis en lumière un algorithme simple pour faire les sommes de séries périodiques. La transposition de cet algorithme en base de numération usuelle[1] (Rittaud et Vivier 2011c) permet alors de combler le problème praxéologique relatif au registre décimal des nombres rationnels mentionné ci-dessus. Cet algorithme vu comme une ressource pour l'enseignant est le thème de ce texte (l'algorithme est détaillé en annexe).

L'expérimentation proposée vise à faire construire un algorithme de somme de deux rationnels en écriture décimale par des étudiants, de futurs enseignants en formation initiale inscrits au Master[2] 2 *Métiers des Mathématiques et de l'Enseignement* de l'université de

* LDAR, université Paris Diderot – France – laurent.vivier@paris7.jussieu.fr

[1] L'article propose plus largement une construction de **Q** par les développements décimaux illimités périodiques avec des algorithmes pour les quatre opérations de base.

[2] Il s'agit d'un diplôme délivré après 5 ans d'études universitaires.

© VIVIER L. (2012) Construction d'une ressource pour l'enseignant : un algorithme de somme de deux rationnels en écriture décimale. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT6, pp. 919–932). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

Tours. Le déroulement expérimental est classique et s'appuie sur la Théorie des Situations Didactiques (TSD) de Brousseau (1998) : un travail individuel (dévolution) suivi de travaux de groupes (action, formulation, validation) et des présentations de ces travaux en classe entière.

En section II, nous exposons rapidement la genèse de la ressource mathématique, de la recherche mathématique fondamentale à sa transposition dans le cadre des mathématiques scolaires (c'est-à-dire les mathématiques de l'enseignement secondaire). Puis, en section III, nous exposons l'expérimentation menée en formation initiale de professeurs du second degré. Enfin, en dernière section, nous menons une discussion sur la ressource construite, son intérêt et ses possibles utilisations.

II. CONSTITUTION MATHEMATIQUE DE LA RESSOURCE

1. Présentation générale de la recherche mathématique

La recherche mathématique sur laquelle cette communication s'appuie est le fruit d'un travail de recherche en collaboration avec Benoît Rittaud (Rittaud et Vivier 2011a). Nous y étudions un ensemble de nombres, appelés nombres F-adiques, dont la construction est principalement sémiotique. Il s'agit d'une extension du codage des nombres entiers dans le système de numération de Zeckendorf (1972) qui s'appuie sur la suite de Fibonacci. Le principe est à peu près le même que lorsque l'on considère des séquences infinies de chiffres dans le système décimal usuel. Plus précisément, les nombres F-adiques sont obtenus en considérant une série infinie de 0 et de 1 sans jamais avoir deux 1 consécutifs[3]. L'ensemble obtenu possède une structure de groupe topologique abélien totalement ordonné. Une étude complète a été menée sur les séries périodiques, i.e. périodiques à partir d'un certain rang (Rittaud et Vivier 2011a). Comme on peut s'y attendre, et comme en base usuelle, ces éléments périodiques s'identifient avec les fractions d'entiers[4]. Nous nous focalisons ici uniquement sur la somme. Dans nos recherches, un algorithme simple de somme de deux rationnels dans l'ensemble des nombres F-adiques a été trouvé ce qui a constitué une clé essentielle.

L'idée a alors été de voir si cet algorithme de somme pouvait être transposé pour les rationnels en écriture décimale (ou dans une autre base). La réponse est positive et est surprenante de simplicité. Par la suite, les analogies entre la base dix et la base de Fibonacci ont été très fructueuses (cf. Rittaud et Vivier 2011b). Nous référons en outre à (Rittaud et Vivier 2011c) pour les résultats en base de numération usuelle – en particulier, nous proposons une construction innovante de **Q** à partir des écritures décimales périodiques.

2. Le point de vue des approximations

Pour effectuer une somme, que ce soit en base de numération usuelle ou en base de Fibonacci, on peut toujours s'en sortir en considérant des sommes successives et en utilisant un argument de type valeur approchée. Prenons un exemple en base usuelle. Pour effectuer la somme $0,\overline{72}+0,\overline{33}$ on trouve en prenant de plus en plus de périodes :

Nombre de périodes	1	2	3	4
Résultats partiels	1,05	1,0605	1,060605	1,06060605

Tableau 1 *– Sommes par approximations successives*

[3] Cette condition provient directement de la relation de récurrence $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$ de la suite de Fibonacci.
[4] Toutefois, certaines propriétés sont surprenantes, comme le fait qu'une équation $D\times x=N$ possède dans l'ensemble des F-adiques exactement D solutions distinctes – N et D sont deux entiers avec $D\neq 0$.

ce qui permet d'inférer la solution qui est $\mathbf{1,\overline{06}}$.

Le problème est que cette procédure de nature topologique repose sur une perception visuelle des valeurs approchées successives trouvées, donc peu algorithmisable à moins de connaître a priori la taille des périodes et le début des périodes – mais cela n'est pas simple à démontrer à partir de cette procédure de somme. En outre, cette procédure s'appuie sur le fait que la somme de deux nombres ayant une période est un nombre ayant une période ainsi que sur la continuité de la somme.

Nous avons débuté nos recherches sur les nombres *F*-adiques avec ce point de vue par approximation pour effectuer les sommes. Mais la gestion des retenues est bien plus délicate dans l'ensemble des *F*-adiques qu'en base de numération usuelle. En fait, pour faire le lien entre les périodiques et les fractions dans le cadre des nombres *F*-adiques, la situation est inextricable si l'on se contente de cette procédure topologique par approximations pour effectuer les sommes. Une idée neuve est nécessaire et l'algorithme que nous présentons ici provient de ce problème plus difficile : au lieu de considérer le nombre dans sa totalité, il suffit de considérer une unique période et de compter les éventuelles retenues provenant de cette période sur elle-même. L'explication est simple puisque les retenues sont les mêmes pour toutes les périodes, on simule ainsi l'action des autres périodes sur celle que l'on considère plus particulièrement.

3. *L'algorithme de somme en base dix*

L'algorithme se transpose sans aucun problème à la base dix et à l'identique. Voyons quelques exemples qui permettent de faire ressortir les trois éléments essentiels de l'algorithme : faire débuter la période au même rang, avoir des périodes de même taille, gérer l'éventuelle retenue à gauche (l'usage du singulier est notable, la gestion des retenues est bien plus facile qu'en *F*-adique (Rittaud et Vivier 2011b).

1. Le premier exemple (figure 1a) est celui où il n'y a aucune adaptation par rapport à l'algorithme de somme de deux décimaux en écriture décimale : $34{,}0\overline{45} + 2{,}5\overline{27} = 36{,}5\overline{72}$
2. L'exemple (figure 1b) de la somme $5{,}7\overline{248} + 8,\overline{307} = 5{,}7\overline{248} + 8{,}3\overline{073} = 14{,}0\overline{321}$ montre comment procéder lorsque les périodes ne commencent pas au même rang (il faut *décaler* la période tout en permutant ses chiffres).
3. L'exemple (figure 1c) de la somme $0,\overline{34} + 7,\overline{202} = 0,\overline{343434} + 7,\overline{202202} = 7,\overline{545636}$ montre comment procéder lorsque les périodes n'ont pas la même taille (il suffit d'utiliser le PPCM des tailles).
4. Le dernier exemple (figure 1d) concerne le problème de la gestion de la retenue qui *sort de la période*. Nous marquons en gras les retenues qu'il faut compter deux fois : au premier chiffre de la période et au premier chiffre à gauche de la période (le 0 trouvé en premier est donc barré et remplacé par un 1). On trouve : $3,\overline{24} + 4,\overline{96} = 8,\overline{21}$.

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & & 1 & \\
 & 3 & 4, & 0 & \overline{4} & \overline{5} \\
+ & & 2, & 5 & \overline{2} & \overline{7} \\
\hline
 & 3 & 6, & 5 & \overline{7} & \overline{2}
\end{array}$$

Figure 1a

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & 1 & \\
 & & 5, & 7 & \overline{2} & \overline{4} & \overline{8} \\
+ & & 8, & 3 & \overline{0} & \overline{7} & \overline{3} \\
\hline
 & 1 & 4, & 0 & \overline{3} & \overline{2} & \overline{1}
\end{array}$$

Figure 1b

$$\begin{array}{cccccccc}
 & 0, & \overline{3} & \overline{4} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{3} & \overline{4} \\
+ & 7, & \overline{2} & \overline{0} & \overline{2} & \overline{2} & \overline{0} & \overline{2} \\
\hline
 & 7, & \overline{5} & \overline{4} & \overline{5} & \overline{6} & \overline{3} & \overline{6}
\end{array}$$

Figure 1c

$$\begin{array}{cccc}
 & \mathbf{1} & 1 & \\
 & 3, & \overline{2} & \overline{4} \\
+ & 4, & \overline{9} & \overline{6} \\
\hline
 & 8, & \overline{2} & \overline{\cancel{0}1}
\end{array}$$

Figure 1d

Bien que les trois cas puissent se présenter simultanément dans un même calcul, la simplicité de cet algorithme est notable. Une majorité d'élèves de seconde (grade 10), sur les 113 de l'étude expérimentale, utilise sans difficulté l'algorithme bien que sa compréhension soit moins évidente[5]. On peut se demander pourquoi un algorithme aussi simple n'a pas été découvert avant nos très récentes recherches – ou, s'il l'a été, pourquoi n'est-il ni utilisé ni diffusé. Nous pensons qu'une des raisons tient dans les possibilités techniques : en base de numération usuelle, il est toujours possible d'écrire les nombres rationnels dans le registre fractionnaire pour faire les opérations voulues. Or, cela n'est pas possible avec les nombres *F*-adiques puisqu'il y a plusieurs solutions aux équations $D\times x=N$. En outre, l'identification des périodiques avec les rationnels est bien plus délicate et a demandé une idée nouvelle qui s'est révélée très fructueuse.

III. CONSTRUCTION DE L'ALGORITHME PAR DES ELEVES PROFESSEURS

1. Présentation de la situation

La situation initialement prévue se décompose en trois phases :

1. une première activité individuelle d'une dizaine de minutes où les élèves professeurs doivent déterminer trois sommes de rationnels en écriture décimale (la convention d'écriture des périodes est rappelée) :

$$0,\overline{5}+0,\overline{7} \qquad 0,\overline{34}+0,\overline{51} \qquad 0,\overline{72}+0,\overline{3}$$

2. un travail de groupe de une à deux heures avec la consigne suivante : « trouver une manière générale pour faire ce type de somme et rédiger votre stratégie » ;
3. une présentation des résultats des groupes en classe entière suivie de débat pour une quinzaine de minutes environ par groupe.

La situation est fortement inspirée par la TSD (Brousseau 1998) : la première activité joue le rôle de dévolution et le travail de groupe en autonomie totale (pas d'échange entre groupe, aucun indice mathématique donné par l'enseignant) donne une dimension adidactique dans les trois phases d'action, de validation et de formalisation. L'objectif principal de cette séance était de donner une alternative à l'enseignement traditionnellement plus frontal au secondaire en s'appuyant sur une situation ayant un potentiel adidactique. Pour cela, les étudiants-professeurs étaient en situation d'homologie (Kuzniak 2003).

Des feuilles de format A3 sont distribuées aux groupes pour la rédaction, la calculatrice est autorisée (elle sera très peu utilisée) et une durée totale de trois heures est prévue.

2. Analyse a priori

La phase 1 n'a d'importance que pour la dévolution. Toutefois, on s'attend aux procédures suivantes :

- conversion dans le registre fractionnaire pour effectuer la somme (les étudiants ont vraisemblablement déjà rencontré cette conversion) avec éventuellement une reconversion dans le registre décimal à l'aide d'une division ;

[5] Voir (Vivier 2011). En outre, les problèmes de compréhension semblent disparaître en première année de mathématiques à l'université (14 étudiants interrogés). Il est également à noter que l'algorithme pratique présenté aux figures 1a à 1d est une adaptation de la présentation pratique initiale en fonction de ce que les élèves et les étudiants ont produit (ibid.).

- calcul correct à l'aide de valeurs approchées successives (cf. tableau 1) en utilisant implicitement la continuité de la somme et le fait que la somme de deux périodiques est périodique ;
- calculs à l'aide de valeurs approchées successives, sans aboutir à un résultat ou en donnant ce que Margolinas (1988) nomme une réponse *infinitésimale* (comme par exemple la somme $0,\overline{5}+0,\overline{7}=1,\overline{3}2$ effectuée par une étudiante, nommée H ; voir aussi la figure 2).

Les dernières procédures sont vraisemblables, même à ce niveau (M2 enseignement des mathématiques) puisque les étudiants n'ont pas, ou très peu, travaillé avec ce type d'objets mathématiques et que le problème des retenues apparaît aux sommes 1 et 3. Les autres procédures qui consistent à ajouter séparément les parties entières et les périodes ne sont pas retenues pour la population étudiée vu le niveau d'étude mathématique – ce type de réponses est donné par des élèves de seconde en France (Vivier 2011).

Les échanges à l'intérieur d'un groupe lors de la phase 2 doit permettre d'éliminer les réponses erronées. La consigne, en demandant une manière générale pour effectuer une somme en écriture décimale, demande de fait de formuler un algorithme et incite à donner le résultat final dans le registre décimal. Plusieurs choix sont alors possibles parmi les procédures exposées ci-dessus. En outre, la nécessité de rédiger un algorithme en vue d'une communication incite à formuler clairement et à valider les procédures envisagées. Les fractions peuvent constituer un élément de validation important et nous serons attentifs, dans les analyses a posteriori, au statut des fractions.

Dans cette phase 2, il est prévu que les trois éléments essentiels d'un algorithme de somme (cf. section II.3) apparaissent, mais globalement pour l'ensemble des groupes (bien qu'espéré, il n'est pas attendu qu'un groupe trouve un algorithme). L'identification des trois problèmes provient de la phase d'action pourvu que les sommes testées soient suffisamment variées (les sommes proposées en phase 1 ne permettent pas de voir tous les problèmes). Or, les travaux d'un groupe peuvent reposer sur des implicites comme par exemple des périodes qui débutent juste après la virgule (sous une éventuelle influence des sommes proposées en phase 1). Vu le niveau mathématique des étudiants, il est attendu que les problèmes identifiés soient résolus sauf éventuellement la gestion de la retenue qui est plus délicate.

L'algorithme général de somme de deux rationnels en écriture décimale est l'objectif majeur de la phase 3 où il est prévu que, chaque groupe présente son travail. Ainsi, il est attendu que les éléments incontournables de l'algorithme apparus en phase 2 dans les groupes soient mutualisés pour ensuite construire, ensemble et guidé éventuellement par l'enseignant, un algorithme général.

3. *Constitution des groupes : analyse de la phase de dévolution*

À l'issue de la phase individuelle, quatre groupes de trois étudiants sont formés. Les douze étudiants sont nommés à l'aide d'une lettre (A à L) et les groupes par les trois lettres désignant les étudiants (ABC, DEF, GHI et JKL). Les groupes ont été constitués dans un souci de mixité spatiale : lors de la phase individuelle, deux étudiants voisins ont pu s'influencer, aussi chaque groupe est constitué par 3 élèves-professeurs dont aucun n'était voisin des deux autres. De ce fait, les groupes ne sont pas équivalents dans leur constitution comme on peut le constater avec le tableau 2.

	Conversion et traitement dans le registre des fractions AVEC ou SANS reconversion dans le registre décimal	Calcul(s) avec un nombre FINI ou INDÉFINI de périodes	OK : a) et b) corrects et c) correct ou sans réponse NR : aucune réponse (a et b) INF : réponse infinitésimale
A		INDÉFINI	INF
B			autres problèmes
C	AVEC		OK
D		FINI	OK
E	AVEC		OK
F		INDÉFINI	OK
G	AVEC		OK
H			INF
I			OK
J		FINIS	NR
K	SANS		OK
L		FINIS	NR

Tableau 2 *– Constitution des groupes*

Dans chaque groupe se trouve un étudiant qui a utilisé une conversion dans le registre fractionnaire pour effectuer la somme (SANS reconversion pour le groupe JKL et AVEC reconversion pour les trois autres groupes) et dans chaque groupe se trouve au moins un étudiant qui a trouvé les bonnes sommes (codage OK). Toutefois, les groupes ABC et JKL semblent plus faibles que les deux autres puisqu'un seul étudiant donne les bonnes sommes (codage OK). Pour le groupe JKL, les étudiants J et L ne donnent pas de réponse (codage NR) et pour le groupe ABC, A donne une réponse infinitésimale (cf. figure 2) et B montre des problèmes de gestion de la retenue qui n'est pas comptabilisée à la partie entière et avec une inversion des chiffres de la période (cf. figures 3a et 3b).

$$0,\bar{5} + 0,\bar{7} = 0,555\ldots5 + 0,77\ldots7$$
$$= 1,3\ldots..332$$

Figure 2 *– Réponse infinitésimale à la somme a) (reproduction de la production de A)*

$$0,\bar{5} + 0,\bar{7} = 0,\bar{3} \qquad 0,\overline{72} + 0,\bar{3} = 0,\overline{60}$$

Figures 3a et 3b *– Problèmes de retenue et d'inversion de chiffres (reproductions des productions de B)*

En outre, le groupe DEF semble d'un meilleur niveau mathématique sur le sujet que les autres. En particulier, c'est dans ce groupe que se trouvent les deux étudiants D et F qui effectuent les sommes correctement par des approximations (cf. figures 4a et 4b). Ces deux étudiants possèdent des technologies (au sens de (Chevallard 1999)) sur la somme de deux nombres périodiques. Si on peut penser que la continuité de la somme est implicite, il semble clair (surtout pour F qui met entre parenthèse le chiffre résiduel 2) que ces étudiants savent que la somme de deux périodiques est un nombre périodique.

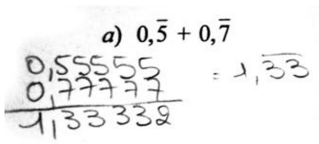


Figure 4a *– Somme a) par approximation (production de D)*

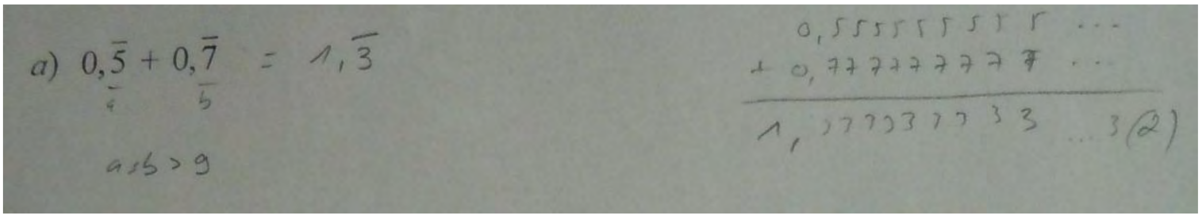


Figure 4b *– Somme a) par approximation (production de F)*

Les étudiants se sont mis au travail sans aucun problème dans cette phase individuelle qui a parfaitement joué son rôle de dévolution puisque l'investissement et l'intérêt n'ont pas faibli dans la phase 2.

4. Analyse des productions collectives

Comme prévu, le travail de groupes a permis d'éliminer rapidement toutes les erreurs apparues individuellement et les productions sont, globalement, toutes correctes. Il a fallu insister pour que les groupes se mettent à écrire. Il semble que les étudiants avaient beaucoup de mal à commencer une rédaction sur un sujet qui était en cours de constitution : sans doute voulaient-ils écrire uniquement un texte sûr du point de vue du savoir mathématique en jeu. La rédaction s'est donc fortement accompagnée de justifications mathématiques : les phases de formulation et de validation ont largement été menées en parallèle.

	début période	taille période	retenue	fractions	décomposition des nombres
ABC		PPCM	report sur un exemple	conversion	
DEF	totalement traité	PPCM	problème identifié	conversion (validation)	entier + partie décimale + partie *périodique*
GHI	partiel : rangs égaux	PPCM		conversion	décimal + partie *périodique*
JKL				conversion	décimal + partie *périodique*

Tableau 3 *– Productions des groupes*

Le groupe JKL décompose chacun des deux nombres à sommer en somme d'un décimal et d'un nombre de la forme $0,0\ldots0\overline{\pi}$ où π est une période. Puis les étudiants de ce groupe identifient le problème qui consiste en la somme des deux parties *périodiques*. Pour effectuer cette somme, ils proposent de les convertir en fraction (par une technique proche de la mise en équation) puis de reconvertir en écriture décimale la somme déterminée sous forme de fraction.

Le groupe ABC a une production proche du groupe JKL à deux différences près : la conversion écriture décimale → écriture fractionnaire est effectuée sur la *totalité* du nombre et non pas seulement sur la partie *périodique* $0,0\ldots0\overline{\pi}$; le groupe ABC identifie la taille de la période de la somme comme étant le PPCM des tailles des périodes des deux nombres à sommer (on ne voit pas comment ils ont trouvé ce résultat, peut-être de manière empirique). L'étudiante B, en fin de phase 2, a fait une remarque essentielle que le groupe n'a malheureusement pas pu exploiter faute de temps. La remarque concerne le report de la retenue (cf. figure 5) : lorsque l'on prend deux nombres de la forme $0,\overline{\pi}$ et que leur somme dépasse 1 (ce qui correspond à un cas particulier de la somme de deux périodes de taille l lorsque celle-ci est supérieure ou égale à 10^l ; cf. aussi la première somme de la phase 1) alors la somme s'obtient comme si on sommait deux décimaux (avec une éventuelle mise au format de la taille des périodes en prenant le PPCM des tailles) et ensuite en ajoutant 1 à la période obtenue. Cette remarque fait que ce groupe est très proche d'un algorithme général car ils ont de fait un algorithme pour faire une somme du type $0,\overline{\pi} + 0,\overline{\pi'}$: 1) écrire les nombres avec des périodes de même taille en utilisant le PPCM ; 2) faire la somme comme s'il s'agissait de deux nombres décimaux ; 3) ajouter 1 à la période si la somme dépasse 1. Cet algorithme s'étend rapidement et simplement à la somme de deux rationnels pourvu que les périodes débutent au même rang (le groupe n'a pas identifié ce problème). Ils n'ont pas trouvé de justification à cette remarque.

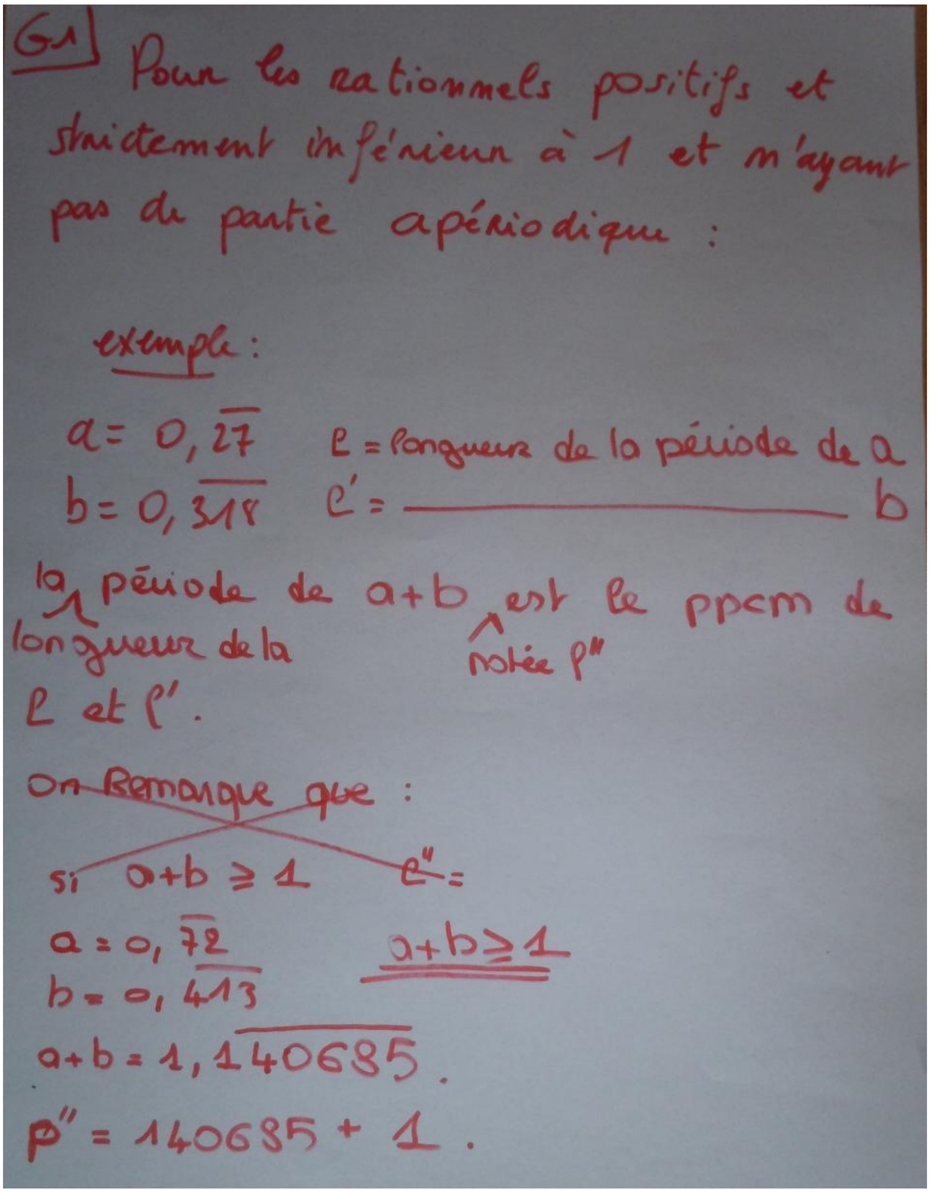


Figure 5 *– La remarque du groupe ABC sur les retenues*

Le groupe GHI, comme le groupe JKL, décompose un nombre en somme d'un décimal et d'une partie *périodique* (il y a un problème de notation car on ne sait pas combien de 0 il faut écrire, cf. figure 6). Les étudiants de ce groupe identifient le rôle joué par le PPCM des tailles des périodes et écrivent les parties *périodiques* pour qu'elles aient la même taille puis convertissent ces parties *périodiques* sous forme de fraction pour effectuer la somme. L'algorithme n'est présenté que pour deux nombres dont les périodes commencent juste après la virgule. L'exemple traité montre qu'ils envisagent de reconvertir les nombres dans le système décimal. Le problème du début des périodes est partiellement identifié car, implicitement, ils considèrent que le rang de début de période est le même pour les deux nombres. Ils résolvent alors le problème en se ramenant au cas précédent en multipliant les deux nombres par une même puissance de 10.

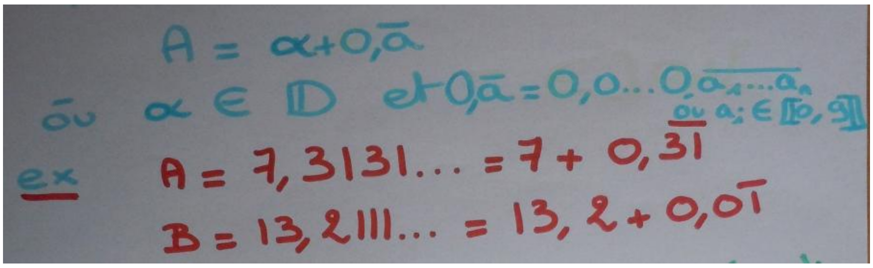
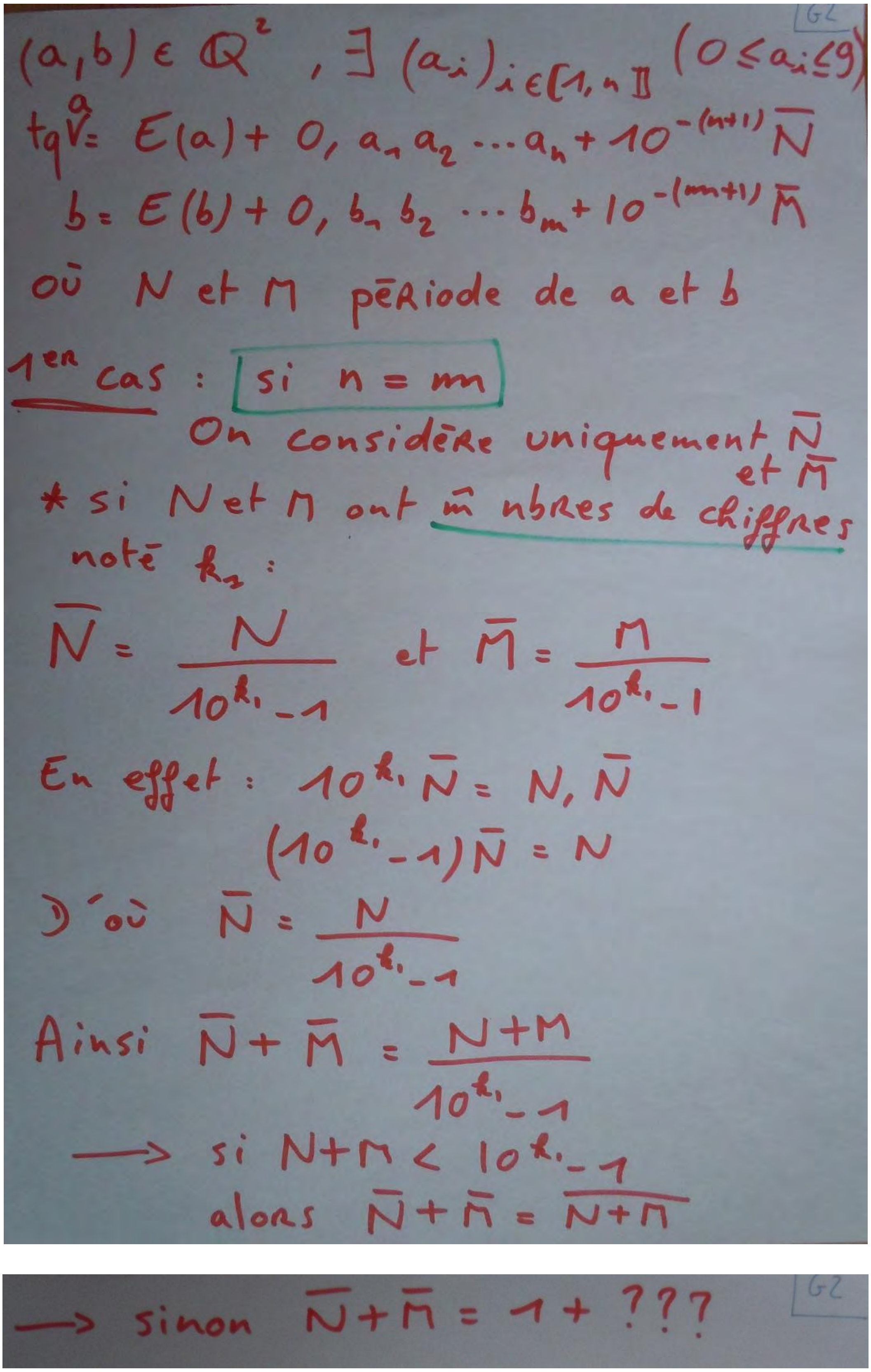


***Figure 6** – Imprécision dans la décomposition (production de GHI)*

Le groupe DEF décompose également les nombres mais en trois parties : la partie entière, une partie décimale non périodique et une partie *périodique*. Les étudiants de ce groupe ont identifié le problème de la taille des périodes et, même s'ils ne le disent pas explicitement, ils résolvent le problème à l'aide du PPCM (sur un exemple avec les tailles 3 et 2). Le cas de deux nombres dont les périodes ne débutent pas au même rang est parfaitement traité et ils écrivent : « on complète avec les chiffres de la période (en respectant la périodicité restante) ». Ces deux traitements, pour la taille et le rang de début des périodes, sont envisagés successivement pour compléter leur première approche relative au cas où les deux nombres ont des périodes de taille identique et qui débutent au même rang. Cela leur permet d'identifier, sans le résoudre, le problème de la retenue. Ce groupe a une position plus avancée que les autres dans le sens où il n'y a pas de focalisation sur un calcul dans le registre des fractions. S'il y a bien une conversion dans le registre fractionnaire, l'objectif est principalement d'identifier la nouvelle période. Plus précisément, ces trois étudiants considèrent les périodes comme des objets que l'on peut sommer (figure 7). Les fractions servent à définir cette somme, mais l'idée est bien d'obtenir une somme de deux périodes de même taille (cf. le groupe des périodes, Rittaud et Vivier 2011c). Ils identifient le problème de la retenue mais, bien que la solution soit proche, il n'est pas résolu. Notons toutefois que la notation $\overline{N}$ est sans doute le signe d'une confusion entre la période qui est une suite finie de chiffres que l'on peut coder[6] par un entier N et le nombre $0,\overline{N}$.

---

[6] Il faut toutefois faire attention, car les périodes 032 et 32 ne sont pas identiques (à ce sujet, cf. Rittaud et Vivier 2011c).



G2

$(a,b) \in \mathbb{Q}^2$, $\exists (a_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ $(0 \le a_i \le 9)$

tq $a = E(a) + 0,a_1 a_2 \dots a_n + 10^{-(n+1)} \overline{N}$

$b = E(b) + 0,b_1 b_2 \dots b_m + 10^{-(m+1)} \overline{M}$

où N et M période de a et b

1er cas : $\boxed{\text{si } n = m}$

On considère uniquement $\overline{N}$ et $\overline{M}$

* si N et M ont m̃ nbres de chiffres noté k_1 :

$\overline{N} = \dfrac{N}{10^{k_1}-1}$ et $\overline{M} = \dfrac{M}{10^{k_1}-1}$

En effet : $10^{k_1} \overline{N} = N, \overline{N}$

$(10^{k_1}-1)\overline{N} = N$

D'où $\overline{N} = \dfrac{N}{10^{k_1}-1}$

Ainsi $\overline{N} + \overline{M} = \dfrac{N+M}{10^{k_1}-1}$

$\longrightarrow$ si $N+M < 10^{k_1}-1$ alors $\overline{N} + \overline{M} = \overline{N+M}$

G2

$\longrightarrow$ sinon $\overline{N} + \overline{M} = 1 + ???$

Figure 7 *– Somme des périodes (production du groupe DEF)*

5. *Production de la ressource visée*

Les présentations en classe entière n'ont pas produit l'effet escompté. Les interactions entre groupes ont été peu nombreuses. On peut penser que les étudiants étaient un peu fatigués après presque deux heures de travail intense pour procéder à une synthèse qui s'avère être plus difficile que prévue (plusieurs éléments à prendre en compte, homogénéiser les points de vue etc.). De plus, le temps manquait car la situation proposée s'insérait dans un dispositif de formation de 3h et il fallait conserver au moins 15 minutes à la fin pour procéder à un bilan[7] de la séance (en outre, une durée non négligeable avait été consacrée en début de séance à régler des problèmes d'emploi du temps).

Les productions des quatre groupes ont finalement été numérisées puis envoyées aux étudiants avec pour consigne de s'en inspirer pour produire un algorithme de somme pour la semaine suivante. C'est l'étudiante[8] H qui présente son travail de synthèse à l'ensemble de la classe. Voici son algorithme :

1. Multiplier les deux nombres par 10^N pour faire débuter les périodes directement après la virgule (N est le maximum des rangs de début de période des deux nombres). Les chiffres des périodes des deux nombres subissent éventuellement une permutation, mais les tailles sont inchangées.

2. On utilise le PPCM des tailles des périodes pour avoir deux nombres avec des périodes de même taille.

3. La somme est écrite sous forme fractionnaire avec notamment la somme des deux périodes au numérateur et $10^{ppcm}-1$ au dénominateur.

Le formateur procède alors à quelques précisions, ajustements et simplifications notamment pour, à partir de cette formule :

- montrer que la multiplication par 10^N pour ensuite faire une multiplication par 10^{-N} peut être directement effectuée sur l'écriture décimale ;
- montrer comment gérer la retenue pour aboutir à un algorithme de somme en écriture décimale.

Cela suscite deux réflexions : d'une part, et comme on pouvait s'y attendre, la gestion de la retenue n'est pas triviale et d'autre part les fractions constituent un registre qui a tendance à supplanter le registre de l'écriture décimale dès que l'on traite des nombres rationnels.

IV. DISCUSSION

Au vu des analyses précédentes, et malgré le léger problème de temps, l'objectif est atteint : il est possible de faire construire un algorithme de somme de deux rationnels en écriture décimale par des étudiants-professeurs. La recherche mathématique a donc permis l'élaboration d'une ressource, ici un algorithme, qui peut être reconstruite par l'activité proposée. Cette reconstruction se distingue cependant de la situation vécue par le chercheur en mathématiques puisque les étudiants savent que le savoir existe – il est détenu en particulier par le formateur. Tournons-nous maintenant vers une question qui émerge naturellement : cette ressource est-elle intéressante pour des enseignants du second degré ? Nous avançons plusieurs arguments.

[7] Il s'agissait de montrer la productivité et la dialectique des situations adidactiques d'action, de formulation et de validation.
[8] Il s'agit d'une étudiante sérieuse et d'un bon niveau mathématique.

Cet algorithme pourrait évidemment constituer une ressource pour la partie « algorithmique » des nouveaux programmes du lycée en France. D'ailleurs, l'écriture d'un programme informatique pour cet algorithme est intéressante en soi. Par exemple, la question du stockage informatique d'un nombre rationnel en écriture décimale n'est pas aussi simple que ce que l'on pourrait penser. Les productions des groupes, notamment leurs décompositions, montrent souvent des implicites qui seraient problématiques au cours d'une implémentation informatique. Dans la perspective des nouveaux programmes du lycée, il est envisagé de proposer en formation continue d'enseignants du second degré l'écriture d'un programme informatique pour l'algorithme de somme présenté dans ce texte. Il est par ailleurs prévu de proposer le téléchargement en ligne des algorithmes et programmes pour les opérations sur les rationnels en écriture décimale.

Une fois l'algorithme programmé, l'utilisation de cette nouvelle ressource informatique peut alors être envisagée. On peut penser par exemple à l'expérimentation en formation d'enseignants du premier degré de Weller, Arnon et Dubinsky (2009) où faute de connaître un algorithme de somme de deux rationnels en écriture décimale, ils utilisent un programme informatique qui procède par une double conversion en utilisant le registre des fractions pour effectuer la somme. Même si cette double conversion est totalement masquée aux enseignants en formation, elle constitue une entorse à l'éthique des mathématiques. On disposerait alors d'une ressource pour la formation d'enseignants conforme à l'éthique.

Mais, l'intérêt est, à notre avis, ailleurs. D'une part l'algorithme de somme permet de définir par des sommes réitérées la multiplication d'un rationnel en écriture décimale et de justifier les opérations qui sont utilisées dans la conversion du registre décimal dans le registre fractionnaire. Souvent, les enseignants sont mal à l'aise avec la technique qui consiste à poser, par exemple, a=0,999… pour ensuite, par une multiplication par 10 et une soustraction, aboutir à a=1. Ils sont mal à l'aise car ils ont conscience du fait qu'il y a un vide mathématique et que les opérations utilisées, si simples soient-elles, manquent d'appui. Un algorithme tel celui présenté ici permet de constituer une ressource pour l'enseignant dans le but de soutenir mathématiquement son activité d'enseignant – sans forcément que cela soit visible pour l'élève.

D'autre part, définir une somme sur les rationnels en écriture décimale permet de rentrer pleinement dans des questions sur les développements décimaux, et donc les nombres réels, avec notamment la question cruciale de l'égalité entre 0,999… et 1. De fait, et contrairement à l'opinion commune, cette égalité relève uniquement du cadre des nombres rationnels. En effet, pour tout nombre rationnel a qui a une période non nulle – i.e. a n'est pas un décimal – l'algorithme donne 0,999…+a=1+a (Richman 1999, Rittaud et Vivier 2011c) ce qui montre la nécessité d'identifier les deux représentations, propre et impropre, des décimaux. Car sans cette identification, les développements décimaux illimités ne seraient pas des nombres puisque l'on ne pourrait effectuer les opérations avec les propriétés de bases (cf. les systèmes de nombres de Chevallard (1989)). On pourrait alors reprendre l'expérimentation de Weller et al. (2009) sans faire appel à un programme informatique puisque les calculs peuvent finalement être effectués *à la main*. Une expérimentation de ce type est actuellement en cours en première année d'université.

REFERENCES

Brousseau G. (1998) *Théorie des Situations Didactiques.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chevallard Y. (1989) Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège deuxième partie : Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x* 19, 43-72.

Chevallard Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19(2), 222-265.

Duval R. (1995) *Sémiosis et pensée humaine*. Berne : Peter Lang.

Kuzniak A. (2003) *Paradigmes et espaces de travail géométriques*. Habilitation à Diriger des Recherches, Université Paris 7.

Margolinas C. (1988) Une étude sur les difficultés d'enseignement des nombres réels. *Petit x* 16, 51-66.

Nikolantonakis K., Vivier L. (2010) Registres et praxis pour la numération de position en base quelconque – une étude statistique en France et en Grèce. In Régnier J.-C., Spagnolo F., Di Paola B., Gras R. (Eds.) *Analyse statistique implicative - objet de recherche et de formation en analyse de données, outil pour la recherche multidisciplinaire*. *Actes du 5e colloque A.S.I.*, Palermo 2010.

Richman F. (1999) Is .999. . .= 1? *Mathematics Magazine* 72(5), 396-400.

Rittaud B., Vivier L. (2011a) Circular words, F-adic numbers and the sequence 1, 5, 16, 45, 121, 320,…. *Functiones et Approximatio Commentarii Mathematici* (à paraître).

Rittaud B., Vivier L. (2011b) Un point de rencontre entre recherche mathématique et recherche didactique. In Trouche L.et al. (Eds.) (pp. 85-92) *Faire ensemble des mathématiques : une approche dynamique de la qualité des ressources pour l'enseignement. Actes des Journées mathématiques IFÉ-ENS de Lyon* 15 et 16 juin 2011, Lyon : ENSL.

Rittaud B., Vivier L. (2011c) The fields **Q** from the standpoint of circular words – en préparation, une version simplifiée en français est disponible sur Internet : http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/59/34/13/PDF/Rittaud-Vivier-DDIP.pdf

Vivier L. (2011) El registro semiótico de los Desarrollos Decimales Ilimitados. *El cálculo y su enseñanza* (à paraître).

Weller K., Arnon I., Dubinsky E. (2009) Preservice teachers' understanding of the relation between a fraction or integer and its decimal expansion. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education* 9(1), 5-28.

Zeckendorf E. (1972) Représentation des nombres naturels par une somme des nombres de Fibonacci ou de nombres de Lucas. *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège* 41, 179-182.

ANNEXE : L'ALGORITHME

Nous proposons dans cette annexe un algorithme prêt à être implémenté dans un langage de programmation. Nous avons opté pour un stockage des nombres rationnels utilisant des chaînes de caractères (en lettres grecques) car cela permet de prendre en compte tous les zéros de manière relativement élémentaire. La somme des chaînes de caractères est la concaténation, $\pi[k]$ désigne le k-ième caractère de la chaîne de caractères π (les caractères sont comptés de gauche à droite) et taille(π) désigne le nombre de caractères que contient la chaîne π. D'autres options sont possibles comme par exemple à l'aide d'un décimal d et d'un entier p avec le rang de début de période et la taille de la période ou bien encore à l'aide de pointeurs[9].

1. Entrées[10] des chaînes de caractères ε, ε', δ, δ', π et π'.

[9] Les pointeurs ont l'avantage d'être seulement limité par les capacités de mémoire alors que les entiers et chaînes de caractères sont, eux, limités en nombre de chiffres et de caractères.

[10] Les chaînes ε et ε' codent les parties entières, δ et δ' les parties décimales non périodiques, π et π' les périodes. On se propose ainsi d'effectuer la somme $\varepsilon,\delta\overline{\pi} + \varepsilon',\delta'\overline{\square'}$. Les chaînes δ et δ' peuvent être vides contrairement

2. *Faire débuter les périodes au même rang (r' après le 2-b)) :*

a) r=taille(δ) ; r'=taille (δ').

b) Si $r>r'$, échanger les chaînes ε et ε', δ et δ', π et π' ainsi que r et r'.

c) t=taille(π).

d) Pour i allant de 1 à $r'–r$ faire :

i) s=π[1] ; δ=δ+s ; *(concaténation du premier chiffre de la période à la partie non périodique)*

ii) Pour k allant de 1 à t–1 faire π[k]=π[k+1] ; π[t]=s *(permutation des chiffres de la période).*

3. *Mettre les deux périodes à la même taille (m dans la suite) :*

a) t'=taille(π') ; m=PPCM(t,t').

b) θ=π ; Pour i allant de 2 à m/t faire π=π+θ.

c) θ=π' ; Pour i allant de 2 à m/t' faire π'=π'+θ.

(Concaténation de m/t périodes π et de m/t' périodes π' pour obtenir la taille commune m.)

4. *Calcul de la somme (avec prise en compte des retenues) :*

Si δ=∅ alors faire :

a) convertir les chaînes ε, ε', π et π' en nombre entier e, e', p et p'.

b) $e''=e+e'$; $p''=p+p'$;

c) si $p'' \geq 10^m$ alors faire : $p''=p''-10^m+1$; $e''=e''+1$;

d) convertir les nombres e'' et p'' en chaînes de caractères ε'' et π'' ; δ''=∅.

Sinon faire :

a) convertir les chaînes ε, ε', δ, δ', π et π' en nombre entier e, e', d, d', p et p'.

b) $e''=e+e'$; $d''=d+d'$; $p''=p+p'$;

c) si $p'' \geq 10^m$ alors faire : $p''=p''-10^m+1$; $d''=d''+1$;

d) si $d'' \geq 10^{r'}$ alors faire : $d''=d''-10^{r'}$; $e''=e''+1$;

e) convertir les nombres e'', d'' et p'' en chaînes de caractères ε'', δ'' et π''.

5. *Sortie* : afficher la somme : $\varepsilon,\delta\overline{\pi} + \varepsilon',\delta'\overline{\pi'} = \varepsilon'',\delta''\overline{\pi''}$.

aux autres (un décimal est codé avec une période de zéro, ou de neuf). En outre, dans l'algorithme, il peut être intéressant de placer des tests d'admissibilité lors des entrées.

EN QUOI LA CONCEPTION DE RESSOURCES POURRAIT-ELLE INTERVENIR DANS LA FORMATION DE FORMATEURS ?

Maha ABBOUD-BLANCHARD*

Résumé – Ce papier traite de la question de l'interaction entre les résultats des recherches en didactique et le développement professionnel des formateurs d'enseignants dans le domaine des TICE. Nous y présentons un dispositif de formation de formateurs basé sur un partenariat entre chercheurs et praticiens. Ce dispositif est propice à la conception de ressources relatives aux technologies. Nous étudions alors le rôle de la conception de ces ressources dans le développement professionnel des enseignants-formateurs.

Mots-clefs : Enseignants, formateurs, technologies, ressources, développement professionnel

Abstract – This paper addresses the question of the interaction between the results of research in mathematics education and the professional development of teacher educators in the field of ICT. We present a training program of teacher educators based on a partnership between researchers and practitioners. This program also aims at the design of resources for the use of technologies in mathematics teaching. We study the role of the design of such resources in the professional development of teacher educators.

Keywords: teachers, educators, technology, resources, professional development

I. INTRODUCTION

L'utilisation des technologies numériques dans l'enseignement des mathématiques au fil des dernières décennies a été accompagnée par une demande constante de formation des enseignants à cette utilisation. De son côté, la recherche dans ce domaine (voir par exemple la 17ème étude ICMI, Hoyles et Lagrange 2010) a fourni une quantité importante de résultats sur les potentialités et limites des outils technologiques pour l'enseignement des mathématiques et sur l'impact de l'utilisation de ces outils sur les apprentissages. Elle a également souligné la complexité de l'introduction de ces outils dans les pratiques des enseignants ainsi que certains facteurs déterminants relatifs à cette introduction (Abboud-Blanchard et al. 2012). Malgré ces résultats qui permettent aujourd'hui de mieux comprendre comment les technologies modifient les pratiques des enseignants et l'apprentissage des élèves, la formation des enseignants s'empare peu de ce corps de recherches et ne l'exploite que rarement (Abboud-Blanchard et Emprin 2009).

II. UNE APPROCHE DE LA FORMATION DE FORMATEURS AUX TICE

La recherche présentée ici traite de la question de l'interaction entre les résultats des recherches et le développement professionnel des formateurs d'enseignants dans le domaine des TICE (Technologies de l'Information et de la Communication pour l'Enseignement). Elle rejoint l'approche développée par Burkhardt et Schoenfeld (2003) qui plaident pour une meilleure coordination entre la recherche, les pratiques effectives et la formation. Nous nous basons également dans notre travail sur l'approche développée par Chappet-Paries et Robert (2011) qui stipule de « *partir des pratiques pour contribuer collectivement à former des pratiques* » (Op.cité). Enfin, nous rejoignant le courant, développé ces dernières années en didactique des mathématiques, qui étudie le rôle de la conception, la sélection et la gestion des ressources dans l'intégration des technologies dans les pratiques enseignantes (Gueudet et Trouche 2009).

* LDAR – Université Paris Diderot et UCP – France – maha.abboud-blanchard@univ-paris-diderot.fr

© Abboud-Blanchard Maha (2012). En quoi la conception de ressources pourrait-elle intervenir dans la formation de formateurs ? In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT6, pp. 933–935). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

Se situant dans ces perspectives, notre travail vise, d'une part, à concevoir une formation basée sur un partenariat entre chercheurs et praticiens et d'autre part, à explorer le rôle de la conception de ressources relatives aux technologies dans la formation des formateurs.

Dans le cadre d'un dispositif général de formation de formateurs, nous avons conçu et mis en place un environnement collaboratif de formation aux utilisations des technologies basé sur un double mouvement :

- À travers le premier (« bottom-up »), les enseignants, futurs formateurs, partagent leurs expériences, pratiques et visions relatives à l'intégration des TICE dans l'enseignement.
- Le deuxième (« top-down »), consiste à aider ces enseignants à accéder aux résultats des recherches relatifs à ce domaine et à s'emparer des questions qui y sont débattues tout en y portant un regard critique soutenu par leurs propres expériences.

Le but du travail ainsi entrepris est d'amener progressivement les participants à identifier, pour chaque outil technologique choisi, des éléments qu'ils jugent essentiels à être pris en compte par, et/ou aborder dans, la formation des enseignants aux TICE. Ces éléments sont de différentes natures : conditions matérielles et contraintes, caractéristiques des différents environnements de travail, apports et limites relativement aux apprentissages mathématiques, palette des tâches à proposer aux élèves, caractéristiques de l'activité de l'enseignant, formes des interactions en classe… Cette identification « prend forme » à travers la conception d'une ressource destinée à être utilisée en formation des enseignants. La ressource est basée sur une réelle activité mise en place dans la(les) classe(s) du(des) concepteur(s) de la ressource. Chaque ressource est présentée à, et discutée avec, l'ensemble des participants.

III. DES RESULTATS ET DES QUESTIONS

L'analyse des ressources conçues nous a permis, d'une part, de souligner leurs caractéristiques et leurs potentialités à être employées dans la formation des enseignants et, d'autre part, de relever ce qui, dans la formation de formateurs dispensée, a contribué au processus de conception. Dans le même temps, elle nous a permis d'observer des caractéristiques du développement professionnel des formateurs en les situant par rapport au format du travail de collaboration mis en place. Nous retenons par exemple qu'ils projettent désormais de faire analyser, dans leurs propres stages, les tâches TICE proposées aux élèves non seulement en fonction de leur potentiel d'apprentissage mais aussi en les situant par rapport aux contraintes matérielles et sociales de mise en place dans les classes. De plus, ils accordent aussi une place importante aux choix de déroulement des séances TICE et à l'analyse des aides possibles aux élèves et leur impact sur les apprentissages prévus et effectifs.

Le dispositif mis en place a permis aux enseignants stagiaires de construire un ensemble d'éléments et d'outils partagés leur permettant d'analyser et de transmettre des expériences professionnelles relatives aux environnements technologiques.

Cependant, malgré les régularités que nous avons observées dans leur développement professionnel, ce processus garde pleinement son caractère individuel relatif à l'histoire, les connaissances, professionnelles et les conceptions de chacun. Par exemple, des enseignants ayant conçus la même ressource ont évolué ensemble mais selon des trajectoires différentes.

Il est difficile, à l'état actuelle de la recherche, de déterminer d'une façon précise quels peuvent être des indicateurs de développement professionnel de formateurs. De plus, ce développement est nécessairement déterminé par des facteurs personnels, institutionnels et sociaux extérieurs à la formation dispensée et qui ne sont pas encore accessibles à la recherche.

Les stagiaires dans cette formation sont des enseignants en exercice et de ce fait, il est difficile de différencier leur développement professionnel en tant qu'enseignants de celui en tant que futurs formateurs. Mais y a-t-il des différences entre les deux processus, et si oui lesquelles ?

REFERENCES

Abboud-Blanchard M., Emprin F. (2009) Pour mieux comprendre les pratiques des formateurs et de formations TICE. *Recherche et Formation* 62, 125-140.

Abboud-Blanchard M., Cazes C., Chenevotot-Quentin F., Grugeon B., Haspekian M., Lagrange J.B., Vandebrouck F. (2012) Les technologies numériques en didactique des mathématiques. In Elalouf M.-L., Robet A. (Eds.) (pp. 232-256) *Les didactiques en questions. Etat des lieux et perspectives pour la recherche et la formation.* Bruxelles: De Boeck.

Burkhardt H., Schoenfeld A. H. (2003) Improving educational research: toward a more useful, more influential, and better-funded enterprise. *Educational Researcher* 32(9), 3-14.

Chappet-Paries M., Robert A. (2011) Séances de formation d'enseignants de mathématiques (collège-lycée) utilisant des vidéos. *Petit x* 86, 45-77.

Gueudet G., Trouche L. (2009) Towards new documentation systems for teachers? *Educational Studies in Mathematics* 71(3), 199-218.

Hoyles C., Lagrange J. B. (Eds.) (2010) *Digital technologies and Math Education. Rethinking the terrain. The 17th ICMI Study*. New York: Springer.

ENSEIGNER ET APPRENDRE DES MATHEMATIQUES AVEC LES TICE, LE CAS DES FONCTIONS AU LYCEE AVEC CASYOPEE

Bernard LE FEUVRE*

Résumé – Les fonctions occupent aujourd'hui une place centrale dans l'enseignement des Mathématiques au lycée. Les TICE sont incontournables et notre groupe développe le logiciel Casyopée et des ressources pour les enseignants. Casyopée comprend un module symbolique où les élèves travaillent sur les aspects algébriques des fonctions et un module de géométrique dynamique où ils peuvent concevoir les fonctions comme modèles de dépendances. Les travaux du groupe à destination d'enseignants et de formateurs sont diffusés sous forme de mini sites et sont aussi disponibles sur le site du logiciel.

Mots-clefs : Fonctions, calcul symbolique, géométrie dynamique, modélisation, formation des enseignants

Abstract – The functions today occupy a central place in the teaching of Mathematics in high school. The « information and communication technology » is essential and our group develops free open- source software Casyopée and resources for teachers. Casyopée includes a symbolic module where students work on aspects of algebraic functions and dynamic geometry module where they can design functions as models of addiction. The group's work destined for teachers and trainers are available in mini sites and are also available on the software web site.

Keywords: Functions, symbolic computation, dynamic geometry, modeling, teacher training

I. PROJET CASYOPEE

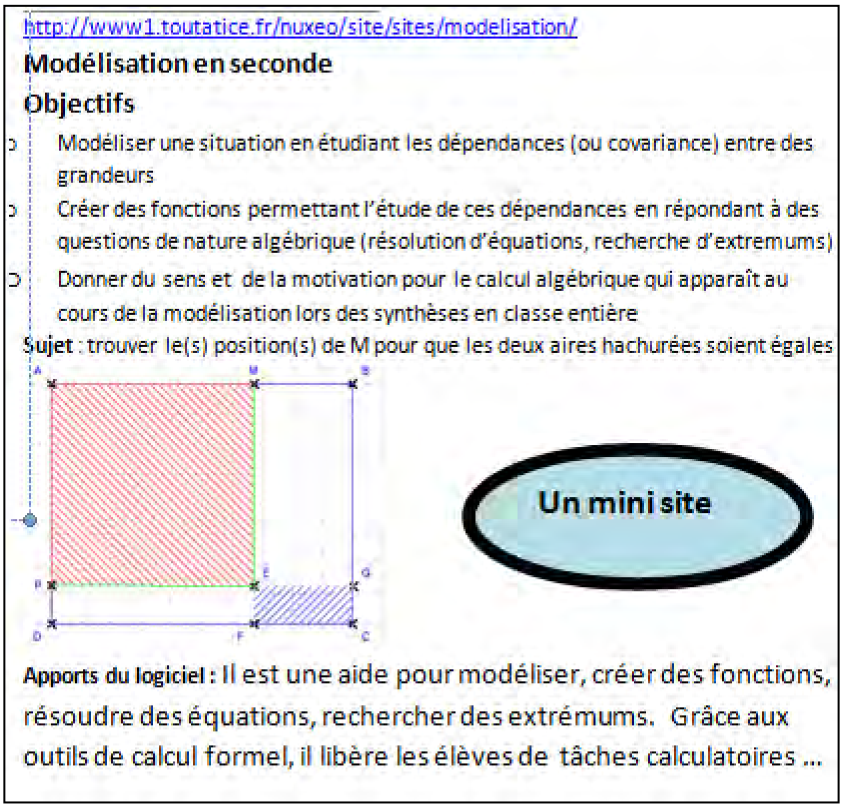
Le groupe de recherche qui est à la base de ce projet est constitué de chercheurs (J.-B Lagrange Université de Reims et de Trân Kiêm Minh IUFM Rennes) et de professeurs de lycée (Roselyne Halbert, Christine Le Bihan, Bernard Le Feuvre, Marie Catherine Manens et Xavier Meyrier). Il mène une recherche depuis plus de dix ans sur l'enseignement des fonctions et l'intégration des TICE dans l'enseignement des mathématiques et particulièrement sur possibilités qu'offre le calcul formel. La réalisation du logiciel libre, gratuit et simple d'utilisation Casyopée est faite dans cet esprit. Le groupe ainsi a créé un outil non contraignant pour les utilisateurs, se pilotant simplement sans un langage de commande. Notre souci est d'aider l'élève et non de le contraindre, d'où le nom du logiciel **CA**lcul **SY**mbolique **O**ffrant des **P**ossibilités à l'**E**lève et à l'**E**nseignant.

* IREM de Rennes, équipe associée IFÉ - France – ble-feuvre@ac-rennes.fr

© Le Feuvre B. (2012) Enseigner et apprendre des mathématiques avec des TICE, le cas des fonctions au lycée avec Casyopée. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT6, pp. 936–938).
http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

II LE LOGICIEL ET LES MINI SITES

Le logiciel Casyopée comporte un module symbolique qui permet aux usagers (élèves comme professeurs) de travailler sur les aspects algébriques des fonctions et un module de géométrie dynamique qui permet de concevoir les fonctions comme modèles de dépendance. Des interactions sont possibles entre ces deux fenêtres. Une des caractéristiques de Casyopée est alors d'aider les usagers à relier ces deux aspects des fonctions dans une démarche de modélisation : créer un calcul géométrique exprimant la valeur d'une grandeur, explorer les valeurs numériques, choisir une grandeur adéquate comme variable et l'exporter dans le module symbolique. La dépendance fonctionnelle, si elle existe, entre cette variable et le calcul géométrique permet d'obtenir une fonction mathématique.



Notre groupe expérimente régulièrement auprès de classes d'élèves. Ces expérimentations permettent de faire évoluer le logiciel (ergonomie, développement de nouvelles fonctionnalités), mais aussi de proposer des approches nouvelles sur l'étude de fonctions en respectant les programmes. Nous attachons beaucoup d'importance à l'analyse de ces expérimentations et les compte rendus comportant fiche élève, analyse a priori, analyse des rédactions d'élèves, synthèse en classe avec un TNI, sont consignés sous forme de **mini sites**. Nos expérimentations montrent une utilisation raisonnée d'un logiciel.

La **diffusion** de la ressource Casyopée est une de nos préoccupations. Ainsi bon nombre d'outils sont mis à la disposition des enseignants :

- Les mini sites synthétisant les expérimentations réalisées par les membres du groupe centrés autour d'une classe de problèmes.
- Les vidéos réalisées lors de nos expérimentations. Elles sont des supports pour mieux cerner le travail de l'élève et de l'enseignant.
- Une brochure IREM qui est en cours d'écriture.

Les informations sur le logiciel et les travaux du groupe sont disponibles sur le site : http://casyopee.eu. Elles permettent à l'enseignant d'effectuer un choix raisonné d'un logiciel et de taches pour un enseignement efficace des fonctions. Elles permettent également à l'enseignant de mener une réflexion sur ses propres activités professionnelles.

REFERENCES

Gélis J.-M. (à paraître) A multi-dimensional framework for evaluating potentialities of digital environments about functions. *Technology, Knowledge and Learning*.

Lagrange J.-B., Artigue M. (2009) Students' activities about functions at upper secondary level: a grid for designing a digital environment and analysing uses. *Proceedings of 33rd Conference of the IGPME*, Thessaloniki, Greece, July 19-24.

Lagrange J.-B., Gelis J.-M. (2008) The Casyopée project: a CAS environment for students'better access to algebra. *Int. J. Continuing Engineering Education and Life-Long Learning* 18(5/6), 575-584.

Le Feuvre B. (2011) Des ressources riches pour la classe et la formation dans le cas d'un logiciel innovant : Casyopée. In Trouche L. et al. (Dir.) *Faire ensemble des mathématiques : une approche dynamique de la qualité des ressources pour l'enseignement. Actes des journées mathématiques de l'Institut français de l'Éducation*, 15 et 16 juin 2011, Lyon.

Minh T. K (à paraître) Les fonctions dans un environnement numérique d'apprentissage : étude des apprentissages des élèves sur deux ans. Canadian *Journal of Science, Mathematics and Technology Education.*

LES MACHINES MATHEMATIQUES COMME RESSOURCES : DE LA FORMATION A LA CLASSE

Michela MASCHIETTO[*]

Résumé – Cette contribution vise à la discussion sur des ressources et dispositifs de formation, en particulier sur le dispositif permettant de suivre et d'accompagner les usages de ressources par des enseignants et de soutenir l'évolution de leurs pratiques. Il présente certains aspects d'un projet de formation professionnelle sur le laboratoire de mathématiques, centré sur l'utilisation d'artefacts particuliers pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, nommés machines mathématiques.

Mots-clefs : formation, enseignant, laboratoire, machines mathématiques, ressources

Abstract – This paper contributes to the discussion about resources and teachers training, in particular about the way to support uses of resources by the teachers and their professional development. It presents some components of a practicing teachers training on mathematics laboratory, focused on the use of cultural geometrical artefacts called mathematical machines.

Keywords: training, teacher, laboratory, mathematical machines, resources

I. LES MACHINES MATHEMATIQUES DANS LE LABORATOIRE

Le contenu du poster concerne des aspects d'une formation continue sur le laboratoire de mathématiques, destinée aux enseignants de l'école primaire et secondaire (principalement jusqu'aux classes d'élèves de 15-16 ans). Le laboratoire de mathématiques, présent dans les réflexions sur l'enseignement des mathématiques depuis le début du XXe siècle (Maschietto et Trouche 2010), est considéré comme « une série de suggestions méthodologiques » visant la construction de signifiés mathématiques (AA.VV. 2004). Parmi les outils (par exemple logiciels, calculatrices, objets manipulables…) dans un laboratoire, on y trouve des 'machines mathématiques'[1] (Figure 1), artefacts concernant la géométrie (à gauche), développés par le *Laboratorio delle Macchine Matematiche*[2] (Bartolini Bussi et Maschietto 2006) et l'arithmétique (Figure 1, à droite).

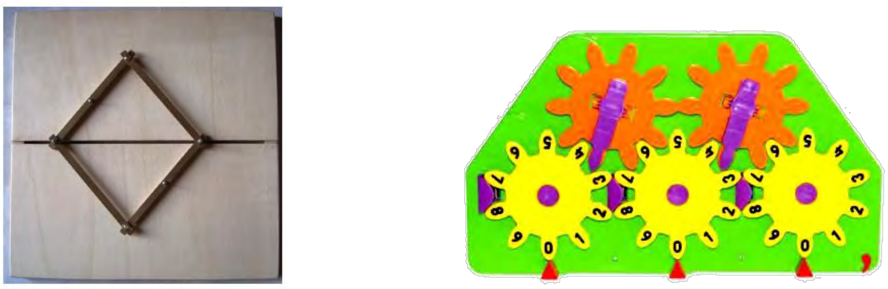


Figure 1 *– Pantographe pour la symétrie axiale, Zero+1*[3] *« pascaline »*

II. LA FORMATION : MACHINES MATHEMATIQUES ET GENÈSES

Les expériences au sein du MMLab avaient mis en évidence une certaine résistance de la part des enseignants de prendre en charge des sessions de laboratoire de mathématiques dans leurs classes, même s'ils avaient montré un certain intérêt dans les activités avec les machines

[*] Università di Modena e Reggio Emilia – Italie – michela.maschietto@unimore.it
[1] Voir http://www.dma.ens.fr/culturemath/
[2] MMLab, http://www.mmlab.unimore.it
[3] Produit par Quercetti, http://www.quercetti.it

© Maschietto M. (2012) Les machines mathématiques comme ressources : de la formation à la classe. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT6, pp. 939–942). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

mathématiques en accompagnant leurs élèves au MMLab (Maschietto et Martignone 2008). À partir de cela, une formation spécifique (Maschietto 2010) a été conduite dans le cadre du Projet Science et Technologies – Action 1 (années scolaires 2008/2009 et 2009/2010), financé par la Région Emilia-Romagna, avec l'objectif de favoriser la diffusion de la méthodologie du laboratoire. Elle proposait une approche au laboratoire en accord avec la théorie de la médiation sémiotique (Bartolini et Mariotti 2008) et l'approche instrumentale (Rabardel 1995). Le dispositif de formation a été organisé en deux phases : une première phase de formation en présence (7 séances) ; une deuxième phase d'expérimentation en classe de parcours d'apprentissage, conçus pendant et à la suite de la première phase. Les enseignants disposaient d'une plateforme qui a accompagné la formation (siège de Modena), avec l'objectif de soutenir le travail collaboratif (Maschietto 2010). Dans ce cadre, les machines mathématiques peuvent être considérées comme des ressources dans le sens d'une « forme du verbe re-sourcer : nourrir à nouveau, ou différemment » (Adler 2010 p. 25).

La première phase de la formation (Figure 2) a proposé les machines mathématiques comme des artefacts mathématiques, c'est-à-dire comme artefacts de la culture mathématique, avec des aspects historiques et épistémologiques 'naturellement' présents (Bartolini et Maschietto 2006).

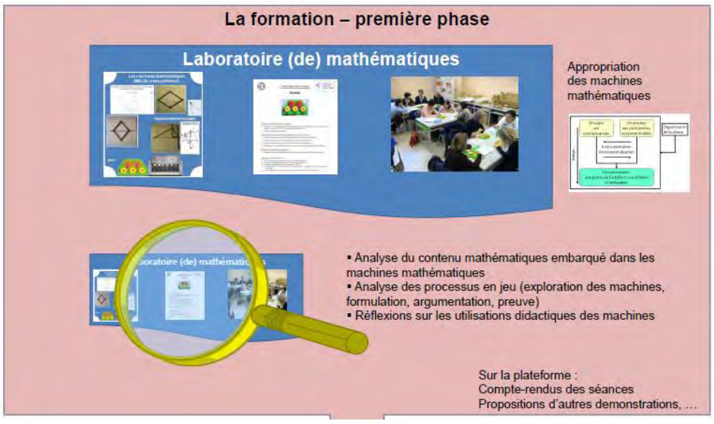


***Figure 2** – La première phase*

L'exploration des machines, guidées par des consignes spécifiques, a permis aux enseignants de faire le lien entre la machine et une partie du savoir mathématique. Un processus de genèse instrumentale a ainsi été sollicité et soutenu. Les enseignants ne se sont pas seulement appropriés les machines mathématiques (pour les transformations géométriques, pour tracer des sections coniques...) comme instruments pour faire des mathématiques (en développant des schèmes d'utilisation), mais ont aussi construit des schèmes d'exploration de ce type d'instrument.

> La méthodologie du travail semble désormais établie, nous discutons de l'objet comme artefact et comme instrument sans être liés à la fiche proposée.

Ensuite, une discussion collective suivant le travail en groupe permettait de pointer les processus en jeu (exploration, production de conjecture, argumentation et preuve), les potentialités didactiques, la méthodologie du laboratoire et les possibles implémentations en classe, comme en témoignent ces commentaires :

> Nous nous sommes mis au travail, en cherchant les solutions possibles et les échangeant entre nous, divisés par groupes, nous avons 'animé' la discussion, en réfléchissant sur les implications didactiques et idées… [...] nous sommes des étudiants et des enseignants en même temps…

> À notre avis, cette expérience peut faire réfléchir sur la valeur esthétique outre que formelle d'une preuve, sur les schémas mentaux de chacun, qui est porté à suivre aisément un type d'argumentation plutôt qu'un autre, et donc à la considérer plus efficace.

Pendant ce type de discussion, la machine mathématique semble devenir un instrument pour faire faire des mathématiques, c'est-à-dire pour faire construire des signifiés mathématiques aux élèves. En effet, cela semble être nourri par la réflexion didactique menée et par la métaréflexion des enseignants sur leur parcours de formation. On pourrait dire qu'une deuxième genèse instrumentale semble avoir démarré, concernant la machine comme ressource pour l'enseignant. Par rapport à la machine comme artefact, cette ressource est composée par la machine même, des schèmes d'utilisation et les analyses du travail que l'on peut proposer avec elle, ainsi que des processus d'apprentissage en jeu.

Dans la deuxième phase de la formation (Figure 3), une machine mathématique a été considérée comme une ressource dans un processus de genèse documentaire (Gueudet et Trouche 2009). Les enseignants, partagés en groupe selon le type de machine choisie (et donc des contenus mathématiques) pour le travail en classe (siège de Modena), ont mis en place des processus de conception de documents pour la classe, à partir des machines, des ressources disponibles dans la plateforme (diaporama des séances, fiches, ressources déposées par les enseignants lors de la première phase) et des ressources personnelles (fichier de géométrie dynamique, photos…) (Maschietto 2010).

Les journaux de bord rédigés par les enseignants sur les expérimentations ont favorisé un travail réflexif sur le laboratoire de mathématiques et sur les processus d'apprentissage des élèves.

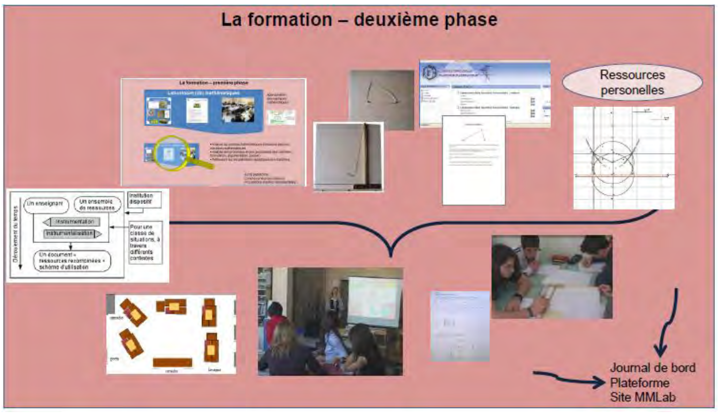


Figure 3 *– La deuxième phase*

III. CONCLUSIONS

La formation présentée dans cette contribution a permis aux enseignants d'expérimenter un parcours d'appropriation d'une machine mathématique comme ressource et de conception de documents pour les expérimentations en classe, dans le cadre du laboratoire de mathématiques. Sa structure semble avoir soutenu différentes genèses, en s'appuyant aussi sur la plateforme pour le travail collaboratif. L'analyse présentée ici concerne un niveau macro. Il faudrait l'articuler avec d'autres analyses, au moins sur deux axes. Le premier axe concerne l'analyse du passage des fiches de formation aux parcours pour les élèves, pour saisir les éléments sur lesquels les enseignants s'appuient davantage, pour un retour sur la formation même. Le deuxième axe concerne les retombés sur la pratique professionnelle de ce type de formation dans le long terme.

RÉFÉRENCES

Adler J. (2010) La conceptualisation des ressources. Apports pour la formation des professeurs de mathématiques. In Gueudet G., Trouche L. (Eds.) (pp. 23–37) *Ressources vive., Le travail documentaire des professeurs en mathématiques*. Collection Paideia. Rennes : Presses Universitaires de Rennes.

AA.VV. UMI (2004). In Anichini G., Arzarello F., Ciarrapico L., Robutti O. (Eds.) *Matematica 2003. La matematica per il cittadino. Attivita` didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di Matematica (Ciclo secondario)*. Lucca: Matteoni stampatore.

Bartolini Bussi M. G., Mariotti, M. A. (2008) Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. In English L. (Ed.) (pp. 746-783) *Handbook of inter. research in mathematics education*. NY: Routledge.

Bartolini Bussi M. G., Maschietto M. (2006) *Macchine matematiche: dalla storia alla scuola*. Collana UMI Convergenze. Milano: Springer.

Gueudet G., Trouche L. (2009) Towards new documentation systems for mathematics teachers? *Educational Studies in Mathematics* 71, 199-218.

Maschietto, M. (2010) Piattaforma e risorse per gli insegnanti. In USR E-R, ANSAS e IRRE E-R, Regione Emilia-Romagna. *Scienze e Tecnologie in Emilia-Romagna* vol. 2 , 98-105. Napoli: Tecnodid Editrice.

Maschietto M. (2010) Enseignants et élèves dans le laboratoire de mathématiques. In Gueudet G. et al. (Eds.) (pp. 9-17) *Actes des Journées mathématiques de l'INRP « Apprendre, enseigner, se former en mathématiques : quels effets des ressources ? »* Lyon : INRP Editions.

Maschietto M., Martignone F. (2008). Activities with the mathematical machines: pantographs and curve drawers. In Barbin E.et al. (Eds.) (pp. 285-296) *History and Epistemology in Mathematics Education: Proceedings of the fifth European Summer University*. Prague: Vydavatelsky Press.

Maschietto M., Trouche L. (2010) Mathematics learning and tools from theoretical, historical and practical points of view: the productive notion of mathematics laboratories. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education* 42 (1), 33-47.

Rabardel P. (1995) *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains*. Paris : Armand Colin.

PRODUIRE DES RESSOURCES POUR LES ENSEIGNANTS A L'ARTICULATION ECOLE-COLLEGE

Marie-Jeanne PERRIN-GLORIAN*

Résumé – Questions méthodologiques posées par l'élaboration de ressources pour les enseignants dans la perspective de penser et gérer la continuité de l'enseignement des nombres, des mesures et de la géométrie au long de la scolarité obligatoire.

Mots-clefs : ressources pour les enseignants, liaison primaire-secondaire, formation des enseignants, nombres, géométrie

Abstract – Methodological issues in elaborating resources for teachers in order to conceive the continuity of the teaching of numbers, measures and geometry along compulsory scholarship.

Keywords: resources for teachers, continuity between primary and secondary school, teacher training, numbers, geometry

I. UN DOUBLE OBJECTIF

L'affiche présente des questions liées à l'élaboration d'un projet de recherche dans la double problématique de produire des ressources pour l'enseignement et la formation des maîtres et de rechercher une progression cohérente des contenus fondamentaux de la scolarité obligatoire. Ce projet cherche aussi à tirer les leçons des résultats de recherches qui ont pointé des apprentissages insuffisamment pris en compte dans l'enseignement primaire actuel, notamment les connaissances spatiales pour l'apprentissage de la géométrie (Berthelot et Salin 2001), l'articulation entre l'enseignement des nombres et celui du système métrique (Chambris 2008).

La transition entre l'école et le collège est un point sensible, souvent vécu par les élèves comme une rupture. Cette rupture est nécessaire pour la progression des élèves qui doivent passer à des définitions plus élaborées des objets mathématiques pour poursuivre leur scolarité, et du fait que les mathématiques sont enseignées par des professeurs généralistes en primaire et par des professeurs spécialistes à partir de la sixième. Pour éviter les échecs, en particulier des élèves de milieux défavorisés, cette rupture devrait être gérée par le système d'enseignement. Or, malgré les divers textes institutionnels concernant la liaison CM2-6ème et le socle commun, les programmes d'enseignement ne sont pas pensés comme une progression au long de la scolarité commune. La formation des enseignants du primaire et du collège reste très séparée et les enseignants des deux niveaux n'ont que très peu d'occasions d'échanger en profondeur sur le contenu de leur enseignement. Elaborer des ressources en partie communes est un moyen d'en fournir.

II. QUESTIONS DE RECHERCHE

Notre projet vise ainsi à élaborer des ressources permettant de mieux prendre en charge la continuité de l'enseignement des mathématiques de 6 à 15 ans sur les contenus fondamentaux de l'école primaire (les nombres en relation avec les grandeurs et les mesures, la géométrie) mais en pensant la manière dont ils sont repris et articulés avec des contenus nouveaux au collège. Ces ressources doivent être compatibles avec les programmes sans s'y limiter et avoir

* LDAR, université Paris-Diderot et université d'Artois – France – marie-jeanne.perrin@univ-paris-diderot.fr
Le groupe qui élabore le projet comprend aussi des enseignants chercheurs d'autres laboratoires, notamment le LML (Laboratoire de Mathématiques de Lens).

© Perrin-Gorian M.-J. (2012) Produire des ressources pour les enseignants à l'articulation école-collège. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT6, pp. 943–944). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

une compatibilité suffisante avec les pratiques ordinaires des enseignants pour qu'ils puissent les y intégrer mais leur amener suffisamment d'éléments de réflexion et de questionnement pour qu'ils puissent les faire évoluer. La question de l'utilisation de la ressource pose aussi celle de la formation des maîtres. Notre problématique comprend donc des questions liées à l'élaboration de la ressource, à son utilisation par les enseignants et aux possibilités d'évolution de leurs pratiques, à la formation initiale et continue, à l'accompagnement nécessaire à la diffusion de la ressource, ainsi que des questions sur des points spécifiques soulevés par les problématiques précédentes. En arrière-plan se pose aussi la question des liens entre les mathématiques du quotidien pour traiter les problèmes concrets de la vie courante ou professionnelle et les mathématiques théoriques. Des débuts de réalisation sont en cours sur la numération (Tempier, ce volume) et la géométrie.

III. PROBLEMES METHODOLOGIQUES ET THEORIQUES

Quatre catégories de publics sont concernées : les enseignants d'une part, les formateurs et assimilés d'autre part, chacune de ces catégories se subdivisant en polyvalents et spécialistes. Les textes doivent être les plus courts et les plus informatifs possibles et facilement accessibles, par exemple sous la forme d'un site internet. L'organisation du site doit permettre d'identifier facilement la nature des textes à partir d'une entrée par les contenus et par le niveau scolaire. Les enseignants doivent trouver des documents directement utilisables pour la classe mais ces documents doivent les inciter à questionner leurs pratiques pour approfondir leur réflexion. Pour les contenus, se pose de façon cruciale l'organisation des liens entre des entrées « situations », « techniques » et « technologies » (avec en particulier des formulations directement utilisables avec les élèves et des exercices) et « théories », contenant des références mathématiques, didactiques, épistémologiques ou historiques.

Elaborer une telle ressource ne peut se concevoir sans un travail collaboratif avec des enseignants mais il faut aussi étudier comment d'autres enseignants peuvent s'en emparer, c'est pourquoi nous pensons travailler dans plusieurs cercles : le cercle des chercheurs qui, au final mènent les analyses, le cercle collaboratif des chercheurs et des enseignants qui participent à l'élaboration de la ressource, qui expérimentent les situations et les formulations des énoncés de savoir pour les élèves et un cercle plus large d'enseignants qui ne participent pas directement à l'élaboration de la ressource mais qui peuvent l'utiliser et réagir. L'organisation des différentes collaborations et du recueil de données sont à définir.

Le projet se situe dans le cadre d'une ingénierie didactique de développement (Perrin-Glorian 2011). Il soulève de nombreux problèmes méthodologiques et théoriques tant pour l'élaboration du site que des recherches associées (quelles données, comment les recueillir, quels outils d'analyse ?) et nécessite l'articulation des différents cadres théoriques des recherches existantes sur lesquelles il compte s'appuyer, concernant les contenus choisis, les pratiques ordinaires des enseignants, le travail collaboratif, l'intégration de ressources. Un des objectifs théoriques du projet est donc aussi d'avancer dans l'articulation de ces divers cadres.

REFERENCES

Berthelot R., Salin M.-H. (2001) L'enseignement de la géométrie au début du collège. *Petit x* 56, 5-34.

Chambris C. (2008) *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire.* Thèse de doctorat. Université Paris-Diderot (Paris 7).

Perrin-Glorian M.-J. (2011) L'ingénierie didactique à l'interface de la recherche avec l'enseignement. In Margolinas C.et al. (Eds.) (pp. 57-78) *En amont et en aval des ingénieries didactiques.* Grenoble : La pensée sauvage.

CONCEPTION COLLABORATIVE DE RESSOURCES : L'EXPERIENCE E-COLAB

Gilles ALDON*

Résumé – La théorie des situations didactiques et plus particulièrement la notion de milieu couplé à l'approche instrumentale et documentaire fournit des outils d'analyses puissants pour penser, créer et partager des ressources dans un environnement technologique. En partant de l'exemple du travail e-CoLab et des observations de classes, cet article propose de montrer en quoi ces analyses sont des éléments prépondérants de la création et de la mise en œuvre d'un modèle de ressources en vue d'une diffusion auprès des enseignants de mathématiques.

Mots-clefs : Approche documentaire, théorie des situations didactiques, analyse, conception collaborative, observation de classes

Abstract – The Theory of Didactical Situations and particularly the concept of « milieu », when crossed with instrumental and documentational approaches gives powerful tools to think, to create and to share resources in a technological environment. Starting from the work of the e-CoLab team, this paper aims to show how theses analyses are predominant in order to create a model of resources with a view to disseminate to mathematics teachers.

Keywords: Documentational approach, theory of didactical situations, analysis, collaborative design, class observations

I. INTRODUCTION

Depuis plusieurs années l'équipe e-CoLab[1] travaille à la conception, l'analyse et la mise en œuvre de ressources permettant d'intégrer dans le cours de mathématiques du lycée un environnement informatisé d'apprentissage[2].

Les caractéristiques de cet environnement en font un outil :

- Qui peut être exploité indifféremment sur une calculatrice ou sur un ordinateur, les deux types de supports pouvant être interconnectés facilement, ce qui permet des jeux multiples entre des configurations nomades et des configurations fixes. On retrouve alors, sur la calculatrice, les fonctionnalités de base d'un ordinateur, c'est-à-dire une structure de gestion de fichiers. On a donc là une technologie bien adaptée aux questions actuelles, centrées sur les ressources et leur conception collaborative.
- Qui intègre la majeure partie des logiciels de mathématiques utilisés dans la classe de mathématiques (géométrie dynamique, tableur, grapheur, calcul formel et approché). Toutes ces applications communiquent entre elles ce qui facilite la multi-représentation des objets mathématiques.

Les travaux de l'équipe, composée de chercheurs, de formateurs et d'enseignants, ont déjà débouché sur la rédaction de trois ouvrages d'une même collection Hachette Education : « Mathématiques dynamiques en... » pour les classes de seconde, première et terminale. Ces réalisations sont le résultat d'un travail collaboratif entre professeurs et chercheurs de construction de situations de classe, alliant des analyses *a priori*, des expérimentations croisées dans les classes et les mises en perspective des résultats des observations.

La question mise à l'étude dans cet article peut se formuler de la manière suivante :

* Ifé, S2HEP (EA 4148) Université Claude Bernard Lyon 1 et Ecole Normale Supérieure de Lyon – France – gilles.aldon@ens-lyon.fr

1 Expérimentation collaborative de laboratoires mathématiques

2 TI-Nspire™ de la société Texas Instruments

© Aldon G. (2012) Conception collaborative de ressources : l'expérience e-CoLab. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT6, pp. 784–798). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

Comment les analyses didactiques participent à la construction collaborative de ressources ?

Pour tenter d'apporter des éléments de réponse à cette question, l'article, après une présentation des cadres théoriques et du contexte de la recherche s'appuiera sur une double analyse d'une situation de classe pour dégager les éléments clefs conduisant à la construction d'un modèle de ressources.

II. CADRE THEORIQUE

Que ce soit pour (Piaget 1967) ou pour (Vygotsky 1934), les théories de l'apprentissage insistent sur le rôle des interactions dans les processus d'apprentissage. Il est maintenant assez établi que ces interactions ne se limitent pas aux interactions dans la classe mais se modélisent plus profondément en utilisant des cadres de pensée qui permettent de prendre en compte l'environnement tout entier des acteurs, connaissances et conceptions y compris.

Le cadre choisi permettant de comprendre, d'expliquer et de modéliser le « jeu » d'enseignement et d'apprentissage est celui de la Théorie des Situations Didactiques (TSD) (Brousseau 2004) ; il est suffisamment précis pour décrire et rendre compte de la complexité des interactions qui se nouent entre élèves et professeurs dans un temps long. Plus particulièrement, la notion de *milieu* donne un cadre permettant de prendre en compte à la fois le point de vue du professeur et celui des élèves. Dans cette théorie de l'enseignement et de l'apprentissage, Brousseau définit une situation comme

> l'ensemble des circonstances dans lesquelles se trouve l'élève, les relations qui l'unissent à son milieu, l'ensemble des données qui caractérisent une action ou une évolution. (Brousseau 1986, p. 155)

L'enseignement est alors un projet social qui vise à la modification du système de connaissances d'un ou de plusieurs individus dans un environnement donné. La modélisation d'une situation d'enseignement conduit à décrire les relations existantes entre les différents systèmes en jeu dans la production d'un savoir visé. Une situation peut se caractériser par l'ensemble des rôles des actants et de leurs relations avec le milieu dans une institution donnée. L'hypothèse fondamentale d'apprentissage piagetienne est alors que le sujet apprend en s'adaptant à un milieu que Brousseau définit comme :

> Le milieu est le système antagoniste du système enseigné, ou plutôt, précédemment enseigné. (Ibid., p. 340)

Le rôle du maître dans l'organisation et la présentation du milieu est important et conduit à penser le milieu en fonction des postures des sujets ce qui conduit à proposer une structure de ce milieu. Initié par Brousseau, il a été affiné et complété par de nombreux travaux, dont (Margolinas 1998, 2004), (Perrin-Glorian et Hersant 2003). Le tableau 1, page suivante, donne une illustration de cette structuration, tableau qu'il s'agit de lire avec le milieu de niveau n comme situation de niveau n-1 : $M_n=S_{n-1}$, la situation S étant constituée des rapports existants entre M, E et P. Les niveaux positifs sont qualifiés de situations sur-didactiques, et les niveaux négatifs, de situations a-didactiques.

L'analyse d'une situation partant de la situation S+3 pour aller de plus en plus profondément dans la structure des milieux est nommée *analyse descendante*, c'est, en quelque sorte une analyse prenant le point de vue du professeur. Au contraire, partir de la situation S-3 pour « remonter » dans cette structure sera nommée *analyse ascendante* et prendra le point de vue de l'élève.

Parallèlement, l'ergonomie cognitive (Mumford 1983 ; Sperandio 1984 ; puis Rabardel 1995) permet d'interroger les interactions entre les acteurs en posant le regard sur l'activité de chacun. Les artefacts sont des éléments médiateurs de l'activité et sont transformés par l'activité en même temps qu'ils s'insèrent dans une pratique sociale.

Niveau	E	P	Situation	Milieux
M+3 M-Construction		P-noosphérien P+3	S+3 : Situation noosphérienne	Niveaux sur-didactiques
M+2 : M-projet		P-constructeur P+2	S+2 : Situation de construction	
M+1 : M-Didactique	E+1 : E-réflexif	P+1 : P-projeteur	S+1 : Situation de projet	
M0 : M-Apprentissage	E0 : Elève	P0 : Professeur	S0 : Situation didactique	
M-1 : M-Référence	E-1 : E-apprenant	P-1 : P-Observateur	S-1 : Situation d'apprentissage	Niveaux sous-didactiques
M-2 : M-Objectif	E-2 : E-agissant		S-2 : Situation de référence	
M-3 : M-Matériel	E-3 : E-objectif		S-3 : Situation objective	

Tableau 1 *– La structuration des milieux selon (Margolinas 2004)*

Cette médiation incite à étudier les artefacts non pas seulement à partir de leurs propriétés mais surtout depuis le statut que les sujets leur attribuent, et construisent au cours de leur activité pour le transformer progressivement dans un long cheminement dans un *instrument* (Trouche 2005). Un instrument est alors défini comme un artefact auquel est associé des schèmes d'utilisation. Le processus d'instrumentation concerne l'émergence, le développement et l'affinement de schèmes d'utilisation de l'artefact à des fins précises. Celui d'instrumentalisation est relatif aux transformations et au développement de l'artefact par le sujet. L'importance de la documentation pour le travail du professeur a conduit (Gueudet et Trouche 2008) à prolonger l'approche instrumentale. Considérant les ressources disponibles comme des artefacts, dont le fonctionnement dépend du contexte d'utilisation dans une pratique contextualisée, Adler (2010) propose d'utiliser les concepts de visibilité, invisibilité et transparence pour aborder le rôle des ressources dans la complexité de l'enseignement. Une ressource sera dite *visible* si « l'attention des élèves, du professeur, est centrée sur cette ressource », avec le risque de cacher derrière l'utilisation de cette ressource les concepts mathématiques en jeu, *invisible* lorsque la ressource, bien que présente et potentiellement utilisable, est ignorée dans le contexte de la classe et *transparente* lorsque les potentialités de la ressource sont utilisées en respectant les objectifs d'apprentissage. L'approche documentaire modélise les interactions des sujets avec les ressources à leur disposition, le mot *ressource* étant entendu dans un sens large,

> un manuel scolaire, les programmes scolaires, un logiciel dédié à l'enseignement, sont, bien entendu des ressources ; [...] une copie d'élève, les interactions dans la classe, un conseil donné par un collègue, constituent également des ressources pour le professeur. (Gueudet et Trouche 2008)

Le professeur intègre ces ressources dans son milieu de construction, et construit dans *le travail documentaire*, ses documents reliés à une classe de situations. Le processus de transformation des ressources en document, la *genèse documentaire* est tout comme la genèse instrumentale le résultat d'un double mouvement, du sujet vers les ressources (l'intrumentalisation) et des ressources vers le sujet (l'instrumentation). L'instrumentalisation apparaît alors comme le façonnage, la mise en forme d'un ensemble de ressources pour les propres usages du sujet, l'instrumentation modifiant les usages du sujet. A un instant donné, le document est alors le résultat des ressources prises en main et d'un schème d'utilisation dans un contexte donné. Le processus ne se termine pas, puisque les documents ainsi constitué peuvent être considérés comme de nouvelles ressources. Dans une position de P-projeteur dans une situation de projet, le milieu du professeur peut être considéré comme l'ensemble de ses ressources. Les ressources utilisées par les enseignants sont des éléments de structuration de leurs actions dans la classe et le processus de genèse documentaire relie une « instrumentalisation » de ces ressources aux conceptions des enseignants vis à vis à la fois des mathématiques et de leur profession. Parallèlement, dans leurs apprentissages, les élèves se construisent et utilisent des ressources. Une situation presque symétrique peut alors être modélisée. Le milieu objectif des élèves contient leurs ressources. Il est, dans une situation didactique, augmenté des éléments apportés par le professeur qui peuvent venir en contradiction ou en accompagnement des ressources des élèves.

Les deux regards, didactique et ergonomique s'articulent pour prendre en compte les évolutions dans le temps de la position des ressources numériques dans la structure des milieux parallèlement à la transformation des artefacts en instruments et en documents pour l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques.

III. CONTEXTE

1. Le projet e-CoLab

Depuis 2006, trois équipes travaillant dans les IREM de Paris 7, Montpellier et Lyon et dont j'ai assuré la coordination pour l'INRP, sont composées de professeurs de lycée, de chercheurs et de formateurs. Ils ont travaillé collaborativement à la construction, l'analyse et la mise en œuvre de ressources pour les enseignants de mathématiques s'appuyant sur la notion de laboratoire mathématique (Maschietto et Trouche 2010). La réflexion sur les registres de représentations sémiotiques (Duval 1993) et les apports des multireprésentations (Arzarello et Robutti 2010) pour l'apprentissage des mathématiques a conduit cette équipe à s'intéresser à la technologie TI-Nspire, et à construire des activités intégrant ces potentialités. Dans le cadre d'un partenariat avec la société Texas Instruments, et dès le début du projet, les classes des enseignants ont été équipées de calculatrices, depuis son état de prototype non encore commercialisé jusqu'à aujourd'hui où la version 3 du logiciel est disponible. Le travail de l'équipe a participé au *modelage social de la technologie* (MacKenzie et Wajcman 1985), (Williams et Edge 1996) en confrontant les avancées techniques à la réalité de la classe et en renvoyant au constructeur des remarques issues de la pratique permettant de faire évoluer la technologie. Les travaux de cette équipe se situent dans une thématique qui questionne les processus par lesquels les professeurs s'approprient, modifient et conçoivent des ressources pour leur enseignement et les élèves utilisent, complètent ces ressources pour leurs apprentissages dans le contexte particulier d'utilisation de cette technologie.

On retrouve dans ce projet les deux aspects de la recherche évoquée dans le paragraphe précédent, de mise à l'épreuve de cadres théoriques et de confrontation à la contingence d'une part et le développement de ressources s'appuyant sur des situations mathématiques permettant de proposer des situations didactiques fécondes, d'autre part. Ainsi, dans le projet e-CoLab, la recherche a construit un modèle de document facilitant la construction et l'analyse coopératives de situations de classes utilisant la technologie (Aldon 2008) et d'autre part la réalisation effective de documents pour la classe (Aldon et al. 2009, 2010, 2011). Les questions de recherche ont amené :

- À comparer le nouvel environnement technologique (TI-Nspire^{TM}) avec les environnements antérieurement étudiés : quelles en sont les nouvelles potentialités et les nouvelles contraintes, avec quels effets sur les apprentissages des élèves et le travail des enseignants ? En quoi répond-il aux problèmes identifiés dans les travaux antérieurs ? Quelles sont aussi ses limites et quelles suggestions d'amélioration peut-on faire le concernant ?
- À tester les ressources antérieurement réalisées dans ce nouvel environnement.
- À identifier les adaptations et enrichissements nécessaires et possibles.
- À penser la conception de nouvelles ressources permettant notamment de prendre en compte les genèses instrumentales c'est-à- dire les processus via lesquels les artefacts deviennent des instruments du travail mathématique des élèves (Guin et Trouche 2002) dans la durée.
- À tester la viabilité de dispositifs de conception de ressources numériques dans ce nouveau contexte et à en penser des évolutions adaptées.
- À étudier, enfin les propriétés documentaires des technologies (Aldon 2010).

IV. UNE SITUATION, DEUX ANALYSES

La situation analysée ci-dessous se déroule dans une classe de Terminale S, dans une salle informatique avec des ordinateurs équipés du logiciel TI-Nspire^{TM}. Les quatre pages de l'énoncé proposé aux élèves sont reproduites en annexe. Les deux analyses descendantes et ascendantes sont directement liées à la structuration des milieux présentée dans le paragraphe « cadre théorique ». La genèse documentaire apparaît comme essentielle à deux niveaux :

- D'une part, pour comprendre et préciser la place de l'artefact utilisé dans le système de ressources des élèves et du professeur, en lien avec la construction d'un milieu matériel de la situation par le professeur et aux apprentissages mathématiques des élèves dans la situation d'apprentissage.
- D'autre part, pour comprendre et analyser les éléments de la ressource facilitant ou retardant les apprentissages dans une perspective de construction et de diffusion dans des contextes différents et conduisant à la construction d'un modèle de ressources.

1. Analyse descendante

La situation noosphérienne relève ici de la position du professeur dans l’expérimentation. Volontaire pour accepter d’enseigner dans une classe dont tous les élèves sont équipés de la calculatrice, ce professeur accepte de plus l’intrusion d’un chercheur dans sa classe, alors que, de ses propres dires, elle n’est pas à l’aise avec la technologie. Elle prépare, par ailleurs ses élèves à l’épreuve expérimentale de mathématiques[3]. Dans ce cas, la situation S+3 du professeur peut être décrite comme :

P+3 cherche à entrainer ses élèves pour l’épreuve expérimentale de mathématiques (EPM). Elle souhaite donc que les élèves utilisent dans une situation d’autonomie le logiciel sans pour autant perdre de vue le nécessaire entraînement au programme de mathématiques de Terminale S.

[3] Durant l'année de cette expérimentation, l'épreuve pratique expérimentale avait été généralisée et le lycée participait à sa mise en place.

La situation de construction prend en compte la contradiction entre la volonté de laisser une autonomie aux élèves et le désir de faire en sorte que les élèves ne passent pas tout le temps sur le logiciel mais arrive dans l'heure à aborder ce que ce professeur appelle la partie théorique[4].

Dans cette situation S+2, *P+2 construit une succession de questions permettant, un peu à la manière d'un tutoriel d'avancer dans la réalisation de la figure pour faire apparaître la conjecture souhaitée et pour permettre aux élèves d'arriver à la question de la démonstration de la conjecture*.

La situation de projet met en œuvre cette construction en insérant les choix didactiques à la fois concernant la volonté de faire apprendre aux élèves le fonctionnement du logiciel et de mener à bien la résolution du problème mathématique.

La présentation du TP commence par un énoncé de type mathématique introduisant les objets en jeu : deux points A et B, le cercle trigonométrique C, un point M de ce cercle et l'application de C dans qu'il s'agira d'étudier. Cette partie a été photocopiée sur un manuel.

Le titre encadré : réalisation de la figure et conjectures met en jeu à la fois les mathématiques (conjectures) et l'utilisation de l'instrument (réalisation de la figure) ; en revanche, dès la première consigne, le choix de l'outil technique est imposé :

Ouvrir un classeur. Graphiques et géométrie

Les différentes étapes de l'énoncé montrent bien cette alternance entre des explications et des questions mathématiques et des conseils et des constructions avec le logiciel.

Il est également intéressant de noter que le but du TP apparaît seulement au bas de la première page après un ensemble de consignes facilitant la construction de la figure initiale : l'étude des variations de f en fonction de l'angle α dans un type mathématique suivi d'une remarque de type instrumentale sur les capacités du logiciel à ne mesurer que des angles géométriques, remarque illustrée de deux dessins faisant apparaître dans deux positions du point M la valeur positive en radian de l'angle. Dans le langage mathématique, la différence entre angle géométrique et angle orienté est expliquée pour justifier la manipulation instrumentale demandée et partant du constat que le logiciel ne sait pas gérer les mesures des angles orientés, le professeur fait construire la mesure de l'angle orientée à partir du signe de l'ordonnée du point du cercle trigonométrique et de la mesure de l'angle géométrique. Les explications sont d'abord d'ordre mathématiques (lorsque α appartient à l'intervalle $]-\pi;\pi]$, les signes de et de α sont les mêmes) puis d'ordre technique : comment faire calculer une formule au logiciel ?

Dans la situation S+1, *P+1 choisit d'intégrer les questions mathématiques dans les questions d'ordre technologique*.

La situation didactique S0 va mettre en œuvre les choix didactiques locaux : permettre un travail en autonomie et un apprentissage des fonctionnalités du logiciel en gardant un contenu mathématique consistant. La façon dont P0 place la situation montre cette double volonté contradictoire d'autonomie et de guidage tutoriel :

> Bon, ouvrez l'ordinateur et regardez si ça marche. Allez… (brouhaha) ; le professeur navigue dans la classe, et intervient auprès des élèves :
> A tu vas maintenant te mettre là… Les écrans, ils marchent ou pas ? C'est la séance cinéma aujourd'hui. J. tu te mets à côté d'A… Ça y est, ça marche. Bon alors on commence à… page 1, 2, 3, 4… Alors vous allumez l'écran, s'il vous plait, rapidement… Ça marche ou pas ? Oui, ça marche… Allez !

[4] En référence, d'ailleurs au modèle d'épreuves déjà expérimentées de l'EPM.

> Donc on commence par la page 1… d'accord ! C'est numéroté page 1, 2, 3, 4…Allez, c'est parti… Je vous guide pas mal, là. Ça vous permet de vous réapproprier certains trucs, certains menus.
> Bon alors, c'est validé… maintenant pointeur, tu te mets sur les coordonnées… là, voilà, pointeur, coordonnées, vas y ! Voilà, non tu sélect… tu… enter, voilà !

L'organisation de la salle de classe et l'attitude de P0, dès l'entrée montre que l'utilisation du logiciel est d'une manière contrainte par les conditions extérieures, et que l'objectif mathématique (théorique dit le professeur) est d'une plus grande importance. Dans cette brève introduction, on entend : *vous allumez l'écran, s'il vous plait, rapidement*, *séance cinéma aujourd'hui Je vous guide pas mal, là*, *réapproprier certains trucs, certains menus* ; autant de positions visant à accélérer les manipulations *pratiques*.

P0 cherche à faire en sorte que les élèves s'appuient sur la dimension expérimentale du TP pour les faire arriver rapidement vers une construction théorique.

La position dans la situation S-1 du professeur est alors toute tracée : P-1 cherche à faire construire et expérimenter sur le logiciel dans les cadres exacts fixés par les questions du TP. La première partie est alors en dehors du contexte de l'apprentissage des mathématiques ; on verra en effet, que les interactions avec les élèves se situent dans le domaine technique.

De ce fait, P-1 observe les élèves de manière à ce qu'ils avancent quasi simultanément dans la partie expérimentale du TP.

Les allers-retours entre les positions S+3 (nécessité de laisser une autonomie aux élèves) et S-1 (volonté de faire avancer conjointement la classe) contraignent le professeur à des interventions difficilement compréhensibles par les élèves.

> E : Madame, pourquoi il met tout le temps positif alors qu'on a fait u OM ; il devrait être négatif…
> P : Et ouais, alors, là tu regardes, je t'explique ça ; tu vois le problème c'est que des angles géométriques, tu vois, alors justement, tu vois, je t'ai donné un exemple, là ; alors essaye de voir un peu l'astuce pour essayer de mettre le signe…Donc je vous explique un petit peu…Donc, vous m'expliquez pourquoi, il propose cette solution…Non, non, mais…Vous lisez le haut de la page et vous essayez de voir si vous êtes d'accord ou pas.
> E : Oui, ici on peut bien faire de ce côté…
> P : oui de 0 à 2π. C'est ça que tu veux faire ?
> E : c'est la même chose.
> P : oui, oui, bien sûr.
> E : bon, ben c'est bon.
> P : Mais pour la deuxième question, qu'est ce qu'il suffit de montrer simplement ?

Dans cet extrait, les différents niveaux de langages apparaissent : la question posée par l'élève est d'ordre technique (le logiciel ne fait pas ce que cette élève souhaite). Le professeur répond en renvoyant aux explications données sur les fiches (page 2 et 3 figure 1) ; l'élève reprend alors sur une question d'ordre mathématique (est-il équivalent de faire varier la mesure de l'angle entre 0 et 2π ou entre $-\pi$ et π ?) ; du coup les explications de l'énoncé n'ont plus de sens. Le professeur passe alors à autre chose sans que l'incident ne soit réglé. Dans cet extrait E-2 dans une situation S-2 ne rencontre pas P-2.

2. Analyse ascendante

Cette analyse permet de construire le point de vue de l'élève pris au sens générique en se détachant des intentions du professeur. Le problème engendre une situation pour l'élève qu'il s'agit d'abord de comprendre puis de confronter à la réalité d'un ou de plusieurs élèves.

Dans la situation objective (S-3), E-3 est confronté au milieu matériel. Le fait que l'élève se place dans la position E-3 est un effet de contrat : le TP prépare à l'épreuve expérimentale de mathématiques, je dois m'y conformer.

L'énoncé, par son titre place d'emblée dans le milieu matériel M-3 le domaine des nombres complexes et le domaine des fonctions[5], et la position dans la salle informatique de la séance met l'ordinateur comme outil matériel utile à la résolution du problème. Les connaissances de géométrie élémentaire et d'analyse font implicitement partie du milieu matériel.

Dans la situation de référence (S-2) le milieu objectif (M-2) est constitué des interactions sujet-milieu de la situation S-3. Ici, les interactions de E-2 avec le logiciel sont des éléments du milieu objectif ; en particulier, les rétroactions du logiciel font partie intégrante de ce milieu et détermine la position de l'élève dans les situations objective ou de référence. Dans cette situation d'action, E-2 construit l'expérience sur les objets naturalisés présents dans la situation objective : objets de la géométrie élémentaire et leurs représentations dans un registre de représentation spécifique imposé par l'usage de l'application.

Dans cette position, E-2 est dans une position d'expérimentateur proposant des expériences sur des objets mathématiques qui sont représentés dans un environnement dynamique.

La situation d'apprentissage (S-1) place E-1 dans un rôle d'interprétation et de formulation des résultats des expériences réalisées. Les rétroactions du milieu M-1 (le milieu de référence) vont rentrer en résonance ou en conflit avec les connaissances mathématiques des objets manipulés et avec les observations des représentations des objets. C'est aussi dans cette situation que les validations permettront de construire des connaissances nouvelles tant du point de vue technologique que mathématique :

- Faire calculer une expression en fonction des grandeurs variables construites.
- Relier les résultats numériques aux positions des objets dans le plan complexe.
- Construire sur ces liens une relation fonctionnelle de P dans R.
- Interpréter sa restriction au cercle trigonométrique comme une fonction de R dans R.

Le professeur dans la position P-1 observe les interactions de E-1 et de M-2. Lorsque les élèves l'interpellent et le questionnent, il peut ou non changer de position. Dans tous les cas il est un élément du milieu M-1 en interagissant avec E-1.

Dans la situation didactique (S0) se joue la rencontre entre les intentions du professeur et les apprentissages des élèves. Dans le milieu M0, les expériences ont été réalisées et E0 rend compte des constats qui peuvent être faits. Le professeur dans la position P0 relie les résultats des expériences et les connaissances visées. Il n'y a pas de chronologie entre les positions des acteurs dans les différentes situations, et dans cette première observation, on peut voir les positions des acteurs changer en fonction des interactions. L'analyse des incidents et des perturbations montre bien ces changements de position dans la structure du milieu.

Dans la situation S+1, l'élève revient sur les apprentissages et analyse les difficultés rencontrées en croisant les intentions du professeur et ses propres apprentissages : dans ce cas, E+1 peut interroger la méthode générale de l'expérience proposée. M+1 portant à la fois les techniques mise en œuvre pour traiter le sujet mais aussi la méthode reproductible de l'expérience : à partir d'une figure de géométrie, définir des variables à partir de grandeurs mesurées, stocker des valeurs de variables dans des listes, représenter le nuage de points dans un système d'axes et conjecturer les extrema.

Cette analyse de la situation permet de comprendre ce qui peut être perçu des intentions du professeur dans cette séance.

[5] En classe de terminale S, les problèmes d'optimisation rencontrés sont étroitement liés à la recherche des minima ou des maxima d'une fonction dérivable.

3. Un modèle de ressources

En partant des analyses des observations de classe, et de la volonté de transmettre des ressources, un modèle de ressource a progressivement émergé. L'intégration de la technologie au sein de l'activité mathématique était présente dès le début de l'expérimentation. Les premières ressources élaborées se sont pourtant souvent réduites soit uniquement à une fiche élève comportant l'énoncé du problème (dont la résolution sous-entendait néanmoins l'utilisation de la calculatrice), soit uniquement à un fichier informatique chargé sur les unités nomades. Les contraintes imposées dans l'équipe d'échanges et d'expérimentation en classe de ces ressources ont bien vite montré la nécessité de construire les ressources sur un modèle commun prenant en compte les potentialités de mise en relation des différentes applications de la calculatrice. Une *unité* « fiche élève - fichier calculatrice », véritable *duo* a émergé comme représentatif de l'activité conjointe mathématique et instrument.

Pour prendre en compte les analyses descendantes, des fiches professeur ont également été crées, permettant notamment aux auteurs de la ressource de préciser les objectifs de la séquence et d'étayer leurs choix pédagogiques mais aussi de proposer des pistes pour modifier la situation en fonction de la réalité des classes. De même, un scénario testé en classe est proposé permettant de projeter la situation dans une situation didactique et permettre à des enseignants d'expérimenter dans leur classe une ressource dont ils ne sont pas les auteurs. Les choix didactiques qui ont été effectués, les variables didactiques sur lesquelles on peut « jouer », les réponses attendues des élèves, les difficultés à prévoir, les différentes étapes du déroulement de l'activité font partie de ce scenario.

Enfin, pour prendre en compte les genèses documentaires des professeurs et des élèves, la ressource propose des pistes pour faire évoluer et modifier la situation en intégrant éventuellement d'autres artefacts susceptibles de devenir instruments, et de participer à la construction du système de ressources des élèves et du professeur.

Les expérimentations en classe permettent également de confronter les analyses ascendantes et descendantes à la contingence et s'avèrent des aides pour l'évolution même des ressources. Toutes ces composantes « annexes » aux ressources sont essentielles dans un travail collaboratif comme e-CoLab.

V. CONCLUSION

La construction collaborative de ressources s'est appuyé à sur deux regards complémentaires, d'analyse didactique de la situation et de la position des ressources dans les milieux des professeurs et des élèves pour faire émerger un modèle de ressources permettant de partager et de pouvoir adapter à des contextes et des classes différents des situations construites.

L'exemple d'analyse utilisant la structuration du milieu dans un environnement technologique développée dans cet article met en relation les observations de classe et la création de ressources. La construction collaborative de ressources met en jeu d'autres éléments qui ne sont pas développés ici. De même, la spécificité de l'environnement utilisé est un élément de l'ensemble documentaire des élèves et des professeurs et mériterait d'être étudié sous cet angle. Cependant, les analyses et leurs confrontations à la contingence ont montré toute leur efficacité dans la construction, la réalisation et la diffusion de ressources pour l'enseignement des mathématiques.

RÉFÉRENCES

Adler J. (2010) La conceptualisation des ressources. In Gueudet G., Trouche L. (Eds.) (pp. 23-37). *Ressources vives.* Rennes : Presses Universitaires de Rennes et INRP.

Aldon G. (2008) *Analyse du rôle d'une ressource numérique dans la mise en place de problèmes de recherche dans la classe de mathématiques*. Lyon : Université Lyon 1.

Aldon G. (2010) Handheld calculators between instrument and document. In Drijvers P., Weigand H.-G. (Eds.) *ZDM The International Journal on Mathematics Education* 42 (The role of handheld technology in the mathematics classroom), 733-745.

Aldon G., Baroux-Raymond D., Bonnafet J.-L., Combes M.-C., Meny J.-M., Hérault F., Nowak M. et al. (2009) *Mathématiques dynamiques en seconde*. (Aldon G., Ed.). Hachette Education-INRP.

Aldon G., Baroux-Raymond D., Bonnafet J.-L., Combes M.-C., Meny J.-M., Hérault F., Nowak M., et al. (2010) *Mathématiques dynamiques en première*. (Aldon G., Ed.). Hachette Education-INRP.

Aldon G., Baroux-Raymond D., Bonnafet J.-L., Combes M.-C., Meny J.-M., Hérault F., Nowak M., et al. (2011) *Mathématiques dynamiques en terminale*. (Aldon G., Ed.). Hachette Education-INRP.

Arzarello F., Robutti O. (2010) Multimodality in multi-representational environments. In Drijvers P., Weigand H.-G. (Eds.) *ZDM The International Journal on Mathematics Education* 42 (The role of handheld technology in the mathematics classroom), 715-731.

Brousseau G. (1986) Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 7(2), 33-115.

Brousseau G. (2004) *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La pensée sauvage éditions.

Duval R. (1993) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives* 5, 37-65.

Gueudet G., Trouche L. (2008) Du travail documentaire des enseignants : genèses, collectifs, communautés. Le cas des mathématiques. *Education et didactique* 2 (3), 7-33.

Guin D., Trouche L. (Eds.) (2002) *Calculatrices symboliques : transformer un outil en instrument du travail mathématique, un problème didactique*. Grenoble : La pensée Sauvage éditions.

MacKenzie D., Wajcman J. (Eds.) (1985) *The Social Shaping of Technology: How the Refrigerator Got Its Hum*. Milton Keynes, Open University Press.

Margolinas C. (1998) Étude de situations didactiques « ordinaires » à l'aide du concept de milieu : détermination d'une situation du professeur. *Actes de la huitième école d'été de didactique des mathématiques.*

Margolinas C. (2004) *Points de vue de l'élève et du professeur Essai de développement de la théorie des situations didactiques*. Université de Provence.

Maschietto M., Trouche L. (2010) Mathematics learning and tools from theoretical, historical and practical points of view: the productive notion of mathematics laboratories. *ZDM The International Journal on Mathematics Education* 42(1), 33-47.

Mumford E. (1983) *Designing human systems for new technology: the ETHICS method*. Manchester: Manchester Business school.

Perrin-Gloria M.-J., Hersant M. (2003) Milieu et contrat didactique, outils pour l'analyse de séquences ordinaires. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 23(2), 217-276.

Piaget J. (1967) *Logique et connaissance scientifique*. Paris : ESF.

Rabardel P. (1995) *L'homme et les outils contemporains*. Paris : A. Colin.

Sperandio J.-C. (1984) *L'ergonomie du travail mental*. Paris : Masson.

Trouche L. (2005) Des artefacts aux instruments, une approche pour guider et intégrer les usages des outils de calcul dans l'enseignement des mathématiques. *Actes de l'Université d'été de Saint Flour. Le calcul sous toutes ses formes* (pp. 265-290). http://www3.ac-clermont.fr/pedago/maths/pages/site_math_universite/CD-UE/Texte_16.doc (Dernier accès avril 2012)

Vygotsky L. (1934) *Pensée et langage*. Paris: Editions la dispute.

Williams R., Edge D. (1996) The social shaping of technology. *Research Policy* 25, 856-899

ANNEXES

(1

Optimisation et complexes.

Dans un repère orthonormal direct, on considère les points A et B d'affixes $z_A = 1 + i$ et $z_B = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i$. On appelle $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1.

1. Donner la forme exponentielle de z_A et z_B.
2. On considère le point M d'affixe $e^{i\alpha}$ avec $\alpha \in]-\pi ; \pi]$ Justifier que M appartient au cercle $\mathscr{C}$.

On considère l'application f qui à tout point M de $\mathscr{C}$ associe $f(M) = MA \times MB$.

Réalisation de la figure et conjectures.

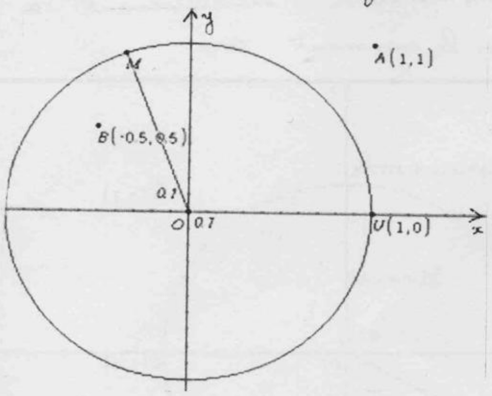
Ouvrir un classeur. Graphiques et géométrie.

* Nommer O l'origine du repère ; U (1 ; 0). Placer A et B.

Méthode : placer approximativement les points (icône point), les nommer immédiatement, faire apparaître leurs coordonnées et corriger si besoin est. (en sélectionnant chacune des coordonnées)

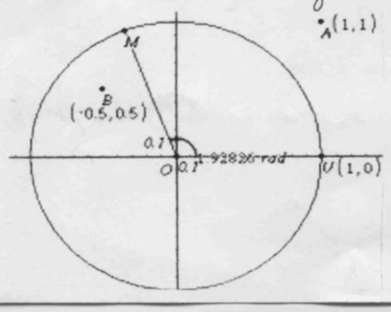
* Tracer le cercle $\mathscr{C}$ (cercle de centre O qui passe par U !)

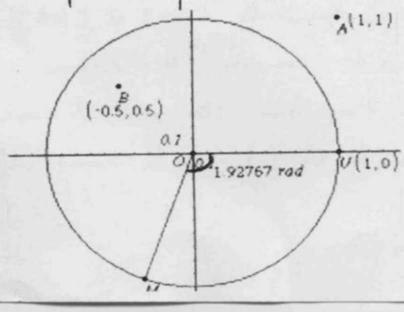
Placer M sur $\mathscr{C}$ et tracer le segment [OM].



Le but du TP est d'étudier les variations de f en fonction de α.

Le logiciel ne nous permet que de mesurer des angles géométriques (icône mesures → angle montrer U puis O puis M)





2

si $\alpha \in [0 ; \pi]$ $\qquad \alpha = \text{mes } \widehat{UOM}$

si $\alpha \in]-\pi ; 0]$ $\qquad \alpha = -\text{mes } \widehat{UOM}$

Constat : si $\alpha \in [0, \pi]$ ordonnée de M $\geqslant 0$ $\qquad y_M \geqslant 0$

si $\alpha \in]-\pi ; 0]$ ordonnée de M ≤ 0 $\qquad y_M \leq 0$

donc signe de α = signe de $\dfrac{y_M}{|y_M|}$

* Stocker, dans un coin de l'écran, la mesure de l'angle géométrique → a

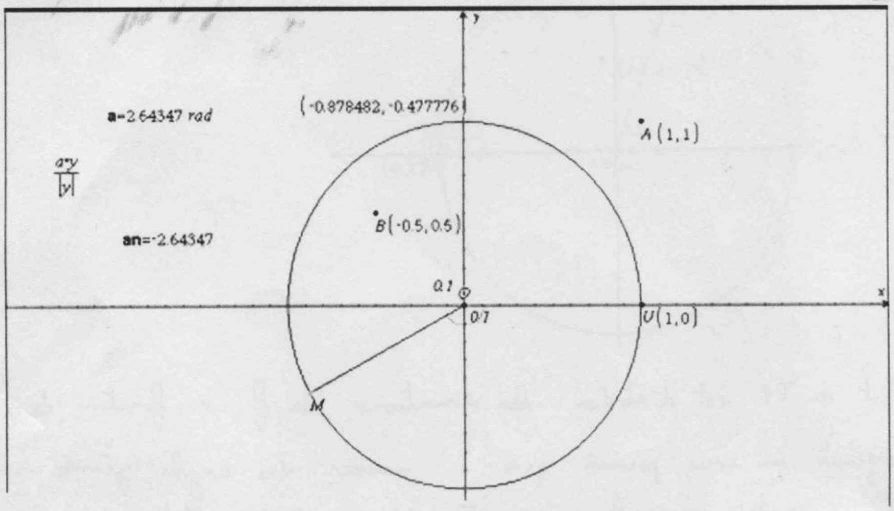
Nous allons créer une nouvelle variable $a \dfrac{y}{|y|}$. Pour cela :

→ afficher les coordonnées de M

→ taper, dans un coin de l'écran, le texte $\dfrac{a \cdot y}{|y|}$

→ calculer l'expression (en montrant successivement a et y_M)

→ stocker le résultat en le nommant an



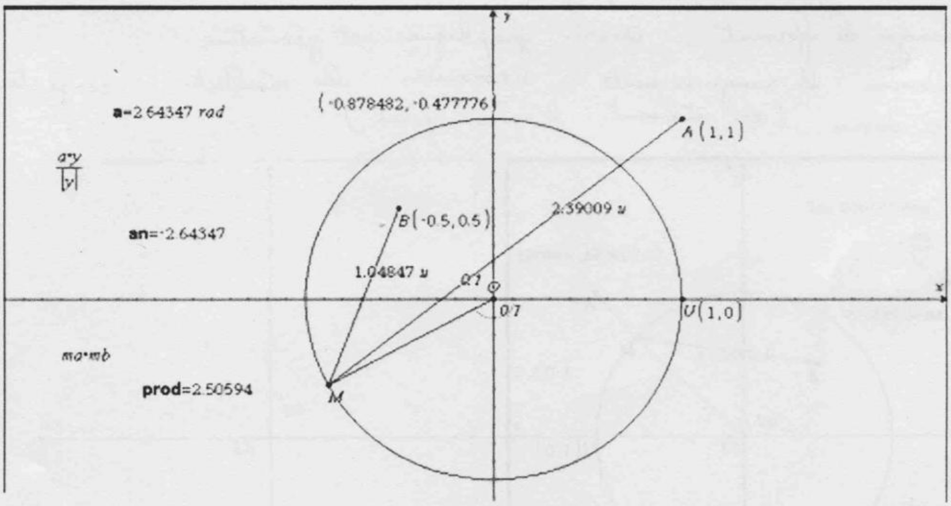
* Tracer les segments [MA] et [MB]. Mesurer les.

Taper, dans un coin de l'écran, le texte ma . mb.

Calculer l'expression (en montrant successivement les mesures de [MA] et [MB])

Stocker le résultat en le nommant prod.

3



Pouvez-vous, en déplaçant le point M, conjecturer les variations de f(M) en fonction de α ?

* Représentons le nuage de points associé.

Ouvrir une nouvelle page Tableur et listes.

Capturer les valeurs de an en colonne A et celles de prod en B.

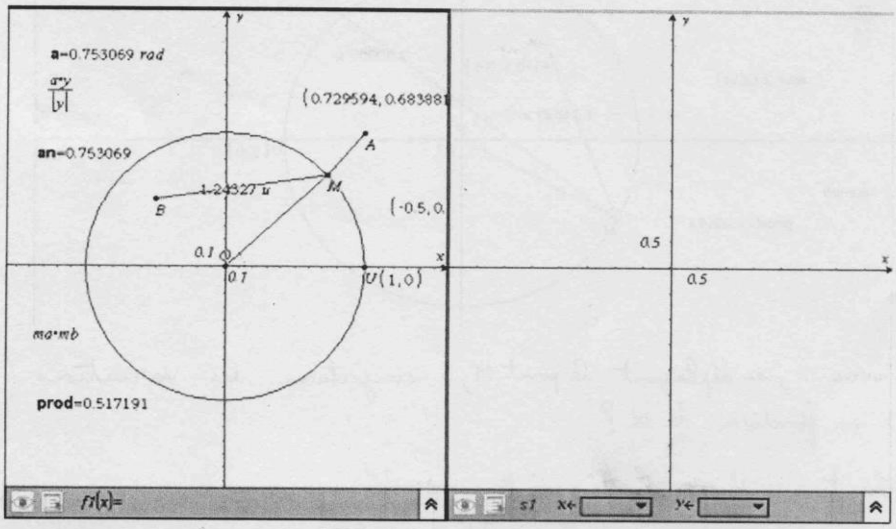
Nommer les colonnes.

	A lx	B ly	C
◆	=capture(an,1)	=capture(prod,1	
1	-2.38186	2.92058	
2	-2.33268	2.98919	
3	-2.29815	3.03534	
4	-2.28763	3.04905	
5	-2.23683	3.11297	
6	-2.19402	3.16376	
7	-2.15398	3.20863	
8	-2.14781	3.2153	
9	-2.08927	3.27554	
10	-2.04571	3.31657	
11	-2.03211	3.3287	
12	-2.0286	3.33179	
13	-1.84849	3.4597	
14	-1.66802	3.52618	
15	-1.47709	3.52685	
16	-1.37242	3.49671	
17	-1.30746	3.4673	

A ly:=capture(prod,1)

4

Revenir sur la 1ère page.
Changer de format. Ouvrir graphiques et géométrie
Dessiner le nuage de points. Retrouver les résultats conjecturés ci dessus (en utilisant l'icône point)



$\boxed{\text{Partie théorique}}$

3°) **Montrer, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'égalité :**

$$e^{i2\alpha} - 1 = 2i \sin \alpha e^{i\alpha}.$$

Montrer l'égalité :

$$f(M) = \left| e^{i2\alpha} - 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} i\right) e^{i\alpha} \right|.$$

En déduire que $f(M) = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(-\frac{3}{2} + 2 \sin \alpha\right)^2}$.

4°) **a.** En utilisant les résultats précédents, montrer qu'il existe deux points M de $\mathscr{C}$, dont on précisera les coordonnées, pour lesquels $f(M)$ soit minimal. Donner cette valeur minimale.

b. Montrer qu'il existe un unique point M de $\mathscr{C}$, dont on donnera les coordonnées, pour lesquels $f(M)$ soit maximal. Donner cette valeur maximale.

L'IMPACT D'UN PROJET DE RECHERCHE SUR LE DEVELOPPEMENT PROFESSIONNEL D'UN ENSEIGNANT : EXPLORATION DE LA NOTION DE FONCTION

Claire Vaugelade BERG[*]

Résumé – Le but de cet article est d'analyser l'impact d'un projet de recherche effectué au sein d'une université en Norvège sur le développement professionnel d'un enseignant en mathématique au niveau secondaire et plus particulièrement sur son approche documentaire. A travers sa participation à ce projet, l'enseignant est amené à questionner sa compréhension de la notion de fonction et son utilisation du logiciel GeoGebra. L'analyse montre que ce questionnement permet à l'enseignant d'élargir sa compréhension de la notion de fonction. Le cadre théorique utilisé dans cet article s'inspire de la théorie de l'activité et de l'approche documentaire.

Mots-clefs : Notion de fonction, utilisation de GeoGebra, théorie de l'activité, approche documentaire, développement professionnel

Abstract – The aim of this article is to analyse the impact of a developmental project conducted at a university in Norway on a teacher's professional development, and more specifically on his documentational approach. Through his participation to the project, the teacher started to question both his own understanding of the notion of function and his use of GeoGebra. Results from data analysis show that by engaging in this process, the teacher was able to develop his understanding further. The theoretical approach used in this article is elaborated both on activity theory and on documentational approach.

Keywords: Notion of function, the use of GeoGebra, activity theory, documentational approach, teachers' professional development

I. INTRODUCTION

Nous proposons, dans cet article, d'examiner l'influence d'un projet de recherche effectué en Norvège sur la pratique d'un enseignant en mathématiques au niveau du secondaire. Plus particulièrement, la participation de cet enseignant au projet de recherche *Teaching Better Mathematics* (TBM) lui permet de résoudre une tension éprouvée au niveau de son approche documentaire (Gueudet et Trouche 2009) liée à la notion de fonction et à l'utilisation du logiciel GeoGebra. L'utilisation et les mutations engendrées par différents programmes ont été largement examinées, par exemple Falcade, Laborde et Mariotti (2007) ainsi que Drijvers, Doorman, Boon, Reed et Gravemeijer (2010) ont analysé les différents challenges rencontrés aussi bien par les étudiants que par les enseignants. Dans cet article, je propose de suivre l'approche documentaire (Gueudet et Trouche 2008) comme cadre théorique et ainsi de pouvoir suivre le travail de préparation d'un enseignant et les difficultés qu'il rencontre lors de cette préparation. Le but de cet article en particulier est d'analyser la tension que l'enseignant éprouve entre sa propre compréhension de la notion de fonction et sa façon d'utiliser le programme GeoGebra. Cette tension sera mise à jour à la suite d'un atelier de travail, élément central du projet TBM, et résolue pendant un entretien avec le chercheur au cours duquel ces problèmes ont été discutés. La collaboration entre enseignants participant au projet de recherche et chercheurs est articulée suivant le cadre théorique de la théorie de l'activité développée par Engeström (1999).

La structure de l'article est la suivante : les principes de base du projet sont présentés dans la première partie de l'article et sont conceptualisés à l'aide de la théorie de l'activité. La deuxième partie explique le cadre méthodologique suivi pour l'articulation de la collaboration

[*] University d'Agder, Kristiansand– Norvège – claire.v.berg@uia.no

© Berg, C. V. (2012) L'impact d'un projet de recherche sur le développement professionnel d'un enseignant : exploration de la notion de fonction. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21^e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT6, pp. 799–807). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

entre chercheurs et enseignants et le rôle central de l'approche documentaire dans le travail de l'enseignant. Après l'analyse des données, les différentes implications de cette recherche pour la collaboration entre enseignants et chercheurs sont discutées. Le but de cet article est de répondre aux questions suivantes : comment observer, conceptualiser et analyser une forme particulière de collaboration, celle développée au sein du projet *TBM*, entre enseignants et chercheurs ? Et quelle est la nature de la tension éprouvée par l'enseignant lors de son approche documentaire ?

II. PRINCIPES DE BASE DU PROJET *TEACHING BETTER MATHEMATICS* ET CADRE THEORIQUE

Le projet TBM a été initié en 2007 et s'est terminé en 2010. Il s'organise autour d'une collaboration entre chercheurs appartenant à l'université d'Agder et enseignants travaillant à différents niveaux scolaires. Au sein de notre projet, nous travaillons avec des enseignants issus de 4 jardins d'enfants, 6 écoles primaires et secondaires, et 3 lycées. Notre collaboration avec les enseignants est articulée autour des axes suivants : d'une part, l'organisation d'ateliers de travail au cours desquels chercheurs et enseignants se réunissent pour explorer ensemble un thème particulier en mathématiques et d'autre part, la visite des différentes écoles participant au projet. Les ateliers de travail sont organisés autour d'une présentation en séance plénière d'un thème mathématique choisi à l'avance par les chercheurs en collaboration avec les enseignants, et ensuite de groupes de travail au cours desquels enseignants et chercheurs travaillent ensemble sur plusieurs tâches préparées à l'avance. La visite des différentes écoles participant au projet offre aux chercheurs la possibilité de discuter les impacts possibles du projet sur leur travail d'enseignants et ainsi suivre leur développement professionnel. Deux idées fondamentales constituent la base de notre projet : nous considérons notre collaboration avec les enseignants en termes de co-apprentissage (*co-learning aggreement*, Wagner 1997), et l'établissement de « communautés d'*inquiry* » aussi bien au niveau des chercheurs au sein de l'université, des enseignants au sein de leur école respective, et aussi au niveau de la rencontre entre ces deux communautés. L'idée de communauté d'*inquiry* (Jaworski 2007) dérive de la notion de communauté de pratique (Wenger 1998) à laquelle s'ajoute la notion d'*inquiry*. Dans cet article, j'utilise la notion d' « inquiry », c'est une notion riche et complexe et il n'existe pas d'équivalent, ni en français ni en norvégien. Dans notre travail avec les enseignants nous utilisons le terme anglais d'*inquiry*, ce qui nécessite un travail d'exploration et d'explication de la signification de cette notion dans les pratiques enseignantes. Le terme le plus proche en français est probablement « investigation ». Le fait d'adopter la perspective théorique de « communauté d'*inquiry* » nous permet d'articuler la reconnaissance d'un groupe social, ce qui dans cet article signifie groupe de chercheurs, ou groupe d'enseignants, ou bien la collaboration entre ces deux groupes, comme formant une communauté ayant un objectif précis, l'amélioration de l'apprentissage mathématique des élèves, objectif partagé par les différents membres de la communauté en question. Ici le terme « communauté d'*inquiry* » implique une démarche de recherche et d'investigation suivant trois axes différents :

1) *inquiry* au niveau des tâches mathématiques proposées par les enseignants aux élèves ;
2) *inquiry* au niveau de la préparation des tâches mathématiques par les enseignants ;
3) *inquiry* au niveau de la recherche sur la dynamique de développement présentée en 1) et 2).

En adoptant la perspective offerte par la théorie de l'activité il est possible de conceptualiser les aspects systémiques d'une communauté d'*inquiry* de la façon suivante (voir Figure 1) : si l'on considère la communauté d'*inquiry* (*community*) constituée par les chercheurs (*subject*), un des buts de leur activité est de préparer les ateliers de travail (*object*) et de les organiser régulièrement (*outcome*).

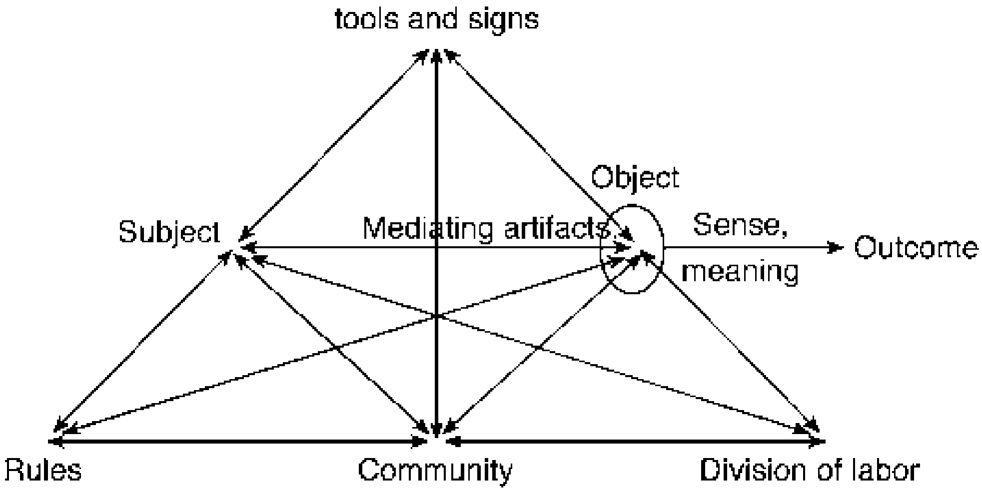


Figure 1 *– The structure of a human activity system (Engeström 1987, p. 78)*

Dans le cadre de cet article, je considère particulièrement la genèse de l'atelier de travail du mois d'avril 2009 au cours duquel la notion de fonction a été présentée et discutée. La présentation en plénière était sous ma propre responsabilité et je considère que la théorie de l'activité me permet, en tant que chercheur, de conceptualiser le processus de genèse de cet atelier. Dans ce cas précis, le terme communauté correspond à notre groupe de chercheurs comportant 6 à 7 personnes. Les décisions concernant la désignation du responsable du prochain atelier de travail ainsi que la préparation de cet atelier (*division of labor*) ont été prises au sein du groupe. Il s'agit maintenant d'étudier mon rôle (*subject*) dans la préparation de l'atelier de travail (*object*), ce qui constitue le but de l'activité du groupe. Lors de la préparation, j'ai effectué un travail documentaire, c'est-à-dire, consultation de différentes ressources :

- manuels utilisés par les enseignants au niveau collège de façon à recueillir des renseignements sur les méthodes utilisées par ces différents manuels pour introduire la notion de fonction ;
- manuels utilisés au niveau universitaire de façon à recueillir des renseignements sur les méthodes utilisées pour étudier cette notion dans les cours de Calculus ;
- informations sur internet sur différents sites norvégiens de ressources pour enseignants au niveau du collège ;
- ma propre expérience en tant qu'enseignante aussi bien au niveau collège qu'au niveau universitaire.

Afin de tenir compte de la variété des niveaux scolaires des enseignants participant au projet TBM (de la maternelle jusqu'au lycée), j'ai cherché à introduire dans ma présentation des exemples tirés de la vie de tous les jours. Mon but était de pouvoir offrir à tous les enseignants, indépendamment de leur niveau, une présentation qui pourrait être intéressante et pertinente pour leur enseignement. Je considère l'utilisation de ces différentes ressources (livres, informations sur internet, ma propre expérience) comme correspondant aux « *tools* *and signs* » de la théorie de l'activité. Ce travail m'a permis de proposer un premier document à mes collègues chercheurs. Leurs commentaires ont portés sur les aspects suivants :

- les avantages et inconvénients de commencer ma présentation de façon pragmatique, c'est-à-dire par des exemples de tous les jours ;
- quels exemples choisir, et dans quel ordre les présenter compte tenu de la variété des niveaux des différents enseignants ;
- les avantages et inconvénients de présenter la notion de fonction de plusieurs façons différentes.

A partir de leurs commentaires, j'ai eu la possibilité de développer un second document, plus élaboré, et considéré comme pouvant constituer une base pour l'élaboration de l'atelier de travail, c'est-à-dire objet de notre activité (*object*). L'un des buts de ma présentation était d'introduire la notion de fonction comme correspondance entre deux ensembles, c'est-à-dire entre le domaine de la fonction et son image, et créer ainsi une approche différente permettant d'éviter la réduction de la notion de fonction à seulement une expression algébrique (ce qui est très souvent le cas dans les manuels scolaires en Norvège au niveau du collège). Il me semblait aussi important de souligner qu'une expression algébrique constitue l'une des différentes représentations de la notion de fonction (Duval 1995) et qu'il est nécessaire de différencier un concept mathématique de sa représentation.

J'ai ensuite présenté ce document (présentation PowerPoint) pendant la séance plénière d'avril 2009 (*outcome of the activity*). Je considère que le fait de rendre visible les différentes étapes du processus d'élaboration de ce document illustre le caractère de processus en cours et ainsi la nature dialectique de la relation entre ressources et documents est soulignée (Gueudet et Trouche, 2009). Ainsi la séance plénière au cours de laquelle la notion de fonction a été présentée et discutée peut être conceptualisée comme le résultat (*outcome*) du système d'activité (*activity system*) me comprenant comme sujet (*subject*) au sein du groupe de chercheurs (*community*), et dans lequel l'approche documentaire joue un rôle crucial. Je considère que cette approche théorique permet de mettre en valeur la complémentarité de la théorie de l'activité et de l'approche documentaire, en ce sens que la seconde permet d'appréhender de façon plus approfondie le processus d'élaboration de l'objet de l'activité (*objec*t).

Comme il n'est pas possible d'évoquer dans cet article toute la complexité de l'interaction entre ces deux systèmes d'activité (chercheurs au sein de l'université, enseignants au sein de leur école respective), je propose d'étudier plus particulièrement les difficultés rencontrées par un enseignant (Richard) lors de son approche documentaire au sujet de la notion de fonction et de la résolution de cette tension suite à un atelier de travail et d'une discussion entre Richard et un chercheur (moi-même). Un des aspects central de l'approche documentaire est la reconnaissance de l'importance du processus en cours :

> A documentational genesis must not be considered as a transformation with a set of resources as input, and a document as output. It is an ongoing process. (Gueudet et Trouche 2009, p. 206)

Le but de cet article est d'illustrer la nature de ce processus, de montrer la genèse de l'atelier de travail d'avril 2009 et l'influence de celui-ci sur la façon dont Richard cherche à créer un document pertinent pour son enseignement de la notion de fonction. Il s'agit donc de suivre une des étapes du processus de l'approche documentaire de Richard liée à l'utilisation du logiciel GeoGebra.

Le processus d'élaboration d'un document nécessite la combinaison de différentes ressources et de schèmes d'utilisation (*scheme of utilization*) de la part de l'enseignant

(Gueudet et Trouche 2009). Ce document résulte d’un processus d’instrumentalisation et d’instrumentation entre l’enseignant et un ensemble de ressources. Certains aspects systémiques de la communauté d’*inquiry* constituée par les enseignants et les chercheurs peuvent influencer ces processus et c’est dans cette perspective que s’inscrit cet article (Figure 2).

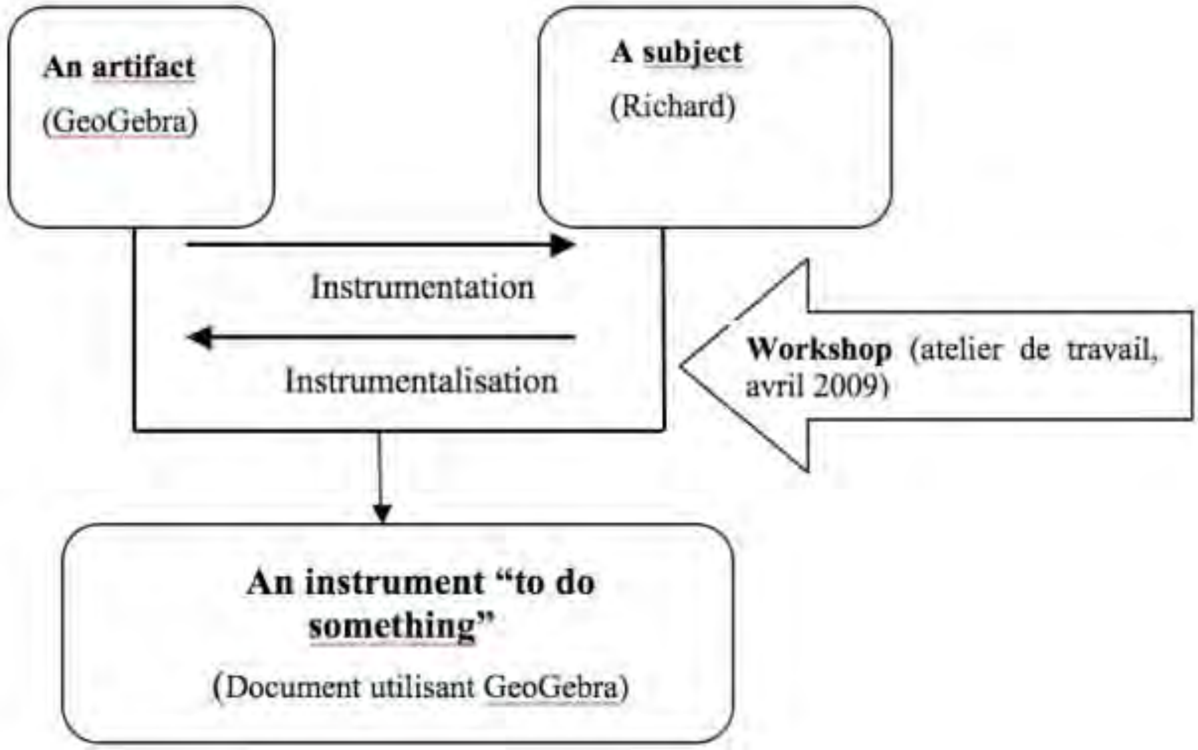


Figure 2 *– L’influence de l’atelier de travail (avril 2009) sur le processus d’élaboration d’un document utilisant GeoGebra (adaptation de Trouche 2005)*

C’est la raison pour laquelle je considère que l’introduction de la théorie de l’activité permet de conceptualiser l’influence du projet TBM sur le travail documentaire de Richard. Ainsi, il est possible de suivre les formes de collaboration entre enseignants et chercheurs développées au cours du projet TBM et d’évaluer les effets de cette collaboration sur le développement professionnel d’un enseignant individuel. Plus précisément, je propose d’étudier comment une présentation en plénière (*outcome*) du système de l’activité des chercheurs est source d’interrogation pour l’enseignant (Richard) et comment ce questionnement va mettre en lumière la tension qu’il a éprouvée lors de précédentes utilisations du logiciel GeoGebra en relation à la notion de fonction. Cette recherche va influencer la genèse d’un nouveau document, issu du travail d’investigation et de réflexion de la part de Richard, qui lui permettra d’approfondir sa compréhension de la notion de fonction et de résoudre cette tension.

III. APPROCHE METHODOLOGIQUE

L’approche méthodologique adoptée au cours de cette recherche s’inscrit dans le cadre de la recherche de développement (Freudenthal 1991 ; Gravemeijer 1994 ; Goodchild 2008). Cette approche est caractérisée par un processus cyclique entre recherche et développement, en ce sens que notre recherche est guidée par des cadres théoriques (approche socioculturelle des apprentissages et reconnaissance de notre collaboration avec les enseignants en termes de communauté de pratique) et, réciproquement, ces cadres théoriques influencent la façon dont nous préparons le développement au sein de notre collaboration avec les enseignants (préparation et réalisation des ateliers de travail). De plus, c'est en prenant en compte les résultats obtenus lors de la réalisation des activités avec les enseignants que nous pouvons envisager un nouveau cycle de développement. Une présentation plus approfondie de notre approche méthodologique est présentée dans un autre article (Berg 2010). L'approche méthodologique répondant à la problématique présentée dans cet article se définie suivant une approche phénoménologique de l'analyse des données (Miles et Huberman 1994) ce qui implique un engagement rétrospectif avec les données issues de différentes sources (notes personnelles concernant mon travail documentaire, interview et correspondance avec Richard).

IV. CONTEXTE DE LA RECHERCHE ET EXEMPLE DE L'INFUENCE DU PROJET TBM SUR L'APPROCHE DOCUMENTAIRE DE RICHARD

Richard enseigne au collège depuis de nombreuses années. Il emploie régulièrement avec ses élèves des logiciels de géométrie dynamique, particulièrement GeoGebra. Richard fait partie d'un groupe d'enseignants responsables de l'implémentation dans leur école des idées proposées au cours des ateliers de travail qui sont régulièrement organisés par le projet TBM. Cette école a une grande expérience de participation à des projets de recherche, puisque Richard et certains de ses collègues ont déjà participé à des projets similaires (Jaworski 2007). Cet article présente des épisodes extraits de plusieurs interviews qui ont eu lieu en mai 2009 et d'une correspondance par e-mail en mai 2010. A l'origine, le but de l'interview était de suivre le processus d'implémentation d'une tâche présentée lors d'un atelier de travail (Berg 2010, 2011). Dès le début de l'interview, Richard demande s'il sera aussi possible de discuter la notion de fonction et il exprime le souhait de parler du challenge qu'il ressent par rapport à cette notion. D'après Richard, ces questions résultent d'une part de sa propre expérience avec la notion de fonction et d'autre part de la présentation et discussion de cette notion en plénière lors de l'atelier de travail d'avril 2009.

1. Expérience et challenges rencontrés par Richard

C'est pendant l'interview en mai 2009 que Richard m'explique en ces termes les problèmes qu'il rencontre par rapport à la notion de fonction :

> … mais j'ai un problème ici. Tu as dit [pendant la séance plénière de l'atelier de travail] que à chaque élément de A [domaine de la fonction] correspond un élément unique dans B [image de la fonction]. … Mais si on prend l'exemple d'un cercle, parce que il y a quelque chose que je ne comprends pas ici, si on prend un cercle avec le centre à l'origine [d'un système de coordonnées] et avec un rayon 5. Alors ce cercle aura la courbe $x^2 + y^2 = 25$, et si on fait quelques changements on peut écrire $y = (25 – x^2)^{½}$. Mais si tu prends [la valeur de x égale à] 3 alors tu as *deux* valeurs [sur la courbe représentant le cercle], mais est-ce que ce n'est pas une fonction ? Et puis j'ai essayé avec GeoGebra et il s'est passé quelque chose de bizarre, parce que si je prends $(25 – x^2)^{½}$, comme ça, il [GoeGebra] ne prend que la partie supérieure [de la courbe représentant le cercle], ici [montrant sur l'écran de son ordinateur], …, tu vois ?

La tension ressentie par Richard provient, d'un coté du fait que la notion de fonction a été présentée en insistant sur le caractère de correspondance unique entre un élément du domaine de la fonction et un élément de son image, et de l'autre coté de sa propre expérience résultant de l'utilisation de GeoGebra. Richard explique ce point en détails en prenant l'exemple du cercle $x^2 + y^2 = 25$. Il propose ensuite de « faire quelques changements », c'est-à-dire qu'il souhaite exprimer cette relation sous la forme « y est égal à une expression en x ». Le challenge vient du fait que, en utilisant GeoGebra, l'expression $x^2 + y^2 = 25$ donne la courbe du cercle où le point x = 3 a deux valeurs correspondantes, alors que le caractère unique de l'image d'un élément par une fonction a été souligné pendant l'atelier de travail. De plus, lorsque Richard compare avec la courbe $(25 - x^2)^{1/2}$ à l’aide du logiciel GeoGebra, il s’aperçoit que seulement « la partie supérieure de la courbe » est représentée. Il est important de souligner ici l’équation $y = -(25 - x^2)^{1/2}$ qui n’a pas été mentionnée par Richard et qui permet d’expliquer les deux valeurs du point x = 3. Je considère que la tension ressentie par Richard lors de son utilisation de GeoGebra provient du manque de reconnaissance de ce que toutes les courbes ne représentent pas nécessairement une fonction. Ici, la distinction entre le graphe d’une fonction et une courbe représentant une expression algébrique est centrale. Je considère que la question de Richard « mais est-ce que ce n’est pas une fonction ? » offre une preuve de sa recherche d’une meilleure compréhension de la définition de la notion de fonction. Par cette question, Richard montre les difficultés qu’il rencontre au cours du processus d’approche documentaire. Il est possible que ces difficultés soient dues à la fois à son utilisation du logiciel GeoGebra (*instrumentalisation*), à la « réponse » donnée par celui-ci (*instrumentation*) et à ses réflexions suite à la présentation en plénière de l’atelier de travail d’avril 2009. Suite à notre discussion, Richard me fait part de sa volonté d’élaborer une activité dans sa classe au cours de laquelle ses élèves pourront explorer la notion de fonction à l’aide du logiciel GeoGebra. Malheureusement, je n’ai pas eu l’occasion de pouvoir observer Richard lors de l’implémentation de cette activité et d’étudier le document préparé à cet effet.

2. Evolution de la compréhension de la notion de fonction

Environ une année plus tard, j’ai repris contact avec Richard pour lui demander des informations au sujet de son enseignement de la notion de fonction. Le but de ma demande était de suivre une possible évolution aussi bien de son approche documentaire que de sa pratique enseignante, et de prendre note de ses réflexions. Ce sont les raisons pour lesquelles je lui ai envoyé le mail suivant (mai 2010) :

> J’aimerais te demander quelques renseignements au sujet de la notion de fonction. Durant ma présentation en séance plénière, j’ai présenté la notion de fonction comme une correspondance entre deux ensembles (sets). Mon but était d’offrir une perspective plus large de cette notion et pas seulement en relation à une expression algébrique. Lors de ma dernière visite, nous avons eu l’occasion de discuter quelles sont les courbes qui représentent une fonction et celles qui ne les représentent pas. Ma question est la suivante : de quelle façon cette discussion a-t-elle modifiée ta compréhension de la notion de fonction (si cela a eu un impact), quel genre de réflexions …, et est-ce que cette discussion a eu un effet sur ta pratique enseignante et si oui, quels sont ces effets ?

Quelques jours plus tard, j’ai reçu la réponse suivante :

> Ta présentation en séance plénière du 29 avril 2009 était vraiment intéressante. Je dois dire que j’ai travaillé avec la notion de fonction pendant de nombreuses années sans avoir le genre de réflexions et de compréhension que tu as provoqué ce jour là. Il y a deux choses qui m’ont particulièrement marquées : la façon dont tu as présenté la définition de la notion de fonction, avec plusieurs exemples pris dans la vie de tous les jours, et la présentation de la matrice de Janvier. Dans le passé, je n’ai pas fait tellement attention au fait que quand une valeur de x est donnée il y a une et une seule valeur de y qui correspond. C’est la raison pour laquelle j’ai eu des problèmes avec les cercles et autres genres de paraboles. J’ai remarqué que quand j’utilise GeoGebra, si j’écris $f(x) = x^{1/2}$, alors le programme montre le graphe seulement pour les valeurs positives de y. La même chose se passe pour un cercle. Maintenant, je sais pourquoi ! (réponse de Richard par e-mail, mai 2010)

Le but de mes questions était de savoir si l’atelier de travail consacré à la notion de fonction avait eu un impact sur l’approche documentaire de Richard et de suivre cet éventuel développement. A partir des réponses de Richard, je considère qu’il est possible de suivre son développement et il semblerait que deux aspects ont particulièrement retenu son attention : la définition de la notion de fonction, présentée comme une correspondance entre deux ensembles, c'est-à-dire entre le domaine de la fonction et son image. En suivant cette approche, mon but était de présenter la notion de fonction sous un aspect différent, permettant ainsi d’éviter la réduction de la notion de fonction à seulement une expression algébrique (ce qui est très souvent le cas dans les manuels scolaires en Norvège au niveau du collège). Il semblerait que cette perspective ait attiré l'attention de Richard puisqu'il explique les problèmes qu'il a eu en utilisant GeoGebra par un manque de conscience de cet aspect. Un autre aspect souligné par Richard concerne la matrice de Janvier (voir annexe 1). Celle-ci permet de mettre en valeur les différentes approches possibles pour travailler avec toutes les représentations de la notion de fonction. Ainsi je considère que cette matrice permet de souligner les différentes représentations possibles de la notion de fonction (expression algébrique, graphe, situation, etc.) et l'importance de pouvoir passer d'une représentation à une autre (Duval 1995). Cet aspect a été aussi souligné lors de la séance plénière. Ainsi au travers des réflexions de Richard, il est possible de suivre quels éléments ont été importants pour le développement de sa compréhension de la notion de fonction.

V. CONCLUSION

Le but de cet article était d'une part d'examiner et de conceptualiser une forme particulière de collaboration entre chercheurs et enseignants, et d'autre part d'analyser la nature de la tension éprouvée par l'enseignant lors d'une des étapes du processus de l'approche documentaire. La théorie de l'activité a été utilisée comme cadre théorique permettant de conceptualiser les aspects systémiques de la communauté d'*inquiry* constituée par les chercheurs au sein de l'université et de considérer l'organisation de l'atelier de travail d'avril 2009 comme résultat (*outcome*) de leur activité. Par ailleurs, l'approche documentaire a permis de conceptualiser d'une part la préparation de l'atelier de travail d'avril 2009 et d'autre part la tension éprouvée par l'enseignant résultant de son utilisation du logiciel GeoGebra et de son manque de compréhension de la notion de fonction. Je considère que cet article permet d'étudier la possibilité de combiner la théorie de l'activité et l'approche documentaire de façon à pouvoir conceptualiser, dans toute sa complexité, une des étapes du travail documentaire d'un professeur au sein de sa participation au projet TBM.

Ainsi l'approche théorique et l'approche méthodologique adoptées dans cet article permettent à la fois d'étudier les dimensions collectives en relation à la collaboration entre chercheurs et enseignants, et les dimensions individuelles en relation au travail documentaire d'un enseignant individuel. L'analyse a permis d'articuler et de comprendre de façon plus approfondie le challenge de l'enseignant lors de sa préparation d'une leçon au sujet de la notion de fonction et des difficultés éprouvées dues à une compréhension limitée de cette notion. Je considère que l'atelier de travail peut être considéré comme un catalyseur permettant le développement de sa compréhension de la notion de fonction et l'avancement dans son travail documentaire. Dans le cas de cette recherche, il est ainsi possible de suivre et d'évaluer les effets de la collaboration entre enseignants et chercheurs et l'impact de cette collaboration sur le développement professionnel d'un enseignant individuel.

REFERENCES

Berg C. V. (2010) Le projet TBM : un exemple de modalité de collaboration entre chercheurs et praticiens en Norvège. *Revue Recherches en Education 1*, 130-146. Nantes, France.

Berg C. V. (2011) Adopting an inquiry approach to teaching practice : The case of a primary school teacher. In Pytlak M., Swoboda W., Rowlands T. (Eds.) (pp. 2580-2589) *Proceedings of the seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. February 2011*. University of Rzeszow, Poland.

Drijvers P., Doorman M., Boon P., Reed H., Gravemeijer K. (2010) The teacher and the tool: instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics 75*, 213-234.

Duval R. (1995) *Sémiosis et pensée humaine. Regitres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang, Collection Exploration.

Engeström Y. (1987) *Learning by expanding: An activity-theoretical approach to developmental research*. Helsinki: Orienta-Konsultit.

Engeström Y. (1999) Activity theory and individual and social transformation. In Engeström Y., Miettinen R., Punamäki R.-L (Eds.) *Perspectives on activity theory (learning in doing: social, cognitive, and computational perspectives).* New York : Cambridge University Press.

Falcade R., Laborde C., Mariotti M. A. (2007) Approaching functions: Cabri tools as instruments of semiotic mediation. *Educational Studies in Mathematics 66*, 317-333.

Freudenthal H. (1991) *Revisiting mathematics education*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Goodchild S. (2008) A quest for "good" research. In Jaworski B., Wood T. (Eds.) (pp. 201-220). *International handbook on mathematics teacher education: Vol. 4. The mathematics teacher educator as a developing professional: Individuals, teams, communities and networks* Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Gravemeijer K. (1994) *Developing realistic mathematics education*. Utrecht, The Netherlans: Freudenthal Institute.

Gueudet G., Trouche L. (2008) Du travail documentaire des enseignants : genèses, collectifs, communautés. Le cas des mathématiques. *Éducation et didactique 2*(3), 7-33.

Gueudet G., Trouche L. (2009) Towards new documentation systems for mathematics teachers ? *Educational Studies in Mathematics*,*71*, 199-218.

Janvier C. (1978) *The interpretation of complex Cartesian graphs – Studies and teaching experiments.* Nottingham: Shell Centre for Mathematics Education.

Jaworski B. (2007) Theoretical perspectives as a basis for research in LCM and ICTML. In B. Jaworski et al. (Eds.) *Læringsfellesskap i matematikk – learning communities in mathematics*. Bergen: Caspar Forlag.

Miles M. B., Huberman M. A. (1994) *Qualitative data analysis 2nd ed*. Thousand Oaks, CA: Sage.

Trouche L. (2005) An instrumental approach to mathematics learning in symbolic calculator environments. In Guin D., Ruthven K., Trouche L. (Eds.) (pp. 137-162)*The didactical challenge of symbolic calculators: turning a computational device into a mathematical instrument*. New York : Springer.

Wagner J. (1997) The unavoidable intervention of educational research: a framework for reconsidering researcher-practitioner cooperation. *Educational Researcher*,*26*(7), 13-22.

Wenger E. (1998) *Communities of practice: Learning, meaning and identity*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Annexe 1 ***:Matrice de Janvier (adaptée de Janvier 1978) par Claire Vaugelade Berg***

From / To	**Situation**	**Table**	**Graph**	**Algebraic expression**
Situation	-----------	measuring	drawing	modelling
Table	reading	-----------	plotting	adjusting from table
Graph	interpreting	reading	-----------	adjusting from graph
Algebraic expression	recognising	calculating	plotting	------------

DE LA CONCEPTION A L'USAGE D'UN DIAGNOSTIC DANS UNE BASE D'EXERCICES EN LIGNE

Françoise CHENEVOTOT-QUENTIN* – Brigitte GRUGEON-ALLYS** – Julia PILET*** – Élisabeth DELOZANNE****

Résumé – Cet article expose la stratégie de dissémination de résultats de recherche portant sur un diagnostic en algèbre élémentaire dans la plateforme *LaboMEP* de l'association Sésamath[1]. L'enjeu de l'intégration d'un diagnostic dans une base d'exercices en ligne est de mettre à la disposition des enseignants des outils pour organiser la gestion de l'hétérogénéité des apprentissages et leur permettre la différenciation des enseignements en fonction des besoins des élèves de la classe.

Mots-clefs : Environnements Informatiques d'Apprentissage Humain (EIAH), Didactique des mathématiques, Différenciation des apprentissages, Diagnostic cognitif, Algèbre élémentaire

Abstract – This article deals with the dissemination of research results concerning assessment of algebra ability through the Sésamath association's *LaboMEP* platform. The aim of the integration of the assessment in an online database system is to provide teachers with the tools to manage students' heterogeneity and to allow differenciation in learning depending on the pupils in the class.

Keywords: E-learning environment, Mathematics education, Differentiated learning, Cognitive diagnosis, School algebra.

I. PROBLÉMATIQU

Notre contribution relève du groupe de travail n°6 consacré aux ressources et au développement professionnel des enseignants. Plus précisément, nous nous intéressons à la conception et aux usages de ressources de diagnostic et de différenciation (pôle 1 du GT6). Le succès auprès des enseignants de la plateforme *MathEnPoche* (MEP) de l'association Sésamath montre que la mise à disposition d'outils informatiques d'assistance à l'activité des enseignants correspond bien à un besoin grandissant (Artigue et Gueudet 2008).

Notre travail s'inscrit dans le contexte des projets Pépite et Lingot[2], projets de recherche pluridisciplinaire en EIAH (Environnements Informatiques d'Apprentissage Humain), fruits d'une longue collaboration entre chercheurs en didactique des mathématiques et en informatique (Delozanne et al. 2010), sur l'apprentissage de l'algèbre à la fin de la scolarité obligatoire (16 ans en France).

Nous présentons ici la dissémination des résultats de nos recherches sur le diagnostic dans la base d'exercices en ligne *LaboMEP* de Sésamath afin de fournir aux enseignants des outils pour gérer l'hétérogénéité des apprentissages en algèbre et organiser la différenciation de l'enseignement en fonction des besoins des élèves. Ce travail s'inscrit dans le cadre d'un

* Laboratoire de Didactique André Revuz (LDAR) et Université d'Artois – France – francoise.chenevotot@univ-paris-diderot.fr
** Laboratoire de Didactique André Revuz (LDAR) et Université de Picardie – France – brigitte.grugeon@univ-paris-diderot.fr
*** Laboratoire de Didactique André Revuz (LDAR) – France – julia.pilet@univ-paris-diderot.fr
**** L'UTES, Université Paris VI – France – elisabeth.delozanne@lip6.fr

[1] Site de l'association Sésamath : http://mathenpoche.sesamath.net/

[2] Le projet Pépite (de 1995 à 2002) a conduit à l'élaboration du logiciel *Pépite* qui construit un profil cognitif en algèbre d'un élève de niveau fin de scolarité obligatoire à partir de ses réponses à un test spécialement élaboré à cet effet. Le projet Lingot (de 2002 à 2008) a conçu, réalisé et évalué des environnements informatiques de diagnostic et d'apprentissage en algèbre (Delozanne et al. 2005a).

© Chenevotot-Quentin F., Grugeon-Allys B., Pilet J., Delozanne E. (2012) De la conception à l'usage d'un diagnostic dans une base d'exercices en ligne. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT6, pp. 808–823). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

projet de recherche en réponse à un appel d’offres PICRI de la région Ile de France, débuté en 2009[3].

Voici nos questions de recherche. Quelles sont les conditions permettant d’assurer la viabilité du transfert d’un outil de diagnostic, développé dans des laboratoires de recherche, vers une plateforme d’exercices en ligne largement utilisée par les enseignants de mathématiques de collège (élèves âgés de 11 à 15 ans) ? Comment mesurer la robustesse de l’outil de diagnostic implémenté dans la plateforme ? Comment les professeurs de mathématiques intègrent-ils cet outil de diagnostic dans leurs pratiques de différenciation ?

Dans le paragraphe 2, nous présentons les éléments théoriques sous-jacents à notre approche articulant le cognitif et l’anthropologique. Au paragraphe 3, nous exposons les modalités du diagnostic individuel depuis le choix des tâches composant le test jusqu’à l’élaboration du profil de l’élève en algèbre. Le paragraphe 4 expose l’intérêt et les modalités du diagnostic collectif. Dans le paragraphe 5, nous présentons le transfert de notre diagnostic dans la base d’exercices en ligne de Sésamath. Nous évoquons l’instrumentation de l’activité de diagnostic de l’enseignant dans le paragraphe 6. Enfin, nous concluons.

II. ELEMENTS THEORIQUES

1. Approche cognitive

Grugeon (1997) a défini la compétence algébrique en fin de scolarité obligatoire, référence pour y organiser un diagnostic. Les connaissances algébriques sont structurées selon deux principales dimensions, dépendantes l'une de l'autre et partiellement hiérarchisées, les dimensions *outil* et *objet*, termes pris selon l'acception de Douady (1985).

Sur le plan *outil*, la compétence algébrique s'évalue à travers la capacité à produire des expressions et des relations algébriques pour traduire un problème, à les interpréter puis à mobiliser les outils algébriques adaptés à leur résolution. Cette dimension *outil* de l'algèbre s'exerce dans des contextes variés sur des problèmes de généralisation et de preuve, de modélisation et « d'arithmétique traditionnelle » visant la mise en équation. Parmi ces différents types de problèmes, l'utilisation de l'algèbre comme outil pour prouver des conjectures numériques revêt une importance toute particulière.

Sur le plan *objet*, nous prenons en compte le double aspect syntaxique et sémantique des expressions algébriques afin que leur manipulation formelle redonne sa juste place à la dimension technique du traitement algébrique. Ainsi la compétence algébrique s'évalue à travers des capacités techniques d'ordre syntaxique et des capacités interprétatives mettant en jeu dénotation, interprétation et sens des expressions.

Au niveau scolaire considéré (enseignement secondaire), deux éléments supplémentaires interviennent également dans l'évaluation de la compétence algébrique :

- L'entrée dans l'algèbre suppose une rupture épistémologique avec l'arithmétique (Vergnaud et al. 1987, Kieran 2007).
- L'efficacité algébrique requiert, d'une part, une capacité à interpréter des expressions algébriques à la fois au niveau procédural et au niveau structural (Sfard 1991) et, d'autre part, une capacité à adapter l'interprétation des expressions à la variété des usages visés.

[3] Projet PépiMEP codirigé par Brigitte Grugeon (LDAR, Université Paris Diderot) et Elisabeth Delozanne (LIP6, UPMC).

A partir d'une synthèse des travaux internationaux de didactique de l'algèbre, Kieran (Kieran 2007) a proposé le modèle GTG (Generational/Transformational/Global-meta level) de conceptualisation de l'activité algébrique qui différencie trois aspects complémentaires :

- L'activité générative concerne la génération des différents objets de l'algèbre : expressions algébriques (généralisant des règles numériques), formules (traduisant des relations entre des variables dans différents cadres) et équations (à une ou plusieurs inconnues modélisant un problème), identités.
- L'activité transformationnelle concerne l'utilisation de règles de transformation (règles relatives à la substitution de valeurs numériques dans des expressions, à la factorisation, au développement, à la résolution d'équations et d'inéquations).
- L'activité globale au niveau méta concerne la mobilisation et l'usage de l'outil algébrique pour résoudre différents types de problèmes (de modélisation, de généralisation, de preuve).

Cette approche permet de caractériser les types de problèmes du domaine algébrique (problèmes de généralisation, de production de formule dans différents cadres, de preuve, de reconnaissance d'expressions, de calcul algébrique) à prendre en compte pour définir un test diagnostic et les différents aspects de l'analyse multidimensionnelle nécessaire pour caractériser l'activité des élèves en algèbre élémentaire.

2. *Approche anthropologique*

L'approche cognitive mentionnée ci-dessus ne prend pas en compte l'institution dans laquelle l'élève apprend et les praxéologies mathématiques (Chevallard 2002) impliquées dans la résolution des problèmes proposés dans l'institution[4]. Au-delà de la recherche des conceptions sur les notions en jeu, les pratiques d'évaluation doivent permettre de situer la praxis des élèves dans la résolution des types de tâches travaillés à un niveau scolaire donné et les éléments technologiques investis dans leur résolution par rapport aux praxéologies mathématiques idoines.

Chaque tâche diagnostique du test peut être caractérisée par : un type de tâche, des techniques attendues relativement aux éléments technologiques et théoriques visés, les cadres et registres de représentation, la complexité des expressions en jeu, le niveau d'intervention des organisations mathématiques dans la tâche prescrite (Castela 2008). Ce point de vue nous a permis d'adapter le diagnostic à différents niveaux d'enseignement (Chenevotot-Quentin et al. 2011).

III. DIAGNOSTIC INDIVIDUEL

1. *Pratiques d'évaluation et diagnostic*

Bien que faisant partie intégrante de l'activité de l'enseignant, le diagnostic peut avoir différents sens. Ketterlin-Geller et Yovanoff (2009) ont proposé plusieurs définitions du diagnostic en mathématiques. Dans une perspective éducative, le diagnostic renseigne sur les connaissances aussi bien que sur les habiletés ou conceptions erronées des élèves. Il permet alors à l'enseignant de repérer ce que ses élèves savent ou ne savent pas faire par rapport aux attentes institutionnelles.

[4] Les praxéologies sont définies à partir de l'étude des programmes, des documents d'application et des principaux manuels utilisés dans les classes.

Par ailleurs, ces auteurs distinguent deux types de pratiques d'évaluation. La première, l'analyse des réponses des élèves à des tests dédiés, renseigne sur les connaissances et les habiletés en cours de construction par les élèves. Si elle permet d'avoir accès aux conceptions erronées, elle donne peu d'informations sur les erreurs mathématiques persistantes. La deuxième, l'évaluation diagnostique cognitive, donne des informations sur le processus cognitif de l'élève. Elle est basée sur la connaissance du savoir mathématique en jeu et sur une analyse statistique des réponses. Dans les deux cas, l'enjeu porte donc principalement sur une étude locale des conceptions erronées.

Nous nous intéressons à un diagnostic cognitif dont le rôle est de permettre la prise de décisions concernant les apprentissages. Au-delà de l'étude des conceptions erronées, notre enjeu consiste à étudier globalement les cohérences de fonctionnement des élèves dans un domaine mathématique donné, ce qui nécessite l'analyse des réponses des élèves dans un domaine organisé.

2. *Modalités du diagnostic individuel*

Le premier outil de diagnostic, d'abord un outil papier/crayon (Grugeon 1997), a donné lieu à une implémentation informatique partielle avec la conception du logiciel *Pépite* (Jean et al. 1998). *Pépite* construit en partie automatiquement le profil cognitif en algèbre d'un élève à la fin de la scolarité obligatoire à partir de ses réponses à un test systématique spécialement conçu à cet effet. Ce profil est une description de l'activité de l'élève en algèbre élémentaire repérant ses cohérences de fonctionnement.

Le test est composé de 22 tâches diagnostiques (51 items) choisies en croisant à la fois les différents aspects de la compétence algébrique, pris comme référence, et les types de tâches développés dans les programmes pour le niveau considéré. Ces tâches recouvrent les différents problèmes du domaine algébrique : problèmes de mathématisation pour généraliser, modéliser, prouver ou mettre en équation (12 items), exercices techniques de calcul (22 items) ou de reconnaissance (32 items).

Ces tâches diagnostiques impliquent différents types de tâche des programmes de collège et de seconde comme on peut le voir dans le tableau 1 :

- De calcul algébrique : développer ou factoriser des expressions algébriques, résoudre des équations du (ou se ramenant au) premier degré.
- De production d'expression, de formule ou de mise en équation pour traduire des relations entre variables selon les conditions de l'énoncé.
- De traduction ou de reconnaissance de relations mathématiques d'un registre de représentation dans un autre.
- De résolution de problèmes dans différents cadres (numérique, algébrique, géométrique, fonctionnel) en mobilisant l'outil algébrique pour prouver des propriétés, pour mettre en équation.

Types de tâches	Nombre d'items du test	Items du test
de calcul algébrique	15 sur 51	1.1 / 1.2 / 1.3 / 1.4 / 6 / 8.1 / 8.2 / 9.1 / 9.2 / 9.3 / 9.4 / 17 / 18.1 / 19.1 / 21
de production d'expression	10 sur 51	3.1 / 10 / 11.1 / 12 / 15.1 / 15.2 / 15.3 / 16 / 19.2 / 20.2
de traduction ou de reconnaissance	19 sur 51	2.1 / 2.2 / 2.3 / 3.2 / 4.1 / 4.2 / 4.3 / 4.4 / 4.5 / 5.1 / 5.2 / 7 / 8.1 / 8.2 / 11.2 / 13 / 14 / 18.2 / 20.1
de résolution de problèmes dans différents cadres	3 sur 51	15.3 / 16 / 20.3

Tableau 1 *— Organisation praxéologique du test composé de 22 tâches*

Les tâches diagnostiques peuvent être des QCM ou de exercices à énoncés plus ou moins ouverts. En voici quelques exemples pour chaque type de tâche.

3. Exemples de tâches composant le test diagnostic

L'exercice 9 (items 9.1 et 9.2) présenté en figure 1 est un exemple de tâche en calcul algébrique. Il permet de repérer si un élève reconnaît la structure d'une expression et utilise les identités mises en jeu en fonction du but visé. Dans le cas négatif, l'analyse didactique caractérise les règles erronées utilisées.

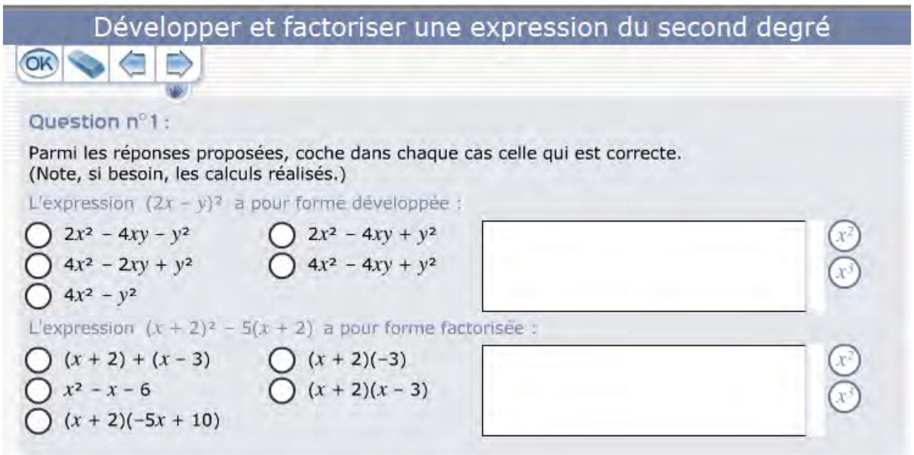


Figure 1 *— Exemple de tâche en calcul algébrique*

L'exercice 3 (item 3.1) présenté en figure 2 est une tâche de production d'expression. Il permet d'étudier si un élève sait exprimer l'aire d'un domaine plan par une expression algébrique. L'analyse des réponses donne accès aux règles de traduction et/ou de transformation utilisées par les élèves pour passer d'une représentation géométrique à une écriture algébrique.

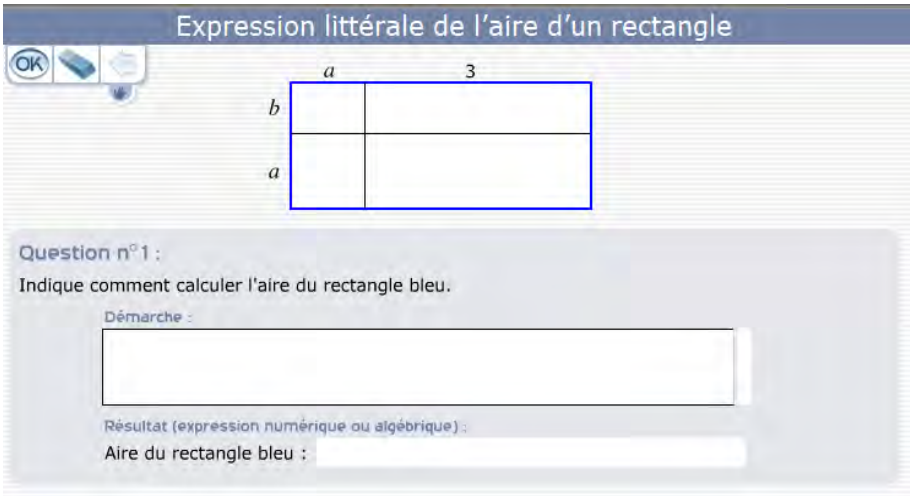


***Figure 2** — Exemple de tâche en production d'expression*

L'exercice 2 (items 2.1, 2.2 et 2.3) présenté en figure 3 est un exemple de tâche en reconnaissance d'expression. Il permet de repérer si un élève reconnaît la structure des expressions et les règles de formation des écritures algébriques qu'il a mobilisées. Le choix d'une justification (figure 4 ou 5) donne accès au niveau de rationalité mis en jeu par les élèves (Grugeon 1997) : preuve pragmatique par l'exemple numérique, preuve algébrique ou preuve par injonction (il faut que...).

***Figure 3** — Exemple de tâche en reconnaissance de la structure d'une expression*

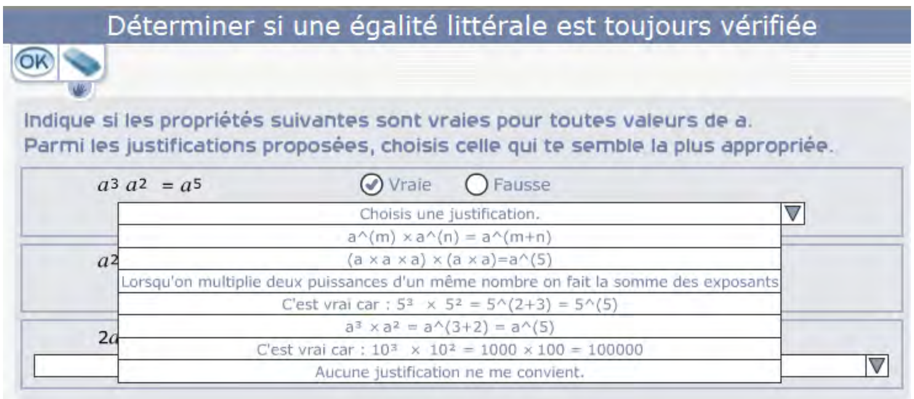


***Figure 4** — Justifications proposées dans le cas où l'élève a choisi « Vraie »*

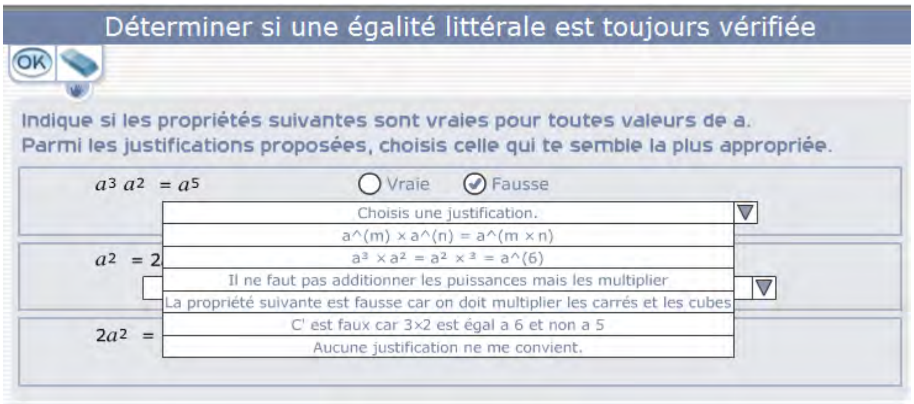


Figure 5 – *Justifications proposées dans le cas où l'élève a choisi « Fausse »*

L'exercice 16 (item 16) présenté en figure 6 concerne la preuve d'une propriété numérique. Il permet de tester la capacité des élèves à mobiliser l'outil algébrique pour produire une expression algébrique résultant d'un algorithme de calcul, puis prouver que l'expression obtenue est toujours égale à 7. La génération de l'expression donne accès au niveau de preuve mis en jeu (exemple numérique ou preuve algébrique), aux règles de traduction et de transformation utilisées pour développer et réduire l'expression.

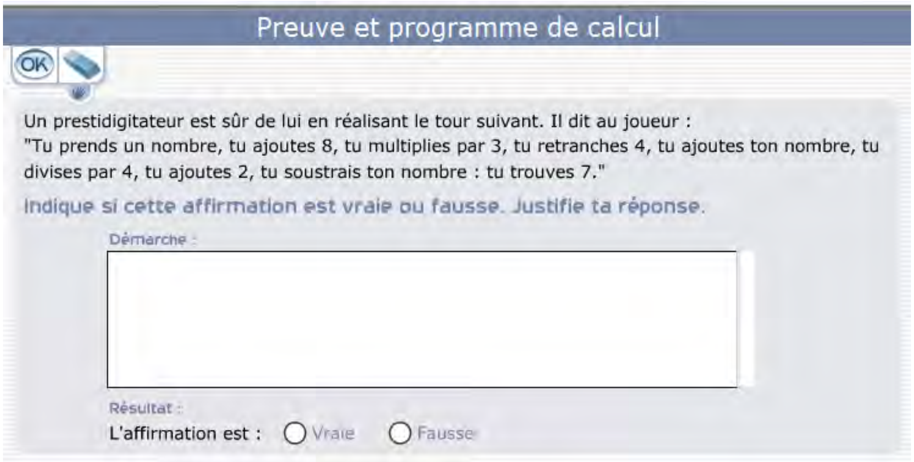


Figure 6 - *Exemple de tâche de résolution de problème*

4. *Profil d'un élève en algèbre*

Dans notre approche, les réponses des élèves ne sont pas seulement analysées en termes de réussite/échec mais aussi codées en termes de cohérences définies par une analyse *a priori*, correspondant soit à des technologies institutionnellement reconnues (i-technologie), soit à des technologies qui justifient et légitiment pour les élèves des techniques erronées récurrentes dans cette institution (e-technologie)[5].

Le codage des réponses des élèves aux différentes questions du test diagnostique s'effectue grâce à une grille d'analyse multidimensionnelle (Grugeon 1997), selon cinq dimensions : V,

[5] Ce point de vue est proche de celui introduit par Croset (2009, pp.264) :
« Ces comportements stables dans l'erreur doivent, selon nous, pouvoir s'expliquer, se justifier par la présence d'une technologie-en-acte chez ces élèves. C'est parce qu'ils ont en tête des éléments technologiques (erronés) qu'ils sont capables d'avoir un comportement stable (dans l'erreur) ».

L, EA, T et J[6]. Une analyse transversale du codage obtenu permet de construire un profil de l'élève en algèbre.

Nous définissons le profil d'un élève en algèbre élémentaire comme une description des principaux traits de son activité algébrique, situés par rapport aux praxéologies mathématiques attendues à ce niveau scolaire. Il est à la fois quantitatif, en termes de taux de réussite selon les types de tâches diagnostiques et, qualitatif, en termes de e-technologies dominantes qui décrivent les praxéologies développées globalement par les élèves sur l'ensemble des tâches. Les éléments technologiques convoqués éclairent des conceptions inadaptées sous-tendant les connaissances et techniques mises en jeu par les élèves.

IV. DIAGNOSTIC COLLECTIF

Le modèle précédent fournit une description du profil cognitif de chaque élève. Pour les enseignants, dont l'objectif est d'exploiter le diagnostic pour réguler les apprentissages des élèves, une photographie de groupes d'élèves ayant des praxis voisines en algèbre a semblé plus opérationnelle.

Un stéréotype (Delozanne et al. 2010) est défini comme une classe de profils équivalents, c'est à dire un ensemble de profils pour lesquels les e-technologies des élèves en algèbre peuvent être jugées suffisamment proches pour travailler sur des situations ayant les mêmes objectifs prioritaires d'apprentissage.

Pour spécifier le modèle de stéréotype en algèbre élémentaire, nous avons privilégié trois composantes :

- UA : l'usage de l'algèbre pour résoudre des problèmes (dimension outil de résolution et de preuve de l'algèbre). Cette composante permet d'étudier la capacité de l'élève à mobiliser algébriquement les différents types de problèmes via les équations ou via des relations fonctionnelles, les problèmes pour généraliser, prouver ou démontrer.
- TA : la traduction d'une représentation à une autre. Il s'agit ici d'étudier la capacité de l'élève à interpréter des écritures algébriques en articulation avec les autres registres de représentation (langage naturel, graphique, figure géométrique).
- CA : le calcul algébrique (dimension objet de l'algèbre). Cette composante sert à évaluer le degré de maîtrise du calcul algébrique et la nature des techniques de calcul mises en jeu par l'élève.

Pour chaque composante, différents niveaux e-technologiques ont été identifiés (tableau 2) ; ils permettent de définir des seuils d'idonéité relativement à une composante donnée. Des expérimentations réalisées en 2005 (Delozanne et al. 2005b) ont permis de faire émerger une terminologie acceptée par tous pour la restitution des résultats du test aux enseignants et aux élèves. Plus particulièrement, les niveaux technologiques des stéréotypes ont été traduits.

[6] Les cinq dimensions sont : la validité de la réponse (V), le statut des lettres (L), le niveau technologique en jeu dans les écritures algébriques utilisées lors des transformations symboliques (EA), le niveau technologique en jeu dans les représentations utilisées lors d'une traduction (T), le niveau technologique de justification (J).

Composante	Notation	Objectif	Niveaux de compétence
Usage de l'algèbre	UA	Etudier la disponibilité de l'outil algébrique et la capacité à le mobiliser dans des situations de modélisation (production de formules ou mise en équation) et de preuve.	*Niveau 1* : Disponibilité de l'outil algébrique et mobilisation adaptée.
			Niveau 2 : Mobilisation de l'outil algébrique et traduction algébrique adaptée pour au moins un type de problème.
			Niveau 3 : Mobilisation de l'outil algébrique sans cohérence entre le modèle et la situation.
			Niveau 4 : Non disponibilité de l'outil algébrique pour généraliser, prouver ou modéliser et démarches arithmétiques persistantes.
Traduction d'une représentation à une autre	TA	Etudier la capacité à traduire une expression d'un registre à un autre et la flexibilité à interpréter une représentation d'un registre à un autre.	*Niveau 1* : Traduction correcte.
			Niveau 2 : Traduction ne prenant pas en compte la reformulation des relations.
			Niveau 3 : Au moins une traduction sans cohérence (abréviative) entre le modèle et la situation.
Calcul algébrique	CA	Etudier la capacité à calculer algébriquement.	*Niveau 1* : Traitement algébrique prenant en compte les aspects syntaxique et sémantique des expressions s'appuyant sur une adaptabilité dans l'interprétation des expressions selon les usages visés (conception structurale).
			Niveau 2 : Traitement essentiellement syntaxique avec des erreurs récurrentes de transformation privilégiant une conception procédurale des expressions.
			Niveau 3 : Traitement s'appuyant sur une conception pseudo-structurale, mettant en jeu des règles de formation et de transformation incorrectes du type concaténation.

Tableau 2 *– Echelles par seuils pour chaque composante des stéréotypes*

Usage de l'Algèbre UA Niveau 3	UA3 Mobilisation de l'outil algébrique sans cohérence entre le modèle et la situation.	Exercices de mathématisation Taux de réussite : **18 %** **Fragilités** Encore des démarches arithmétiques
Traduction d'une représentation à une autre TA Niveau 2	TA2 Traduction ne prenant pas en compte la reformulation des relations.	Exercices de reconnaissance et de traduction Taux de réussite : **50 %** **Leviers** Traduction algébrique correcte pour modéliser (e=6P ; x-2=y+2)
Calcul Algébrique CA Niveau 3	CA3 Traitement s'appuyant sur une conception pseudo-structurale, mettant en jeu des règles de formation et de transformation incorrectes du type concaténation.	Exercices techniques Taux de réussite : **14 %** **Fragilités** Rôle des opérateurs non maîtrisé ($4a^3+3a^2=7a^5$) Utilisation de règles de transformation fausses ($(a+2)^2=a^2+4$; $a^m a^n=a^{m.n}$; $ax=b \rightarrow x=-b/a$)

Tableau 3 *– Stéréotype en algèbre élémentaire de Jules, élève de seconde*

Voici, par exemple, le stéréotype en algèbre élémentaire de Jules tel qu'il est présenté aux enseignants (tableau 3). Jules est en difficulté en calcul algébrique (CA3) et dans son usage dans la résolution de problèmes (UA3). Par contre, Jules traduit algébriquement, sans reformulation, des relations mathématiques entre variables dans un cadre donné (TA2). Il reste à confirmer la robustesse du diagnostic par une expérimentation portant sur un nombre d'élèves et de classes beaucoup plus grand. C'est l'enjeu du transfert du diagnostic dans la base d'exercices *LaboMEP* de Sésamath débuté en 2008.

V. TRANSFERT DU DIAGNOSTIC DANS UNE BASE D'EXERCICES EN LIGNE

1. *La base d'exercices de Sésamath*

L'association Sésamath occupe aujourd'hui une place centrale dans la création de ressources en ligne libres avec près de 1,5 millions de visites en mars 2011 sur son site *MathEnPoche* (MEP). Depuis sa création en 2001, l'association Sésamath a développé des ressources diversifiées (bases d'exercices en ligne, manuels scolaires) couvrant les programmes de mathématiques du collège. Elle fonde son succès sur sa très grande sensibilité aux besoins des enseignants utilisateurs ainsi qu'à leurs contraintes. Par ailleurs, elle a su mettre en place des mécanismes de conception collaborative pour produire, réviser et faire évoluer ses ressources. Enfin, ces dernières années, Sésamath a établi des collaborations avec des chercheurs afin d'analyser les aspects mathématiques, épistémologiques, didactiques et ergonomiques des ressources, gage d'une production de contenus mathématiques de qualité.

Les enseignants peuvent utiliser cette ressource pour proposer des exercices adaptés aux besoins des élèves sous la forme de parcours d'enseignement portant sur des thèmes mathématiques enseignés en classe. Le plus souvent, ces exercices sont choisis en fonction des scores obtenus par les élèves dans *LaboMeP* et sont proches des exercices déjà rencontrés. Aujourd'hui, aussi bien les concepteurs, que les enseignants utilisateurs de ces ressources, ressentent le besoin d'appuyer davantage le suivi des élèves et la proposition de parcours d'enseignement sur un diagnostic plus élaboré que les scores actuellement produits.

2. *Transfert du diagnostic Pépite dans la base d'exercices de Sésamath*

Tout d'abord, les enseignants demandent des outils d'évaluation adaptables à leur stratégie de régulation de leur enseignement mais aussi économes en temps. Or, *Pépite* est un test systématique qui élabore son évaluation à partir de l'ensemble des 22 tâches diagnostiques du domaine algébrique. Peut-on réduire le nombre de tâches diagnostiques composant le test tout en ayant l'assurance d'établir un diagnostic rapide, valide et fiable ? Quelles tâches diagnostiques faut-il retenir pour leur rôle prédictif ?

Le prototype du diagnostic implémenté dans *LaboMEP* est constitué de 10 tâches diagnostiques, issues des exercices originels de *Pépite*, qui se décomposent en 27 items. Le tableau 4 présente l'organisation praxéologique du test implémenté dans *LaboMEP*. Nous reprenons la répartition par types de tâches du tableau 1.

Types de tâches	**Nombre d'items du test**	**Items du test**
de calcul algébrique	8 sur 27	1.1 / 1.2 / 1.3 / 1.4 / 9.1 / 9.2 / 9.3 / 9.4
de production d'expression	7 sur 27	3.1 / 10 /15.1 / 15.2 / 15.3 / 16 / 20.2
de traduction ou de reconnaissance	11 sur 27	2.1 / 2.2 / 2.3 / 3.2 / 4.1 / 4.2 / 4.3 / 4.4 / 4.5 / 13 / 20.1
de résolution de problèmes dans différents cadres	3 sur 27	15.3 / 16 / 20.3

***Tableau 4** – Organisation praxéologique du test composé de 10 tâches*

Pour permettre d'étudier l'évolution des différents aspects de l'activité algébrique des élèves, des clones des tâches diagnostiques du test ont été conçus et développés (énoncé et analyse *a priori* automatique de chaque tâche) (Prévit 2008). La conception des clones s'appuie sur les variables didactiques caractéristiques des types de tâches et des énoncés en jeu. Les élèves peuvent donc passer le test à plusieurs reprises au cours de la même année scolaire.

Notre méthodologie consiste à développer des prototypes qui sont immédiatement testés par un cercle restreint d'utilisateurs experts, puis modifiés, avant d'être mis à la disposition de tous. Pour le développement informatique, nous nous sommes appuyés sur les développeurs de Sésamath et sur des membres de l'équipe de recherche[7]. L'organisation de Sésamath a déjà montré son efficacité (Artigue et al. 2006) pour développer des logiciels de façon collaborative et très réactive aux besoins et aux contraintes des utilisateurs. Cette méthodologie s'appuie sur une démarche itérative de conception dans l'usage des ressources (Rabardel 1995). Nous procédons par cycles de développement et par intégrations successives. Nous rejoignons l'idée de développement expérimental et d'approche de recherche adaptative (Richard et al. 2011).

3. Validité du transfert

La validité du transfert du diagnostic, depuis le laboratoire de recherche, vers la base d'exercices de Sésamath, a été attestée par une analyse combinatoire complétée par une analyse didactique.

L'analyse combinatoire a été effectuée par Darwesh (2010), dans sa thèse de doctorat. Il a comparé les stéréotypes obtenus, d'une part, avec le test complet composé de 22 tâches et, d'autre part, par des combinaisons de 15 tâches, sur un corpus de 361 élèves. Il a ensuite déterminé les 13 tâches (1/2/3/4/9/10/11/12/13/14/15/16/20) qui interviennent le plus souvent dans les meilleures combinaisons composées de 15 tâches. L'analyse didactique a validé la pertinence du choix de ces 13 tâches et a estimé que leur nombre pouvait être réduit à 10 tâches (1/2/3/4/9/10/13/15/16/20). La comparaison des stéréotypes obtenus, d'une part, avec le test complet composé de 22 tâches et, d'autre part, avec le test réduit composé de 10 tâches, donne un pourcentage d'égalité de 74%.

L'analyse didactique repose sur plusieurs arguments. Le test initial composé de 22 tâches a volontairement été conçu avec des redondances. L'exercice 10 (item 10) présenté en figure 7 relève du même type de tâche (la production d'expression) que l'exercice 3 (item 3.1) déjà présenté en figure 2. Il permet d'étudier si un élève sait traduire algébriquement un énoncé donné en langage naturel. L'analyse des réponses correctes ou erronées permet d'identifier le mode de traduction utilisée (reformulation ou non, schématisation) pour passer d'une relation mathématique exprimée en français vers une relation algébrique.

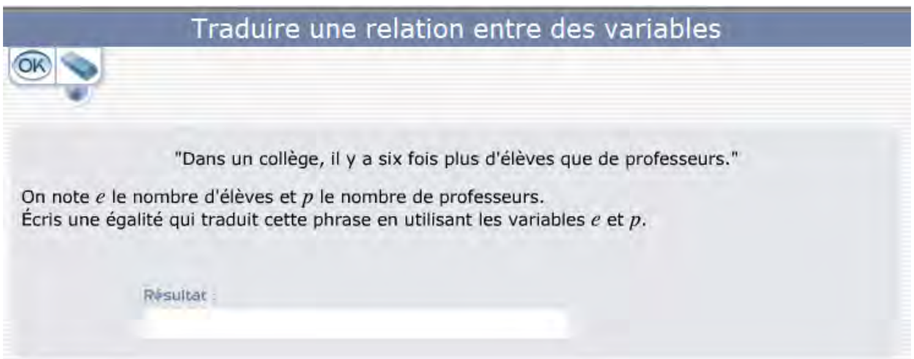


Figure 7 *– Exemple de tâche en production d'expression*

[7] Nous remercions Arnaud Rommens, Christian Vincent, Aso Darwesh, Josselin Allys pour leur contribution à l'implémentation du test diagnostic sur *LaboMEP*.

Ainsi, la détermination de chaque élément du profil repose volontairement sur les réponses de l'élève à plusieurs tâches. Cette stratégie présente des avantages évidents pour la fiabilité du diagnostic. Malheureusement, en raison de sa longueur excessive, le test initial peut ne pas être complètement renseigné par les élèves. Grâce à l'analyse *a priori* des tâches composant le test initial de 22 tâches, nous avons quantifié la richesse de chaque tâche sur le plan du diagnostic et retenu celles qui ont une valeur prédictive importante.

Des expérimentations portant sur la viabilité du transfert du diagnostic ont débuté en 2011. Par exemple, avant l'utilisation de l'outil de diagnostic, un enseignant a constitué quatre groupes d'apprentissage en algèbre dans sa classe de seconde composée de 34 élèves. Ces groupes sont les suivants : les élèves en réussite (groupe 1), les élèves en réussite avec quelques difficultés (groupe 2), les élèves moyens (groupe 3), les élèves en difficulté (groupe 4). L'enseignant souhaite surtout une aide pour clarifier le groupe des élèves moyens (groupe 3). Le diagnostic a conforté les choix faits par l'enseignant en exhibant toutefois quelques différences (tableau 5).

		Groupes constitués par l'enseignant				
		Groupe 1	**Groupe 2**	**Groupe 3**	**Groupe 4**	**Total**
Groupes constitués par Pépite	**Groupe A**	**4**	*4*	*3*	*0*	11
	Groupe B	1	**2**	*4*	*2*	9
	Groupe C	0	1	**5**	*2*	8
	Groupe D	1	0	0	**1**	2
	Total	6	7	12	5	30

Tableau 5 *– Comparaison des groupes constitués par l'enseignant et par Pépite pour une classe de seconde*

Ainsi, pour les 30 élèves de la classe présents lors du passage du test diagnostic, les quatre groupes d'apprentissage en algèbre construits à partir de *Pépite* sont les suivants :

- Les élèves donnant du sens au calcul algébrique et commençant à développer une pratique intelligente et contrôlée–CA1 (groupe A).
  - Les élèves pratiquant un calcul algébrique peu contrôlé mobilisant de façon plus ou moins fréquente des règles fausses–CA2 : avec utilisation d'une démarche algébrique adaptée pour résoudre au moins un type de problème (groupe B) ; avec utilisation de démarches numériques ou algébriques inadaptées (groupe C).
- Les élèves donnant peu de sens aux notions et à l'usage de l'algèbre – CA3 (groupe D).

Pour 12 élèves sur 30 (diagonale du tableau 5, en gras), les groupes constitués par l'enseignant et par *Pépite* sont les mêmes. De plus, pour 15 élèves sur 30, les groupes proposés par *Pépite* sont plus favorables que ceux proposés par l'enseignant (partie supérieure droite du tableau 5, en italique). Notre interprétation de ce résultat repose sur trois arguments. Tout d'abord, le test *Pépite* est conçu pour des élèves de fin de $3^{ème}$/début de 2^{nd} (15 ans) or la classe dans laquelle nous avons effectué nos expérimentations est une classe de 2^{nd} au $2^{ème}$ trimestre. Ensuite, les élèves disposaient de tout le temps nécessaire pour effectuer le test et n'étaient pas jugés sur leur rapidité à répondre aux exercices. Enfin, l'environnement informatique propose quelques interactions à l'élève, facilitant sa remise en question. Par ailleurs, le diagnostic a aussi aidé l'enseignant en pointant des difficultés qui nécessitent des apprentissages différenciés spécifiques (partie inférieure gauche du tableau 5) pour 3 élèves sur 30 pour lesquels les groupes basés sur les stéréotypes sont plus défavorables que ceux initialement constitués par l'enseignant.

Le diagnostic basé sur le test à 10 tâches implémenté sur *LaboMEP* est donc conforté par l'étude de cette classe. Il reste à le valider à une plus grande échelle.

VI. INSTRUMENTATION DE L'ACTIVITÉ DE DIAGNOSTIC DES ENSEIGNANTS

1. *Scénarii d'usage*

Comment les enseignants utilisateurs de *LaboMEP* s'approprient-ils l'outil de diagnostic *Pépite* mis à leur disposition ? Comment cet outil peut-il s'insérer dans l'activité de diagnostic des enseignants ? Nous proposons trois scénarii d'usage, exposés sur l'écran de présentation accompagnant l'outil de diagnostic sur *LaboMEP* :

- En 3ème ou en 2nd, avant de commencer le chapitre sur le calcul algébrique, pour faire des séances différenciées de rappels en fonction des besoins des élèves de la classe,
- En 3ème ou en 2nd, pendant le chapitre sur le calcul algébrique, pour préparer un contrôle au moyen d'une séance d'entraînement différenciée selon les besoins,
- En fin de 3ème, pour organiser une révision pour le Brevet.

L'approche instrumentale de l'activité développée par Rabardel (1995) a été mise en œuvre dans l'analyse de l'intégration des logiciels dans l'enseignement du point de vue des élèves.

Rogalski (Delozanne et al. 2005a) souligne la faible part des publications s'intéressant au point de vue de l'enseignant. Pour analyser l'instrumentation de l'activité de diagnostic de l'enseignant de mathématiques et la possibilité que *Pépite* soit placé en situation d'instrument, Rogalski propose de s'interroger sur :

- Quel est l'objet de l'action ? La classe ? Des groupes d'élèves ? Des élèves individuels ?
- Quel est le but du diagnostic ? Permettre la catégorisation de sous-groupes ? Aider à prendre des décisions relatives à l'adaptation de l'enseignement, à la remédiation ou encore en matière d'orientation scolaire ?

Selon l'objet et le but visé, un outil peut être plus ou moins aisément situé en position d'instrument. A sa conception, *Pépite* est destiné à des élèves individuels (diagnostic individuel) puis à la classe (diagnostic collectif) dans le but de constituer des groupes d'élèves ayant des praxis voisines en algèbre élémentaire. Le but du diagnostic est de favoriser la régulation de l'enseignement en fonction des besoins des élèves.

2. *Parcours différenciés d'enseignement*

Nous souhaitons fournir aux enseignants des outils pour gérer l'hétérogénéité des apprentissages en algèbre et organiser la différenciation de l'enseignement en fonction des besoins des élèves. A partir des différents stéréotypes des élèves, nous constituons des groupes (3 ou 4) d'élèves de profils voisins à qui nous proposons de travailler sur un même parcours d'enseignement.

Nous présentons un parcours d'enseignement (succession de tâches) destiné à des élèves dont le profil est semblable à celui de Jules (tableau 3). Ces élèves donnent peu de sens aux lettres et mobilisent peu l'outil algébrique, ou de façon non adaptée, pour résoudre des problèmes du domaine algébrique. Ils donnent peu de sens au calcul algébrique, souvent sans lien avec le numérique, et utilisent des règles de transformation sans contrôle, par exemple des règles de concaténation ($4a^3+3a^2 \rightarrow 7a^5$) ou de fausse linéarité ($a^2 \rightarrow 2a$). Mais ces élèves réussissent à traduire algébriquement, lorsqu'il n'y a pas besoin de reformulation, des relations mathématiques entre variables dans un cadre donné : c'est un levier à exploiter.

Les objectifs d'apprentissage retenus pour ces élèves sont les suivants :

- Motiver et donner du sens aux lettres comme nombres généralisés via des exercices mettant en jeu des situations de généralisation et de preuve, par exemple à travers l'étude de l'équivalence de programmes de calcul.
- Déstabiliser les conceptions erronées sur les lettres, les règles de transformation ou de traduction via des contre-exemples numériques ou en changeant de cadre.
- Développer des techniques contrôlées de calcul algébrique.

Les tâches constituant le parcours d'enseignement sont caractérisées par : un type de tâche, une technique relativement à la technologie, une théorie attendue à ce niveau scolaire, et différents niveaux d'intervention (Castela 2008). En voici quelques exemples :

- Des tâches pour montrer les limites du numérique et travailler la nécessité d'introduire les lettres dans des problèmes de généralisation et de modélisation.
- Des tâches pour déstabiliser les identités fausses en amenant les élèves à articuler les cadres algébrique et numérique à travers l'usage de contre-exemples pour prouver qu'une identité est fausse telle que celle de la figure 8.
- Des tâches pour travailler les liens entre différentes représentations à partir des exercices du site http://www.fi.uu.nl/wisweb/.
- Des tâches pour développer l'habileté en calcul algébrique (développer, factoriser,…) en contrôlant l'équivalence des expressions après transformation, par exemple avec un logiciel de calcul formel.

Les égalités suivantes sont-elles vraies pour toutes valeurs de a ? Justifier votre réponse.
$(a+b)^2 = a^2 + b^2$ → → $3a+5 = 8a$ → → $a+a^2 = 2a^3$ → → $(a+b)^2 = 2(a+b)$

Figure 8 *– Tâche pour déstabiliser les identités fausses*

Des parcours globaux seraient difficilement exploitables par les enseignants en raison de leur longueur excessive. Il est nécessaire de travailler sur des thèmes spécifiques et de définir des objectifs d'apprentissage ciblés, par exemple en lien avec la préparation d'un contrôle ou la stabilisation des acquis.

VII. CONCLUSION

Ce projet de recherche a permis d'apporter quelques éléments de réponse aux questions initialement posées.

La viabilité du transfert d'un outil de diagnostic, développé dans des laboratoires de recherche, vers une plateforme d'exercices en ligne largement utilisée par les enseignants de mathématiques de collège, repose à la fois sur une analyse combinatoire et sur une analyse didactique que nous avons présentées. Actuellement, la plateforme *LaboMEP* propose aux enseignants plusieurs clones des tâches diagnostiques du test : un clone pour le niveau 3$^{\text{ème}}$ et deux clones pour le niveau 2$^{\text{nd}}$.

La robustesse de l'outil de diagnostic implémenté dans la plateforme a fait l'objet d'une première expérimentation positive mais restreinte à une classe qu'il restera à conforter à plus large échelle. De nouvelles expérimentations sur la plateforme *LaboMEP* sont en cours avec quatre classes de 3$^{\text{ème}}$ et une classe de 2$^{\text{nd}}$.

L'étude montre que le diagnostic a un rôle prédictif pour le choix de parcours d'enseignement adaptés aux besoins des élèves ; nous l'avons illustré succinctement. Plus précisément, deux thèses sont en cours[8]. La première thèse, par Julia Pilet, vise à modéliser des parcours différenciés d'enseignement que les enseignants pourront utiliser sur *LaboMeP* pour gérer l'hétérogénéité des élèves. La deuxième thèse, par Soraya Bedja, concerne l'étude de l'instrumentation de ces ressources par les enseignants.

REFERENCES

Artigue M., Abboud-Blanchard M., Cazes C., Vandebrouck F. (2006) Suivi de l'expérimentation de la région Ile de France : ressources en ligne pour l'enseignement des mathématiques en classe de seconde. Rapport interne IREM de Paris 7.

Artigue M., Gueudet G. (2008) Ressources en ligne et enseignement des mathématiques, *Actes de l'Université d'été de mathématiques*, *Saint-Flour*. http://www3.ac-clermont.fr/pedago/maths/pages/UE2008/prog_UE_2008.htm

Castela C. (2008) Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignorés par les institutions d'apprentissage. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 28(2), 135-182.

Chenevotot-Quentin F., Grugeon B., Delozanne E. (2011) Vers un diagnostic cognitif dynamique en algèbre élémentaire. In Kuzniak A., Sokhna M. (Eds.) (pp. 827-842) *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone EMF2009, Enseignement des mathématiques et développement : enjeux de société et de formation*. Dakar. http://educmath.inrp.fr/Educmath/ressources/actes-en-ligne/emfgt6/

[8] Laboratoire de Didactique André Revuz (LDAR), Université Paris Diderot.

Chevallard Y. (2002) Structures et fonctions. In Dorier J.-L., Artaud M., Artigue M., Berthelot R., Floris R. (Eds.) (pp. 3-32) Actes de la XIème école de didactique des mathématiques. Corps (Isère) : La Pensée Sauvage.

Croset M.-C. (2009) *Modélisation des connaissances des élèves au sein d'un logiciel éducatif d'algèbre. Etude des erreurs stables inter-élèves et intra-élève en termes de praxis-en-acte*. Thèse de doctorat. Université Joseph Fourier.

Darwesh A. (2010) *Diagnostic cognitif en EIAH : le système PépiMEP*. Thèse de doctorat. Université Pierre et Marie Curie.

Delozanne E., Chenevotot-Quentin F. (coordonnateurs) (2005a) Projet de recherche « Modélisation et mise en œuvre d'environnements informatiques pour la régulation de l'apprentissage, le cas de l'algèbre avec le projet LINGOT ». *Rapport de recherche, Projet Cognitique 2002, Programme « Ecole et sciences cognitives : les apprentissages et leurs dysfonctionnements » du MRT, Rapport de fin de projet, mars 2005*. http://lutes.upmc.fr/delozanne/Publi2000-.htm.

Delozanne E., Vincent C., Grugeon B., Gélis J.-M., Rogalski J., Coulange L. (2005b) From errors to stereotypes: Different levels of cognitive models in school algebra. In Richards G. (Ed.) (pp. 262-269) *Proceedings of World Conference on E-Learning in Corporate, Government, Healthcare and Higher Education.* Chesapeake, VA: AACE.

Delozanne E., Prévit D., Grugeon-Allys B., Chenevotot-Quentin F. (2010) Vers un modèle de diagnostic de compétence. *Revue Techniques et Sciences Informatiques* 29(8-9), 899-938.

Douady R. (1985) The interplay between different settings. Tool-object dialectic in the extension of mathematical ability: Examples from elementary school teaching. In Streefland L. (Ed.) (Vol. 2, pp. 33-52) *Proceedings of the ninth international conference for the psychology of mathematics education*. Utrecht : State University of Utrecht.

Grugeon B. (1997) Conception et exploitation d'une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire. *Recherche en Didactique des Mathématiques* 17(2), 167-210.

Jean S., Delozanne E., Jacoboni P., Grugeon B. (1998) Cognitive profile in elementary algebra : the PEpite test interface. *IFIP-TC-3 Official Journal Education and Information Technology* 3, 1-15.

Ketterlin-Geller L.R., Yovanoff P. (2009) Diagnostic assessment in mathematics to support instructional decision making. Practical Assessment. *Research&Evaluation* 14(16). http://pareonline.net/getvn.asp?v=14&n=16

Kieran C. (2007) Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. In Lester F. K. (Eds.) (pp. 707-762). *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* Charlotte, NC: Information Age Publishing Inc.

Prévit D. (2008) *Génération d'exercices et analyse multicritère automatique de réponses ouvertes*. Thèse de doctorat. Université Pierre et Marie Curie.

Rabardel P. (1995) *Les hommes et les technologies, une approche cognitive des instruments contemporains*. Paris : Colin.

Richard P.-R., Fortuny J.-M., Gagnon M., Leduc N., Puertas E., Tessier-Baillargeon M. (2011) Didactic and theoretical-based perspectives in the experimental development of an intelligent tutorial system for the learning of geometr. *ZDM The International Journal on Mathematics Education* 43(3), 425-439.

Sfard A (1991) On the dual nature of mathematics conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics* 22, 1-36.

Vergnaud G., Cortes A., Favre-Artigue P. (1987) Introduction de l'algèbre auprès de débutants faibles, Problèmes épistémologiques et didactiques. *Actes du colloque de Sèvres : Didactique et acquisition des connaissances scientifiques* (pp. 259-288). Grenoble : Editions La Pensée Sauvage.

LES SIMULATEURS VIRTUELS POUR SOUTENIR L'APPRENTISSAGE DE PROBABILITÉS : UN OUTIL POUR LES ENSEIGNANTS

Viktor FREIMAN[*] – Annie SAVARD[**] – François LAROSE[***] – Laurent THEIS[****]

Résumé – Dans le courant du renouvellement des pratiques pédagogiques, l'interactivité des outils techno-pédagogiques peut-elle servir aux enseignants de mathématiques ? Notre étude exploratoire a permis aux enseignants du Nouveau-Brunswick, Canada, d'essayer le simulateur virtuel de jeux de hasard développé par une équipe de techno-pédagogues, enseignants et didacticiens du Québec. Lors d'entretiens semi-structurés, les participants ont semblé être enthousiastes face au potentiel d'enrichir leurs pratiques d'enseignement en lien avec le programme d'études en mathématiques et les situations de vie courante. De plus, ils anticipent une meilleure compréhension chez leurs élèves. Les besoins d'un accompagnement techno-pédagogique et didactique ont été également ressortis.

Mots-clefs : enseignement/apprentissage de probabilités, simulateurs virtuels, mathématiques et TIC

Abstract – In the wave of the renewing teaching practices, one can ask of the possibilities to use increasingly interactive technology by mathematics teachers. Our exploratory study allowed New-Brunswick's Canadian teachers to try out virtual simulators of games of chance that have been developed by a team of teachers, mathematics educators and specialists in educational technology from Quebec. In semi-structured interviews that followed the experimentation, the teachers-participants seem to uncover potential enriching opportunities for their students related to curriculum and real-life situations. They also anticipate better understanding in their students. The need for techno-pedagogical and didactical follow-up was also expressed by teachers

Keywords: probability teaching and learning, virtual simulators, mathematics and technology

I. CONTEXTE DE RECHERCHE

Au Nouveau-Brunswick, province canadienne, l'enseignement systématique de la statistique et des probabilités a débuté dès l'an 2000 étant associé à la reforme graduelle des programmes d'études en mathématiques qui met l'accent sur la résolution de problèmes en lien avec la vie réelle, le raisonnement, la communication mathématique et la capacité de faire le lien entre les branches de mathématiques, les mathématiques et les autres disciplines, ainsi qu'entre les mathématiques et la vie de tous les jours, tout en voulant donner du sens aux apprentissages et développer la pensée critique chez tous les élèves (MENB 2005).

Or, un faible rendement des élèves dans les épreuves provinciales (MEDPE 2010), pancanadiennes et internationales (OCDE 2003) reflète de nombreux défis auxquels les enseignants[1] font face. Notons également les défis liés au contexte d'un milieu linguistique minoritaire dans lequel vivent les francophones de la province, tels que le manque du personnel qualifié, le manque de ressources financières, matérielles et humaines (Freiman 2010) auquel s'ajoutent les défis de renouvèlement de pratiques pédagogiques conformes au cadre théorique du programme d'études (Landry 2011, sous presse)[2]. Cette situation stimule la recherche de nouvelles approches et ressources pour améliorer les apprentissages dont l'utilisation des dispositifs numériques.

[*] Université de Moncton – Canada – viktor.freiman@umoncton.ca
[**] Université McGill – Canada – annie.savard@mcgill.ca
[***] Université de Sherbrooke – Canada – francois.larose@usherbrooke.ca
[****] Université de Sherbrooke – Canada – laurent.theis@usherbrooke.ca

[1] Dans ce texte, nous utiliserons le masculin afin d'en alléger la lecture, sans préjudice au genre des personnes ayant été impliquées dans les travaux dont il sera fait mention.

[2] Pour plus de détails sur le contexte du Nouveau-Brunswick, veuillez-vous référer au texte de Freiman, Richard et Jarvis présenté au colloque EMF2012, dans le cadre du projet spécial 3.

© Freiman V., Savard A., Larose F., Theis L. (2012) Les simulateurs virtuels pour soutenir l'apprentissage de probabilités : un outil pour les enseignants. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT6, pp. 824–837). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

En mathématiques, la croissance constante d'applications numériques s'accompagne d'un questionnement sur leur apport réel pour les apprentissages. Garofalo, Drier, Harper, Timmerman et Shockey (2000) ont mentionné que le transfert des méthodes traditionnelles d'enseignement sur support papier-crayon vers les environnements informatiques n'apporte pas nécessairement d'avantages perceptibles pour l'apprenant ou l'enseignant. Au contraire, ce type d'usage peut même nuire à la diversification des usages scolaires des TIC en les faisant percevoir comme peu utiles au plan didactique ou pédagogique (Grenon et Larose 2006, Larose, Grenon, Lenoir et Desbiens 2007).

Plusieurs auteurs suggèrent que les bénéfices de l'intégration des TIC se situent essentiellement au plan contextuel. La contextualisation des apprentissages, permise notamment par la mise en œuvre des technologies numériques et des caractéristiques du Web 2.0, présente un potentiel intéressant au plan de l'approfondissement des apprentissages (Caron 2007, Pernin, Emin et Guéraud 2009). Cela notamment à cause d'une certaine interactivité entre l'apprenant, l'objet d'apprentissage et un contexte plus ou moins authentique, comme c'est le cas avec les simulations (Garofalo et al. 2000). À cet égard, pour Herrington et Oliver (2000), des activités d'apprentissage authentiques se caractérisent par leur pertinence par rapport au monde réel, leur faible structuration, leur complexité, leur transdisciplinarité ainsi que leur durée soutenue permettant l'exploration, l'analyse et la collaboration. Tel que préconisé par le programme d'études québécois, ces activités suivent le modèle SAE (Situations d'Apprentissage et d'Évaluation), soit les situations qui présentent un contexte associé à une problématique, un ensemble de tâches complexes en visant ainsi la mobilisation des ressources, en sollicitant l'ensemble de la compétence (composantes et critères) et en permettant d'acquérir de nouvelles connaissances (Boucher, Loiselle et Reiber 2006).

Nous avons choisi de développer le simulateur de probabilités mettant en scène des jeux de hasard et d'argent pour favoriser, chez l'élève, l'apprentissage quant au fonctionnement du hasard et à la capacité de distinguer les concepts de chance et de hasard, modifier les représentations au regard de la contrôlabilité de ce dernier et prendre des décisions éclairées quant à leur éventuelle participation aux jeux de hasard et d'argent (Larose, Bourque et Freiman 2010). Nous voulions, enfin, appréhender les phénomènes probabilistes par une approche expérimentale. À cet effet, comme il est difficile d'expérimenter manuellement ce type de phénomène de très grands nombres de fois, par exemple en réalisant 1000 tirages, le simulateur nous semblait être un dispositif intéressant pour aider les élèves dans leur démarche de construction de savoirs.

L'outil a été créé dans le cadre d'un partenariat entre une équipe de professeurs chercheurs soutenus financièrement par deux organismes subventionnaires et le Ministère de l'éducation, du loisir et du sport du Québec, soit le CRSH[3], le FQRSC[4] ainsi que le MELS[5], d'une part et

---

[3] Larose F., Bédard J., Bourque J., Freiman V., Karsenti T., Morin M.-P., Savard A., Theis L. (2007-2010/2011). *Impact du recours à un contexte virtuel à caractère ludique sur l'enseignement et l'apprentissage des probabilités dans deux provinces francophones*. Conseil de recherche en sciences humaines du Canada (CRSH), programme des subventions ordinaires de recherche.

[4] Larose F., Bédard J., Couturier Y., Grenon V., Lavoie L.-C., Lebrun M., Morin M.-P., Savard A., Theis L. (2008-2010/2011). *L'apprentissage des probabilités en contexte ludique : transfert de compétences et impact sur la pratique des jeux de hasard et d'argent chez des élèves à risque du 1e cycle du secondaire*. Fonds québécois de recherche sur la société et la culture (FQRSC), programme des Actions concertées sur les impacts socioéconomiques de jeux de hasard et d'argent.

[5] Larose F., Bédard J., Karsenti T., Morin M.-P., Savard A., Theis L. (2008-2011). *Impact du recours à un contexte virtuel à caractère ludique sur l'enseignement et l'apprentissage des probabilités - Construction et entretien d'un site Internet visant le soutien à l'enseignement et à l'apprentissage des probabilités au 3e cycle du primaire et au 1e cycle du secondaire.* Québec : Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport.

d'autre part, une entreprise spécialisée dans le développement et la gestion de sites techno-pédagogiques, SCOLAB[6] dont le produit phare, *Netmaths*, est le seul site de soutien à l'apprentissage des mathématiques systématiquement utilisé dans les écoles québécoises.

Le contenu du simulateur ainsi que des scénarios d'apprentissage et d'évaluation virtuels correspondants a été développé en collaboration avec des enseignants de mathématiques au secondaire à la commission scolaire Marie-Victorin du Québec ainsi que leur conseiller pédagogique (Larose et al. 2011, Theis et Savard 2010). Lors de la formation et l'accompagnement des enseignants, ceux-ci ont participé au développement et à la validation des simulateurs par la création de situations d'apprentissage et par leur utilisation en classe.

Afin de valider le simulateur et les situations SAE par les enseignants qui œuvrent dans un contexte différent du Québec, nous avons réalisé une étude pilote au Nouveau-Brunswick en présentant le nouvel outil à un groupe d'enseignants du primaire (6-8 années, 12-14 ans). Lors de deux séquences d'ateliers de formation, nous avons interrogé les participants sur leurs perceptions du dispositif technologique présenté et de son usage possible en salle de classe, ainsi que de son apport potentiel aux apprentissages des élèves. Dans notre article, nous présentons une analyse préliminaire de thèmes qui émergent dans ces entretiens qui ont été audio-enregistrés.

II. ENSEIGNEMENT DES PROBABILITES ET LES TIC

Il existe trois modes de construction du concept de probabilités (Briand 2005, Caron 2004), selon les approches théorique, fréquentielle ou expérimentale et subjective. Ainsi, l'approche théorique est présentée comme le rapport entre le nombre de cas favorables et le nombre de cas possibles d'un évènement quelconque lorsque tous les cas sont jugés équiprobables. Cette approche est fréquemment utilisée dans les situations d'apprentissage proposées aux élèves. L'approche fréquentielle est entendue comme la mesure de la fréquence relative d'un évènement par rapport à un ensemble de référence. Les probabilités sont abordées via les statistiques, ce qui permet d'établir des liens entre ces deux univers conceptuels. La troisième approche, l'approche subjective ou le modèle Bayésien, évalue « la mesure de certitude associée à certains évènements » (Caron 2004, p. 88).

Les traces de chacune de ces approches se retrouvent dans les programmes d'études du Québec et du Nouveau-Brunswick en permettant aux élèves de 12 à 14 ans d'expérimenter afin de construire du sens et surtout de tisser des liens entre les apprentissages scolaires et les situations de la vie quotidienne. D'ailleurs, l'utilisation de contextes familiers et issus du quotidien pour introduire ces concepts probabilistes semble être une approche privilégiée par plusieurs chercheurs (Borovcnik et Peard 1996, Briand 2005, Régnier 2003, Savard 2008). Nous partageons l'avis de Munisamy et Doraisamy (1998) en ce qui concerne l'introduction de situations qui favorisent la simulation et l'expérimentation et qui mettent l'accent sur la création de méthodes de traitement des données. Le raisonnement probabiliste peut ainsi se développer en cohérence avec la vision du monde de l'élève (Larrick 2004).

Les outils virtuels sont utilisés à différents niveaux d'enseignement de mathématiques. Seal et Przasnyski (2005) ont analysé les bénéfices découlant de l'utilisation de simulations de jeu de roulette à l'aide de feuilles de calculs du logiciel Microsoft Excel dans les cours de statistique universitaires. Selon ces auteurs, les simulations dans cet environnement virtuel rendent les apprentissages non seulement attrayants, mais permettent également d'étudier

[6] https://www.scolab.com/Default_fr.aspx

différentes stratégies de jeu sans recours aux mathématiques complexes et ce, à partir de multiples perspectives.

Des simulations probabilistes ont été menées par de petits groupes d'étudiants adultes via le système d'apprentissage distribué synchrone Kansas (*A Networked, Shared Application Space*). Ces simulations ont permis de conduire plusieurs fois les expériences probabilistes selon le modèle '*observe – predict – explain*' (Hennessy et al. 1995). Scanlon et al. (1997) rapportent que la technologie a permis d'obtenir les résultats d'un grand nombre d'essais, mais la capacité des groupes d'expliquer le phénomène observé restait limitée.

Utilisés dans la formation initiale des enseignants du primaire (Godino, Cañizares et Díaz 2003), les simulateurs ont permis d'aborder les conceptions probabilistes de façon authentique, de simuler des évènements probabilistes autrement difficilement observables, de faire des liens entre les probabilités théoriques et expérimentales, ainsi que de créer de nouveaux espaces de discussion et de dialogue. Toutefois, les auteurs expriment quelques réserves par rapport à l'impact de cette forme d'apprentissage relatant les difficultés de participants de distinguer les résultats estimés par l'expérimentation de ceux obtenus de façon théorique, de même que l'habileté d'expliquer le phénomène observé n'est pas affectée par les simulations (Godino et al. 2003, Batanero et al. 2005).

Les auteurs étudient également le rôle de simulateurs virtuels dans le développement de concepts probabilistes et plus particulièrement en ce qui concerne les conceptions erronées typiquement ancrées chez les élèves. Ainsi, une étude a été menée par Bill et Gayton (2010) auprès d'élèves de 10e année dans laquelle les élèves avaient pour tâches de lancer des pièces de monnaie (pile ou face) de façon séquentielle (probabilité d'avoir la séquence FPFPFP vs FPFFPP, tâche 1) ou combinée (on compare les résultats totaux de six lancers, tâche 2). Les élèves ont effectué les expériences physiques (lancer des pièces de monnaie réelles) et virtuelles à l'aide de l'outil *Fathom*™ simulation (idem). Les auteurs relatent que l'utilisation de deux types d'outils physique et virtuel a été appréciée par les élèves et les enseignants comme stratégie efficace d'enseignement permettant d'atteindre plus de profondeur dans la compréhension conceptuelle de phénomènes de hasard.

Konold et Kazak (2008) soulignent l'importance d'expériences probabilistes à répétition pour permettre aux élèves, dès le jeune âge, de développer les conceptions et perceptions de chance et de hasard en parallèle, comme, par exemple, le fait que les résultats obtenus varient d'une expérience à l'autre. La modélisation virtuelle à l'aide du *TinkerPlots* permet aux élèves d'explorer à répétition les situations de lancement de deux dès ou de rotation d'une roue chanceuse renforçant ainsi des liens entre les perceptions et les conceptions (idem.).

À la lumière des écrits recensés, en lien avec une approche didactique expérimentale, nous avons opté pour un outil virtuel proposant une simulation de jeux de hasard permettant de faire rapidement un grand nombre d'essais, accompagnée d'une présence des graphiques avec les pourcentages qui permettent de visualiser la variabilité de résultats d'essais due au hasard et d'illustrer la loi des grands nombres. Ceci donnera à l'enseignant une possibilité d'introduire les variables didactiques de différentes manières. Puisque l'outil virtuel a été créé au Québec, nous voulions investiguer, comme objectif principal, son utilité dans un contexte scolaire différent, soit celui du Nouveau-Brunswick qui a son propre régime pédagogique, ses programmes d'études et ses ressources didactiques.

Plus spécifiquement, nous voulions étudier, dans le cadre de ce projet, la sensibilité des enseignants (DeBlois, 2006) utilisateurs envers les environnements informatisés mis à leur disposition, en fait les milieux (c'est-à-dire tout ce qui agit sur l'enseignement et l'apprentissage ou ce sur quoi agit l'enseignement et l'apprentissage) vers lesquels ils porteront leur attention. Afin de pouvoir identifier les milieux auxquels les enseignants sont sensibles, nous nous sommes interrogés sur les représentations des enseignants par rapport au simulateur virtuel et aux scénarios d'enseignement-apprentissage possibles qui l'intègrent. Finalement, nous voulions mettre ces représentations en perspective de développement professionnel didactique des enseignants et le rôle que peuvent y jouer des ressources virtuelles telles que les simulateurs de jeux de hasard.

III. METHODOLOGIE

Tel que mentionné, l'essentiel du dispositif technologique développé a fait l'objet d'une mise en ligne et a été rendu accessible à l'ensemble des élèves et des enseignants des classes abonnées à *Netmaths*. Cependant, la pauvreté des connexions Internet disponibles dans certaines écoles a créé le besoin d'élaborer une version portable (sur clé USB) du simulateur et des situations de jeu associées pour permettre un usage local, par exemple dans le cadre du recours à un laboratoire portatif.

Le simulateur comme tel présente à l'élève huit situations ludiques, à caractère aléatoire, soit : un jeu de « pile ou face », de trois portes (Monty Hall), de roue chanceuse, de boulier pour tirage de type loto, un jeu de dés, un jeu de blackjack, une simulation de tirage (avec ou sans remise) de type loterie 6/49 et un jeu de roulette de type casino. Chaque situation de jeu est multiparamétrable et produit une représentation des résultats de tirage aléatoire en temps réel (ou au ralenti) sur graphe. Le choix des simulations contextualisées n'était pas le produit du hasard mais bien de la proximité avec à la fois les SAE utilisées en classe et avec des situations de jeu de hasard et d'argent vécues par l'élève ou observées dans son entourage proximal, sa famille ou ses pairs.

Les SAE en version informatisée, pour leur part, se présentaient sous la forme d'une invitation à parcourir une fête foraine et à interagir avec des bonimenteurs (animateurs virtuels) dans chaque kiosque correspondant à une situation de jeu particulière. L'interaction dynamique entre l'élève et le bonimenteur permet au premier de problématiser, de réfléchir sur une stratégie d'action (jeu), de la mettre à l'épreuve en suivant un processus de résolution de problème en temps réel, d'estimer ses probabilités de gain, de constater l'évolution de la situation de tirage et de réfléchir après le fait sur la justesse de la stratégie de jeu adoptée ainsi que sur son rapport aux probabilités réelles de gain.

À titre d'exemple, nous présentons (Fig. 1) le jeu de dés qui permet de lancer un certain nombre de dés (de 1 à 6) un certain nombre de fois (de 1 à 1000) tout en variant le montant (en $) et les conditions de gain ou de perte, ainsi que la vitesse de simulation (lente – rapide).

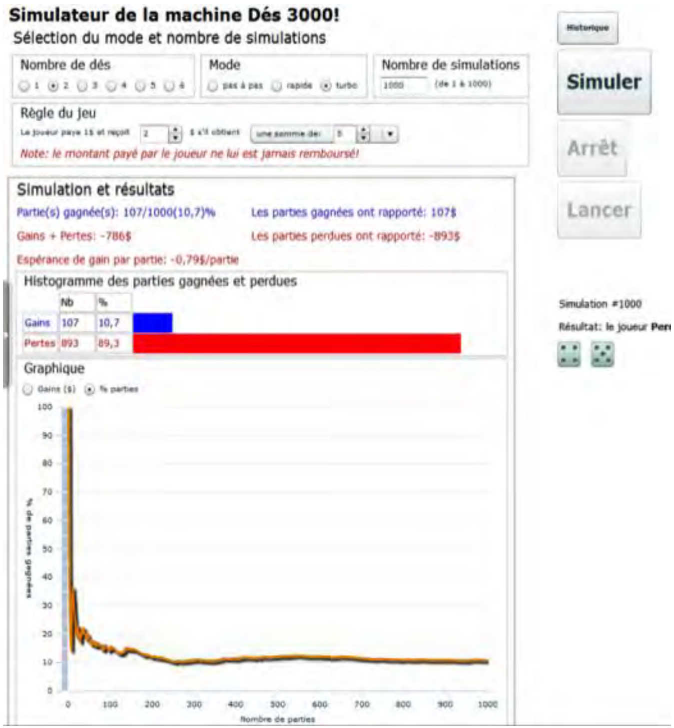


Figure 1 *– Exemple du protocole de simulation d'un jeu de hasard*

Dans la version informatisée (*Fête foraine* – Fig. 2), l'exploration est guidée par un personnage (bonimenteur) qui mène un dialogue avec l'élève.

Figure 2 *– Exemple d'introduction d'une mise au jeu dans l'option Fête foraine*

L'élève est donc invité à suivre le dialogue entre deux autres personnages, Maxime et Amanda ; en donnant des conseils aux personnages (Fig. 3).

Figure 3 – *Exemple du dialogue avec l'élève*

En proposant à l'élève un choix de réponses, on l'invite explicitement à faire des prédictions, qui, selon les recherches, seront souvent basées sur l'intuition (dans ce cas, par exemple, que chaque somme donnée par les dés serait équiprobable, ou que le 9 va être plus fréquent, car 9 est plus grand que 7, ou bien l'élève peut se fier tout simplement sur 'son nombre préféré', comme la date de naissance). Chaque choix de l'élève doit être accompagné d'une explication permettant de conserver les traces numériques de son raisonnement. Dès que les choix sont faits, l'élève sera invité à faire une expérimentation à l'aide du simulateur. Ainsi, il pourra observer les résultats et les confronter à ses prédictions. Il porte ainsi un jugement sur les règles du jeu.

Dans le cadre de notre étude exploratoire, deux séquences d'ateliers ont été offertes par le premier auteur à des enseignants du Nouveau-Brunswick (niveau primaire, 6-8 années), quatre ateliers par tour. Les enseignants participants ont été soit invités par le chercheur sur la base de travail conjoint précédent sur d'autres projets de recherche, soit sur appel à volontaires par les agents en mathématiques des districts scolaires. Au total, 18 enseignants (en quatre groupes de 2-2-6-8 participants) ont pris part au projet. La première séquence d'ateliers visait à introduire le simulateur.

Un mois et demi entre les deux séquences de formation a permis aux participants d'explorer les simulateurs à leur guise. 15 de ces enseignants ont pris part à la deuxième séquence en partageant ainsi leurs expériences. La deuxième séquence a ainsi permis de recueillir les premières représentations des participants et leur vision des possibilités d'utilisation (explorées ou anticipées).

Lors des entrevues semi-structurées de groupe (trois groupes de deux, cinq et six participants respectivement), des questions ont été posées par rapport à l'exploration réalisée (« *Qu'avez-vous fait avec les simulateurs ?* »), aux simulateurs eux-mêmes (« *Comment avez-vous trouvé l'outil ?* »), au potentiel de leur utilisation en salle de classe et en dehors (« *Que les simulateurs vous apportent-ils pour l'enseignement des probabilités* ? ») et aux besoins futurs en ressources et en support techno-pédagogique (« *Quelles sont vos suggestions pour la* *suite du projet ?* »). Les entretiens ont été audio-enregistrés et analysés par les chercheurs de façon préliminaire. Par la suite, nous associons ces résultats aux milieux dans le sens qu'indique DeBlois (2006), soit vers quoi ils dirigent leur attention.

IV. RESULTATS PRELIMINAIRES

Dans cette section, nous présentons les résultats des entretiens lors du deuxième tour d'atelier, suite aux expérimentations faites ou non par les participants. En lien avec notre question de recherche, les thèmes ressortis ont été regroupés autour de trois milieux : l'adéquation au programme d'études, la qualité du dispositif technologique sur le plan du design et du contenu pour l'apprentissage des élèves et des enseignants et le développement futur (besoin en ressources et en formation).

1. Premier milieu : adéquation au programme d'études

Dans tous les trois groupes, les enseignants ont été d'avis que les simulateurs virtuels et les SAE créés en lien avec les programmes de mathématiques au Québec sont également pertinents pour le Nouveau-Brunswick, mais qu'il y a une adaptation à faire, la nature de cette adaptation n'a pas été explicitée. On peut quand-même avancer qu'au Nouveau-Brunswick, les enseignants suivent le programme à partir d'un répertoire de résultats d'apprentissages spécifiques (RAS). Ces RAS sont rattachés aux domaines du programme d'études pour chaque niveau scolaire (nombres et opérations, régularités et relations, formes et espace, statistiques et probabilités). Le programme ne prescrit pas l'ordre dans lequel les RAS doivent être abordés ; chaque enseignant peut faire ses propres choix d'activités. Toutefois, avec l'implantation de Communautés d'Apprentissages Professionnelles (CAP), les enseignants se concertent, surtout au niveau d'évaluations ; ceci implique la nécessité de synchroniser le parcours dans différentes classes d'un même niveau. Certains participants ont même relaté les difficultés d'innover dans de telles circonstances. Un autre aspect important est ressorti de nos entretiens touchant spécifiquement le domaine des probabilités, soit le poids faible de ce domaine dans l'épreuve provinciale (12%) par rapport aux autres domaines (par exemple nombres avec 40%). Ceci explique une moindre importance accordée à ce domaine, en la tassant vers la fin de l'année scolaire ('si le temps le permet'). Certaines CAP ont quand-même commencé à introduire le domaine progressivement tout au long de l'année.

Par rapport aux principes didactiques du programme d'études, selon les participants, le matériel présenté permet d'établir des liens entre les mathématiques et la vie réelle, entre les mathématiques et d'autres matières scolaires et entre différents modules dans le cours de mathématiques. Donc, conformément aux programmes d'études du Nouveau-Brunswick, cette affirmation reflète le principe didactique mettant de l'emphase sur le développement des habiletés de faire des liens chez l'élève. Notons que les autres principes didactiques (gérer et résoudre une situation-problème, communiquer et raisonner mathématiquement) sont moins explicités dans les propos des enseignants.

Toujours en lien avec le programme d'études, les enseignants ont mentionné le potentiel du site en ce qui concerne le développement de la pensée critique envers les jeux de hasard et d'argent, ce qui, selon eux, est très important au niveau des résultats des apprentissages transdisciplinaires. Ainsi, au-delà de donner du sens aux résultats des apprentissages spécifiques des probabilités, ils trouvent que la simulation virtuelle pourrait sensibiliser les jeunes aux dangers associés à une approche non-critique envers les options que ces jeux proposent dans la vraie vie.

Plus particulièrement, leurs propos font référence au module qui simule le contexte du jeu de loterie de 6 sur 49. En réalisant, par exemple, un grand nombre d'essais (10 000) sur le simulateur, selon un enseignant, les élèves peuvent non seulement '*réaliser les faibles probabilités (de gagner), mais aussi faire le lien avec l'achat des billets de loterie*' (sujet 10). Sa collègue abonde dans le même sens en affirmant que la ressource permet de '*sensibiliser les jeunes au casino, se rendre compte que c'est du rêve*' et ainsi contribuer à la prévention, sensibilisation dès leur jeune âge à une dépendance qui peut les affecter eux-mêmes ainsi que leurs proches, à la famille perdant de l'argent (sujet 12). En interprétant ces propos, on peut se demander, de quelle façon ces transferts entre les situations de la vie réelle faisant appel au jugement critique de jeunes et les simulations virtuelles peuvent être explicités.

2. Deuxième milieu : l'apport perçu de l'outil virtuel à l'apprentissage

Parallèlement aux remarques d'ordre général par rapport à la qualité de l'outil (« *Bel outil !* » (Sujet 6), « *Beau médium à travailler avec !* » (Sujet 1)), les enseignants ont mentionné que les options qu'il offre peuvent leur permettre d'aller plus loin en comparaison avec les autres ressources disponibles, telles que le manuel ou matériel de manipulation physique :

> Sujet 2 : Ça me donne des outils pour aller plus loin.

Un autre enseignant précise :

> Sujet 1 : Première fois que je vois, comme option pédagogique, un simulateur qui permet de varier les paramètres (nombre d'essais, nombre de dés, etc.) de façon interactive et ainsi observer les effets des changements sur les fréquences.

Ce dernier commentaire est particulièrement intéressant, car il reflète explicitement les bénéfices possibles du simulateur mentionnés dans les écrits recensés, soit le fait de jouer sur les variables didactiques, incluant une possibilité de faire un grand nombre d'essais dans une courte période de temps. Ainsi, en prenant connaissance de ce nouvel outil, un participant (sujet 10) dit ne pas en avoir connu d'autres permettant de faire un aussi grand nombre d'essais en si peu de temps. Parmi d'autres outils disponibles, une enseignante a nommé les options de simulations de jeux de hasard avec un logiciel pour le Smartboard (tableau blanc interactif) qu'elle a déjà expérimentées et qui possèdent également des applications pour les probabilités.

Le fait d'avoir une option de « visualiser » le phénomène de hasard avec un outil virtuel peut stimuler le questionnement par rapport aux résultats qui, dans le cas de situations probabilistes vont souvent à l'encontre de l'intuition, comme c'est le cas du jeu des trois portes (Monty Hall). Ainsi, un enseignant dit être étonné d'observer chez l'élève l'émergence d'un questionnement par rapport aux résultats de simulation virtuelle de ce jeu :

> Sujet 1 : Le simulateur nous a mis en questionnement. Alors que tout le monde pense à la probabilité de ½ de gagner dans le cas de maintien du premier choix ou de changement de porte, le simulateur montre autre chose, qui va à l'encontre de cette prédiction initiale (en effet, la probabilité devient 2/3 lors du changement) et ça amène les élèves à questionner sur le phénomène.

Ceci ouvre un débat, une discussion pour essayer de donner du sens aux résultats obtenus :

> Sujet 1 : Ça oblige l'enseignant à passer par le questionnement, ainsi que les jeunes, ça donne le départ au questionnement.

Cependant, dans d'autres cas, où le questionnement n'apparait pas naturellement, un travail didactique plus nuancé serait requis de la part de l'enseignant. Ceci jette la lumière sur l'appréciation de l'environnement plus structuré comme dans l'option *Fête foraine* qui est perçue par une enseignante comme utile :

Sujet 5 : Ces scénarios (*Fête foraine*) avec des suggestions des 'bonnes' questions à poser aux élèves donnent un modèle de comment les faire questionner.

Dans un même ordre d'idées, le fait de proposer des scénarios concrets pourrait être utile pour les enseignants moins expérimentés (débutants) :

Sujet 9 : Enseignants débutants commencent avec un outil de qualité, au même titre qu'un enseignant d'expérience.

Au-delà d'un questionnement de résultats obtenus suite à une expérience virtuelle, il y a toujours la question des liens avec le calcul théorique des probabilités en tenant compte de tous les cas possibles. Au primaire, le comptage est supporté par une représentation à l'aide d'arbres de probabilités. Ainsi, en analysant les résultats d'une expérience, les élèves peuvent, dans certains cas, comprendre le mécanisme de comptage de toutes les possibilités :

Sujet 10 : L'analyse des simulateurs amène des liens avec l'enseignement sans l'ordinateur (entre autre, calcul de probabilité théorique) : on pense aux arbres de combinaisons – c'est difficile avec loterie 6/49, mais possible avec les dés. Toutefois, même avec les dés, il y des limites au comptage de toutes les possibilités (avec les arbres), selon les contextes.

Effectivement, le travail de théorisation à partir des expériences virtuelles peut devenir plus explicite, mais il reste à savoir comment cette explicitation peut être exploitée en salle de classe en anticipant une résistance possible de la part des élèves qui vont voir les résultants de l'expérience comme 'preuve théorique'. Ainsi, les affirmations de certains participants que l'approche expérimentale soutenue par le simulateur permet '*d'accélérer les processus de compréhension des élèves'* (sujet 8) doivent être cautionnées davantage, ce qui pourrait mener à des recherches plus poussées.

Du côté des caractéristiques de nature techno-pédagogique, nos participants se montrent unanimes dans les constats que le simulateur est une ressource virtuelle très attrayante et dynamique pour les élèves en leur permettant une interaction avec le logiciel. Ainsi, ils témoignent de son impact déjà observé ou anticipé sur l'intérêt des élèves. Ils voient que la motivation des élèves augmente lorsqu'ils travaillent avec les simulateurs virtuels par rapport au même type de travail (expériences probabilistes) dans un environnement physique. Les enseignants qui ont essayé l'outil dans leurs classes constatent que l'intérêt des élèves envers les probabilités, déjà présent au départ, accroit lorsqu'on ajoute le simulateur sans toutefois fournir les détails d'un tel constat ni comment ceci affecte les résultats d'apprentissages.

Selon nos participants, l'option *Fête foraine* s'avère particulièrement intéressante sur le plan esthétique tout en présentant des possibilités de faire des mathématiques autrement :

Sujet 14 : Outil qui va servir pour beaucoup de gens et pour longtemps.

Ces éloges, sont-elles faites sur le coup d'émotion témoignant de l'appréciation immédiate de l'outil ou suite à une mûre réflexion sur son impact réel et/ou anticipé sur les apprentissages des élèves ? Nos données sont muettes à ce sujet.

De plus certains enseignants ont fait remarquer que le fait d'utiliser le logiciel *Flash* pour démarrer les jeux (dans la version *Fête Foraine*) pourrait créer des obstacles pour l'utilisation de la ressource. Selon un enseignant, au niveau de soutien technologique, il faut que les districts scolaires aient des versions plus récentes de logiciels upportant les sites (par exemple *Flash*) et qu'elles soient régulièrement mises à jour.

3. *Troisième milieu : leurs besoins techno-pédagogiques et didactiques*

Bien que certaines opinions exprimées par nos participants ouvrent sur les usages possibles du simulateur pour enrichir les pratiques pédagogiques, ce milieu doit être présenté avec plusieurs précautions : le temps d'utilisation était trop court pour bien saisir toutes les options, le temps de validation lors des ateliers était également limité, ce qui limite par conséquence l'étendue des données et leur interprétation en termes de besoins futurs.

Ainsi, par rapport aux aspects didactiques, les enseignants ont exprimé leur besoin de savoir comment aborder les conceptions erronées à l'aide de simulateurs. Selon eux, dans l'espace d'activités *Fête foraine* il faudra prévoir une possibilité de rétroaction à l'élève en lui donnant une réponse et une explication :

> Sujet 7 : Avoir évaluations formatives et sommatives, éléments d'évaluation que l'on pourrait choisir selon nos besoins (site, outils performants).

Un enseignant (sujet 1) relate qu'un tel outil d'évaluation aurait permis de dégager plus de temps pour d'autres éléments essentiels de son travail. Les participants aimeraient également avoir des outils leur permettant d'explorer d'autres contextes de vie réelle qui sont liés aux jeux de hasard (jeux de cartes) ou non (probabilités des précipitations météorologiques). Les enseignants souhaitent avoir une banque leur permettant de trouver plus des problèmes sur les probabilités, en lien avec le contenu de l'examen provincial.

Un enseignant (sujet 2) suggère de faire un site semblable pour tous les domaines des mathématiques (géométrie…), ainsi qu'une possibilité d'utiliser d'autres ressources virtuelles, comme *Sésamath* et *Mathenpoche*.

Une enseignante aimerait plus de ressources-maison (faites au Nouveau-Brunswick) pour répondre à des besoins spécifiques de ses élèves. Entre autres, elle propose la création de séquences vidéo en français pour montrer aux autres comment intégrer les TIC en salle de classe :

> Sujet 11 : Beaucoup de ressources en anglais, mais peu en français (sur YouTube) - On pourrait construire nos propres vidéos.

Selon cette enseignante, les vidéos sont importantes pour toutes les matières « *pour aider les enseignants qui ne sont pas formés dans toutes les matières, (il faut aussi) une vidéo à présenter pour les élèves plutôt que l'enseignant fasse des démonstrations (sciences)* ».

V. CONCLUSION

Les résultats obtenus dans le cadre de ce projet de recherche ont permis d'identifier trois milieux auxquels les enseignants utilisateurs sont sensibles, soit la pertinence au programme d'étude, l'apport de l'outil virtuel ainsi que leurs besoins techno-pédagogiques. Ces milieux possèdent tous la caractéristique suivante, soit d'être d'abord et avant tout une ressource au service de l'enseignant.

Le premier milieu auquel les enseignants utilisateurs se sont montrés sensibles a trait à la pertinence du contenu mathématique des simulateurs. L'outil répond aux visées institutionnelles qui sont aussi les visées des enseignants utilisateurs. Le deuxième milieu est lié à l'apport de l'outil virtuel, tant du côté de l'enseignement que du côté de l'apprentissage. La possibilité d'intervenir sur les variables didactiques en les modifiant, la possibilité d'intervenir directement sur les conceptions des élèves et le fait que l'outil permet aux enseignants d'apprendre à questionner les élèves pour faire émerger les conceptions sont les aspects ressortis par les enseignants. Le troisième milieu auquel les enseignants se sont montrés sensibles est lié à leurs besoins en formation et en ressources-maison.

Suite aux analyses préliminaires, nos résultats semblent indiquer que l'outil développé suscite l'intérêt des enseignants. Toutefois, l'intégration de l'outil à leurs pratiques demande un soutien sur le plan de changements conceptuels des élèves et l'évaluation. De nouveaux questionnements à des fins didactiques émergent ainsi :

- Comment adapter les ressources à d'autres contextes afin de maximiser leur impact sur les apprentissages des élèves ?
- Quel type d'accompagnement techno-pédagogique et didactique permet de multiplier ces pratiques innovatrices ?
- Comment poursuivre le développement de nouvelles ressources techno-pédagogiques en mathématiques et dans d'autres matières ?

Ces questions nous amènent à approfondir nos analyses des données de cette recherche et en entreprendre d'autres. Il devient donc nécessaire d'étudier les pratiques des enseignants et les activités des élèves dans des situations intégrant les simulateurs virtuels.

REFERENCES

Batanero C., Godino J. D., Cañizares M. J. (2005) Simulation as a tool to train pre-service school teachers. In Adler J. (Ed.) *Proceedings of ICMI First African Regional Conference* [CD]. Johannesburg: International Commission on Mathematical Instruction. http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/CMIRCr.pdf, consulté le 27 novembre 2011.

Bill A., Gayton P. (2010) Coin-sequences and coin-combinations taught as companion tasks. In Reading C. (Ed.) *Data and context in statistics education: Towards an evidence-based society*. *Proceedings of the 8th International Conference on Teaching Statistics* (ICOTS8, July, 2010), Ljubljana, Slovenia. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute. http://eprints.utas.edu.au/10016/. consulté le 27 novembre 2011.

Borovcnik M., Peard R. (1996) Probability. In Bishop A. J. et al. (Eds.) (pp. 239-287). *International Handbook of Mathematical Education* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Boucher A., Loiselle A., Reiber D. (2006) *Les situations d'apprentissage et d'évaluation…: Lexique*. Qc : Commission scolaire des Patriotes.

Briand J. (2005) Une expérience statistique et une première approche des lois du hasard au lycée par une confrontation avec une machine simple. *Recherches en didactique des mathématiques* 25(2), 247-281.

Caron F. (2004) Splendeurs et misères de l'enseignement des probabilités au primaire. *Actes du Colloque GDM 2002 : Continuités et ruptures entre les mathématiques enseignées au primaire et au secondaire*. Trois Rivières : Université du Québec à Trois Rivières.

Caron P.A. (2007) Contextualisation de dispositifs pédagogiques sur des applications Web 2.0. Le projet Bricoles. In Marquet P.et al. (Eds.) *Actes du congrès AREF 2007 - Actualité de la Recherche et de l'éducation en Formation*. Strasbourg : Université Louis-Pasteur. http://www.congresintaref.org/actes_pdf/AREF2007_Pierre-Andre_CARON_501.pdf, consulté le 27 novembre 2011

DeBlois L. (2006) Influence des interprétations des productions des élèves sur les stratégies d'intervention en classe de mathématiques. *Educational Studies in Mathematics* 62(3), 307-309.

Freiman V. (2010) Complexité de la formation initiale des enseignants en mathématiques au primaire en milieu francophone minoritaire : le cas du Nouveau-Brunswick. In Proulx J.et Gattuso L. (Eds.) (pp. 201-214. *Formation des enseignants en mathématiques : tendances et perspectives actuelles.* Sherbrooke, Qc : Éditions du CRP.

Garofalo J., Drier H. S., Harper S., Timmerman M. A., Shockey T. (2000) Promoting appropriate uses of technology in mathematics teacher preparation. *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education* 1(1), 66-88. http://www.citejournal.org/vol1/iss1/currentissues/mathematics/article1.htm, consulté le 27 novembre 2011.

Godino J. D., Cañizares M. J., Díaz C. (2003) Teaching probability to pre-service primary school teachers through simulation. Paper presented at the *54th Session of the International Statistical Institute*. Berlin, Germany. http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/3/2989.pdf, consulté le 27 novembre 2011.

Grenon V., Larose F. (2006) L'informatique scolaire chez les enseignants du primaire : une ressource additionnelle ou un dispositif pédagogique alternatif. In Lebrun J.et al. (Eds.) (pp. 327-352) *Le matériel didactique et pédagogique : soutien à l'appropriation ou déterminant de l'intervention éducative*. Québec : Les presses de l'Université Laval.

Hennessy S., Twigger D., Byard M., Driver R., Draper S., Hartley R., Mohamed R., O'Malley C., O'Shea T., Scanlon E. (1995) A classroom intervention using a computer-augmented curriculum for mechanics. *International Journal of Science Education* 17, 189-206.

Herrington J., Oliver R. (2000) An instructional design framework for authentic learning environments. *Educational Technology Research and Development* 48(3), 23-48.

Konold C., Kazak S. (2008) Reconnecting Data and Chance. *Technology Innovations in Statistics Education* 2(1). http://escholarship.org/uc/item/38p7c94v#page-1, consulté le 27 novembre 2011.

Landry L. (2011, sous presse) L'enseignement des mathématiques au Nouveau-Brunswick francophone : vers la réussite scolaire et des apprentissages durables pour tous les élèves. In Freiman V. (Ed.) *Actes du Colloque GDM 2010 - L'enseignement de mathématiques dans et à travers des contextes particuliers : quel support didactique privilégier ?* Moncton : Université de Moncton.

Larose F., Bédard J., Couturier Y., Grenon V., Lavoie L.-C., Lebrun J., Morin M.-P., Savard A., Theis L. (2011) *L'apprentissage des probabilités en contexte ludique : transfert de compétences et impact sur la pratique des jeux de hasard et d'argent chez des élèves à* *risque du 1er cycle du secondaire.* Rapport de recherche FQRSC Sherbrooke : Université de Sherbrooke. http://www.crie.ca/Recherches/Documents/Rapport_final_révisé_09-2011_AC-2008_124845_Larose_et_Al.pdf, consulté le 27 novembre 2011.

Larose F., Bourque J., Freiman V. (2010) The effect of contextualising probability education on differentiating the concepts of luck, chance, and probabilities among middle and high school pupils in Quebec. In Reading C. (Ed.) *Data and context in statistics education: Towards an evidence-based society. Proceedings of the 8th International Conference on Teaching Statistics* (ICOTS8, July, 2010), Ljubljana, Slovenia. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute. http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/icots8/ICOTS8_C133_LAROSE.pdf, consulté le 27 novembre 2011.

Larose F., Grenon V., Lenoir Y., Desbiens J.-F. (2007) Le rapport des futurs enseignants à l'utilisation de l'informatique pédagogique : Fondements et trajectoire longitudinale. In Charlier B., Peraya D. (Eds.) (pp. 171-188) *Transformation des regards sur la recherche en technologie de l'éducation.* Bruxelles : De Boeck-Université.

Larrick R. P. (2004) Debiasing. In Koehler D. J., Harvey N. (Eds.) (pp. 316-337) *Blackwell Handbook of Judgment and Decision Making*. London: Blackwell Publishers.

Ministère de l'éducation et du développement de la petite enfance du Nouveau-Brunswick (MEDPE) (2010) *Résultats des examens : Districts scolaires francophones*. Fredericton : Gouvernement du N.-B.

Ministère de l'éducation du Nouveau-Brunswick (MENB) (2005) *Programme d'études en mathématiques. 5^e année*. Fredericton: Gouvernement du N.-B.

Munisamy S., Doraisamy L. (1998) Levels of Understanding of Probability Concept among Secondary School Pupils. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* 29(1), 39-45.

Organisation de Coopération et de Développement Economiques (OCDE) (2003) *Apprendre aujourd'hui, réussir demain : premiers résultats de PISA 2003*. OCDE.

Pernin J.-P, Emin V., Guéraud V. (2009) Intégration de la dimension utilisateur dans la conception de systèmes pour l'apprentissage : Scénarisation pédagogique dirigée par les intentions. *Ingénierie des Systèmes d'Information* 14(3), 9-30.

Régnier J.-C. (2003) A propos de la formation en statistique. Approches praxéologiques et épistémologiques de questions du champ de la didactique de la statistique. *Revue du Centre de Recherche en Éducation* 22/23, 157-201.

Savard A. (2008) *Le développement d'une pensée critique envers les jeux de hasard et d'argent par l'enseignement des probabilités à l'école primaire : Vers une prise de décision.* Thèse inédite. Université Laval, Québec.

Scanlon E., O'Shea T., Smith R. B., Li Y. (1997) Supporting the Distributed Synchronous Learning of Probability: learning from an experiment. In *Proceedings of CSCL'97*. http://gerrystahl.net/cscl/cscl97/papers/scanlon.pdf, consulté le 29 novembre 2011.

Seal K. C., Przasnyski Z. H. (2005) Illustrating Probability through Roulette: A Spreadsheet Simulation Model. *Spreadsheets in Education* 2(1). http://epublications.bond.edu.au/ejsie/vol2/iss1/4/, consulté le 29 novembre 2011.

Theis L., Savard A. (2010) Linking Probability to Real-World Situations: How do Teachers Make Use of the Mathematical Potential of Simulation Programs? In Reading C. (Ed.) *Data and context in statistics education: Towards an evidence-based society - Proceedings of the 8th International Conference on Teaching Statistics* (ICOTS8, July, 2010), Ljubljana, Slovenia. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute. http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/icots8/ICOTS8_C126_THEIS.pdf, consulté le 27 novembre 2011.

EXPERIMENTATION D'UNE RESSOURCE POUR UNE SITUATION DE RECHERCHE ET DE PREUVE ENTRE PAIRS

Jean-Philippe GEORGET* – Baptiste LABROUSSE**

Résumé – Cette contribution présente une expérimentation testant une ressource destinée à un enseignant de l'école primaire. Elle fait suite à une recherche présentée à EMF2009. Cette ressource doit permettre la mise en œuvre d'une situation de recherche et de preuve entre pairs par un enseignant novice dans la mise en œuvre de ce type de situations. La contribution aborde les problèmes posés par ce projet puis explicite les moyens mis en œuvre pour élaborer la ressource et la méthodologie d'expérimentation dans une classe. Enfin, des résultats sont donnés en illustrant la complexité des processus en jeu.

Mots-clefs : ressource destinée aux enseignants, ergonomie, situations de recherche et de preuve entre pairs (RPP)

Abstract – This paper is about an experiment with the goal of testing a primary teacher's resource. This is the next part of a research presented at EMF2009. This resource must help a teacher to practice a research and proof activity between peers with her pupils even she had never done this before. The paper presents the problems given by this project and describes the means to build the resource and the methodology of the experiment with some classmates. The results are given illustrating the complexity of the underlying process.

Keywords: resource for teachers, ergonomics, situations of research and proof between peers (RPP)

Depuis de nombreuses années, les programmes scolaires de nombreux pays, la France en particulier, demandent aux enseignants de faire vivre à leurs élèves des situations de recherche et de preuve entre pairs (situations RPP) en classe de mathématiques. Pour autant, malgré les demandes institutionnelles renouvelées, les formations d'enseignants mises en place, les recherches et les expérimentations scientifiques menées dans le domaine, les pratiques ordinaires n'évoluent pas sensiblement (Artigue et Houdement 2007, Georget 2009, 2010). Cet état de fait témoigne en partie de la complexité du projet consistant à provoquer des évolutions des pratiques enseignantes en ce domaine. Deux éléments principaux contribuent à l'expliquer, la complexité des situations RPP et le manque d'ergonomie des ressources enseignantes (Georget 2009, 2010).

Une première expérimentation s'est attachée à étudier sur trois ans des moyens de favoriser la pratique de situations RPP par une dizaine d'enseignants de l'école primaire quasiment tous novices dans cette pratique (Georget 2009). Il s'agissait de s'appuyer sur l'émergence d'une communauté de pratique (Wenger 1998). L'expérimentation présentée ici (menée par un étudiant de Master d'enseignement) s'appuie sur ces travaux exploratoires et s'attache à étudier comment une ressource peut aider un enseignant à mettre en œuvre une situation de recherche et de preuve entre pairs donnée. Le contexte contraint de ce travail explique en grande partie le fait que la méthodologie soit relativement restreinte par endroits.

I. LES SITUATIONS RPP

L'expression *situations de recherche et de preuve entre pairs* (situations RPP) a été proposée pour désigner des situations dans lesquelles on place les élèves ou les étudiants dans des situations proches de celle d'un mathématicien lorsqu'il cherche un problème nouveau (Georget 2009). Cette nouvelle expression regroupe diverses situations de classe comme les *problèmes ouverts* (Arsac et Mante 2007), les *situations de recherche en classe* (Grenier et

* Université de Caen Basse-Normandie, CERSE, EA 965 – France – jean-philippe.georget@unicaen.fr
** Université de Tours – France – baptiste.labrousse@etu.univ-tours.fr

© Georget J-P., Labrousse B. (2012) Expérimentation d'une ressource pour une situation de recherche et de preuve entre pairs. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT6, pp. 838–848). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

Payan 2002) et d'autres encore. Ces dernières appellations désignent peu explicitement les objectifs visés par ces situations par lesquelles on souhaite développer chez les élèves, voire parfois chez les enseignants, des savoirs et des savoir-faire propres aux débats mathématiques (par exemple le statut des conjectures, des preuves, des exemples et contre-exemples, etc.). En particulier, la qualification RPP a pour premier intérêt d'évoquer explicitement la composante « preuve » de ces situations, caractéristique primordiale fréquemment absente des déroulements dans les classes ordinaires, ainsi que la composante sociale « entre pairs », fréquemment délaissée, elle aussi, au profit de preuves relativement formelles dont la logique et le déroulement échappent à nombre d'élèves. Le second intérêt de cette appellation est de désigner une classe de situations similaires, posant de ce fait la question de leur efficacité respective. Une étude comparative a été menée en se basant sur une revue de littérature (Georget 2009). Elle a mis en évidence la particulière pertinence de l'approche des *problèmes ouverts* proposée par Arsac et Mante (2007). En effet, celle-ci nécessite peu de moyens à mettre en œuvre pour espérer obtenir des résultats similaires à ceux des autres approches, modulo le fait que l'évaluation de l'efficacité des différentes approches restent particulièrement sujette à caution du fait des méthodologies employées ou du manque d'explicitation de ces méthodologies dans la littérature.

Il ressort de la même étude que des situations RPP peuvent être proposées en classe dès l'enseignement primaire. Se pose alors la question du manque de diffusion de ces pratiques de classe hors des cadres expérimentaux. Les réponses sont multiples et cette contribution ne cherchera pas à en dresser une liste. Nous nous limiterons aux réponses envisageables concernant les caractéristiques de ces situations, leurs potentiels, et l'ergonomie des ressources destinées aux enseignants.

1. Potentiels des situations RPP et processus dynamiques en cours de séance

Les situations proposées aux élèves doivent bien sûr permettre aux élèves de chercher. Ceci suppose que la solution ne soit pas déjà connue des élèves concernés, qu'elle ne paraisse pas évidente et peut-être aussi que plusieurs pistes paraissent intéressantes à explorer aux yeux des élèves, même si une unique solution s'avère pertinente au final. C'est le potentiel de recherche de la situation (Georget 2009). Il paraît aussi nécessaire que la situation ne soit pas résolue trop rapidement par les élèves, c'est à dire qu'elle leur résiste. C'est son potentiel de résistance. Si le problème paraît toujours insoluble tout au long de la recherche des élèves, ces derniers risquent de se démobiliser. La résistance de la situation RPP face aux tentatives des élèves doit donc varier, ce que nous appelons sa résistance dynamique. Enfin, la situation doit permettre à l'élève d'apprendre quelque chose, sous peine de quoi sa présence à l'école deviendrait problématique. C'est son potentiel didactique. Toutes ces caractéristiques s'actualisent différemment durant un déroulement de séance donné en fonction de multiples facteurs et dans des processus dynamiques qui ne sont pas toujours contrôlables, d'où l'usage du terme *potentiel* (Georget 2009).

Les situations de recherche ne permettent pas toujours à l'enseignant de mener des débats mathématiques dans sa classe, c'est pourquoi nous avons aussi défini la notion de potentiel de débat. La possibilité d'organiser de tels débats est susceptible d'évoluer au cours d'une séance et dépend, elle aussi, de multiples facteurs. En premier lieu, pour assurer un potentiel de débat intéressant, le problème choisi peut par exemple permettre à plusieurs solutions différentes d'apparaître, ce qui renforcera la conviction chez les élèves que des argumentations puis des preuves ou des ébauches de preuve sont nécessaires. L'expérience de l'enseignant et sa gestion de la séance sont d'autres facteurs permettant à ce potentiel de s'exprimer. Les consignes employées par les enseignants au moment où tout semble propice pour que des débats mathématiques émergent sont souvent non pertinentes. Par exemple, les enseignants demandent fréquemment aux élèves de « dire ce qu'ils ont fait », c'est à dire de raconter leur processus de recherche, mais sans pour autant leur demander de se prononcer sur la validité de la démarche et des résultats et sans solliciter des échanges entre pairs. *In* fine c'est alors à l'enseignant d'initier et de gérer des processus de preuve par des questions fermées. Sans doute aussi fréquemment, les enseignants valident certaines productions d'élèves avant toute mise en commun des productions, parfois involontairement ou implicitement. Les élèves sont alors moins motivés pour défendre leur travail puisque, bien que comptant sur eux pour lancer des processus de preuve, l'enseignant se sera prononcé sur la validité de leur travail. L'expérience des élèves est aussi un élément important qui joue dans l'actualisation du potentiel de débat. Par exemple, même si les consignes de l'enseignant ne sont pas adéquates, les élèves qui ont l'expérience des situations RPP ne les suivront pas à la lettre et auront un comportement pertinent (Georget 2009). À l'inverse, si les élèves n'ont pas suffisamment d'expérience, ils ne pourront pas anticiper la démarche sous-jacente à la situation.

En conclusion de cette partie, il est donc évident que, pour favoriser la pratique des activités RPP dans les classes, il faut proposer aux enseignants des situations ayant les potentiels suffisants pour le faire. Sachant que l'expression de ces potentiels dépend des déroulements des séances, il faut aussi proposer ces situations sous la forme de ressources permettant aux enseignants d'avoir l'information suffisante pour les exploiter, c'est à dire ayant des caractéristiques ergonomiques suffisantes.

2. *Ergonomie des ressources*

Des concepts utilisés dans les recherches sur l'ergonomie des environnements informatiques pour l'apprentissage humain (EIAH) sont pertinents pour analyser et élaborer des ressources destinées aux enseignants, que ces ressources soient numériques ou non (Georget 2010). Les concepts d'utilité et d'utilisabilité sont deux d'entre eux. L'évaluation de l'utilité d'une ressource destinée à un enseignant consiste à évaluer si elle lui permet effectivement d'atteindre l'objectif que l'on a fixé a priori à la ressource, c'est à dire ici de lui permettre de faire vivre aux élèves une situation RPP. Quant à l'évaluation de l'utilisabilité d'une ressource, elle consiste à évaluer si l'enseignant peut l'adapter à sa pratique et si elle prend en compte son degré d'expertise. L'évaluation de l'utilité et de l'utilisabilité peut s'effectuer *a priori*, c'est à dire hors de toute utilisation réelle de la ressource, et *a posteriori*, c'est à dire par l'observation et l'analyse des effets produits par son utilisation réelle par un enseignant.

Une étude de ressources existantes a montré la possibilité d'améliorer leur utilité et leur utilisabilité en proposant, implicitement ou explicitement, des options d'utilisation aux enseignants là où les ressources ne donnent souvent qu'une seule façon de mener une situation donnée (Georget 2009). C'est en effet un moyen possible de favoriser des genèses documentaires prolixes (Gueudet et Trouche 2008) et de provoquer des exploitations optimales ou minimales, des situations mathématiques proposées, c'est à dire en préservant au moins leur statut de situation RPP. Ceci semble particulièrement pertinent lorsque l'on s'adresse à des enseignants expérimentés mais novices en matière de situations RPP, ceux-ci ne souhaitant pas toujours qu'une ressource leur dise ce qu'ils ont à faire de manière plus ou moins péremptoire, à tort ou à raison.

II. UNE NOUVELLE EXPERIMENTATION

Dans l'expérimentation menée précédemment (Georget 2009), un collectif d'enseignants était concerné. La présente expérimentation concerne un unique enseignant de CM1 (9-10 ans), volontaire, bénévole et expérimenté (10 ans de pratique). Il est relativement novice dans la pratique des situations RPP et il lui a juste été demandé de lire la ressource et de mettre en œuvre le problème à sa manière. Contrairement à la première expérimentation, il n'a pu s'appuyer ni sur un temps long ni sur une communauté de pratique initiée pour l'occasion pour faire évoluer sa pratique. Nous allons ici supposer en première approximation que la ressource proposée sera le principal élément d'aide pour lui permettre de mettre en place la situation RPP proposée. Dans ce contexte, la ressource préalablement utilisée dans la première expérimentation a été retravaillée.

1. Une ressource retravaillée

Dans la précédente expérimentation, plusieurs informations étaient, d'une part, disponibles sur un site Web conçu à cet effet et, d'autre part, étaient discutées entre les participants durant les réunions qui ont eu lieu tout au long des trois années. Elles étaient aussi évoquées dans les comptes-rendus d'expérience qu'ont pu rédiger et échanger les enseignants. Pour résumer, ces informations étaient susceptibles de rester à l'esprit des enseignants pour plusieurs raisons et ont pu influencer leur pratique. Ici, le seul moyen de communiquer des informations utiles est la ressource destinée à l'enseignant. Elle doit donc être claire, concise, précise, tout en offrant une utilisabilité supposée optimale (Georget 2010). Cette ressource est basée sur le problème consistant à dénombrer les cordes joignant un nombre fixé de points disposés sur un cercle (ERMEL 1999). En plus de travailler des compétences liées aux situations RPP, les élèves peuvent développer des compétences relatives au dénombrement exhaustif d'objets vérifiant des propriétés données et à la généralisation à partir de quelques cas particuliers, toutes deux au cœur de cette situation. Nous avons vérifié que le problème offrait *a priori* des potentiels suffisants pour des élèves de la fin de l'école primaire (Georget 2009). Par ailleurs, le côté « abstrait » est intéressant, car il permet aux enseignants de constater que leurs élèves sont tout à fait capables de s'attaquer à ce type des situations sans qu'un contexte « concret » ne soit nécessaire, ce qui reste envisageable.

Pour l'essentiel, la structure de la ressource (cf. Annexe 1) est la même que celle de l'expérimentation précédente (Georget 2009, 2010). Elle est composée d'une description rapide destinée à l'enseignant, de la solution et des moyens de l'obtenir. Des éléments supplémentaires visent à informer l'enseignant mais ne lui donnent pas une façon unique de mener la séance. Par exemple, il est seulement suggéré de traiter le cas des six points puis celui de dix. L'enseignant a une liberté et les éléments d'information sont là, implicitement ou explicitement, pour le guider dans ses choix. Les éléments de débats possibles, par l'intitulé même de cette rubrique et par la formulation de ses items, laissent une large place à des adaptations. La précédente expérimentation ayant montré que les enseignants avaient largement apprécié nos choix, notamment celui d'une ressource rapide à consulter, ils ont été conservés.

Certains éléments ont été ajoutés ou modifiés. L'énoncé destiné à l'enseignant a été complété par deux exemples d'énoncés destinés aux élèves. Le cas de quinze points est implicitement proposé en supplément des cas six et dix points. Il s'agit d'éléments améliorant l'utilité et l'utilisabilité de la ressource.

La preuve par récurrence, initialement dans la rubrique *Autres éléments de l'activité*, a été déplacée pour homogénéiser la ressource.

La nouvelle rubrique *Conseils pédagogiques* présente un modèle de déroulement de séance qui semble plus opérationnel que celui proposé par Arsac et Mante (2007). En particulier, il propose à l'enseignant de ne pas attendre trop longtemps avant de faire une première médiation pour s'assurer que les élèves ont bien compris le problème initial. En effet, nous avons mis en évidence que des enseignants ne clarifient pas toujours, volontairement ou non, certaines caractéristiques de la situation de départ, ce qui cause des dysfonctionnements parfois jusqu'à la fin des séances (Georget 2009). Ce serait le cas par exemple si l'enseignant ne clarifie pas le fait qu'un diamètre est une corde ou qu'un point peut être l'extrémité de plusieurs cordes. La ressource propose aussi à l'enseignant de ne pas valider de réponses avant la tenue d'un débat. Nous avons vu que cela peut être un élément important pour que des débats puissent naître et vivre dans la classe. Dans un registre plus pédagogique, il est aussi suggéré une utilisation des affiches plus raisonnable que celle souvent observée qui consiste à demander aux élèves d'écrire leur démarche, ceci étant généralement peu productif dans les faits.

2. *Autres éléments méthodologiques*

L'enregistrement vidéo a eu pour objectif d'enregistrer le son pendant le déroulement de la séance et de filmer le tableau car il s'avère parfois très difficile de noter ce qui est écrit dessus lors des phases de mises en commun. Bien qu'il accentue généralement le stress de l'enseignant, ce moyen permet une meilleure récolte de données qu'avec une simple prise de notes, permettant ainsi une reconstruction plus fidèle du déroulement de la séance (Georget 2010).

L'analyse des données consiste en premier lieu à rédiger une narration de la séance (Roditi 2001) à partir des notes prises et de l'enregistrement, c'est à dire un texte racontant son déroulement qui donne une première description appréhendable de la séance. Nous repérons des épisodes (Robert 1999, Roditi 2001) qui correspondent à une activité observée ou potentielle des élèves et qui peuvent correspondre à plusieurs des tâches prescrites ou attendues par l'enseignant (Robert et Rogalski 2002). Nous résumons chaque épisode qui nous semble significatif et indiquons sa durée approximative dans une trame simplifiée de séance. En particulier, certains épisodes tels que des interventions relativement extérieures au déroulement de la résolution du problème ne sont pas retenues dans le corpus (personne frappant à la porte, récréation, etc.). Elle est simplifiée aussi dans le sens où certains épisodes sont compactés en phases afin de faciliter la description de la séance en termes de présentation des tâches prescrites (phases codées par Pres, cf. Tableau 1), de recherches autonomes de véritables problèmes mathématiques par les élèves (RechO), de mises en commun (MC) des productions d'élèves et de véritables échanges entre élèves, de « cours dialogués » (CD), c'est-à-dire d'échanges enseignant-élèves fortement dirigés par l'enseignant pour faire avancer la résolution du problème. Nous étudions ensuite l'évolution des différents potentiels de la situation RPP et le rôle effectif qui nous paraît être celui de l'enseignant dans ces évolutions. Nous en sommes à ce stade réduits à faire des hypothèses sur ses logiques d'action (Robert et Rogalski 2002) en établissant un rapport probable avec le contenu de la ressource. Nous étudions aussi la possibilité d'une optimisation de la gestion de la séance et de la ressource, toutes choses étant supposées égales par ailleurs.

3. *Résultats*

Dans cette section, la trame simplifiée de la séance est donnée dans le Tableau 1. Les durées des épisodes sont arrondies au quart de minute le plus proche. La séance est ensuite étudiée en lien avec la ressource proposée.

La trame simplifiée de la séance permet tout d'abord de constater qu'un certain nombre de conseils donnés dans la ressource semblent suivis. C'est le cas (phase 1) de la présentation orale suivi d'un texte écrit, pratique peu courante à ce niveau d'enseignement chez les enseignants novices (Georget 2009). Par contre, il faut noter que la présentation d'une corde faite par l'enseignant n'est pas optimale puisqu'il ne précise qu'après une douzaine de minutes qu'une corde se trace avec la règle. De plus, la distinction corde-diamètre n'est pas faite clairement. Tout ceci aboutit à des problèmes de compréhension de l'énoncé qui pourraient être évités et qui se retrouvent tout au long de la séance, jusqu'à l'exploitation collective des productions. À cet égard, la ressource ne remplit que partiellement son rôle de ressource utile.

Phases	*Codes*	*Durées*
1. Présentation orale du cas des 6 points (tâche T6), mise au point du vocabulaire, reformulations de la consigne, écriture de la consigne au tableau	Pres	6'
2. Recherche individuelle de T6	RechO	3'30"
3. Reformulation de la consigne	Pres	2'
4. Continuation de la recherche de T6	RechO	30"
5. Précision : la corde se trace avec une règle !	Pres	0"
6. Continuation de la recherche de T6	RechO	1'45"
7. Présentation du cas général et du cas 15 points (tâches Tn, T15)	Pres	4'30"
8. Recherche individuelle de Tn et T15	RechO	5'30"
9. Présentation de la recherche de Tn et T15 en binômes	Pres	2'30"
10. Recherche de Tn et T15 en binômes	RechO	15"
11. Reformulation de la consigne	Pres	45"
12. Continuation de la recherche Tn et T15 en binômes	RechO	1'30"
13. Annonce de la présentation à venir des productions des binômes	Pres	30"
14. Continuation de la recherche Tn et T15 en binômes	RechO	5'30"
15. Présentation quasi exhaustive des productions des binômes (NB. alternances MC/CD non détaillées ici)	MC/CD 12'/8'	20'
Durée totale approximative		54'45"

***Tableau 1** – Trame simplifiée de la séance observée*

Cependant, on trouve aussi (succession des phases 1, 2 et 3) la présence d'une reformulation de la consigne, précédée d'une première courte recherche des élèves et suivie d'une autre recherche autonome des élèves. Bien qu'elle semble relever du « bon sens », cette pratique est peu courante chez les enseignants (Georget 2009). Même si on ne peut le certifier et même si l'enseignant nous a signalé ses difficultés d'organisation dans ce type de séances, il est donc possible que l'enseignant ait adopté le modèle de déroulement de séance proposé dans la ressource. La trame permet ensuite de constater l'absence de tâche fermée lors des épisodes recherches autonomes. Les potentiels de la situation sont donc assez bien préservés jusqu'à l'avant-dernière phase (phase 14). En particulier, l'objectif de faire travailler les élèves sur une véritable situation de recherche est atteint.

À l'inverse, le potentiel de débat et le potentiel didactique ne s'expriment pas ou pas de manière optimale. En effet, l'élaboration de preuves entre pairs est limitée par un ou des épisodes de cours dialogué (CD) pour chaque production. L'étude détaillée de la phase d'exploitation des productions (phase 15, 20') conclut à une durée totale de 8' pour le code CD contre 12' pour le code MC, caractéristique de moments plus favorables à l'élaboration de preuves entre pairs. Il faut retenir ici que l'enseignant prend largement la parole pour diriger la séance, alors qu'il pourrait davantage favoriser des débats mathématiques dans la classe. L'enseignant nous déclare qu'il « parle trop », constat courant chez les enseignants novices, mais c'est ici la pertinence du contenu de ses interventions qui empêchent le potentiel de débat de s'exprimer. Du fait de l'enseignant ou des élèves eux-mêmes, plusieurs occasions existent d'orienter le déroulement de la séance vers un fonctionnement plus en phase avec les objectifs des situations RPP. Elles n'aboutissent pas du fait d'un manque de soutien de l'enseignant. À cet égard, la ressource se révèle peu utile et peu utilisable quand elle évoque un rôle « d'animateur » sans en donner les clés élémentaires. En particulier, l'optimisation de la présentation des productions pouvait se faire ici en tenant compte de résultats redondants et divergents au lieu de poursuivre explicitement une présentation exhaustive. Le choix d'avoir une ressource concise a bien sûr pesé sur ses manques, mais certains gagneraient visiblement à être comblés. L'autre facteur explicatif de la main mise de l'enseignant sur les débats est sa volonté manifeste de faire résoudre le problème en une unique séance. En témoigne par exemple l'introduction (phase 7) de la tâche Tn de recherche du nombre de cordes en fonction du nombre de points dans le cas général, alors que les élèves n'ont même pas encore débattu du cas des 6 points, débat potentiellement prometteur puisque tous les élèves n'avaient toujours pas le même résultat à l'issue de la séance. Le déroulement de la séance révèle aussi une tension tenace entre cette volonté de tenir les délais et la volonté de laisser les élèves débattre et avancer eux-mêmes dans la résolution du problème. Sur ce point, la façon de compléter la ressource de façon utile, utilisable et acceptable reste pour nous ouverte. Enfin, vraisemblablement à cause du temps disponible, aucune phase de conclusion n'est présente, ne permettant pas au potentiel didactique de s'exprimer, même *a minima*. La ressource n'évoquait pas ce point.

III. CONCLUSION

Dans l'expérimentation décrite, il était attendu que la ressource soit utile, c'est à dire permette à un enseignant de mettre en œuvre une situation de recherche et de preuve entre pairs dans sa classe malgré son manque d'expérience en ce domaine. Des dynamiques problématiques ont subsisté. En particulier, si les potentiels de recherche, de résistance et de résistance dynamique se sont bien exprimés, le potentiel de débat et le potentiel didactique ont été bridés par des interventions de l'enseignant. Les élèves ont donc bien vécu une situation de recherche mais ils n'ont que peu ou pas été en situation d'élaborer des preuves entre pairs. Ceci témoigne, d'une part, de la complexité intrinsèque de ces séances (Georget 2009), l'enseignant ayant été confronté à des dynamiques problématiques qu'il n'a pas su gérer de manière optimale, et d'autre part, de la présence de défauts ergonomiques dans la ressource qui lui a été proposée, défauts dont certains peuvent probablement être comblés facilement sans remettre en cause l'acceptabilité de la ressource. Enfin, même si le cadre d'expérimentation a été contraint (contexte de travail d'un étudiant de Master d'enseignement), la présente contribution montre aussi combien l'élaboration d'une ressource ergonomique peut être un processus complexe. Les outils pour élaborer ce type de ressources semblent pertinents mais restent à affiner pour obtenir des résultats qui ne se bornent pas à des hypothèses, parfois périlleuses, concernant l'impact d'une ressource donnée sur la pratique d'un enseignant donné. En effet, nous avons considéré une ressource comme facteur explicatif essentiel de l'activité de l'enseignant mais la méthodologie employée ne permet pas de prouver la pertinence de cette analyse, elle ne permet que de l'envisager.

REFERENCES

Arsac G., Mante M. (2007) *Les pratiques du problème ouvert*. CRDP de l'académie de Lyon, France.

Artigue M., Houdement C. (2007) Problem solving in France: didactic and curricular perspectives. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education* 39, 365-382.

ERMEL (1999) *Apprentissages numériques et résolution de problèmes, CM2*. Paris : Hatier.

Georget J-P. (2009) *Activités de recherche et de preuve entre pairs à l'école élémentaire : perspectives ouvertes par les communautés de pratique d'enseignants.* Thèse de doctorat. Université Diderot Paris 7. http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00426603/fr/, consulté le 29 novembre 2011.

Georget J-P. (2010) Apport de l'ergonomie des EIAH pour l'analyse et la conception de ressources. In Kuzniak A., Sokhna M. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et développement : enjeux de société et de formation. Actes du colloque international de l'Espace Mathématiques Francophone 2009*. http://fastef.ucad.sn/EMF2009/Groupes%20de%20travail/GT6/georget.pdf, consulté le 29 novembre 2011.

Grenier D., Payan C. (2002) Situation de recherche (en classe) : essai de caractérisation et proposition de modélisation. In Durand-Guerrier V., Tisseron C. (Eds.) (pp. 189-203). *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques.* ARDM et IREM de Paris 7.

Gueudet G., Trouche L. (2008) Du travail documentaire des enseignants : genèses, collectifs, communautés. Le cas des mathématiques. *Éducation et didactique* 2-3, 7-33.

Robert A. (1999) Recherches didactiques sur la formation professionnelle des enseignants de mathématiques du second degré et leurs pratiques en classe. *Didaskalia* 15, 123-157.

Robert A., Rogalski J. (2002) Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et de la technologie* 2.4, 505-528.

Roditi E. (2001) *L'enseignement de la multiplication des décimaux en sixième, Études de pratiques ordinaires*. Thèse de doctorat. Université de Paris 7.

Wenger E. (1998) *Communities of Practice, Learning, Meaning and Identity.* Cambridge: Cambridge University Press.

ANNEXE 1

1. Le problème

Présentation

Énoncé pour l'enseignant : on place un certain nombre de points sur un cercle. Est-il possible de trouver le nombre de cordes (segment joignant deux points du cercle) ?

Énoncés possibles pour les élèves :

- on place 6 points sur un cercle. Est-il possible de trouver le nombre de cordes ?
- on place 15 points au hasard sur un cercle. Peut-on trouver à coup sûr le nombre de cordes ?

Exemples

On peut commencer par 6 points disposés de façon irrégulière sur un cercle. On obtient 15 cordes. On peut ensuite passer à 10 points ce qui donne 45 cordes. Les élèves ont peu de chance de pouvoir les compter de façon sûre.

Solutions

Si on place n points sur un cercle, le nombre de cordes est égal à : $n(n-1)/2$. Par exemple, pour 6 points, le nombre de cordes est égal à 6*5/2= 15.

2. Les preuves

Preuve additive

La preuve revient à calculer la somme $(n-1) + \cdots + 3 + 2 + 1$.

En effet, on choisit un des points. Il permet d'obtenir $(n-1)$ cordes. En prenant un autre point, on obtient une corde de moins, c'est à dire $(n-2)$ et ainsi de suite jusqu'à l'avant-dernier point qui ne peut être joint qu'au dernier point, ce qui donne une seule corde.

Le calcul de la somme s'effectue de la manière suivante :

$$\begin{array}{l} (n-1) + (n-2) + \cdots + 3 + 2 + 1 \\ +\ 1 + 2 + \cdots + (n-3) + (n-2) + (n-1) = n + n + \cdots + n + n + n = n(n-1) \end{array}$$

On a alors calculé la somme 2 fois, il faut donc diviser l'expression par 2 pour obtenir le résultat.

Preuve multiplicative

Il y a n points. Chaque point est relié à $(n-1)$ points. Mais, avec cette méthode, chaque corde est comptée 2 fois (une fois par extrémité). On obtient donc $n(n-1)/2$ cordes.

Preuve par récurrence

Une variante (raisonnement par récurrence) consiste à déduire par exemple le cas des 6 points de celui des 5 points (que l'on peut calculer à part). Il suffit d'ajouter les 5 nouvelles cordes créées par le sixième point à celles déjà comptées pour les 5 premiers (au nombre de 10). Ainsi, on obtient 5+10 = 15 cordes.

Le fait de proposer successivement certains cas, par exemple le cas de 5 puis de 6 points, risque d'induire cette stratégie.

Éléments de débats possibles

- méthode pour être sûr de compter toutes les cordes sans en oublier ;
- moyen de communiquer sa démarche (les élèves peuvent proposer plusieurs types de codage) ;
- les élèves peuvent proposer la preuve basée sur la multiplication sans qu'ils soient capables de l'expliquer dans un premier temps : cette preuve ne peut pas être considérée comme valide sans une explication acceptée par la classe. À l'issue des débats, l'enseignant peut en proposer une ;
- efficacité des différentes formules : elle dépend du nombre de points considéré.

Autres éléments de l'activité

- certains élèves risquent de confondre cordes et diamètres ;
- un nombre élevé de points oblige la recherche d'une méthode générale ;
- proposer des cas qui se succèdent (5 points, 6 points, etc.) risque d'induire la preuve par récurrence.

3. Conseils pédagogiques

Les conseils suivants ne constituent pas une obligation mais une aide potentielle à des difficultés rencontrées lors des situations de recherche. Libre à l'utilisateur de les suivre ou pas.

La première recherche individuelle sert à trouver des méthodes en vue de la recherche par groupe où elles seront discutées. Une médiation est utile si les élèves n'ont pas compris l'énoncé et s'il y a des précisions à apporter au problème, d'où un retour à la recherche individuelle puisque l'énoncé a changé.

La séance peut prendre la forme suivante :

- présentation du problème ;
- recherche individuelle (relativement courte) ;
- médiation ;
- suite de la recherche individuelle ou nouvelle recherche individuelle ;
- recherche en groupe ;
- mise en commun.

Énoncer le problème à l'oral pour éviter la barrière de l'écrit, le problème pourra être noté par la suite au tableau pour que les élèves n'oublient pas ce qui est cherché.

Composer des groupes de 3-4 élèves maximum pour que les échanges soient productifs et tenter de limiter un rapport de dominants/dominés, dans un binôme, ainsi que le nombre de réponses à exploiter lors des mises en commun.

Ne pas donner des éléments de réponse pendant les phases de recherche (en validant ou en invalidant par la voix ou la gestuelle), ceci évite que certains soient avantagés par rapport à d'autres, et évite des soucis lors de la mise en commun.

Le but est de maintenir le suspens quant à la résolution : ne pas attendre qu'un groupe ou un élève ait trouvé une méthode fiable pour avancer dans les phases si cela induit la fin prématurée de la séance.

Si un élève pense avoir trouvé toutes les solutions (alors que ce n'est pas le cas), soit il est possible de lui dire qu'il en reste ce qui revient à invalider la réponse, soit se contenter de lui demander s’il est sûr et lui montrer en fin de séance que la prochaine fois, il faudra d’avantage chercher.

Adopter une attitude « d’animateur » pendant la phase collective, l’important étant que les élèves se convainquent entre eux.

Les élèves voudront généralement tout expliquer par écrit, ce qui est compréhensible dans ce genre de situations. Une affiche peut constituer une simple aide à la présentation orale des solutions (pour éviter de copier l’ensemble des solutions, l’essentiel étant la démarche).

UTILISATION DES TECHNOLOGIES DANS LA CLASSE DE MATHÉMATIQUE AU SECONDAIRE : DES OUTILS SOUS-EXPLOITÉS

Fernando HITT* – Carlos CORTÉS ZAVALA** – Myriam RINFRET*

Résumé – Voilà plus de 30 ans que des expérimentations et des productions sont menées autour de l'utilisation des technologies dans l'enseignement des mathématiques. Différents cadres théoriques ont ainsi pu être élaborés afin d'expliquer certains phénomènes d'apprentissage et d'améliorer les approches d'enseignement avec les technologies. Nonobstant, l'impact des technologies dans la classe de mathématique demeure largement au dessous de l'impact de celles-ci dans la société. Les chercheurs en didactique des mathématiques tentent de comprendre les obstacles à l'utilisation de la technologie dans les pratiques des enseignants. Dans ce document, une analyse de ces différents obstacles est présentée.

Mots-clefs : TICE, formation des enseignants, école secondaire, modélisation mathématique, visualisation mathématique

Abstract – We have about 30 years of experimentation and production of activities about the use of technologies in the teaching of mathematics. Different theoretical frameworks have been elaborated to explain certain phenomena of learning and to improve teaching approaches with technology. Notwithstanding these developments, the impact of technology in the mathematics classroom remains well below the impact of these in society. Therefore, researchers in mathematics education focused on understanding the obstacles that impede the use of technology in teaching practices. Theses researchers have highlighted factors that explain this situation. In this document, an analysis of these different obstacles is presented.

Keywords: ICT, teacher training, secondary school, mathematical modeling, mathematics visualization

I. INTRODUCTION

La quasi-omniprésence des technologies dans la société est une évidence. Leurs utilisations font désormais partie du quotidien. Des didacticiens enthousiastes développent de plus en plus d'applications pertinentes pour l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques. Alors pourquoi le milieu scolaire semble-t-il tarder à emboîter le pas? Car c'est un constat : les TICE sont très peu présentes dans la classe de mathématiques au secondaire (au Québec, élèves âgés de 12 à 16 ans). Puisque nous croyons que ces outils peuvent avoir un apport enrichissant pour l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques, nous avons cherché à répondre à trois questions pour mieux comprendre cet état de fait. Quelles sont les croyances des enseignants quant à l'utilisation des TICE ? Quels sont les facteurs qui influencent les enseignants dans leurs choix quant à l'utilisation des TICE ? Que propose la recherche en didactique des mathématiques comme piste d'intégration des technologies en enseignement ?

II. CROYANCES CHEZ LES ENSEIGNANTS AUTOUR DE L'UTILISATION DES TICE

Chaque enseignant a son opinion, ses croyances, sur la mathématique[1] et autour de la pertinence de l'utilisation des technologies dans sa vie professionnelle. Voici les principaux arguments que l'on retrouve pour chacune des deux positions antagonistes.

* Université du Québec à Montréal, Québec – Canada – hitt.fernando@uqam.ca, rinfret.myriam@courrier.uqam.ca

** Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo – Mexique – jcortes@zeus.umich.mx

[1] Par exemple, différentes croyances autour de la mathématique en général peuvent être celles signalées par Hagelgans et al (1995, p. 12-13), ils écrivent :

© Hitt F., Cortés Zavala C., Rinfret M. (2012) Utilisation des technologies dans la classe de mathématique au secondaire : des outils sous exploités. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT6, pp. 849–862). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

1. *Non aux technologies dans la classe de mathématique!*

- La technologie s'oppose au développement des habiletés mathématiques. Par exemple, Lazli (2011) mentionne que, dans l'école secondaire où elle a fait son expérimentation avec technologie, la calculatrice est interdite puisqu'on dit que celle-ci détériore les habiletés de calcul des élèves.
- L'enseignement traditionnel est plus efficace. Des chercheurs mentionnent que dans les études PISA et les olympiades mathématiques, les pays asiatiques sont dans les premiers rangs et que dans ces pays l'enseignement est traditionnel, avec tableau à craie.
- Il est trop complexe d'utiliser les technologies. Certains croient qu'il est nécessaire de développer une expertise pour être en mesure de les utiliser adéquatement.
- Les activités technologiques ont un caractère occupationnel plus que pédagogique.
- La technologie est opaque. Elle ne montre pas comment elle a procédé pour obtenir un résultat ou une représentation.
- Le coût de l'équipement technologique rend son utilisation inéquitable, puisque tous les étudiants ne peuvent y avoir accès.
- Développer les habiletés techniques nécessaires à l'utilisation des technologies gruge du temps sur l'appropriation des concepts. Certains ont l'impression de s'éloigner des objectifs d'apprentissage avec les technologies.

2. *Oui aux technologies dans la classe des mathématiques !*

Nous avons des enseignants et chercheurs enthousiastes avec l'utilisation de la technologie, par exemple Arcavi et Hadas (2000), Lagrange (2000, 2003) et Guin et Trouche (1999).

- La technologie aide à la construction des habiletés mathématiques et à la construction des connaissances.
- Ces outils suscitent la motivation chez plusieurs élèves, particulièrement chez les garçons.
- Certains apprentissages peuvent se faire plus rapidement à l'aide de la technologie.
- Les représentations visuelles (graphiques ou constructions géométriques) sont plus précises et faciles à réaliser.
- La technologie est plus dynamique et interactive.
- La technologie est partout, donc « tout » devrait être fait dans l'ambiance technologique, laissant de côté la manipulation des objets physiques et des processus papier - crayon.

Évidemment, nous croyons qu'aucune des deux positions n'a complètement tort ou raison. Une approche technologique seule ne peut être garante d'une pédagogie de qualité. Comme tout outil, les TICE doivent s'inscrire dans un usage réfléchi. Ces deux profils nous amènent à

Les mathématiques sont :
- Un corps de connaissances déjà découvert qui doit être transmis aux générations futures par le transfert de la pensée de l'enseignant à la pensée des étudiants ;
- Un ensemble de techniques pour résoudre les problèmes standards qui doit être pratiqué jusqu'à sa maîtrise ;
- Un recueil de pensées et d'idées que les individus et les groupes d'individus ont créé et construit et que les étudiants pourraient s'attendre à aussi construire ;
- Un ensemble d'applications qui montre seulement la puissance des mathématiques pour décrire, expliquer et prédire.

nous questionner sur le type d'activités qu'il est pertinent de réaliser à l'aide de la technologie. Notre position est de trouver l'équilibre entre le travail papier-crayon et utilisation de technologie (Hitt et Kieran 2009). Nous reviendrons sur ce questionnement.

III. FACTEURS D'INFLUENCE QUANT À L'UTILISATION DES TICE PAR LES ENSEIGNANTS DE MATHÉMATIQUES AU QUÉBEC

Les croyances, qui conditionnent les choix quant à l'utilisation des TICE, peuvent être modifiées ou accentuées tout au long de la vie professionnelle de l'enseignant. Voyons les principaux facteurs.

1. Point de départ : variables qui empêchent l'utilisation des technologies

Dans une approche générale sur les différentes variables qui empêchent l'utilisation des technologies dans la classe de mathématiques, nous avons l'opinion d'Artigue (2000, p. 8-9) qui mentionne quatre points importants à réfléchir :

1. Le manque de légitimité en éducation sur les technologies informatiques par rapport à leur légitimité sociale et scientifique;
2. La sous-estimation des problèmes liés à l'informatisation de la connaissance mathématique;
3. L'opposition dominante entre les dimensions techniques et conceptuelles de l'activité mathématique;
4. La sous-estimation de la complexité des processus d'instrumentation.

Sous ce point de vue, le problème sur l'utilisation des technologies dans la classe de mathématique semble complexe. Dans ce document, nous voulons concentrer notre réflexion sur les trois premiers points (autour du point 4, on peut consulter, par exemple, Guin et Trouche 1999 ; Hoyles, Noss et Kent 2004 ; Lagrange 2000, 2003).

2. Formation des enseignants (réflexions autour du point 1 signalé par Artigue)

Ce facteur est primordial. L'enseignant y puise non seulement des connaissances disciplinaires et didactiques, mais aussi des modèles et des croyances. Quelle place accordent les milieux de formation aux TICE ?

Chaque enseignant a un vécu scolaire qui lui est propre et qui peut, à divers degrés, influencer les choix qu'il fait dans sa pratique enseignante. Dès le primaire, ses croyances autour de l'enseignement des mathématiques se forgent au fil de ses expériences en tant qu'élève. Étant donné notre expérience comme professeurs et chercheurs autour de l'apprentissage des mathématiques à l'école secondaire, nous centrons notre réflexion sur les pratiques des enseignants du secondaire, et essayons de voir quels contacts ceux-ci ont pu avoir avec les technologies au fil de leur formation.

Au Québec, l'accès aux technologies diffère grandement d'une école à l'autre. Certaines écoles sont ouvertes à l'utilisation des technologies, alors que d'autres les bannissent. Bien que la plupart des écoles autorisent la calculatrice, surtout à partir du 2^{e} cycle secondaire, cela ne signifie pas pour autant que le potentiel de cet outil soit développé dans le cadre des cours de mathématiques. Cela semble être le cas ailleurs (voir par exemple, Guin et Trouche 1999, pp. 195-196). D'autre part, il existe des écoles qui offrent des options pour certains groupes qui font tout leur parcours secondaire avec une utilisation massive des technologies (par exemple, le programme PROTIC de l'école secondaire Les Compagnons-de-Cartier de

Québec, http://www.protic.net/). Cependant, ce type d'institution est peu courant. En général, la formation de l'élève autour des technologies à l'école secondaire est principalement liée à l'utilisation de l'ordinateur dans un laboratoire, et ce, pas nécessairement en lien avec les mathématiques. L'élève est essentiellement en contact avec la technologie pour de la recherche d'informations sur Internet, pour l'utilisation de Word, d'Excel et pour des logiciels de présentation (PowerPoint). Il faut aussi mentionner la possible présence d'autres outils, tels les logiciels de géométrie dynamique. Mais encore une fois, leurs utilisations ne s'avèrent guère courantes. Enfin, le tableau interactif fait son entrée depuis quelques années dans les écoles. Bien que son usage ne soit pas encore généralisé, cet outil gagne progressivement du terrain et il sera certainement à surveiller. Cependant, les enseignants en place présentement dans les écoles n'ont pas été en contact avec ce type de tableau en tant qu'élèves.

Pour les élèves qui poursuivent leurs études au Cégep (Collège d'enseignement général et professionnel, âges de 17 et 18 ans), en plus des outils technologiques mentionnés précédemment, s'ajoute l'utilisation de logiciels qui permettent les manipulations symboliques, tel *Maple*. Tout semble indiquer qu'au collégial (Cégep), comme au secondaire, l'utilisation des technologies est restreinte au travail dans un laboratoire et que l'enseignant n'utilise pas ou très peu les technologies dans la classe des mathématiques.

Arrivé à l'université, un étudiant en formation des maîtres est sensibilisé aux TICE par le biais de divers cours selon les institutions. Par exemple, un étudiant à l'UQAM (Université du Québec à Montréal) qui veut être enseignant de mathématiques à l'école secondaire doit suivre quatre cours (15 semaines, 5 heures par semaine) sur l'utilisation de la technologie. Le premier cours vise l'appropriation de logiciels de base, soit *Word*, *Excel* et *GeoGebra*, et de la calculatrice à affichage graphique. La programmation est également abordée avec une initiation au logiciel *Langage Graphique* (Boileau 2011). Le deuxième cours traite davantage des aspects didactiques, où la production d'activités mathématiques pour les élèves de niveau secondaire à l'aide des technologies y est centrale. De plus, l'étudiant est amené à se pencher sur les contenus du programme ministériel et des manuels scolaires en lien avec l'utilisation des TICE. Le troisième cours est lié à la programmation et la production de pages Web en relation aux mathématiques. Finalement, dans le quatrième cours, on demande à l'étudiant de présenter un projet où l'utilisation de la technologie est prioritaire.

En dehors de ces quatre cours spécifiques, à quelques exceptions près, les professeurs de l'université, dans la formation des enseignants au secondaire, utilisent très peu la technologie dans leur enseignement. L'utilisation la plus répandue est le recours aux logiciels de présentation (*PowerPoint*). Mais, pour l'appropriation des concepts mathématiques, le milieu universitaire ne fournit guère plus de modèles d'intégration des TICE que les autres ordres d'enseignement.

On en arrive donc au constat que les enseignants de mathématiques ont été eux-mêmes très peu en contact avec les technologies pour l'apprentissage de cette discipline dans leur vécu scolaire. Il est important de souligner que l'étudiant est en interaction avec les croyances de ses professeurs. Ceux-ci ont une influence implicite ou explicite sur la perception de légitimité et de pertinence des technologies dans la classe des mathématiques. Le manque d'expériences personnelles liant les technologies à l'apprentissage des mathématiques peut donc être un élément qui explique la sous-utilisation de celles-ci par les enseignants.

Cette brève analyse du parcours de formation des enseignants met en lumière les contacts limités que ceux-ci ont pu avoir avec les technologies avant leur entrée dans la profession. Ainsi, le développement de l'utilisation des TICE dépend grandement de la formation continue. Les sources de formations sont variées : l'apprentissage autodidacte, les discussions entre collègues, les ressources en ligne et forums interactifs, les formations organisées dans les écoles ou les commissions scolaires, les revues spécialisées ou encore les congrès et colloques. Certaines personnes ressources, tels les conseillers pédagogiques, peuvent également assurer le développement professionnel.

Cependant, le manque de temps et de ressources monétaires restreint l'accès aux formations. Debien (2010) souligne dans son mémoire les manques de ressources et la dimension particulièrement importante pour les enseignants du temps. Dans ses conclusions, elle suggère des orientations pour élargir la formation continue aux besoins des enseignants, qui sont axés sur les échanges et la pratique locale. De plus, il apparaît que « la recherche en didactique des mathématiques ne contribue pas à préciser l'exercice de la profession enseignante. » Il faut donc repenser les liens entre les résultats de la recherche et les milieux scolaires.

3. Les balises des enseignants

En plus de son parcours de formation et des pratiques en place dans l'institution où il exerce, deux repères importants pour l'enseignant sont les documents ministériels (programmes et orientations) et les manuels scolaires. Ces derniers demeurent les principaux outils où l'enseignant puisse trouver les activités qu'il propose à ses élèves.

Les orientations des programmes d'enseignement et certaines politiques ministérielles peuvent servir de balises pour les enseignants quant à l'utilisation des TICE. Le renouveau pédagogique québécois amène un changement de perspective dans le rôle de l'enseignant. Depuis 2001, les enseignants sont appelés à se professionnaliser. Le ministère (MEQ 2001) a énoncé douze compétences professionnelles pour définir les attentes envers les enseignants. La huitième concerne directement l'utilisation des TICE. En voici l'énoncé : « Intégrer les technologies de l'information et des communications aux fins de préparation et de pilotage d'activités d'enseignement - apprentissage, de gestion de l'enseignement et de développement professionnel. » Cette vision renouvelée de l'enseignant est venue modifier les attentes envers ceux-ci ainsi que leurs responsabilités. Il est tout à fait normal que ces nombreux changements suscitent des réactions et nécessitent des adaptations. On peut penser qu'étant déjà accaparés par l'appropriation de la réforme les enseignants n'ont pas encore tous eu l'occasion de se pencher sur l'intégration des technologies.

Le programme de formation de l'école québécoise est explicite sur l'utilisation des technologies dans la classe de mathématiques. Cependant, on n'y trouve pas d'exemples concrets de leurs utilisations. Quels contenus sont propices aux TICE et comment les traiter dans un environnement technologique ? On mentionne les recherches sur internet d'informations complémentaires quant aux repères culturels entourant les mathématiques, notamment sur l'histoire des mathématiques. L'enseignant et ses élèves sont, selon nous, le plus souvent laissés à eux-mêmes pour l'intégration des TICE.

L'orientation du programme sur le développement des compétences chez les élèves est aussi un facteur quant à l'utilisation des TICE en mathématique. Avant la réforme par compétences au Québec, l'enseignement des mathématiques était fondamentalement basé sur la résolution de problèmes. Les enseignants sont donc plus familiers avec les utilisations de la technologie dans ce type d'approche. L'introduction de la résolution de situations-problèmes de l'approche par compétences bouleverse les repères. Comment utiliser les technologies pour favoriser la pensée divergente propre aux situations-problèmes dans la classe de mathématique ?

Par ailleurs, les contenus des manuels scolaires peuvent également influencer les enseignants. Les manuels scolaires québécois conçus pour le secondaire (élèves âgés de 12 à 16 ans) présentent certaines activités utilisant les TICE. L'utilisation la plus répandue est sans aucun doute la visualisation du rôle des paramètres pour les familles de fonctions à l'aide de la calculatrice à affichage graphique. On retrouve aussi des instructions qui permettent d'introduire d'un point de vue technique les outils technologiques, bref pour se familiariser à leur fonctionnement. Les outils ainsi présentés sont ensuite le plus souvent utilisés comme facilitateurs de calculs. De plus, on trouve quelques utilisations de feuille de calculs *Excel* pour étudier certaines régularités numériques. L'organisation de données et les calculs de régressions sont aussi parfois traités avec *Excel* et un peu avec la calculatrice. Finalement, la référence à l'utilisation de logiciels de géométrie dynamique pour travailler différentes propriétés géométriques est plus rare. On fait ici essentiellement référence à *Cabri Géomètre* (p.e. Breton et al. 2007), *GeoGebra* étant beaucoup plus récent.

En général, il n'y a pas d'utilisation systématique des technologies dans les manuels. Les activités n'exploitent qu'une partie du potentiel de celles-ci et sont présentées de façon plutôt isolée. Nous croyons que les manuels scolaires au Québec ont très peu d'influence dans la pratique des enseignants du point de vue de l'enseignement des mathématiques dans des environnements technologiques. De plus, si dans les manuels scolaires la technologie est utilisée seulement pour la résolution de tâches routinières, l'enseignant peut penser que le développement des habiletés supérieures des élèves n'est pas lié à l'utilisation des technologies.

On se demande pourquoi ni le ministère d'éducation, ni les chercheurs enthousiastes des technologies n'ont pas eu d'influence plus significative chez les auteurs des manuels au Québec quant à l'utilisation des technologies.

4- Un mot sur les obstacles matériels et techniques liés à l'utilisation des TICE

L'accès restreint aux laboratoires ou à d'autres équipements technologiques et le manque de support pour leur installation ou pour régler les problèmes de fonctionnement sont des facteurs qui font également obstacle à un enseignement dans un environnement technologique.

IV. PROPOSITIONS ISSUES DE LA RECHERCHE

Les milieux scolaires ont peu de liens avec les milieux de recherche en éducation. Probablement que les résultats de recherche restent locaux et isolés. Il faudrait trouver des moyens de diffuser un grand nombre d'activités pour que l'enseignant soit à l'aise avec leurs intégrations dans sa pratique. Les chercheurs doivent produire des outils didactiques sous des formes accessibles aux enseignants. C'est pourquoi nous présentons quelques exemples mettant de l'avant une intégration efficace des TICE dans la classe de mathématiques.

Les exemples que nous avons retenus permettent selon nous de mettre de l'avant les avantages de la technologie pour l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques. Notamment, pour favoriser les processus de visualisation, les processus de contrôle et les processus de conjecture et généralisation. Mais surtout, pour favoriser l'exploration et la découverte pour une construction active de connaissances. En effet, nous croyons que la technologie ne révèle pas son plein potentiel pour les séries exercices répétitifs. Dans ces cas, elle fait davantage office d'élément de vérification et de contrôle. Cet usage est tout à fait valable, voire souhaitable. Cependant, la recherche nous montre qu'un concept se bâtit à travers l'articulation entre ses différentes représentations. Dans ce but, il nous apparait que les impacts positifs de la technologie sont davantage mis de l'avant dans l'esprit du renouveau pédagogique. Nous commençons avec des exemples autour du point 2 d'Artigue.

1. *Exemples centrés sur une approche visuelle pour promouvoir la construction de concepts mathématiques*

Un bel exemple que nous pouvons nommer ici, lié à l'approche expérimentale des mathématiques, est celui des nombres polygonaux. En effet, nous pensons qu'une approche visuelle peut aider grandement les élèves dans le passage de l'arithmétique à l'algèbre. Avec les nombres polygonaux, on peut facilement passer d'un processus visuel à un processus numérique (à la Gauss) ou tabulaire et promouvoir, chez les élèves, l'articulation entre représentations (Duval 1995). Pour trouver un nombre polygonal quelconque, on peut promouvoir la conjecture et faire naître le besoin de construire une règle. Cela permet l'ouverture d'une porte vers l'algèbre (Healy et Shutherland 1990 ; Hitt 1994 et 1996 ; Hitt et Cortés, en préparation). Les difficultés mathématiques rencontrées par bon nombre d'élèves avec une approche formelle de l'enseignement de l'algèbre peuvent ainsi être réduites grâce à une approche plus visuelle et expérimentale des mathématiques.

Un autre exemple concerne l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique pour étudier les relations de covariation. Arcavi et Hadas (2000) ont proposé une activité autour des processus de visualisation, d'expérimentation, de surprise, de retour d'information (rétroaction) et sur la nécessité d'argumenter et de prouver. Le logiciel qu'ils ont utilisé pour cette expérimentation est le Geometry Inventor. Ce logiciel est très pertinent pour la modélisation de diverses situations. L'assignation des variables et la réalisation d'une représentation graphique illustrant la relation entre ces variables se font facilement. Ce logiciel est particulièrement intéressant avec des élèves au début du parcours secondaire. Celui-ci permet le développement du concept de covariation chez les élèves comme prélude au concept de fonction. Leur activité est facile à comprendre, et permet aux élèves de s'engager tout de suite dans une démarche de processus de visualisation et expérimentation. Voici l'activité adaptée à cette présentation :

Première partie. Construire un triangle isocèle ABC dans une feuille de géométrie dynamique tel que $\overline{AB} = \overline{BC}$. Ensuite, déplacer le sommet « C » du triangle et analyser ce qui varie et ce qui demeure constant. Trouvez des relations entre les variables et donnez les représentations graphiques et algébriques.
Deuxième partie. Construire un triangle ABC, tel que $\overline{AB} \neq \overline{BC}$. Ensuite, déplacer le sommet « C » du triangle et analyser ce qui varie et ce qui demeure constant. Trouvez des relations entre les variables et donnez les représentations graphiques et algébriques.

Figure 1 *– Adaptation de l'activité (Arcavi et Hadas 2000)*

Les résultats d'Arcavi et Hadas (2000) sont très positifs, tant les élèves que leurs enseignants ont trouvé cette activité riche et porteuse de sens.

Finalement, le théorème de Pythagore peut être utilisé en exemple pour promouvoir une approche visuelle et historique des mathématiques. Le programme du MELS (2007) et les manuels scolaires au Québec présentent le théorème de Pythagore comme une relation entre les côtés d'un triangle rectangle quelconque (il est rare qu'une approche visuelle soit présentée). L'histoire des mathématiques est une source d'activités très riche. Malheureusement, dans les manuels québécois, elle est souvent traitée sous forme de capsules informatives (petite explication encadrée avec informations sur un mathématicien et son œuvre). Zsabó (1960), dans son analyse historique sur la transformation des mathématiques en une science déductive, propose la réflexion autour de la visualisation. À partir de là, nous pouvons imaginer des activités où les processus de visualisation mathématique seraient prioritaires. Par exemple, le processus suivi dans l'antiquité pour découvrir le théorème de Pythagore jusqu'à sa démonstration dans les Éléments d'Euclide est un bon exemple pouvant être travaillé grâce au support visuel offert par les technologies. On peut passer des tablettes babyloniennes, à la démonstration visuelle du double d'un carré comme dans le Menon de Platon (cas particulier du théorème pour les triangles rectangles isocèles), jusqu'au théorème de Pythagore. On peut, avec l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, promouvoir les processus de visualisation et de généralisation. Une telle approche est certainement plus porteuse de sens que de rester centré uniquement sur l'apprentissage d'une formule comme le proposent plusieurs manuels scolaires québécois. Ce type d'approche dynamique de formation de concepts mathématiques permet d'ouvrir la discussion avec les élèves sur :

- L'utilisation d'un exemple de type générique pour transmettre un résultat mathématique (au lieu d'un triangle rectangle général, commencer avec un triangle rectangle isocèle avec un processus de découpage) ;
- L'évidence visuelle par rapport à la présentation de résultats de façon générale (cela fonctionne-t-il pour n'importe quel triangle isocèle ?) ;
- La preuve visuelle dans un cas particulier (triangle rectangle isocèle) du théorème de Pythagore (comme dans le Menon de Platon) ;
- L'approche visuelle n'est pas suffisante. Avec l'approche visuelle, on pourrait croire que $64 = 65$ (Carrol 1961). Nous pouvons provoquer une réflexion et promouvoir la nécessité de prouver ;
- La formalisation mathématique et la généralisation d'un résultat (du Théorème de Pythagore aux lunules d'Hippocrate de Chio).
- Retour au théorème de Pythagore et les lunules d'Hippocrate de Chio en général avec un triangle rectangle quelconque.

2. *L'utilisation de la technologie comme élément de contrôle (autour du point 3 d'Artigue)*

Les enseignants de mathématique se demandent pourquoi les élèves font tant d'erreurs dans la résolution d'exercices routiniers pour lesquels ils ont appris des algorithmes. Une possible explication est liée à ce que les psychologues appellent la courbe de l'oubli : dans l'enseignement secondaire, il y a une quantité énorme de procédures à maîtriser pour les élèves, qu'ils apprennent par cœur, sans développer d'éléments de contrôle pour exécuter ces algorithmes. Par exemple, Sierpinska et Hardy (2011, p. 243) ont présenté une analyse des manuels scolaires où l'on donne une explication aux élèves pour multiplier des binômes : « La méthode FOIL ». En cas d'oublis, la technologie pourrait servir aux élèves comme élément de contrôle dans ce type de tâches. D'ailleurs, l'étude de Karsenty (2002) nous montre la fragilité des connaissances mathématiques. Il a pris une population d'adultes qui avaient fait des études pré universitaires en sciences, mais qui avaient poursuivi leurs études dans une autre branche par la suite. Karsenty (2003) leur a demandé de faire la représentation graphique de fonctions simples, comme $f(x) = 2x$, et un grand pourcentage avait complètement oublié comment faire. Alors, l'utilisation d'une calculatrice avec manipulation symbolique peut donner aux élèves un moyen de contrôle sans toute fois résoudre les problèmes (voir Hitt et Kieran 2009).

En suivant un cadre théorique de Chevallard (1999) sur l'approche Tâche-Technique-Technologie-Théorie, le groupe APTE (http://www.math.uqam.ca/APTE/Taches.html) a proposé plusieurs activités avec la calculatrice explorant les possibilités de manipulation symbolique autour de la factorisation, dont la factorisation de $(x^n - 1) = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1)$ (Hitt et Kieran 2009). En développant la technique de la multiplication télescopique, le groupe de chercheurs a demandé aux élèves de concilier les résultats issus de la calculatrice et leurs résultats issus de la technique télescopique afin de promouvoir les processus de vérification et généralisation.

3. *Un exemple de modélisation mathématique dans un environnement de manipulation des objets physiques et technologiques : « Le réservoir »*

Une approche expérimentale des mathématiques dans un milieu de manipulation des objets physiques et technologiques permet d'aborder des situations-problèmes. Nous croyons que ce type de situation est plus riche et intéressant, plus concret, moins strictement scolaire que les activités rencontrées usuellement dans les manuels. C'est pourquoi nous allons transformer un exercice conçu pour un environnement papier-crayon en une situation-problème dans un environnement de papier-crayon, de manipulations des objets physiques et d'utilisation des technologies.

Il est important de signaler qu'il n'est pas toujours possible d'adapter un problème à une ambiance technologique. Mais cela ne signifie pas qu'il faut faire table rase et réinventer tous les problèmes. Pour preuve, nous sommes partis d'une activité tirée d'un manuel scolaire (Point de vue mathématique, 2e cycle, 1re année, vol. 1, pp. 178-191). Ce manuel amène d'abord une discussion sur le volume de plusieurs récipients, puis propose les formules correspondantes. Une fois la théorie donnée, le manuel passe aux applications, en demandant aux élèves de calculer le volume total de différents récipients. Nous avons choisi l'un de ces problèmes d'application :

<table>
<tr><td>Quelle quantité maximale de liquide chaque partie de ce réservoir contient-elle ?

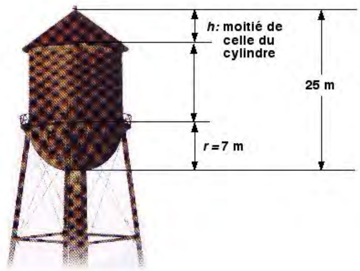
Exprime la réponse en utilisant l'unité la plus appropriée.</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Savoir-faire</td></tr>
<tr><td colspan="2">Formules données :
$V_{Demi\text{-}sphère} = \frac{2}{3} p r^3$; $V_{cylindre} = p r^2 \times h$; $V_{cône} = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$.</td></tr>
</table>

***Figure 2** – Activité (Guay S. et al. 2007)*

Afin de transformer cette activité en situation-problème ou projet, nous avons modifié la question. Nous la présentons en deux étapes, comme suit :

Première étape : Les étudiants commencent l'activité (guidés par l'enseignant) avec une approche expérimentale sur le calcul du volume d'une calotte.

L'approche expérimentale doit être faite en utilisant des objets physiques permettant de prendre directement les mesures. De plus, il est intéressant d'utiliser une vidéo de la situation qui permet de bien visualiser ce qui se passe. En fait, nous avons utilisé aussi la vidéo avec le logiciel Aviméca en combinaison avec GeoGebra (voir Figure 3, à droite) pour passer à la modélisation avec les technologies.

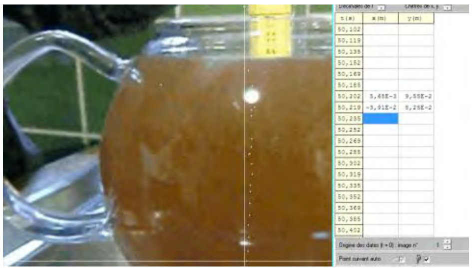
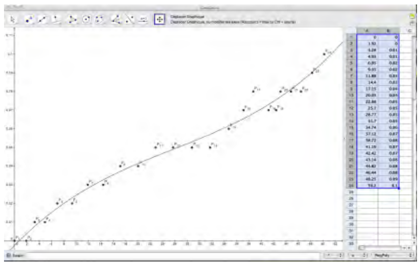
	
Approche techno expérimentale (vidéo et utilisation d'Aviméca)	Approche technologique avec GeoGebra

Figure 3 *– Transformation d'un exercice en une situation problème*

Pour cette approche, nous avons utilisé un appareil photo numérique (pour réaliser la vidéo, nous l'avons aussi analysée avec Aviméca) et le logiciel GeoGebra (pour la modélisation).

Deuxième étape : Voici un récipient d'eau dans une ville. Faites une modélisation de cette situation à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique. Vous devez montrer de façon dynamique la relation entre les variables en jeu. N'hésitez pas à utiliser plusieurs représentations pour expliquer cette situation : dessin, schéma, graphique, algèbre et description en mots.

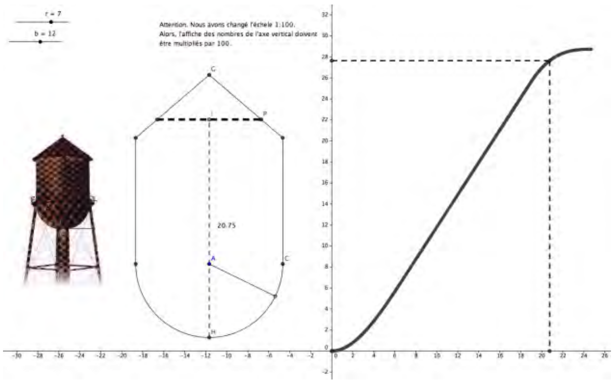


Figure 4 *– Transformation d'un exercice en une situation problème*

Posé de cette façon, cet exercice est transformé en situation-problème. Les élèves doivent identifier les variables et trouver la relation entre celles-ci (concept de covariation entre variables).

4. Vers nouvelle approche du processus de modélisation mathématique

Un aspect très important est la possibilité de manipuler du matériel physique pour avoir une approche réelle de la situation. Ainsi, on donne aux élèves la possibilité de comprendre le phénomène, et de développer des éléments de contrôle, avant de se plonger directement dans les processus algébriques. C'est-à-dire que l'approche expérimentale avec la manipulation des objets physiques va, en continuité avec l'approche technologique, promouvoir la construction de représentations signifiantes pour comprendre le phénomène et pour construire des éléments de contrôle. La promotion du processus algébrique s'inscrit en dernier lieu.

L'approche classique de la modélisation peut être résumée par le schéma suivant :

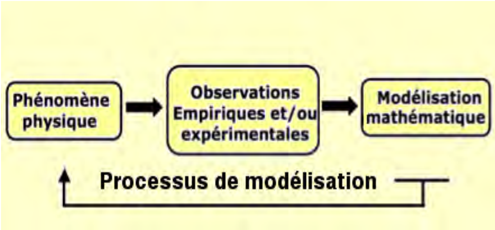


***Figure 5** – approche classique d'un processus de modélisation*

Notre approche du processus de modélisation met davantage l'accent sur l'articulation entre les différentes représentations du concept à l'étude. Elle peut être résumée par le schéma suivant :

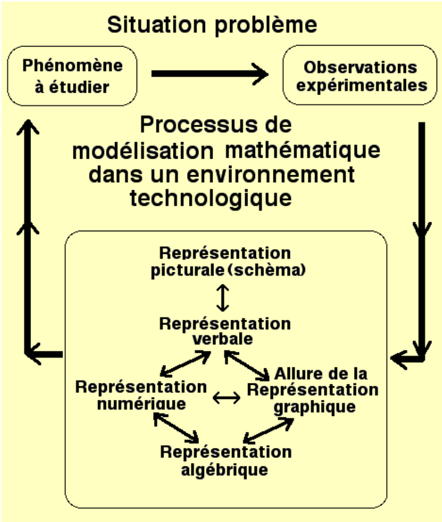


***Figure 6** – nouvelle approche d'un processus de modélisation*

V. EN CONCLUSION

Les chercheurs comme Artigue (2000, 2002) nous proposent une réflexion approfondie pour expliquer la sous-exploitation des technologies comme outils d'apprentissage et d'enseignement dans la classe de mathématique. Nous avons voulu amener dans ce document des pistes pour mieux comprendre les facteurs qui influencent les choix des enseignants quant à l'utilisation des TICE. Notre intention est de promouvoir une utilisation réfléchie des technologies. Notamment, dans des activités orientées vers une approche expérimentale des mathématiques, pour promouvoir la conjecture, la nécessité de démontrer, et de générer des processus de généralisation. Dans cette perspective nous travaillons actuellement pour produire des activités dans un contexte technologique (p.e. avec les nombres polygonaux et le théorème de Pythagore).

On peut penser que les nouvelles cohortes d’enseignants qui auront été elles-mêmes davantage en contact avec les technologies dans leur parcours scolaire seront plus enclines à reproduire cette utilisation dans leurs pratiques enseignantes. Mais pour que cela advienne, il faut que des précurseurs innovent pour introduire ces pratiques. La réflexion sur l’introduction des technologies en enseignement s’inscrit pleinement dans celle sur le renouveau pédagogique. C’est pourquoi nous avons tenu à proposer des exemples intéressants trouvés dans la littérature pour les utiliser dans la classe de mathématiques. Nous croyons que les chercheurs devraient diffuser leurs résultats sous des formes plus accessibles aux enseignants afin que ceux-ci soient en mesure de les transférer dans leurs pratiques. Nous avons également voulu montrer la possibilité de transformer un exercice classique de l’environnement papier - crayon à un environnement intéressant de manipulation physique et d’utilisation des technologies. Cette approche permet selon nous le développement des habiletés mathématiques supérieures.

L’approche par compétences à l’école québécoise et la résolution de situations-problèmes liées aux processus de modélisation mathématique nous indiquent l’importance d’intégrer des activités papier – crayon avec l'utilisation de logiciels comme GeoGebra. Notre approche essaie de donner un équilibre entre la manipulation des objets physiques, l’activité papier - crayon, et la technologie.

REMERCIEMENTS

La recherche présentée dans ce document a été réalisée grâce à la subvention Fonds de la Recherche sur la Société et la Culture du Québec (No. 008-SE-118696), Conseil de Recherche en Sciences Humaines du Canada (No. 410-2008-1836, CID 130252) et Promep du Mexique pour la formation du réseau: Uso de la tecnología para el aprendizaje de las matemáticas.

RÉFÉRENCES

Aviméca (2011) *Logiciel de pointages de clips vidéo*. Université de Rennes. http://www.ac-rennes.fr/pedagogie/scphys/outinfo/log/avimeca/am_h.htm

Arcavi A., Hadas N. (2000) Computer mediated learning: an example of an approach. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *5*, 25-45. Kluwer Academic Publishers.

Artigue M. (2000) Instrumentation issues and the integration of computer technologies into secondary mathematics teaching. In *Proceedings of the Annual Meeting of GDM* (pp. 7-17). Potsdam, Germany. (http://webdoc.sub.gwdg.de/ebook/e/gdm/2000

Artigue M. (2002) Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning 7*, 245-274.

Boileau A. (2011) Site Web: http://www.math.uqam.ca/~boileau/Progiciels.html

Breton E., Breton G., Gervais G. (2007) *Géométrie dynamique et interactive*, cahiers 1 et 2. Québec :Editions CEC.

Carroll L. (1961) *The Unknown Lewis Carroll. Eight Major Works and Many Minor.* New York: Dover Publications, Inc.

Chevallard Y. (1999). L’analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques 19*, 221-266.

Debien J. (2010) *Répertorier les modalités favorisant une démarche de développement professionnel chez les enseignants de mathématique de niveau secondaire*. Mémoire de maîtrise. Université du Québec à Montréal.

Duval Raymund (1995). *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissage intellectuels.* Suisse : Peter Lang.

GeoGebra. Version 3.2.46. http://www.geogebra.org/cms/

Guay S. et al. (2007) *Point de vue mathématique*. 2e cylce secondaire, 1er année, manuel de l'élève, Volume 1. Éditions Grand Duc.

Guin D., Trouche L. (1999) The complex process of converting tools into mathematical instruments: The case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning 3*, 195-227.

Hagelgans N., Reynolds B., Schwingendorf K., Vidakovic D., Dubinsky E., Shahin M., Wimbish J. (1995) *A practical guide to cooperative learning in collegiate mathematics.* The Mathematical Association of America MAA Notes, Number 37.

Healy L., Sutherland R. (1990) The use of spreadsheets within the mathematics classroom. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology* 21(6), 847-862.

Hitt F. (1994). Visualization, anchorage, availability and natural image: polygonal numbers in computer environments. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, Vol. 25 No. 3, 447à455.

Hitt F. (1996). Visualisation mathématique : nombres polygonaux. *Les Revues Pédagogiques* 29, 33-40.

Hitt F., Cortés C. (en préparation). Logiciel sur les nombres polygonaux. Université du Québec à Montréal et Université Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.

Hitt F., Kieran C. (2009) Constructing knowledge via a peer interaction in a CAS environment with tasks designed from a Task-Technique-Theory perspective. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, DOI number: 10.1007/s10758-009-9151-0. http://www.springerlink.com/content/657wt76n04x43rk8/

Hoyles C., Noss R., Kent Ph. (2004) On the integration of digital technologies into mathematics classrooms. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 9, 309-326.

Karsenty R. (2002) What adults remember from their high school mathematics ? The case of linear functions. *Educational Studies in Mathematics* 51, 117-144.

Lagrange J.-B. (2000) L'intégration d'instruments informatiques dans l'enseignement : Une approche par les techniques. *Educational Studies in Mathematics 43*, 1-30.

Lagrange J.-B. (2003) Learning techniques and concepts using CAS: A practical and theoretical reflection. In Fey J. T. (Ed.) (pp. 269-284). *Computer algebra systems in school mathematics* .Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Lazli S. (2011) *Enseignement de la fonction sinus au deuxième cycle du secondaire par le biais de la modélisation et d'outils technologiques*. (Mémoire de maîtrise non-publié). Université du Québec à Montréal.

MELS, Ministère de l'Éducation du Loisir et du Sport. (2007) Programme de formation, Deuxième cycle du secondaire. http://www.mels.gouv.qc.ca/DGFJ/dp /menusec.htm

MEQ, ministère de l'Éducation du Québec. (2001) *La formation à l'enseignement: les orientations, les compétences professionnelles.* Québec : ministère de l'Éducation du Québec.
http://www.mels.gouv.qc.ca/sections/publications/index.asp?page=fiche&id=250

Hardy N., Sierpinska A. (sous presse). Mathematical organization of some French and Englis texbooks used in remedial courses in collèges and universities in North America. In Hitt

F., Cortés C. (Eds) *Actes du colloque Formation à la recherche en didactique des maths*. Montréal 2011.

Szabó Á. (1960) The transformation of mathematics into deductive science and the beginnings of its foundation on definitions and axioms. *Scripta Mathematica XXVII* (I), 27-49 ; (II), 113-139.

LE ROLE D'UN INCIDENT DANS LA DOCUMENTATION COMMUNAUTAIRE : (LE) CAS DE LA CONCEPTION DES RESSOURCES « FONCTIONS » POUR LE MANUEL NUMERIQUE DE SESAMATH

Hussein SABRA*

Résumé – Nous étudions le développement de la *documentation communautaire* dans un projet de Sésamath dédié à la conception d'un manuel numérique pour la classe de seconde, qui a suscité la constitution d'une communauté de pratique d'enseignants. Nous nous intéressons particulièrement à un thème mathématique riche, celui des fonctions. Nous découpons la période de suivi selon des segments temporels séparés par des *incidents* survenant dans cette documentation. Nous étudions deux segments successifs, en analysant l'effet de l'incident sur le *système de ressources* communautaire et *l'organisation de la communauté*. Nous identifions enfin des *connaissances communautaires* construites dans ce travail.

Mots-clefs : documentation communautaire, incidents, système de ressources, organisation de la communauté, connaissances communautaires

Abstract – We study the development of the *community documentation* in a project of Sésamath dedicated to the design of a digital textbook for the grade 10, which prompted the establishment of a community of practice of teachers. We are particularly interested in a rich mathematical topic: the functions. We divide the period of observation in temporal segments separated by *incidents* occurring in this documentation. We study two successive segments; we analyze the effect of the incident on the community *resources system* and the *didactical organization* of the community. Finally, we identify the *community knowledge* constructed in this work.

Keywords: community documentation, incidents, resources system, didactical organization, community knowledge

I. INTRODUCTION

Dans le groupe de travail « Technologie et enjeux de développement : formation à distance, ressources numériques, plate-forme, multimedia…» d'EMF 2009, les questions de développement de ressources et de développement professionnel donnent une place importante aux aspects *collectifs* du travail enseignant (Georget 2010, Kuntz et al. 2010, Gueudet et Trouche 2010a). Notre présent texte, pensé se situant dans le prolongement de ces questions, analyse les effets de la conception collective de ressources pour l'enseignement des mathématiques sur le développement professionnel des professeurs.

Le travail des professeurs intègre toujours une dimension collective, dans ou hors de l'établissement scolaire. Ainsi, en France, certains enseignants participent, volontairement, à des (travaux) collectifs comme dans les Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (IREM) ou à l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public ou bien encore à des dispositifs variés de formation continue. Dans les IREM, des groupes d'enseignants de collège, de lycée et de l'université effectuent en commun des recherches sur l'enseignement des mathématiques et assurent des formations s'appuyant sur ces recherches. Les évolutions technologiques contribuent aussi à cet essor du collectif : le développement d'Internet a rendu ainsi plus rapide la diffusion et les échanges de ressources entre enseignants ; le développement d'outils nomades (clés USB, baladeurs...) a facilité le transport des ressources numériques d'un support à un autre. La mise à disposition, pour autrui, de ses propres ressources est ainsi facilitée. Ces développements donnent de nouvelles occasions de formes collectives de travail centrées sur le partage des ressources.

* S2HEP, Université Lyon 1/ ENS de Lyon – France – hussein.sabra@ens-lyon.fr

© Sabra H. (2012) Le rôle d'un incident dans la documentation communautaire : (le) cas de la conception des ressources « fonctions » pour le manuel numérique de Sésamath. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT6, pp. 863–878). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

Le développement technologique suscite en retour de nouveaux besoins et rend plus complexe le travail des enseignants. Un simple recours à des ressources en ligne, pourtant abondantes sur une variété de sites, ou un simple échange de ressources numériques ne suffisent bien sûr pas à prendre en charge cette complexité. L'ensemble de ces facteurs a favorisé l'émergence des nouvelles formes de travail collectif entre les enseignants de mathématiques (Sabra et Trouche 2009).

Le phénomène le plus significatif de cette tendance, en France, est Sésamath, association en ligne des professeurs de mathématiques, fondé en 2001, visant à fournir aux professeurs de mathématiques des ressources libres. Pour atteindre cet objectif, Sésamath développe un travail collectif entre les enseignants, autour de projets communs (Sabra 2009). Nous traiterons dans cet article deux questions : comment se développe le travail de conception de ressources pour l'enseignement des mathématiques dans Sésamath ? Quelles *connaissances mathématiques* (KM) et *connaissances pour l'enseignement* (KE) sont construites dans ce travail ?

II. CADRE THÉORIQUE

Pour l'étude de ces questions, nous nous appuierons sur une articulation entre *l'approche documentaire* (Gueudet et Trouche 2010b), la théorie des *communautés de pratique* (CoP) (Wenger 1998) et le modèle de *niveaux d'activités* des professeurs de mathématiques (Margolinas 2002).

L'approche documentaire de la didactique (Gueudet et Trouche 2010b) vise essentiellement à analyser le travail du professeur comme un travail sur les *ressources*. Elle introduit une distinction entre ressources et *document*. Elle désigne par ressources tout ce qui peut former un « ingrédient » pour un professeur qui prépare l'enseignement d'une notion mathématique donnée. Nous distinguons différents types de ressources dans l'enseignement des mathématiques : ressources qui permettent à l'enseignant de forger le savoir à enseigner (méthodes mathématiques, représentations graphiques, etc.) ; ressources comme support permettant à l'enseignant de préparer son enseignement (logiciel, rétroprojecteur, textes officiels) ; ressources adaptables et modifiables (des fichiers de logiciels libres, etc.) ; et ressources qui permettent à l'enseignant d'échanger et d'expliciter ses idées (langage, plateformes, forums, etc.). L'approche documentaire place ce secteur étendu, de types de ressources, au cœur de l'activité du professeur. On appelle *système de ressources* l'ensemble des ressources mobilisées par un enseignant dans son travail. Un document est composé des ressources recombinées et d'un *schème* (Vergnaud 1994) (c'est-à-dire une organisation invariante de l'activité pour effectuer un type de tâche). Chaque schème englobe des connaissances donnant forme à l'activité de l'enseignant et qui sont enrichies par cette activité (Sabra et Trouche à paraître).

Le travail documentaire collectif comprend : la sélection de ressources par un membre ou groupe de membres d'un collectif, leur combinaison, leur mise en œuvre en classe, les discussions entre les membres et les modifications qui peuvent avoir lieu tout au long de ce processus. Pour l'étude de ce travail nous utilisons la théorie des *communautés de pratique* (CoP) (Wenger 1998). Les CoP sont des regroupements, souvent professionnels, qui correspondent à un *engagement partagé* de tous leurs membres, qui *collaborent* à un projet commun. La pratique se développe par une articulation dialectique de deux processus : la *participation* et la *réification.* La participation est liée au sentiment d'appartenance que les membres sont susceptibles de développer. Elle repose sur une activité individuelle ou communautaire pour la réalisation du projet commun. La réification est le processus de production des ressources, des outils, des symboles, d'un langage commun, des concepts qui chosifient les objets de pratique. L'équilibre entre participation et réification contribue au développement de la communauté et de sa structure.

Nous proposons une mise en relation entre le processus de participation des membres dans une CoP et les niveaux d'activités d'un enseignant de mathématiques (Margolinas 2002) : commençons par le niveau le plus général du modèle, le *niveau idéologique* (+3), représentant la réflexion du professeur sur l'enseignement des mathématiques ; le niveau suivant (+2) est le *niveau de conception d'un thème mathématique*. A ce niveau le professeur cherche à situer un cours dans une progression mathématique. Ensuite le *niveau du projet de leçon* (+1) qui consiste à traduire et à expliciter un projet d'enseignement. Le *niveau de la situation didactique* (0) est le niveau qui prend en compte l'activité du professeur en classe. Nous considérons que la participation d'un membre dans une CoP s'inscrit dans un niveau donné de ce modèle.

A l'instar de Gueudet et Trouche (2010b), nous appellerons *documentation communautaire* le processus de réification dans une CoP d'enseignants de mathématiques qui intègre les ressources communautaires produites par la participation des membres et les *connaissances communautaires*. On appelle *système de ressources communautaires* les ressources en jeu, mises en partage par les membres pour la réalisation du projet commun. Les connaissances communautaires sont des construits, qui découlent de la résolution des problèmes liés à la pratique dans la CoP (Wenger 1998). Le développement de la documentation communautaire résulte d'un développement conjoint d'une part, du système de ressources communautaires et d'autre part des connaissances communautaires.

Dans une CoP d'enseignants de mathématiques, les échanges sont complexes et de différentes natures : didactique, épistémologique, organisationnelle ou même personnelle. Les échanges complexes et diversifiés entre les membres ouvrent le système de ressources communautaire à un ensemble de ressources importantes à prendre en compte pour la réalisation du projet commun. Les modalités d'échange entre les membres d'une CoP, les différents rôles des membres et les ressources à disposition de la CoP, influencent naturellement la réalisation du projet commun. Nous définissons l'*organisation de la communauté* comme l'arrangement de ces conditions sous lesquelles une communauté est amenée à concevoir des ressources pour la réalisation du projet commun. Nous appelons *incident documentaire communautaire* toute intégration, volontaire ou non, d'une ressource, dans le système de ressources communautaire qui modifie le cours de la documentation communautaire. Les incidents communautaires ne sont pas entendus dans le seul sens négatif, mais ils peuvent naturellement favoriser l'émergence de la CoP.

Nous reformulons nos questions comme suit : comment se développe la documentation communautaire ? Quels effets des incidents communautaires sur ce développement ? Quelles KM et KE communautaires sont construites dans cette documentation ?

III. CONSTRUCTION DU TERRAIN EXPÉRIMENTAL

Pour développer notre questionnement, nous avons fait le choix d'un projet particulier de Sésamath : projet de conception d'un manuel numérique (digital Textbook) pour la classe de seconde (15-16 ans) (nous appelons dans la suite « digiTex » le groupe d'enseignants de Sésamath qui porte ce projet) et d'un thème mathématique : les fonctions. Dans ce qui suit, nous justifierons nos choix et nous présenterons notre terrain expérimental.

Le noyau dur de Sésamath est constitué d'environ une centaine de membres adhérents. Il y a dans Sésamath un partage d'un ensemble de principes inscrits dans une charte : une philosophie commune du service public et de « mathématiques pour tous ». Élu par ce noyau, le conseil d'administration de l'association lance régulièrement de nouveaux projets pour concevoir des ressources correspondant aux besoins des enseignants. Les projets rassemblent des enseignants dont certains sont impliqués dans plusieurs projets en même temps. Ils travaillent principalement à distance, via une plate-forme et des listes de diffusion. Les collectifs réunis autour des différents projets présentent les caractéristiques de la CoP, ils se développent donc en tant que des CoP potentiels (Wenger et *al*. 2002). Parmi les projets lycée de Sésamath, il y a plusieurs qui concernent le niveau du lycée, comme digiTex et Mathenpoche seconde (MeP2$^{\text{nde}}$) qui s'inscrit dans la continuité de MeP collège. DigiTex a été lancé en juin 2009 avant MeP2$^{\text{nde}}$, mais le développement de ces deux projets, comme de tous les projets lycée de Sésamath, n'est pas indépendant.

Comme pour les chapitres de MeP collège, un chapitre de MeP2$^{\text{nde}}$ (figure 1) est constitué d'un rappel des connaissances du collège nécessaires pour ce chapitre, d'une partie qui concerne le cours avec des exercices interactifs d'application et d'une troisième partie évaluation formée d'une QCM et DS avec des corrigés interactifs. Dans notre recherche, nous avons suivi la documentation dans digiTex. Ce choix a été motivé par deux raisons : 1) après avoir conçus des manuels pour le collège (du 6$^{\text{ème}}$ au 3$^{\text{ème}}$), les membres de Sésamath abordent pour la première fois des mathématiques plus complexes, celle de la classe de seconde ; 2) après avoir conçus des manuels en format classique (pdf, fichiers, OpenOffice que les enseignants puissent librement télécharger et modifier), les membres de Sésamath visaient, avec ce projet, de créer un nouveau type de manuel numérique full Web structuré autour d'atomes[1] formulés sous la forme de types de tâche, et constitué de briques au format Web indexées de telle façon que l'enseignant puisse s'approprier et adapter à ses propres besoins. Nous avons supposé que ces nouveaux défis (mathématique et technique) pourraient stimuler la documentation communautaire, et donc la rendre plus intéressante pour notre recherche.

***Figure 1** – Copie d'écran de MeP2$^{\text{nde}}$ présentant les différentes parties d'un chapitre sur les fonctions*

Les membres de digiTex sont en majorité des enseignants en lycée. Lors du démarrage du projet, 8 membres étaient inscrits sur la liste de diffusion de ce projet. Le nombre a augmenté et a atteint une trentaine à la fin de la première année. Durant les trois premiers mois du projet, les membres déposaient et modifiaient les ressources sur un wiki auquel nous avions accès.

Nous nous intéressons au suivi du thème fonction dans ce projet. Nous avons fait ce choix du fait de la complexité de ce thème, susceptible ainsi d'être le lieu d'incidents, révélateurs de

[1] Terme propre aux membres de digiTex.

la documentation communautaire. De nombreux auteurs, comme Bloch (2002), soulignent en effet les difficultés que les enseignants rencontrent pour construire cet enseignement. Nous questionnons le rôle de la documentation communautaire des enseignants pour surmonter les difficultés d'enseignement des fonctions.

IV. MÉTHODOLOGIE

Analyser la documentation communautaire exige de prendre en compte plusieurs paramètres : observation sur le long terme pour mettre en évidence les régularités ; suivi individuel et communautaire, suivi des activités des membres et des ressources conçues, suivi en classe et hors de la classe. Nous effectuons le suivi comme observateur extérieur autant que possible.

Pour le suivi du travail documentaire d'*un* enseignant, Gueudet et Trouche (2010b) proposent une méthodologie : *l'investigation réflexive*. Suivant cette méthodologie, l'enseignant est un acteur essentiel dans le recueil de données et les outils méthodologiques suscitent une réflexivité individuelle. Parmi ces outils : des entretiens avec le professeur à son domicile ; une *représentation schématique du système de ressources* ; un journal de bord dans lequel le professeur relève les éléments marquants de son travail documentaire. L'ensemble des ressources conçues durant la période de suivi est aussi collecté.

Pour le suivi de la documentation communautaire, nous avons conçu une méthodologie dans le prolongement de cette méthodologie d'investigation réflexive. Nous avons d'abord recueilli les ressources naturelles produites dans la dynamique du projet. Parmi ces ressources naturelles la liste de diffusion propre à digiTex qui est un outil d'échanges et de conception de ressources. Nous avons reconstruit les fils de discussion de cette liste. Un fil de discussion est l'ensemble des messages échangés correspondant à un même sujet. La participation des membres à un fil de discussion s'inscrit dans un niveau d'activités (§II) que nous préciserons. Nous avons encore recueilli les ressources conçues pour la réalisation du manuel, plus particulièrement celles liées au thème « fonction ». Nous avons aussi conçu de nouveaux outils méthodologiques suscitant une réflexivité sur les activités communautaires. Parmi ces outils, un Petit Agenda de Suivi (PAS), renseigné par certains membres de la CoP choisis pour leurs rôles dans le projet. Le PAS est formé de plusieurs rubriques : description de l'incident ; acteurs jouant un rôle dans l'incident ; décisions prises ; effets de l'incident.

Nous visons, à travers ce PAS, à identifier, à partir des points de vue de certains membres, les incidents et à analyser leur impact sur la documentation communautaire tout au long de la période du suivi. Nous avons choisi deux membres de digiTex pour renseigner chacun un PAS : BM, membre du CA de Sésamath, facilitateur de l'engagement des membres dans le projet ; AL, coordinateur du débat, responsable de MeP2^{nde}. Nous ne nous limitons pas aux PAS pour repérer les incidents, nous procédons par une confrontation des différents types de données recueillies.

V. ANALYSE DES DONNÉES

Dans cette partie, nous présentons le découpage de la période de suivi, puis nous décrivons la structure de notre méthodologie d'analyse. Nous exposons enfin notre analyse.

1. Découpage par Incident

Nous avons fait un découpage en fonction des incidents communautaires repérés durant la période de suivi. Comme le temps entre un incident et l'observation de ses effets sur la documentation et l'organisation de la communauté n'est pas constant, nous faisons le découpage en fonction de notre observation des effets de l'incident (figure 2).

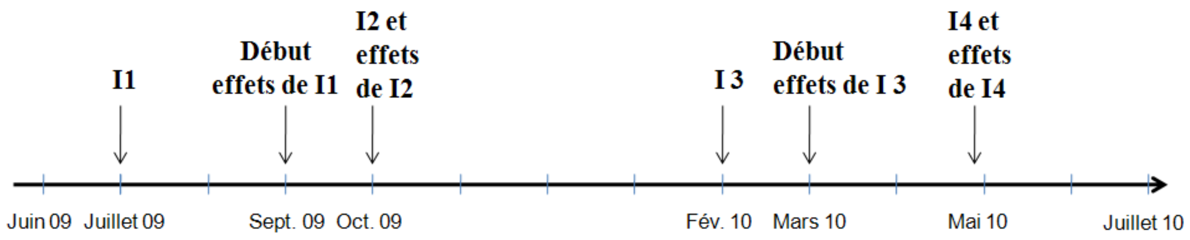


Figure 2 - *les incidents communautaires et leurs effets en fonction de la période de suivi*

La période de suivi est découpée alors en 5 *segments temporels*. Nous choisissons pour analyser dans le présent article :

- le premier segment (début juin 2009 → début septembre 2009) qui correspond à 7 fils de discussion;
- le deuxième segment (début septembre 2009 → début octobre 2009) qui correspond à 6 fils de discussion.

Ces deux segments sont séparés par I1 (l'apparition du nouveau programme de seconde). Le titre que nous indiquons pour chaque fil de discussion est celui donné par les membres de digiTex. Pour chaque segment, nous analyserons d'une part, la participation des membres et l'organisation de la CoP à partir des fils de discussion, et d'autre part le système de ressources communautaires à partir des ressources proposées et conçues par la participation. L'analyse des ressources conçues portera sur leur type ; leur contenu mathématique ; choix didactique ; et la stratégie d'enseignement de fonction dans laquelle elles s'inscrivent. Nous allons procéder pour l'identification des KM et KE communautaires par problème (§II). Nous identifierons un problème lié à la pratique, et nous étudierons le processus de sa résolution par les membres de la CoP.

2. *Analyse du premier segment*

Dans ce segment, la participation des membres s'inscrit dans les niveaux d'activités (+2) et (+3) (§II), sauf pour le fil de discussion « première fiche » qui s'inscrit dans le niveau (+1).

Fil de discussion	Niveau d'activité	Description de l'activité
entrée fonctionnelle	+2	Conception du thème fonction : progression allant de la 3ème à la terminale.
Wiki	+2	Mise en place d'un wiki et processus de dépôt des ressources pour le thème fonction.
	+3	Possibilité de rajouter un onglet pour la statistique.
atomes fonctions seconde	+2	Conception des *atomes* pour le thème fonction : rapport entre atomes et programme de seconde.
Re : [sesamath] sur le manuel numérique	+3	Conception des fichiers mathématiques fullweb.
une première fiche	+1	Proposition d'une ressource « les intervalles » pour l'introduction de la notion de fonction ; Discussion didactique autour de son contenu.

méthode de travail	+3	Activité organisationnelle : fonctionnement du wiki avec des exemples sur la fonction carrée.
méthode de travail-exercices ?	+2	Questionnement autour du modèle des fiches à concevoir.
	+3	Proposition d'une réunion moodle pour faire le point sur le projet (outils et fiches conçues)

***Tableau 1** – la participation sur la liste de diffusion correspondant au 1er segment d'analyse*

Trois ressources sont conçues dans ce segment : les intervalles (première fiche) ; la fonction carrée (méthode de travail) ; les atomes pour le thème de fonction (atomes fonction seconde). Nous présentons dans ce qui suit une analyse didactique de ces ressources.

<u>Les intervalles (Annexe 1)</u>

C'est une fiche de cours où on présente une définition des intervalles comme partie de l'axe des nombres réels. A la fin de la ressource on donne des exemples. La conception de cette ressource ne s'inscrit pas dans le cadre d'une progression explicitée. C'est une fiche de cours où pas de responsabilité à la charge des élèves. La stratégie d'enseignement des fonctions dans laquelle elle s'inscrit n'est pas claire en ce moment de développement du projet. Dans les discussions de cette ressource, il a eu une proposition que le cours sera le résultat d'une activité introductive de la notion d'intervalle. Il n'a pas eu des discussions autour de la gestion didactique de cette ressource dans la classe.

<u>La fonction carrée (Annexe 2)</u>

C'est une fiche de cours où on présente la fonction carrée : définition comme correspondance ensembliste ; étude des variations comme une interprétation de la représentation graphique. La conception de cette ressource ne s'inscrit pas dans le cadre d'une progression explicitée. Il n'y a pas de responsabilité à la charge des élèves. Elle ne s'inscrit pas dans le cadre d'une stratégie explicite d'enseignement des fonctions.

<u>Les atomes pour le thème fonction en seconde (Annexe 3)</u>

C'est une ressource structurant la participation ultérieure des membres autour du thème fonction. Elle est formée d'une liste d'atomes (38 atomes) conçus en fonction du programme de seconde. Il a eu une proposition de construire des cours classiques pour chaque atome suivant le modèle : activité introductive, cours (définitions, théorèmes et méthodes), démonstration et exercices d'application. Nous classons les atomes dans 4 catégories : définition suivant trois entrées (graphique ; algébrique et tableau) ; propriétés des fonctions (sens de variations et extremums) ; différents types de fonctions (affine, carrée, inverse et monographique) ; fonctions et résolution de problèmes (coordination de deux registres, mise en équation, transformations d'expressions algébriques). Certains atomes peuvent s'inscrire dans deux catégories en même temps.

La conception des ressources dans ce segment s'est réalisée dans le cadre du développement d'une méthode de travail pour la réalisation du projet. La mise en place d'un wiki, pour le dépôt des ressources conçues, a déterminé l'organisation de la communauté dans ce segment : la difficulté de la prise en main du wiki par les membres a multiplié les discussions autour de la modification des ressources qui y sont déposées. Les choix didactiques effectués dans la conception des ressources sont très liés au programme, ceci apparaît clairement dans les discussions : *« c'est mentionné dans le programme dans le paragraphe "notations mathématiques" »* (Anaïs, première fiche) ; *« J'ai créé une liste d'atomes pour les fonctions en seconde d'après le programme »* (LZ, atomes fonctions seconde) ; *« J'avais mis ... quelques idées, essentiellement liées au programme de 3e et sur les fonctions en 2e »* (XOB, atomes fonctions seconde).

5 membres ont écrit 82% des messages de ce segment. Nous avons identifié les rôles de 4 membres parmi eux que nous présentons en fonction du pourcentage de leurs messages dans ce segment :

- LZ (30.3%) : concepteur de ressources et modificateur principal (quasi unique) des ressources ;
- AL (10.5%) : coordinateur du débat quand c'est lié à la méthode du travail et l'organisation de la réalisation du projet ;
- BM (21%) : l'animateur du wiki, il a pris à sa charge de faciliter la prise en main du wiki par les membres ;
- Anaïs (13.2%) : relectrice et commentatrice des ressources proposées qui conduiront à des modifications.

Dans le fil « première fiche » (Annexe 4), lors de la conception de la fiche intervalles, les membres ont posé le problème de l'introduction des nouvelles notions dans le manuel, en particulier les intervalles. Il a eu plusieurs propositions : *« peut-être faut-il mettre un exemple introductif »* (Anaïs) ; ensuite, elle précise qu'il vaut que cet exemple soit un exemple de la vie quotidienne : *« Pas si facile de trouver un exemple concret »*. BM fait une proposition d'introduire les intervalles *« à partir des équations et inéquations : on donne le résultat sous la forme S=... »* ; Anaïs insiste sur l'intérêt des exemples concret : *« je trouve que les exemples ... liés à la vie quotidienne, plus parlant que S= pour l'ensemble des solutions d'inéquations »*. XOB propose : *« Mais n'aurait-on pas intérêt à rédiger cela sous forme de questions, pour avoir petit à petit des séries d'activités ? »*. Anaïs rejoint l'idée de XOB : *« il faudrait rédiger une première fiche d'activité qui permet d'introduire naturellement tout ce qui est dans la fiche de cours, qui elle doit être rédigée sous forme de synthèse »*. Cette proposition a été acceptée enfin par les membres.

La KE construite d'après la résolution de ce problème : l'introduction et la définition des nouveaux concepts viennent comme résultat d'une activité mathématique. Les membres s'appuieraient sur cette KE pour la conception des ressources où on introduit des nouveaux concepts et notions.

La participation des membres a conduit au développement d'un système de ressources constitué du : wiki support pour la réalisation du projet ; programme de la classe de seconde support pour le démarrage du projet et des ressources conçues (intervalles, fonction carrée, atomes fonction seconde). Les deux dernières ressources ont été conçues par une participation s'inscrivant dans les niveaux (+2) et (+3). Nous notons une absence d'une stratégie d'enseignement de fonctions dans laquelle s'inscrit la conception de ces ressources. Le seul fil de discussion dont la participation des membres s'inscrit dans le niveau (+1) conduisait à la conception d'une ressource (intervalles) et à la construction d'une KE communautaire. La participation qui a conduit à une construction d'une KE est celle qui a donné objet à une ressource conçue pour le manuel.

3. Analyse du deuxième segment

L'observation des effets d'I1 a commencé au début septembre, lorsque les enseignants ont commencé à prendre en compte le nouveau programme dans leur participation. Dans ce segment, la participation des membres s'inscrit, majoritairement, dans les niveaux (+3) et (+2).

Fil de discussion	**Niveau d'activité**	**Description de l'activité**
Progression 2nde	+2	Conception d'une progression pour digiTex et articulation entre plusieurs thèmes (fonction, géométrie, etc.)
	+2	Proposition d'une transition collège/lycée autour du thème fonction.
	+1	Échange didactique autour d'un « problème préparatoire » proposée, qui peut être utilisé en géométrie et fonction.
	+3	Échanges autour de l'enseignement des mathématiques au lycée.
Re : proposition pratique – projet manuel seconde	+3	Explicitation des problèmes révélés par l'apparition du nouveau programme et de la problématique croisée de plusieurs projets lycée (digiTex, Mep Lycée).
Liste mathlycée	+3	Lancement de la liste mathlycée pour mutualiser le travail dans les différents projets lycée.
Jean Paul Quelen	+3	Présentation des projets lycée de Sésamath auxquels digiTex est lié. Des problèmes techniques empêchent le développement d'un manuel full web.
Lancement liste lycée	+3	Lancement de la liste lycée. Concentration durant cette année sur la classe de seconde. Faire un lien fort avec MeP lycée.
	+2	Parler du modèle de ressources dans les projets lycée.
Chapitrage seconde	+2	La conception d'un chapitrage lié au nouveau programme de seconde. le thème fonction prenait une grande partie des discussions didactiques.

***Tableau 2** – la participation dans les fils de discussion correspondant au 2ème segment d'analyse*

Durant ce segment, les membres ont fait une large proposition de ressources sans qu'il y ait une activité de conception importante. Parmi les propositions : 3 progressions pour la seconde ; progression du thème fonction dans deux manuels. Avec le lancement de la liste lycée, les ressources conçues dans les autres projets lycée font partie du système de ressources communautaire. La seule ressource conçue dans ce segment est la progression du thème fonction (progression 2nde). Nous présentons dans ce qui suit une analyse didactique de cette ressource.

<u>Progression du thème fonction</u>

Nous considérons cette ressource comme structurant le thème fonction dans digiTex. Elle est constituée d'un découpage dit « classique », déterminé par les recommandations du nouveau programme. On y présente une définition ensembliste des fonctions, suivi d'une étude des variations, ordre et extremums. Les équations et les inéquations ont le statut d'outils pour l'enseignement des fonctions. Ce choix conduirait à une conception des problèmes de mise en équations au fil des chapitres. Les fonctions de références sont données à titre d'exemples pour illustrer les propriétés des fonctions. Cette ressource a été conçue à la fin de ce segment.

3 membres renseignaient 58.3% des messages de ce segment. Nous y décrivons leurs rôles dans ce qui suit en fonction du pourcentage de leurs messages :

- JV (26.4%) : initiateur d'idées et de décisions prises par Sésamath pour faire face à I1 ;
- AL (11.1%) : coordinateur des débats dans la perspective d'assurer des rapports entre digiTex et les projets lycée ;
- Anaïs (19.5%) : relectrice et commentatrice des ressources proposées, elle a aussi proposé des ressources.

Durant ce segment, SH (3 messages) n’est pas parmi les trois ayant une participation importante, mais ses interventions ont assuré un mouvement systémique des projets lycée de Sésamath. En comparant les rôles des membres entre le premier et le deuxième segment, on remarque qu’il y a des rôles qui ont disparu et d’autres qui ont émergé. Les rôles de BM et LZ ont disparu, parce qu’il n’y avait pas des discussions autour du wiki. AL et Anaïs ont conservé leurs rôles mais ils les ont adaptés à la situation après I1.

Dans le fil « chapitrage seconde », les membres ont rencontré un problème : quelle progression du thème fonction faut-il adopter ? Des propositions ont été indiquées : *« il faut se mettre d’accord pour que ça soit commun à tous les projets »*(AL). JV propose une progression qui considère le nouveau programme : définition et propriétés des fonctions, suivies d’un chapitre sur les fonctions références, les équations et inéquations sont des chapitres transversaux : *«à chaque fois qu’on rencontre un nouveau type de fonction, le calcul d’antécédent donne un nouveau type d’équation »*(JV). Anaïs propose une progression du thème fonction commençant par la définition, suivie par un chapitre sur les équations et les inéquations pour l’étude des fonctions, elle termine sa proposition par des problèmes de synthèse. Les fonctions de références sont présentées transversalement pour *« illustrer tous les aspects des fonctions »*(Anaïs). JV présente son désaccord avec Anaïs suit : *« dans ta progression, les notions transversales (équations, inéquations) font l'objet de chapitres bien identifiés, alors que les fonctions de références ... se retrouvent éparpillées ... J'ai tendance à croire qu'il faudrait faire le contraire »* (JV). SH avait d’autres critères à prendre en compte dans l’élaboration de la progression : *« le mieux serait d'avoir le découpage le plus classique ... c'est à dire celui repris dans la majorité des manuels ».* Après avoir vu les découpages classiques dans les différents manuels, les membres se sont mis d’accord sur un découpage prenant en compte les différents critères suscités : *« On peut utiliser les fonctions de référence pour servir d'exemples dans les chapitres plus généraux… le chapitrage proposé par JV (qui cadre bien avec ceux des manuels déjà édités, ...) me semble convenir, en prenant soin d'introduire très tôt les fonctions de référence dans les exemples »* (SH).

Une KM pour l’enseignement est construite d’après la résolution de ce problème : la progression du thème fonction se présente du général (définition, propriétés) au particulier (fonctions de référence comme exemples), les équations et inéquations ont le statut d’outil dans cette progression. La CoP ferait appel à cette KM lors de la conception des ressources s’inscrivant dans ce thème.

Après I1, il y a eu un déséquilibre entre la participation et la documentation communautaire. L’équilibre est retenu à la fin de ce segment avec la conception de la progression du thème fonction : une participation qui a conduit à une ressource conçue et KM construite. En comparant le premier et le deuxième segment, nous avons remarqué la présence d’une reconfiguration du système de ressources communautaire en fonction de I1 (on ne parle pas des ressources du premier segment sauf des atomes d’une façon marginale).

VI. CONCLUSION

Nous avons présenté dans cet article un modèle théorique et une méthodologie pour analyser la documentation communautaire d’enseignants de mathématiques. Nous avons présenté cette étude dans le cas d'un projet de Sésamath : le projet digiTex.

Au début de la réalisation du projet, l’activité des membres se situe dans le développement d’une méthode de travail. Ils ont pris les fonctions mathématiques comme objet autour duquel ils ont développé cette méthode. Dans le cas étudié, l’incident touchait une ressource jouant un rôle central (le programme de seconde) dans le travail de conception de ressources, ceci a conduit à une réorganisation de ce travail : réorganisation des rôles des membres et propositions de nouvelles ressources par les membres. Créer des rapports entre les différents projets de Sésamath forme un support pour faire face à l'incident. Dans le cas étudié, la construction des KM et KE était le fruit d'une activité de conception de ressources, dans laquelle s'engageaient les membres les plus actifs.

Cette étude a révélé des questions qui mérite plus d'approfondissement : Comment analyser les rapports entre construction des KM et KE et conception collective de ressources ?

RÉFÉRENCES

Bloch I. (2002) Un milieu graphique pour l'apprentissage de la notion de fonction au lycée. *Petit x* 58, 25-46.

Georget J.-P. (2010) Apport de l'ergonomie des EIAH pour l'analyse et la conception de ressources. In Kuzniak A., Sokhna M. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et développement : enjeux de société et de formation.* http://fastef.ucad.sn/EMF2009/Groupes%20de%20travail/GT6/georget.pdf

Gueudet G., Trouche L. (2010a) Développement de ressources pour l'enseignement et dispositifs de formation : éléments de réflexion à partir du dispositif français Pairform@nce. In Kuzniak A., Sokhna M. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et développement : enjeux de société et de formation.* http://fastef.ucad.sn/EMF2009/Groupes%20de%20travail/GT6/Gueudet%20&%20trouche.pdf

Gueudet G., Trouche L. (dir) (2010b) *Ressources vives. Le travail des professeurs de mathématiques*. Rennes : Presses Universitaires de Rennes, et Lyon : INRP.

Kuntz G., Clerc B., Hache S. (2010) Questions à l'association Sésamath : un modèle crédible pour créer, éditer et apprendre des mathématiques ? In Kuzniak A., Sokhna M. (Eds.) (pp. 867-880) *Enseignement des mathématiques et développement:enjeux de société et de formation.* http://fastef.ucad.sn/EMF2009/Groupes%20de%20travail/GT6/kuntz,%20Clerc%20et%20Hache.pdf

Margolinas C. (2002) Situations milieux, connaissances : Analyse de l'activité du professeur. In Dorier J.-L., Artaud M., Artigue M., Berthelot R., Floris R. (Eds.) (pp. 141-155) *Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques*. Grenoble : La pensée sauvage.

Sabra H. (2009) Entre monde du professeur et monde du collectif: réflexion sur la dynamique de l'association Sésamath. *Petit x* 81, 55-78.

Sabra H., Trouche L. (à paraître) Collective design of an online math textbook: when Individual and collective documentation works meet. *Proceedings of CERME 7, 9th to 13th February 2011*. Rzesów, Poland.

Sabra H., Trouche L. (dir.) (2009) *Enseignement des mathématiques et TICE, Revue de la littérature de recherche francophone (2002 – 2008)*. Lyon : INRP. http://www.inrp.fr/editions/editions-electroniques/enseignement-des-mathematiques-et-tice

Vergnaud G. (1994) Le rôle de l'enseignant à la lumière des concepts de schème et de champ conceptuel. In Artigue M., Gras R., Laborde C., P. Tavignot (Eds.) (pp. 177-191) *Vingt ans de didactiques des mathématiques en France*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Wenger E. (1998) *Communities of practice. Learning, meaning, identity*. Cambridge: Cambridge University Press.

Wenger E., McDermott R. A., Snyder W. (2002) *Cultivating communities of practice: a guide to managing knowledge*. Boston MA: Harvard Business School Press.

ANNEXE

Annexe 1 : les intervalles

Les intervalles

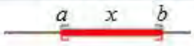
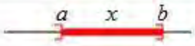
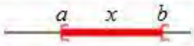
Table des matières

Définitions

On peut identifier l'ensemble de tous les nombres connus (appelés *nombres réels*) à un axe gradué. Un **intervalle** est une partie de cet axe constituée *d'un seul tenant*.

Intervalles bornés

Étant donnés deux nombres a et b, avec $a<b$. On appelle **intervalle de bornes a et b** l'ensemble de tous les nombres x tels que x est compris entre a et b. Il y a quatre possibilités, suivant qu'on considère une inégalité stricte (comme <) ou large (≤).

Notation crochet	Illustration	Condition vérifiée par x	Nom
$x \in [a\ ;\ b]$		$a \leq x \leq b$	intervalle fermé en a et b
$x \in]a\ ;\ b]$		$a < x \leq b$	intervalle ouvert en a et fermé en b
$x \in]a\ ;\ b[$		$a < x < b$	intervalle ouvert en a et b
$x \in [a\ ;\ b[$		$a \leq x < b$	intervalle fermé en a et ouvert en b

Lorsqu'une borne n'appartient pas à l'intervalle, le crochet est tourné vers l'extérieur et on dit que l'intervalle est **ouvert** en cette borne. Lorsqu'une borne appartient à l'intervalle, le crochet est tourné vers l'intérieur et on dit que l'intervalle est **fermé** en cette borne.

On note toujours un intervalle borné avec le plus petit nombre à gauche et le plus grand à droite.

Intervalles non bornés

Notation crochet	Illustration	Condition vérifiée par x
$x \in [a\ ;\ +\infty[$		$a \leq x$
$x \in]a\ ;\ +\infty[$		$a < x$
$x \in]-\infty;\ a[$		$x < a$
$x \in]-\infty;\ a]$		$x \leq a$
$x \in]-\infty;\ +\infty[$		aucune (tous les nombres)

Le signe ∞ se lit *l'infini*.

$-\infty$ ("moins l'infini") signifie que l'intervalle contient des nombres aussi petits que l'on veut. $+\infty$ ("plus l'infini")signifie que l'intervalle contient des nombres aussi grands que l'on veut. Le crochet est toujours situé vers l'extérieur du côté de $-\infty$ et $+\infty$.

Exemples

1. Au bac, les candidats qui obtiennent une mention *Très Bien* sont ceux dont la moyenne est dans l'intervalle [16 ; 20].
2. En France, un mineur est une personne dont l'âge, en année, est dans l'intervalle [0 ; 18[.
3. Pour surgeler des aliments, il est conseillé de régler son congélateur sur une température, en degrés Celsius, comprise dans l'intervalle [-30 ; -25] environ.
4. Les nombres positifs ou nuls constituent l'intervalle [0 ; +∞[.
5. Les nombres strictement positifs constituent l'intervalle]0 ; +∞[.

Annexe 2 : la fonction carrée

La fonction carré

Table des matières

Définition

La **fonction carré** est la fonction qui, à tout nombre x, associe son carré x2.

Quelques valeurs

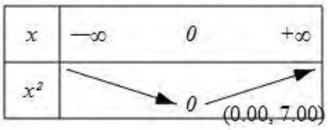
x	-3	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2	3	4
x2	9	4	1	0,25	0	0,25	1	4	9	16

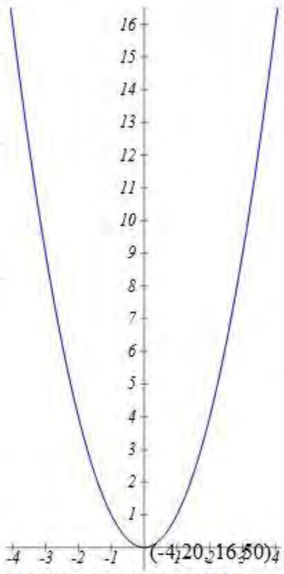
Variations

La fonction carré est décroissante sur l'intervalle]—∞; 0] et croissante sur [0 ; +∞[.
Cela signifie que :

- des nombres positifs sont classés dans le même ordre que leurs carrés ;
- des nombres négatifs sont classés dans l'ordre inverse de leurs carrés.

Le tableau de variations de la fonction carré est :





Graphe de la fonction carré.

Annexe 3 : fonction atomes seconde

Liste d'atomes en seconde d'après le projet de programme

1. Traduire le lien entre deux quantités par une formule.
2. Pour une fonction définie par une courbe : identifier la variable et, éventuellement, l'ensemble de définition ;
3. Pour une fonction définie par un tableau de données : identifier la variable et, éventuellement, l'ensemble de définition *cf fonction_definie_par_un_tableau_de_donnees* ;
4. Pour une fonction définie par une formule : identifier la variable et, éventuellement, l'ensemble de définition ;
5. Pour une fonction définie par une courbe : déterminer l'image d'un nombre ;
6. Pour une fonction définie par une courbe : rechercher des antécédents d'un nombre.
7. Pour une fonction définie par un tableau de données : déterminer l'image d'un nombre ;
8. Pour une fonction définie par un tableau de données : rechercher des antécédents d'un nombre.
9. Pour une fonction définie par une formule : déterminer l'image d'un nombre ;fct_formule_image_nb Rédigé par Xavier
10. Pour une fonction définie par une formule : rechercher des antécédents d'un nombre.
11. Fonction croissante, fonction décroissante ;
12. maximum, minimum d'une fonction sur un intervalle.
13. Décrire, avec un vocabulaire adapté ou un tableau de variations, le comportement d'une fonction définie par une courbe.
14. Dessiner une représentation graphique compatible avec un tableau de variations.
15. Lorsque le sens de variation est donné, par une phrase ou un tableau de variations : comparer les images de deux nombres d'un intervalle ;
16. déterminer tous les nombres dont l'image est supérieure (ou inférieure) à une image donnée.
17. Transformations d'expressions algébriques en vue d'une résolution de problème.
18. Associer à un problème une expression algébrique.
19. Identifier la forme la plus adéquate (développée, factorisée) d'une expression en vue de la résolution du problème donné.
20. Développer des expressions polynomiales simples ;
21. factoriser des expressions polynomiales simples ;
22. transformer des expressions rationnelles simples.
23. Mettre un problème en équation.
24. Résoudre une équation se ramenant au premier degré.
25. Encadrer une racine d'une équation grâce à un algorithme de dichotomie.
26. Donner le sens de variation d'une fonction affine : cf *variation_d_une_fonction_affine*
27. Donner le tableau de signes de a x + b pour des valeurs numériques données de a et b.
28. Connaître les variations de la fonctions carré. Représenter graphiquement la fonction carré. fonction_carre
29. Connaître les variations de la fonctions inverse. Représenter graphiquement la fonction inverse. fonction_inverse
30. Connaître les variations des fonctions polynômes de degré 2 (monotonie, extremum) et la propriété de symétrie de leurs courbes.
31. Identifier l'ensemble de définition d'une fonction homographique.
32. Résoudre graphiquement des inéquations de la forme : f (x) < k.
33. Résoudre graphiquement des inéquations de la forme : f (x) < g(x).
34. Pour un même problème, combiner résolution graphique et contrôle algébrique.
35. Résoudre une inéquation à partir de l'étude du signe d'une expression produit ou quotient de facteurs du premier degré.
36. Résoudre algébriquement les inéquations nécessaires à la résolution d'un problème.
37. « Enroulement de la droite numérique » sur le cercle trigonométrique et définition du sinus et du cosinus d'un nombre réel.
38. On fait le lien avec les valeurs des sinus et cosinus des angles de 0°, 30°, 45°, 60°, 90°.

Annexe 4 : le fil de discussion « première fiche »

M1. LZ, 3 juin 2009, 14h55
Voici un premier brouillon de fiches sur les intervalles :
http://manuel2nde.sesamath.net/doku.php?id=1
Qu'en pensez-vous ?

M2. Anaïs, 3 juin 2009, 15h31
Voici un premier brouillon de fiches sur les intervalles :
http://manuel2nde.sesamath.net/doku.php?id=1
Qu'en pensez-vous ?
@+

c'est très bien
Peut-être faut-il mettre un exemple introductif pour les intervalles non bornés avant le tableau où intervient le symbole de l'infini
Anaïs

M3. LZ, 3 juin 2009, 15h45
Est-ce que je remonte l'exemple sur la majorité à cet endroit-là ?
Mineur -> [0 ; 18[, majeur -> [18 ; +∞[?
À moins que quelqu'un ait une autre idée...
@+

M4. Anaïs, 3 juin 2009, 15h53
Il faudrait trouver un autre exemple parce que vivre l'éternité pour l'instant ce n'est pas gagné ;-) ;-)
Pas si facile de trouver un exemple concret .... une histoire de distance dans l'univers peut être ?
Anaïs

M5. BM, 3 juin 2009, 16h36
Voici un premier brouillon de fiches sur les intervalles :

http://manuel2nde.sesamath.net/doku.php?id=1
Qu'en pensez-vous ?
2 remarques :

- la version actuelle du programme ne mentionne pas du tout les intervalles. Seront-ils toujours au programme ?
- dans ces conditions, je pencherais plutôt pour une introduction à partir des équations et inéquations : on donne le résultat sous la forme S=...

BM

M6. Anaïs, 3 juin 2009, 16h41
Si BM !, c'est mentionné dans le programme dans le paragraphe « notations mathématiques » page 10 et je trouve que les exemples de LZ sont bien intéressants car liés à la vie quotidienne, plus parlant que S= pour l'ensemble des solutions d'inéquations
Anaïs

M7. XOB, 3 juin 2009, 17h04
Voici une très bonne base de départ.
J'aime aussi bien l'exemple d'introduction. Mais n'aurait-on pas intérêt à rédiger cela sous forme de questions, pour avoir petit à petit des séries d'activités ?
Peut-être peut-on mettre un deuxième exemple qui parte de l'aspect inéquation, car c'est finalement le premier contact avec les intervalles (sans le dire) au Collège. Ou de faire un atome qui lie ces deux notions.
Pourquoi ne pas parler des nombres réels dans la définition ?
Dans cette définition, je dirai plutôt : Sur une droite graduée (ou axe), où à chaque point est associé un nombre, et réciproquement, un intervalle correspond à une partie... (la suite idem) Peut-être éventuellement de rappeler la définition de la droite graduée.
Je dirais que l'on distingue deux grandes catégories d'intervalles : les intervalles bornés (4 types) et les intervalles non bornés (5 types) et de mettre l'intervalle]-inf;+inf[dans le tableau. Pour les exercices, je vois déjà bien un exo MeP ;-)

XOB

M8. Anaïs, 3 juin 2009, 17h12

En fait il faudrait rédiger une première fiche d'activité qui permet d'introduire naturellement tout ce qui est dans la fiche de cours, qui elle doit être rédigée sous forme de synthèse, qu'en pensez-vous ?
Anaïs

M9. LZ, 3 juin 2009, 18h04

2 remarques :
- la version actuelle du programme ne mentionne pas du tout les intervalles. Seront-ils toujours au programme ?
Ils sont évoqués dans la partie fonctions « fonction croissante sur un intervalle » etc. C'est pour ça que je les ai rajoutés dans les fonctions.

- dans ces conditions, je pencherais plutôt pour une introduction à partir des équations et inéquations : on donne le résultat sous la forme S=...
Mais si on fait ça, ce n'est plus atomique. Un collègue peut avoir besoin des intervalles avant, dès la définition des fonctions par exemple.
@+

M10. LZ, 3 juin 2009, 18h07

Bonjour,
Voici une très bonne base de départ.
J'aime aussi bien l'exemple d'introduction. Mais n'aurait-on pas intérêt à rédiger cela sous forme de questions, pour avoir petit à petit des séries d'activités ?
Comme dit Anaïs : plutôt des fiches de synthèse. Mais tu as raison : il faudrait penser à l'exemple introductif comme une réponse à une activité. Autrement dit, ce serait bien de rédiger une activité dont la synthèse est l'exemple introductif (si possible).

Ou de faire un atome qui lie ces deux notions.
Oui.

Pourquoi ne pas parler des nombres réels dans la définition ?
Je ne sais pas si ce vocabulaire existe dans les nouveaux programmes.

Dans cette définition, je dirai plutôt :
Sur une droite graduée (ou axe), où à chaque point est associé un nombre, et réciproquement, un intervalle correspond à une partie...(la suite idem)
Peut-être éventuellement de rappeler la définition de la droite graduée.
Je dirais que l'on distingue deux grandes catégories d'intervalles : les intervalles bornés (4 types) et les intervalles non bornés (5 types) et de mettre l'intervalle]-inf;+inf[dans le tableau.
OK.

LES OBSTACLES LINGUISTIQUES A LA CONCEPTION ET A L'USAGE DES RESSOURCES DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

Moustapha SOKHNA* – Bakary DIARRA*

Résumé – Cette contribution, qui s'intéresse à la conception et l'usage de ressources par les enseignants de mathématiques en lien avec l'intégration des technologies dans les classes, aborde les questions suivantes : « Comment prendre en compte, dès la conception de ressources, leurs usages, comment les soutenir, les étudier ? Comment évaluer leurs effets sur les apprentissages des élèves, sur les pratiques des enseignants ? » Les réponses que nous proposons sont des éléments d'une recherche en cours sur le lien entre conception et usage de ressources et développement professionnel de professeurs de mathématiques dans un pays où la langue d'enseignement est une langue seconde non nécessairement maîtrisée par les élèves et parfois par les enseignants.

Mots-clefs : ressource, obstacles linguistiques, langue seconde, professeur de mathématiques, développement professionnel

Abstract – This contribution, which focuses on the design and use of resources by mathematics teachers in relation with the integration of technology in classrooms, addresses the following questions: « How to take into account, from the resource design, its uses, how to support them, study them ? How to evaluate their effects on students' learning, on teachers' practices ? » The answers we offer are elements of an ongoing research on the relationship between design and use of resources and professional development of mathematics teachers in a country where the language of instruction is a second language, not necessarily mastered by the students and sometimes by teachers.

Keywords: resource, language obstacles, second language, mathematics teacher, professional development

I PROBLEMATIQUE

Au Sénégal, une analyse de la situation qui prévaut dans le domaine des mathématiques permet de constater l'existence d'au moins trois paramètres caractéristiques des difficultés liées à l'enseignement-apprentissage de cette discipline. Il s'agit :

- d'un déficit chronique de professeurs de mathématiques de l'enseignement moyen et secondaire (apprenants âgés de 12 à 18 ans). Il en résulte un recrutement massif et récurrent de professeurs de niveau de formation académique sinon faible du moins moyen (niveau baccalauréat) et doublé, pour certains, d'une absence de formation professionnelle (Sokhna 2010) ;
- d'une faible capacité d'accueil des structures chargées d'assurer une formation en présentiel tant initiale que continuée ;
- des conditions de travail difficiles avec une insuffisance de manuels scolaires et de ressources endogènes qui poussent les professeurs de mathématiques, avec la profusion des ressources disponibles sur Internet, à avoir recours à des ressources non nécessairement adaptées au contexte dans lequel ils évoluent.

Aujourd'hui, les bouleversements intervenus dans l'accès et l'appropriation des savoirs mathématiques suite à l'usage de ressources numériques, conséquence de l'introduction des

* Faculté des Sciences et Technologies de l'Éducation et de la Formation, Université Cheikh Anta Diop de Dakar – Sénégal – moustapha.sokhna@ucad.edu.sn, bakary.diarra@ucad.edu.sn

© Sokhna M., Diarra B. (2012) Les obstacles linguistiques à la conception et à l'usage de ressources dans l'enseignement des mathématiques. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT6, pp. 879–891). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

technologies en classe, les tâches de formation et d'enseignement sont rendues encore plus complexes.

De plus en plus, en raison de cette nouvelle situation, la réflexion didactique porte sur l'aide à apporter aux enseignants en vue de leur permettre de faire face à cette dynamique nouvelle devenue réalité incontournable (Sokhna 2007, Gueudet et Trouche 2008, Trouche et al. 2007, Floris et al. 2010 et Hitt et al. 2011).

Dans cette perspective, plusieurs pistes de recherche se font jour, empruntant des paradigmes nouveaux. De ce point de vue, nous nous intéresserons aux questions relatives à la conception et à l'usage des ressources en rapport avec l'intégration des technologies en classe. Nous nous interrogerons plus particulièrement sur la manière de tenir compte, dès la conception des ressources, de leur usage, en rapport avec les contextes langagiers des usagers éventuels.

Dans l'espace francophone, s'il est vrai qu'il est urgent de penser à la mise en place d'un dispositif collaboratif de conception de ressources à distance, il nous semble, qu'il est aussi judicieux d'engager préalablement une réflexion sur les obstacles linguistiques qui font écran à la compréhension des phénomènes mathématiques.

Ainsi, après avoir examiné la situation du statut du français langue d'enseignement dispensant les savoirs disciplinaires, nous traiterons des questions relatives au processus cognitifs qui surviennent pour assurer la compréhension des objets mathématiques.

II SITUATION DU FRANÇAIS ET SES CONSEQUENCES DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

Au Sénégal, le français est la langue officielle et, à côté de cette langue à statut spécifique, coexistent les langues nationales que sont le diola, le malinké, le pular, le sérère, le soninké, le wolof et toute autre langue codifiée (article premier, Constitution du Sénégal du 22 janvier 2001). Dès lors, tous les enseignements de mathématiques dans les collèges et lycées se font en français. En didactique des langues, ces situations où le français est à cette position privilégiée en devenant la langue cible, en contact avec une ou plusieurs langues, sont dénommées sous le terme sociolinguistique de français langue seconde (désormais FLS ou FL2). Ce type de situation d'enseignement – apprentissage diffère de celui du français langue maternelle (désormais FLM ou FL1).

Pour évaluer cette situation du français, la grille de Chaudenson (1991) a été mise en œuvre en 2004 par le Réseau de chercheurs (Seck 2004) pour rendre visible les facteurs sociolinguistiques dans lesquels s'effectuent les activités d'enseignement et d'apprentissage. La démarche d'analyse qu'emprunte cette grille se fonde sur l'opposition entre ce que l'auteur appelle le status et le corpus.

Le status concerne le statut et les fonctions d'une langue ; il s'agit de l'ensemble des données juridiques, politiques et économiques qui ont trait à une langue donnée. Cinq paramètres sont ainsi retenus : possibilités économiques et représentations sociales, usages institutionnalisés, éducation, moyen de communication de masse et officialité.

Le corpus qui est le status informel (de fait) implique : le mode d'appropriation de la langue (acquisition ou apprentissage), la véhicularisation, la compétence linguistique, la production et la consommation langagière.

Nous exploiterons les résultats des enquêtes publiées dans un document intitulé *Rapport Scientifique* (2004) (voir en annexe 1).

L'examen des données sociolinguistiques consignées indique que la situation du français langue seconde se confirme avec un statut élevé (78,35 %) et un corpus faible (45,68 %). Le français, seule langue officielle, est la langue de scolarisation et d'enseignement du préscolaire à l'enseignement supérieur.

Cette langue de scolarisation, de tradition écrite est en contact avec des langues nationales *essentiellement orales*. Cette particularité de l'oralité de nos langues est à souligner parce qu'ayant des implications dans les activités d'apprentissage, contrairement aux situations de FLS des pays du Maghreb (Tunisie, Maroc, Algérie) où le français, langue d'enseignement, fait face à l'arabe, langue d'enseignement de tradition écrite.

Si on y ajoute les différences de culture inhérentes à chaque langue, on peut aisément concevoir les obstacles auxquels se heurte l'enseignement/apprentissage des mathématiques s'effectuant dans des contextes langagiers particuliers. On peut également noter les difficultés, liées à l'éloignement des mathématiques enseignées à l'école par rapport aux réalités des sociétés dans lesquelles cet enseignement est dispensé (Traoré et Bednarz 2008).

Beaucoup de pays francophones d'Afrique de l'Ouest partagent avec le Sénégal ce type d'espace social qui constitue, par la nature des situations, des écrans à la compréhension des notions et concepts mathématiques.

III QUELQUES OUTILS THEORIQUES

Si en didactique du français, ces contextes de FLS ont fait l'objet de travaux pour en tirer les visées méthodologiques et des stratégies d'apprentissage, dans l'enseignement/apprentissage des mathématiques, la réflexion est encore à l'état embryonnaire. Nous nous intéresserons donc à cette problématique de l'enseignement des mathématiques dans un pays où la situation du français langue seconde est étudiée et confirmée avec un status élevé et un corpus faible.

Pour cela, l'un des tout-premiers niveaux linguistiques qui nous semble important, se situe dans ce que les psychologues du langage désignent par la notion « d'opération langagière ». Ces opérations sont des processus cognitifs qui mobilisent et délimitent des schémas d'action. Anderson (1977) considère que les connaissances sont en bonne partie organisées sous forme de schémas ; cette organisation se structure en larges unités que sont les actions, les séquences d'action, les événements ; ce sont ces unités disposées en bloc qu'on nomme schémas et qui sont en fait des concepts génériques culturellement connotés. Les linguistes les considèrent comme des actes de langage. Par exemple, *l'acte de langage « partager un repas »* mobilise un événement dont le déroulement ne s'opère pas de la même manière d'une langue-culture à une autre. Dans la plupart des familles au Sénégal, cette opération langagière mobilise les schémas suivants : se mettre autour d'un bol de forme circulaire pour faciliter l'équidistance des convives par rapport au centre du bol où l'on met la sauce et autres ingrédients *commun* à tous. Ainsi, ici, le terme « *commun* » fait référence à une équidistance plutôt qu'à une « *appartenance* ». Le centre du cercle devient dès lors un élément du cercle alors qu'il ne l'est pas dans une autre langue (culture), en l'occurrence le français. Cela pourrait expliquer les difficultés qu'ont les professeurs de mathématiques à faire comprendre à leurs élèves que le centre du cercle n'est pas un élément du cercle.

En mathématiques, l'appréhension des objets est essentiellement conceptuelle mais, c'est seulement par le moyen de représentations sémiotiques qu'une activité sur les objets est possible (Duval 1993).

Se pose alors la question du comment le sujet, en situation d'apprentissage, peut-il avoir une bonne maîtrise des objets mathématiques si ses représentations linguistiques sont erronées ?

Pour Duval, ces représentations constituent un moyen d'extériorisation des représentations mentales à des fins de communication. Elles permettent, par conséquent, de rendre les représentations mentales visibles et accessibles à autrui. De ce fait elles assurent une fonction de communication. Mais elles remplissent également deux autres fonctions cognitives : la fonction d'objectivation et celle de traitement.

Duval souligne également que l'enseignant de mathématiques est confronté à un paradoxe cognitif de la pensée mathématique : d'une part, l'appréhension des objets mathématiques ne peut être que conceptuelle et, d'autre part, c'est seulement par le moyen de représentations sémiotiques qu'une activité sur les objets est possible. Le problème qui se pose alors est : Comment le sujet en phase d'apprentissage pourrait-il ne pas confondre les objets mathématiques avec leurs représentations ? Si les traits ci-dessous représentent des droites, pourquoi doit-on dire qu'elles sont sécantes ?

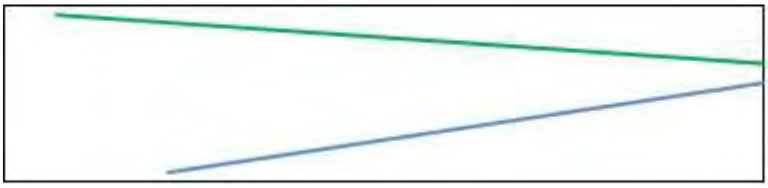


Figure 1 *— Représentation graphique de droites sécantes*

Duval distingue trois activités cognitives qui facilitent la compréhension des objets mathématiques : le traitement, la conversion et la coordination.

1. *Le traitement*

Il s'agit de la transformation d'une représentation dans le registre même où elle a été formée. En voici deux exemples :

- ***Exemple 1*** *:* $(x + 3)^2 + 11 = x^2 + 6x + 20$; $5+3 = 8$. Ces calculs sont une forme de traitement, le premier en écriture algébrique et le second en écriture numérique.
- ***Exemple 2*** *:* Une reformulation d'une phrase dans une même langue est un type de traitement : « Cet article sur *les obstacles linguistiques à l'usage des ressources dans l'enseignement des mathématiques* est produit par un didacticien des mathématiques et un didacticien du français » est un traitement de la phrase « un didacticien des mathématiques et un didacticien du français ont produit cet article *sur les obstacles linguistiques à l'usage des ressources dans l'enseignement des mathématiques* ».

2. *La conversion*

La conversion d'une représentation est la transformation de cette même représentation en une autre dans un autre registre. Pour illustrer cette situation, nous ne retiendrons que les deux exemples ci-dessous.

- ***Exemple 1*** *:* Passer de la représentation symbolique de la fonction numérique à variable réelle $f(x) = \sin(x)+\cos(x)$ dans [-3 ; 3] à la représentation graphique (Fig. 2) :

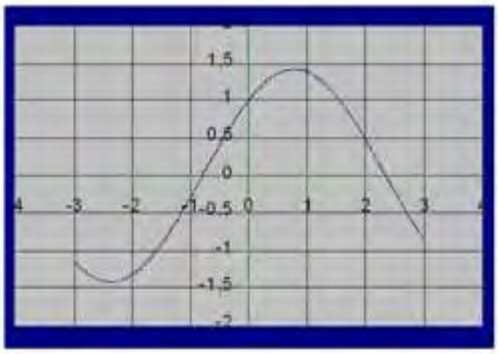


Figure 2 *– Représentation graphique de la fonction x →* $\boldsymbol{sin(x) + cos(x)}$

- ***Exemple 2*** *:* la traduction du wolof au français par exemple est la conversion d'une représentation linguistique (ici le wolof) en une autre représentation linguistique (le français).

3. La coordination

La coordination des registres correspond à la nécessité de faire appel à une diversité de registres dans le fonctionnement de la pensée. En mathématiques, en contexte de FLS, la coordination des registres est complexe. Dans la figure 3, les flèches 1, 2 et 3 vont au delà de la distinction entre représentant et représenté. Elles correspondent à ce que Duval appelle *compréhension intégrative d'une représentation.*

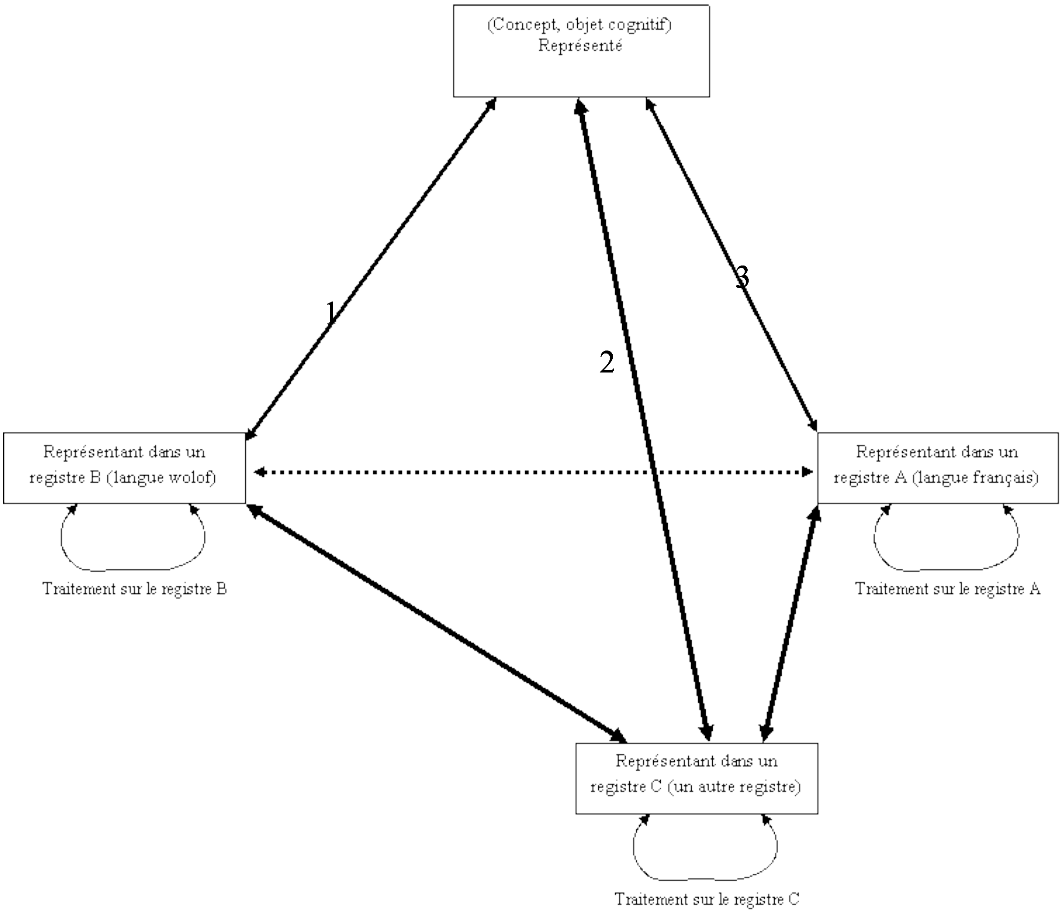


Figure 3 *– Reconstruction de la structure de la représentation en fonction de la conceptualisation de Duval (1993)*

4. RESSOURCES ET OBSTACLES LINGUISTIQUES

Comme précédemment indiqué, la plupart des ressources utilisées au Sénégal ont été conçues sans tenir compte des particularités des contextes sociolinguistiques dans lesquels peut s'effectuer leur usage et donc l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. La langue étant une construction sociale, elle véhicule nécessairement des représentations qui, en situation multilinguistique, comme celle du Sénégal, provoquent des conflits cognitifs à l'origine des obstacles linguistiques auxquelles se heurtent nos enseignants et nos apprenants en mathématiques.

1. Les éléments méthodologiques

Pour mettre à l'épreuve cette hypothèse et ses corollaires, nous avons mis en œuvre une expérimentation en vue d'évaluer la validité et la pertinence de nos présupposées.

Notre échantillon est constitué de l'ensemble des élèves-professeurs de mathématiques et de sciences de la vie et de la Terre en première année de formation. Ils sont tous titulaires du baccalauréat scientifique de l'enseignement secondaire et seront, au bout de deux ans de formation, des enseignants de ces deux disciplines dans les collèges d'enseignement moyen du Sénégal.

La ressource utilisée est puisée dans *Sésamath* (http://www.sesamath.net/). Il s'agit du 2ème sujet de la rubrique narration de recherche (voir figure 4 ci-dessous) que des professeurs de mathématiques peuvent mettre à la disposition des élèves de 4ème (14-15 ans).

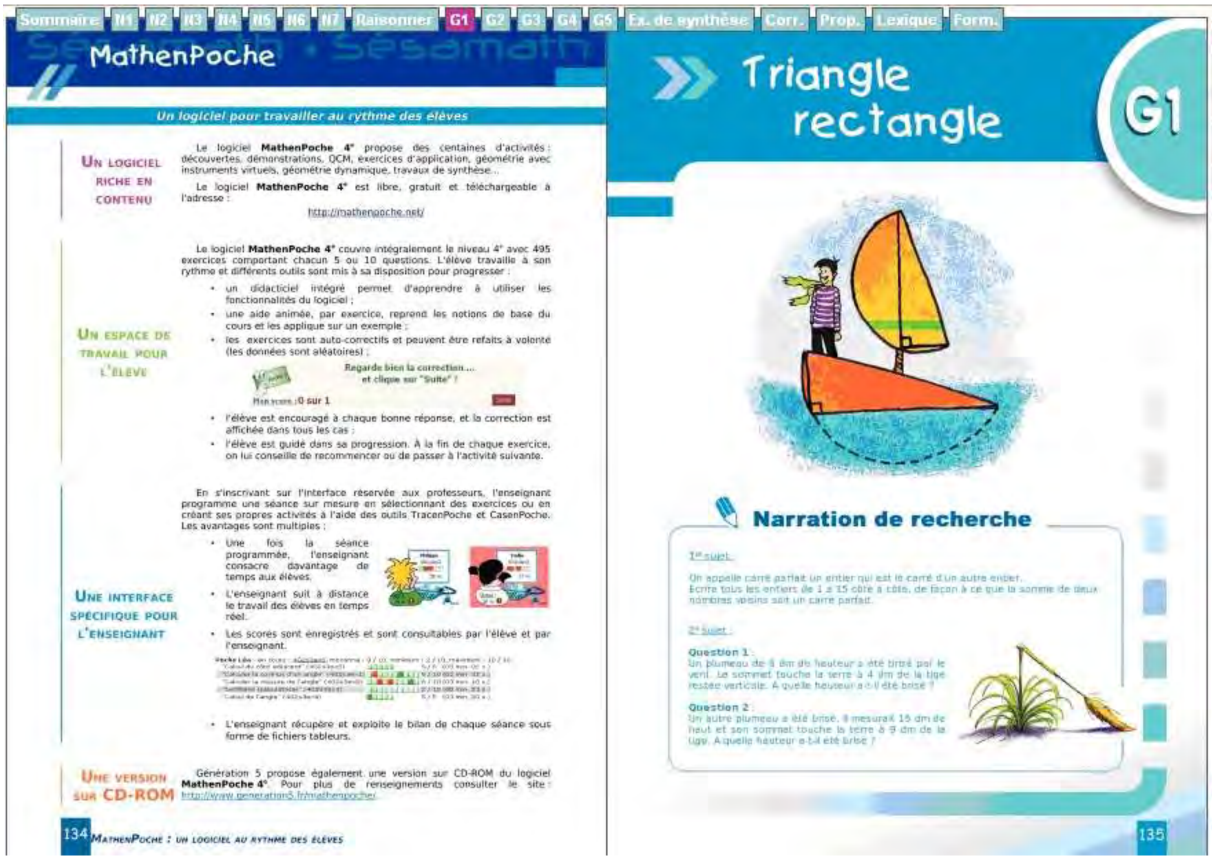


Figure 4 *– Activité se rapportant au théorème de Pythagore (http://mep-outils.sesamath.net/manuel_numerique/index.php?ouvrage=ms4_2007&page_gauche=135)*

Notons que Sésamath est une association française non lucrative qui œuvre pour l'utilisation de l'informatique dans l'enseignement des mathématiques, le travail coopératif et la co-formation entre enseignants et les services d'accompagnement des élèves dans leurs apprentissages.

Le choix de ressource de Sésamath n'est pas seulement motivé par sa gratuité ; il se justifie par la proximité de certaines parties du programme de mathématiques de l'enseignement moyen et secondaire du Sénégal avec celui de la France : le thème « triangle rectangle » et le sous-thème « théorème de Pythagore », par exemple, sont traités dans les deux pays en classe de 4ème. Outre cette similitude, il y a le fait que ces deux espaces ont en commun l'usage du français comme langue d'enseignement.

Nous avons réparti les 178 élèves-professeurs de notre échantillons de façon aléatoire en deux groupes : l'un des groupes, que nous nommons groupe 1, compte 82 étudiants qui ont travaillé sur la version téléchargeable (voir figure 5 ci-dessous). Le groupe 2, lui, compte 96 étudiants (les étudiants venus avec un peu de retard étaient dans ce groupe) et a travaillé sur le format de la figure 4. Les deux groupes ont concomitamment travaillé, pendant une heure, sans collaboration dans des salles distinctes.

Question 1 :
Un plumeau de 8 dm de hauteur a été brisé par le vent. Le sommet touche la terre à 4 dm de la tige restée verticale. A quelle hauteur a-t-il été brisé ?

Question 2 :
Un autre plumeau a été brisé. Il mesurait 15 dm de haut et son sommet touche la terre à 9 dm de la tige. A quelle hauteur a-t-il été brisé ?

***Figure 5** – Questions de l'activité proposée aux élèves-professeurs (http://mep-outils.sesamath.net/manuel_numerique/diapo.php?atome=1596&ordre=1)*

2. *Collecte et analyse de données*

Comme on pouvait s'y attendre, un nombre important d'étudiants parmi ceux du groupe 2 ont fait une représentation conforme à celle qui est attendue, même si certains ont eu des difficultés à passer de la représentation graphique à la représentation symbolique ou de faire un traitement correct dans le registre symbolique. Ce qui nous a beaucoup frappé dans cette étude, c'est le faible taux de réussite constaté au niveau des deux groupes (seulement 33% de réussite aux deux questions). Ce taux de réussite est particulièrement faible dans le groupe 1 (11%) qui, contrairement au groupe 2, n'avait pas une illustration du plumeau brisé. Le tableau 1 ci-dessous fait le résumé des résultats des deux groupes. A part ce faible taux de réussite, l'étude nous a révélé trois catégories de situations résultant des phénomènes linguistiques.

Groupes	Nombre d'étudiants ayant réussi le passage d'une représentation linguistique à une représentation graphique	Nombre d'étudiants ayant répondu correctement à une des questions au moins	Nombre d'étudiants ayant répondu correctement aux 2 questions	Nombre total d'étudiants par groupe
Groupe 1	24	15	9	82
	29%	18%	11%	
Groupe 2	77	56	49	96
	80%	58%	51%	

***Tableau 1** — Résultats obtenus dans les deux groupes*

Catégorie 1

Nous avons noté un nombre relativement important d'étudiants qui ont eu des difficultés à illustrer correctement la phrase « *le sommet touche la terre à 4 dm de la tige restée verticale* » : 20% des étudiants du groupe 2, malgré le dessin qui accompagne l'énoncé, ont considéré que la distance du sommet à la tige restée verticale est la distance du sommet au point de cassure, en un mot, la longueur de la section brisée (voir dessin 1 de la figure 6).

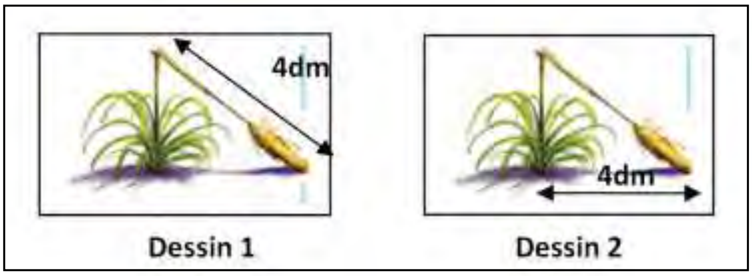


Figure *– Deux illustrations de l'énoncé « le sommet touche la terre à 4 dm de la tige restée verticale »*

Dans le groupe 1, plus de 70 % d'étudiants ont eu des difficultés à faire une illustration adéquate. Nous avons estimé que cette difficulté qui consiste à passer correctement de la représentation linguistique à une représentation figurale est liée à des problèmes de conversion entre la langue française, la langue wolof et « le langage mathématique », comme l'indique le schéma ci-dessous (figure 7).

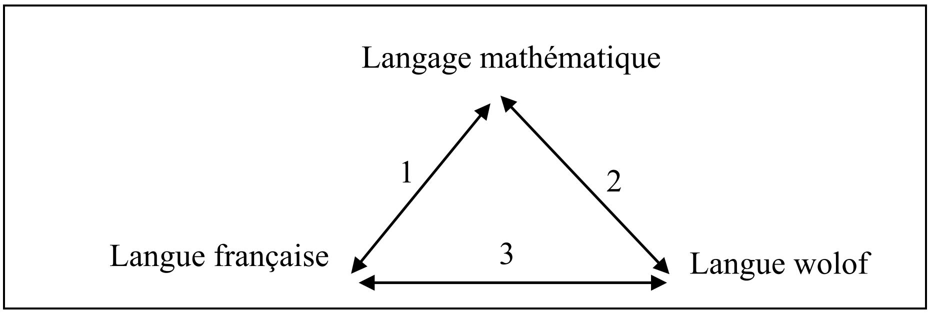


Figure 7 *– Opération de conversion tridimensionnelle entre le français, le wolof et le langage mathématique*

Si en français, après un traitement, la phrase « *le sommet touche la terre à 4 dm de la tige restée verticale* » peut devenir « *le sommet touche la terre à une distance de 4 dm de la tige restée verticale* », alors cette dernière phrase est congruente à la formulation mathématique. Or, ces élèves-professeurs ont tous étudié la notion de distance d'un point à une droite, ils sont donc censés connaître la distance du sommet à la tige, ce qui devrait les amener à faire le dessin 2 en lieu et place du dessin 1 de la figure 6. On peut donc penser, comme Roussel et al. (2008) que ces étudiants, avec leur maîtrise de la langue française moyenne, ne font pas toutes les connexions nécessaires entre les informations issues de la langue cible et leur propre vie, rythmée ici par la langue wolof. Par contre, les étudiants les plus compétents ont eu une approche globale de la tâche ; ils ont inféré le sens à partir du contexte et ont relié ce qu'ils ont entendu à leur connaissance du monde et à leur expérience personnelle.

L'étudiant que nous nommons Mbaye Diop (voir annexe 2) qui s'est d'ailleurs rendu compte qu'il risquait d'avoir une hypoténuse de même longueur que l'un des côtés de l'angle droit, a alors surélevé la terre du côté du sommet.

Catégorie 2

Le deuxième constat tout aussi inattendu est le cas d'étudiants qui, ayant réussi l'exercice 1, se sont heurtés à la résolution de l'exercice 2. Il est aisé de constater que les valeurs entières 8 et 4 sont de nature à faciliter la résolution de cet exercice. Ce qui, à nos yeux, était moins évident est la décomposition, du reste facile, du nombre 8 en 5+3, opérée par certains étudiants pour vérifier la forme rectangulaire de la figure grâce au théorème de Pythagore. En effet, en wolof, la langue la plus parlée au Sénégal, le nombre 8 se dit « djiourom gneth », littéralement 5 et 3, et forme ainsi avec 4 le bon triplet pythagoricien {5 ; 3 ; 4}. Ainsi, aucun étudiant parmi les 13 qui ont facilement traité l'exercice 1, n'a pu effectuer l'exercice 2. Il faut remarquer que les nombres à virgule ne sont pas connus dans nos langues nationales, il leur est alors difficile d'imaginer le triplet pythagoricien {4,8 ; 9 ; 10,2} pour traiter la 2ème question. L'exemple de l'étudiant que nous nommons Néné Diop est illustratif de cette idée (cf. annexe 3).

Il faut noter cependant que le fait d'avoir dans nos langues les mots-nombres six (5+1), sept (5+2), huit (5+3) et neuf (5+4) sous forme de processus de calcul peut présenter un intérêt certain pour les élèves des petites classes. En effet, le fait que ces mots-nombres sont à la fois processus et objet facilite ainsi leur réification (Sfard 1991) et par conséquent la compréhension des nombres et des calculs.

Catégorie 3

La troisième catégorie de situation faisant obstacle linguistique, qui n'est pas des moindres, est liée au sens du mot « plumeau ». Au regard de la représentation faite par les auteurs dans la figure 4, un plumeau semble être un arbuste avec une tige et un épi. Cette description est loin du sens que l'on donne habituellement à ce mot : un petit balai à plumes qui sert à dépoussiérer, à épousseter. Ce sont du reste les représentations fausses que les étudiants ont eues du mot qui les ont amenés à faire des schémas très éloignés de ce qui devrait être leur objet d'étude (voir annexe 4, copie de l'étudiant nommé Diène Ngom).

CONCLUSION

Un parcours des référentiels de compétences des enseignants en France et au Québec indique que la maîtrise de la langue française est une compétence attendue chez les enseignants dans l'exercice de leur métier. Au Sénégal, malgré le contexte de FL2 avec un status élevé (78,35 %) et un corpus faible (45,68 %) ainsi qu'une maîtrise de la langue, souvent insuffisante, chez certains enseignants, cette aptitude n'est pas une compétence exigible à l'exercice de ce métier. Il s'y ajoute qu'en mathématiques, avec le manque de manuel, de ressources endogènes et de formation, l'usage des ressources conçues dans des contextes culturels et sociolinguistiques différents, pose un certain nombre des problèmes :

- La non disponibilité du matériel informatique chaque fois que de besoin, amène les enseignants à imprimer et à photocopier des ressources pour leur exploitation en classe, sans parfois tenir compte du contexte dans lequel la ressource a été conçue ; il est tout aussi évident que le concepteur n'a, parfois pas, une claire idée du contexte linguistique dans lequel sa ressource sera utilisée. L'expérience montre qu'une forte contextualisation de la ressource ne facilite pas nécessairement les usages. Ainsi pour un enseignant, les variables liées à l'usage de ressources sont à la fois les variables didactiques, le contexte culturel et les aspects sociolinguistiques.

– Un autre point qui mériterait d'être étudié plus en profondeur concerne les conditions de collaboration dans la conception de ressources dans le cadre d'un espace linguistique comme la « francophonie ». D'ailleurs, ce point de vue explique les difficultés que rencontrent les collègues de Sésamath à mettre en place une communauté d'enseignants ouverte sur la conception et l'usage des ressources. En effet nos premiers résultats montrent qu'au-delà du curriculum sur l'enseignement des mathématiques, cette collaboration ne peut pas s'effectuer sans tenir compte du statut des langues nationales et du français comme langue seconde. De plus, l'accent doit être mis sur les pratiques mathématiques développées dans les différentes cultures que sont le comptage, le mesurage, le dising, le jeu, la localisation et les explications (Bishop 1991).

REFERENCES

Anderson R. (1977) The notion of Schemata and the Educational Enterprise: General discussion of the Conference. In Anderson R., Spiro R., Montagne W. (Eds.) *Schooling and Acquisition of Knowledge*. Hillsdale, New Jersey : Lawrence Erlbaum.

Bishop A. J. (1991) *Mathematical enculturation*. Dordrecht : Kluwer.

Chaudenson R. (1991) *La francophonie, représentations, réalités, perspectives*. Paris : Didier Erudition.

Duval R. (1993) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives* 5, 37-65.

Floris R., Touré H., Trouche L., Sokhna M. (2010) Technologie et enjeux de développement : formation a distance, ressources numériques, plate-forme, multimédia (synthèse du groupe de travail 6). In Kuzniak A., Sokhna M. (Dir.) *Enseignement des mathématiques et développement : enjeux de société et de formation. Actes du Colloque Espace Mathématique Francophone* 2009. *Revue Internationale Francophone*. http://fastef.ucad.sn/EMF2009/, consulté le 26 décembre 2011.

Gueudet G., Trouche L. (2008) Du travail documentaire des enseignants : genèses, collectifs, communautés. Le cas des mathématiques. *Education et didactique* 2(3), 7-33.

Hitt F., Maschietto M., Trgalová J., Sokhna M. (2011) Ressources et développement professionnel des enseignants (introduction au groupe de travail 6). *Colloque Espace Mathématique Francophone 2012*. http://www.emf2012.unige.ch, consulté le 26 décembre 2011.

Roussel S., Rieussec A., Nespoulous J.-L., Tricot A. (2008) Des baladeurs MP3 en classe d'allemand - L'effet de l'autorégulation matérielle de l'écoute sur la compréhension auditive en langue seconde ». *Alsic* 11(2). http://alsic.revues.org/index413.html, consulté le 26 décembre 2011.

Seck A. (2004) *Rapport Scientifique*. Dakar : A.U.F. Université Cheikh Anta Diop.

Sfard A. (1991) On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics* 22, 1-36.

Sokhna M. (2007) Formation continue des professeurs de mathématiques au Sénégal : analyse de la transmutation d'un dispositif de formation. In Bednarz N., Mary C. (Dir.) *L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés. Actes du colloque Espace Mathématique Francophone 2006* (cédérom). Sherbrooke : Éditions du CRP.

Sokhna M. (2010). Caractérisation de pratiques enseignantes : schème d'indication topazienne. *RADISMA* 5(28). http://www.radisma.info/document.php?id=885, consulté le 26 décembre 2011.

Traoré K., Bednarz N. (2008) Mathématiques construites en contexte : Une analyse du système de numération oral utilisé par les Siamous au Burkina Faso. *Nordic Journal of African Studies* 17(3), 175-19. http://www.njas.helsinki.fi/pdf-files/vol17num3/traore_bednarz.pdf, consulté le 26 décembre 2011.

Trouche L., Hauchart C., Squalli H. (2006) Systèmes et pratiques de formation continue des enseignants en mathématiques (introduction au groupe de travail 1). In *Actes du Colloque Espace Mathématique Francophone* 2006. http://emf2006.educ.usherbrooke.ca/emf_theme_01.htm, consulté le 26 décembre 2011.

ANNEXE 1 – STATUS ET CORPUS DES LANGUES UTILISÉES AU SÉNÉGAL (SECK 2004)

TABLEAU RECAPITULATIF DES RESULTATS

STATUS

	Français	Wolof	Pulaar	Sereer	Joola
Officialité / 12	12	0	0	0	0
Usages institutionnalisés					
Total / 19.30 dont	**14**	**2.60**	**1.60**	**0.60**	**0.50**
-textes officiels / 4	3.75	0.25	-	-	-
-textes administratifs nationaux / 4	3.75	0.25	-	-	-
-justice / 3.80	3	0.20	0.20	0.20	0.20
-administration locale / 3.80	3	0.20	0.20	0.20	0.20
-religion / 3.70	0.5	1.70	1.20	0.20	0.10
Education **Total / 29.90** dont	**27**	**1.45**	**0.70**	**0.35**	**0.35**
-primaire / 9.90	8	1	0.50	0.20	0.20
-secondaire / 10	10	00	00	00	00
-supérieur / 10	09	0.45	0.25	0.15	0.15
Moyens de communication de masse **Total / 24.40** dont	13.75	7.15	2.15	0.85	0.50
-presse écrite / 4.95	3.50	0.40	0.65	0.20	0.20
-radio / 4.50	2	1.75	0.25	0.30	0.20
-télévision / 4.95	2.25	2	0.50	0.10	0.10
-cinéma / 5	3	1.50	0.50	---	---
-édition / 5	3	1.50	0.25	0.25	---
Possibilités économiques et représentations sociales / 20	16	13	4	4	4
TOTAL STATUS / 105.60	82.75	24.4?	8.45	5.80	5.35

CORPUS

Acquisition / 17.96	0.10	9.84	4.44	2.56	1.02
Apprentissage / 20	13.65	0.10	0.10	0.10	0.10
Véhicu larisation / 20	10	20	4.32	3.12	---
Compétence linguistique / 20	11	16.40	4.70	2.50	1
Production langagière / 20	10	15	5	3	3
TOTAL CORPUS / 97.96	44.75	61.34	18.56	11.28	5.12

TOTAUX PONDERES

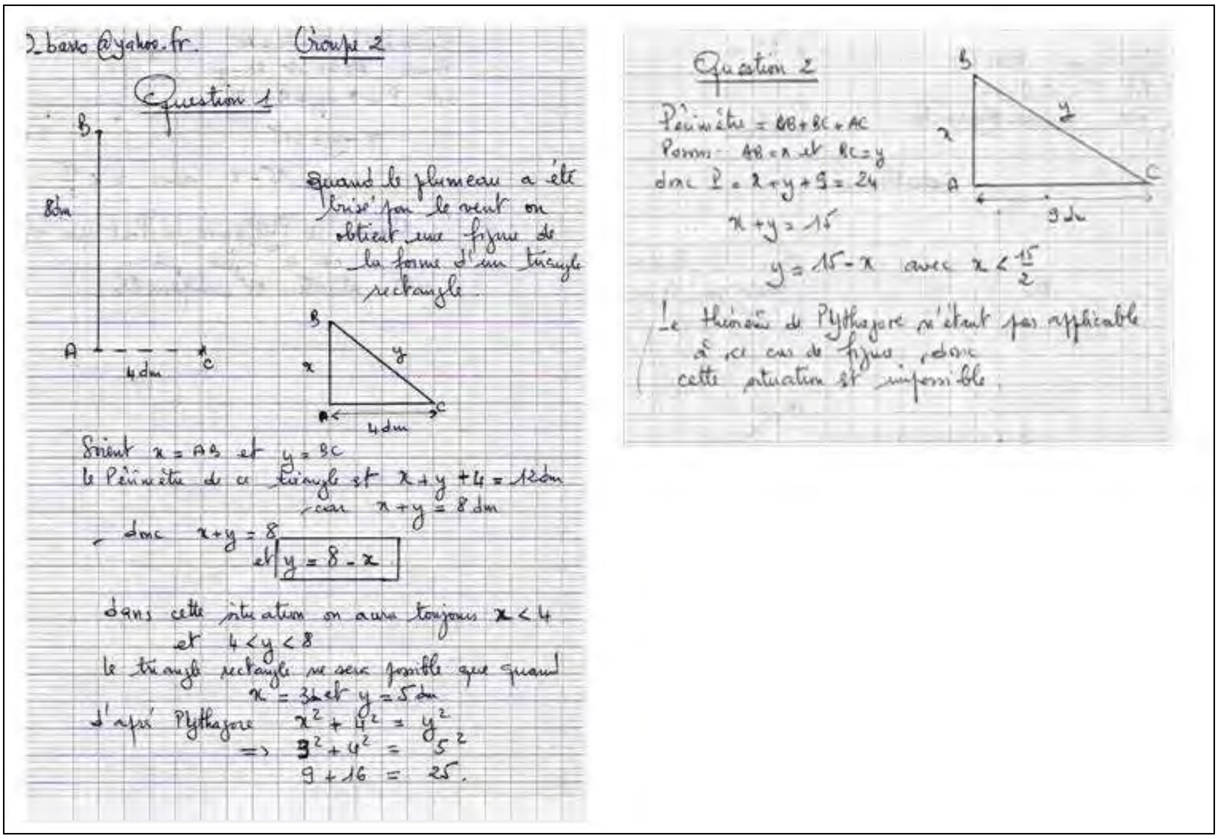
STATUS / 100	78.36	23.12	8	5.49	5.06
CORPUS / 100	45.68	62.61	18.94	11.51	5.22

ANNEXE 2 – COPIE DE L'ETUDIANT MBAYE DIOP (NOM FICTIF)


Question 1 :
- La hauteur où il a été brisé :
8 dm - 4 dm = 4 dm
h = 4 dm
Illustration par un schéma
Echelle : 1 → 1cm

Question 2
- La hauteur où il a été brisé
15 dm - 9 dm = 6 dm
h = 6 dm
Illustration par schéma
Page suivante

ANNEXE 3 – COPIE DE L'ETUDIANT NENE DIOP (NOM FICTIF)


..._basso@yahoo.fr Groupe 2
Question 1

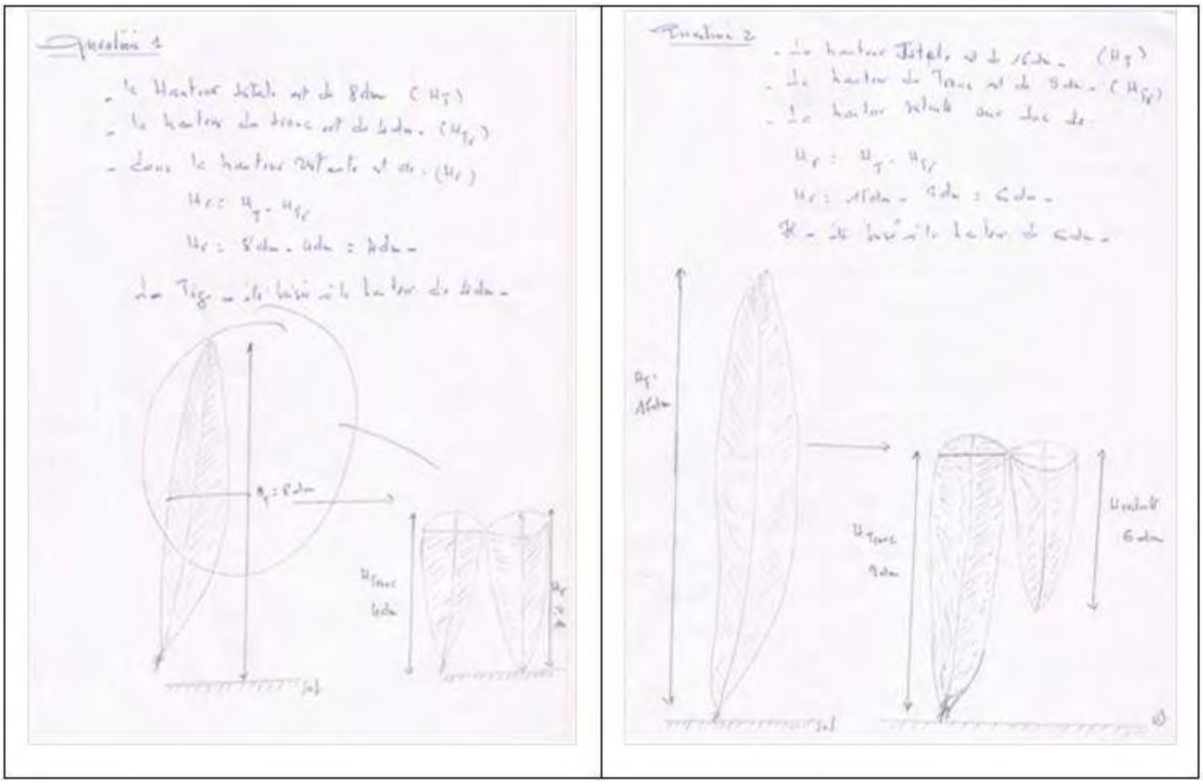
Quand le plumeau a été brisé par le vent on obtient une figure de la forme d'un triangle rectangle.

Soient $x = AB$ et $y = BC$
le Périmètre de ce triangle est $x + y + 4 = 12dm$
car $x + y = 8$ dm
donc $x + y = 8$
et $\boxed{y = 8 - x}$
dans cette situation on aura toujours $x < 4$
et $4 < y < 8$
le triangle rectangle ne sera possible que quand $x = 3$ et $y = 5$dm
d'après Pythagore $x^2 + 4^2 = y^2$
$\Rightarrow 3^2 + 4^2 = 5^2$
$9 + 16 = 25$.

Question 2

Périmètre = AB + BC + AC
Posons AB = x et BC = y
donc P = x + y + 9 = 24
$x + y = 15$
$y = 15 - x$ avec $x < \frac{15}{2}$
Le théorème de Pythagore n'étant pas applicable à ce cas de figure, donc cette situation est impossible.

ANNEXE 4 – COPIE DE L'ETUDIANT DIENE NGOM (NOM FICTIF)



QUELLE RESSOURCE POUR ENSEIGNER LA NUMÉRATION DÉCIMALE ? PRÉSENTATION D'UNE INGÉNIERIE DIDACTIQUE DE DÉVELOPPEMENT EN COURS

Frédérick TEMPIER*

Résumé – Suite à un constat sur l'enseignement de la numération décimale à l'école primaire en France qui ne prend pas suffisamment en compte l'aspect décimal de la numération, nous avons mis en place une ingénierie didactique de développement. Nous décrivons nos principaux choix pour la conception d'une ressource pour les enseignants, puis nous présentons certains résultats relatifs à l'utilisation de cette ressource par les enseignants et les conséquences que nous en tirons pour le prochain cycle d'expérimentation.

Mots-clefs : ingénierie didactique, développement, numération décimale, ressource, enseignant

Abstract – After presenting the fact, about the teaching of place value at school in France, that it is doesn't take enough account of base-10 system, we construct a didactical design. We describe the methodology used and our main choices for the conception of a resource for teachers, we present some results about the use of this resource by the teachers and the conclusions we draw for the next cycle of experimentation.

Keywords: didactical design, design research, place value, resource, teacher

I. LE POINT DE DEPART

1. *Les constats*

Dans des travaux précédents (Tempier 2009, 2010), nous avons fait un constat concernant les contraintes institutionnelles pesant sur l'enseignement de la numération en France. Notre système de numération est à la fois

- positionnel (le premier rang à partir de la droite correspond aux unités, le deuxième rang aux dizaines, etc.)
- et décimal (10 unités = 1 dizaine, 10 dizaines = 1 centaine, etc.).

Mais il apparaît principalement sous son aspect positionnel dans les manuels du niveau concerné (3ème primaire, élèves de 8/9 ans) ainsi que dans les programmes et évaluations nationales. Les unités de la numération (unités, dizaines, centaines, milliers) apparaissent alors uniquement pour nommer les rangs dans l'écriture en chiffres des nombres mais les relations entre ces unités ne sont pas un enjeu pour l'enseignement.

Par exemple une tâche courante dans les manuels est de décomposer un nombre de manière « canonique ». Par exemple 5324 se décompose 5000 + 300 + 20 + 4 ou encore (5 × 1000) + (3 × 100) + (2 × 10) + 4. Cette tâche ne fait appel qu'à l'aspect positionnel de la numération (il faut savoir que le 5, en quatrième position dans l'écriture en chiffres fait référence à 5 milliers). Il en est de même pour les tâches d'association de l'écriture chiffrée d'un nombre à son écriture en lettres, des tâches de comparaison de nombres. Or notre précédente étude a montré que ces trois types de tâches étaient ceux qui étaient valorisés par l'institution : ce sont eux que l'on trouve majoritairement dans les programmes et évaluations nationales en France, ainsi que dans les manuels de 3ème primaire.

* Doctorant Université Paris 7, LDAR – Formateur Université de Poitiers – France – frederick.tempier@univ-poitiers.fr

© Tempier F. (2012) Quelle ressource pour enseigner la numération décimale ? Présentation d'un travail en cours. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT6, pp. 892–907). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

Or quand on demande de déterminer le nombre de centaines dans 2378 ou bien de donner le nombre correspondant à 35 centaines + 42 unités, cela va mettre en jeu non seulement l'aspect positionnel de la numération mais aussi les relations entre les unités de la numération (aspect décimal). Il faut en effet savoir que 1 millier c'est 10 centaines pour comprendre que 2 milliers et 3 centaines font 23 centaines ou réciproquement que 35 centaines font 3 milliers et 5 centaines. Or ces tâches n'apparaissent pas dans les programmes et évaluations actuelles et quand elles sont travaillées dans les manuels elles sont prises en charge par une technique de lecture directe dans un tableau de numération sans explicitation des relations entre les unités.

Nous avons également pu constater que les guides du maître associés à ces manuels offrent peu d'informations à ce sujet pour permettre aux enseignants de prendre conscience des savoirs en jeu dans les tâches proposées.

Pourtant la connaissance de l'aspect décimal de la numération est nécessaire dans les mathématiques de l'école primaire puisqu'elle est notamment en jeu dans la compréhension des techniques opératoires des quatre opérations. Cet apprentissage tient une place importante à l'école primaire dans les programmes officiels français.

2. *Les objectifs, les questions*

Notre travail de thèse consiste en la recherche de conditions pour améliorer cet état de fait à travers la conception d'une ressource destinée aux enseignants. Cette ressource se limitera à l'apprentissage de la numération en 3ème primaire pour l'introduction des nombres à 4 chiffres.

A la suite de Ball et Cohen (1996) nous pensons qu'une ressource doit permettre à la fois l'apprentissage des élèves et la formation des enseignants sur la numération. Du point de vue du développement, nous visons donc la conception d'une ressource visant ces deux objectifs.

Plus précisément, du côté des élèves notre objectif est une compréhension de l'écriture chiffrée d'un nombre sous ses deux aspects (position et décimalité). En particulier nous voulons les amener à réussir certaines tâches mettant en jeu l'aspect décimal de la numération. Par exemple nous viserons la résolution de problèmes de recherche de « nombre de » dans des contextes variés (par exemple, nombre maximum de billets de 100 € que l'on peut utiliser pour payer une somme de 2378 €).

Du côté des enseignants, notre objectif est de leur permettre d'exercer une « vigilance didactique[1] » (Charles-Pezard 2010) à la fois lors du travail de préparation de l'enseignant (au niveau global de la séquence ainsi qu'au niveau local pour une séance) et de la mise en œuvre des séances dans la classe. Dans notre cas, elles doivent donc permettre à l'enseignant :

- D'intégrer de manière cohérente cette séquence dans sa programmation annuelle (projet global), en particulier faire émerger l'aspect décimal lors du travail sur d'autres notions mettant en jeu ce savoir, comme le calcul posé par exemple.
- D'élaborer une séquence permettant la construction de ces savoirs (projet local).
- De mettre en œuvre des situations, en classe, avec une gestion adaptée (dévoluer la situation, réguler l'activité des élèves et institutionnaliser les savoirs visés).

[1] Cela met en jeu « des connaissances mathématiques et didactiques nécessaires pour enseigner. Les connaissances mathématiques ne sont pas seulement académiques, elles doivent être finalisées pour l'enseignement. Les connaissances didactiques contribuent à une bonne perception des enjeux d'apprentissage des situations et de leur organisation en vue de l'enseignement de savoirs mathématiques. » (Charles-Pezard 2010, p. 210).

Cette recherche devrait aboutir à la publication d'une ressource ainsi qu'à la mise en évidence de principes de conception (Davis et Krajcik 2005) sur lesquels pourraient s'appuyer des concepteurs de ressources ou encore des chercheurs qui pourraient alors tester la fiabilité de ces principes dans d'autres contextes.

II. LES CADRES THEORIQUES ET LA METHODOLOGIE

Nous nous inscrivons dans le cadre de l'ingénierie de développement dont les caractéristiques sont définies par Perrin-Glorian (2011). Ce type de recherche demande de

> prévoir au moins deux niveaux d'ingénierie (peut-être plus) avec des objectifs différents :
>
> - premier niveau dans des conditions expérimentales spécifiques « protégées » pour tester la validité théorique des situations (i.e. leur capacité à produire les connaissances attendues, on vise moins un théorème d'existence) et dégager les choix fondamentaux de l'ingénierie : qu'est-ce qui est essentiel, incontournable en référence au savoir visé, qu'est-ce qui relève du contexte choisi et pourrait être changé, adapté, ce qui relève du détail en somme ?
> - deuxième niveau pour étudier l'adaptabilité des situations à l'enseignement ordinaire, la négociation de la première ingénierie ; l'écart à la mise en œuvre et les transformations opérées sont prises comme objet d'étude pour des retombées sur l'ingénierie didactique elle-même, la connaissance du fonctionnement des savoirs concernés dans le système scolaire (enseignant, élèves...). Sur quoi peut-on lâcher du lest dans la négociation ? Que va-t-on essayer de sauvegarder ? Pourquoi ? Comment exercer un contrôle sur ce qui peut se passer ? (Op. cité, p. 68)

Nous nous appuyons sur différents cadres théoriques issus de la didactique des mathématiques auxquels nous empruntons des « outils de conception » (Ruthven, Laborde, Leach et Tiberghien 2009) : la théorie des situations didactiques (Brousseau 1998) pour la notion de milieu, de potentiel adidactique, de variable didactique et la théorie anthropologique du didactique (Chevallard 1999) pour la notion d'organisation mathématique (ou praxéologie) et d'ostensif. Ces outils permettent la conception de l'ingénierie de premier niveau.

Notre méthodologie consiste à faire des choix *a priori* de conception pour la ressource (aux deux niveaux d'ingénierie) et à tester leur validité lors de l'utilisation de la ressource par des enseignants (d'au moins cinq années d'expérience). Pour cela nous avons constitué deux groupes d'enseignants qui vont utiliser la ressource :

- un groupe « de travail » (quatre enseignants) pour lequel nous observons les enseignants lors de la mise en œuvre de quelques séances dans leur classe, sans intervenir. Ce groupe participe aussi à la conception de la ressource lors de deux réunions de travail collaboratif avec le chercheur ;
- un groupe « libre » (trois enseignants) pour lequel nous n'intervenons pas du tout au cours de leur utilisation de la ressource.

Pour les enseignants de ces deux groupes nous réalisons des entretiens individuels avant et après la séquence et nous faisons passer deux évaluations aux élèves (avant et après la séquence aussi).

Les choix de conception (1er et 2ème niveau) seront mis à l'étude lors de cette expérimentation. Pour évaluer l'utilisation générale de la ressource par les enseignants nous utilisons les concepts d'utilité, utilisabilité et acceptabilité (Tricot et al. 2003, Georget 2010).

Ces analyses permettront finalement de questionner nos choix de conception (1er et 2ème niveau) et ainsi d'engager un nouveau cycle de conception (et éventuellement de revenir sur la question de départ pour l'affiner, la modifier …).

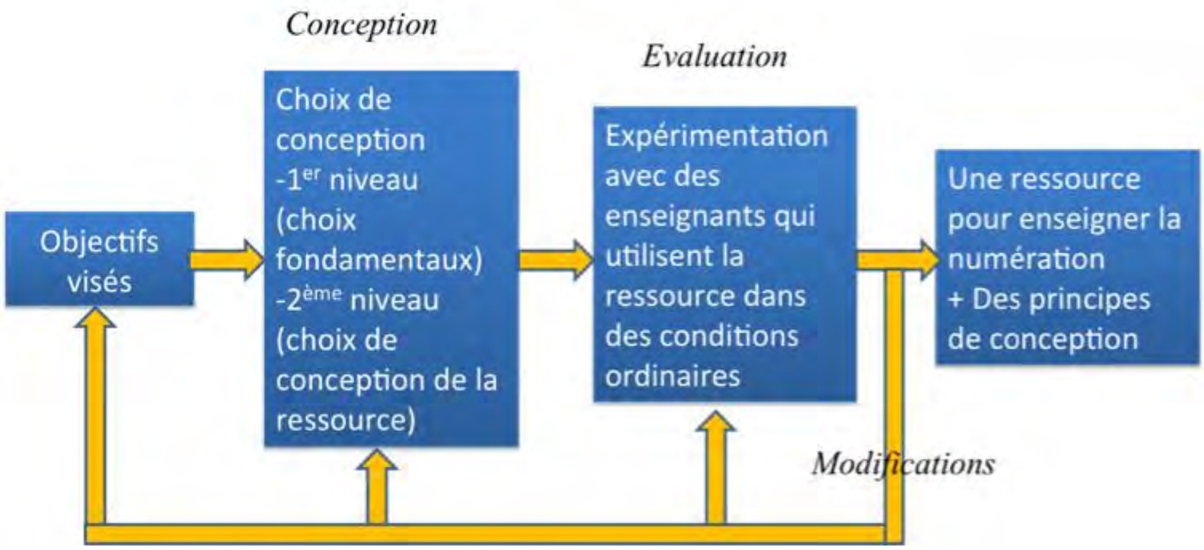


Figure 1 *– Schéma général de la méthodologie*

Ce que nous présentons dans cet article concerne un seul cycle d'expérimentation : nous allons présenter la ressource telle qu'elle a été proposée aux enseignants cette année et l'utilisation que ceux-ci en ont faite.

III. PRESENTATION DE LA RESSOURCE ET DES PRINCIPAUX CHOIX DE CONCEPTION

1. Nos choix d'ingénierie de premier niveau

Pour l'ingénierie de premier niveau nous nous sommes appuyés sur une analyse épistémologique de la numération ainsi que sur une étude de différents choix possibles pour l'enseignement de la numération en appui sur Chambris[2] (2008).

Nous avons choisi d'utiliser la situation de dénombrement de collections dans le sens d'une situation fondamentale (Brousseau 1998), c'est-à-dire une « situation capable d'engendrer par le jeu des variables didactiques qui la déterminent, l'ensemble des situations correspondant à un savoir déterminé » et qui « offre des possibilités d'enseignement mais surtout une représentation du savoir par les problèmes où il intervient permettant de restituer le sens du savoir à enseigner ».

Ce choix permet donc à la fois de construire nos situations d'apprentissage à mettre en œuvre dans les classes (1er niveau) mais aussi de permettre aux enseignants de s'approprier les enjeux (2ème niveau) par une explicitation du lien entre jeu sur les variables de la situation de dénombrement et les savoirs en jeu.

Une des variables didactiques principales concerne le groupement de la collection : si la collection n'est pas groupée (et si la taille de la collection est suffisamment importante, comme par exemple 3246 unités) nous sommes amenés à faire des groupements successifs par 10 (aspect décimal) avant de pouvoir dénombrer (aspect position). Si la collection est totalement groupée (par exemple 3 milliers + 2 centaines + 7 dizaines + 3 unités), il ne reste plus qu'à associer chaque unité à sa position dans l'écriture chiffrée (aspect position). Si la collection est partiellement groupée (par exemple 2 milliers + 15 centaines + 1 dizaine + 5 unités) il faut finir les groupements avant de pouvoir dénombrer.

[2] Chambris a étudié l'évolution de l'enseignement de la numération au cours du XXème siècle en France.

Deux autres variables didactiques entrent en relation avec les types de groupements :

- L'absence de groupement à un ordre (par exemple 3 milliers + 7 dizaines + 2 unités). Cela permet de mettre en jeu le rôle du zéro.
- L'ordre de présentation des unités (par exemple 7 dizaines + 3 milliers + 2 unités). Cela permet de mettre en évidence, pour l'aspect position, qu'il ne s'agit pas d'une simple juxtaposition des chiffres (ce qui est une erreur courante chez les élèves) mais bien une association des milliers au quatrième rang, etc.

Une variante de la situation de dénombrement est la situation inverse : réaliser une collection de cardinal donné, que nous traitons dans des problèmes dits de « commandes ». Une variable didactique essentielle ici est le stock du marchand. Par exemple s'il faut commander 4237 objets et que le vendeur n'a que des objets à l'unité ou groupés par dizaines et centaines, nous sommes amenés à utiliser l'équivalence entre 10 centaines et 1 millier (aspect décimal).

2. Nos choix d'ingénierie de deuxième niveau

Pour permettre aux enseignants de s'approprier ces choix « fondamentaux » et pour atteindre nos objectifs de départ nous avons fait des choix pour la conception de la ressource.

La ressource propose cinq situations « principales » aux enseignants (trois situations de dénombrement et deux situations de commandes). Ces situations utilisent un matériel spécifique (sauf la dernière) : des « bûchettes » (allumettes sans tête qui présentent l'intérêt de travailler avec des grandes collections). Nous proposons également des situations « complémentaires » permettant de travailler d'autres tâches mettant en jeu la numération décimale ou de travailler les techniques apprises dans d'autres contextes (par exemple la monnaie, les timbres …). En particulier les tâches liées à l'ordre des nombres (comparaison, rangement ou placement sur des droites graduées) n'apparaissent pas dans les situations principales car nous nous centrons sur les tâches permettant de travailler plus spécifiquement l'aspect décimal de la numération.

Un choix important à ce niveau concerne les marges de manœuvre données aux enseignants pour :

- La construction des séances et pour leur mise en œuvre dans la classe : dans la description des situations, nous ne donnons que ce qui nous semble essentiel à une mise en œuvre adaptée des situations. Il s'agit de l'enjeu pour l'enseignant, le problème pour les élèves, le matériel nécessaire et des indications de déroulement (cf annexe 1). Nous ne donnons pas de prescription concernant le temps ou l'organisation de la classe (travail individuel, de groupe …).
- La construction de la séquence : l'enseignant a la seule contrainte de mettre en œuvre les cinq situations principales, mais il reste à sa charge de construire sa séquence par la conception des exercices d'entraînement, de situations complémentaires, de traces écrites, d'évaluations.

Nous ne nous sommes pas imposés *a priori* de support particulier pour cette ressource. Elle prend pour le moment, la forme d'un site web en trois parties[3] : des éléments pour comprendre les enjeux de l'enseignement de la numération, des situations à mettre en œuvre dans la classe et des éléments pour aider l'enseignant à construire une séquence. Lors de la première année nous avions utilisé un support papier. Le choix d'un support numérique est lié aux facilités de diffusion que ce support propose (un objectif à moyen terme étant une

[3] Ce site est consultable à l'adresse suivante : http://numerationdecimale.free.fr

diffusion plus large) ainsi qu'aux possibilités de proposer une quantité importante d'informations, liberté étant laissée aux enseignants d'y accéder ou pas, par une organisation en menus et lien hypertextes. En voici la page d'accueil (figure 1) avec les menus sur la gauche de l'écran :

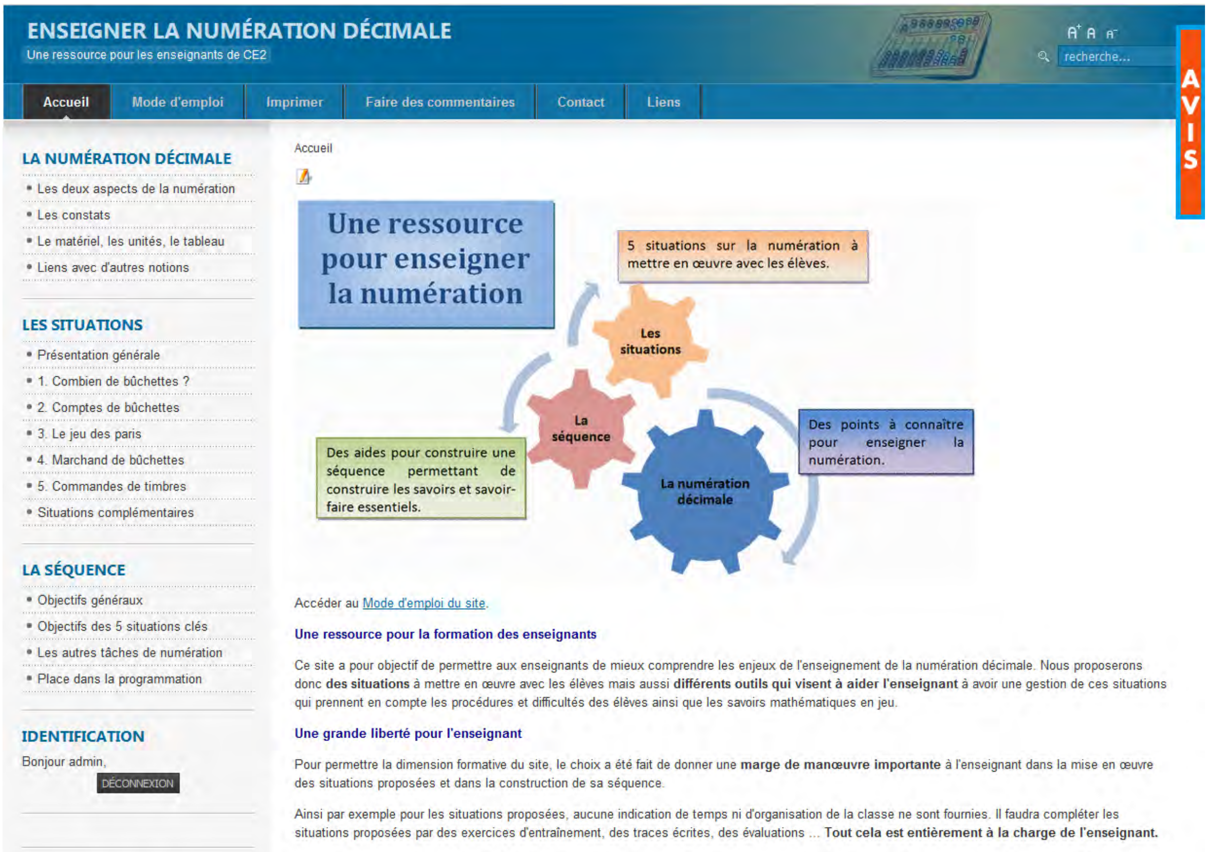


***Figure 2** – Page d'accueil du site*

La première partie (« la numération décimale ») consiste en des apports mathématiques, épistémologiques et didactiques pour l'enseignant. Les deux aspects de la numération sont présentés. Cela permet de pointer tout de suite l'aspect décimal comme enjeu essentiel. Pour appuyer cela, nous indiquons certaines difficultés dans l'apprentissage de la numération qui mettent en jeu principalement ce savoir. Ensuite, nous faisons le constat que l'aspect décimal n'est pas un enjeu dans les activités courantes des manuels et nous présentons quelques considérations didactiques relatives à l'utilisation du matériel de numération, des unités de numération et du tableau de numération. Enfin nous montrons comment l'aspect décimal intervient dans le calcul posé (en revenant sur les quatre opérations) et le lien avec les conversions de mesures de grandeurs (longueurs en particulier).

La deuxième partie (« les situations ») contient les situations principales qui constituent un passage obligé. La description des cinq situations est faite selon le même modèle (on trouvera en annexe 1 un exemple de description d'une situation) :

- Une description rapide du problème posé aux élèves.
- Une description des savoirs en jeu pour l'enseignant : identifier le type de tâche, les techniques et les technologies en jeu.
- Une description de la situation : l'enjeu pour l'enseignant, le problème pour les élèves, le matériel nécessaire, une description rapide de la mise en œuvre : description du problème avec un ou plusieurs exemples de valeurs numériques associées, les variables,

des éléments pour la gestion de la phase collective de validation et indication de conclusion de la situation par une synthèse.

- Des éléments de synthèse pour permettre à l'enseignant de pointer les savoirs en jeu dans la situation (ici dans le contexte de la situation).
- Des compléments qui portent sur des précisions pour la mise en œuvre de la situation dans la classe, sur d'autres situations possibles en prolongement.

On pourra donc remarquer qu'une place très importante est accordée à la description des savoirs en jeu (plutôt qu'aux détails de déroulement). En effet nous suivons Margolinas, Mercier et René de Cotret (2007) dans leur hypothèse : « les professeurs ont plus de liberté de décision d'organisation du travail de leur classe, sont plus disponibles à l'observation de leurs élèves, sont plus ouverts à leurs idées, s'ils sont assurés des savoirs qu'ils cherchent à transmettre ».

Même si la ressource est proposée sur un site web, les situations proposées n'utilisent pas les TICE en classe car nous souhaitons que les enseignants puissent intégrer facilement ces situations à leur pratique de classe habituelle et il nous semble que les enseignants du primaire en France utilisent assez peu les TICE (ce qui est en partie lié à un manque de matériel informatique).

La troisième partie (« la séquence ») expose les contenus des programmes officiels sur la numération en lien avec les tâches travaillées dans les situations. Elle recense également les autres tâches qu'il est nécessaire de travailler dans le cadre d'une séquence sur la numération (avec des exemples mais pas sous forme de situation pour la classe). Enfin les liens avec le calcul posé et les conversions de mesure sont rappelés.

Nous allons maintenant présenter l'utilisation faite par les enseignants au cours de cette deuxième année d'expérimentation.

IV. UTILISATION DE LA RESSOURCE PAR LES ENSEIGNANTS : RETOUR SUR LES CHOIX EFFECTUES.

Dans le cadre de cet article nous allons présenter quelques résultats concernant l'utilisation que font les enseignants de la ressource. Nous avons choisi de nous appuyer uniquement sur les entretiens individuels que nous avons réalisés après la séquence. Nous ne parlerons donc pas des observations de classe.

Lors de ces entretiens nous avons demandé aux enseignants de faire un bilan de leur séquence et d'indiquer des modifications de la ressource qui seraient nécessaires pour une utilisation par des collègues l'an prochain. En associant ainsi les enseignants au travail de conception de la ressource nous obtenons des renseignements essentiels pour une meilleure adaptabilité et acceptabilité de la ressource et nous plaçons l'enseignant dans une posture dans laquelle il est plus apte à se livrer sur le travail qu'il a effectué (ce qui nous permet d'avoir des informations concernant l'utilité du site par rapport à nos objectifs de départ).

Pour les enseignants qui ne travaillaient pas déjà l'aspect décimal de la numération, l'utilisation du site a permis de changer leur façon de voir et de travailler la numération : ils ont pris conscience qu'ils ne travaillaient qu'un seul aspect de la numération. C'est donc l'argument épistémologique que nous avons mis principalement en avant qui est repris par les enseignants. Il reste bien sûr à confirmer cela par des observations de classe pour voir si l'aspect décimal est bien un enjeu dans les situations proposées et comment il intervient dans leur mise en œuvre). Mais certains travaillaient déjà cet aspect décimal. Pour ceux-là l'intérêt semble beaucoup plus limité (apport de situations nouvelles principalement).

L'autre intérêt qui ressort de ces entretiens concerne l'utilisation d'un matériel qui n'était pas habituellement utilisé pour des nombres si grands. Certains évoquent cela comme une aide pour les élèves en difficulté. Mais ce qui est plus surprenant est le fait que l'intérêt pour l'apprentissage des élèves n'est pas toujours mis en avant. Cela nous semble lié au fait que certaines difficultés persistent après la séquence (ce que les enseignants ont pu voir dans l'évaluation proposée en particulier).

Enfin dans tout le site, les mathématiques sont décrites avec la notion d'organisation mathématique (type de tâches, techniques et savoirs). Même si les enseignants ne s'approprient pas cette façon de parler des contenus lors des entretiens, cela leur a été utile et leur a permis de bien identifier les mathématiques en jeu, comme l'explique Sophie : « Ce qui est détaillé c'est au niveau des objectifs c'est précis on sait où on va ».

Tous les enseignants ont mis en œuvre les cinq situations (qui étaient présentées comme des passages obligés) mais pour la construction de leur séquence nous avons pu observer des différences entre les enseignants. La plupart des enseignants ont proposé des situations complémentaires après ces cinq situations, mais peu ont proposé des exercices d'entraînement entre les situations pour permettre une automatisation des techniques construites ou un réinvestissement dans un contexte différent de celui des bûchettes. Pour ceux qui en ont fait, les seuls exercices proposés étaient des exercices d'application directe dans le contexte des bûchettes. Le manque de temps de préparation est évoqué par certains enseignants comme une des raisons. Les enseignants (en particulier ceux qui ne travaillaient déjà pas l'aspect décimal pour les nombres à trois chiffres) nous font également part du fait que pour cette première année d'utilisation de la ressource ils ont plutôt cherché à faire ce qui était proposé en essayant de se laisser guider. Ainsi maintenant qu'ils ont essayé et vu comment cela se passait, ils se sentiront plus à même de proposer des adaptations pour l'année prochaine, comme l'explique Fabrice : « La première fois tu découvres. […] Cette année j'ai suivi alors que maintenant je vais plus m'en détacher ». D'un point de vue méthodologique cela nous montre l'intérêt d'un suivi des enseignants sur plusieurs années, dans ce type de recherche, pour voir comment évolue l'utilisation de la ressource.

Du côté des élèves, dans l'évaluation finale, nous avons pu relever des difficultés liées à ce constat : ils ont eu du mal à utiliser leurs connaissances dans un problème de monnaie (contexte qui n'apparait pas dans les situations principales).

Tout cela nous amène à nous questionner sur des modifications à apporter à notre ressource pour amener tous les enseignants à proposer des exercices d'entraînement et de réinvestissement dans différents contextes. Il semble nécessaire, pour des raisons d'acceptabilité, de proposer des exercices tout faits. Cependant pour permettre aux enseignants d'exercer une certaine responsabilité il est possible :

- De proposer un nombre assez important d'exercices afin qu'ils choisissent ceux qui leur semblent les plus appropriés.
- De les aider par des apports didactiques concernant la question de la décontextualisation.
- D'utiliser un support qui permette une utilisation souple par les enseignants (modifications faciles, copier/coller …).

Enfin il est aussi possible que le fait de proposer un nombre important de situations principales ait pu faire penser aux enseignants que cela constituait une séquence complète. Surtout pour les enseignants qui ne travaillent pas habituellement cet aspect de la numération. De plus comme les cinq situations principales font référence à seulement deux types de problèmes (dénombrer une collection, passer une commande), il serait facile de recentrer sur seulement deux situations tout en faisant apparaître différentes étapes à l'intérieur de ces situations. Cela aurait également l'avantage de donner plus de visibilité pour l'enseignant sur ces deux types problèmes et le jeu sur les variables associés pour faire avancer le savoir au fur et à mesure de la séquence. Nous avons en effet pu constater que les enseignants avaient du mal à se souvenir des situations proposées. Ce nouveau découpage en deux situations devrait aussi permettre d'identifier plus clairement ces deux problèmes fondamentaux.

Les entretiens ont également permis de mettre en évidence leur utilisation de la ressource lors de leur travail de préparation.

Pour la première partie de la ressource, les enseignants expliquent ne l'avoir regardée que très rapidement lors de leur première consultation du site car ils cherchaient plutôt tout de suite des informations relatives à la séquence à mettre en place dans la classe. C'est pourquoi ils sont allés rapidement vers la deuxième partie (« les situations »). Ils ont toutefois regardé la première page sur les deux aspects de la numération et ont souligné son intérêt. La partie sur les constats dans les manuels et les difficultés des élèves les divise davantage : c'est important pour certains mais pas nécessaire pour d'autres, en particulier ceux qui travaillaient déjà l'aspect décimal pour les nombres à trois chiffres. Enfin les parties sur « le matériel, les unités, le tableau » et les « liens avec d'autres notions » ne sont pas regardées. Cette première partie contient beaucoup d'informations et même s'ils font preuve de bonne volonté dans le cadre de cette expérimentation, les enseignants ne se penchent que sur les deux ou trois premières pages. Comme le résume une enseignante : « quand on a commencé tous on a lu les deux aspects de la numération puis le reste pas trop. Après on se jette tout de suite dans nos situations » (Fabrice). De manière générale, pour une meilleure utilisabilité de la ressource par les enseignants, il sera nécessaire de réduire la quantité d'informations. Cela va nous amener à nous interroger sur ce qui est essentiel dans l'ingénierie de premier niveau et qui doit être transmis aux enseignants.

La deuxième partie (« les situations ») est la seule qui est utilisée par la suite (ils ne reviennent plus sur la première partie) avec une centration sur la description de la situation (« la situation ») qui permet à l'enseignant de construire sa séance et sur les « éléments de synthèse » qui permettent à la fois d'identifier les savoirs en jeu (« C'est ce que je ne dois pas perdre de vue … ça me permet de ne pas perdre le fil, ne pas perdre mon objectif de vue », Corinne) et de construire une trace écrite pour la classe (« La synthèse est très intéressante. Celle-ci m'a servie parce que ça m'a permis de faire mon affichage en classe », Fabrice). La description des « savoirs en jeu » avec un autre matériel de numération leur apparait alors pour la plupart comme inutile puisqu'il y a certaines répétitions avec les éléments de synthèse. Un enseignant qui ne travaillait pas l'aspect décimal s'en est toutefois servi : « et même quand t'as enseigné un paquet d'années, que tu t'es plus replongé dans les bouquins pédagogiques, c'est intéressant ».

Enfin la troisième partie sur « la séquence » qui devait permettre à l'enseignant de construire une séquence plus complète sur la numération par la description des instructions officielles et de tâches à travailler, n'a pas été utilisée par les enseignants. Nous interprétons cela principalement par le fait que ces tâches ne sont pas associées à des situations à mettre en place dans la classe, ce qui limite fortement leur intérêt pour les enseignants. Le fait que cette partie soit séparée des situations a sans doute accentué ce phénomène. Les enseignants ont davantage utilisé les situations complémentaires (dans la partie « les situations ») car il s'agissait de situations utilisables directement avec les élèves.

V. CONCLUSION ET POURSUITE DU TRAVAIL

Cette ingénierie didactique de développement nous a amené à faire certains choix pour l'enseignement de la numération (1er niveau d'ingénierie) et à concevoir une ressource pour les enseignants dans laquelle nous proposons des situations à mettre en œuvre dans les classes ainsi que des apports mathématiques, épistémologiques et didactiques (2ème niveau). Nous avons montré ici quelques résultats concernant l'utilisation de la ressource par les enseignants : l'intérêt de son utilisation du point de vue des enseignants, les difficultés liées à la construction d'une séquence (pour la construction d'exercices à proposer entre les situations principales et pour la décontextualisation progressive des connaissances) et l'utilisation générale du site centrée sur les éléments qui permettent à l'enseignant de construire ses séances. Ce dernier constat montre qu'une réflexion sera également nécessaire pour mieux prendre en compte les usages des enseignants, condition *sin equa non* pour une meilleure appropriation de ces apports.

Lors de la conception *pour l'usage* nous avons été amenés à faire des choix d'organisation ou de contenu pour la ressource qui n'entrent pas toujours en accord avec les usages qu'en font les enseignants. Notre objectif était bien de produire un prototype et l'expérimentation de cette année permettra de le faire évoluer en tenant compte des instrumentalisations réalisées par les enseignants dans le cadre de genèses documentaires (Gueudet et Trouche 2010). Ainsi, comme le suggère Folcher (2005), dans une perspective de rencontre de la conception *pour l'usage* et *dans l'usage*,

> la conception, au plan de son résultat, apparaît comme le produit des activités d'une communauté d'acteurs hétérogènes dans leurs compétences, leurs origines, leurs préoccupations mais aussi du fait des situations dans lesquelles ils agissent et mettent à l'épreuve l'artefact conçu. (Op. cité, pp. 208-209).

La division de la ressource en une partie concernant des apports pour l'enseignant et une partie pour la mise en œuvre de séances dans la classe a montré certaines limites liées aux usages des enseignants. Un autre choix possible pour cette ressource aurait été de supprimer la partie sur les situations et de proposer uniquement des éléments pour permettre à l'enseignant de s'approprier les enjeux de la numération à travers un document s'apparentant à un « traité » comme le font actuellement l'équipe Démathé (Margolinas et Wozniak 2010). Les enseignants n'utiliseraient alors pas cette ressource comme un guide pour l'enseignant, ce qui permettrait de centrer sur les apports mathématiques, didactiques et épistémologiques. Même si ce type de ressource présente un intérêt incontestable dans une perspective de formation des enseignants, nous pensons qu'il y a un risque important de non acceptabilité par les enseignants, justement du fait qu'il n'y a pas de situations de classe. De plus, cela pose des problèmes par rapport à notre question de départ puisque l'on trouve peu de situations sur les nombres à quatre chiffres, dans les ressources usuelles, qui permettent de mettre en jeu l'aspect décimal. C'est pourquoi dans notre travail nous devons continuer d'interroger les liens qu'il est possible de faire entre l'activité des enseignants orientée vers la préparation de séances et leur appropriation des enjeux de l'enseignement de la numération. En effet un risque important pour les enseignants dans l'utilisation de ressources de type manuel ou « guide pour l'enseignant » traditionnels est de se centrer uniquement sur la mise en œuvre de situations dans la classe et non sur les enjeux de savoirs.

REFERENCES

Ball D., Cohen D. (1996) Reform by the Book: What Is - Or Might Be - The Role of Curriculum Materials in Teacher Learning and Instructional Reform? *Educational Researcher* 25(9), 6-14.

Brousseau G. (1998) *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : Éditions La Pensée Sauvage.

Chambris C. (2008) *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20e siècle. Connaissances des élèves actuels.* Thèse de doctorat. Université de Paris 7.

Charles-Pezard M. (2010) Installer la paix scolaire, exercer une vigilance didactique *Recherches en didactique des mathématiques* 30/2, 197-261.

Chevallard Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques* 19/2, 221-266.

Davis E. A., Krajcik J. S. (2005) Designing educative curriculum materials to promote teacher learning. *Educational Researcher* 24(3), 3-14.

Folcher V. (2005). De la conception pour l'usage au développement de ressources pour l'activité. In Rabardel P., Pastré P. (Eds.) (pp. 189-210) *Modèles du sujet pour la conception, dialectiques activités développement.* Paris : Octarès.

Georget J.-P. (2010) Apport de l'ergonomie des EIAH pour l'analyse et la conception de ressources. In Kuzniak A., Sokhna M (Eds) *Enseignement des mathématiques et développement : enjeux de société et de formation. Actes du colloque international de l'Espace Mathématiques Francophone.* Dakar, Sénégal.

Gueudet G., Trouche L. (2010). Des ressources aux genèses documentaires. In Gueudet G., Trouche L. (Eds.) (pp. 57-74) *Ressources vives, le travail documentaire des professeurs, le cas des mathématiques.* Rennes : Presses Universitaires de Rennes et INRP.

Margolinas C., Mercier A., René de Cotret S. (2007) Les développements curriculaires dans l'enseignement obligatoire. In Trouche L., Durand-Guerrier V., Margolinas C., Mercier A. (Eds.) (pp. 25–36) *Quelles ressources pour l'enseignement des mathématiques ? Actes des journées mathématiques INRP 2006*. Lyon : INRP.

Margolinas C., Wozniak F. (2010) Rôle de la documentation scolaire dans la situation du professeur : le cas de l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire. In Gueudet G., Trouche L. (Eds.) (pp. 233-249) *Ressources vives, le travail documentaire des professeurs, le cas des mathématiques*. Rennes : Presses Universitaires de Rennes et INRP.

Perrin-Glorian M.-J. (2011) L'ingénierie didactique à l'interface de la recherche avec l'enseignement. Développement de ressources et formation des enseignants. In Margolinas C.et al. (Eds.) *En amont et en aval des ingénieries didactiques.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Ruthven K., Leach J., Laborde C., Tiberghien A. (2009) Design Tools in Didactical Research: Instrumenting the Epistemological and Cognitive Aspects of the Design of Teaching Sequences. *Educational Researcher 38*(5), 329-342.

Tempier F. (2009) L'enseignement de la numération décimale de position au CE2 : étude des relations entre contraintes et libertés institutionnelles et pratiques des enseignants. *Cahier Didirem* 60. IREM Paris 7.

Tempier F. (2010). Une étude des programmes et manuels sur la numération décimale au CE2. *Grand N* 86, 59-90.

Tricot A., Plégat-Soutjis F., Camps J.-F., Amiel A., Lutz G., Morcillo A. (2003) Utilité, utilisabilité, acceptabilité : interpréter les relations entre trois dimensions de l'évaluation des EIAH. *Environnements informatiques pour l'apprentissage humain,* 391-402. ATIEF INRP.

Site Web « Enseigner la numération décimale » : http://numerationdecimale.free.fr

ANNEXE : EXEMPLE DE DESCRIPTION DE LA SITUATION « MARCHAND DE BÛCHETTES »

Marchand de bûchettes

Il s'agit ici de proposer la tâche inverse des situations précédentes : **on part de l'écriture du nombre en chiffres** et on doit passer une commande pour obtenir ce nombre de bûchettes. En amenant certaines contraintes (par exemple : pas de millier disponible), on amène ainsi les élèves à échanger 1 unité contre 10 unités de l'ordre inférieur.

Le problème :

Le marchand possède des bûchettes par :

centaines

dizaines

unités

Nous souhaitons avoir 2615 bûchettes en tout. **Que peut-on commander ?**

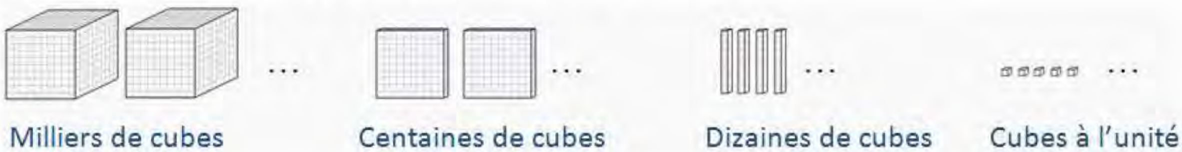
Passer une commande (décomposer un nombre)

Nous avons choisi de traiter la décomposition de nombres à travers des **problèmes de commande.**

1er problème : décomposition canonique

Collection de cubes du marchand

Un marchand possède des cubes groupés par milliers, centaines, dizaines et unités :



Question

Nous souhaitons avoir **3245 cubes**. Que faut-il commander ?

Procédure

Il faut utiliser la valeur des chiffres en fonction de leur position : 3245 c'est 3 milliers de cubes, 2 centaines de cubes, 4 dizianes de cubes et 5 cubes isolés.

Le savoir en jeu

Dans ce problème il suffit de connaître la valeur des chiffres en fonction de leur position : c'est l'aspect position.

2ème problème : décomposition avec contrainte

Collection de cubes du marchand

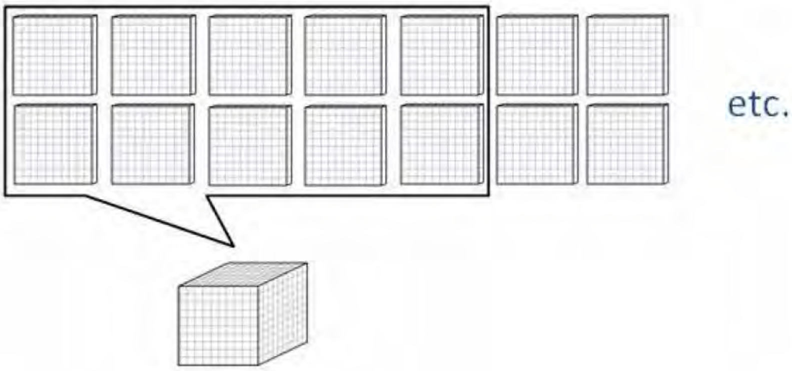
Le marchand possède des cubes groupés par centaines, dizaines et unités. Il n'a **pas de cubes groupés par milliers**.

Question

Nous souhaitons avoir **3245 cubes**. Que faut-il commander ?

Procédure

Comme dans le problème précédent, les élèves doivent utiliser la valeur des chiffres en fonction de leur position : 3245 c'est 3 milliers de cubes, 2 centaines de cubes, 4 dizaines de cubes et 5 cubes isolés. Mais cette fois les élèves sont amenés à **commander des centaines pour faire les milliers** (il faut 32 centaines pour faire 3 milliers et 2 centaines).



Le savoir en jeu

Comme pour le cas précédent l'**aspect position** est en jeu, mais cette fois les élèves sont aussi amenés à utiliser l'**aspect décimal** pour obtenir des milliers avec des centaines.

Aspect décimal de la numération
10 unités d'un certain rang équivalent à une unité du rang supérieur.
1 dizaine = 10 unités,
1 centaine = 10 dizaines,
donc 1 centaine = 100 unités
1 millier = 10 centaines,
donc 1 millier = 100 dizaines
et 1 millier = 1000 unités

Remarque : Il faut donc s'appuyer sur le fait que dans 1 millier il y a 10 centaines. Dans les problèmes de dénombrement **cette relation était utilisée dans l'autre sens** : 10 centaines se groupent en 1 millier.

Marchand de bûchettes : la situation

Enjeux pour l'enseignant

Savoir-faire : décomposer un nombre (de différentes façons), convertir entre unités de numération.

Savoirs : les deux aspects de la numération (position et décimal) mais les relations entre unités se font ici dans le sens des échanges : dans 1 millier il y a 10 centaines, etc.

Problème pour les élèves

Passer une commande pour obtenir le nombre de bûchettes demandées.

Matériel

Le matériel de la situation "combien de bûchettes ?" : les bûchettes, paquets, sachets, boites.

Les bons de commandes.

Description de la situation

Le maître est un marchand de bûchettes : il a devant lui des bûchettes à l'unité, par dizaine, par centaine et par millier. Les élèves vont devoir passer une commande pour obtenir un nombre de bûchettes donné.

Appropriation : commandes sans contrainte

Pour que les élèves s'approprient la situation on commencera par des commandes sans contrainte.

Exemple :

Il nous faut 2615 bûchettes. Combien faut-il commander de milliers de bûchettes, de centaines de bûchettes, de dizaines de bûchettes et de bûchettes seules ?

… milliers de bûchettes
… centaines de bûchettes
… dizaines de bûchettes
… bûchettes

Le problème : commandes avec contraintes

Ensuite on proposera des commandes avec contraintes (sur le nombre de milliers ou centaines, etc.).

Exemples :

a. Il nous faut encore 2615 bûchettes mais l'enseignant n'a plus de milliers de bûchettes. Que faut-il commander ?

.0. millier de bûchettes
… centaines de bûchettes
… dizaines de bûchettes
… bûchettes

b. Maintenant, il n'y a plus qu'un seul millier de bûchettes. Les élèves doivent commander 3167 bûchettes. Que faut-il commander ?

.1. millier de bûchettes
… centaines de bûchettes
… dizaines de bûchettes
… bûchettes

Etc.

Variables

Sans contrainte : présence ou non de **zéro** dans le nombre de bûchettes à commander (par exemple 4020 bûchettes).

Avec contraintes : Nombre d'objets **disponibles** pour chaque unité (nombre de milliers de bûchettes, de centaines de bûchettes, etc.). Par exemple absence de millier de bûchettes, etc. Cela amène les élèves à utiliser les unités du rang inférieur (s'il n'y a pas de millier de disponible, il faut échanger les milliers contre des centaines). On peut aussi **limiter le nombre d'objets disponibles** pour chaque unité pour que les élèves ne commandent pas systématiquement que des bûchettes à l'unité ! (par exemple pour 2615 bûchettes, il faut 2615 bûchettes à l'unité : si on limite à 50 le nombre de bûchettes à l'unité, à la dizaine, ... cela devient impossible).

Mise en commun et validation

L'enseignant recueille les différentes commandes proposées par les élèves. Les élèves comparent leurs solutions et échangent sur leur validité.

Validation collective avec les unités de numération

Comme dans la situation précédente, avant de proposer une validation avec le matériel, il est important **d'amener les élèves à essayer de valider en s'appuyant sur les écritures utilisant les unités de la numération**.

Exemple : 26 centaines + 1 dizaine + 5 unités = 20 centaines + 6 centaines + 1 dizaine + 5 unités = 2 milliers + 6 centaines + 1 dizaine + 5 unités en s'appuyant sur la relation 10 centaines = 1 millier. Le matériel ne peut alors qu'être seulement **évoqué** : par exemple, "20 centaines c'est 2 milliers car si on a 20 sachets on peut les grouper dans 2 boites".

On peut aussi utiliser un **tableau de numération** pour écrire les commandes faites par les élèves et utiliser les relations entre unités quand il y a deux chiffres dans une même colonne.

Validation collective avec le matériel éventuellement

Pour se mettre d'accord, l'enseignant peut toutefois encore proposer d'utiliser **le matériel** (bûchettes, paquets, sachets, boites) **pour réaliser les commandes passées par les élèves** (on peut alors compter oralement ou effectuer les groupements pour voir si on retrouve le nombre de départ).

Synthèse

"Qu'avez-vous appris aujourd'hui ?"

L'enseignant recueille les différentes commandes proposées par les élèves. Les élèves comparent leurs solutions et échangent sur leur validité.

Validation collective avec les unités de numération

Comme dans la situation précédente, avant de proposer une validation avec le matériel, il est important **d'amener les élèves à essayer de valider en s'appuyant sur les écritures utilisant les unités de la numération**.

Exemple : 26 centaines + 1 dizaine + 5 unités = 20 centaines + 6 centaines + 1 dizaine + 5 unités = 2 milliers + 6 centaines + 1 dizaine + 5 unités en s'appuyant sur la relation 10 centaines = 1 millier. Le matériel ne peut alors qu'être seulement **évoqué** : par exemple, "20 centaines c'est 2 milliers car si on a 20 sachets on peut les grouper dans 2 boites".

On peut aussi utiliser un **tableau de numération** pour écrire les commandes faites par les élèves et utiliser les relations entre unités quand il y a deux chiffres dans une même colonne.

Validation collective avec le matériel éventuellement

Pour se mettre d'accord, l'enseignant peut toutefois encore proposer d'utiliser **le matériel** (bûchettes, paquets, sachets, boites) **pour réaliser les commandes passées par les élèves** (on peut alors compter oralement ou effectuer les groupements pour voir si on retrouve le nombre de départ).

Synthèse

"Qu'avez-vous appris aujourd'hui ?"

Marchand de bûchettes : des éléments de synthèse

Rappel : *ces éléments de synthèse sont donnés à titre indicatif. L'objectif est d'aider l'enseignant à faire le lien entre la situation proposée en classe et les savoirs mathématiques en jeu. Cela ne constitue pas une "leçon clé en main". En effet, la synthèse peut se faire par écrit mais aussi oralement, elle peut se faire à "chaud" (à la fin de la séance) ou être repoussée à un autre moment, l'enseignant peut faire participer les élèves et s'appuyer sur leurs formulations, etc. Tous ces choix sont de la responsabilité de l'enseignant.*

Pour commander des bûchettes ...

Pour faire une commande, il faut décomposer le nombre total de bûchettes en milliers, centaines, dizaines et unités.

Par exemple, pour commander 2621 bûchettes, on peut commander :

2 milliers + 6 centaines + 2 dizaines + 1 unité

Car :

Milliers	Centaines	Dizaines	Unité
2	6	2	1

Et si le marchand n'a plus de millier ou centaine ... ?

Voici différents exemples de **commandes avec contraintes**.

Contraintes	Procédures	Savoir en jeu
Il n'y a **plus de millier**	**Pour obtenir les 2 milliers de 2621 il faut commander 20 centaines :** 26 centaines + 1 dizaine + 5 unités	*Aspect décimal de la numération* *10 unités d'un certain rang équivalent à une unité du rang supérieur.* *1 dizaine = 10 unités,* *1 centaine = 10 dizaines,* *donc 1 centaine = 100 unités* *1 millier = 10 centaines,* *donc 1 millier = 100 dizaines* *et 1 millier = 1000 unités*
Il n'y a **plus de centaine**	**Pour obtenir les 6 centaines de 2621 il faut commander 60 dizaines :** 2 milliers + 61 dizaines + 5 unités	
Il n'y a **plus de millier ni de dizaine**	**Pour obtenir les 2 milliers de 2621 il faut commander 20 centaines et pour les 2 dizaines il faut 20 unités :** 26 centaines + 21 unités	

Marchand de bûchettes : compléments

Prolongement 1 : Conversions entre unités

Il est possible de s'appuyer sur la situation des commandes de bûchettes pour travailler les conversions entre unités de numération (par exemple 30 centaines = 3 milliers dans les deux exemples ci-dessous) :

a. Les élèves doivent commander 30 centaines de bûchettes. Il n'y a plus de bûchettes par centaines. Que faut-il commander ?

... milliers de bûchettes
.0. centaine de bûchettes
... dizaines de bûchettes
... bûchettes

b. Les élèves doivent commander 3 milliers de bûchettes. Il n'y a plus de bûchettes par millier. Que faut-il commander ?

.0. millier de bûchettes
... centaines de bûchettes
... dizaines de bûchettes
... bûchettes

Prolongement 2 : le jeu des décompositions

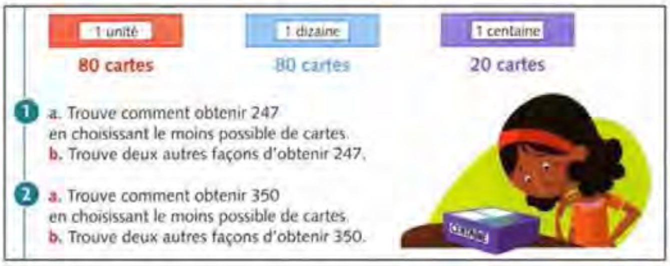
Il s'agit de demander aux élèves de trouver **le plus de façons différentes de décomposer un nombre**.

Pour les élèves, comme il y a plusieurs solutions, il s'agit réellement d'un **problème-défi**.

Exemple :

Chercher les décompositions différentes de 2647.

C'est ce qui est proposé dans cet exercice de manuel (Cap Maths CE2) :



Voir analyse de cet exercice dans l'étude des manuels.

Prolongement 3 : Combien de ... ?

Toujours dans le contexte des bûchettes, on peut montrer (ou simplement évoquer) une collection de bûchettes (non groupée) : le problème consiste à chercher **combien de sachets nous allons avoir besoin pour organiser la collection.**

Exemple :

Combien de sachets pour organiser une collection de 2647 bûchettes ?

ANALYSE DE RESSOURCES COMME MOYEN DE DEVELOPPEMENT PROFESSIONNEL DES ENSEIGNANTS

Jana TRGALOVÁ* – Philippe R. RICHARD**

Résumé – Notre contribution explore l'implication des enseignants dans l'analyse de ressources de géométrie dynamique (GD) à l'aide d'un questionnaire comme un moyen de leur développement professionnel visant l'intégration de la GD. Ce questionnaire, élaboré dans le cadre du projet européen Intergeo, a pour but de permettre l'évaluation de la qualité des ressources déposées sur la plateforme i2geo par ses utilisateurs. Dans cette contribution, nous présentons deux expérimentations d'utilisation du questionnaire par des enseignants et nous en tirons des conclusions sur le potentiel de cet outil dans le développement de compétences professionnelles nécessaires pour un usage efficace de la GD en classe.

Mots-clefs : géométrie dynamique, ressource, qualité, genèse instrumentale, travail documentaire

Abstract – Our contribution explores the involvement of teachers in the analysis of dynamic geometry (DG) resources using a questionnaire as a means of their professional development aiming at the DG integration. This questionnaire, developed in the framework of the European project Intergeo, aims at enabling an assessment of quality of resources deposited on the platform i2geo by its users. In this contribution, we present two experiments of the use of the questionnaire by teachers and draw conclusions on the potential of this tool in the development of professional skills necessary for an effective usage of DG in classrooms.

Keywords: dynamic geometry, resource, quality, instrumental genesis, documentational work

I. INTRODUCTION

Ce texte propose une contribution au thème 2 du groupe de travail « ressources et développement professionnel des enseignants » qui porte sur les « dispositifs de formation ». Nous nous intéressons plus particulièrement aux « formes d'accompagnement que l'on peut envisager pour soutenir les enseignants dans leurs efforts d'intégration des technologies dans les classes à plus ou moins long terme ». Il s'agit ici de l'intégration de la géométrie dynamique.

Selon Robert et Rogalski (2005), le choix et la conception de tâches pour la classe relèvent de l'activité professionnelle des enseignants. Si l'utilisation efficace d'un outil technologique demande à concevoir de nouvelles tâches qui donnent du sens aux concepts mathématiques (Laborde 2001, Monaghan 2004), la conception de tâches authentiquement nouvelles est plutôt rare (Laborde 2008). Les enseignants préfèrent modifier et adapter des tâches existantes, ce qui exige la capacité de résolution avec l'outil des tâches et de leur analyse. Cependant, analyser une tâche qui intègre un outil technologique n'a rien d'immédiat. Au contraire, l'exercice est d'autant plus complexe que l'introduction de la composante technologique projette la dimension d'analyse sur toutes les autres, soit les dimensions épistémologique, didactique et institutionnelle. Alors que les enseignants doivent être capables de résoudre la tâche avec l'outil, ils doivent également analyser son rôle dans le processus de résolution et dans la définition même de la tâche. Il en est de même pour l'analyse de la pertinence pour les apprentissages et de la nécessité, voire du coût, d'introduction de nouvelles techniques instrumentées (ibid.). Pour la mise en œuvre de ces tâches en classe, les enseignants doivent avoir la capacité d'anticiper les techniques de

* S2HEP, Université Claude Bernard – Lyon 1 et Ecole Normale Supérieure de Lyon – France – jana.trgalova@univ-lyon1.fr
** Université de Montréal – Québec, Canada et Universitat Autònoma de Barcelona – Espagne – philippe.r.richard@umontreal.ca

© Trgalová J., Richard P. (2012) Analyse de ressources comme moyen de développement professionnel des enseignants. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT6, pp. 908–918). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

résolution possibles, les apprentissages potentiels, ainsi que les orchestrations favorisant les apprentissages visés (Trouche et Drijvers 2010). Ils doivent encore être capables de gérer les relations entre les anciennes et les nouvelles connaissances (Assude et Gélis 2002), ainsi que les articulations entre les techniques instrumentées et les techniques traditionnelles en papier-crayon (Guin et Trouche 1999).

De nombreux dispositifs ont été mis en place pour soutenir les enseignants dans leurs efforts d'utilisation des technologies. Ces dispositifs varient en durée (de quelques jours en formation initiale ou continue, jusqu'à quelques années pour des dispositifs tels que SFODEM[1] en France ou ICTML[2] en Norvège), en modalités (en présence, à distance ou en mode mixte) et en contenu (de l'analyse de quelques ressources en formation continue par exemple, jusqu'à l'accompagnement du processus de conception collaborative de ressources, leur mise en œuvre et le retour réflexif sur les expériences dans SFODEM). Leur efficacité est tout aussi variable de par leur ponctualité et manque du suivi pour des formations courtes ou de par leur coût en temps et en ressources humaines pour des dispositifs tels que SFODEM où un groupe de chercheurs et de formateurs a travaillé avec un petit groupe d'enseignants pendant 6 ans.

Un autre moyen de soutenir l'intégration des technologies est de mettre à la disposition des enseignants des ressources qui proposent des activités faisant appel à des outils technologiques, notamment via l'Internet. C'est le cas de banques de ressources éducatives, appelées aussi banques d'objets d'apprentissage. Cependant, l'accessibilité des ressources n'est pas suffisante, comme le souligne Robertson :

> Dénicher des ressources utiles, crédibles, des contenus éducatifs de qualité mis à jour régulièrement relève bien souvent de l'utopie. En effet, l'utilisateur est souvent confronté à l'absence d'assistance à la recherche (métadonnées vs mots-clefs), au manque d'assurance en ce qui a trait à la qualité des informations. De plus, il n'existe pas, actuellement, de « masse critique de contenu » […], c'est-à-dire qu'il n'existe pas un nombre suffisant d'objets d'apprentissage correctement métaréférencés, aisément accessibles en ligne pour que les enseignants et les apprenants en viennent à consulter toujours plus souvent les référentiels. […], nous avancerions que l'appropriation par les enseignants de matériel pédagogique et didactique complémentaire en soutien aux apprentissages des élèves et en complément aux ressources imprimées (manuels scolaires notamment) semble toujours difficile, même si les technologies sont disponibles à l'école depuis quelques vingt ans. (Robertson 2006, p. 13)

Le manque de métadonnées décrivant précisément le contenu des ressources, l'absence d'indications sur la qualité et la difficulté d'appropriation de ces dernières sont soulevés comme des principaux obstacles à la réutilisation de ressources existantes et, par conséquent, à l'intégration des technologies dans les pratiques des enseignants. Dans ce qui suit, nous explorons l'idée d'impliquer les enseignants dans l'évaluation de la qualité de ressources de géométrie dynamique comme un moyen de pallier aux deux derniers obstacles cités. L'évaluation de la qualité des ressources est cadrée par un questionnaire qui a été élaboré pour les besoins du projet européen Intergeo[3] (Kortenkamp *et al*. 2009) et que nous présentons brièvement en section II. La section III est consacrée à la présentation du cadrage théorique des études empiriques décrites en section IV. Les conclusions tirées de ces études sont proposées en section V.

---

[1] Suivi de Formation à Distance pour les Enseignants de Mathématiques (Guin *et al*. 2008).

[2] ICT and Mathematics Learning (Fuglestad 2007).

[3] Interoperable Interactive Geometry for Europe, co-funded by the European Union within the eContentPlus programme, 2007-2010.

II. QUESTIONNAIRE D'EVALUATION DE RESSOURCES DE GEOMETRIE DYNAMIQUE

La plateforme i2geo, retombée du projet Intergeo, a pour but de mettre à disposition des enseignants des ressources autour de l'usage de la géométrie dynamique dans des classes de mathématiques. La plateforme est fondée sur le principe du développement communautaire : c'est un environnement ouvert où tout utilisateur peut déposer des ressources pour les mutualiser avec d'autres utilisateurs. Il peut réutiliser les ressources disponibles, les commenter, de même que partager ses expériences avec leur mise en application auprès de ses élèves. Afin de permettre l'amélioration de la qualité des ressources disponibles sur la plateforme, nous avons mis en place une démarche qualité (Trgalová et al. 2011) qui s'appuie sur un questionnaire (cf. annexe). Celui-ci est organisé autour de neuf dimensions de ressources de géométrie dynamique jugées pertinentes pour évaluer sa qualité mathématique, didactique, pédagogique, technique et ergonomique. Ces dimensions sont les suivantes : (1) métadonnées, (2) aspect technique, (3) dimension mathématique du contenu, (4) dimension instrumentale du contenu, (5) valeur ajoutée de la géométrie dynamique, (6) implémentation didactique, (7) implémentation pédagogique, (8) intégration dans une progression, et (9) aspect ergonomique.

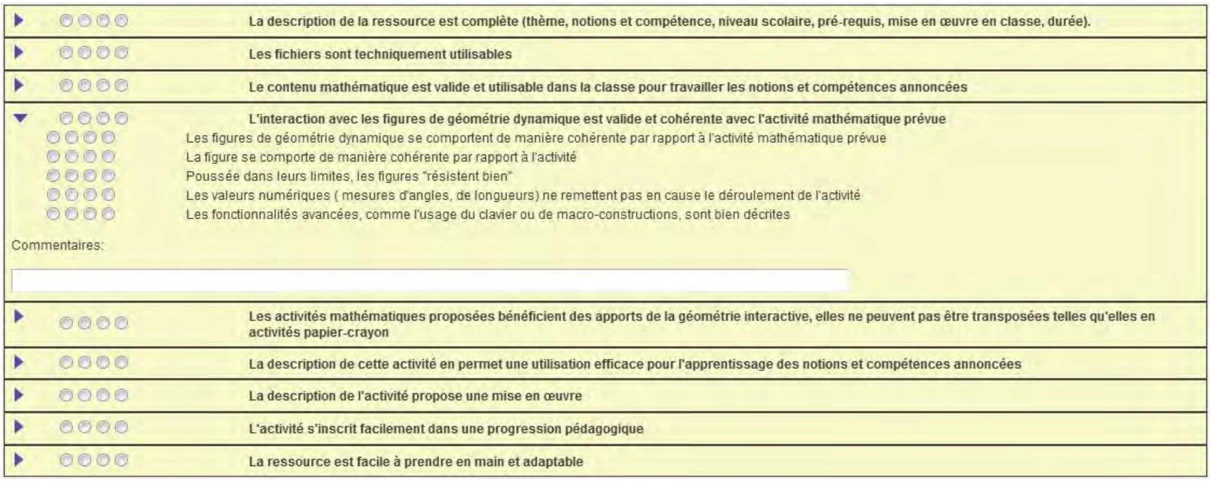


***Figure 1** – Questionnaire de qualité*

Un item général (en gras dans la Figure 1) et ensemble de critères plus détaillés sont associés à chaque dimension. Les items et les critères sont formulés comme des affirmations auxquelles les utilisateurs expriment leur degré de satisfaction sur une échelle quaternaire de « tout à fait d'accord » à « pas du tout d'accord ». Ces réponses peuvent être complétées par des commentaires qualitatifs rédigés librement dans des champs prévus à cet effet. Puisqu'ils doivent permettre d'identifier les faiblesses des ressources évaluées et d'y indiquer des pistes d'amélioration, les champs de commentaires sont déterminants pour l'évolution de la ressource évaluée, mais il n'y a pas de mécanisme particulier pour forcer les commentaires.

III. CADRAGE THEORIQUE : APPROCHES INSTRUMENTALE ET DOCUMENTAIRE

Dans notre dispositif de recherche, nous nous intéressons à la manière avec laquelle les enseignants s'approprient le questionnaire comme outil d'analyse de ressources de géométrie dynamique et dans quelle mesure une telle analyse peut contribuer au développement de leurs compétences professionnelles. Nous adoptons deux points de vue, les perspectives instrumentale et documentaire.

L'*approche instrumentale* (Rabardel 1995) se fonde sur la distinction entre un *artefact*, disponible pour un utilisateur, et un *instrument* que cet utilisateur construit à partir de cet artefact, ou d'une partie de celui-ci, au cours de l'action qui met en jeu son usage. Un artefact devient ainsi un instrument pour cet utilisateur dans un processus, appelé *genèse instrumentale*, qui articule deux processus complémentaires (ibid., p. 111) :

- Les **processus d'instrumentalisation** concernent l'émergence et l'évolution des composantes artefact de l'instrument : sélection, regroupement, production et institution de fonctions, détournements et catachrèses, attribution de propriétés, transformation de l'artefact (structure, fonctionnement etc.) qui prolongent les créations et réalisations d'artefacts dont les limites sont de ce fait difficiles à déterminer ;
- Les **processus d'instrumentation** sont relatifs à l'émergence et à l'évolution des schèmes d'utilisation et d'action instrumentée : leur constitution, leur fonctionnement, leur évolution par accommodation, coordination combinaison, inclusion et assimilation réciproque, l'assimilation d'artefacts nouveaux à des schèmes déjà constitués etc.

Les *schèmes d'utilisation* de l'artefact

> permettent la répétition de l'action en assurant son adaptation aux aspects variables des objets et des situations appartenant à une même classe. Ils ont des capacités accommodatrices pour s'appliquer à des objets, des classes de situations différentes. (Rabardel 1999, p. 209)

Le schème est une organisation invariante de l'activité et de la conduite pour une classe de situations donnée, composée de buts, de règles d'action, d'invariants opératoire ou théorèmes en acte et de possibilités d'inférence. Un instrument est donc une entité composée de l'artefact ou d'une partie de celui-ci, et d'un schème d'utilisation qui peut lui-même se composer de schèmes d'utilisation très élémentaires.

Nous nous appuyons sur cette approche pour étudier le processus par lequel un enseignant transforme le questionnaire, que nous considérons comme un artefact, en un instrument pour l'analyse de ressources.

Les principes fondateurs de l'approche instrumentale ont été repris et approfondis par Gueudet et Trouche (2008, 2009). L'*approche documentaire* ainsi développée permet d'étudier le travail documentaire des enseignants qui consiste à exploiter un ensemble de ressources données, les sélectionner, les adapter et les recombiner pour concevoir de nouvelles ressources. Cette approche propose la distinction entre *ressource*, disponible pour l'enseignant, et *document* construit par l'enseignant dans un objectif précis. Le document résulte donc d'un processus, appelé *genèse documentaire* (figure 2).

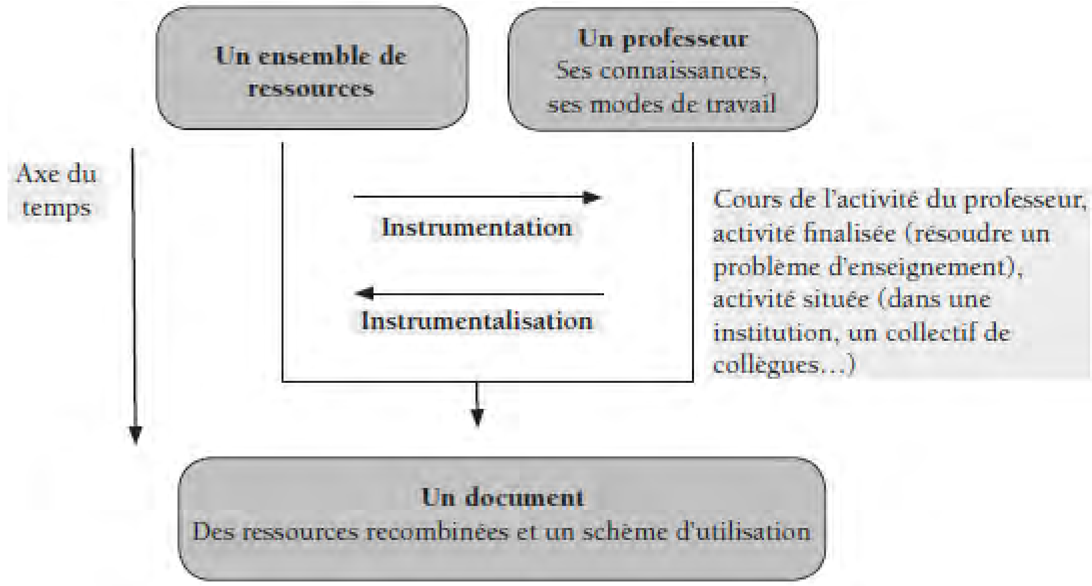


Figure 2 *– Genèse documentaire (Gueudet et Trouche 2008, p. 10)*

L'approche documentaire nous semble particulièrement pertinente pour étudier le travail documentaire des enseignants concerné par le choix, l'analyse et l'adaptation de ressources de géométrie dynamique.

IV. EXPERIMENTATIONS

Dans cette section, nous présentons deux expérimentations menées respectivement en France et au Québec dans le but d'étudier les usages du questionnaire d'analyse de ressources de géométrie dynamique présenté en section II.

Notre objectif de recherche est double. Il s'agit d'abord d'étudier le travail documentaire des enseignants, et plus particulièrement les processus de tri, de sélection et d'adaptation de ressources, et ensuite d'analyser les processus de genèse instrumentale relatifs au questionnaire comme outil d'analyse de ressources.

Les deux expérimentations présentées ci-dessous diffèrent en de nombreux points, qui sont autant de variables dans notre méthodologie :

- *Expérience des enseignants*. En France, des enseignants expérimentés ont participé à l'expérimentation, au Québec, celle-ci a été menée auprès de futurs enseignants. La comparaison des observations devrait nous permettre de comprendre un peu mieux dans quelle mesure l'expérience professionnelle facilite ou non les genèses instrumentales du questionnaire et influence le travail documentaire des enseignants.
- *Durée.* En France, l'expérimentation s'est déroulée sur une courte durée – un temps de prise de connaissance individuelle par les enseignants de ressources proposées et un temps d'analyse de ressources par binômes. Au Québec, l'expérimentation s'est déroulée pendant un cours d'une quarantaine d'heures. Ce choix est dû aux contraintes organisationnelles des contextes dans lesquels ces expérimentations ont eu lieu – mémoire de Master[4] dans le premier cas et formation initiale des futurs enseignants de mathématiques au secondaire dans le second cas.
- *Version du questionnaire utilisé.* L'expérimentation menée en France appartenait au cycle conception/test du questionnaire. Ainsi, une version intermédiaire du questionnaire a été utilisée. Au Québec, l'expérimentation a eu lieu lorsque le questionnaire avait déjà été implémenté sur la plateforme, c'est-à-dire que les étudiants ont utilisé la version actuellement disponible en ligne (cf. annexe).
- *Ressources proposées.* Dans l'expérimentation française, le choix des ressources proposées aux enseignants a été fait par le chercheur pour permettre l'émergence de critères utilisés spontanément par les enseignants lorsqu'ils trient et sélectionnent des ressources pour leurs activités d'enseignement. Au Québec, la plateforme i2geo a été utilisée avec l'ensemble de ressources disponibles, ce qui nous permet d'observer les processus de recherche de ressources par les étudiants, mais aussi l'adaptation de ressources existantes, la création de nouvelles ressources, l'évaluation de ressources par les pairs, la critique du processus d'évaluation et son à-propos relativement aux moyens d'évaluation souhaitables dans le contexte de l'expérimentation.

[4] Cette expérimentation a été menée dans le cadre du travail de mémoire de Master 2 de J- M. Baudoin (Baudoin, 2009).

1. Expérimentation courte avec des enseignants français

Avec cette expérimentation nous cherchions à analyser la pertinence et la clarté des critères de qualité dans le questionnaire pour les enseignants, étudier les premiers usages du questionnaire pour l'analyse des ressources et identifier les représentations que les enseignants ont de ressources de « bonne qualité », dont les aspects des ressources qui déterminent leur sélection et ceux qui facilitent leur appropriation pour un usage en classe. Les deux premiers objectifs concernent les genèses instrumentales relatives au questionnaire considéré comme un artefact, tandis que le troisième porte également sur les genèses documentaires relatives aux ressources.

Au moment de l'expérimentation, le questionnaire ne comportait que huit dimensions, la neuvième sur l'aspect ergonomique des ressources a été ajoutée plus tard. Trois ressources ont été proposées aux enseignants, toutes portant sur un même objet de savoir mathématique, les quadrilatères particuliers (niveau 5^{e} de collège français, élèves de 12-13 ans). Les trois ressources étaient composées d'un fichier texte s'adressant soit à l'enseignant, soit aux élèves, soit aux deux accompagné d'un fichier de géométrie dynamique. De plus, les modalités d'utilisation de la géométrie dynamique suggérées par les ressources ont été les mêmes, c'est-à-dire en salle informatique où les élèves manipuleraient eux-mêmes les figures.

Six enseignants français ont participé à cette expérimentation. Ils avaient tous une expérience professionnelle d'enseignement des mathématiques plus ou moins longue, entre 5 et 15 ans, et un niveau d'intégration de technologies très hétérogène. Le travail documentaire des enseignants a été cadré par le protocole suivant :

1) Dans un premier temps, chaque enseignent devait prendre connaissance, individuellement, des contenus des trois ressources.
2) Les enseignants analysaient ensuite les ressources en binômes en utilisant le questionnaire.
3) Enfin, chaque enseignant devait décider individuellement s'il choisirait chacune des ressources analysées pour l'utiliser dans sa classe, avec ou sans modifications, puis éventuellement suggérer des pistes d'amélioration des ressources.

Le choix de faire précéder l'analyse des ressources par une phase de prise de connaissance de leurs contenus avait pour but d'une part de permettre à ce que chaque enseignant puisse se faire sa propre opinion sur les ressources et d'autre part de gagner du temps pour leur analyse avec le questionnaire. Les enseignants ont ensuite été groupés par binômes afin de susciter des échanges et des confrontations de leurs points de vue sur les ressources. L'expérimentation, plus précisément les phases 2 et 3, a duré environ 3 heures. Un observateur a été présent lors du travail d'analyse des ressources pour aider les enseignants à lever d'éventuelles ambiguïtés dans les items du questionnaire ou pour demander davantage de précisions si cela s'avérait nécessaire.

L'analyse des données recueillies durant l'expérimentation a été basée sur la confrontation de l'analyse « experte » des ressources, réalisée par un chercheur en didactique des mathématiques, avec les analyses des ressources réalisées par les enseignants. Les résultats montrent que certains binômes d'enseignants éprouvaient des difficultés à se concentrer sur le strict contenu des ressources dans leur analyse. En effet, leurs réponses à certains items ne correspondaient pas aux informations fournies par la ressource, mais elles reflétaient plutôt des efforts d'interprétation de ces informations à la lumière de leurs propres expériences. Par exemple, à la question « *Les éléments permettant la prise en charge du problème par l'apprenant sont-ils explicites ?* », deux binômes ont répondu « *non pas du tout* » (réponse attendue), tandis que le troisième a répondu « *oui, tout à fait* ». Cette question interroge la phase de dévolution dans l'activité proposée. Voici l'échange entre les enseignants du binôme :

> E1 : « c'est trop directif ; il n'y a pas de prise en charge du problème par l'apprenant. »
>
> E2 : « oui mais en même temps du coup ils font le problème ; moi, je vois la question… imagine quelque chose de très, très ouvert où l'élève n'entre même pas dedans. Là, il n'y a pas de soucis, il sait ce qu'il a à faire. »

Cet échange laisse supposer que l'enseignant E2 interprète la question comme « *Les élèves peuvent-ils facilement comprendre ce qu'il faut faire et s'engager dans la résolution du problème ?* ». E2 anticipe donc la manière dont la dévolution pourrait se faire lors de la mise en place de l'activité en classe au lieu de chercher simplement la présence d'indications à ce sujet dans la ressource, ce qui est demandé dans la question. Selon l'approche instrumentale, il s'agit d'une *catachrèse*, un écart entre le prévu et le réel dans l'utilisation de l'artefact (Rabardel 1999, p. 99), ici de la question donnée du questionnaire. Cette catachrèse n'est cependant pas considérée comme un détournement de l'artefact par rapport aux fonctions prévues, mais plutôt comme un indice du processus d'attribution à l'artefact « *de fonctions non anticipées ou prévues par les concepteurs* » (ibid., p. 101). Il s'agit d'un processus d'instrumentalisation de la question. D'autre part, cette interprétation particulière se traduit par la mise en œuvre de schèmes d'exploration nouveaux amenant l'enseignant à interroger le contenu de la ressource d'une certaine manière portant davantage sur son usage potentiel en classe que sur les informations fournies, ce qui témoigne d'un processus d'instrumentation.

Le questionnaire lui-même a été utilisé différemment par les binômes. Un binôme l'a utilisé dès le départ pour éliminer les ressources les moins pertinentes. Leur analyse avait ainsi pour but d'identifier les dimensions rédhibitoires des ressources. Une fois de telles dimensions déterminées pour une ressource donnée, les enseignants en ont arrêté l'analyse, sans essayer de vérifier si les autres aspects constituent ou non sa force. Par exemple, une des ressources comprenait un fichier de géométrie dynamique défaillant. Les enseignants de ce binôme considéraient inutile de poursuivre l'analyse de la ressource après avoir identifié la faiblesse de la ressource résidant dans le fichier de géométrie dynamique erroné, puisque pour eux, « *la première des choses, c'est la figure* ». Les deux autres binômes ont, en revanche, réalisé une analyse détaillée des toutes les dimensions de la ressource. A la question s'ils auraient choisi cette ressource pour une éventuelle utilisation dans leurs classes, certains enseignants de ces binômes ont pu envisager son utilisation, à condition d'y apporter des modifications permettant d'améliorer les aspects considérés comme faibles. Ils ont été capables de faire abstraction de la défaillance du fichier de géométrie dynamique, comme en témoigne l'affirmation de certains : « *on fait comme si la figure était juste* ». Ainsi, même si tous les binômes ont trouvé cette faiblesse inacceptable, celle-ci n'a pas empêché certains de continuer l'analyse et identifier des points forts de la ressource.

Ces résultats permettent d'anticiper différents usages possibles du questionnaire qui correspondent aux différentes genèses instrumentales conduisant au développement de différents schèmes d'utilisation et, par conséquent, de différents instruments d'analyse de ressources, comme les suivants :

- ne considérer que quelques dimensions essentielles d'une ressource qui seront analysées à l'aide de critères détaillés et analyser les autres seulement à l'aide de l'item général ;
- analyser en détail une dimension importante : si celle-ci est satisfaisante, en analyser une autre, si non, arrêter l'analyse et conclure que la ressource est de « mauvaise » qualité ;
- n'utiliser que les items généraux pour analyser toutes les dimensions de la ressource ;
- utiliser les critères détaillés pour réaliser une analyse approfondie de la ressource.

La manière dont le questionnaire est utilisé, ou, en termes de l'approche instrumentale, la nature du questionnaire comme instrument d'analyse de ressources, est façonné par l'expérience de l'utilisateur. Cependant, la finalité de l'analyse de ressources joue également un rôle important dans la genèse instrumentale. Par exemple, si l'analyse doit permettre l'identification de points faibles de la ressource pour pouvoir l'améliorer, une analyse approfondie de la ressource à l'aide de critères détaillés du questionnaire serait pertinente. Si le but de l'analyse est de mieux comprendre le contenu de la ressource et les intentions didactiques de ses auteurs en vue de la mise en œuvre de la ressource ne classe, l'utilisateur pourra se concentrer sur les dimensions jugées importantes et laisser de côté les autres. Si le but de l'analyse est de faire le choix de la ressource la plus appropriée dans un ensemble de ressources, on pourra se concentrer sur les dimensions considérées comme importantes et rejeter les ressources pour lesquelles ces dimensions seraient jugées insatisfaisantes.

Concernant les critères déterminant les choix de ressources pour une éventuelle utilisation en classe, il apparaît que le contenu mathématique valide est une condition nécessaire. Les enseignants accordent aussi une grande importance à la valeur ajoutée de la géométrie dynamique dans les activités proposées dans la ressource. D'autres dimensions sont considérées comme plus ou moins importantes en fonction de l'expérience des enseignants. Par exemple, les enseignants peu familiers avec l'usage des technologies jugent la dimension relative à l'implémentation didactique de la ressource, c'est-à-dire présence d'indications sur la gestion par l'enseignant des apprentissages des élèves, comme l'une des plus importantes.

Cette étude a également permis de reformuler certains critères afin de lever des ambiguïtés qui étaient parfois à l'origine de réponses contradictoires de la part des binômes.

Les résultats de cette expérimentation montrent que les deux processus, genèse instrumentale portant sur le questionnaire et genèse documentaire portant sur les ressources, s'entremêlent comme, d'une part, le questionnaire est supposé orienter l'analyse des ressources en pointant les dimensions sur lesquelles elle doit porter et, d'autre part, l'analyse des ressources façonne la manière dont le questionnaire est utilisé.

2. Expérimentation longue avec des étudiants québécois

Cette expérimentation a eu lieu dans le cadre d'un cours semi-intensif d'environ 6 heures par semaine pendant 7 semaines consécutives, avec des étudiants d'un programme de formation initiale des enseignants de mathématiques au secondaire dans une université québécoise. L'objectif général visait à étudier la manière dont la plateforme i2geo, avec sa collection de ressources et ses outils, peut être mise à profit pour le développement de compétences professionnelles des enseignants, comme porter un regard critique sur les ressources existantes, adapter des ressources conçues pour un système d'enseignement étranger au contexte québécois, concevoir de nouvelles ressources ou encore améliorer des activités suite à des rétroactions des pairs.

Trente-cinq étudiants, groupés par équipes de deux, mais avec une équipe de trois, ont participé à cette expérimentation. Ils ont dû réaliser un dossier comportant la description des activités correspondant aux objectifs mentionnés, des copies d'écran montrant les analyses des ressources réalisées sur la plateforme i2geo à l'aide du questionnaire en ligne, ainsi que leur point de vue argumenté sur l'utilité du questionnaire pour l'analyse de ressources.

Les données recueillies, riches et volumineuses, sont en cours d'analyse. Nous présentons dans la suite seulement quelques éléments concernant le regard critique des étudiants sur le questionnaire.

Treize équipes sur dix-sept ont donné leur avis sur l'utilité du questionnaire, ses points forts et ses points à améliorer. Parmi ces binômes, 11 considèrent le questionnaire d'une grande utilité permettant de réaliser une analyse approfondie de ressources de géométrie dynamique, et 8 équipes soulignent que grâce au questionnaire, ils ont pu réfléchir sur les aspects des ressources auxquels ils n'auraient pas pensé sans le questionnaire. Parmi les points forts du questionnaire, les étudiants relèvent les questions bien élaborées, faciles à comprendre, bien structurées dans de grandes catégories permettant ainsi une analyse rapide et complète des ressources. Certains binômes affirment que le questionnaire leur a été utile également pour concevoir de nouvelles activités et ressources, d'autres soulignent encore son utilité pour l'amélioration des ressources existantes grâce aux avis des évaluateurs. Quelques points à améliorer sont aussi mentionnés : éviter la répétition et la redondance de certains critères, le fait que certains critères ne s'appliquent pas à toutes les ressources et qu'il n'y a pas la possibilité de le signifier. De plus, 4 binômes trouvent que l'évaluation finale réalisée à l'aide du questionnaire ne correspond pas toujours à leur opinion globale sur la qualité de la ressource. Malgré tout, ils trouvent que l'évaluation à l'aide du questionnaire mène à une meilleure évaluation de la ressource que ce qu'ils lui auraient attribué sans le questionnaire.

V. CONCLUSION

L'analyse du travail documentaire des enseignants avec des ressources et des genèses instrumentales relatives à leur usage du questionnaire présentée dans ce texte tend à montrer un impact positif de l'implication des enseignants dans l'analyse des ressources sur le développement de leurs compétences professionnelles visant l'intégration de la géométrie dynamique dans leurs pratiques.

Une première conclusion concerne l'imbrication des genèses instrumentales et documentaires chez les enseignants dans l'analyse des ressources à l'aide du questionnaire. Le questionnaire a pour but d'aider les enseignants à analyser les ressources pour qu'ils puissent choisir celles qui leur conviennent pour une mise en œuvre en classe. De ce point de vue, la genèse instrumentale du questionnaire pour l'analyse des ressources soutient la genèse documentaire. Pourtant, le questionnaire a été utilisé de manière différente, ce qui a conduit au développement de différents instruments menant à de diverses analyses de ressources. Ainsi, l'analyse des ressources et ses différentes finalités ont façonné l'utilisation du questionnaire et, par conséquent, l'instrument qui en résulte pour l'analyse des ressources. De ce point de vue, la genèse documentaire influence à son tour la genèse instrumentale du questionnaire. Cette relation étroite entre les genèses documentaire et instrumentale est l'une des clés du développement professionnel, mais, en même temps, elle présente une grande complexité pour les enseignants.

Les études empiriques menées avec les enseignants ont produit de nombreux résultats significatifs. Nous avons observé par exemple que l'analyse des ressources de géométrie dynamique passe par une vérification explicite de la valeur ajoutée de la géométrie dynamique en comparaison avec l'environnement traditionnel de papier - crayon et une attention particulière est accordée au rôle du déplacement. Il s'agit d'une compétence professionnelle nécessaire pour une analyse efficace des ressources de géométrie dynamique. Son développement a été évidemment visé dès la conception du questionnaire, et les résultats des expériences montrent que le questionnaire permet en effet d'atteindre cet objectif.

Les résultats montrent aussi que les enseignants apprécient l'utilisation du questionnaire leur permettant de faire une analyse complète et détaillée des ressources. Il faudra cependant se pencher à nouveau sur les points critiqués afin de repenser certains critères qui apparaissent redondants et surtout sur les raisons pour lesquelles le résultat de l'évaluation ne correspond pas toujours à l'avis global des évaluateurs sur la qualité de la ressource.

Bien que ce travail montre que l'évaluation de la qualité des ressources de géométrie dynamique peut soutenir le développement professionnel des enseignants, il apparaît également que la complexité d'une telle activité pour les enseignants nécessite un soutien spécifique et à long terme. De nouveaux moyens et outils d'accompagnement de genèses instrumentales et documentaires des utilisateurs de la plate-forme doivent donc être pensés, ce qui ouvre la voie à d'autres projets.

REFERENCES

Assude T., Gélis J.-M. (2002) La dialectique ancien-nouveau dans l'intégration de Cabri-géomètre à l'école primaire. *Educational Studies in Mathematics* 50, 259-287.

Baudoin J.-M. (2009) *Une proposition de grille d'analyse pour l'évaluation de la qualité des ressources de géométrie dynamique*. Mémoire de Master 2 IC2A. Université de Grenoble.

Fuglestad A. B. (2007) Teaching and teachers' competence with ICT in mathematics in a community of inquiry. In Woo J. H. et al. (Eds.) (pp. 249-256) *Proceedings of the 31st Conference of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education*. Seoul : PME.

Gueudet G., Trouche L. (2008) Du travail documentaire des enseignants : genèses, collectifs, communautés. Le cas des mathématiques. *Education et didactique* 2(3), 7-33.

Gueudet G. Trouche L. (2009) Towards new documentation systems for mathematics teachers? *Educational Studies in Mathematics* 71, 199-218.

Guin D., Joab M., Trouche L. (Ed.) (2008) *Conception collaborative de ressources pour l'enseignement des mathématiques, l'expérience du SFoDEM (2000-2006)*. Cédérom, INRP et IREM (Université Montpellier 2).

Guin D., Trouche L. (1999 The complex process of converting tools into mathematical instruments. The case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 3, 195-227.

Kortenkamp U., Blessing A. M., Dohrmann C., Kreis Y., Libbrecht P., Mercat C. (2009) Interoperable interactive geometry for Europe – First technological and educational results and future challenges of the Intergeo project. In Durrand-Guerrier V. et al. (Eds.) (pp. 1150-1160) *Proceedings of the 6th CERME conference*. Lyon, France.

Laborde C. (2001) Integration of technology in the design of geometry tasks with Cabri-geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 6(3), 283-317.

Laborde C. (2008). Multiple dimensions involved in the design of tasks taking full advantage of dynamic interactive geometry. In Canavarro A. P. et al. (Eds.) (pp. 29-43) *Tecnologias e Educação Matemática*. Lisboa: SEM/SPCE.

Monaghan J. (2004) Teachers' activities in technology-based mathematics lessons, *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 9, 327-357.

Rabardel P. (1995) *Les hommes et les technologies : Approche cognitive des instruments contemporains*. Paris : Armand Colin.

Robert A., Rogalski J. (2005) A cross-analysis of the mathematics teacher's activity. An example in a French 10th-grade class. *Educational Studies in Mathematics* 59, 269-298.

Robertson A. (2006) *Introduction aux banques d'objets d'apprentissage en français au Canada*, Rapport pour le Réseau d'enseignement francophone à distance du Canada. http://www.refad.ca/

Trgalová J., Soury-Lavergne S., Jahn A. P. (2011) Quality assessment process for dynamic geometry resources in Intergeo project. *ZDM* 43, 337-351.

Trouche L., Drijvers P. (2010) Handheld technology for mathematics education, flashback to the future. *ZDM* 42, 667–681.

ANNEXE

La description de la ressource est complète (thème, notions et compétence, niveau scolaire, pré-requis, mise en œuvre en classe, durée).

Le thème mathématique est clairement indiqué
Les pré-requis mathématiques sont clairement indiqués
Les prérequis techniques sont clairement indiqués
Les compétences visées sont indiquées
Les notions en jeu sont indiquées
Une mise en œuvre de la ressource est proposée (utilisation en salle informatique, en salle ordinaire avec vidéoprojection...)
Une durée est proposée

Les fichiers sont techniquement utilisables

Je peux accéder aux différents fichiers
Je peux ouvrir les fichiers de géométrie dynamique avec le logiciel de mon choix
Il n'y a pas de "bugs" informatiques dans les fichiers

Le contenu mathématique est valide et utilisable dans la classe pour travailler les notions et compétences annoncées

Les mathématiques sont valides
Le thème, les notions et les compétences indiqués sont conformes au programme pour le niveau annoncé
Les activités mathématiques proposées sont en adéquation avec le thème, les notions et les compétences annoncés

L'interaction avec les figures de géométrie dynamique est valide et cohérente avec l'activité mathématique prévue

Les figures de géométrie dynamique se comportent de manière cohérente par rapport à l'activité mathématique prévue
La figure se comporte de manière cohérente par rapport à l'activité
Poussée dans leurs limites, les figures "résistent bien"
Les valeurs numériques (mesures d'angles, de longueurs) ne remettent pas en cause le déroulement de l'activité
Les fonctionnalités avancées, comme l'usage du clavier ou de macro-constructions, sont bien décrites

La description de cette activité en permet une utilisation efficace pour l'apprentissage des notions et compétences annoncées

L'activité est conçue de manière à ce que les élèves s'y engagent facilement
Des conseils sont donnés à l'enseignant pour lancer l'activité
L'activité est conçue de manière à laisser des initiatives aux élèves
Des traces de production d'élèves sont disponibles
Des stratégies prévisibles des élèves, correctes ou erronées, sont décrites
Les rétroactions du logiciel essentielles pour l'activité sont décrites
Les rétroactions du logiciel permettent aux élèves d'avancer dans la résolution de l'activité
Des suggestions pour sortir les élèves de stratégies sans issues sont proposées
Des actions pour faire évoluer les stratégies de élèves sont proposées
Des conseils sur les interventions aux moments de synthèse sont donnés
Des suggestions sur comment, quand et qui valide les productions des élèves sont données
Les caractéristiques principales de l'activité et les effets de leurs modifications sur les stratégies et les apprentissages des élèves sont décrits

La description de l'activité propose une mise en œuvre

Une configuration matérielle possible est décrite (un ordinateur par élève, ou classe entière avec vidéoprojecteur)
L'activité est décomposée en différents rôles et phases
Une gestion des mises en commun et de la conclusion de l'activité est proposée
Un déroulement temporel est proposé

L'activité s'inscrit facilement dans une progression pédagogique

Les apprentissages réalisés peuvent être réinvestis
Les notions et compétences pré-requises sont cohérentes avec l'activité
Cette activité contribue à l'avancement des apprentissages prévus dans la progression pédagogique
Leur réflexion lors de l'activité les introduit à la notion suivante dans ma progression

Le contenu mathématique est valide et utilisable dans la classe pour travailler les notions et compétences annoncées

Les mathématiques sont valides
Le thème, les notions et les compétences indiqués sont conformes au programme pour le niveau annoncé
Les activités mathématiques proposées sont en adéquation avec le thème, les notions et les compétences annoncés

La ressource est facile à prendre en main et adaptable

La quantité d'information est satisfaisante
La présentation de l'information est claire
On peut modifier les éléments de la ressource pour l'adapter à ses besoins.

Commentaires:

CONSTRUCTION D'UNE RESSOURCE POUR L'ENSEIGNANT : UN ALGORITHME DE SOMME DE DEUX RATIONNELS EN ECRITURE DECIMALE

Laurent VIVIER*

Résumé – La recherche mathématique, en produisant de nouveaux savoirs, est une source d'inspiration pour la constitution de ressources pour l'enseignement. Ce point est illustré par la genèse mathématique d'un algorithme de somme de deux rationnels en écriture décimale. Cette nouvelle ressource a fait l'objet d'une situation proposée en formation initiale de professeurs de mathématiques du second degré en France. L'objectif de cette situation, par son potentiel adidactique, est une construction par les étudiants d'un tel algorithme, sans apport mathématique. Les analyses de l'expérimentation menée en formation d'enseignants montrent que l'objectif est globalement atteint.

Mots-clefs : nombre rationnel, algorithme, professeur du second degré, formation initiale

Abstract – The mathematical research, producing new knowledge, is a source of inspiration for the constitution of teaching resources. This point is illustrated by the mathematical genesis of an algorithm for the sum of two rational written in decimal expansion. This new resource was the subject of a situation proposed for pre-service secondary math professors in France. The objective of this situation, by its adidactic potential, is a construction by the students of such an algorithm, without any mathematical addition. The experimentation analyses show that the objective is globally reached.

Keywords: rational number, algorithm, secondary teacher, pre-service training

I. INTRODUCTION

La somme de deux nombres rationnels est définie classiquement par les fractions – cette définition apparaît dès le début du collège en France (grade 6). Mais il est également bien connu que, grâce à l'interprétation d'une fraction comme une division, tout nombre rationnel peut s'écrire à l'aide d'un développement décimal illimité périodique dont le nombre 1/3 joue le rôle de paradigme. Se pose alors la question de savoir effectuer la somme de deux rationnels en écriture décimale. On peut évidemment convertir les nombres dans le registre fractionnaire pour faire la somme puis, éventuellement, reconvertir le résultat obtenu en décimal. Mais cela bloque le développement des praxis (Chevallard 1999) interne à un registre de représentation (Duval 1995) comme cela est développé dans (Nikolantonakis et Vivier 2010) au sujet des opérations sur les entiers naturels en base quelconque pour des étudiants-professeurs du premier degré.

Parallèlement à ce constat, une recherche sur le codage de nombres en base exotique (Rittaud et Vivier 2011a) a mis en lumière un algorithme simple pour faire les sommes de séries périodiques. La transposition de cet algorithme en base de numération usuelle[1] (Rittaud et Vivier 2011c) permet alors de combler le problème praxéologique relatif au registre décimal des nombres rationnels mentionné ci-dessus. Cet algorithme vu comme une ressource pour l'enseignant est le thème de ce texte (l'algorithme est détaillé en annexe).

L'expérimentation proposée vise à faire construire un algorithme de somme de deux rationnels en écriture décimale par des étudiants, de futurs enseignants en formation initiale inscrits au Master[2] 2 *Métiers des Mathématiques et de l'Enseignement* de l'université de

* LDAR, université Paris Diderot – France – laurent.vivier@paris7.jussieu.fr

[1] L'article propose plus largement une construction de **Q** par les développements décimaux illimités périodiques avec des algorithmes pour les quatre opérations de base.

[2] Il s'agit d'un diplôme délivré après 5 ans d'études universitaires.

© VIVIER L. (2012) Construction d'une ressource pour l'enseignant : un algorithme de somme de deux rationnels en écriture décimale. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT6, pp. 919–932). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

Tours. Le déroulement expérimental est classique et s'appuie sur la Théorie des Situations Didactiques (TSD) de Brousseau (1998) : un travail individuel (dévolution) suivi de travaux de groupes (action, formulation, validation) et des présentations de ces travaux en classe entière.

En section II, nous exposons rapidement la genèse de la ressource mathématique, de la recherche mathématique fondamentale à sa transposition dans le cadre des mathématiques scolaires (c'est-à-dire les mathématiques de l'enseignement secondaire). Puis, en section III, nous exposons l'expérimentation menée en formation initiale de professeurs du second degré. Enfin, en dernière section, nous menons une discussion sur la ressource construite, son intérêt et ses possibles utilisations.

II. CONSTITUTION MATHEMATIQUE DE LA RESSOURCE

1. Présentation générale de la recherche mathématique

La recherche mathématique sur laquelle cette communication s'appuie est le fruit d'un travail de recherche en collaboration avec Benoît Rittaud (Rittaud et Vivier 2011a). Nous y étudions un ensemble de nombres, appelés nombres F-adiques, dont la construction est principalement sémiotique. Il s'agit d'une extension du codage des nombres entiers dans le système de numération de Zeckendorf (1972) qui s'appuie sur la suite de Fibonacci. Le principe est à peu près le même que lorsque l'on considère des séquences infinies de chiffres dans le système décimal usuel. Plus précisément, les nombres F-adiques sont obtenus en considérant une série infinie de 0 et de 1 sans jamais avoir deux 1 consécutifs[3]. L'ensemble obtenu possède une structure de groupe topologique abélien totalement ordonné. Une étude complète a été menée sur les séries périodiques, i.e. périodiques à partir d'un certain rang (Rittaud et Vivier 2011a). Comme on peut s'y attendre, et comme en base usuelle, ces éléments périodiques s'identifient avec les fractions d'entiers[4]. Nous nous focalisons ici uniquement sur la somme. Dans nos recherches, un algorithme simple de somme de deux rationnels dans l'ensemble des nombres F-adiques a été trouvé ce qui a constitué une clé essentielle.

L'idée a alors été de voir si cet algorithme de somme pouvait être transposé pour les rationnels en écriture décimale (ou dans une autre base). La réponse est positive et est surprenante de simplicité. Par la suite, les analogies entre la base dix et la base de Fibonacci ont été très fructueuses (cf. Rittaud et Vivier 2011b). Nous référons en outre à (Rittaud et Vivier 2011c) pour les résultats en base de numération usuelle – en particulier, nous proposons une construction innovante de **Q** à partir des écritures décimales périodiques.

2. Le point de vue des approximations

Pour effectuer une somme, que ce soit en base de numération usuelle ou en base de Fibonacci, on peut toujours s'en sortir en considérant des sommes successives et en utilisant un argument de type valeur approchée. Prenons un exemple en base usuelle. Pour effectuer la somme $0,\overline{72}+0,\overline{33}$ on trouve en prenant de plus en plus de périodes :

Nombre de périodes	1	2	3	4
Résultats partiels	1,05	1,0605	1,060605	1,06060605

***Tableau 1** – Sommes par approximations successives*

[3] Cette condition provient directement de la relation de récurrence $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$ de la suite de Fibonacci.

[4] Toutefois, certaines propriétés sont surprenantes, comme le fait qu'une équation $D\times x=N$ possède dans l'ensemble des F-adiques exactement D solutions distinctes – N et D sont deux entiers avec $D\neq 0$.

ce qui permet d'inférer la solution qui est $\mathbf{1,\overline{06}}$.

Le problème est que cette procédure de nature topologique repose sur une perception visuelle des valeurs approchées successives trouvées, donc peu algorithmisable à moins de connaître a priori la taille des périodes et le début des périodes – mais cela n'est pas simple à démontrer à partir de cette procédure de somme. En outre, cette procédure s'appuie sur le fait que la somme de deux nombres ayant une période est un nombre ayant une période ainsi que sur la continuité de la somme.

Nous avons débuté nos recherches sur les nombres *F*-adiques avec ce point de vue par approximation pour effectuer les sommes. Mais la gestion des retenues est bien plus délicate dans l'ensemble des *F*-adiques qu'en base de numération usuelle. En fait, pour faire le lien entre les périodiques et les fractions dans le cadre des nombres *F*-adiques, la situation est inextricable si l'on se contente de cette procédure topologique par approximations pour effectuer les sommes. Une idée neuve est nécessaire et l'algorithme que nous présentons ici provient de ce problème plus difficile : au lieu de considérer le nombre dans sa totalité, il suffit de considérer une unique période et de compter les éventuelles retenues provenant de cette période sur elle-même. L'explication est simple puisque les retenues sont les mêmes pour toutes les périodes, on simule ainsi l'action des autres périodes sur celle que l'on considère plus particulièrement.

3. L'algorithme de somme en base dix

L'algorithme se transpose sans aucun problème à la base dix et à l'identique. Voyons quelques exemples qui permettent de faire ressortir les trois éléments essentiels de l'algorithme : faire débuter la période au même rang, avoir des périodes de même taille, gérer l'éventuelle retenue à gauche (l'usage du singulier est notable, la gestion des retenues est bien plus facile qu'en *F*-adique (Rittaud et Vivier 2011b).

1. Le premier exemple (figure 1a) est celui où il n'y a aucune adaptation par rapport à l'algorithme de somme de deux décimaux en écriture décimale : $34{,}0\overline{45} + 2{,}5\overline{27} = 36{,}5\overline{72}$
2. L'exemple (figure 1b) de la somme $5{,}7\overline{248} + 8,\overline{307} = 5{,}7\overline{248} + 8{,}3\overline{073} = 14{,}0\overline{321}$ montre comment procéder lorsque les périodes ne commencent pas au même rang (il faut *décaler* la période tout en permutant ses chiffres).
3. L'exemple (figure 1c) de la somme $0,\overline{34} + 7,\overline{202} = 0,\overline{343434} + 7,\overline{202202} = 7,\overline{545636}$ montre comment procéder lorsque les périodes n'ont pas la même taille (il suffit d'utiliser le PPCM des tailles).
4. Le dernier exemple (figure 1d) concerne le problème de la gestion de la retenue qui *sort de la période*. Nous marquons en gras les retenues qu'il faut compter deux fois : au premier chiffre de la période et au premier chiffre à gauche de la période (le 0 trouvé en premier est donc barré et remplacé par un 1). On trouve : $3,\overline{24} + 4,\overline{96} = 8,\overline{21}$.

$$\begin{array}{cccccc} & & & & 1 & \\ & 3 & 4, & 0 & \overline{4} & \overline{5} \\ + & & 2, & 5 & \overline{2} & \overline{7} \\ \hline & 3 & 6, & 5 & \overline{7} & \overline{2} \end{array}$$

Figure 1a

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & 1 & \\ & & 5, & 7 & \overline{2} & \overline{4} & \overline{8} \\ + & & 8, & 3 & \overline{0} & \overline{7} & \overline{3} \\ \hline & 1 & 4, & 0 & \overline{3} & \overline{2} & \overline{1} \end{array}$$

Figure 1b

$$\begin{array}{cccccccc} & & & & & & & \\ & 0, & \overline{3} & \overline{4} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{3} & \overline{4} \\ + & 7, & \overline{2} & \overline{0} & \overline{2} & \overline{2} & \overline{0} & \overline{2} \\ \hline & 7, & \overline{5} & \overline{4} & \overline{5} & \overline{6} & \overline{3} & \overline{6} \end{array}$$

Figure 1c

$$\begin{array}{cccc} & \mathbf{1} & 1 & \\ & 3, & \overline{2} & \overline{4} \\ + & 4, & \overline{9} & \overline{6} \\ \hline & 8, & \overline{2} & \overline{\cancel{0}1} \end{array}$$

Figure 1d

Bien que les trois cas puissent se présenter simultanément dans un même calcul, la simplicité de cet algorithme est notable. Une majorité d'élèves de seconde (grade 10), sur les 113 de l'étude expérimentale, utilise sans difficulté l'algorithme bien que sa compréhension soit moins évidente[5]. On peut se demander pourquoi un algorithme aussi simple n'a pas été découvert avant nos très récentes recherches – ou, s'il l'a été, pourquoi n'est-il ni utilisé ni diffusé. Nous pensons qu'une des raisons tient dans les possibilités techniques : en base de numération usuelle, il est toujours possible d'écrire les nombres rationnels dans le registre fractionnaire pour faire les opérations voulues. Or, cela n'est pas possible avec les nombres *F*-adiques puisqu'il y a plusieurs solutions aux équations $D\times x=N$. En outre, l'identification des périodiques avec les rationnels est bien plus délicate et a demandé une idée nouvelle qui s'est révélée très fructueuse.

III. CONSTRUCTION DE L'ALGORITHME PAR DES ELEVES PROFESSEURS

1. Présentation de la situation

La situation initialement prévue se décompose en trois phases :

1. une première activité individuelle d'une dizaine de minutes où les élèves professeurs doivent déterminer trois sommes de rationnels en écriture décimale (la convention d'écriture des périodes est rappelée) :

   $0,\overline{5}+0,\overline{7}$ $\qquad$ $0,\overline{34}+0,\overline{51}$ $\qquad$ $0,\overline{72}+0,\overline{3}$

2. un travail de groupe de une à deux heures avec la consigne suivante : « trouver une manière générale pour faire ce type de somme et rédiger votre stratégie » ;
3. une présentation des résultats des groupes en classe entière suivie de débat pour une quinzaine de minutes environ par groupe.

La situation est fortement inspirée par la TSD (Brousseau 1998) : la première activité joue le rôle de dévolution et le travail de groupe en autonomie totale (pas d'échange entre groupe, aucun indice mathématique donné par l'enseignant) donne une dimension adidactique dans les trois phases d'action, de validation et de formalisation. L'objectif principal de cette séance était de donner une alternative à l'enseignement traditionnellement plus frontal au secondaire en s'appuyant sur une situation ayant un potentiel adidactique. Pour cela, les étudiants-professeurs étaient en situation d'homologie (Kuzniak 2003).

Des feuilles de format A3 sont distribuées aux groupes pour la rédaction, la calculatrice est autorisée (elle sera très peu utilisée) et une durée totale de trois heures est prévue.

2. Analyse a priori

La phase 1 n'a d'importance que pour la dévolution. Toutefois, on s'attend aux procédures suivantes :

- conversion dans le registre fractionnaire pour effectuer la somme (les étudiants ont vraisemblablement déjà rencontré cette conversion) avec éventuellement une reconversion dans le registre décimal à l'aide d'une division ;

[5] Voir (Vivier 2011). En outre, les problèmes de compréhension semblent disparaître en première année de mathématiques à l'université (14 étudiants interrogés). Il est également à noter que l'algorithme pratique présenté aux figures 1a à 1d est une adaptation de la présentation pratique initiale en fonction de ce que les élèves et les étudiants ont produit (ibid.).

- calcul correct à l'aide de valeurs approchées successives (cf. tableau 1) en utilisant implicitement la continuité de la somme et le fait que la somme de deux périodiques est périodique ;
- calculs à l'aide de valeurs approchées successives, sans aboutir à un résultat ou en donnant ce que Margolinas (1988) nomme une réponse *infinitésimale* (comme par exemple la somme $0,\overline{5}+0,\overline{7}=1,\overline{3}2$ effectuée par une étudiante, nommée H ; voir aussi la figure 2).

Les dernières procédures sont vraisemblables, même à ce niveau (M2 enseignement des mathématiques) puisque les étudiants n'ont pas, ou très peu, travaillé avec ce type d'objets mathématiques et que le problème des retenues apparaît aux sommes 1 et 3. Les autres procédures qui consistent à ajouter séparément les parties entières et les périodes ne sont pas retenues pour la population étudiée vu le niveau d'étude mathématique – ce type de réponses est donné par des élèves de seconde en France (Vivier 2011).

Les échanges à l'intérieur d'un groupe lors de la phase 2 doit permettre d'éliminer les réponses erronées. La consigne, en demandant une manière générale pour effectuer une somme en écriture décimale, demande de fait de formuler un algorithme et incite à donner le résultat final dans le registre décimal. Plusieurs choix sont alors possibles parmi les procédures exposées ci-dessus. En outre, la nécessité de rédiger un algorithme en vue d'une communication incite à formuler clairement et à valider les procédures envisagées. Les fractions peuvent constituer un élément de validation important et nous serons attentifs, dans les analyses a posteriori, au statut des fractions.

Dans cette phase 2, il est prévu que les trois éléments essentiels d'un algorithme de somme (cf. section II.3) apparaissent, mais globalement pour l'ensemble des groupes (bien qu'espéré, il n'est pas attendu qu'un groupe trouve un algorithme). L'identification des trois problèmes provient de la phase d'action pourvu que les sommes testées soient suffisamment variées (les sommes proposées en phase 1 ne permettent pas de voir tous les problèmes). Or, les travaux d'un groupe peuvent reposer sur des implicites comme par exemple des périodes qui débutent juste après la virgule (sous une éventuelle influence des sommes proposées en phase 1). Vu le niveau mathématique des étudiants, il est attendu que les problèmes identifiés soient résolus sauf éventuellement la gestion de la retenue qui est plus délicate.

L'algorithme général de somme de deux rationnels en écriture décimale est l'objectif majeur de la phase 3 où il est prévu que, chaque groupe présente son travail. Ainsi, il est attendu que les éléments incontournables de l'algorithme apparus en phase 2 dans les groupes soient mutualisés pour ensuite construire, ensemble et guidé éventuellement par l'enseignant, un algorithme général.

3. *Constitution des groupes : analyse de la phase de dévolution*

À l'issue de la phase individuelle, quatre groupes de trois étudiants sont formés. Les douze étudiants sont nommés à l'aide d'une lettre (A à L) et les groupes par les trois lettres désignant les étudiants (ABC, DEF, GHI et JKL). Les groupes ont été constitués dans un souci de mixité spatiale : lors de la phase individuelle, deux étudiants voisins ont pu s'influencer, aussi chaque groupe est constitué par 3 élèves-professeurs dont aucun n'était voisin des deux autres. De ce fait, les groupes ne sont pas équivalents dans leur constitution comme on peut le constater avec le tableau 2.

	Conversion et traitement dans le registre des fractions AVEC ou SANS reconversion dans le registre décimal	Calcul(s) avec un nombre FINI ou INDÉFINI de périodes	OK : a) et b) corrects et c) correct ou sans réponse NR : aucune réponse (a et b) INF : réponse infinitésimale
A		INDÉFINI	INF
B			autres problèmes
C	AVEC		OK
D		FINI	OK
E	AVEC		OK
F		INDÉFINI	OK
G	AVEC		OK
H			INF
I			OK
J		FINIS	NR
K	SANS		OK
L		FINIS	NR

Tableau 2 *– Constitution des groupes*

Dans chaque groupe se trouve un étudiant qui a utilisé une conversion dans le registre fractionnaire pour effectuer la somme (SANS reconversion pour le groupe JKL et AVEC reconversion pour les trois autres groupes) et dans chaque groupe se trouve au moins un étudiant qui a trouvé les bonnes sommes (codage OK). Toutefois, les groupes ABC et JKL semblent plus faibles que les deux autres puisqu'un seul étudiant donne les bonnes sommes (codage OK). Pour le groupe JKL, les étudiants J et L ne donnent pas de réponse (codage NR) et pour le groupe ABC, A donne une réponse infinitésimale (cf. figure 2) et B montre des problèmes de gestion de la retenue qui n'est pas comptabilisée à la partie entière et avec une inversion des chiffres de la période (cf. figures 3a et 3b).

$$0,\bar{5} + 0,\bar{7} = 0,555\ \ldots 5 + 0,77\ldots 7$$
$$= 1,3\ldots\ldots 332$$

Figure 2 *– Réponse infinitésimale à la somme a) (reproduction de la production de A)*

$$0,\bar{5} + 0,\bar{7} = 0,\bar{3} \qquad 0,\overline{72} + 0,\bar{3} = 0,\overline{60}$$

Figures 3a et 3b *– Problèmes de retenue et d'inversion de chiffres (reproductions des productions de B)*

En outre, le groupe DEF semble d'un meilleur niveau mathématique sur le sujet que les autres. En particulier, c'est dans ce groupe que se trouvent les deux étudiants D et F qui effectuent les sommes correctement par des approximations (cf. figures 4a et 4b). Ces deux étudiants possèdent des technologies (au sens de (Chevallard 1999)) sur la somme de deux nombres périodiques. Si on peut penser que la continuité de la somme est implicite, il semble clair (surtout pour F qui met entre parenthèse le chiffre résiduel 2) que ces étudiants savent que la somme de deux périodiques est un nombre périodique.

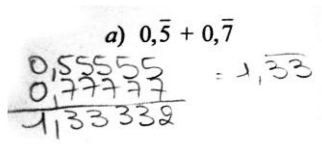


Figure 4a *– Somme a) par approximation (production de D)*

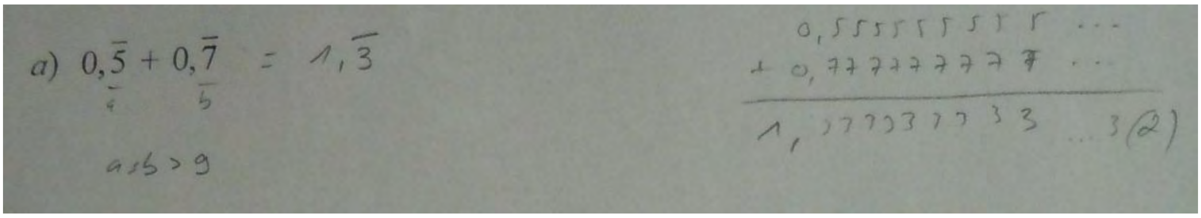


***Figure 4b** – Somme a) par approximation (production de F)*

Les étudiants se sont mis au travail sans aucun problème dans cette phase individuelle qui a parfaitement joué son rôle de dévolution puisque l'investissement et l'intérêt n'ont pas faibli dans la phase 2.

4. Analyse des productions collectives

Comme prévu, le travail de groupes a permis d'éliminer rapidement toutes les erreurs apparues individuellement et les productions sont, globalement, toutes correctes. Il a fallu insister pour que les groupes se mettent à écrire. Il semble que les étudiants avaient beaucoup de mal à commencer une rédaction sur un sujet qui était en cours de constitution : sans doute voulaient-ils écrire uniquement un texte sûr du point de vue du savoir mathématique en jeu. La rédaction s'est donc fortement accompagnée de justifications mathématiques : les phases de formulation et de validation ont largement été menées en parallèle.

	début période	taille période	retenue	fractions	décomposition des nombres
ABC		PPCM	report sur un exemple	conversion	
DEF	totalement traité	PPCM	problème identifié	conversion (validation)	entier + partie décimale + partie *périodique*
GHI	partiel : rangs égaux	PPCM		conversion	décimal + partie *périodique*
JKL				conversion	décimal + partie *périodique*

***Tableau 3** – Productions des groupes*

Le groupe JKL décompose chacun des deux nombres à sommer en somme d'un décimal et d'un nombre de la forme $0{,}0\ldots0\overline{\pi}$ où π est une période. Puis les étudiants de ce groupe identifient le problème qui consiste en la somme des deux parties *périodiques*. Pour effectuer cette somme, ils proposent de les convertir en fraction (par une technique proche de la mise en équation) puis de reconvertir en écriture décimale la somme déterminée sous forme de fraction.

Le groupe ABC a une production proche du groupe JKL à deux différences près : la conversion écriture décimale → écriture fractionnaire est effectuée sur la *totalité* du nombre et non pas seulement sur la partie *périodique* $0{,}0\ldots0\overline{\pi}$; le groupe ABC identifie la taille de la période de la somme comme étant le PPCM des tailles des périodes des deux nombres à sommer (on ne voit pas comment ils ont trouvé ce résultat, peut-être de manière empirique). L'étudiante B, en fin de phase 2, a fait une remarque essentielle que le groupe n'a malheureusement pas pu exploiter faute de temps. La remarque concerne le report de la retenue (cf. figure 5) : lorsque l'on prend deux nombres de la forme $0,\overline{\pi}$ et que leur somme dépasse 1 (ce qui correspond à un cas particulier de la somme de deux périodes de taille l lorsque celle-ci est supérieure ou égale à 10^l ; cf. aussi la première somme de la phase 1) alors la somme s'obtient comme si on sommait deux décimaux (avec une éventuelle mise au format de la taille des périodes en prenant le PPCM des tailles) et ensuite en ajoutant 1 à la période obtenue. Cette remarque fait que ce groupe est très proche d'un algorithme général car ils ont de fait un algorithme pour faire une somme du type $0,\overline{\pi} + 0,\overline{\pi'}$: 1) écrire les nombres avec des périodes de même taille en utilisant le PPCM ; 2) faire la somme comme s'il s'agissait de deux nombres décimaux ; 3) ajouter 1 à la période si la somme dépasse 1. Cet algorithme s'étend rapidement et simplement à la somme de deux rationnels pourvu que les périodes débutent au même rang (le groupe n'a pas identifié ce problème). Ils n'ont pas trouvé de justification à cette remarque.

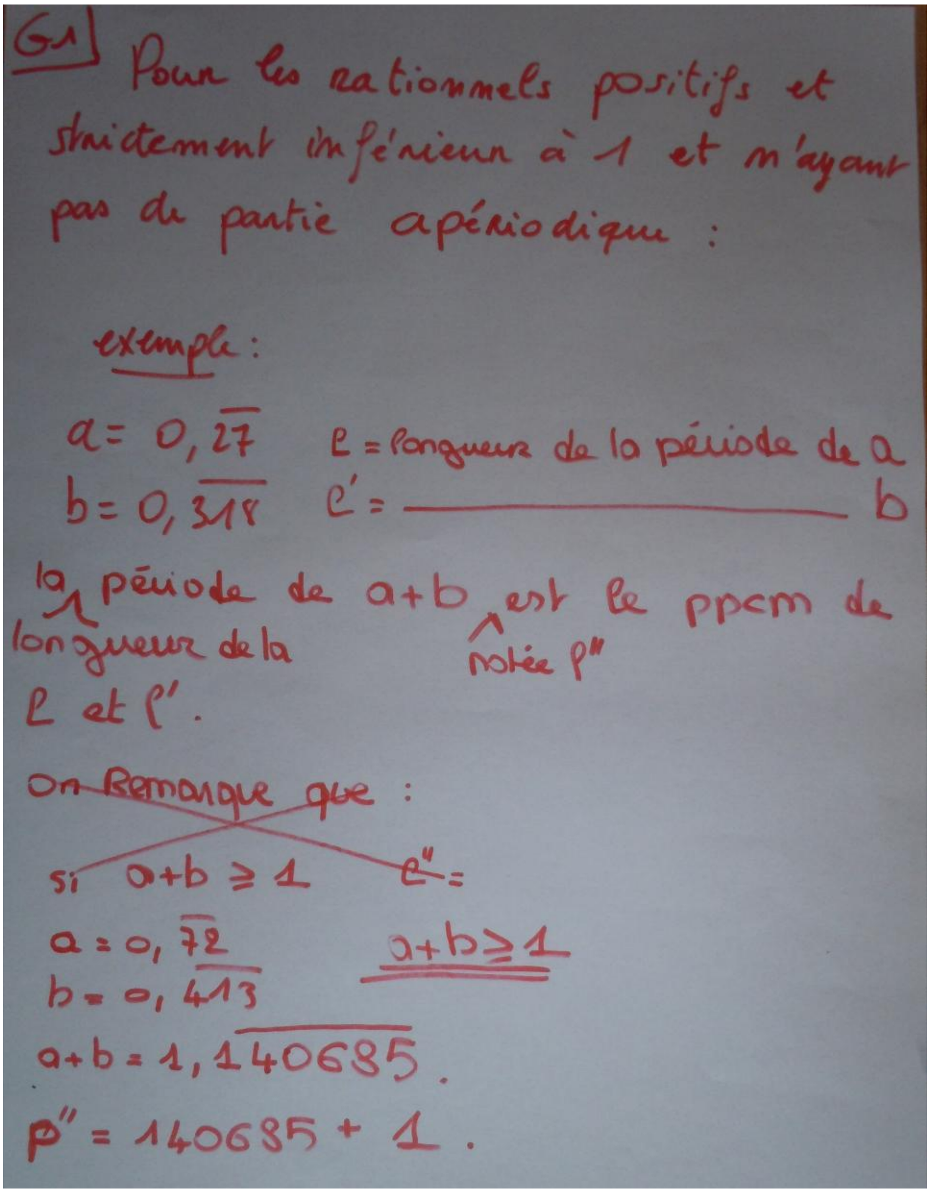


Figure 5 *– La remarque du groupe ABC sur les retenues*

Le groupe GHI, comme le groupe JKL, décompose un nombre en somme d'un décimal et d'une partie *périodique* (il y a un problème de notation car on ne sait pas combien de 0 il faut écrire, cf. figure 6). Les étudiants de ce groupe identifient le rôle joué par le PPCM des tailles des périodes et écrivent les parties *périodiques* pour qu'elles aient la même taille puis convertissent ces parties *périodiques* sous forme de fraction pour effectuer la somme. L'algorithme n'est présenté que pour deux nombres dont les périodes commencent juste après la virgule. L'exemple traité montre qu'ils envisagent de reconvertir les nombres dans le système décimal. Le problème du début des périodes est partiellement identifié car, implicitement, ils considèrent que le rang de début de période est le même pour les deux nombres. Ils résolvent alors le problème en se ramenant au cas précédent en multipliant les deux nombres par une même puissance de 10.

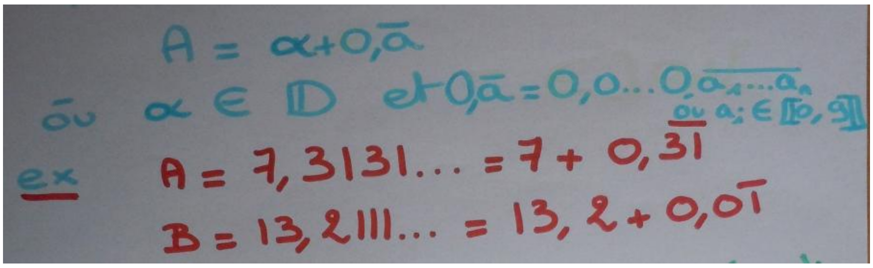


***Figure 6** – Imprécision dans la décomposition (production de GHI)*

Le groupe DEF décompose également les nombres mais en trois parties : la partie entière, une partie décimale non périodique et une partie *périodique*. Les étudiants de ce groupe ont identifié le problème de la taille des périodes et, même s'ils ne le disent pas explicitement, ils résolvent le problème à l'aide du PPCM (sur un exemple avec les tailles 3 et 2). Le cas de deux nombres dont les périodes ne débutent pas au même rang est parfaitement traité et ils écrivent : « on complète avec les chiffres de la période (en respectant la périodicité restante) ». Ces deux traitements, pour la taille et le rang de début des périodes, sont envisagés successivement pour compléter leur première approche relative au cas où les deux nombres ont des périodes de taille identique et qui débutent au même rang. Cela leur permet d'identifier, sans le résoudre, le problème de la retenue. Ce groupe a une position plus avancée que les autres dans le sens où il n'y a pas de focalisation sur un calcul dans le registre des fractions. S'il y a bien une conversion dans le registre fractionnaire, l'objectif est principalement d'identifier la nouvelle période. Plus précisément, ces trois étudiants considèrent les périodes comme des objets que l'on peut sommer (figure 7). Les fractions servent à définir cette somme, mais l'idée est bien d'obtenir une somme de deux périodes de même taille (cf. le groupe des périodes, Rittaud et Vivier 2011c). Ils identifient le problème de la retenue mais, bien que la solution soit proche, il n'est pas résolu. Notons toutefois que la notation $\overline{N}$ est sans doute le signe d'une confusion entre la période qui est une suite finie de chiffres que l'on peut coder[6] par un entier N et le nombre $0,\overline{N}$.

[6] Il faut toutefois faire attention, car les périodes 032 et 32 ne sont pas identiques (à ce sujet, cf. Rittaud et Vivier 2011c).

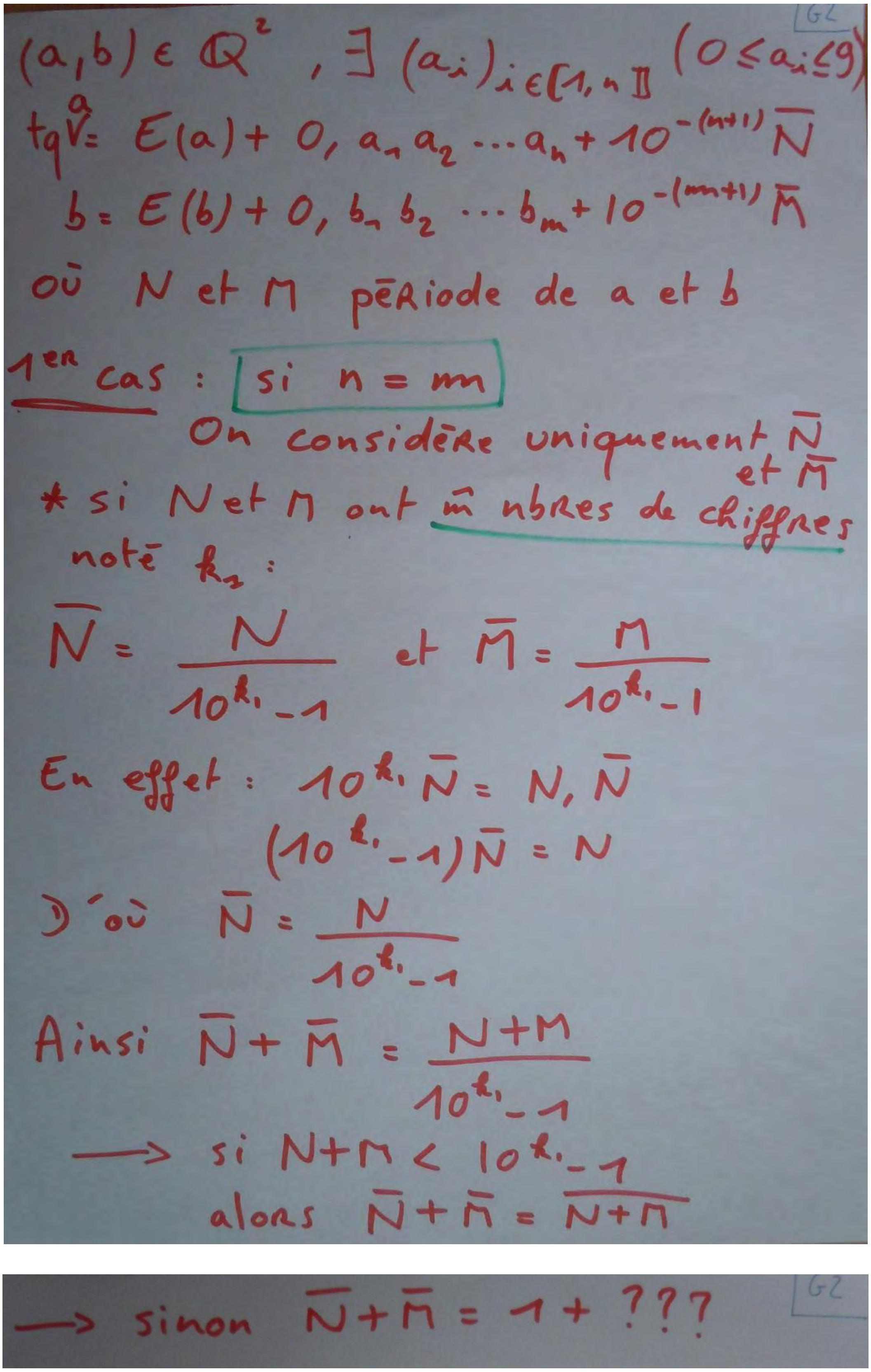


Figure 7 *– Somme des périodes (production du groupe DEF)*

5. *Production de la ressource visée*

Les présentations en classe entière n'ont pas produit l'effet escompté. Les interactions entre groupes ont été peu nombreuses. On peut penser que les étudiants étaient un peu fatigués après presque deux heures de travail intense pour procéder à une synthèse qui s'avère être plus difficile que prévue (plusieurs éléments à prendre en compte, homogénéiser les points de vue etc.). De plus, le temps manquait car la situation proposée s'insérait dans un dispositif de formation de 3h et il fallait conserver au moins 15 minutes à la fin pour procéder à un bilan[7] de la séance (en outre, une durée non négligeable avait été consacrée en début de séance à régler des problèmes d'emploi du temps).

Les productions des quatre groupes ont finalement été numérisées puis envoyées aux étudiants avec pour consigne de s'en inspirer pour produire un algorithme de somme pour la semaine suivante. C'est l'étudiante[8] H qui présente son travail de synthèse à l'ensemble de la classe. Voici son algorithme :

1. Multiplier les deux nombres par 10^N pour faire débuter les périodes directement après la virgule (N est le maximum des rangs de début de période des deux nombres). Les chiffres des périodes des deux nombres subissent éventuellement une permutation, mais les tailles sont inchangées.

2. On utilise le PPCM des tailles des périodes pour avoir deux nombres avec des périodes de même taille.

3. La somme est écrite sous forme fractionnaire avec notamment la somme des deux périodes au numérateur et $10^{ppcm}-1$ au dénominateur.

Le formateur procède alors à quelques précisions, ajustements et simplifications notamment pour, à partir de cette formule :

- montrer que la multiplication par 10^N pour ensuite faire une multiplication par 10^{-N} peut être directement effectuée sur l'écriture décimale ;
- montrer comment gérer la retenue pour aboutir à un algorithme de somme en écriture décimale.

Cela suscite deux réflexions : d'une part, et comme on pouvait s'y attendre, la gestion de la retenue n'est pas triviale et d'autre part les fractions constituent un registre qui a tendance à supplanter le registre de l'écriture décimale dès que l'on traite des nombres rationnels.

IV. DISCUSSION

Au vu des analyses précédentes, et malgré le léger problème de temps, l'objectif est atteint : il est possible de faire construire un algorithme de somme de deux rationnels en écriture décimale par des étudiants-professeurs. La recherche mathématique a donc permis l'élaboration d'une ressource, ici un algorithme, qui peut être reconstruite par l'activité proposée. Cette reconstruction se distingue cependant de la situation vécue par le chercheur en mathématiques puisque les étudiants savent que le savoir existe – il est détenu en particulier par le formateur. Tournons-nous maintenant vers une question qui émerge naturellement : cette ressource est-elle intéressante pour des enseignants du second degré ? Nous avançons plusieurs arguments.

---

[7] Il s'agissait de montrer la productivité et la dialectique des situations adidactiques d'action, de formulation et de validation.

[8] Il s'agit d'une étudiante sérieuse et d'un bon niveau mathématique.

Cet algorithme pourrait évidemment constituer une ressource pour la partie « algorithmique » des nouveaux programmes du lycée en France. D'ailleurs, l'écriture d'un programme informatique pour cet algorithme est intéressante en soi. Par exemple, la question du stockage informatique d'un nombre rationnel en écriture décimale n'est pas aussi simple que ce que l'on pourrait penser. Les productions des groupes, notamment leurs décompositions, montrent souvent des implicites qui seraient problématiques au cours d'une implémentation informatique. Dans la perspective des nouveaux programmes du lycée, il est envisagé de proposer en formation continue d'enseignants du second degré l'écriture d'un programme informatique pour l'algorithme de somme présenté dans ce texte. Il est par ailleurs prévu de proposer le téléchargement en ligne des algorithmes et programmes pour les opérations sur les rationnels en écriture décimale.

Une fois l'algorithme programmé, l'utilisation de cette nouvelle ressource informatique peut alors être envisagée. On peut penser par exemple à l'expérimentation en formation d'enseignants du premier degré de Weller, Arnon et Dubinsky (2009) où faute de connaître un algorithme de somme de deux rationnels en écriture décimale, ils utilisent un programme informatique qui procède par une double conversion en utilisant le registre des fractions pour effectuer la somme. Même si cette double conversion est totalement masquée aux enseignants en formation, elle constitue une entorse à l'éthique des mathématiques. On disposerait alors d'une ressource pour la formation d'enseignants conforme à l'éthique.

Mais, l'intérêt est, à notre avis, ailleurs. D'une part l'algorithme de somme permet de définir par des sommes réitérées la multiplication d'un rationnel en écriture décimale et de justifier les opérations qui sont utilisées dans la conversion du registre décimal dans le registre fractionnaire. Souvent, les enseignants sont mal à l'aise avec la technique qui consiste à poser, par exemple, a=0,999… pour ensuite, par une multiplication par 10 et une soustraction, aboutir à a=1. Ils sont mal à l'aise car ils ont conscience du fait qu'il y a un vide mathématique et que les opérations utilisées, si simples soient-elles, manquent d'appui. Un algorithme tel celui présenté ici permet de constituer une ressource pour l'enseignant dans le but de soutenir mathématiquement son activité d'enseignant – sans forcément que cela soit visible pour l'élève.

D'autre part, définir une somme sur les rationnels en écriture décimale permet de rentrer pleinement dans des questions sur les développements décimaux, et donc les nombres réels, avec notamment la question cruciale de l'égalité entre 0,999… et 1. De fait, et contrairement à l'opinion commune, cette égalité relève uniquement du cadre des nombres rationnels. En effet, pour tout nombre rationnel a qui a une période non nulle – i.e. a n'est pas un décimal – l'algorithme donne 0,999…+a=1+a (Richman 1999, Rittaud et Vivier 2011c) ce qui montre la nécessité d'identifier les deux représentations, propre et impropre, des décimaux. Car sans cette identification, les développements décimaux illimités ne seraient pas des nombres puisque l'on ne pourrait effectuer les opérations avec les propriétés de bases (cf. les systèmes de nombres de Chevallard (1989)). On pourrait alors reprendre l'expérimentation de Weller et al. (2009) sans faire appel à un programme informatique puisque les calculs peuvent finalement être effectués *à la main*. Une expérimentation de ce type est actuellement en cours en première année d'université.

REFERENCES

Brousseau G. (1998) *Théorie des Situations Didactiques.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chevallard Y. (1989) Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège deuxième partie : Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x* 19, 43-72.

Chevallard Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19(2), 222-265.

Duval R. (1995) *Sémiosis et pensée humaine*. Berne : Peter Lang.

Kuzniak A. (2003) *Paradigmes et espaces de travail géométriques*. Habilitation à Diriger des Recherches, Université Paris 7.

Margolinas C. (1988) Une étude sur les difficultés d'enseignement des nombres réels. *Petit x* 16, 51-66.

Nikolantonakis K., Vivier L. (2010) Registres et praxis pour la numération de position en base quelconque – une étude statistique en France et en Grèce. In Régnier J.-C., Spagnolo F., Di Paola B., Gras R. (Eds.) *Analyse statistique implicative - objet de recherche et de formation en analyse de données, outil pour la recherche multidisciplinaire*. *Actes du 5e colloque A.S.I.*, Palermo 2010.

Richman F. (1999) Is .999. . .= 1? *Mathematics Magazine* 72(5), 396-400.

Rittaud B., Vivier L. (2011a) Circular words, F-adic numbers and the sequence 1, 5, 16, 45, 121, 320,…. *Functiones et Approximatio Commentarii Mathematici* (à paraître).

Rittaud B., Vivier L. (2011b) Un point de rencontre entre recherche mathématique et recherche didactique. In Trouche L.et al. (Eds.) (pp. 85-92) *Faire ensemble des mathématiques : une approche dynamique de la qualité des ressources pour l'enseignement. Actes des Journées mathématiques IFÉ-ENS de Lyon* 15 et 16 juin 2011, Lyon : ENSL.

Rittaud B., Vivier L. (2011c) The fields **Q** from the standpoint of circular words – en préparation, une version simplifiée en français est disponible sur Internet : http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/59/34/13/PDF/Rittaud-Vivier-DDIP.pdf

Vivier L. (2011) El registro semiótico de los Desarrollos Decimales Ilimitados. *El cálculo y su enseñanza* (à paraître).

Weller K., Arnon I., Dubinsky E. (2009) Preservice teachers' understanding of the relation between a fraction or integer and its decimal expansion. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education* 9(1), 5-28.

Zeckendorf E. (1972) Représentation des nombres naturels par une somme des nombres de Fibonacci ou de nombres de Lucas. *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège* 41, 179-182.

ANNEXE : L'ALGORITHME

Nous proposons dans cette annexe un algorithme prêt à être implémenté dans un langage de programmation. Nous avons opté pour un stockage des nombres rationnels utilisant des chaînes de caractères (en lettres grecques) car cela permet de prendre en compte tous les zéros de manière relativement élémentaire. La somme des chaînes de caractères est la concaténation, $\pi[k]$ désigne le k-ième caractère de la chaîne de caractères π (les caractères sont comptés de gauche à droite) et taille(π) désigne le nombre de caractères que contient la chaîne π. D'autres options sont possibles comme par exemple à l'aide d'un décimal d et d'un entier p avec le rang de début de période et la taille de la période ou bien encore à l'aide de pointeurs[9].

1. Entrées[10] des chaînes de caractères ε, ε', δ, δ', π et π'.

[9] Les pointeurs ont l'avantage d'être seulement limité par les capacités de mémoire alors que les entiers et chaînes de caractères sont, eux, limités en nombre de chiffres et de caractères.

[10] Les chaînes ε et ε' codent les parties entières, δ et δ' les parties décimales non periodiques, π et π' les périodes. On se propose ainsi d'effectuer la somme $\varepsilon,\delta\overline{\pi} + \varepsilon',\delta'\overline{\pi'}$. Les chaînes δ et δ' peuvent être vides contrairement

2. *Faire débuter les périodes au même rang (r' après le 2-b)) :*

a) r=taille(δ) ; r'=taille (δ').

b) Si $r>r'$, échanger les chaînes ε et ε', δ et δ', π et π' ainsi que r et r'.

c) t=taille(π).

d) Pour i allant de 1 à $r'-r$ faire :

i) s=π[1] ; δ=δ+s ; *(concaténation du premier chiffre de la période à la partie non périodique)*

ii) Pour k allant de 1 à t–1 faire π[k]=π[k+1] ; π[t]=s *(permutation des chiffres de la période)*.

3. *Mettre les deux périodes à la même taille (m dans la suite) :*

a) t'=taille(π') ; m=PPCM(t,t').

b) θ=π ; Pour i allant de 2 à m/t faire π=π+θ.

c) θ=π' ; Pour i allant de 2 à m/t' faire π'=π'+θ.

(Concaténation de m/t périodes π et de m/t' périodes π' pour obtenir la taille commune m.)

4. *Calcul de la somme (avec prise en compte des retenues) :*

Si δ=∅ alors faire :

a) convertir les chaînes ε, ε', π et π' en nombre entier e, e', p et p'.

b) $e''=e+e'$; $p''=p+p'$;

c) si $p'' \geq 10^m$ alors faire : $p''=p''-10^m+1$; $e''=e''+1$;

d) convertir les nombres e'' et p'' en chaînes de caractères ε" et π" ; δ"=∅.

Sinon faire :

a) convertir les chaînes ε, ε', δ, δ', π et π' en nombre entier e, e', d, d', p et p'.

b) $e''=e+e'$; $d''=d+d'$; $p''=p+p'$;

c) si $p'' \geq 10^m$ alors faire : $p''=p''-10^m+1$; $d''=d''+1$;

d) si $d'' \geq 10^{r'}$ alors faire : $d''=d''-10^{r'}$; $e''=e''+1$;

e) convertir les nombres e'', d'' et p'' en chaînes de caractères ε", δ" et π".

5. *Sortie* : afficher la somme : $\varepsilon,\delta\overline{\pi} + \varepsilon',\delta'\overline{\pi'} = \varepsilon'',\delta''\overline{\pi''}$.

---

aux autres (un décimal est codé avec une période de zéro, ou de neuf). En outre, dans l'algorithme, il peut être intéressant de placer des tests d'admissibilité lors des entrées.

EN QUOI LA CONCEPTION DE RESSOURCES POURRAIT-ELLE INTERVENIR DANS LA FORMATION DE FORMATEURS ?

Maha ABBOUD-BLANCHARD*

Résumé – Ce papier traite de la question de l'interaction entre les résultats des recherches en didactique et le développement professionnel des formateurs d'enseignants dans le domaine des TICE. Nous y présentons un dispositif de formation de formateurs basé sur un partenariat entre chercheurs et praticiens. Ce dispositif est propice à la conception de ressources relatives aux technologies. Nous étudions alors le rôle de la conception de ces ressources dans le développement professionnel des enseignants-formateurs.

Mots-clefs : Enseignants, formateurs, technologies, ressources, développement professionnel

Abstract – This paper addresses the question of the interaction between the results of research in mathematics education and the professional development of teacher educators in the field of ICT. We present a training program of teacher educators based on a partnership between researchers and practitioners. This program also aims at the design of resources for the use of technologies in mathematics teaching. We study the role of the design of such resources in the professional development of teacher educators.

Keywords: teachers, educators, technology, resources, professional development

I. INTRODUCTION

L'utilisation des technologies numériques dans l'enseignement des mathématiques au fil des dernières décennies a été accompagnée par une demande constante de formation des enseignants à cette utilisation. De son côté, la recherche dans ce domaine (voir par exemple la 17ème étude ICMI, Hoyles et Lagrange 2010) a fourni une quantité importante de résultats sur les potentialités et limites des outils technologiques pour l'enseignement des mathématiques et sur l'impact de l'utilisation de ces outils sur les apprentissages. Elle a également souligné la complexité de l'introduction de ces outils dans les pratiques des enseignants ainsi que certains facteurs déterminants relatifs à cette introduction (Abboud-Blanchard et al. 2012). Malgré ces résultats qui permettent aujourd'hui de mieux comprendre comment les technologies modifient les pratiques des enseignants et l'apprentissage des élèves, la formation des enseignants s'empare peu de ce corps de recherches et ne l'exploite que rarement (Abboud-Blanchard et Emprin 2009).

II. UNE APPROCHE DE LA FORMATION DE FORMATEURS AUX TICE

La recherche présentée ici traite de la question de l'interaction entre les résultats des recherches et le développement professionnel des formateurs d'enseignants dans le domaine des TICE (Technologies de l'Information et de la Communication pour l'Enseignement). Elle rejoint l'approche développée par Burkhardt et Schoenfeld (2003) qui plaident pour une meilleure coordination entre la recherche, les pratiques effectives et la formation. Nous nous basons également dans notre travail sur l'approche développée par Chappet-Paries et Robert (2011) qui stipule de « *partir des pratiques pour contribuer collectivement à former des pratiques* » (Op.cité). Enfin, nous rejoignant le courant, développé ces dernières années en didactique des mathématiques, qui étudie le rôle de la conception, la sélection et la gestion des ressources dans l'intégration des technologies dans les pratiques enseignantes (Gueudet et Trouche 2009).

* LDAR – Université Paris Diderot et UCP – France – maha.abboud-blanchard@univ-paris-diderot.fr

© Abboud-Blanchard Maha (2012). En quoi la conception de ressources pourrait-elle intervenir dans la formation de formateurs ? In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT6, pp. 933–935). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

Se situant dans ces perspectives, notre travail vise, d'une part, à concevoir une formation basée sur un partenariat entre chercheurs et praticiens et d'autre part, à explorer le rôle de la conception de ressources relatives aux technologies dans la formation des formateurs.

Dans le cadre d'un dispositif général de formation de formateurs, nous avons conçu et mis en place un environnement collaboratif de formation aux utilisations des technologies basé sur un double mouvement :

- À travers le premier (« bottom-up »), les enseignants, futurs formateurs, partagent leurs expériences, pratiques et visions relatives à l'intégration des TICE dans l'enseignement.
- Le deuxième (« top-down »), consiste à aider ces enseignants à accéder aux résultats des recherches relatifs à ce domaine et à s'emparer des questions qui y sont débattues tout en y portant un regard critique soutenu par leurs propres expériences.

Le but du travail ainsi entrepris est d'amener progressivement les participants à identifier, pour chaque outil technologique choisi, des éléments qu'ils jugent essentiels à être pris en compte par, et/ou aborder dans, la formation des enseignants aux TICE. Ces éléments sont de différentes natures : conditions matérielles et contraintes, caractéristiques des différents environnements de travail, apports et limites relativement aux apprentissages mathématiques, palette des tâches à proposer aux élèves, caractéristiques de l'activité de l'enseignant, formes des interactions en classe… Cette identification « prend forme » à travers la conception d'une ressource destinée à être utilisée en formation des enseignants. La ressource est basée sur une réelle activité mise en place dans la(les) classe(s) du(des) concepteur(s) de la ressource. Chaque ressource est présentée à, et discutée avec, l'ensemble des participants.

III. DES RESULTATS ET DES QUESTIONS

L'analyse des ressources conçues nous a permis, d'une part, de souligner leurs caractéristiques et leurs potentialités à être employées dans la formation des enseignants et, d'autre part, de relever ce qui, dans la formation de formateurs dispensée, a contribué au processus de conception. Dans le même temps, elle nous a permis d'observer des caractéristiques du développement professionnel des formateurs en les situant par rapport au format du travail de collaboration mis en place. Nous retenons par exemple qu'ils projettent désormais de faire analyser, dans leurs propres stages, les tâches TICE proposées aux élèves non seulement en fonction de leur potentiel d'apprentissage mais aussi en les situant par rapport aux contraintes matérielles et sociales de mise en place dans les classes. De plus, ils accordent aussi une place importante aux choix de déroulement des séances TICE et à l'analyse des aides possibles aux élèves et leur impact sur les apprentissages prévus et effectifs.

Le dispositif mis en place a permis aux enseignants stagiaires de construire un ensemble d'éléments et d'outils partagés leur permettant d'analyser et de transmettre des expériences professionnelles relatives aux environnements technologiques.

Cependant, malgré les régularités que nous avons observées dans leur développement professionnel, ce processus garde pleinement son caractère individuel relatif à l'histoire, les connaissances, professionnelles et les conceptions de chacun. Par exemple, des enseignants ayant conçus la même ressource ont évolué ensemble mais selon des trajectoires différentes.

Il est difficile, à l'état actuelle de la recherche, de déterminer d'une façon précise quels peuvent être des indicateurs de développement professionnel de formateurs. De plus, ce développement est nécessairement déterminé par des facteurs personnels, institutionnels et sociaux extérieurs à la formation dispensée et qui ne sont pas encore accessibles à la recherche.

Les stagiaires dans cette formation sont des enseignants en exercice et de ce fait, il est difficile de différencier leur développement professionnel en tant qu'enseignants de celui en tant que futurs formateurs. Mais y a-t-il des différences entre les deux processus, et si oui lesquelles ?

REFERENCES

Abboud-Blanchard M., Emprin F. (2009) Pour mieux comprendre les pratiques des formateurs et de formations TICE. *Recherche et Formation* 62, 125-140.

Abboud-Blanchard M., Cazes C., Chenevotot-Quentin F., Grugeon B., Haspekian M., Lagrange J.B., Vandebrouck F. (2012) Les technologies numériques en didactique des mathématiques. In Elalouf M.-L., Robet A. (Eds.) (pp. 232-256) *Les didactiques en questions. Etat des lieux et perspectives pour la recherche et la formation.* Bruxelles: De Boeck.

Burkhardt H., Schoenfeld A. H. (2003) Improving educational research: toward a more useful, more influential, and better-funded enterprise. *Educational Researcher* 32(9), 3-14.

Chappet-Paries M., Robert A. (2011) Séances de formation d'enseignants de mathématiques (collège-lycée) utilisant des vidéos. *Petit x* 86, 45-77.

Gueudet G., Trouche L. (2009) Towards new documentation systems for teachers? *Educational Studies in Mathematics* 71(3), 199-218.

Hoyles C., Lagrange J. B. (Eds.) (2010) *Digital technologies and Math Education. Rethinking the terrain. The 17th ICMI Study*. New York: Springer.

ENSEIGNER ET APPRENDRE DES MATHEMATIQUES AVEC LES TICE, LE CAS DES FONCTIONS AU LYCEE AVEC CASYOPEE

Bernard LE FEUVRE*

Résumé – Les fonctions occupent aujourd'hui une place centrale dans l'enseignement des Mathématiques au lycée. Les TICE sont incontournables et notre groupe développe le logiciel Casyopée et des ressources pour les enseignants. Casyopée comprend un module symbolique où les élèves travaillent sur les aspects algébriques des fonctions et un module de géométrique dynamique où ils peuvent concevoir les fonctions comme modèles de dépendances. Les travaux du groupe à destination d'enseignants et de formateurs sont diffusés sous forme de mini sites et sont aussi disponibles sur le site du logiciel.

Mots-clefs : Fonctions, calcul symbolique, géométrie dynamique, modélisation, formation des enseignants

Abstract – The functions today occupy a central place in the teaching of Mathematics in high school. The « information and communication technology » is essential and our group develops free open- source software Casyopée and resources for teachers. Casyopée includes a symbolic module where students work on aspects of algebraic functions and dynamic geometry module where they can design functions as models of addiction. The group's work destined for teachers and trainers are available in mini sites and are also available on the software web site.

Keywords: Functions, symbolic computation, dynamic geometry, modeling, teacher training

I. PROJET CASYOPEE

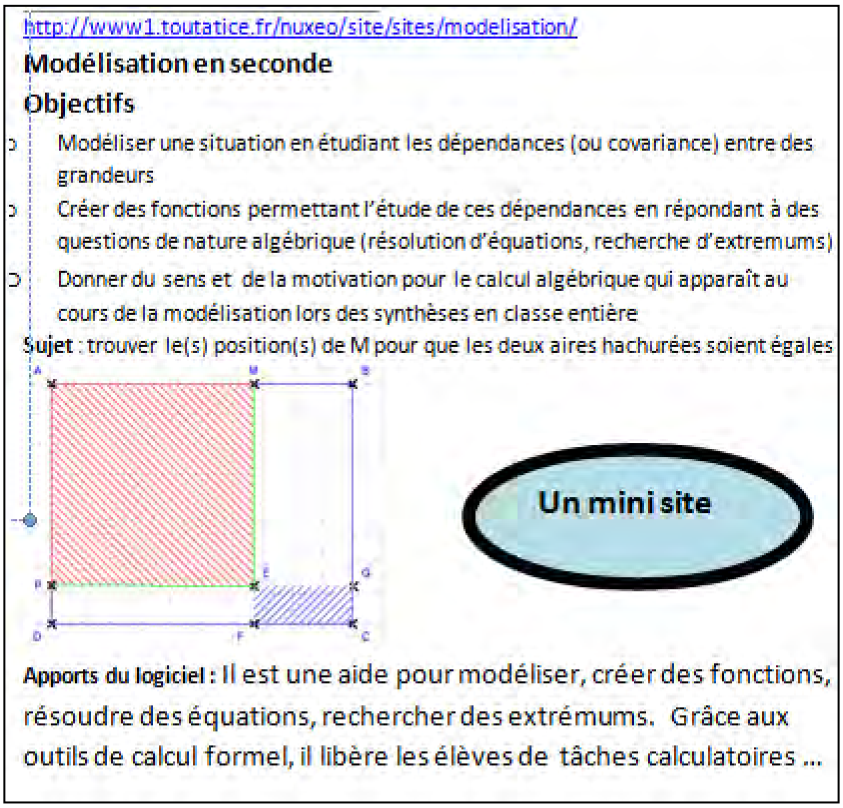
Le groupe de recherche qui est à la base de ce projet est constitué de chercheurs (J.-B Lagrange Université de Reims et de Trân Kiêm Minh IUFM Rennes) et de professeurs de lycée (Roselyne Halbert, Christine Le Bihan, Bernard Le Feuvre, Marie Catherine Manens et Xavier Meyrier). Il mène une recherche depuis plus de dix ans sur l'enseignement des fonctions et l'intégration des TICE dans l'enseignement des mathématiques et particulièrement sur possibilités qu'offre le calcul formel. La réalisation du logiciel libre, gratuit et simple d'utilisation Casyopée est faite dans cet esprit. Le groupe ainsi a créé un outil non contraignant pour les utilisateurs, se pilotant simplement sans un langage de commande. Notre souci est d'aider l'élève et non de le contraindre, d'où le nom du logiciel **CA**lcul **SY**mbolique **O**ffrant des **P**ossibilités à l'**E**lève et à l'**E**nseignant.

* IREM de Rennes, équipe associée IFÉ - France – ble-feuvre@ac-rennes.fr

© Le Feuvre B. (2012) Enseigner et apprendre des mathématiques avec des TICE, le cas des fonctions au lycée avec Casyopée. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT6, pp. 936–938).
http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

II LE LOGICIEL ET LES MINI SITES

Le logiciel Casyopée comporte un module symbolique qui permet aux usagers (élèves comme professeurs) de travailler sur les aspects algébriques des fonctions et un module de géométrie dynamique qui permet de concevoir les fonctions comme modèles de dépendance. Des interactions sont possibles entre ces deux fenêtres. Une des caractéristiques de Casyopée est alors d'aider les usagers à relier ces deux aspects des fonctions dans une démarche de modélisation : créer un calcul géométrique exprimant la valeur d'une grandeur, explorer les valeurs numériques, choisir une grandeur adéquate comme variable et l'exporter dans le module symbolique. La dépendance fonctionnelle, si elle existe, entre cette variable et le calcul géométrique permet d'obtenir une fonction mathématique.



Notre groupe expérimente régulièrement auprès de classes d'élèves. Ces expérimentations permettent de faire évoluer le logiciel (ergonomie, développement de nouvelles fonctionnalités), mais aussi de proposer des approches nouvelles sur l'étude de fonctions en respectant les programmes. Nous attachons beaucoup d'importance à l'analyse de ces expérimentations et les compte rendus comportant fiche élève, analyse a priori, analyse des rédactions d'élèves, synthèse en classe avec un TNI, sont consignés sous forme de **mini sites**. Nos expérimentations montrent une utilisation raisonnée d'un logiciel.

La **diffusion** de la ressource Casyopée est une de nos préoccupations. Ainsi bon nombre d'outils sont mis à la disposition des enseignants :

- Les mini sites synthétisant les expérimentations réalisées par les membres du groupe centrés autour d'une classe de problèmes.
- Les vidéos réalisées lors de nos expérimentations. Elles sont des supports pour mieux cerner le travail de l'élève et de l'enseignant.
- Une brochure IREM qui est en cours d'écriture.

Les informations sur le logiciel et les travaux du groupe sont disponibles sur le site : http://casyopee.eu. Elles permettent à l'enseignant d'effectuer un choix raisonné d'un logiciel et de taches pour un enseignement efficace des fonctions. Elles permettent également à l'enseignant de mener une réflexion sur ses propres activités professionnelles.

REFERENCES

Gélis J.-M. (à paraître) A multi-dimensional framework for evaluating potentialities of digital environments about functions. *Technology, Knowledge and Learning*.

Lagrange J.-B., Artigue M. (2009) Students' activities about functions at upper secondary level: a grid for designing a digital environment and analysing uses. *Proceedings of 33rd Conference of the IGPME*, Thessaloniki, Greece, July 19-24.

Lagrange J.-B., Gelis J.-M. (2008) The Casyopée project: a CAS environment for students'better access to algebra. *Int. J. Continuing Engineering Education and Life-Long Learning* 18(5/6), 575-584.

Le Feuvre B. (2011) Des ressources riches pour la classe et la formation dans le cas d'un logiciel innovant : Casyopée. In Trouche L. et al. (Dir.) *Faire ensemble des mathématiques : une approche dynamique de la qualité des ressources pour l'enseignement. Actes des journées mathématiques de l'Institut français de l'Éducation*, 15 et 16 juin 2011, Lyon.

Minh T. K (à paraître) Les fonctions dans un environnement numérique d'apprentissage : étude des apprentissages des élèves sur deux ans. Canadian *Journal of Science, Mathematics and Technology Education.*

LES MACHINES MATHEMATIQUES COMME RESSOURCES : DE LA FORMATION A LA CLASSE

Michela MASCHIETTO*

Résumé – Cette contribution vise à la discussion sur des ressources et dispositifs de formation, en particulier sur le dispositif permettant de suivre et d'accompagner les usages de ressources par des enseignants et de soutenir l'évolution de leurs pratiques. Il présente certains aspects d'un projet de formation professionnelle sur le laboratoire de mathématiques, centré sur l'utilisation d'artefacts particuliers pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, nommés machines mathématiques.

Mots-clefs : formation, enseignant, laboratoire, machines mathématiques, ressources

Abstract – This paper contributes to the discussion about resources and teachers training, in particular about the way to support uses of resources by the teachers and their professional development. It presents some components of a practicing teachers training on mathematics laboratory, focused on the use of cultural geometrical artefacts called mathematical machines.

Keywords: training, teacher, laboratory, mathematical machines, resources

I. LES MACHINES MATHEMATIQUES DANS LE LABORATOIRE

Le contenu du poster concerne des aspects d'une formation continue sur le laboratoire de mathématiques, destinée aux enseignants de l'école primaire et secondaire (principalement jusqu'aux classes d'élèves de 15-16 ans). Le laboratoire de mathématiques, présent dans les réflexions sur l'enseignement des mathématiques depuis le début du XXe siècle (Maschietto et Trouche 2010), est considéré comme « une série de suggestions méthodologiques » visant la construction de signifiés mathématiques (AA.VV. 2004). Parmi les outils (par exemple logiciels, calculatrices, objets manipulables…) dans un laboratoire, on y trouve des 'machines mathématiques'[1] (Figure 1), artefacts concernant la géométrie (à gauche), développés par le *Laboratorio delle Macchine Matematiche*[2] (Bartolini Bussi et Maschietto 2006) et l'arithmétique (Figure 1, à droite).

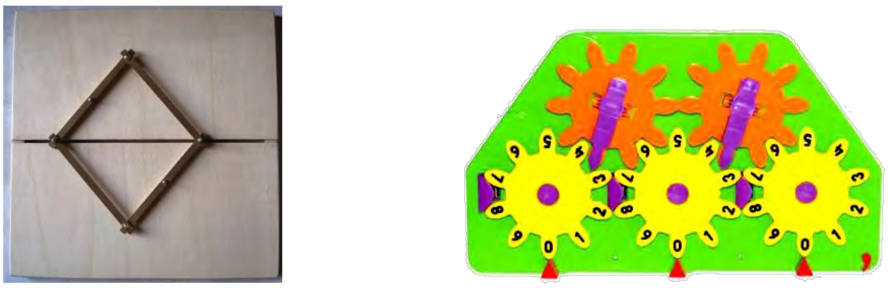


Figure 1 *– Pantographe pour la symétrie axiale, Zero+1*[3] *« pascaline »*

II. LA FORMATION : MACHINES MATHEMATIQUES ET GENÈSES

Les expériences au sein du MMLab avaient mis en évidence une certaine résistance de la part des enseignants de prendre en charge des sessions de laboratoire de mathématiques dans leurs classes, même s'ils avaient montré un certain intérêt dans les activités avec les machines

* Università di Modena e Reggio Emilia – Italie – michela.maschietto@unimore.it
[1] Voir http://www.dma.ens.fr/culturemath/
[2] MMLab, http://www.mmlab.unimore.it
[3] Produit par Quercetti, http://www.quercetti.it

© Maschietto M. (2012) Les machines mathématiques comme ressources : de la formation à la classe. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT6, pp. 939–942). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

mathématiques en accompagnant leurs élèves au MMLab (Maschietto et Martignone 2008). À partir de cela, une formation spécifique (Maschietto 2010) a été conduite dans le cadre du Projet Science et Technologies – Action 1 (années scolaires 2008/2009 et 2009/2010), financé par la Région Emilia-Romagna, avec l'objectif de favoriser la diffusion de la méthodologie du laboratoire. Elle proposait une approche au laboratoire en accord avec la théorie de la médiation sémiotique (Bartolini et Mariotti 2008) et l'approche instrumentale (Rabardel 1995). Le dispositif de formation a été organisé en deux phases : une première phase de formation en présence (7 séances) ; une deuxième phase d'expérimentation en classe de parcours d'apprentissage, conçus pendant et à la suite de la première phase. Les enseignants disposaient d'une plateforme qui a accompagné la formation (siège de Modena), avec l'objectif de soutenir le travail collaboratif (Maschietto 2010). Dans ce cadre, les machines mathématiques peuvent être considérées comme des ressources dans le sens d'une « forme du verbe re-sourcer : nourrir à nouveau, ou différemment » (Adler 2010 p. 25).

La première phase de la formation (Figure 2) a proposé les machines mathématiques comme des artefacts mathématiques, c'est-à-dire comme artefacts de la culture mathématique, avec des aspects historiques et épistémologiques 'naturellement' présents (Bartolini et Maschietto 2006).

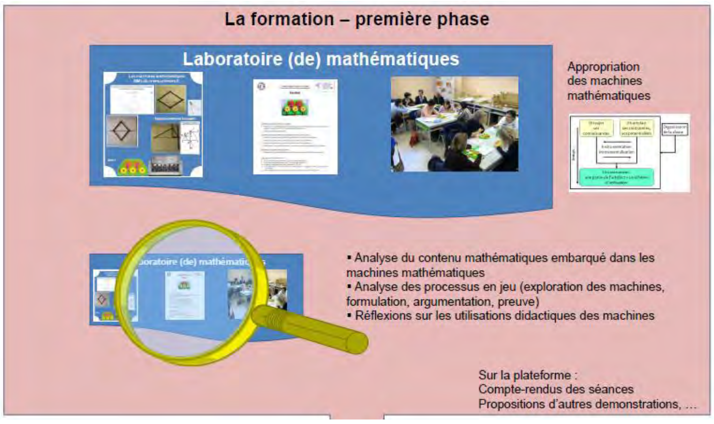


Figure 2 *– La première phase*

L'exploration des machines, guidées par des consignes spécifiques, a permis aux enseignants de faire le lien entre la machine et une partie du savoir mathématique. Un processus de genèse instrumentale a ainsi été sollicité et soutenu. Les enseignants ne se sont pas seulement appropriés les machines mathématiques (pour les transformations géométriques, pour tracer des sections coniques...) comme instruments pour faire des mathématiques (en développant des schèmes d'utilisation), mais ont aussi construit des schèmes d'exploration de ce type d'instrument.

> La méthodologie du travail semble désormais établie, nous discutons de l'objet comme artefact et comme instrument sans être liés à la fiche proposée.

Ensuite, une discussion collective suivant le travail en groupe permettait de pointer les processus en jeu (exploration, production de conjecture, argumentation et preuve), les potentialités didactiques, la méthodologie du laboratoire et les possibles implémentations en classe, comme en témoignent ces commentaires :

> Nous nous sommes mis au travail, en cherchant les solutions possibles et les échangeant entre nous, divisés par groupes, nous avons 'animé' la discussion, en réfléchissant sur les implications didactiques et idées… [...] nous sommes des étudiants et des enseignants en même temps…

> À notre avis, cette expérience peut faire réfléchir sur la valeur esthétique outre que formelle d'une preuve, sur les schémas mentaux de chacun, qui est porté à suivre aisément un type d'argumentation plutôt qu'un autre, et donc à la considérer plus efficace.

Pendant ce type de discussion, la machine mathématique semble devenir un instrument pour faire faire des mathématiques, c'est-à-dire pour faire construire des signifiés mathématiques aux élèves. En effet, cela semble être nourri par la réflexion didactique menée et par la métaréflexion des enseignants sur leur parcours de formation. On pourrait dire qu'une deuxième genèse instrumentale semble avoir démarré, concernant la machine comme ressource pour l'enseignant. Par rapport à la machine comme artefact, cette ressource est composée par la machine même, des schèmes d'utilisation et les analyses du travail que l'on peut proposer avec elle, ainsi que des processus d'apprentissage en jeu.

Dans la deuxième phase de la formation (Figure 3), une machine mathématique a été considérée comme une ressource dans un processus de genèse documentaire (Gueudet et Trouche 2009). Les enseignants, partagés en groupe selon le type de machine choisie (et donc des contenus mathématiques) pour le travail en classe (siège de Modena), ont mis en place des processus de conception de documents pour la classe, à partir des machines, des ressources disponibles dans la plateforme (diaporama des séances, fiches, ressources déposées par les enseignants lors de la première phase) et des ressources personnelles (fichier de géométrie dynamique, photos…) (Maschietto 2010).

Les journaux de bord rédigés par les enseignants sur les expérimentations ont favorisé un travail réflexif sur le laboratoire de mathématiques et sur les processus d'apprentissage des élèves.

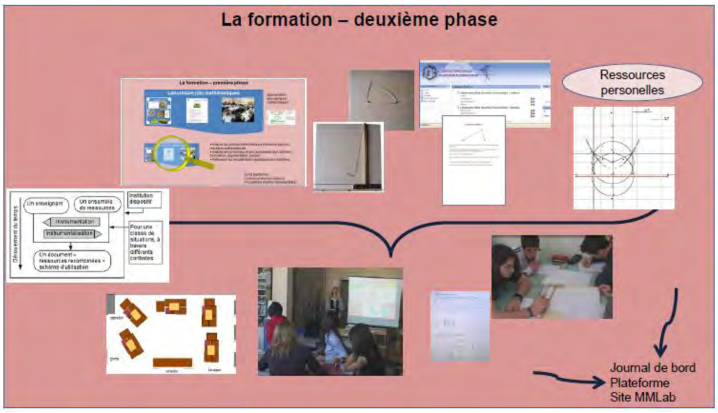


Figure 3 *– La deuxième phase*

III. CONCLUSIONS

La formation présentée dans cette contribution a permis aux enseignants d'expérimenter un parcours d'appropriation d'une machine mathématique comme ressource et de conception de documents pour les expérimentations en classe, dans le cadre du laboratoire de mathématiques. Sa structure semble avoir soutenu différentes genèses, en s'appuyant aussi sur la plateforme pour le travail collaboratif. L'analyse présentée ici concerne un niveau macro. Il faudrait l'articuler avec d'autres analyses, au moins sur deux axes. Le premier axe concerne l'analyse du passage des fiches de formation aux parcours pour les élèves, pour saisir les éléments sur lesquels les enseignants s'appuient davantage, pour un retour sur la formation même. Le deuxième axe concerne les retombés sur la pratique professionnelle de ce type de formation dans le long terme.

RÉFÉRENCES

Adler J. (2010) La conceptualisation des ressources. Apports pour la formation des professeurs de mathématiques. In Gueudet G., Trouche L. (Eds.) (pp. 23–37) *Ressources vive., Le travail documentaire des professeurs en mathématiques*. Collection Paideia. Rennes : Presses Universitaires de Rennes.

AA.VV. UMI (2004). In Anichini G., Arzarello F., Ciarrapico L., Robutti O. (Eds.) *Matematica 2003. La matematica per il cittadino. Attivita` didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di Matematica (Ciclo secondario)*. Lucca: Matteoni stampatore.

Bartolini Bussi M. G., Mariotti, M. A. (2008) Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. In English L. (Ed.) (pp. 746-783) *Handbook of inter. research in mathematics education*. NY: Routledge.

Bartolini Bussi M. G., Maschietto M. (2006) *Macchine matematiche: dalla storia alla scuola*. Collana UMI Convergenze. Milano: Springer.

Gueudet G., Trouche L. (2009) Towards new documentation systems for mathematics teachers? *Educational Studies in Mathematics* 71, 199-218.

Maschietto, M. (2010) Piattaforma e risorse per gli insegnanti. In USR E-R, ANSAS e IRRE E-R, Regione Emilia-Romagna. *Scienze e Tecnologie in Emilia-Romagna* vol. 2 , 98-105. Napoli: Tecnodid Editrice.

Maschietto M. (2010) Enseignants et élèves dans le laboratoire de mathématiques. In Gueudet G. et al. (Eds.) (pp. 9-17) *Actes des Journées mathématiques de l'INRP « Apprendre, enseigner, se former en mathématiques : quels effets des ressources ? »* Lyon : INRP Editions.

Maschietto M., Martignone F. (2008). Activities with the mathematical machines: pantographs and curve drawers. In Barbin E.et al. (Eds.) (pp. 285-296) *History and Epistemology in Mathematics Education: Proceedings of the fifth European Summer University*. Prague: Vydavatelsky Press.

Maschietto M., Trouche L. (2010) Mathematics learning and tools from theoretical, historical and practical points of view: the productive notion of mathematics laboratories. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education* 42 (1), 33-47.

Rabardel P. (1995) *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains*. Paris : Armand Colin.

PRODUIRE DES RESSOURCES POUR LES ENSEIGNANTS A L'ARTICULATION ECOLE-COLLEGE

Marie-Jeanne PERRIN-GLORIAN*

Résumé – Questions méthodologiques posées par l'élaboration de ressources pour les enseignants dans la perspective de penser et gérer la continuité de l'enseignement des nombres, des mesures et de la géométrie au long de la scolarité obligatoire.

Mots-clefs : ressources pour les enseignants, liaison primaire-secondaire, formation des enseignants, nombres, géométrie

Abstract – Methodological issues in elaborating resources for teachers in order to conceive the continuity of the teaching of numbers, measures and geometry along compulsory scholarship.

Keywords: resources for teachers, continuity between primary and secondary school, teacher training, numbers, geometry

I. UN DOUBLE OBJECTIF

L'affiche présente des questions liées à l'élaboration d'un projet de recherche dans la double problématique de produire des ressources pour l'enseignement et la formation des maîtres et de rechercher une progression cohérente des contenus fondamentaux de la scolarité obligatoire. Ce projet cherche aussi à tirer les leçons des résultats de recherches qui ont pointé des apprentissages insuffisamment pris en compte dans l'enseignement primaire actuel, notamment les connaissances spatiales pour l'apprentissage de la géométrie (Berthelot et Salin 2001), l'articulation entre l'enseignement des nombres et celui du système métrique (Chambris 2008).

La transition entre l'école et le collège est un point sensible, souvent vécu par les élèves comme une rupture. Cette rupture est nécessaire pour la progression des élèves qui doivent passer à des définitions plus élaborées des objets mathématiques pour poursuivre leur scolarité, et du fait que les mathématiques sont enseignées par des professeurs généralistes en primaire et par des professeurs spécialistes à partir de la sixième. Pour éviter les échecs, en particulier des élèves de milieux défavorisés, cette rupture devrait être gérée par le système d'enseignement. Or, malgré les divers textes institutionnels concernant la liaison CM2-6ème et le socle commun, les programmes d'enseignement ne sont pas pensés comme une progression au long de la scolarité commune. La formation des enseignants du primaire et du collège reste très séparée et les enseignants des deux niveaux n'ont que très peu d'occasions d'échanger en profondeur sur le contenu de leur enseignement. Elaborer des ressources en partie communes est un moyen d'en fournir.

II. QUESTIONS DE RECHERCHE

Notre projet vise ainsi à élaborer des ressources permettant de mieux prendre en charge la continuité de l'enseignement des mathématiques de 6 à 15 ans sur les contenus fondamentaux de l'école primaire (les nombres en relation avec les grandeurs et les mesures, la géométrie) mais en pensant la manière dont ils sont repris et articulés avec des contenus nouveaux au collège. Ces ressources doivent être compatibles avec les programmes sans s'y limiter et avoir

* LDAR, université Paris-Diderot et université d'Artois – France – marie-jeanne.perrin@univ-paris-diderot.fr
Le groupe qui élabore le projet comprend aussi des enseignants chercheurs d'autres laboratoires, notamment le LML (Laboratoire de Mathématiques de Lens).

© Perrin-Gorian M.-J. (2012) Produire des ressources pour les enseignants à l'articulation école-collège. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT6, pp. 943–944). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

une compatibilité suffisante avec les pratiques ordinaires des enseignants pour qu'ils puissent les y intégrer mais leur amener suffisamment d'éléments de réflexion et de questionnement pour qu'ils puissent les faire évoluer. La question de l'utilisation de la ressource pose aussi celle de la formation des maîtres. Notre problématique comprend donc des questions liées à l'élaboration de la ressource, à son utilisation par les enseignants et aux possibilités d'évolution de leurs pratiques, à la formation initiale et continue, à l'accompagnement nécessaire à la diffusion de la ressource, ainsi que des questions sur des points spécifiques soulevés par les problématiques précédentes. En arrière-plan se pose aussi la question des liens entre les mathématiques du quotidien pour traiter les problèmes concrets de la vie courante ou professionnelle et les mathématiques théoriques. Des débuts de réalisation sont en cours sur la numération (Tempier, ce volume) et la géométrie.

III. PROBLEMES METHODOLOGIQUES ET THEORIQUES

Quatre catégories de publics sont concernées : les enseignants d'une part, les formateurs et assimilés d'autre part, chacune de ces catégories se subdivisant en polyvalents et spécialistes. Les textes doivent être les plus courts et les plus informatifs possibles et facilement accessibles, par exemple sous la forme d'un site internet. L'organisation du site doit permettre d'identifier facilement la nature des textes à partir d'une entrée par les contenus et par le niveau scolaire. Les enseignants doivent trouver des documents directement utilisables pour la classe mais ces documents doivent les inciter à questionner leurs pratiques pour approfondir leur réflexion. Pour les contenus, se pose de façon cruciale l'organisation des liens entre des entrées « situations », « techniques » et « technologies » (avec en particulier des formulations directement utilisables avec les élèves et des exercices) et « théories », contenant des références mathématiques, didactiques, épistémologiques ou historiques.

Elaborer une telle ressource ne peut se concevoir sans un travail collaboratif avec des enseignants mais il faut aussi étudier comment d'autres enseignants peuvent s'en emparer, c'est pourquoi nous pensons travailler dans plusieurs cercles : le cercle des chercheurs qui, au final mènent les analyses, le cercle collaboratif des chercheurs et des enseignants qui participent à l'élaboration de la ressource, qui expérimentent les situations et les formulations des énoncés de savoir pour les élèves et un cercle plus large d'enseignants qui ne participent pas directement à l'élaboration de la ressource mais qui peuvent l'utiliser et réagir. L'organisation des différentes collaborations et du recueil de données sont à définir.

Le projet se situe dans le cadre d'une ingénierie didactique de développement (Perrin-Glorian 2011). Il soulève de nombreux problèmes méthodologiques et théoriques tant pour l'élaboration du site que des recherches associées (quelles données, comment les recueillir, quels outils d'analyse ?) et nécessite l'articulation des différents cadres théoriques des recherches existantes sur lesquelles il compte s'appuyer, concernant les contenus choisis, les pratiques ordinaires des enseignants, le travail collaboratif, l'intégration de ressources. Un des objectifs théoriques du projet est donc aussi d'avancer dans l'articulation de ces divers cadres.

REFERENCES

Berthelot R., Salin M.-H. (2001) L'enseignement de la géométrie au début du collège. *Petit x* 56, 5-34.

Chambris C. (2008) *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire.* Thèse de doctorat. Université Paris-Diderot (Paris 7).

Perrin-Glorian M.-J. (2011) L'ingénierie didactique à l'interface de la recherche avec l'enseignement. In Margolinas C.et al. (Eds.) (pp. 57-78) *En amont et en aval des ingénieries didactiques.* Grenoble : La pensée sauvage.

ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES AUX NIVEAUX POSTSECONDAIRE ET SUPERIEUR

Compte-rendu du Groupe de Travail n°7 – EMF2012

Nadia AZROU[*] – Stéphanie BRIDOUX[**] – Denis TANGAY[***]

I. INTRODUCTION

Le groupe de travail s'est penché sur la question de l'enseignement des mathématiques aux niveaux postsecondaire et supérieur dans la continuité des échanges menés à EMF2009, dans le groupe de travail sur le Thème 7. En nous appuyant sur le thème du Colloque EMF2012, *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le XXI*e *siècle*, il nous a semblé important de prendre en compte la complexité et la variabilité des systèmes avec lesquels le citoyen doit composer au jour le jour. Ceux-ci requièrent en effet une flexibilité et une adaptabilité de la pensée sollicitant ce que, dans le GT7 d'EMF2009, nous avons appelé les « aptitudes et compétences mathématiques transversales » (c'est-à-dire plus ou moins indépendantes des sujets mathématiques spécifiques) : aptitudes aux raisonnements analogique, inductif, abductif et déductif, maîtrise des structures logiques universelles, capacité à abstraire, à théoriser, à modéliser, à poser et résoudre un problème…

Dans ce contexte, le groupe s'est intéressé à ces défis de la formation aux mathématiques avancées : comment les relever sans exacerber les problèmes bien concrets que sont la désaffection des jeunes pour les filières scientifiques ou encore, les discontinuités de la transition entre le secondaire et le supérieur. Tout comme dans le GT7 d'EMF2009, les discussions, échanges et réflexions menés dans ce groupe se sont vite focalisés sur ces questions de transition telles que les ruptures dans les contenus, dans le niveau de formalisme et d'abstraction requis par l'enseignement supérieur, dans les méthodes d'enseignement et d'évaluation, etc.

Le travail mené au sein du groupe a permis de faire émerger trois angles d'attaque distincts, qui sont néanmoins restés imbriqués dans les présentations et les discussions :

- *Un point de vue didactico-épistémologique sur les transitions (secondaire-postsecondaire)*
  Étude de savoirs et sujets spécifiques orientée vers l'enseignement. Abord didactique davantage axé sur les ingénieries et les modalités d'enseignement, et proposant des pistes de remédiation aux difficultés des étudiants répertoriées par la recherche.

- *Un point de vue plus cognitif sur les transitions*
  Aptitudes et compétences mathématiques « transversales » à développer, avec leurs difficultés sous-jacentes : logique, démonstration, formalisme, capacité à abstraire... Abord didactique davantage orienté vers l'analyse de productions d'étudiants.

- *Un point de vue plus théorique et institutionnel sur les transitions*
  Programmes et organisation curriculaire, méthodes pédagogiques, avec un regard sur l'organisation du travail attendu chez les étudiants.

[*] Centre universitaire Yahia Farès de Médéa – Algérie – nadiazrou@gmail.com
[**] Stéphanie BRIDOUX, Université de Mons – Belgique – stephanie.bridoux@umons.ac.be
[***] Université du Québec à Montréal – Canada – tanguay.denis@uqam.ca

© Azrou N., Bridoux S., Tanguay D. (2012) Enseignement des mathématiques aux niveaux postsecondaire et supérieur – *Compte-rendu du Groupe de Travail n°7*. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21*e *siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT7, pp. 945–952). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

II. UN POINT DE VUE DIDACTICO-EPISTEMOLOGIQUE SUR LA TRANSITION SECONDAIRE-SUPERIEUR

Suivant un angle d'attaque didactique mais aussi épistémologique, le groupe s'est penché sur les questions de transition entre le secondaire et le supérieur en abordant les problèmes posés par les exigences imposées par ces deux institutions dans la perspective d'agir sur, voire de modifier, l'enseignement de certaines notions du supérieur. L'exigence accrue en matière de formalisme à l'université avait déjà fait l'objet de longs échanges dans le GT7 d'EMF2009. L'étude des spécificités des notions, celle de l'écart entre les niveaux de conceptualisation requis au secondaire et au supérieur, les différences dans les mises en fonctionnement attendues des élèves et des étudiants, avaient amené le groupe à mettre en évidence l'importance d'un travail sur le sens des objets. Il s'agirait alors de le mener en parallèle avec l'introduction du formalisme associé, de manière à permettre un travail tant sémantique que syntaxique sur les concepts enseignés.

Les deux premières présentations ont pris appui sur cet aspect pour proposer des séquences d'enseignement visant à réduire les difficultés des étudiants avec le formalisme, dans les contextes spécifiques de l'enseignement de la topologie et celui de la dualité en algèbre linéaire, en première année universitaire en Belgique.

Dans sa contribution, Bridoux s'est intéressée à la possibilité d'agir sur un enseignement de topologie soumis à des contraintes institutionnelles fortes — notamment une utilisation massive du registre symbolique — pour amener les étudiants à réaliser de manière autonome certains exercices. Les caractères formalisateur, unificateur et généralisateur (au sens de Robert 1998) des notions d'intérieur, d'adhérence, d'ouvert et de fermé rendent leur introduction délicate, notamment parce qu'il est difficile de proposer aux étudiants un problème (ou une situation fondamentale au sens de Brousseau 1998) dans lequel ces notions apparaissent comme l'outil optimal de résolution. En s'appuyant sur une analyse historique et épistémologique de l'émergence des premières notions de topologie, complétée par une analyse de quelques manuels, Bridoux propose d'introduire dans l'enseignement les notions de points intérieurs et adhérents à partir de différentes formulations, plus ou moins formelles, en menant en parallèle un travail dans le registre graphique. Ce travail de formalisation progressive permet ensuite d'intégrer de manière naturelle et justifiée le symbolisme lié aux notions visées. L'enseignant assure la démarche en jouant sur la diversité des exemples traités et sur la manière dont il intervient dans les phases de mises au travail des étudiants et de correction des exercices proposés. L'analyse des productions des étudiants aux évaluations montre une amélioration significative dans les tâches de manipulation des définitions.

Suivant un angle davantage institutionnel, De Vleeschouwer aborde la transition secondaire-supérieur en prenant appui sur les travaux de Chevallard (1989). En combinant le concept de contrat didactique avec une perspective institutionnelle, De Vleeschouwer soutient que certaines difficultés des étudiants en début de parcours universitaire résultent des spécificités du contrat didactique en vigueur à l'université et ce, à différents niveaux. Après avoir identifié les caractéristiques du contrat didactique concernant l'enseignement de la dualité en première année universitaire, elle en présente un enseignement expérimental qu'elle a proposé à des étudiants dans le contexte de séances (facultatives) de remédiation, organisées pour des étudiants d'une filière mathématique. Cet enseignement prend notamment appui sur l'utilisation d'un méta-langage qui rend explicites certaines règles portant sur la manipulation des formes linéaires. De Vleeschouwer propose également des exercices qui nécessitent des changements de cadres et la production d'exemples, amenant les étudiants à réaliser un travail qui requiert de se conformer aux nouvelles attentes de l'institution « université ». L'analyse des productions des étudiants montre qu'une majorité d'entre eux semble entrer dans le nouveau contrat.

En ce qui concerne le formalisme, la présentation de Bridoux montre à quel point une manipulation prédominante du registre symbolique, même appuyée par l'utilisation d'autres registres tels que le registre graphique ou celui de la langue naturelle, n'est pas porteuse de sens pour les étudiants. Même s'ils parviennent après l'expérimentation à réaliser de manière autonome les tâches de manipulation des définitions du cours théorique, leurs performances sont considérablement réduites sur des tâches plus complexes qui nécessitent de mettre en relation les notions de topologie avec d'autres notions.

Concernant le travail mathématique attendu des étudiants dans le supérieur, De Vleeschouwer montre que le fait d'avoir des représentations dans différents cadres de travail et un stock suffisant d'exemples dans ces cadres (les fonctions, les vecteurs, les matrices, …) contribue à donner du sens aux notions « abstraites » qui sont enseignées, telles que la dualité.

Les discussions qui ont suivi ces présentations sont revenues sur le problème récurrent des exigences en matière de formalisme dans l'enseignement universitaire. En particulier, la nécessité de préciser ce que recouvre le terme « formalisme » a émergé. Est-ce la même chose que le symbolisme ? En effet, les présentations ont montré que les concepts visés sont caractérisés, au sein des propositions d'ingénieries, dans un langage formel non symbolique (caractérisations en langue naturelle chez Bridoux, recours aux commentaires méta-mathématiques pour illustrer les propriétés des objets chez De Vleeschouwer). Le groupe s'est donc interrogé sur la nécessité de recourir au registre symbolique dans la formalisation des concepts. Quelle est sa fonction ? Peut-on être formel sans recourir aux symboles ? Le groupe n'a pas de réponse ferme à ces questions et reconnaît de plus le besoin de mieux étudier le recours au formalisme dans l'enseignement, tant secondaire que postsecondaire, pour tenter d'inférer quelques éléments de réponse. Un projet d'étude didactique a été proposé : analyser sous ce rapport les discours, oral et écrit, des enseignants, des enseignements. Le groupe a de nouveau mis en évidence l'importance à accorder aux spécificités des notions pour pouvoir interroger le niveau de formalisme à introduire à chaque niveau d'enseignement.

Ce dernier aspect est de nouveau apparu avec la contribution de Grenier, à propos du concept de récurrence. En mathématiques, le raisonnement par récurrence ou par induction a cette double spécificité de permettre la construction des objets et d'être un outil de preuve. Une première étude menée sur la transposition de la récurrence dans l'enseignement secondaire et à l'université montre que cette notion est enseignée comme un type de raisonnement ou de preuve. Une analyse de manuels (aux niveaux lycée et universitaire) met en évidence des variantes dans l'écriture du principe de récurrence telles que le nombre d'étapes, l'explicitation du principe ou la présence (parfois erronée) ou non de quantifications. Grenier présente ensuite une étude menée depuis plusieurs années auprès d'étudiants scientifiques universitaires et d'enseignants de mathématiques français à propos du concept de récurrence. Cette étude révèle que la double spécificité du concept est très mal comprise et même parfois absente des conceptions des étudiants et des enseignants. Pour tenter d'améliorer la compréhension du concept, Grenier propose quelques problèmes visant à modifier les conceptions erronées ou mal adaptées, que son étude a mises en évidence.

La déficience des connaissances des étudiants en logique et en théorie des ensembles au début du supérieur et même dans les années supérieures de l'enseignement universitaire a de nouveau été discutée, comme dans le GT7 d'EMF2009. Tous les participants s'accordent pour dire qu'il y a des manques, que certains aspects sont peu approfondis dans l'enseignement secondaire et universitaire, que les difficultés dans ces deux domaines mathématiques y sont insuffisamment prises en compte, mais toute la question réside dans la manière de distiller — voire au besoin d'institutionnaliser — les connaissances nécessaires au fur et à mesure de l'enseignement.

En montrant de quelle manière le concept de récurrence est présenté dans les manuels et comment il est perçu par de nombreux étudiants, des questions sur le rôle du professeur et plus précisément, sur ce qui doit (devrait) être explicitement dit et mis en évidence (ou non) dans l'enseignement ont également émergé. Jusqu'où le discours oral ou écrit doit-il aller pour spécifier des connaissances telles que le statut des lettres (variable, paramètre, inconnue, …), les quantifications associées, les rôles et statuts des définitions, le concept d'implication (selon qu'elle soit quantifiée ou non, qu'on doive déterminer sa négation, qu'elle soit formulée en termes de condition nécessaire, de condition suffisante, d'inclusion ensembliste, etc.), par exemple ? Peut-être même serait-il souhaitable, de la part de l'enseignant, d'aller au-delà de l'explicitation, jusqu'à l'explication… Quel rôle a alors la formation des maîtres pour rendre les enseignants avertis, sensibles à ces questions mais aussi bien sûr minimalement compétents en ces domaines ? Quels pourraient être les apports des commentaires méta-mathématiques sur les apprentissages des étudiants et en particulier, sur la construction du sens à donner à ces concepts dans l'enseignement ?

III. UN POINT DE VUE COGNITIF

Jusqu'à pésent, les présentations et les échanges qui ont suivi se sont davantage centrés sur les spécificités des notions et sur des questions liées à leur introduction, en parallèle avec le problème du sens à leur donner. Suivant un angle d'attaque plus cognitif, le groupe a poursuivi son travail en abordant les questions liées à l'utilisation du formalisme et la prise en compte, dans l'enseignement, des connaissances en logique et en théorie des ensembles. Ont ainsi suivi des contributions dans lesquelles l'accent était placé sur le type de travail mathématique attendu des étudiants, par exemple dans les justifications ou les raisonnements requis par les situations et problèmes proposés.

Ces aspects sont abordés dans la contribution de Ghedamsi et Chellougui dans le domaine de l'analyse. Selon les deux proposantes, les situations qui intègrent une phase expérimentale permettent un travail heuristique sur des objets spécifiques, avec la possibilité de produire des preuves pragmatiques. Ces situations ouvrent la voie à des activités de conjecture, de calculs, etc., qui permettraient ensuite un retour possible et efficace au formalisme. Dans cette perspective, Ghedamsi et Chellougui ont élaboré et expérimenté une situation d'enseignement sur le thème de l'antiphérèse de $\sqrt{2}$. Ce choix est lié au fait que, pour les deux proposantes, le recours aux méthodes d'approximations numériques offre des possibilités d'organiser des situations à caractère a-didactique relatives aux concepts de limite, de suite et de fonction. L'analyse a priori de la situation prévoit de prendre appui sur la densité des rationnels dans les réels, pour ensuite travailler à partir des registres graphique et numérique sur un réseau de savoirs tels que la convergence d'une suite, le théorème du point fixe, les fonctions contractantes, les segments emboîtés et le théorème des accroissements finis. Le déroulement prévu intègre des phases de débat. L'analyse a posteriori de l'expérience menée auprès d'étudiants tunisiens de sciences en première année universitaire montre que la situation a essentiellement permis un travail exploratoire sur la nature des nombres et l'approximation de racines irrationnelles. Le milieu à la disposition des étudiants a néanmoins permis un travail heuristique caractérisé par la formulation de preuves pragmatiques à partir de connaissances graphiques et algébriques. La discussion en groupe a entre autres porté sur certaines modalités didactiques des présentation et gestion de la situation en classe, notamment sur la possibilité d'ouvrir la situation à des approches d'approximation de $\sqrt{2}$ plus strictement numériques, certes plus pauvres mais par ailleurs plus simples et plus facilement accessibles.

La contribution de Najar soulève à nouveau les difficultés de gestion du langage ensembliste formel et des connaissances en logique dans l'enseignement universitaire. L'analyse des réponses à un test proposé à de bons étudiants tunisiens de sciences montre que les savoirs visés dans les exercices, tels que les sous-espaces vectoriels, les applications linéaires ou la notion d'injectivité, sont en général correctement mobilisés. Toutefois, des difficultés dans la gestion du formalisme en jeu et/ou une identification erronée de certains des objets symbolisés provoquent parfois des blocages dans le travail des étudiants ou encore, les amènent à proposer des réponses dépourvues de sens ou incorrectes d'un point de vue logique. Les analyses menées par Najar montrent que les étudiants sont fortement démunis face à la manipulation des écritures symboliques qui s'érigent en véritables obstacles pour mettre en œuvre les connaissances apprises. Une raison peut être la non prise en compte des connaissances en logique et en théorie des ensembles dans l'enseignement secondaire tunisien.

Ce dernier constat, qui est loin d'être spécifique à la Tunisie, soulève le débat de la nécessité d'intégrer au fil de l'enseignement le langage logique et ensembliste dans l'activité mathématique. Se pose aussi la question des moyens de gestion de l'enseignant pour expliciter des connaissances d'ordre pratique, nécessaires au fonctionnement du savoir mathématique. Le groupe s'interroge de plus sur les modalités à mettre en œuvre dans la classe pour que ces connaissances deviennent disponibles chez les élèves et les étudiants. Ces questions prolongent les discussions précédemment menées dans le groupe.

La communication de Azrou s'inscrit dans la continuité de ces échanges en montrant les difficultés des étudiants algériens sur ces mêmes aspects. Azrou met en évidence un certain nombre de manques dans l'enseignement secondaire et universitaire susceptibles de rendre difficile la réalisation d'exercices de démonstration, notamment dans le cours d'algèbre à l'université. À partir de l'analyse de copies d'étudiants en deuxième année universitaire d'une filière mathématique, Azrou montre qu'à ce niveau d'enseignement, la réalisation de preuves reste problématique et que les faiblesses des connaissances en logique et en théorie des ensembles pourraient en constituer la principale cause. Le groupe s'est par ailleurs interrogé sur le rôle qu'a la façon de présenter les problèmes, de les formuler, notamment au regard du formalisme adopté : l'enseignant doit-il ou non expliciter telle ou telle quantification, le statut de telle ou telle variable, selon qu'il s'agisse de parcourir un ensemble, de fixer un élément quelconque dans cet exemple, d'expliciter ou non le caractère générique de cet élément fixé, de considérer un paramètre pour une sous-question du problème ou pour la totalité du problème (paramètre local versus paramètre global), etc. ? L'enseignant peut-il ou doit-il chercher à clarifier ces aspects dans sa rédaction ? Ou la capacité de l'étudiant à prendre en charge de lui-même cette clarification ne fait-elle pas partie des compétences qu'il a à acquérir ?

IV. UN POINT DE VUE THEORIQUE ET INSTITUTIONNEL

Le groupe se penche ici sur des aspects plus théoriques et institutionnels des transitions à partir des deux dernières communications. Ces aspects concernent le niveau d'abstraction et le degré de formalisme associé dans les cours théoriques, ainsi que les apports du travail du mathématicien chercheur dans l'enseignement des mathématiques au niveau universitaire.

Dans sa communication, Mili présente une typologie des difficultés rencontrées par les étudiants dans l'apprentissage de l'algèbre abstraite, plus précisément en théorie des corps.

Pour ce faire, il s'appuie sur une situation extraite d'une séquence didactique proposée à des étudiants québécois de niveau collégial (Cégep), ainsi que sur des entretiens avec des étudiants qui s'expriment sur leurs difficultés lors de l'expérimentation. Un premier obstacle à franchir dans la situation réside dans la lecture de l'énoncé. Celui-là tient au *niveau d'abstraction.* Les entretiens montrent en effet le malaise des étudiants qui ne parviennent pas à rattacher l'énoncé à une forme quelconque de réalité. Une autre difficulté repérée par Mili tient à ce que la situation proposée nécessite de *recourir aux définitions*. Il note que l'usage des définitions dans le langage courant présente des différences avec l'usage qui en est fait en mathématiques. Alors que dans le premier, les définitions ont un caractère limitatif et abréviatif, elles apparaissent dans le second comme une aide pour identifier et manipuler des caractéristiques universelles des objets. *L'absence de représentation graphique* s'est également érigée en obstacle dans l'expérimentation. Dans le domaine de l'algèbre abstraite, en effet, les conversions entre les différents registres de représentations sémiotiques (au sens de Duval 1995) semblent ne s'effectuer qu'entre celui de la langue naturelle et le registre symbolique, ce dernier étant source de nombreuses difficultés reconnues chez les étudiants. Enfin, la phase de validation de l'exercice proposé aux étudiants, qui nécessite de *produire une démonstration*, a elle aussi engendré beaucoup de difficultés. Comme pour les présentations de Azrou et de Guedamsi-Chellougui, le groupe a discuté de certaines des modalités didactiques du problème soumis aux étudiants, sans parvenir ici non plus à des conclusions nettes : aurait-on pu poser le problème pour un corps, isomorphe ou non au corps proposé, dans lequel les éléments — leurs noms, les symboles associés — et les opérations en cause auraient créé moins d'interférences avec ceux de l'arithmétique usuelle ? Aurait-on pu traiter d'un problème analogue pour des groupes avant de le faire pour des corps ? Poser le problème pour un corps moins « réduit », par exemple $\mathbb{Z}_5$ plutôt que $\mathbb{Z}_2$, aurait-il permis une meilleure prise sur le problème par les étudiants ? Etc.

La dernière communication a permis d'orienter les discussions vers un aspect encore peu exploré dans les précédents groupes sur l'enseignement postsecondaire des colloques EMF. Winsløw se penche en effet sur le travail de l'enseignant chercheur en mathématiques et sur son influence dans l'enseignement universitaire. Il aborde ce questionnement à partir des notions d'*étude* et de *recherche*. Les définitions de ces termes proposées par Winslow s'appuient sur les rapports qu'elles entretiennent avec les savoirs mathématiques. Ces rapports sont étudiés à partir de deux objets introduits par Chevallard (2007) qui sont les *médias*, caractérisés par une intention (d'informer, de représenter,…) et les *milieux*, caractérisés par l'absence d'intention. Ainsi la *recherche* apparaît comme « chercher un savoir dans un milieu » et l'*étude* est définie par « chercher un savoir dans des médias ». Winsløw se demande ensuite quelles sont les possibilités, les avantages et les contraintes, pour les étudiants, de participer au travail du mathématicien ou à des activités similaires. Sa présentation a donné l'exemple d'un dispositif qui prend la forme de *projets thématiques*, dans lesquels le travail à accomplir par les étudiants se rapproche de celui du chercheur-mathématicien. Ces projets, soumis à des étudiants en première et deuxième années de licence au Danemark, proposent des problèmes liés à la théorie du cours. Ils nécessitent de la part des étudiants une activité de *recherche*, mais également une activité d'*étude* qui s'effectue dans des *médias* qui ne sont pas nécessairement ceux proposés par le cours. Winsløw soulève d'ailleurs cette question, qui semble être spécifique de l'enseignement des mathématiques : pourquoi celui-ci disqualifie-t-il presque systématiquement l'activité d'*étude* — hormis celle qui se fait dans les *médias* imposés par le cours — de l'étudiant en résolution de problème jusqu'à un niveau relativement avancé ? Ou autrement dit, pourquoi l'étudiant doit-il attendre son travail de thèse (à la maîtrise ou au doctorat) avant d'être autorisé à chercher de lui-même des solutions dans les écrits déjà existants ? Le travail d'*étude* serait-il négligé par l'enseignement des mathématiques avant le supérieur avancé ?

V. CONCLUSION

Nous remercions les présentateurs et les autres participants au GT7. Les nombreux échanges ont été riches et se sont déroulés dans une excellente ambiance. Nous avons noté la convergence des prises de position chez l'ensemble des participants, permettant aussi à chacun d'exprimer ses idées. Nous notons que trois thématiques ont constamment émergé des présentations et des discussions. Celles-ci concluent ce compte-rendu.

- Les exemples de contenus spécifiques enseignés dans le supérieur issus des présentations ont tous montré des difficultés récurrentes en matière de formalisme. Le groupe a soulevé la nécessité de mieux spécifier ce que recouvre le « formalisme », en particulier le rôle du registre symbolique dans la formalisation des notions enseignées. Le groupe s'accorde aussi sur l'importance d'un travail sémantique sur les notions enseignées, aussi bien dans le secondaire que dans le supérieur, à mener en parallèle avec un travail syntaxique.
- Quelques pistes de remédiation sont apparues pour prendre en charge les difficultés des étudiants en logique et en théorie des ensembles, telles que des propositions d'ingénieries, intégrant du « méta » pour certaines, et les Situations de Recherche pour la Classe (SiRC, voir par exemple Grenier, 2006). Ces dernières semblent également permettre de travailler sur le développement d'aptitudes plus « transversales » aux mathématiques. Le groupe est d'avis que les langages logique et ensembliste pourraient déjà être pris en compte, d'une certaine manière, dans l'enseignement secondaire, et que la formation des maîtres à ce niveau doit en tous cas très certainement les sensibiliser à ces questions. Nous autres formateurs avons donc un rôle à jouer à cet égard.
- Le rôle de l'enseignant et ce qu'il devrait expliciter ou non dans ses cours a été largement discuté, en particulier le rôle du discursif et celui des commentaires méta-mathématiques. Toutefois, les présentations ont peu ou pas abordé les pratiques enseignantes. Nous espérons que cette composante « enseignant », surtout dans l'enseignement supérieur, pourra davantage être étudiée à EMF 2015.

En conclusion, le groupe sur l'enseignement des mathématiques aux niveau post-secondaire et supérieur a poursuivi son travail dans la continuité des précédents colloques tout en précisant les questions liées aux transitions, en leur apportant certaines pistes de réponses et en ouvrant la voie à de nouveaux questionnements, qui pourront être abordés dans les colloques à venir.

REFERENCES

Azrou N., Tanguay D., Vandebrouck F. (2009) Bilan des travaux et discussions du Groupe de Travail 7 : Enseignement des mathématiques aux niveaux postsecondaire et supérieur. In Kuzniak A., Sokhna M. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et développement, enjeux de société et de formation. Actes du colloque EMF2009. Revue internationale Francophone*, numéro spécial. http://fastef.ucad.sn/EMF2009/colloque_math.html

Bloch I., Kientega G., Tanguay D. (2006) Synthèse du Thème 6 : Transition secondaire / postsecondaire et enseignement des mathématiques dans le postsecondaire. In Bednarz N., Mary C. (Eds) *Actes du Colloque EMF2006, Université de Sherbrooke (Québec),* mai 2006.

Brousseau G. (1998) *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chevallard Y. (2007) Un concept en émergence : la dialectique des médias et des milieux. In Gueudet G., Matheron Y. (Eds) (pp. 344-366) *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques, année 2007*. Paris : ARDM et IREM de Paris 7.

Chevallard Y. (1989) Le concept du rapport au savoir. Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel. *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique*, 211-235. LSD-IMAG, Grenoble.

Duval R. (1995) *Sémiosis et pensée humaine : registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne : Peter Lang.

Grenier, D. (2006) Des problèmes de recherche pour l'apprentissage de la modélisation et de la preuve en mathématique. *Actes du colloque de l'Association Mathématique du Québec* (AMQ), Sherbrooke (Québec).

Robert A. (1998) Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en didactique des mathématiques* 18 (2), 139-190.

CONTRIBUTIONS AU GT7

AZROU N. – Difficultés d'étudiants universitaires débutant avec la preuve.

BRIDOUX S. – Notions de topologie : élaboration de leviers didactiques à intégrer dans un enseignement pour favoriser les apprentissages des étudiants.

DE VLEESCHOUWER M. – Un méta-langage pour aider à la transition secondaire-université.

GHEDAMSI I., CHELLOUGUI F. – Antiphérèse de $\sqrt{2}$: introduction d'une dimension a-didactique dans l'enseignement de l'analyse à l'université.

GRENIER D. – La récurrence : concept mathématique et principe de preuve.

MILI I. – Identification d'obstacles inhérents à l'apprentissage de l'algèbre abstraite. Présentation d'un cadre théorique.

NAJAR R. – L'obstacle du formalisme au début du supérieur.

WINSLØW C. – Recherche et étude en mathématiques supérieures.

DIFFICULTÉS D'ÉTUDIANTS UNIVERSITAIRES DÉBUTANT AVEC LA PREUVE

Nadia AZROU*

Résumé – Cette étude a pour but d'identifier et d'analyser les difficultés des étudiants algériens de deuxième année universitaire à travailler des preuves. En effet, les cours de mathématiques de première année deviennent très difficiles aussi bien pour les étudiants qui se spécialiseront en mathématiques par la suite que pour les étudiants de la plupart des filières d'ingénieurs, à cause du fait que presque tous les exercices proposés portent sur la preuve. Les enseignants ont aussi leur part de problèmes à faire passer ces cours, particulièrement depuis la dernière réforme algérienne par laquelle le cours d'algèbre a été totalement supprimé du programme[1] du lycée, ainsi que les chapitres de logique mathématique et de théorie des ensembles. Cette situation problématique n'est pas propre à l'Algérie : plusieurs recherches traitant de la preuve ont montré combien les tâches de démonstration, omniprésentes dans les cours d'algèbre abstraite à l'université, étaient épineuses pour les étudiants. Nous allons présenter les difficultés identifiées sur des copies d'examens d'étudiants de deuxième année de filière mathématique.

Mots-clefs : preuve, réforme, programme, difficultés, université

Abstract – The present study aims at clarifying and analyzing the difficulties encountered by students when they cope with proof in their first year of university. First year courses for both future mathematicians and engineers become very difficult because of the omnipresence of proof in the exercises. Teachers are also facing problems when dealing with proof in their teaching, in particular since the most recent reform cut the algebra course along with logic and set theory from high school programs. This problem is not unique to Algeria : a lot of researches on proof have shown how it constitutes a new and thorny challenge for students in advanced mathematics, especially in abstract algebra where writing proofs is a continual process. We'll present difficulties as we identify them from exams of second year mathematics students.

Keywords: proof, reform, syllabus, difficulties, university

I. INTRODUCTION

Dans les années passées, la désaffection pour la filière mathématique a beaucoup fait parler les chercheurs, les enseignants et les didacticiens. Le nombre d'étudiants qui veulent faire mathématiques diminue au point où certains établissements universitaires en Algérie ont fermé la spécialité mathématique, ou certaines disciplines mathématiques (algèbre, analyse, …). Dans les lycées, également, les classes de terminale option 'maths' ont vu leurs effectifs beaucoup diminuer. Plusieurs lycées ne comptent plus parmi leurs spécialités les mathématiques et ce, depuis plusieurs années. Cette désaffection contagieuse a touché le domaine des sciences de l'ingénieur à l'université, que les étudiants fuient de plus en plus en raison des échecs répétés aux examens de mathématiques. La première année universitaire enregistre, au début et au milieu de l'année, un nombre assez grand d'abandons et à la fin de l'année, un taux de réussite approchant à peine les 20%. Les deux cours de première année, algèbre et analyse, présentent aux étudiants d'énormes difficultés qui demeurent insurmontables tout au long de l'année. Les étudiants subissent un choc dans ces cours, résultant d'une incompréhension complète de la matière, de ce qui leur est demandé, et du handicap important hérité du lycée pour affronter ces cours. Comme plusieurs arrivent à l'université avec des mathématiques différentes, ce grand changement au niveau des mathématiques les déstabilise, les désole et les contrarie pendant des semaines, voire des mois. Désarmés devant les compétences que nécessitent continuellement leurs nouvelles

* Université Yahia Farès, Médéa – Algérie – nadiazrou@gmail.com

[1] « Programme » désignera ici le syllabus ou le contenu d'un cours annuel ou semestriel, tel qu'il est établi par les institutions (ministère ou université).

© Azrou N. (2012) Difficultés d'étudiants universitaires débutant avec la preuve. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT7, pp. 953–963). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

tâches, comme raisonner, argumenter et mettre à profit leur savoir pour faire des preuves, ils ne voient aucune issue pour poursuivre leurs études.

Les enseignants, de leur côté, conscients à la fois de la difficulté croissante à enseigner ces cours et des lacunes des étudiants, se retrouvent eux aussi devant une impasse. Car même s'ils sont soucieux d'aider leurs étudiants en renforçant leurs acquis, en donnant une initiation et un fondement solide pour les habiliter à faire des preuves, les volumes horaires ne le permettent pas. En effet, depuis six années, l'université algérienne est passée au système LMD (License-Master-Doctorat). Le principal changement impliqué a été d'écourter les volumes horaires, les coupant parfois de moitié pour les mêmes cours que ceux de l'ancien système. Ainsi, la contrainte du temps et le contrôle des administrateurs pour une couverture complète des programmes font que les enseignants se permettent rarement ou jamais un rappel, ou un exercice pour approfondir une notion donnée. Le constat principal est que les étudiants sont incapables d'aborder les problèmes, dont la plupart commencent par la question « montrer que », aussi bien ceux des séries d'exercices que ceux extraits des examens.

Comme si cette situation n'était pas suffisamment alarmante, il a fallu qu'une autre réforme des programmes du lycée soit mise en place, il y a deux ans, pour apporter plus de complications encore. Celle-ci a éliminé du programme mathématique du lycée les sujets suivants : *logique*, *théorie des ensembles*, *relations binaires dans un ensemble*, *applications injectives, surjectives, bijectives* et *structures algébriques*. Depuis cette réforme, les bacheliers, contrairement à ceux des années précédentes, arrivent à l'université sans les outils nécessaires pour les mathématiques universitaires.

II. LA PREUVE COMME ÉLÉMENT ESSENTIEL DES MATHÉMATIQUES

Les ouvrages et les programmes des cours universitaires présentent la preuve comme étant nécessaire et fondamentale aux mathématiques universitaires. À l'instar de plusieurs chercheurs, Selden et Selden (2003, p.1) définissent la preuve comme étant ce qui caractérise les mathématiques par rapport aux autres sciences, où l'observation et l'expérimentation ont préséance :

> Indeed, in mathematics it is the proof that provides the strong consensus on the validity of basic information that is characteristic of a science. From this point of view, the idea of proof in mathematics corresponds to those special techniques of observation and experimentation which are essential to the other sciences.

De nombreux chercheurs s'accordent sur le fait qu'on ne peut pas faire des mathématiques à l'université sans faire de preuve, et certains vont jusqu'à dire que la preuve est garante de ce que celui qui la pratique est vraiment un mathématicien (Wheeler 1990). Les cours de mathématiques sont constitués de théorèmes et de résultats ou propriétés à démontrer, et les exercices et problèmes qui y sont proposés consistent le plus souvent à faire des preuves (Selden et Selden 2007)). À part le fait qu'elle fasse partie des caractéristiques et des exigences des mathématiques universitaires, la preuve est aussi le moyen d'évaluer les connaissances des étudiants (Weber 2001). Au niveau de l'enseignement universitaire, les examens écrits constituent le seul moyen d'évaluation et dans les questions des examens, on demande souvent à faire des preuves. Un chercheur comme Lucast (2003) considère l'élaboration des preuves et la résolution de problèmes comme étant des activités du même ordre, ou mieux encore : faire une preuve est une activité impliquée dans le processus cognitif sollicité pour la résolution de problèmes.

Malgré cet accord sur le statut de la preuve en mathématique, les chercheurs sont partagés quant à la définition de la preuve et son rôle dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Deux principales faces de la preuve sont à distinguer, comme la différence même entre les mots « preuve » et « démonstration » (Duval 1991). Une preuve en mathématiques est une série d’expressions formelles, chacune déduite de celle qui la précède selon des règles d’inférence bien définies en rapport avec les objets en questions, c’est ce qu’on appelle une démonstration. Mais la preuve est aussi, selon un sens moins formel, le moyen irréfutable qu’a un mathématicien pour établir que le résultat démontré est bel et bien vrai, ce qui permettra par la suite à la communauté mathématique de l’utiliser sans qu’il ne soit besoin de le redémontrer. La littérature expose un grand nombre de travaux qui présentent la preuve selon différentes définitions, selon différents rôles. Ces aspects de la preuve se sont développés avec les années depuis la civilisation grecque, et continuent d’inspirer les chercheurs développant sans cesse de nouvelles significations. Les études mentionnent ainsi la preuve comme : justification, vérification, un moyen pour convaincre, un moyen pour expliquer et comprendre le pourquoi du résultat, un moyen pour s’exprimer en mathématiques, une exploration du sens d’un résultat, et bien d’autres. Ces différents aspects de la preuve sont discutés par plusieurs auteurs. Ils sont résumés, entre autres, dans Hanna (2000, p. 8).

III. DIFFICULTÉS DEVANT LA PREUVE

Rares sont les recherches qui ont étudié la preuve sans soulever les difficultés des étudiants à son égard, celle-ci mettant à l’épreuve leurs connaissances, leur compréhension et la pratique de leur savoir acquis. Citons entre autres Selden et Selden (2007), Tanguay (2005), Weber (2001), Dreyfus (1999), Harel et Sowder (1998), Moore (1994). Élaborer une preuve à l’université est pratiquement la difficulté majeure des étudiants inscrits dans les cours d’algèbre et d’analyse, où la preuve est au cœur de ces cours.

Les difficultés sont de nombreuses formes. Les étudiants sont incapables de faire des preuves pour plusieurs raisons, soit parce qu’ils sont bloqués au point de départ et n’arrivent pas à commencer ou ne comprennent pas ce qu’on attend exactement d’eux, soit parce qu’ils ne saisissent pas déjà pourquoi on doit prouver en mathématiques ou encore à quoi doit ressembler une preuve (Harel et Sowder 1998). D’autres encore n’arrivent pas à faire des preuves simplement parce qu’ils n’ont pas bien compris les définitions et les résultats présentés au cours formellement (Selden et Selden 2007). Et même quand ils les comprennent, ils ne voient pas comment utiliser et lier ces concepts et avec quelles règles et techniques pour que cela puisse former une preuve (Tanguay 2007). J’ai moi-même découvert, année après année, ce point crucial durant mes enseignements avec les étudiants de première année. Quoique les cours soient complets et illustrés d’exemples, ça n’a jamais été suffisant pour permettre aux étudiants de faire des preuves sans trop de difficulté. J’ai alors compris qu’autre chose manque pour initier les étudiants à faire des preuves. Cette hypothèse m’a été confirmée par plusieurs chercheurs (Selden et Selden 2003 ; Weber 2001 ; Dreyfus 1999 ; Tanguay 2007) et par d’autres qui recommandent de donner des algorithmes et des techniques pouvant constituer la structure de la preuve.

1. Les programmes et la transition à la preuve

C’est en cours de géométrie pendant l’école moyenne que les élèves (moyenne d’âge 14 ans) manipulent pour la première fois les preuves dans les programmes de l’enseignement algérien. Cependant, cette pratique ne dure pas longtemps (une à deux années selon les programmes) et ne semble pas beaucoup servir les étudiants plus tard, quand ils abordent les preuves en algèbre ou en analyse à l’université. Il faut remarquer qu’en géométrie, l’aspect visuel prime dans beaucoup d’exercices alors qu’en mathématiques universitaires, la preuve doit s’écrire formellement selon des règles en relation avec le type du raisonnement choisi et les définitions en cause. Arrivant au lycée, la pratique de la preuve est rare ou inexistante. Avec la dernière réforme du programme des mathématiques du lycée qui a été mise en place il y a deux ans, les bacheliers arrivent à l'université non seulement avec un souvenir lointain ou perdu de la preuve, mais aussi sans aucune connaissance des notions qui peuvent leur servir d'outils d'initiation à la preuve, à savoir les éléments de cours : logique, théorie des ensembles. Cette difficulté de l'accès à la preuve au niveau universitaire a été mentionnée par plusieurs chercheurs : Moore (1994), Selden et Selden (2007) et d'autres. Aux États-Unis, par exemple, pour rendre cet accès moins pénible, on a mis au point des cours transitoires en début de la première année universitaire, cours appelés 'transition-to-proof courses' ou « bridge courses ». Plusieurs ouvrages universitaires sont également parus pour servir de support aux étudiants pour bien faire cette transition vers la preuve. Dans Epp (2003, p. 886), on en mentionne plusieurs.

2. *La partie logique*

Le formalisme est le premier obstacle auquel l'étudiant est confronté à la rencontre des mathématiques universitaires. Celles-ci s'écrivent dans un langage assez développé et différent de ce que l'étudiant connaît ; mais aussi, difficile à comprendre quand on n'a été ni initié, ni entraîné à s'en servir. Les preuves doivent être écrites dans un langage formel, mais aussi longtemps que l'étudiant ne connaît pas les règles de ce langage, il ne pourra jamais écrire une preuve même s'il arrive à entrevoir l'idée et les étapes de cette preuve. De plus, il doit être aussi capable de passer du formel à l'informel et vice versa. La partie logique est mise en évidence par plusieurs travaux (Epp 2003 ; Durand-Guerrier 2008, 2009 ; Selden et Selden 1995, 1999 ; Hanna 2000) comme étant une partie nécessaire pour l'apprentissage des règles du formalisme. Plusieurs chercheurs recommandent alors son enseignement, après avoir conclu à son importance dans la construction et la validation des preuves.

IV. ANALYSE DES ERREURS DES ÉTUDIANTS

1. *Analyse a priori*

L'exercice proposé a été soumis par moi-même aux étudiants de deuxième année de filière mathématique et fait partie d'un examen du semestre 1 du cours d'algèbre II (structures algébriques). Ce cours se fait à raison d'un cours et d'un TD d'une heure et demi chacun par semaine. Les étudiants testés sont supposés avoir eu les notions nécessaires en première année, dans le cours Algèbre I (logique, théorie des ensembles, applications injectives, surjectives, bijectives, image directe et réciproque, groupe, sous-groupe, morphisme de groupe) qui sert de prérequis. Ces étudiants sont les premiers issus de la dernière réforme du lycée, ils n'ont fait aucun des chapitres mentionnés ci-dessus au lycée. Selon leurs dires, à chaque fois qu'était manipulé un concept supposé connu (comme les quantificateurs, les sous-groupes, l'image directe, l'application surjective, …), ces concepts n'avaient pas été assimilés en Algèbre I et faire des preuves n'avait pas été introduit parmi les tâches proposées dans les exercices. À travers la tâche proposée, j'ai voulu révéler et identifier leurs difficultés devant la preuve. J'ai aussi voulu savoir à quel niveau les difficultés se présentent : applications des définitions, manques de définitions, logique, type de preuves, etc.

> Soit G un groupe multiplicatif non commutatif, H un sous-groupe de G.
>
> Soit R une relation définie sur G par : $x\ R\ y \Leftrightarrow \exists\ g \in G$ tel que $y = gx$. Montrer que :
>
> 1. R est une relation d'équivalence.

2. Soit $x \in G$. On définit G_x par : $G_x = \{g$ tel que $gx=x\}$ est un sous-groupe de G.
3. L'application $f_g(x)=gxg^{-1}$ transforme un sous-groupe en un sous-groupe (c'est-à-dire que $f_g(H) \leq G$ si $H \leq G$).

Démonstration

Selon les prérequis des étudiants et les notes de cours ainsi que les exercices proposés, la démonstration de l'exercice proposé pourrait aller comme suit :

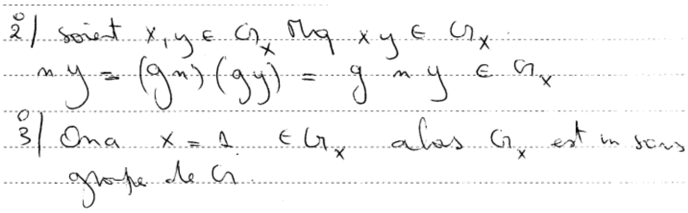
1. Montrons que R est une relation réflexive, symétrique et transitive.
   a) Soit $x \in G$, montrons que xRx. Cherchons un g de G qui vérifie $gx=x$, on a pour $g=1$, $x=1x$. Donc $\forall x \in G, xRx$. Donc R est une relation réflexive.
   b) Soient $x, y \in G$ tel que xRy. Montrons que yRx. On a xRy i.e. $\exists\ g \in \mathrm{G}$ tel $y=gx$. Comme G est un groupe, alors $x=g^{-1}y$ i.e. yRx. Donc R est une relation symétrique.
   c) Soient $x, y, z \in G$ tels que xRy et yRz. Montrons que xRz. On a xRy et yRz i.e. $\exists\ g \in G$, $y=gx$ et $\exists\ g' \in \mathrm{G}$, $z=g'y$. En remplaçant y par gx dans cette égalité, on trouve $z=g'gx=g''x$, avec $g''= g'g \in G$, donc xRz. Ainsi, R est une relation transitive.
2. Montrons que G_x est un sous-groupe de G.
   a) Montrons que $e \in G_x$, en effet on a $x=1x$, donc $e=1 \in G_x$.
   b) Montrons que si $g \in G_x$ alors $g^{-1} \in G_x$. Soit $g \in G_x$ i.e. $gx=x$. En multipliant par g^{-1} de part et d'autre de cette égalité, on aura $x=g^{-1}x$, donc $g^{-1} \in G_x$.
   c) Montrons que G_x est stable par la multiplication de G. Soient $g_1, g_2 \in G_x$. Montrons que $g_1 g_2 \in G_x$. On a $g_1 x=x$ et $g_2 x=x$. En remplaçant x par $g_2 x$ dans le membre de gauche de la première égalité, on aura $g_1g_2x = x$, i.e. $g_1 g_2 \in G_x$. Donc G_x est bien un sous-groupe de G.

L'évaluation de la tâche proposée, selon les exercices et les notions des cours Algèbre I et Algèbre II, nous permet les conclusions suivantes.

- Il s'agit d'une tâche assez simple, vu le style simple et classique des questions. La plupart des exercices, portant sur les relations d'équivalence ou les groupes, proposés aux étudiants, contiennent les mêmes questions.
- Les éléments déployés dans la preuve font partie des chapitres logique, théorie des ensembles, image directe d'un ensemble par une application et de la théorie des groupes qui ont été travaillés dans le cours Algèbre I.
- La preuve des trois questions est une application directe des définitions ; en effet, il n'y a aucune astuce ou technique inhabituelle qui pourrait bloquer l'étudiant.
- L'étudiant doit démontrer dans ses preuves qu'il sait bien utiliser les quantificateurs, faire la différence entre un élément fixé et un paramètre, et adapter les propriétés qu'il retient bien (souvent avec x) aux notations de l'exercice.

2. Analyse des productions des étudiants

Production 1

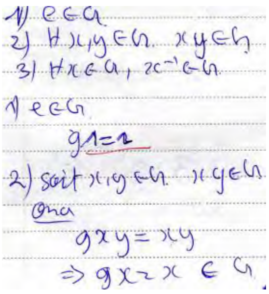

2°/ soient $x, y \in G_x$ Mq $xy \in G_x$
$xy = (gx)(gy) = gxy \in G_x$
3°/ On a $x = 1 \in G_x$ alors G_x est un sous groupe de G

Cette production est une réponse à la question 2 de l'exercice proposé.

L'étudiant commence par donner deux réponses en commençant par le 2 et 3, mais ne fait pas le 1.

Il ne démontre pas que le sous-groupe G_x contient les inverses de ses éléments. À la première ligne, il commence par démontrer que le sous-groupe G_x est stable, en écrivant la définition telle qu'elle est donnée dans le cours et les manuels (avec les notations x et y) mais sans l'adapter aux notations de l'exercice où les éléments de G_x sont notés par g. Car dans ce cas, prendre x comme élément de G_x ne convient pas du tout. L'étudiant ne voit pas que cet élément (x) n'est pas quelconque dans ce cas, mais il a été fixé préalablement pour définir G_x. À la ligne 2, en voulant montrer que le produit des deux éléments pris reste dans G_x, l'étudiant remplace x par gx et y par gy, ceci démontre que les éléments de G_x ne sont pas clairs pour l'étudiant qui ne voit pas le rôle de g dans la définition (qui n'est pas unique) et donc ne voit pas comment l'appliquer dans la preuve. Il poursuit en transformant le produit en gxy sans le justifier, il ne le fait pas par la commutativité qui n'est pas une hypothèse sinon il l'aurait dit, mais en écrivant seulement la forme, selon lui, des éléments de G_x. Ceci démontre encore que l'étudiant n'a pas pu lire dans la définition formelle dès le début le sens de l'ensemble G_x. À la ligne 3, où l'étudiant démontre que G_x contient l'élément neutre, il le note encore par x et lui donne la valeur 1, sans justification. Encore une fois, ce qui est donné dans les définitions ($e = 1$), est retenu en le mémorisant sans pouvoir l'appliquer dans les exercices (x ne peut pas être 1, c'est g qu'il faudrait prendre pour 1). L'étudiant fini tout de même sa démonstration incomplète en concluant avec le résultat demandé, sans faire le 1 (montrer que les inverses des éléments restent dans le sous-groupe) de la preuve.

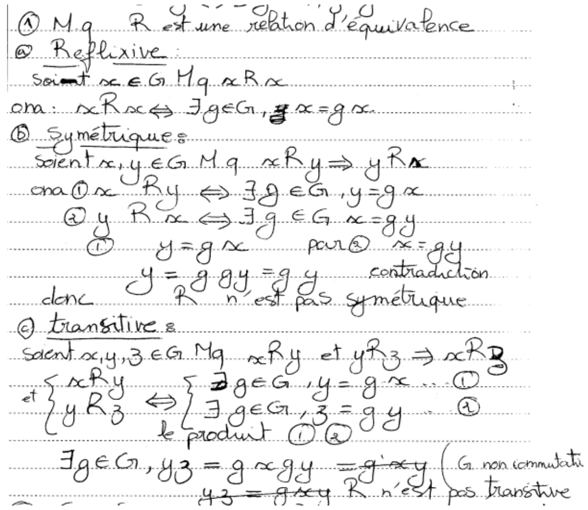
Production 2


1) $e \in G$
2) $\forall x, y \in G$ $xy \in G$
3) $\forall x \in G$, $x^{-1} \in G$
1) $e \in G$
$g1 = 1$
2) soit $x, y \in G$ $xy \in G$
On a
$gxy = xy$
$\Rightarrow gx = x \in G$.

Cette production est une réponse à la question 2 de l'exercice. L'étudiant ne note pas le sous-groupe par G_x comme dans l'exercice, mais par G, ceci peut indiquer que l'indice « x » dans G_x n'est pas clair pour lui. Il commence par écrire les trois propriétés à démontrer sans préciser que c'est ce qu'il doit démontrer, il n'en démontre plus tard que deux. Pour montrer que l'élément neutre appartient à G_x, l'étudiant remplace, dans la relation $gx=x$, x par l'élément neutre (1), alors qu'il doit remplacer le g, car encore, les éléments de G_x sont définis par g et non pas par x, puisque ce dernier a déjà été fixé.

Ceci démontre que l'étudiant est incapable d'appliquer et d'adapter la définition de « sous-groupe » (qui est souvent donnée avec x et y) aux nouvelles notations de l'exercice (données avec g), un fait renforcé par la non compréhension du rôle de g dans la définition de G_x en tant qu'ensemble. Au niveau du dernier point (2), après avoir pris deux éléments x et y, l'étudiant écrit ce qu'il doit montrer sans le préciser ($xy \in G_x$), puis l'utilise pour le remplacer par ce qui lui est équivalent ($gxy=xy$), ce qui indique que tous les éléments de G_x vérifient, selon l'étudiant, cette propriété pour un g fixé. Encore une fois, le fait qu'un autre élément à part x intervient dans un ensemble reste ambigu. On se demande si en ayant placé dans la définition un x à la place de g, les choses auraient mieux été. Finalement, l'étudiant arrive, en simplifiant par y, à $gx=x$ ce qui ne convient pas à ce qu'il voulait ($xy \in G_x$) et met tout de même $\in G_x$ mais ceci est vrai par hypothèse puisque l'élément x est pris dans G_x. L'étudiant s'arrête, soit en comprenant ce dernier fait, soit parce qu'il ne sait pas comment continuer.

Production 3



① M.q R est une relation d'équivalence

ⓐ Reflexive :

Soit $x \in G$ Mq xRx

on a : $xRx \Leftrightarrow \exists g \in G,\ x = gx$

ⓑ Symétrique :

Soient $x, y \in G$ M.q $xRy \Rightarrow yRx$

on a ① $xRy \Leftrightarrow \exists g \in G,\ y = gx$

② $yRx \Leftrightarrow \exists g \in G\ \ x = gy$

① $y = gx$ pour ② $x = gy$

$y = g\,gy = gy$ contradiction

donc R n'est pas symétrique

ⓒ transitive :

Soient $x, y, z \in G$ Mq xRy et $yRz \Rightarrow xRz$

$\left\{\begin{array}{l} xRy \\ \text{et } yRz \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \exists g \in G,\ y = gx \ \ldots ① \\ \exists g \in G,\ z = gy \ \ldots ② \end{array}\right.$

le produit ① ②

$\exists g \in G,\ yz = gxgy = \cancel{g^2xy}$ (G non commutati

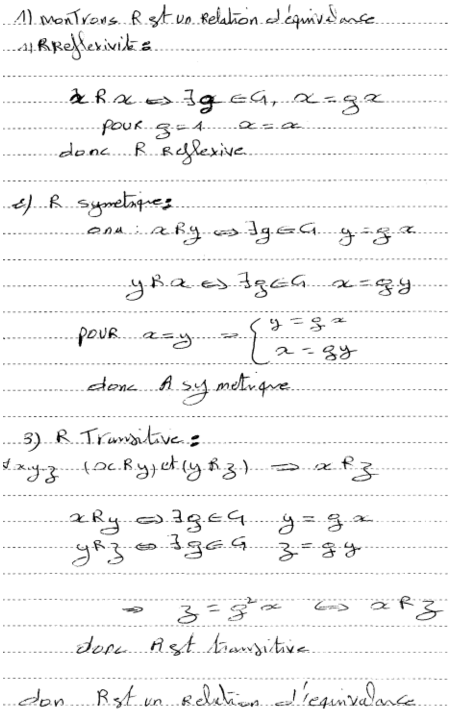
$\cancel{yz = g^2xy}$ R n'est pas transitive

Cette production est une réponse à la question 1 de l'exercice.

Ce qui est marquant dans cette production est que l'étudiant remet carrément en question le résultat en concluant que ce que lui est demandé est faux. Au niveau de la réflexivité, l'étudiant écrit ce qu'il doit démontrer et commence par écrire la définition correcte, mais sans pouvoir l'adapter à la définition de l'exercice. Au niveau de la symétrie, il écrit encore ses définitions et ce qu'il doit démontrer correctement, mais il utilise par la suite ce qu'il doit démontrer ($x\ R\ y$).

Il utilise le même g pour x et pour y, ce qui démontre qu'il qu'il n'a pas compris le rôle du quantificateur existentiel dans la définition de la relation d'équivalence. Ce premier fait mène l'étudiant vers une fausse route dans sa preuve, un deuxième fait qui a le même effet, est que l'étudiant utilise ce qu'il doit démontrer dans la preuve en remplaçant le (2) dans (1) (en remplaçant la valeur de x dans $y=gx$). Par la suite, l'étudiant passe de ggy à gy sans le justifier, en tenant peut être pour acquis que tous les éléments sont égaux à leur produit par g comme il l'a mentionné dans la réflexivité. Paradoxalement, ceci mène l'étudiant à la valeur de y et non celle de x, qui l'amène à constater une contradiction et donc, à rejeter la symétrie de la relation. Au niveau de la transitivité, la même erreur est refaite (le même g est pris pour x et pour y), par contre l'étudiant ne développe pas ce qu'il doit démontrer (xRz) et donc le perd de vue, ceci le mène à une fausse piste, qui est de faire le produit des deux égalités au lieu de remplacer y par sa valeur. La dernière égalité, qui paraît étrange à l'étudiant puisqu'il ne peut pas commuter les éléments de G, n'aurait pas mené au résultat voulu (xRz) même si la commutativité était une hypothèse. Mais l'étudiant n'a pas remarqué ce fait (car il y a un y en plus) et s'est précipité à dire que la transitivité n'est pas vérifiée.

Production 4



1) montrons R est un relation d'équivalence

1) R reflexivité:

$xRx \Leftrightarrow \exists g \in G, \ x = gx$

pour $g = 1$ $x = x$

donc R reflexive

2) R symetrique:

on a : $xRy \Leftrightarrow \exists g \in G \ \ y = gx$

$yRx \Leftrightarrow \exists g \in G \ \ x = gy$

pour $x = y \Rightarrow \begin{cases} y = gx \\ x = gy \end{cases}$

donc R symetrique

3) R Transitive:

$\forall x, y, z$ (xRy) et $(yRz) \Rightarrow xRz$

$xRy \Leftrightarrow \exists g \in G \ \ y = gx$

$yRz \Leftrightarrow \exists g \in G \ \ z = gy$

$\Rightarrow z = g^2 x \Leftrightarrow xRz$

donc R est transitive

don R est un relation d'equivalence

Cette production est une réponse à la question 1 de l'exercice.

L'étudiant sépare les trois propriétés d'une relation d'équivalence et tente de les démontrer toutes. Au niveau de la réflexivité, il réussit en remplaçant le g par l'élément neutre 1, ce qui nous laisse dire que, peut-être pour cet étudiant, le rôle de g, introduit par le quantificateur existentiel, est enfin clair. Mais ceci n'est pas le cas, comme le montrent les deux points suivants. Au niveau de la symétrie, l'étudiant n'écrit pas ce qu'il doit démontrer, mais il le sait puisqu'il l'écrit en développant l'hypothèse de la symétrie (xRy) et ce à quoi il doit arriver (yRx). Mais le fait de prendre le même g pour les deux égalités indique que l'étudiant considère que g est fixé et une fois encore, le rôle du quantificateur existentiel n'est pas du tout saisi.

Ceci met l'étudiant devant une situation absurde (il a y=gx et il doit arriver à x=gy), de laquelle il se sort en posant x=y, sans se rendre compte que ceci contredit la définition de la symétrie qui doit être vérifiée pour tous les éléments. Une autre raison qui a fait que l'étudiant utilise une technique (prendre x=y) qui contredit la définition est le fait qu'il n'a pas commencé sa preuve par 'soient $x, y \in G_x$'. En effet en prenant dès le début deux éléments quelconques, l'étudiant avancera en considérant ce fait, et aura toujours en tête que sa démonstration est valable pour tous les éléments ce qui lui évitera de considérer des cas exceptionnels (comme x=y). Ceci indique que soit l'étudiant ne sait pas que la symétrie est une propriété qui doit être vérifiée par tous les éléments, soit il ne sait pas qu'il faut commencer par 'soit' pour démontrer une propriété commençant par '$\forall$'. Au niveau du dernier point qui est la transitivité, l'étudiant écrit la définition correcte de la transitivité, puis commence par développer ses deux hypothèses (xRy et yRz) mais en utilisant toujours, comme auparavant pour la symétrie, le même élément g. Cette fois, sachant qu'il doit arriver à (xRz, *i.e.* z =gx) et se trouvant avec z=g^2x, il ne sait pas comment s'en sortir, il écrit alors le résultat final. La dernière étape (z=$g^2x \Leftrightarrow xRz$), qui est correcte, laisse croire que l'étudiant a bien fait (en considérant g^2 comme un élément de G qu'on note g), mais le fait qu'il ne la justifie pas et qu'il a considéré auparavant l'élément g comme unique, révèle que l'étudiant termine sa preuve (en écrivant « donc R est transitive ») parce qu'il ne sait pas comment s'en sortir, étant réellement coincé.

3. Analyse globale des productions et des tâches

Les tâches proposées, a priori considérées comme simples (car relevant d'un programme déjà acquis), avec une preuve évaluée comme directe, s'avèrent en fait être compliquées pour les étudiants et certaines même impossibles à faire. Sur vingt copies, aucun étudiant n'a pu faire entièrement la première question (relation d'équivalence), deux ont pu faire correctement quelques propriétés de la question 2 (le sous-groupe) et aucun n'a fait la question 3 (l'image directe d'un sous-groupe). Le premier obstacle pour la question 1 est l'élément g qui a été introduit par un quantificateur existentiel, ceci a fait que les étudiants ne comprennent pas son rôle, qui est présenté par l'existence et non par l'unicité, et donc ne pas savoir l'utiliser. Les ensembles ne semblent pas, non plus, être clairs, puisque la définition de G_x qui fait intervenir deux éléments (g et x) cause beaucoup de problèmes, le fait de noter les éléments par g et non par x a dérangé énormément. Les définitions, même si elles paraissent simples (comme celle de la réflexivité) exige une bonne compréhension pour pouvoir être bien adaptées aux notations. Or, comme nous l'avons vu, les définitions sont bien retenues mais ne sont pas bien appliquées aux nouvelles notations. L'étudiant qui paraît savoir, au début, ce qu'il a et ce à quoi il veut arriver, se laisse perdre au cours de la preuve en se permettant des manipulations qui n'ont pas de sens et vont parfois jusqu'à contredire les hypothèses, la définition ou même le résultat énoncé (production 3). La question 3, qui est reliée à la fois à la logique, à la théorie des ensembles et à l'image directe par une application, semble être très difficile pour les étudiants qui ont des difficultés dans chacune de ces parties du cours d'algèbre.

V. CONCLUSION

En deuxième année universitaire, faire des preuves reste encore difficile et fait encore apparaître beaucoup d'erreurs chez les étudiants. En plus de l'obstacle du formalisme qui reste très prononcé après une année de manipulation, la compréhension du rôle et du sens des symboles demeure totalement absente chez les étudiants. Aussi, les faiblesses en théorie des ensembles sont à l'origine de plusieurs difficultés. En sollicitant à la fois les notions ensemblistes et celles de la partie logique, les choses deviennent plus compliquées pour les étudiants. Si de plus on sollicite, pour une preuve, d'autres registres supplémentaires, comme l'image directe d'un ensemble par une application, les obstacles deviennent importants au point où les étudiants sont incapables d'aborder la question. Devant une preuve, nous avons remarqué les différentes situations suivantes :

- Les étudiants, retenant bien leurs définitions, n'arrivent pas à les adapter aux nouvelles notations et donc, ne savent pas ce qu'ils doivent démontrer. Cette difficulté relève du formalisme qui reste le principal obstacle pour faire des preuves.
- Ne contrôlant pas toujours les étapes de leur preuve, les étudiants se perdent souvent, arrivent à des impasses et se permettent des manipulations qui n'ont pas de sens ou qui contredisent même ce qu'ils doivent démontrer. Ceci indique que ces étapes ne semblent pas être importantes, leur enchaînement, leur lien et leur relation à la fois avec les hypothèses et le résultat demandé ne semblent pas caractériser la preuve, ni même garantir sa validité.
- Les étudiants valident leurs preuves même si elles sont incomplètes ou mènent vers une situation sans issue.

Nous restons convaincus que beaucoup doit se faire au niveau de la partie logique, qui a été éliminée au lycée et négligée ou très vite faite en première année universitaire. Elle reste le fondement du formalisme. Je rejoins les chercheurs cités préalablement, qui avancent qu'on ne peut pas faire des mathématiques ni des preuves sans passer par l'enseignement de la logique. C'est avec cette partie que les étudiants doivent être initiés à lire les phrases formelles, pour maîtriser le sens des définitions ou d'idées et ne plus se laisser embrouillés par les différentes notations. Plusieurs niveaux suivront plus tard, comme la théorie des ensembles et les applications d'ensembles, où ce travail se poursuivra, toujours, sur les définitions et les notations accompagnées à chaque fois de justifications qui constitueront par la suite les étapes des preuves. Ces chapitres présentent un milieu adéquat pour l'initiation au raisonnement déductif, ce raisonnement qui constitue une condition nécessaire pour l'activité de démonstration (Duval 1991) car on ne peut pas demander aux étudiants de faire des preuves sans définir en quoi cela consiste. Nous avons remarqué que la preuve n'est pas bien comprise chez les étudiants, ces derniers valident souvent des preuves incomplètes ou qui ne mènent à rien ou qui même contredisent le résultat voulu. Selon les étudiants, faire une preuve ne consiste pas toujours à donner un discours qui a un sens. Il est important d'enseigner aux étudiants, avant de demander de faire des preuves, les composantes primordiales de la preuve qui sont ces différentes étapes enchaînées mais surtout bien justifiées, et qui prennent en considération les hypothèses et le résultat voulu, ce que présente (Duval 1991) par inférences et enchaînements, et qu'illustre bien Tanguay (2007). Nous souhaitons que ce point soit pris en considération par les enseignants qui ne mesurent pas toujours la difficulté de faire une preuve en l'absence de ces éléments.

Notre analyse des erreurs nous permet aussi de conclure qu'après une année de travail mathématique (en algèbre et en analyse), les étudiants de deuxième année restent des débutants devant la preuve. Cette tâche permet de révéler des faiblesses et des difficultés qui, nous le croyons, ne seront jamais dévoilées ni aux étudiants ni aux enseignants sans ce passage qui consiste à faire des preuves. Le temps trop restreint consacré aux mathématiques en première année et les parties éliminées par la réforme ont fait s'accumuler beaucoup trop de lacunes, qui sont clairement illustrées par les erreurs des étudiants.

RÉFÉRENCES

Dreyfus T. (1999) Why Johnny can't prove. *Educational Studies in Mathematics* 38, 85-109.

Durand-Guerrier V. (2008) Truth versus validity in mathematical proof. *ZDM Mathematics Education,* 40, 373-384.

Durand-Guerrier V., Njomgang Ngansop J. (2009) Questions de logique et de langage à la transition secondaire-supérieur. L'exemple de la négation.. In Kuzniak A., Sokhna M. (Eds) *Actes du Colloque EMF 2009* (GT 7). Université Cheikh Anta Diop, Dakar, Sénégal.

Duval R. (1991) Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration. *Educational Studies in Mathematics* 22, 233-261.

Hanna G. (2000) Proof and Exploration: An Overview**.** *Educational Studies in Mathematics* Vol. 44, n°1 (2), 5-23.

Harel G., Sowder L. (1998) Students' Proof Schemes: Results from exploratory studies. In Dubinsky E., Soenfeld A. H. and Kaput J.J. (Eds) *Issues in mathematics education*. Vol. 7. *Research in collegiate mathematics education*, III, American Mathematical Society, Providence, RI, USA, 234-283.

Lucast E. K. (2003) *Proof as Method: A New Case for Proof in Mathematics Curricula*. Unpublished masters thesis. Pittsburgh, PA, USA: Carnegie Mellon University.

Moore R.C. (1994) Making the transition to formal proof. *Educational Studies in mathematics,* Vol. 27, n°3 (Oct., 1994), 249-266.

Selden J., Selden A. (2003) Errors and Misconceptions in College Level Theorem Proving. *Technical Report,* n°3, août 2003.http://math.tntech.edu/techreports/techreports.html

Selden J., Selden A. (2007) Overcoming Students' Difficulties in Learning to Understand and Construct Proofs. *Technical Report,* n°1, août 2007.
http://math.tntech.edu/techreports/techreports.html.

Semri A. (2010) Réforme du système éducatif algérien : À propos de l'articulation entre l'enseignement secondaire et le système LMD de l'enseignement supérieur en mathématiques. In Kuzniak A., Sokhna M. (Eds) *Actes du Colloque EMF 2009.* Université Cheikh Anta Diop, Dakar, Sénégal. Sur CD-Rom.
http://fastef.ucad.sn/EMF2009/Groupes%20de%20travail/GT7/Semri.pdf

Tanguay D. (2007) Learning Proof : from Truth towards Validity. Proceedings of the Xth *Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education* (RUME), San Diego State University, San Diego, California. http://www.rume.org/crume2007/eproc.html

Tanguay D. (2005) Apprentissage de la démonstration et graphes orientés. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, vol. 10, 55–-93.

Weber K. (2001) Student difficulty in constructing proofs : The need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics* 48, 101-119.

NOTIONS DE TOPOLOGIE : ÉLABORATION DE LEVIERS DIDACTIQUES À INTEGRER DANS UN ENSEIGNEMENT POUR FAVORISER LES APPRENTISSAGES DES ÉTUDIANTS

Stéphanie BRIDOUX*

Résumé – Dans cette communication, nous nous intéressons à la possibilité d'intégrer, dans un enseignement de topologie soumis à des contraintes institutionnelles fortes, quelques aménagements susceptibles de favoriser la réalisation autonome de certains exercices par les étudiants. Dans un premier temps, nous montrons comment des préoccupations historiques et épistémologiques, intégrées à nos analyses didactiques, ont permis un travail sur les formalisations des notions et leur progression dans l'enseignement. Ensuite, nous expliquons comment une réflexion sur la gestion par l'enseignant de la classe a contribué à mener un certain nombre d'étudiants à travailler en autonomie sur les exercices visés.

Mots-clefs : intérieur et adhérence d'un ensemble, ensemble ouvert ou fermé, symbolisme, formalisation, analyse de tâche

Abstract – In this contribution, we focus on the possibility of integrating, in a teaching of topology subjected to strong institutional constraints, some teaching set-up that may improve the achievement of students when they are let by themselves to solve exercises. At first, we show how an historical and epistemological concern combined with didactic analyses contributed to working on the formalization of the concepts and to managing their development through the teaching. Next, we explain how the teacher's reflection led to an organization of the teaching helping students' autonomous work on the exercises at stake.

Keywords: interior and closure of a set, open or closed set, symbolism, formalization, task analysis

I. INTRODUCTION

Cette communication s'inscrit dans la continuité des textes présentés aux colloques EMF 2006 (Bridoux 2008) et EMF 2009 (Bridoux 2011a), traitant tous les deux de l'enseignement des notions de topologie en première année d'université. Dans cette perspective, le lecteur pourra consulter ces deux références pour une description détaillée du contexte institutionnel dans lequel s'inscrivent nos recherches ou pour une présentation complète des expérimentations évoquées dans le texte.

Pour situer le contexte de ce travail, nous rappelons tout d'abord les principales caractéristiques d'un enseignement de topologie dans lequel nous intervenons, en mettant en évidence les contraintes institutionnelles qui délimitent cet enseignement et certaines difficultés repérées chez les étudiants. Nous nous intéressons précisément à une de ces contraintes qui consiste en la réalisation de certaines tâches qui sont pourtant sources de difficultés récurrentes chez les étudiants aux évaluations.

Après avoir décrit notre questionnement, nous présentons quelques pistes issues d'une étude historique et épistémologique, complétée par une analyse de quelques manuels. Nous montrons alors que ces pistes ont mené à travailler différemment sur les formalisations des notions visées en association avec une gestion spécifique de l'enseignement en classe, contribuant ainsi à faire progresser les étudiants sur les tâches en question.

* Université de Mons – Belgique – stephanie.bridoux@umons.ac.be

© Bridoux S. (2012) Notion de topologie : élaboration de leviers didactiques à intégrer dans un enseignement de topologie. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT7, pp. 964–974). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

II. DIAGNOSTIC D'UN ENSEIGNEMENT DE TOPOLOGIE

Notre intérêt pour les notions de topologie est principalement lié à notre expérience d'enseignante. En effet, nous avons été frappée, pendant plusieurs années, de repérer dans les productions de nos étudiants des erreurs récurrentes dans la résolution d'exercices portant sur des applications immédiates des définitions du cours, et même simplement dans la restitution de ces définitions. D'où notre volonté de chercheur en didactique d'interroger ce constat d'échec, d'une part pour en comprendre les causes et d'autre part, pour réfléchir à des pistes de remédiation ou de modification.

L'enseignement de topologie dont il est question est intégré à un cours d'analyse mathématique donné en première année à l'Université de Mons (Belgique) dans une filière mathématique. Le chapitre concernant la topologie introduit les notions d'intérieur et d'adhérence d'un ensemble, d'ensemble ouvert et d'ensemble fermé dans l'espace $\mathbb{R}^N$. Ces notions sont caractérisées à la fois en termes de boules et en termes de suites à partir des écritures formelles ci-dessous. L'intérieur et l'adhérence d'un ensemble $A \subset \mathbb{R}^N$, notés respectivement int A et adh A, sont définis par

$$\text{int A} = \{x \in \mathbb{R}^N : \exists r > 0,\ B(x,r) \subset A\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R}^N : \forall (x_n) \subset \mathbb{R}^N,\ si\ x_n \longrightarrow x,\ alors\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ x_n \in A\}$$

$$\text{adh A} = \{x \in \mathbb{R}^N : \forall r > 0,\ B(x,r) \cap A \neq \emptyset\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R}^N : \exists (x_n) \subset A,\ x_n \longrightarrow x\}$$

Les notions d'ouvert et de fermé sont alors définies de la manière suivante :

A est ouvert ssi $\forall x \in A,\ \exists r > 0,\ B(x,r) \subset A$;

A est ouvert ssi $\forall x \in A,\ \forall (x_n) \subset \mathbb{R}^N,\ si\ x_n \longrightarrow x,\ alors\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ x_n \in A$;

A est fermé ssi $\forall x \in \mathbb{R}^N, (\forall r > 0,\ B(x,r) \cap A \neq \emptyset) \Longrightarrow x \in A$;

A est fermé ssi $\forall x \in \mathbb{R}^N, \forall (x_n) \subset A,\ (x_n \longrightarrow x) \Longrightarrow (x \in A)$.

L'équivalence entre ces diverses caractérisations est démontrée.

Un objectif fort de cet enseignement est que les étudiants parviennent à manipuler les définitions données dans le cours. En ce qui concerne le chapitre sur la topologie, ils doivent être capables de déterminer si des sous-ensembles classiques de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{R}^2$ sont ouverts ou fermés et de justifier leur choix en manipulant le symbolisme approprié.

Dans notre mémoire de DEA (Bridoux 2005), nous nous sommes penchée sur les spécificités des notions de topologie à enseigner en étudiant la distance entre les connaissances anciennes des étudiants et les nouvelles connaissances, en relation avec différents éléments : le formalisme introduit, la portée généralisatrice des notions de topologie par rapport aux connaissances des étudiants dans ce domaine et l'éventuelle unification des notions anciennes apportées par les nouvelles notions. Nous en avons déduit que les notions de topologie avaient des caractéristiques communes avec les notions formalisatrices, unificatrices et généralisatrices, notées notions FUG par la suite, au sens de Robert (1998). En effet, elles généralisent des notions anciennes telles que les intervalles dans $\mathbb{R}$ et des sous-ensembles fréquemment rencontrés dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$, en les unifiant à partir d'un formalisme nouveau pour les étudiants à ce niveau d'enseignement. Les notions FUG sont souvent difficiles à introduire, notamment parce qu'il n'est pas simple de trouver un problème initial accessible au niveau d'enseignement visé dans lequel elles apparaissent comme l'outil de résolution optimal. De plus, le caractère formalisateur de ces notions est tel qu'il est difficile de leur donner du sens.

Nous nous sommes ensuite intéressée aux exercices proposés dans l'enseignement qui, comme nous l'avons expliqué, sont des applications des définitions du cours. À partir des outils d'analyse des contenus développés par Robert (1998), nous avons décrit le travail mathématique à réaliser, a priori, dans ce type d'exercices. Plus précisément, nous avons mis en évidence les connaissances (anciennes, en cours d'acquisition, ...) mises en jeu et les adaptations à réaliser sur ces connaissances telles que les changements de points de vue, l'introduction d'intermédiaires, les changements de cadres, les mélanges de registres d'écritures, etc. Nos analyses montrent que la manipulation des définitions en cause met en jeu un travail dans le registre symbolique qui requiert des adaptations complexes et variées ; ce travail sollicite principalement des connaissances en logique et en théorie des ensembles ainsi que sur la manipulation d'inégalités, mais somme toute peu de réelles connaissances en topologie (Bridoux 2008).

Ainsi, cet enseignement de topologie est exclusivement centré sur le caractère formalisateur des notions en proposant un travail syntaxique dans le registre symbolique. Les étudiants manipulent des symboles auxquels ils ne donnent aucun sens. Il n'y a donc aucune dynamique productive entre le sens et la technique. Un des points d'ancrage de notre travail de thèse (Bridoux 2011b) a été d'élaborer un dispositif didactique visant à introduire ces notions de topologie de façon à favoriser les apprentissages des étudiants, tout en prenant en compte les contraintes institutionnelles qui pèsent sur cet enseignement. Nous nous centrons ici sur la prise en charge, dans ce dispositif, des exercices de manipulation des définitions. Notre objectif consiste à décrire quelques aménagements intégrés à l'enseignement initial tant du point de vue des contenus mathématiques que du point de vue de la gestion du travail en classe pour tenter de surmonter les difficultés précédemment repérées sur ce type d'exercices. Après avoir présenté quelques résultats issus d'analyses didactiques menées en amont de l'enseignement, nous expliquons comment nous avons repensé la progression des contenus à enseigner et leurs formalisations, mais également les interventions de l'enseignant en relation avec le travail des étudiants en classe.

III. QUELQUES PISTES DIDACTIQUES

Dans l'enseignement précédemment décrit, l'introduction non motivée des notions de topologie, la variété de leurs caractérisations et la nature des exercices proposés sont autant d'éléments qui ne permettent pas de donner du sens aux notions ni d'utiliser de manière appropriée le formalisme associé. Néanmoins, les contenus à enseigner sont fixés par notre institution et les exercices de manipulation des définitions constituent également un objectif de l'enseignement. Prenant en compte ces contraintes institutionnelles qui, comme le montre notre travail de thèse (Bridoux 2011b), pèsent lourdement sur les moyens d'action du chercheur, nous avons toutefois tenté d'agir sur cet enseignement en nous focalisant sur deux aspects pour tenter de rétablir le sens des notions : leur introduction et la nature des exercices à proposer aux étudiants.

Pour ce faire, nous nous sommes tout d'abord intéressée aux spécificités des notions de topologie en nous dégageant des contraintes institutionnelles. Cette démarche nous rapproche du point de vue suivant développé par Dorier (2000) :

> Le chercheur en didactique ne peut se contenter d'un point de vue interne au système d'enseignement, il analyse le processus complexe qui conduit de la production du savoir dans la communauté mathématique jusqu'à son enseignement en replaçant l'enjeu de connaissance dans le contexte plus vaste de la constitution des savoirs. (Op. cité, p. 9)

Ce point de vue nous a amenée à étudier le phénomène de transposition didactique, au sens de Chevallard (1991). Nous sommes dans un premier temps retournée à la genèse et l'épistémologie des notions à enseigner. Dans notre communication à EMF 2009 (Bridoux 2011a), nous avons présenté quelques résultats issus d'une synthèse historique et épistémologique reconstituant l'émergence et le développement de quelques notions de topologie. Nous rappelons ci-dessous les faits marquants de cette étude qui sont en lien direct avec notre propos.

Du point de vue de l'histoire retracée, nous avons montré que les quatre notions visées dans l'enseignement (intérieur et adhérence d'un ensemble, ensemble ouvert et ensemble fermé) s'insèrent dans un réseau plus vaste dans lequel apparaissent notamment les notions de point isolé, de point d'accumulation, de connexité et de compacité, comme l'illustrent par exemple les travaux de Weierstrass (1894), puis ceux de Fréchet (1906). Nous évoquons également Cantor (1883) qui, en cherchant à caractériser rigoureusement l'ensemble des nombres réels, s'intéresse aux sous-ensembles de la droite réelle et catégorise les types de points (point isolé, point limite et point frontière) en fonction de leur position dans les sous-ensembles. L'ordre historique d'apparition de ces notions diffère également de celui suivi dans notre enseignement puisque les notions d'intérieur et d'adhérence émergent historiquement plus tardivement. Du point de vue de la formalisation des notions, les définitions sont écrites dans le registre de la langue naturelle, les symboles mathématiques rencontrés étant principalement des lettres pour désigner des ensembles ou des points, en plus des symboles d'inégalités. Cette étude historico-épistémologique, que nous ne faisons ici que survoler, nous a permis de préciser le sens des notions de topologie mais également leurs caractères formalisateur, unificateur et généralisateur.

Après nous être placée du côté du savoir savant, nous avons ensuite réalisé une analyse de manuels pour caractériser le savoir à enseigner (Bridoux 2011b). Celle-ci nous a permis de préciser la fonction des notions à enseigner. Nous en livrons ici quelques aspects.

Nous avons tout d'abord constaté la place très réduite occupée par la topologie de $\mathbb{R}^N$ puisque les manuels consultés traitent principalement des espaces métriques et topologiques. Nous avons aussi repéré des caractérisations différentes de celles choisies dans notre enseignement, mettant en évidence des liens possibles entre les notions, notamment en les définissant les unes par rapport aux autres. Par exemple, les notions de voisinage et d'ouvert peuvent être reliées de la manière suivante dans le cadre des espaces métriques. Un ensemble est un voisinage d'un point x s'il contient une boule de centre x. Un ouvert est alors défini comme un ensemble qui est voisinage de chacun de ses points. Un autre itinéraire consiste à définir un ouvert comme un ensemble dont tous les points sont centres d'une boule contenue dans cet ensemble. Un voisinage d'un point x est un ensemble contenant un ouvert qui contient x. L'intérieur d'un ensemble est caractérisé de différentes manières dans les manuels : il peut être l'ensemble des points intérieurs à l'ensemble, la réunion de tous les ouverts contenus dans l'ensemble ou encore, le plus grand ouvert contenu dans l'ensemble. Il en va de même pour l'adhérence qui apparaît comme l'ensemble des points adhérents, l'intersection de tous les fermés contenant l'ensemble ou encore, comme le plus petit fermé contenant l'ensemble.

Ces modes d'introduction des notions montrent une utilisation prépondérante du registre de la langue naturelle pour caractériser les notions, ce qui révèle un autre décalage par rapport à notre enseignement dans lequel le registre symbolique est principalement sollicité. Revuz (1964) propose de plus une vision intuitive et géométrique de certaines notions à partir du registre de la langue naturelle. Après avoir défini les notions de fermeture et d'intérieur dans le cadre des espaces topologiques, il ajoute :

> Dans le plan (muni de la topologie déduite de la distance ordinaire), l'ensemble défini par un contour fermé et comprenant les points intérieurs au contour et une partie du contour admet pour fermeture le même ensemble et ses frontières complétées et pour intérieur, l'intérieur (au sens vulgaire du mot), du contour.

Cette mise en relief des notions de topologie nous permet de développer ici deux pistes de travail pour agir sur l'enseignement décrit. Tout d'abord, nous faisons l'hypothèse qu'un moyen de contribuer à donner du sens aux notions est la possibilité d'établir des liens entre elles. Des liens possibles ont émergé des analyses précédentes. Une première piste consiste donc à intégrer dans l'enseignement d'autres notions que celles fixées par l'institution. Cette question s'associe à celle de l'ordre d'exposition des contenus et des choix à réaliser pour caractériser les notions. Nous retenons ensuite l'utilisation du registre de la langue naturelle pour définir les notions, permettant ainsi de s'appuyer sur un vocabulaire intuitif avec des mots tels que « frontière », « intérieur », etc. Une autre piste de travail concerne la possibilité d'utiliser plus souvent ce registre, notamment pour introduire les notions. Dans cette perspective, une réflexion sur la formalisation des notions doit être menée.

Bien entendu, ces pistes doivent prendre en compte les contraintes institutionnelles qui, d'une part, délimitent les contenus à enseigner et d'autre part, donnent comme objectif à l'enseignement d'amener les étudiants à manipuler le registre symbolique utilisé dans les définitions. Nous décrivons maintenant comment ces pistes ont davantage mené à des aménagements de l'enseignement plutôt qu'à de réelles modifications.

IV. FORMALISATIONS DES NOTIONS

Nous avons déjà évoqué les difficultés d'introduction d'une notion FUG. Dans l'enseignement décrit au début de ce texte, les notions sont introduites par des définitions écrites d'emblée dans le registre symbolique. Nous avons soulevé les difficultés des étudiants à donner du sens aux nouvelles notions en travaillant dans cet unique registre d'écriture. Dans notre travail de thèse, nous avons repensé l'introduction des notions visées. Nous avons ainsi élargi les contenus à enseigner en intégrant les notions de point intérieur et de point adhérent. Cet aménagement permet, selon nous, un travail en réseau de notions susceptible d'établir une progression cohérente des contenus et de donner davantage de sens aux notions. Nous avons de plus élaboré une tâche d'introduction visant à faire découvrir aux étudiants les notions de point intérieur et de point adhérent à partir d'un travail sur des dessins associés à la manipulation de la langue naturelle. Nous l'avons présentée au colloque EMF 2009 (Bridoux 2011a). Cette tâche sert également de point d'appui pour introduire les autres notions visées de manière justifiée et en sollicitant différents registres d'écritures pour utiliser, in fine, le registre symbolique. Nous décrivons ici le parcours suivi à partir de la notion de point intérieur, mais un itinéraire semblable est bien sûr développé à partir de la notion de point adhérent.

Après avoir travaillé sur la tâche d'introduction, les étudiants caractérisent un point intérieur de la manière suivante : p est un point intérieur à A si A contient une boule ouverte de centre p. Ils y associent de plus l'idée intuitive qu'un point p est intérieur à A si p a « un peu de place autour de lui dans l'ensemble A ». Avec l'aide de l'enseignant, cette caractérisation est traduite dans le registre symbolique sous la forme :

$$p \text{ est intérieur à A ssi } \exists r > 0,\ \mathrm{B}(p,r) \subset \mathrm{A}.$$

Du point de vue de la syntaxe formelle, démarrer l'enseignement par l'introduction de types de points permet de manipuler une écriture contenant un unique quantificateur. L'introduction de la notion d'intérieur (respectivement d'adhérence) d'un ensemble peut alors se justifier de manière naturelle en considérant l'ensemble des points intérieurs à l'ensemble (respectivement l'ensemble des points adhérents à l'ensemble). Une autre question qui devient tout aussi naturelle est de savoir si un ensemble peut coïncider avec son intérieur (respectivement avec son adhérence). Cela permet de définir les notions d'ouvert et de fermé.

Cet itinéraire permet donc d'introduire chaque notion, à partir d'un questionnement naturel et accessible aux étudiants, avec un formalisme moins complexe que celui initialement utilisé. En effet, l'intérieur s'écrit dans le langage symbolique comme $\mathrm{int}\,\mathrm{A} = \{x \in \mathrm{A} : \exists r > 0, \mathrm{B}(x, r) \subset \mathrm{A}\}$. Dès lors, un ensemble A est ouvert si et seulement si A = int A.

V. GESTION DES TÂCHES DE MANIPULATION DES DÉFINITIONS

Un autre aménagement de l'enseignement initial est l'incorporation de nombreux exemples, tant au niveau des types de points que des types d'ensembles. Nous pensons en effet que l'exemplification contribue à enrichir le stock de référence des étudiants et peut les aider à mieux se représenter la structure topologique des ensembles, notamment à partir des ressemblances et des différences avec les exemples traités dans le cours. Traiter des exemples permet également une prise en compte ciblée de la non disponibilité des connaissances en logique et en théorie des ensembles. Il ne s'agit donc pas de prévoir un cours avant l'enseignement pour faire travailler ces connaissances mais bien de les expliciter et les travailler au fur et à mesure.

Toutefois, nous faisons l'hypothèse que la multiplication des exemples peut favoriser les apprentissages des étudiants en topologie, tant du point de vue du sens que de la technique, moyennant une gestion adaptée du travail de l'enseignant en classe. En effet, les difficultés des étudiants rencontrées dans la manipulation d'une définition, ce qui devrait pourtant être une application immédiate du cours, nous amènent à admettre que la complexité du travail mathématique engendré par ce type de tâches ne peut être laissée à la charge des étudiants. En d'autres mots, nous pensons que de laisser chercher les étudiants de manière autonome sur ce type de tâches ne leur permet pas de surmonter les difficultés repérées, compte tenu de la distance entre ce qu'ils savent et ce dont ils ont besoin. Nous avons donc aménagé des phases durant lesquelles c'est l'enseignant qui montre aux étudiants le fonctionnement des connaissances mathématiques en jeu, par ostension assumée et par la multiplication des exemples. Nous empruntons ici à Vygotski des idées selon lesquelles il peut y avoir appropriation des connaissances par imitation, si les connaissances nouvelles sont proches des anciennes connaissances. Dans notre cas, nous savons que cette distance est grande mais nous faisons le pari que l'enseignant peut contribuer à la réduire en développant de nombreux exemples bien choisis. Des phases de travail autonome peuvent néanmoins être organisées, comme dans l'introduction des notions ou sur certains types de tâches à la fin de l'enseignement. L'exemplification que nous décrivons ici pose donc la question de la gestion à prévoir en classe par l'enseignant durant les tâches de manipulation des définitions.

D'un point de vue méthodologique, nous procédons de la manière suivante pour caractériser le travail des étudiants en classe. Dans un premier temps, nous réalisons une analyse a priori des exercices à proposer aux étudiants. Cependant, le travail qui est effectivement réalisé en classe est conditionné par la gestion de l'enseignant. Ses interventions peuvent en effet fortement influencer le travail prévu a priori. Robert et Rogalski (2004) ont montré que, dans certains cas, le déroulement en classe ne suit pas le même chemin que celui prévu par l'analyse a priori. Parfois, l'enseignant découpe la tâche, par le biais de ses interventions, en sous-tâches qui deviennent élémentaires. Le travail engendré est alors séquentialisé :

> Les élèves font fonctionner les outils les uns après les autres, ils n'ont besoin que de connaissances outils (empilées) correspondant au cours et soufflées par le découpage organisé par l'enseignant. (Robert et Rogalski, p. 83)

Pour illustrer notre propos, nous présentons deux exercices proposés à différents moments de l'enseignement. L'exercice 1 apparaît juste après l'introduction des notions de points intérieur et adhérent, l'exercice 2 est quant à lui proposé à la fin de l'enseignement.

1. Tâches proposées aux étudiants

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, on donne un point p et un ensemble A. Dites si le point p est intérieur à A ou non, adhérent à A ou non. Justifiez votre réponse.

1) $p = 1/3$, $\mathrm{A} = [0,1] \subset \mathbb{R}$
2) $p = -\sqrt{2}$, $\mathrm{A} = [-2,1] \subset \mathbb{R}$
3) $p = 1$, $\mathrm{A} = [0,1[\ \subset \mathbb{R}$
4) $p = 1/2$, $\mathrm{A} = \{1/n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \subset \mathbb{R}$
5) $p = 0$, $\mathrm{A} = \{1/n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \subset \mathbb{R}$
6) $p = (2,4)$, $\mathrm{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\} \subset \mathbb{R}^2$
7) pour $x, y \in \mathbb{R}$ et $r > 0$, $p = (x, y - r/3)$, $\mathrm{A} = \mathrm{B}\big((x,y), r\big) \subset \mathbb{R}^2$

Exercice 2

Les ensembles suivants sont-ils ouverts ? Fermés ? Justifiez votre réponse.

1) $[\pi, +\infty[\ \subset \mathbb{R}$
2) $]-\infty, -2[\ \subset \mathbb{R}$
3) $\{3\} \subset \mathbb{R}$
4) $\{1/n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \subset \mathbb{R}$
5) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3x + 2y = 6\} \subset \mathbb{R}^2$

L'exercice 1 a pour objectif d'habituer les étudiants à manipuler le registre symbolique pour rédiger les raisonnements attendus. La progression des exemples est telle que la nature des nombres et celle des ensembles se complexifient au fur et à mesure de l'exercice. Les exemples 6 et 7 provoquent un changement de cadre nécessitant d'adapter les raisonnements développés dans $\mathbb{R}$ à des couples de nombres réels.

L'exercice 2 porte sur la structure topologique des intervalles non bornés de $\mathbb{R}$, d'un singleton et de deux sous-ensembles classiques de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{R}^2$.

Nous choisissons de présenter l'analyse a priori des exemples 4 dans chaque exercice, en nous focalisant sur les notions d'intérieur et d'ouvert, ainsi que la gestion prévue. Nous rendons compte par après du déroulement en classe.

2. *Analyses a priori*

Nous donnons en annexe une solution possible pour chaque exemple à traiter en rédigeant celle-ci avec la rigueur attendue dans notre enseignement.

Dans l'exercice 1, l'exemple 4 requiert en premier lieu de savoir si le point p est intérieur à l'ensemble ou non. Il faut ensuite prouver la négation de la définition, c'est-à-dire ici $\forall r > 0$, $\mathrm{B}(1/2\,, r) \not\subset$ A. Une connaissance du cours est alors mise en jeu : dans $\mathbb{R}$, la boule ouverte de centre x et de rayon r est l'intervalle $]x - r, x + r[$. L'organisation du raisonnement est alors de trouver un réel y tel que $y \in \mathrm{B}(1/2\,, r)$ et $y \notin$ A. Justifier que y convient mobilise la manipulation d'inégalités et l'ordre sur $\mathbb{R}$ (connaissances anciennes).

Dans l'exercice 2, l'exemple 4 nécessite en premier lieu de savoir si l'ensemble est ouvert ou non. L'ensemble, que nous notons A, n'est pas ouvert, ce qui amène à prouver qu'on a A $\not\subset$ int A. Il faut donc trouver un réel y tel que $y \in$ A et $y \notin$ int A. Ensuite, montrer que le choix fait pour y convient engendre un travail semblable à celui réalisé dans l'exercice 1.

3. *Gestion de l'enseignant en classe*

Compte tenu des difficultés répertoriées chez les étudiants dans la réalisation des tâches de manipulation des définitions, nous choisissons, pour l'exercice 1, d'organiser un moment de recherche individuelle pour que les étudiants prennent connaissance des différents exemples à traiter. Mais la correction prend la forme d'une discussion collective durant laquelle c'est l'enseignant qui montre le type de justification et la rigueur attendus pour manipuler les définitions à partir du registre symbolique. Dans cette perspective, il insiste sur les adaptations de connaissances à réaliser et sur la manière d'utiliser les connaissances en logique et en théorie des ensembles mises en jeu, dont on sait qu'elles ne sont pas disponibles chez un grand nombre d'étudiants à ce stade de l'enseignement.

Durant l'exercice 2, la gestion en classe prend la forme d'une phase de recherche individuelle assez longue, pour que les étudiants aient le temps de traiter chaque exemple. Ils doivent ici réaliser de manière autonome les adaptations nécessaires pour étudier chaque ensemble. Compte tenu des analyses a priori, nous faisons donc l'hypothèse que la gestion prévue pour l'exercice 1 permettra aux étudiants « d'imiter » le travail réalisé par l'enseignant pour résoudre l'exercice 2. Du point de vue du déroulement en classe, la mise au travail des étudiants s'est faite sans difficulté. Toutefois un temps de recherche de 40 minutes a été organisé alors que la gestion prévue a priori comptait 25 minutes. Aucune difficulté particulière ni de blocage n'a été repéré chez les étudiants pendant la réalisation de la tâche. Les étudiants ont travaillé individuellement tout en discutant entre eux. En circulant parmi eux pour maintenir les conditions de travail, nous avons constaté que la majorité des étudiants parvenait à conjecturer si les ensembles étaient ouverts, fermés ou non. Nous avons également noté dans certaines productions quelques manques de justification (par exemple une inclusion d'ensembles non prouvée) qui ont pu être complétés à notre demande. Le travail réalisé semble donc conforme à celui prévu dans l'analyse a priori mais il est bien sûr impossible d'avoir accès à la production de chaque étudiant en classe. La correction de cet exercice a pris une forme identique à celle de l'exercice 1, c'est-à-dire celle d'une discussion collective entre les étudiants et l'enseignant, ce dernier présentant au tableau les réponses dictées par les étudiants, en les ajustant au besoin.

VI. APPRENTISSAGES DES ÉTUDIANTS

Après avoir expérimenté notre dispositif didactique intégrant notamment les aménagements décrits dans ce texte, nous nous sommes appuyée sur le dépouillement des copies aux évaluations pour caractériser les apprentissages des étudiants. Dans notre institution, une première évaluation est organisée au mois de juin et les étudiants qui échouent se prêtent à une autre évaluation au mois d'août. Nous rendons compte ici de la question portant sur la manipulation des définitions proposée à la seconde évaluation, une question similaire ayant été posée en juin. En voici l'énoncé :

Soit A $\subset \mathbb{R}^N$.

1) Définissez « A est un ensemble ouvert ».
2) Définissez « A est un ensemble fermé ».
3) À partir des définitions précédentes, dites, pour chacun des ensembles suivants, s'il est ouvert ou fermé :
   - $\mathrm{E}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq y\} \subset \mathbb{R}^2$
   - $\mathrm{E}_2 = \{(n + 1)/n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \subset \mathbb{R}$
   - $\mathrm{E}_3 = \{x \in \mathbb{R} : x^3 + x^2 + x + 1 < 1\} \subset \mathbb{R}$

Nous avons montré que l'analyse a priori de cet exercice met en jeu un travail identique à celui réalisé dans des exercices proposés durant l'expérimentation, tant du point de vue des connaissances à utiliser que des adaptations à réaliser sur celles-ci (Bridoux 2011b). Ainsi, un aspect important du travail attendu de l'étudiant est de particulariser des variables communes à cet exercice et à ceux réalisés en cours, telles que la nature des nombres, le choix du rayon d'une boule, etc. Notre démarche globale pour caractériser les apprentissages des étudiants sur ce type de tâches a donc consisté à analyser comment ils étudient la nature topologique de quelques ensembles ayant des traits communs avec ceux étudiés dans le cours et les difficultés rencontrées dans la manipulation du registre symbolique.

Les 23 étudiants auprès de qui nous avons expérimenté le dispositif ont présenté au final les deux évaluations. Elles montrent que les étudiants ont progressé tant dans la restitution des définitions que dans les tâches de manipulation de ces dernières puisque nous avons un taux de réussite de 80% sur ce types de questions. Concernant les définitions, nous observons des erreurs ponctuelles. Par exemple, un étudiant définit l'intérieur d'un ensemble A par $\forall x \in \mathrm{A}$, $\exists r > 0,\ \mathrm{B}(x, r) \subset \mathrm{A}$. Un autre étudiant définit un ensemble fermé par $\forall x \in \mathrm{A}$, $\forall (x_n) \subset \mathrm{A}$, si $x_n \longrightarrow x$, alors $x \in \mathrm{A}$. Concernant la manipulation du registre symbolique utilisé dans les définitions, nous relevons ce que nous appelons le « principe du tout ou rien » : soit l'étudiant répond correctement à la question, soit il est bloqué au démarrage de l'exercice et n'écrit pratiquement rien sur sa copie. Voici quelques exemples d'erreurs observées dans les copies. Pour montrer que l'ensemble E_2 n'est pas ouvert, deux étudiants ne parviennent pas à trouver un réel y tel que $y \in \mathrm{B}(2, r)$, pour un certain r, et $y \notin \mathrm{E}_2$. Pour l'ensemble E_3, deux étudiants ne s'intéressent pas à la résolution de l'inéquation pour remarquer que E_3 est un intervalle et ne parviennent pas à conjecturer si l'ensemble est ouvert ou non, fermé ou non. Enfin, deux étudiants traduisent la non-inclusion $\mathrm{E}_1 \not\subset \mathrm{int}\ \mathrm{E}_1$ de la manière suivante : « soit $z \in \mathrm{E}_1$. Montrons que $z \notin \mathrm{int}\ \mathrm{E}_1$ ».

VII. CONCLUSION

Le point de départ de nos recherches sur les notions de topologie réside dans notre volonté d'intervenir, en tant qu'enseignante, dans un enseignement soumis à des contraintes institutionnelles fortes et qui mène à un constat d'échec. Nous nous sommes centrée ici sur la possibilité de réduire certaines difficultés repérées chez les étudiants dans les tâches de manipulation des définitions des notions présentées dans le cours.

En nous appuyant sur des analyses didactiques menées en amont de l'enseignement, nous avons élargi le réseau de notions à enseigner et nous avons agi sur les formalisations des notions de manière à leur donner davantage de sens. Ce premier aménagement nous a permis de développer un itinéraire présentant, selon nous, une meilleure cohérence dans l'introduction des notions par rapport à l'enseignement initial. Concernant les exercices visés, l'itinéraire développé associé à une gestion spécifique de l'enseignant durant les phases d'exercices a permis de montrer aux étudiants pas à pas le travail de manipulation des définitions attendu, pour les amener à réaliser seuls, à la fin de l'enseignement, les tâches visées par l'institution.

Les évaluations montrent les progrès des étudiants sur ce type de tâches. Toutefois, même si les aménagements décrits ici permettent à l'enseignement de tenir ses promesses vis-à-vis des contraintes institutionnelles qui le délimitent, nous avons été amenée à questionner ces contraintes tout au long de notre travail de thèse et à mener une réflexion plus globale sur l'enseignement supérieur en général. En effet, au fil du temps, certaines habitudes de l'enseignant et de l'institution peuvent devenir transparentes, notamment en termes de rigueur attendue dans les productions des étudiants ou concernant les contenus à enseigner et leur progression, par exemple. L'importance de ces habitudes et des contraintes institutionnelles nous a été révélée dans nos recherches. Avec le temps, les contraintes ne sont plus questionnées alors que les connaissances des étudiants se modifient au fil des années. Les analyses didactiques que nous avons menées nous ont permis de mieux interroger nos choix en tant qu'enseignante et d'envisager d'autres possibilités d'enseignement~~s~~, menant probablement à d'autres apprentissages chez les étudiants.

RÉFÉRENCES

Bridoux S. (2005) Analyse d'un enseignement de topologie en première année d'université. *Cahier de Didactique des Mathématiques* 51. Université Paris 7.

Bridoux S. (2008) Utiliser une définition, une tâche simple a priori ; le cas de la topologie de $\mathbb{R}^N$. *Actes du colloque EMF 2006.* Université de Sherbrooke, Canada.

Bridoux S. (2011a) Une séquence d'introduction des notions de topologie dans $\mathbb{R}^N$: de la conception à l'expérimentation. *Actes du colloque EMF 2009,* Université de Dakar, Sénégal.

Bridoux S. (2011b) *Enseignement des premières notions de topologie à l'université – Une étude de cas*. Thèse de doctorat de l'Université Paris Diderot.

Cantor G. (1883) Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen. *Math. Ann.* 5, 123-132. 1872, *Gesamm. Abh.* 92-101, Springer, Berlin, 1932, trad. Française *Acta Mathematica,* 2, 336-348, 1883.

Chevallard Y. (1985) *La transposition didactique.* Grenoble : La Pensée Sauvage. Rééd. augmentée (1991).

Dorier J.-L. (2000) Recherche en Histoire et en Didactique des Mathématiques sur l'Algèbre Linéaire – Perspectives théoriques sur leurs interactions. *Les cahiers du Laboratoire Leibniz,* Numéro 12, Laboratoire Leibniz – IMAG.

Fréchet M. (1906) Sur quelques points du calcul fonctionnel. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* 22, 1-74.

Revuz A. et G. (1964) *Cours de l'APM.* Paris, APMEP.

Robert A. (1998) Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 18(2), 138-190.

Robert A., Rogalski M. (2004) Problèmes d'introduction et autres problèmes de recherche au lycée. *Repères* 54, 77-103.

Schwartz L. (1967) *Cours d'analyse.* Hermann.

Weierstrass K. (1894) *Mathematische Werke.* Band I. Berlin : Layer und Müller.

ANNEXE

$1/2$ n'est pas un point intérieur à l'ensemble $\mathrm{A} = \{1/n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \subset \mathbb{R}$. En effet, $\forall r > 0,\ \mathrm{B}(1/2\,, r) \not\subset \mathrm{A}$. Soit $r > 0$. Cherchons un réel y tel que $y \in \mathrm{B}(1/2\,, r)$ et $y \notin \mathrm{A}$. Si $r = 1$, alors $\mathrm{B}(1/2\,, r) = \,]-1/2\,, 3/2[$ par définition d'une boule dans $\mathbb{R}$. Prenons alors $y = 3/4$. On a $y \in \mathrm{B}(1/2\,, 1)$ et $y \notin \mathrm{A}$ car y n'est pas de la forme $1/n$, avec $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Si $r \neq 1$, alors prenons $y = 1/2 + r/2$. On a $y \in \mathrm{B}(1/2\,, r)$ car, comme $r > 0$, $1/2 - r < 1/2 + r/2 < 1/2 + r$. Mais $1/2 + r/2 \notin \mathrm{A}$ car $1/2 + r/2 = (1 + r)/2$ n'est pas de la forme $1/n$, avec $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

$\mathrm{A} = \{1/n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ n'est pas un ensemble ouvert car A n'est pas égal à son intérieur. En effet, 1 n'est pas un point intérieur à A. Montrons que $\forall r > 0,\ \mathrm{B}(1, r) \not\subset \mathrm{A}$. Soit $r > 0$. Prenons $y = 1 + r/2$. On a $y \in \mathrm{B}(1, r)$. Mais $y \notin \mathrm{A}$ puisque $y > 1$ car $r > 0$ et pour tout $n \geq 1,\ 1/n \leq 1$.

UN MÉTA-LANGAGE POUR AIDER À LA TRANSITION SECONDAIRE-UNIVERSITÉ

Martine DE VLEESCHOUWER*

Résumé – Cette contribution concerne l'enseignement et l'apprentissage de la dualité en algèbre linéaire. Combinant une perspective institutionnelle et le concept de contrat didactique, nous soutenons que certaines difficultés des étudiants novices peuvent résulter de caractéristiques spécifiques au contrat en vigueur à l'université, à différents niveaux. Nous illustrons cette thèse dans le cas de la dualité, pour lequel nous concevons un enseignement expérimental utilisant entre autres un méta-langage et visant à aider les étudiants à entrer dans le nouveau contrat à différents niveaux. Par l'analyse de productions des étudiants, nous observons qu'ils développent des compétences spécifiques au nouveau contrat en vigueur.

Mots-clefs : transition secondaire-université, algèbre linéaire, contrat didactique, institutions, niveaux micro et macro

Abstract – This contribution concerns the teaching and learning of duality in linear algebra. Combining an institutional perspective and the concept of didactic contract, we argue that some of the novice students' difficulties can result from specific features of the university contract, at different levels. We illustrate this thesis in the case of duality, for which we designed an experimental teaching, using among other things a meta-language aimed at supporting students' adherence to the new contract, at different levels. Analyzing students' productions, we observe that they developed abilities specific to the new contract.

Keywords: secondary-tertiary transition, linear algebra, didactic contract, institutions, micro and macro levels

La dualité en algèbre linéaire, qui est enseignée en première année à l'Université de Namur à des étudiants se destinant à un master en mathématique ou en physique, est reconnue comme une matière difficile pour ces étudiants débutants. L'objectif principal de notre travail est de comprendre les difficultés qu'ils rencontrent, et de proposer un enseignement de la dualité susceptible de surmonter ces difficultés.

La dualité peut être considérée comme un contenu spécifique aux mathématiques universitaires, éloignées de l'école secondaire. Cela nous a conduit à positionner notre étude dans le cadre de la transition secondaire-université. Dans un travail précédent (De Vleeschouwer 2010a), nous avons analysé les difficultés des étudiants confrontés à la dualité et nous avons catégorisé les difficultés observées en adoptant un point de vue institutionnel. Le travail que nous présentons ici correspond à deux nouvelles orientations de recherche. D'un point de vue théorique, nous proposons d'envisager le changement de contrat didactique entre l'école secondaire et l'université sous une perspective institutionnelle. D'un point de vue empirique, nous avons conçu et testé un enseignement expérimental ayant pour but d'aider les étudiants à entrer dans le nouveau contrat didactique. Nous en examinerons l'impact sur des productions d'étudiants.

Dans la première partie, nous décrivons nos propositions théoriques, articulant le contrat didactique et la perspective institutionnelle. Dans la deuxième partie, nous appliquons notre analyse au contexte d'algèbre linéaire et plus particulièrement à la dualité en algèbre linéaire. Nous présentons l'enseignement expérimental dans la troisième partie ; nous analysons son impact dans la quatrième partie, en nous basant sur des réponses d'étudiants à un questionnaire.

*Unité de didactique des mathématiques, Université de Namur – Belgique – mdv@math.fundp.ac.be

© De Vleeschouwer M. (2012) Un méta-langage pour aider à la transition secondaire-université. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT7, pp. 975–986). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

I. CONTRAT DIDACTIQUE, INSTITUTIONS ET TRANSITION SECONDAIRE-UNIVERSITÉ

La notion de contrat didactique a été introduite par Brousseau (1986), pour décrire un système de règles, souvent implicites, impliquant les étudiants et l'enseignant, à propos d'un objet de savoir particulier. Une autre interprétation du contrat, pertinente dans notre étude, est formulée en termes de partage de responsabilités, par rapport à la connaissance, entre les étudiants et l'enseignant :

> Alors se noue une relation qui détermine — explicitement pour une part, mais surtout implicitement — ce que chaque partenaire, l'enseignant et l'enseigné, a la responsabilité de gérer et dont il sera d'une manière ou d'une autre, responsable devant l'autre. Ce qui nous intéresse ici est le contrat didactique, c'est-à-dire la part de ce contrat qui est spécifique au « contenu » : la connaissance mathématique visée. (Brousseau 1998, p. 61)

Sous cet angle, on peut affirmer, comme Artigue (1999), que quand un étudiant entre à l'université, « le contrat didactique n'est plus le même ». Plusieurs auteurs adoptent ce point de vue pour étudier les difficultés des étudiants débutants (Bloch 2005 ; Grønbæk, Misfeldt et Winsløw 2009). Cependant, les caractéristiques du contrat identifiées sont souvent très générales : les étudiants doivent montrer une plus grande autonomie, ils doivent être en mesure de développer des raisonnements impliquant des cadres différents (Douady 1987), etc. Ces caractéristiques concernent des attentes institutionnelles générales et non un contenu mathématique particulier.

Les travaux de Chevallard (2007) peuvent nous aider à éclairer ce dernier point. Selon cet auteur, un sujet, dans une institution, rencontre une certaine connaissance mathématique. L'institution façonne cette connaissance en une organisation mathématique, ou praxéologie, qui se compose de quatre composantes : un type de tâches, une technique pour accomplir ce type de tâches, une technologie qui est un discours justifiant la technique, et une théorie. Les organisations mathématiques existent à différents niveaux, du plus particulier au plus général. Nous y reviendrons par la suite en faisant référence à l'échelle de niveaux de co-détermination didactique (Chevallard 2007).

Dans cette perspective, nous sommes amenée à distinguer plusieurs niveaux de contrat dans une institution donnée :

- Un contrat général, indépendant de toute connaissance ; Sarrazy (2005) l'appelle le contrat pédagogique. Par exemple, à l'université, dans certains pays, la présence au cours n'est pas obligatoire ; la prise de notes est sous la responsabilité des étudiants, etc.

- Un contrat didactique concernant la discipline mathématique (en général) dans l'institution. Par exemple, à l'université, un langage formel est utilisé en mathématique, des preuves rigoureuses sont présentées, etc.

- Un contrat didactique concernant un contenu particulier, concernant des notions mathématiques spécifiques.

Ces distinctions étant établies, nous sommes maintenant en mesure de préciser la question principale sur laquelle nous nous pencherons dans cet article : est-il possible d'aider les étudiants à entrer dans le nouveau contrat aux différents niveaux, et comment ? Nous étudierons plus particulièrement cette question dans le contexte de la dualité en algèbre linéaire.

Nous identifions tout d'abord les caractéristiques du contrat didactique à l'université, correspondant aux différents niveaux identifiés, pour l'enseignement de la dualité.

II. CONTRAT DIDACTIQUE INSTITUTIONNEL ET DUALITÉ EN ALGÈBRE LINÉAIRE

Nous ne considérons pas ici le contrat au niveau général, mais nous commençons par le niveau du contrat didactique spécifique à la discipline mathématique. En examinant différents travaux de recherche concernant la transition (Praslon 2000 ; Bloch 2005 ; Bosch et al. 2004 ; Winsløw 2008), nous identifions les difficultés suivantes des étudiants, comme correspondant à des changements de contrat didactique au niveau de la discipline mathématique, entre l'institution « enseignement secondaire » et l'institution « université » :

- des difficultés à construire des exemples ;
- des difficultés à travailler dans des cadres différents, en passant d'une représentation à une autre ;
- des difficultés liées à l'utilisation d'un langage formel et symbolique : ce que Dorier, Robert, Robinet et Rogalski (1997) nomment « l'obstacle du formalisme » ;
- des difficultés à travailler au niveau technologico-théorique (Chevallard 2007) ; en particulier, des difficultés à produire un discours justifiant une technique.

Selon les auteurs mentionnés ci-dessus, à l'université, l'étudiant a généralement la charge de ces questions qui étaient sous la responsabilité de l'enseignant à l'école secondaire.

A un niveau plus spécifique, concernant l'algèbre linéaire et la dualité, nous déduisons les règles du contrat didactique par le biais de l'analyse de manuels (De Vleeschouwer 2010b). On a ainsi pu constater une modification importante : plusieurs concepts, en algèbre linéaire, peuvent changer de statut, selon le contexte. Par exemple, une matrice peut être considérée comme représentant une application linéaire dans des bases données ; elle peut aussi être considérée comme un élément d'un espace vectoriel. Une fonction peut être vue à la fois comme un processus agissant sur des objets donnés, et à la fois comme un élément d'un espace vectoriel. Ce dernier exemple est crucial en dualité, où les étudiants auront à déterminer le dual d'un espace vectoriel donné : un ensemble de formes linéaires. En Belgique, où notre étude a lieu, les étudiants rencontrent les matrices et les fonctions à l'école secondaire. Mais dans cette institution, les matrices et les fonctions ne sont pas considérées comme des éléments d'un ensemble. À l'université, l'étudiant doit être capable de basculer entre les deux statuts qui ne sont par ailleurs pas explicitement présentés.

En 2008-2009, nous avons élaboré et testé un enseignement de la dualité en tenant compte de ces caractéristiques du contrat, tant au niveau de la discipline mathématique qu'au niveau du contenu spécifique qu'est la dualité.

III. AIDER LES ÉTUDIANTS À ENTRER DANS UN NOUVEAU CONTRAT : UNE EXPÉRIENCE À NAMUR

Nous présentons ici les principaux choix que nous avons faits pour l'enseignement expérimental élaboré. Ce dernier est centré sur la dualité, mais met aussi l'accent sur quelques prérequis (tel un répertoire minimal d'espaces vectoriels). Nous voulons tout d'abord en situer le contexte, tant en ce qui concerne les étudiants concernés qu'en ce qui concerne l'organisation.

L'université de Namur a mis en place un dispositif, baptisé « opération tremplin », ayant pour but d'aider les étudiants de première année dans leur entrée à l'université (De Vleeschouwer 2008). Ce dispositif consiste à proposer des séances de remédiation aux étudiants, en réponse à une demande de leur part, résultant d'une difficulté rencontrée. Ces séances, appelées aussi séances tremplin, sont proposées à raison de deux à quatre heures par semaine selon les sections concernées. En tant qu'enseignante, nous avons participé à l'opération tremplin proposée aux étudiants de première année se destinant à obtenir un Master en mathématiques à l'Université de Namur (26 étudiants étaient inscrits en première année en 2008-2009). Les séances tremplin ont principalement servi de niche au dispositif expérimental que nous avons conçu (seule la variété d'espaces vectoriels a été développée dans un travail de groupe, en dehors de l'opération tremplin). Ce choix est le résultat de contraintes institutionnelles : la mise en place de l'enseignement expérimental dans le cours « normal » (cours théorique et travaux dirigés associés) aurait été refusée par les responsables de cet enseignement. Généralement, une partie seulement des étudiants assistent aux séances tremplin. Pour l'enseignement expérimental, tous les étudiants ont été invités à participer ; 20 d'entre eux ont finalement suivi les séances. Notre analyse concerne donc ces 20 étudiants.

Avant l'enseignement de la dualité, les étudiants avaient déjà vu, au cours théorique et aux travaux dirigés (exercices) d'algèbre linéaire, les espaces vectoriels (structures algébriques, dépendance linéaire et dimension, sous-espaces vectoriels), les applications linéaires et les matrices associées.

Le dispositif expérimental que nous avons conçu commence avant l'enseignement de la dualité par un travail de groupe (obligatoire) visant à fournir aux étudiants un répertoire minimum d'espaces vectoriels. La dualité en elle-même a été abordée un mois après le début de l'année académique, en octobre 2008, et l'enseignement correspondant a duré cinq semaines :

- au cours de la semaine 1, les étudiants suivent un cours théorique (1,5 h) portant sur les formes linéaires et l'espace dual. Une majorité d'entre eux participent ensuite, en séance tremplin, à une activité dont le but est de sensibiliser aux différents statuts que peut revêtir une matrice en algèbre linéaire : élément d'un groupe, d'un anneau, d'un espace vectoriel ou représentant une application linéaire ;
- au cours de la semaine 2, nous proposons aux étudiants, en séance tremplin, une activité, intitulée « formes linéaires et dual », décrite ci-après (1h). De plus, les étudiants suivent un cours théorique (1,5 h) où leur sont présentés l'espace bidual, le théorème de réflexivité et la transformation transposée ;
- durant la semaine 3, des illustrations d'espaces duaux et biduaux sont présentés en séance tremplin (1h) ;
- enfin, au cours des semaines 4 et 5, les étudiants assistent à des séances de travaux dirigés (exercices) sur la dualité (2 × 2h).

Nous nous concentrons dans cet article sur l'activité « formes linéaires et dual », issue de ce dispositif expérimental. Nous la présentons ici, avec les choix associés (décrits en détails dans De Vleeschouwer 2010b).

Nous avons déjà mis en évidence que, dans l'institution université, une fonction, et donc en particulier une forme linéaire, peut changer de statut selon le contexte considéré. Dans le contexte de la dualité algébrique, différents statuts d'une forme linéaire peuvent être présents dans une même tâche. En effet, lorsqu'on considère une forme linéaire φ_i issue d'une base duale X' d'une base X dans un espace vectoriel E, elle combine deux statuts :

- le statut de processus opérant sur des éléments de l'espace vectoriel E. Ce statut apparaît dans la relation liant une base $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ de l'espace vectoriel E à sa base duale $X' = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$: $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$, où δ_{ij} représente le symbole de Kronecker ;

- le statut d'élément d'un espace vectoriel, à savoir le dual de *E* (noté *E'*), élément en tant que vecteur faisant partie d'une base de l'espace vectoriel *E'*.

Cette pluralité de statuts peut être considérée comme un aspect du contrat didactique institutionnel, au niveau d'un contenu particulier. « Une forme linéaire est un processus, et un élément d'un espace vectoriel, et les étudiants doivent être capables de passer d'un statut à l'autre » est une règle de ce contrat. Ceci est certainement en relation avec la dialectique « process/object » (Dubinsky 1991), mais nous n'examinons pas ici l'aspect cognitif : nous considérons la manière dont l'institution façonne le contenu. Cette règle reste implicite, et ce changement de statuts engendre des difficultés pour les étudiants. Dans le dispositif expérimental que nous avons conçu, nous avons choisi de rendre cette règle explicite pour les étudiants.

À cette fin, nous introduisons un vocabulaire spécifique, présenté aux étudiants lors de l'enseignement proposé durant les sessions tremplin. Ce vocabulaire n'est donc pas un outil d'analyse pour notre recherche ; il peut être considéré comme un méta-langage proposé aux étudiants (Robert et Robinet 1996). Du point de vue du chercheur, il est en relation directe avec les niveaux introduits par Chevallard (2007) dans son échelle des niveaux de co-détermination didactique[1]. Nous développerons ce point après avoir présenté le vocabulaire spécifique que constituent les niveaux *micro* et *macro*.

Nous disons qu'une forme linéaire φ est considérée au *niveau micro* lorsqu'elle est considérée en tant que processus opérant sur des éléments d'un espace vectoriel *E* (construit sur le champ[2] *K*). Nous expliquons aux étudiants que ce choix de vocabulaire est une métaphore, indiquant que φ est perçue « en détail », ce qui permet d'observer par exemple la transformation qu'elle opère sur les différents vecteurs de l'espace vectoriel *E* de départ. À ce niveau, on peut en considérer le noyau, l'image, le rang, etc. On peut en avoir une représentation imagée, présentée à la Figure 1.

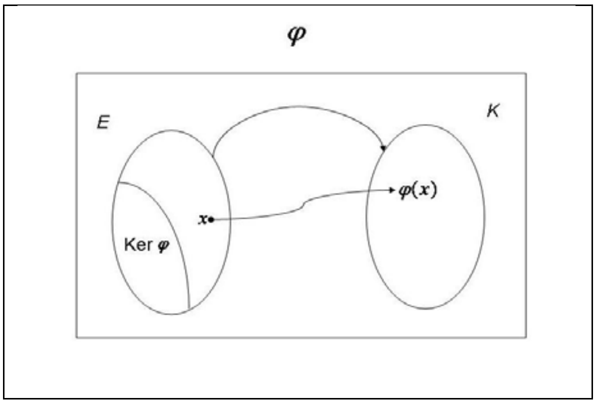


Figure 1 *– Exemple du niveau micro d'une forme linéaire* φ

Nous disons qu'une forme linéaire φ est considérée au *niveau macro* lorsqu'elle est considérée comme un élément d'un espace vectoriel (fonctionnel). Si l'on considère de la sorte d'autres formes linéaires définies sur le même espace *E*, et qu'on les rassemble dans un ensemble auquel on adjoint des lois d'addition et de multiplication par un scalaire, on obtient alors un espace vectoriel, qui n'est autre que le dual de *E*. Les formes linéaires considérées ont alors le statut d'élément d'un espace vectoriel. Nous parlons là d'un niveau macro. La Figure 2 en offre une représentation imagée.

---

[1] Le bas de l'échelle des niveaux de co-détermination didactique est composé de l'échelon « discipline », suivi de celui de « domaine », de « secteur », de « thème » et de « sujet ».

[2] Dans certains pays francophones, on parlera plutôt d'un *corps commutatif* (« field » en anglais).

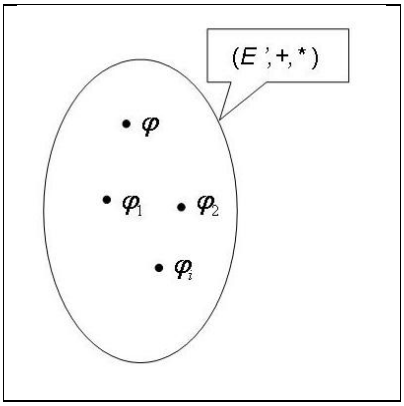


Figure 2 *– Exemple du niveau macro d'une forme linéaire φ*

Dans les deux niveaux présentés (micro-macro), il s'agit bien entendu du même objet φ « forme linéaire », mais considéré sous des statuts différents. Ce changement de statut, et a fortiori une combinaison de ces deux statuts, ne va pas de soi pour les étudiants ; nous estimons que la distinction explicite entre niveaux micro et macro peut les aider à faire cette distinction, et à prendre en compte, pour l'objet « forme linéaire », les notions afférentes (rang, image, vecteur, base, etc.) selon le statut considéré. Ainsi, on peut interpréter les niveaux micro et macro comme une explication de règles habituellement implicites dans le contrat. Le dispositif « formes linéaires et dual » niché dans l'opération tremplin peut donc être considéré comme une aide à l'entrée dans le nouveau contrat, au niveau de la discipline.

Du point de vue du chercheur, les niveaux micro et macro proposés pour les formes linéaires correspondent à l'appartenance de l'objet « forme linéaire » à différents *secteurs* du *domaine* de l'algèbre linéaire, en référence à l'échelle des niveaux de co-détermination didactique de Chevallard (2007). La figure 3, davantage commentée dans (De Vleeschouwer 2010b), présente la carte conceptuelle institutionnelle de la dualité élaborée à partir du polycopié d'algèbre linéaire à Namur. On peut considérer que les encadrés de cette figure correspondent à différents *secteurs* de l'algèbre linéaire. On peut y voir que les formes linéaires peuvent intervenir comme *thème* ou *sujet* à la fois du secteur des applications linéaires et du secteur dualité. Selon le secteur considéré, les *sujets* associés aux formes linéaires seront différents. Il est bien entendu impensable d'utiliser les termes de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard 2007) lors de l'enseignement de la dualité. C'est pourquoi le vocabulaire « niveau micro » et « niveau macro » a été explicitement présenté aux étudiants.

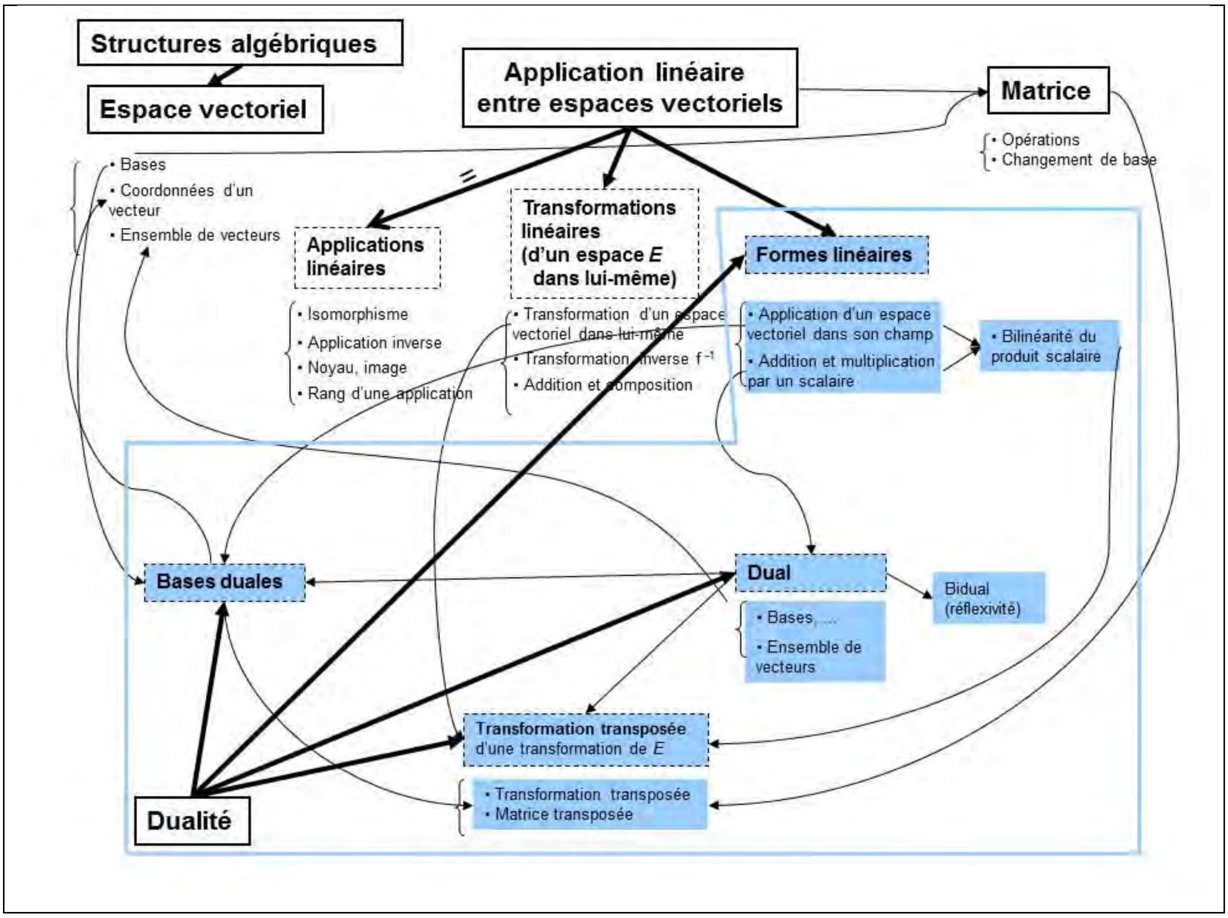


***Figure 3** – Carte conceptuelle institutionnelle de la dualité, élaborée à partir du polycopié d'algèbre linéaire à Namur*

Comme expliqué en début de cette section, le dispositif « formes linéaires et dual » présenté ici s'insère dans un dispositif plus général proposé à l'université de Namur en 2008-2009 pour aider les étudiants dans l'apprentissage de la dualité en algèbre linéaire. Une évaluation de ce dispositif a eu lieu quatre mois après l'enseignement expérimental, comportant entre autres un questionnaire. Des extraits de ce dernier, ainsi que les résultats associés, sont présentés dans la section suivante. Dans les réponses des étudiants, plus que le succès ou l'échec, nous tentons d'identifier des indices de leur entrée ou non dans le nouveau contrat.

IV. IMPACT DE L'ENSEIGNEMENT EXPÉRIMENTAL

Nous présentons ici un extrait du questionnaire, et analysons les réponses des étudiants en termes de contrat didactique.

Question 1. Considérons $\mathcal{P}^3$, l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3, construit sur le champ des réels. Soient, pour $i = 1, \ldots, 4$, $p_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tels que $\forall\, x \in \mathbb{R}$: $p_1(x) = x^3 + 2x^2 + 4$, $p_2(x) = 2x^3 - x + 2$, $p_3(x) = x^3 - 1$, $p_4(x) = 2x^3 + 3$.

Montrez que l'ensemble $\{ p_1, p_2, p_3, p_4 \}$ constitue une base de $\mathcal{P}^3$, et déterminez-en la base duale.

Question 2. Soient f_1, f_2, f_3 telles que :

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^5 & \to & \mathbb{R} \\ v = (a,b,c,d,e) & & f_1(v) = 3a - 2e \end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^5 & \to & \mathbb{R} \\ v = (a,b,c,d,e) & & f_2(v) = a - b + 2c \end{array}$$

f_3: $\mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}$
$v = (a, b, c, d, e) \qquad f_3(v) = 3b + 6c - 2e$

a) Donner un exemple d'espace vectoriel auquel appartiennent f_1, f_2, f_3.

b) f_1, f_2, f_3 sont-elles linéairement indépendantes ou dépendantes ?

c) Donnez un exemple de forme linéaire qui n'appartient pas au Span$\{f_1, f_2, f_3\}$.

Question 3. Choisissez un espace vectoriel autre que celui des polynômes, $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ ($\forall\ n \in \mathbb{N}$), et donnez un exemple de forme linéaire défini sur cet espace.

Tableau 1 *– Extrait du questionnaire proposé aux étudiants*

La méthodologie utilisée ici est basée sur l'analyse a priori du questionnaire (Hejny et al. 1999). Nous identifions, dans lequestionnaire, les aspects spécifiques du contrat en vigueur à l'université, et nous examinons, dans les réponses des étudiants, si cela entraîne des difficultés, ou si par contre cela indique l'entrée dans le sscontrat.

La première question est posée dans le cadre des polynômes et fait explicitement référence à la dualité, puisque les étudiants ont à déterminer la base duale d'une base donnée. Les étudiants doivent considérer conjointement le niveau micro et macro des formes linéaires, ce qui est typique du nouveau contrat au niveau du contenu « formes linéaires ».

La deuxième question est posée dans le cadre fonctionnel. Les fonctions proposées sont définies à un niveau micro. Bien qu'il s'agisse de formes linéaires, ce terme n'est cependant pas utilisé dans l'énoncé de la question afin de ne pas induire la réponse « espace dual » à la question 2.a). Pour répondre à la question 2.b), les étudiants doivent considérer les fonctions en tant que vecteurs, ce qui signifie un changement de niveau, puisqu'ils doivent ici travailler au niveau macro. Le raisonnement des étudiants doit donc se placer à un niveau différent que celui proposé au début de la question 2.

La question 3 propose un cadre différent de celui des polynômes (question 1) ou du cadre algébrique (classiquement présenté au cours). Le changement de cadres est également typique du contrat didactique à l'université au niveau de la discipline. La deuxième partie de la question 3 demande de considérer une forme linéaire à un niveau micro, c'est-à-dire en tant que processus agissant sur les éléments de l'espace vectoriel choisi.

On remarque aussi que les questions 2.a), 2.c) et 3 requièrent la construction d'un exemple. À l'instar du changement de cadres, de telles tâches sont également typiques du contrat didactique institutionnel à l'université, au niveau discipline mathématique.

Nous allons maintenant examiner les réponses des étudiants, en nous concentrant sur les éléments identifiés dans l'analyse a priori.

Deux techniques principales ont émergé des réponses des étudiants pour déterminer si les polynômes proposés constituent une base (question 1) : le travail avec des polynômes ou avec des n-uplets. Huit étudiants (40%) préfèrent travailler avec des 4-uplets à la place des polynômes, mais seulement deux d'entre eux justifient leur raisonnement (par exemple un étudiant cite le théorème affirmant l'existence d'un isomorphisme entre $\mathcal{P}^3$ et $\mathbb{R}^4$). On peut considérer que, ce faisant, ces étudiants se conforment au contrat didactique au niveau de la discipline, qui considère que les différentes étapes d'un raisonnement mathématique doivent être justifiées. Tous les étudiants qui ont répondu au questionnaire ont été en mesure de déterminer que les polynômes donnés étaient linéairement indépendants. Travailler dans un cadre non-habituel, comme c'est souvent le cas dans l'institution Université, ne semble pas leur poser problème.

70% des étudiants décrivent les formes linéaires de la base duale dans un formalisme complet et détaillé, comprenant l'espace de départ, l'espace d'arrivée et l'image d'un vecteur (voir Figure 4). Nous interprétons ce type de réponses comme typiques du contrat didactique institutionnel et ce, à deux niveaux. Au niveau de la discipline tout d'abord, une réponse mathématique doit être aussi complète que possible. Ensuite, au niveau du contenu, une fonction est caractérisée par trois éléments dans l'institution Université (pour les étudiants désirant obtenir un master en mathématiques), alors que dans l'enseignement secondaire, une fonction est généralement décrite par l'expression « $f(x) = \ldots$ » ou par le graphique associé.

Douze étudiants (60%) décrivent analytiquement les quatre formes linéaires p_1', p_2', p_3', p_4' de la base duale et, en même temps, les considèrent en tant qu'éléments d'un ensemble : ils écrivent explicitement « $A' = \{ p_1', p_2', p_3', p_4' \}$ » (voir Figure 4). Ce faisant, les étudiants considèrent les formes linéaires à la fois au niveau micro et au niveau macro.

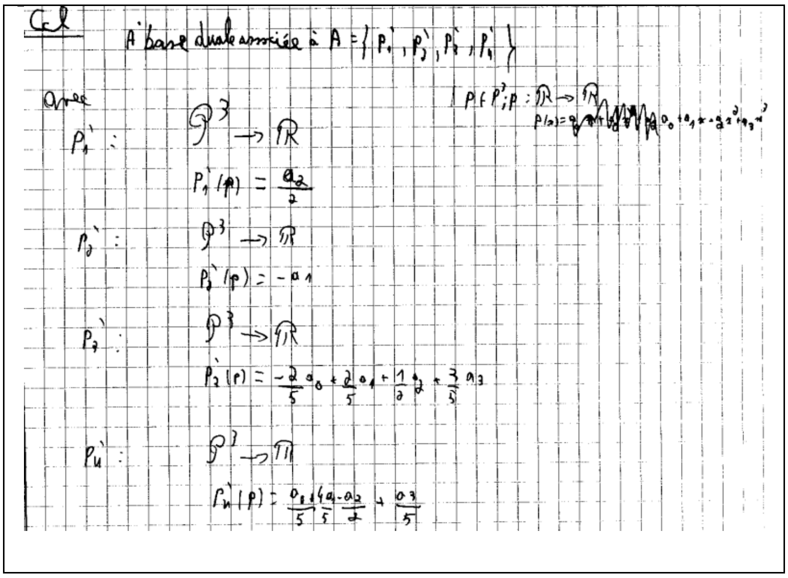
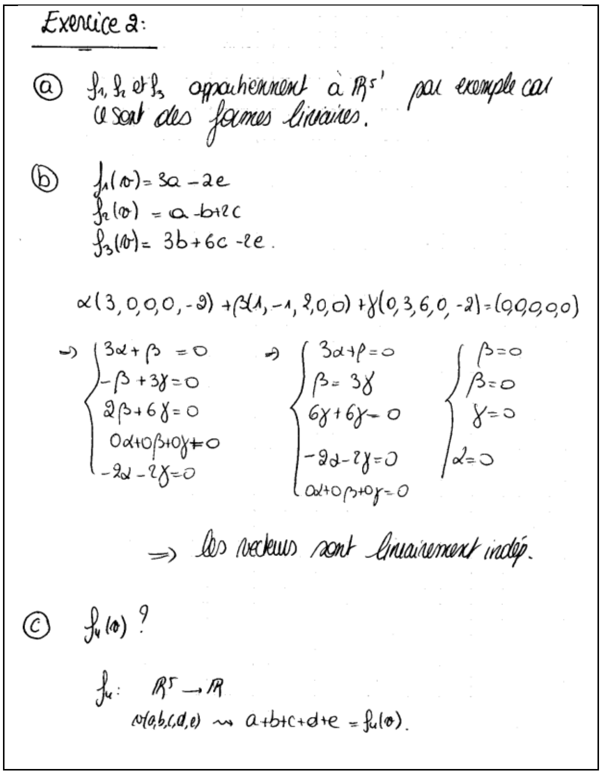


Figure 4 *– Conclusion d'un étudiant à la seconde partie de la question 1*

À la question 2.a), une quinzaine d'étudiants (75%) réussissent à donner un espace vectoriel comprenant les formes linéaire données, et neuf d'entre eux (45%) citent l'espace dual. Le type de tâches présenté ici requiert de considérer au niveau macro les applications qui ont été décrites dans l'énoncé en tant que processus, c'est-à-dire au niveau micro. Ce changement de statut ne semble pas constituer une difficulté pour une majorité d'étudiants. Le constat est le même en ce qui concerne la sous-question 2.b) : alors que les formes linéaires ont été données au niveau micro, dix-sept (85%) étudiants les ont considérées au niveau macro, en répondant correctement qu'elles sont linéairement indépendantes. De plus, six étudiants ont converti les formes linéaires en *4*-uplets avant de débuter les calculs (voir Figure 5). Ce fait peut s'interpréter comme la conversion d'une application d'un niveau micro à un niveau macro. Dans la figure 5, on voit que l'étudiant termine sa réponse à la question 2.b) en écrivant « les vecteurs sont linéairement indép. » à la place d'écrire « les formes linéaires sont linéairement indép. »



Exercice 2:

(a) f_1, f_2 et f_3 appartiennent à $\mathbb{R}^{5'}$ par exemple car ce sont des formes linéaires.

(b) $f_1(v) = 3a - 2e$
$f_2(v) = a - b + 2c$
$f_3(v) = 3b + 6c - 2e$.

$\alpha(3,0,0,0,-2) + \beta(1,-1,2,0,0) + \gamma(0,3,6,0,-2) = (0,0,0,0,0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3\alpha + \beta = 0 \\ -\beta + 3\gamma = 0 \\ 2\beta + 6\gamma = 0 \\ 0\alpha + 0\beta + 0\gamma + 0 \\ -2\alpha - 2\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha + \beta = 0 \\ \beta = 3\gamma \\ 6\gamma + 6\gamma = 0 \\ -2\alpha - 2\gamma = 0 \\ 0\alpha + 0\beta + 0\gamma = 0 \end{cases} \begin{cases} \beta = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ les vecteurs sont linéairement indép.

(c) $f_4(v)$?

$f_4 : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$
$v(a,b,c,d,e) \rightsquigarrow a+b+c+d+e = f_4(v)$.

Figure 5 *– Exemple de réponse d’un étudiant à la question 2*

L’analyse des réponses des étudiants à la question 3 montre que ceux-ci semblent disposer d’un répertoire minimum d'espaces vectoriels : parmi les espaces vectoriels cités dans les réponses, onze sont des espaces vectoriels de matrices (matrices carrées de taille 2 ou 3), deux sont des espaces vectoriels de fonctions (transformations de $\mathbb{R}$ ou de$\mathbb{R}^2$), et un peut être considéré comme algébrique ($\mathbb{Q}^3$ construit sur $\mathbb{Q}$). Les tentatives infructueuses sont $\mathbb{C}^2$ ou $\mathbb{C}^3$ (cité par trois étudiants) et $\mathbb{N}$ (cité par deux étudiants). Un dernier étudiant donne une réponse sans sens. Remarquons que la structure de module, qui généralise la structure d'espace vectoriel, n'a pas été présentée aux étudiants. Ceci explique peut-être la présence de propositions impliquant $\mathbb{C}^2$ ou $\mathbb{C}^3$ dans les réponses de trois d'entre eux. La variété de cadres en algèbre linéaire est typique du nouveau contrat institutionnel au niveau discipline. On constate aussi dans les réponses à la question 3 que huit étudiants *justifient* le fait que leur exemple est bien une « forme linéaire », même si sept d'entre eux ne donnent qu'une explication partielle : « l'espace d'arrivée est le domaine ». Il semble que la présence de justifications dans le contrat didactique au niveau discipline ne soit pas évidente.

V. CONCLUSION

Dans ce travail nous avons tenté de déterminer les règles du contrat didactique en vigueur à l'université, dans le cas de la dualité. Sur la base de travaux de recherche antérieurs et d’une analyse des manuels, nous avons identifié des règles du contrat à différents niveaux : certaines de ces règles correspondent à des notions précises, comme des formes linéaires, tandis que d'autres concernent plus généralement les mathématiques.

Nous avons conçu un dispositif d’enseignement visant à aider les étudiants à entrer dans ce nouveau contrat. L'objectif d'un tel enseignement n’est certes pas de modifier le contrat en réduisant la part de responsabilité des étudiants. Dans le cas que nous avons présenté, nous avons choisi de rendre explicite une règle généralement implicite, au niveau d'un contenu particulier (les formes linéaires), en introduisant un méta-langage (micro/macro) pour les étudiants. Nous leur avons également proposé des exercices qui requièrent des changements de cadres, la construction d'exemples, et plus généralement des exercices qui requièrent de se conformer aux nouvelles attentes de l'institution « université », au niveau de la discipline. Nous ne prétendons pas que toutes les règles doivent être explicitées. Certaines règles du contrat doivent rester implicites. Ce paradoxe est une condition essentielle pour l'apprentissage (Brousseau 1998). En utilisant le méta-langage « micro-macro », nous n'avons pas seulement dévoilé une règle impliquant les formes linéaires ; nous avons contribué à sensibiliser les étudiants aux différents statuts que peuvent revêtir les objets mathématiques à l'université, ainsi qu'à la nécessité de changement de statut selon le contexte. Le méta-langage rend explicite cette nouvelle responsabilité.

L'analyse des réponses des étudiants à notre questionnaire semble montrer qu'ils commencent à entrer dans le nouveau contrat. Nous n'avons pas pu effectuer de comparaison avec un groupe témoin d'étudiants, les conditions de notre étude ne nous le permettant pas. Cependant, en tant que professeur, nous avons remarqué que les étudiants qui ont suivi l'enseignement expérimental ne semblent pas avoir rencontré les difficultés habituelles, et nous considérons que le dispositif conçu a largement contribué à ce progrès. Nous avons maintenant l'intention d'étendre notre étude à d'autres sujets : les règles précises du contrat didactique à l'université restent largement inconnues.

RÉFÉRENCES

Artigue M. (1999) The teaching and learning of mathematics at university level – crucial questions for contemporary research in education. *Notices of the American Mathematical Society*, 1377-1385.

Bloch I. (2005) *Quelques apports de la théorie des situations à la didactique des mathématiques dans l'enseignement secondaire et supérieur*. Habilitation à diriger des recherches. Paris : Université Paris VII.

Bosch M., Fonseca C., Gascon J. (2004) Incompletud de las organizaciones matematicas locales en las instituciones escolares. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 24(2/3), 205-250.

Brousseau G. (1986) Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des mathématiques* 7(2), 33-115.

Brousseau G. (1998) *La théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chevallard Y. (2007) Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. In Ruiz-Higueras L., Estepa A., Javier García F. (Eds) (pp. 705-746) *Sociedad, Escuela y Mathemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de la Didáctico*. Baeza : Universidad de Jaén.

De Vleeschouwer M. (2008) Aider les étudiants à entrer dans un nouveau contrat didactique institutionnel en mathématiques ? L'exemple de l'opération tremplin à l'université de Namur. *Actes du V^e Colloque Questions de Pédagogie dans l'Enseignement Supérieur*. Brest : TELECOM Bretagne.

De Vleeschouwer M. (2010a) Secondary-tertiary transition and students' difficulties: the example of duality. In Durand-Guerrier V., Soury-Lavergne S., Arzarello F. (Eds.) (pp. 1359-1368) *Proceedings of 6^th Conference of European Research in Mathematics Education (CERME)*. Lyon : Université Claude Bernard Lyon 1.

De Vleeschouwer M. (2010b) *Enseignement à l'Université, perspective institutionnelle et contrat didactique : le cas de la dualité en algèbre linéaire*. Thèse de doctorat. Namur : Presses universitaires de Namur.

Dorier J.-L., Robert A., Robinet J., Rogalski M. (1997) L'algèbre linéaire : l'obstacle du formalisme à travers diverses recherches de 1987 à 1995. In Dorier J.-L. (Ed.) (pp. 105-147) *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Douady R. (1987) Jeux de cadres et dialectique outil/objet, *Recherches en didactique des mathématiques* 7(2), 5-32.

Dubinsky E. (1991) Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In Tall D. (Ed.) *Advanced mathematical thinking* (pp. 95-126). Dordrecht: Kluwer.

Grønbæk N., Misfeldt M., Winsløw C. (2009) Assessment and contract-like relationships in undergraduate mathematics education. In Skovsmose O. et al. (Eds.) (pp. 85.-108) *University science and Mathematics Education. Challenges and possibilities*. New York : Springer Science.

Hejny M., Shiu C., Godino J. D., Maier H. (1999) Research paradigms and methodologies and their applications in mathematical education. In Schwank I. (Ed.) (pp. 211-219) *Proceedings of 1st Conference of European Research in Mathematics Education (CERME)* Osnabrück, Germany.

Praslon F. (2000) *Continuités et ruptures dans la transition Terminale S / DEUG Sciences en analyse. Le cas de la notion de dérivée et son environnement*. Thèse de doctorat. Paris : Université Paris 7.

Robert A., Robinet J. (1996) Prise en compte du méta en didactique des mathématiques, *Recherches en didactique des mathématiques* 16 (2), 145-177.

Sarrazy B. (1995) Le contrat didactique. *Revue Française de pédagogie* 112 (Note de synthèse), 85-118.

Winsløw C. (2008) Transformer la théorie en tâches : la transition du concret à l'abstrait en analyse réelle. In Rouchier A., Bloch I. (Eds.) *Perspectives en didactique des mathématiques. Cours de la XIIIe école d'été de didactique des mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

ANTIPHÉRÈSE DE √2 : INTRODUCTION D'UNE DIMENSION A-DIDACTIQUE DANS L'ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE À L'UNIVERSITÉ

Imène GHEDAMSI* – Faiza CHELLOUGUI**

Résumé – Nous partons de la question des moyens que peut se donner l'enseignement de l'analyse à l'entrée à l'université, pour gérer des variations importantes et permettre aux étudiants d'accéder aux objets de l'analyse. Nous avons expérimenté une situation ciblant le travail des étudiants sur les méthodes d'approximation successive afin de favoriser des allers-retours entre preuves pragmatiques, géométriques ou numériques et preuves formelles, via l'usage des énoncés quantifiés de l'analyse. L'entrée dans un processus de preuves mixtes a été rendue obligatoire, dans le travail des étudiants, à travers l'émergence du problème général de l'existence et de l'accessibilité des nombres, limites et suites.

Mots-clefs : existence, analyse, pragmatique, formelle, milieu

Abstract – This paper focus on the means that could be undertaken in tertiary education in order to manage variations and to allow students building more relevant analysis knowledge. We experiment a situation which focus on approximation methods, in such a way that it allows either geometrical or numerical pragmatic proofs or the use of theorems. The access into a mixed proving process was unavoidable because of the emergence, in students' work, of issues related to the existence and accessibility of specific objects: irrational numbers, sequences, limits.

Keywords: existence, analysis, pragmatic, formal, milieu

I. INTRODUCTION

Nous partons de la question générale d'un enseignement de l'analyse réelle à l'entrée à l'université mené dans une perspective d'adaptation en amont et en aval (Bloch et Ghedamsi 2004 ; 2006). Dans le cadre de ce travail, nous retenons que les situations qui réintroduisent une phase expérimentale permettant un travail heuristique sur des objets spécifiques, avec des preuves pragmatiques, vont offrir aux étudiants des opportunités de conjectures, de calculs, etc. et permettre un retour efficace au formalisme.

De telles situations prévues pour conduire d'abord à un travail pragmatique appuyé sur l'intuition des étudiants sont celles où

> …le professeur fournit quant à lui, des éléments à la réflexion des élèves. C'est bien ce que nous appelons une dimension a-didactique. (Bloch 1999, p. 139 ; c'est nous qui soulignons)

Cette dimension a-didactique est recherchée pour amener les étudiants à progresser dans leur travail de façon autonome par confrontation à un milieu. La quête d'a-didacticité ne dispense pas, pour autant, d'étudier ce que le professeur doit faire en interaction avec les étudiants à tous les niveaux du milieu expérimental. Ces situations ne sont pas des situations fondamentales ; les notions en jeu sont déjà connues (définitions formelles ou théorèmes) et il s'agit de les instancier[1] par le biais d'un milieu qui permettra un retour satisfaisant sur les idées qui sous-tendent la généralisation, des situations qui les légitiment.

* Institut Préparatoire aux Etudes d'Ingénieurs de Tunis – Tunisie – ighedamsi@yahoo.fr
** Faculté des Sciences de Bizerte – Tunisie – chellouguifaiza@yahoo.fr

[1] Par instancier un énoncé formel (en l'occurrence une définition ou un théorème), nous entendons considérer sa valeur de vérité sur un cas particulier qui soit de plus, pertinent du point de vue de la généralisation.

© Ghedamsi I., Chellougui F. (2012) Antiphérèse de √2 : introduction d'une dimension a-didactique dans l'enseignement de l'analyse à l'université. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT7, pp. 987–1004). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

Dans la perspective énoncée ci-dessus et au vu de certaines caractéristiques épistémologiques de l'analyse réelle[2], nous postulons que le recours aux méthodes numériques d'approximation de nombres permet d'organiser des situations à dimension a-didactique relatives aux concepts de limite, de suite et de fonction. Ces situations permettent ensuite de revenir sur les savoirs de l'analyse à l'entrée à l'université, en prenant en compte la construction des connaissances des étudiants. C'est dans cet ordre d'idées que nous exposons dans la suite l'étude de l'antiphérèse de $\sqrt{2}$ et son implantation, comme exemple de situation expérimentale construite et analysée — a priori et a posteriori — en suivant le schéma de la TSD (cf. Bloch 2002).

La situation de l'antiphérèse de $\sqrt{2}$ a pour objectif de permettre aux étudiants, à travers des questions de nombres et de limites :

- de prendre appui sur le contenu conceptuel de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$,
- de réintroduire un réseau de savoirs de l'analyse : la convergence d'une suite, le point fixe, les fonctions contractantes, les segments emboîtés et les accroissements finis.

L'institutionnalisation prévue concerne des procédures et une méthode de construction d'une suite de rationnels qui converge vers un irrationnel de la forme $\sqrt{d}$, d un entier plus grand ou égal à 2, avec $d - 1$ un carré parfait[3].

II. ANALYSE A PRIORI

Le savoir essentiellement visé par cette situation est la caractérisation par les suites de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{Q} \text{ est dense dans } \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \exists\, (x_n)_n \subset \mathbb{Q} \text{ telle que } (x_n)_n \text{ converge vers } x.$$

L'organisation générale de la situation part de l'idée d'une instanciation de ce théorème d'existence via la recherche d'une suite rationnelle convergeant vers un irrationnel algébrique, de sorte que la construction d'une telle suite :

- problématise la nature des nombres (différence entre rationnels/irrationnels, représentations numériques des nombres et lien avec les approximations successives, les limites, etc.) ;
- soit une méthode généralisable à d'autres irrationnels algébriques de la forme $\sqrt{d}$, d un entier plus grand ou égal à 2, avec $d - 1$ un carré parfait.

Nous avons guidé l'introduction par un travail sur l'irrationalité inspiré du principe d'exhaustion, utilisé par Euclide pour montrer l'incommensurabilité de la diagonale d'un carré avec son côté.

Plus précisément, dans le cas où un entier naturel $d \geq 2$ est tel que $(d - 1)$ est un carré parfait :

[2] Caractéristiques parmi lesquelles nous relevons : nature des nombres réels et la structure de $\mathbb{R}$, existence des objets et leur accessibilité, rôle du formalisme, rôle et usage des approximations successives, etc.

[3] Voir les motivations de ce choix ci-dessous.

l’égalité $\left(\sqrt{d}-\alpha\right) = \dfrac{1}{\sqrt{d}+\alpha}$, ($\sqrt{d-1}=\alpha$) permet de donner le développement en fraction continue de $\sqrt{d}$, $\sqrt{d} = \alpha + \cfrac{1}{2\alpha+\cfrac{1}{2\alpha+\cfrac{1}{2\alpha+\text{etc.}}}}$;

et la suite des réduites[4] de $\sqrt{d}$ n’est autre que celle définie par $u_0 = \alpha$ et $u_{n+1} = \alpha + \dfrac{1}{u_n+\alpha}$.

Les étudiants vont donc pouvoir :

- s’appuyer sur la figure car $\sqrt{2}$ « s’obtient » à partir d’un triangle rectangle isocèle, figure simple et bien connue ;
- trouver sans difficulté majeure la formule de récurrence et ce, guider par les questions posées.

Ce sont ces conditions qui rendent la situation « viable » à ce niveau du cursus.

Nous prévoyons que la situation amène les étudiants à relier fortement la notion de nombre réel avec celle de limite et à leur permettre de revenir sur les théorèmes visés.

1. Organisation de la situation et ses variables didactiques

Le problème constituant la base de la situation est un problème non familier de l’enseignement actuel. On peut donc supposer que les étudiants ne le résoudront pas par contrat, sans avoir été au préalable confrontés aux enjeux. De plus, dans l’organisation de la situation

> […] certains choix se présentent comme des variables didactiques, dans la mesure où la détermination de ces paramètres change ce qui est à la charge des élèves, et le type de travail qu’ils seront amenés à faire […]. (Bloch 2000, p. 278)

A côté de l’étude des valeurs des variables micro-didactiques, nous essaierons ici de situer la situation construite par rapport à certaines des variables macro-didactiques[5] de la transition lycée/université, que nous avons finalement retenues comme pertinentes par rapport à notre problématique (parmi lesquelles nous citons : le registre de validation, le degré de formalisation, le degré de généralisation, le statut des notions (processus/objet), le type de conversion entre registres, le niveau de mise en fonctionnement des connaissances).

Les valeurs des variables micro-didactiques sont choisies pour organiser le travail effectif de calcul, recherche, etc. des étudiants dans la situation. De plus, les valeurs des variables macro-didactiques sont en évolution par rapport à l’enseignement secondaire car les étudiants sont plongés dans un milieu où la problématique et les moyens de résolution font appel à des connaissances générales de l’analyse réelle.

[4] À chaque fois qu’on arrête le processus itératif à un rang n donné, on obtient le nombre rationnel qu’on appelle la réduite de « racine de d » à l’ordre n.

[5] Par variables macro-didactiques, nous entendons des variables qui concernent une organisation relativement globale de l’enseignement.

- **Variables didactiques**

Huit variables micro-didactiques ont été retenues a priori. Le choix des valeurs est détaillé ici en incorporant l'introduction de quelques valeurs des variables macro-didactiques de la transition.

a) Nature du nombre

Le nombre choisi dans la situation expérimentale de l'antiphérèse de $\sqrt{2}$ est irrationnel, algébrique et connu des étudiants. En s'inspirant du procédé d'Euclide, il est possible de construire des approximations successives rationnelles de $\sqrt{2}$ par un procédé géométrique, procédé heuristique appuyé sur l'intuition géométrique.

Un raisonnement géométrique permet de se convaincre que le procédé de construction est infini.

b) Suite explicite ou récurrente

Dans ce cas, la suite est récurrente et participe de ce fait à la prise en compte d'au moins deux paramètres :

- le théorème du point fixe est l'un des savoirs ultérieurement visé par l'antiphérèse de $\sqrt{2}$;
- le procédé de récurrence permet de représenter graphiquement la suite, de l'étudier graphiquement ainsi que de faire des conjectures sur ses variations, sa nature et sa limite éventuelle.

c) Suite rationnelle/irrationnelle

Afin d'essayer de justifier la recherche d'approximations rationnelles successives, nous avons déjà mentionné le fait qu'on adopte une entrée par la question de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$: la dévolution prendra appui sur la question de l'existence et la construction d'une suite de rationnels qui converge vers $\sqrt{2}$.

d) Suite croissante, décroissante, non monotone

Le choix d'une suite qui n'est ni croissante, ni décroissante devra amener les étudiants à utiliser un réseau de savoirs de l'analyse réelle : définition et théorèmes de convergence d'une suite, théorème du point fixe, théorème des segments emboîtés et théorème des accroissements finis[6].

e) Type d'équation obtenu

Dans le cas de cette situation, l'équation posée, dont la solution est $\sqrt{2}$, est algébrique et résoluble par les algorithmes algébriques à disposition depuis la fin du lycée. Il est de ce fait clair que le rôle de la résolution se résume à un moyen de vérification.

f) Types d'approximation et d'erreur sollicités

À côté de la condition selon laquelle la calculatrice ne doit pas donner directement accès à une valeur approchée permettant de visualiser l'erreur (l'erreur étant d'autant plus petite que la valeur cherchée devient inaccessible par la calculatrice), le choix du type d'approximation tient compte de deux considérations :

- La suite obtenue oscille autour de $\sqrt{2}$, l'appui sur le registre numérique permet de postuler pour un encadrement de $\sqrt{2}$ entre deux termes consécutifs de cette suite.

[6] Nous n'écartons pas l'usage possible par les étudiants du théorème des valeurs intermédiaires, usage routinier en fin du lycée.

- La justification théorique de l'encadrement doit donc passer par l'identification des sous-suites paire et impaire comme étant des suites adjacentes.

g) Méthode d'approximation

La situation d'antiphérèse de √2 table sur la construction de la suite des réduites associée au développement en fraction continue de √2. La généralisation portera sur la construction de la suite des réduites associée au développement en fraction continue d'un irrationnel de la forme $\sqrt{d}$, d entier ≥ 2 avec $d - 1$ un carré parfait.

Ce choix vient à l'appui d'une évolution progressive du degré de généralisation : le but est d'entamer une première approche des conditions de construction d'une telle suite, nous nous appuyons pour cela sur une propriété algébrique de l'irrationnel sur lequel va porter la généralisation ($\sqrt{d} = \alpha + \frac{1}{\sqrt{d}+\alpha}$, où $\alpha = \sqrt{d-1}$).

- **Trois phases pour organiser la situation**

Nous organisons la situation en trois phases. De plus, nous prévoyons des questions préliminaires qui sont introduites dans chacune des phases.

a) Première phase

La première phase est une phase de dévolution du problème général et consiste à recourir au principe reposant sur l'antiphérèse de la diagonale d'un carré (inspiré du principe d'exhaustion utilisé par d'Euclide pour montrer l'incommensurabilité de la diagonale d'un carré), à constater que $\sqrt{2}$ est irrationnel et à traduire numériquement le *principe* utilisé.

Un débat prendrait appui sur :

- Des questions en amont du déroulement telles que : Quelle est la différence entre les rationnels et les irrationnels ? Comment peut-on montrer qu'un réel est un rationnel ? Un irrationnel ?
- Des questions en aval du déroulement telles que : Pourquoi un développement fini en fractions continues donne-t-il un rationnel ? Pourquoi, et comment, un nombre rationnel est-il développable en fractions continues ? Est-il possible d'utiliser le développement en fraction continue d'un irrationnel pour l'approcher et estimer à chaque fois l'erreur commise ?

b) Deuxième phase

La deuxième phase devra permettre aux étudiants de :

- se convaincre de l'existence d'une suite convergeant vers $\sqrt{2}$;
- mettre en œuvre des procédures formelles sur les conditions de convergence (définition et théorèmes sur la convergence d'une suite, théorème du point fixe, théorème des accroissements finis).

Les questions d'introduction prévues sont : Existe-t-il une suite de rationnels qui converge vers $\sqrt{2}$? Si oui, de quel(s) moyen(s) dispose-t-on pour la construire ?

c) Troisième phase

La troisième phase de cette situation vise à amener les étudiants à encadrer $\sqrt{2}$ entre deux termes consécutifs de la suite dont il est la limite, de sorte que la distance entre ces deux termes soit fixée a priori. Pour ce faire, il s'agit de

- mettre à la disposition des étudiants des relations de récurrence leur permettant de procéder à un calcul simple et rapide de ces termes ;
- les amener à se rendre compte de l'efficacité de la suite construite pour encadrer $\sqrt{2}$ entre deux rationnels consécutifs dont la distance est aussi petite que l'on veut.

La base théorique qui légitime l'existence de deux tels termes consécutifs de la suite consiste à identifier les sous-suites paire et impaire comme étant des suites adjacentes.

2. Déroulement prévu

Afin de procéder à l'analyse du déroulement prévu (consigne, scénario, anticipations, etc.), nous utilisons le schéma de structuration du milieu (Bloch 2000 ; 2002), dont la fonction est d'étudier en les articulant les caractéristiques aussi bien du milieu du professeur que celui des étudiants. Plus précisément :

- Le milieu matériel/objectif vise la dévolution du problème, il est censé permettre aux étudiants de procéder à des essais/erreurs, des validations pragmatiques par exemples et contre-exemples, de développer des intuitions géométriques et graphiques, ceci afin de donner un contenu d'expérience à des savoirs qu'ils n'ont reçu que comme une suite d'énoncés formels.
- Le milieu de référence est censé permettre aux étudiants de lier le travail fait dans le milieu objectif au formalisme mathématique, tout en mettant en défaut le recours à une application « automatique » des définitions et théorèmes du cours. Ceci sous-entend un aller-retour souhaitable entre les savoirs visés et les connaissances, connaissances qui dérivent de la situation, particulièrement à l'issue d'une décision de l'étudiant.

Dans tous les cas, l'activité des étudiants ne peut être dissociée de celle du professeur. Ce dernier aura de plus la charge d'identifier ce qu'il va pouvoir valablement institutionnaliser à partir du travail des étudiants.

L'intégralité du développement mathématique relatif à chacune des trois phases se trouve en annexe.

- **Première phase**

Nous exposons dans ce qui suit la consigne telle qu'elle a été communiquée aux étudiants à la suite du débat initié à l'occasion des questionnements préliminaires mentionnés ci-dessus.

On part d'un triangle T_0 rectangle isocèle dont le côté de l'angle droit mesure 1. On retranche de l'hypoténuse le côté de l'angle droit, on obtient un segment S_1 de longueur r_1. On construit un triangle rectangle T_1 dont l'un des côtés de l'angle droit est le segment S_1.

On procède pour T_1 comme pour T_0 en retranchant de l'hypoténuse le segment S_1, on obtient un triangle rectangle T_2 dont l'un des côtés de l'angle droit est le segment S_2 de longueur r_2 ; T_3 est le triangle obtenu en procédant de même pour T_2…

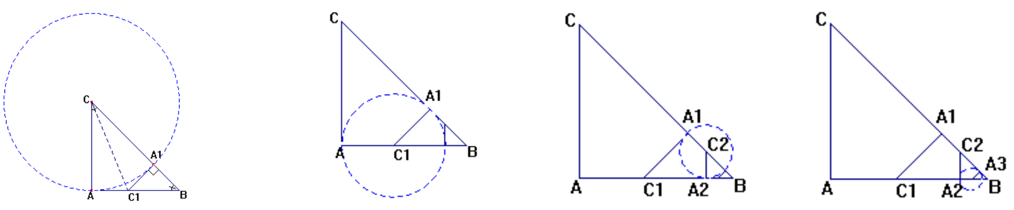


***Figure 1** – Phase 1*

On réitère cette construction et on obtient à chaque fois un triangle rectangle T_n dont l'un des côtés de l'angle droit est le segment S_n de longueur r_n.

Le but de l'exercice est de déterminer si le procédé de construction s'arrête et d'interpréter numériquement la réponse.

Le milieu matériel/objectif

Les étudiants vont pouvoir procéder à leurs premiers calculs d'au moins deux façons :

1. Connaissant le côté de l'angle droit et celui de l'hypoténuse des triangles T_1, T_2, T_3, on effectue des calculs (en se basant sur le théorème de Pythagore) pour essayer de montrer que les deux côtés de l'angle droit sont égaux dans chaque triangle.
2. On utilise l'égalité des angles pour montrer l'égalité des côtés de l'angle droit dans chaque triangle.

Le milieu de référence

Les éléments de preuve de la conjecture sont géométriques et permettent de dire que le processus de construction ne s'arrête pas. Plus précisément, les étudiants déduisent que si le procédé s'arrête, alors on obtient à un niveau *n* un triangle rectangle équilatéral, ce qui est absurde.

Ce milieu est de plus finalisé par la question : « Interpréter numériquement le résultat. » C'est là que l'enseignant devra vraisemblablement apporter un constituant complémentaire au milieu (envisagé a priori) par un support graphique.

- **Deuxième phase**

À la fin de la première phase, la question qui se pose est relative à l'existence d'une suite de rationnels convergeant vers $\sqrt{2}$. Avant de distribuer la consigne relative à cette phase, l'idée est d'amener d'abord les étudiants à faire le lien avec le développement en fraction continue de $\sqrt{2}$, notamment en calculant ce développement à des ordres successifs 0, 1, 2, 3, 4, etc. Nous prévoyons toutes les fins possibles, notamment celle due à une incompréhension par les étudiants du rôle de la représentation numérique de $\sqrt{2}$ en fraction continue dans la construction d'une suite de rationnels dont il est la limite. Dans ces conditions, le débat est ouvert pour proposer une construction possible d'une suite convergeant vers $\sqrt{2}$ devant *aboutir à la construction de la suite de ses réduites.* La consigne part ensuite de la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto 1 + \frac{1}{1+x}$ ainsi que de la première bissectrice (la droite d'équation $y = x$). On construit, sur l'axe des abscisses, $u_0 = 1$, $u_1 = f(u_0)$, $u_2 = f(u_1)$, $u_3 = f(u_2)$ et $u_4 = f(u_3)$.

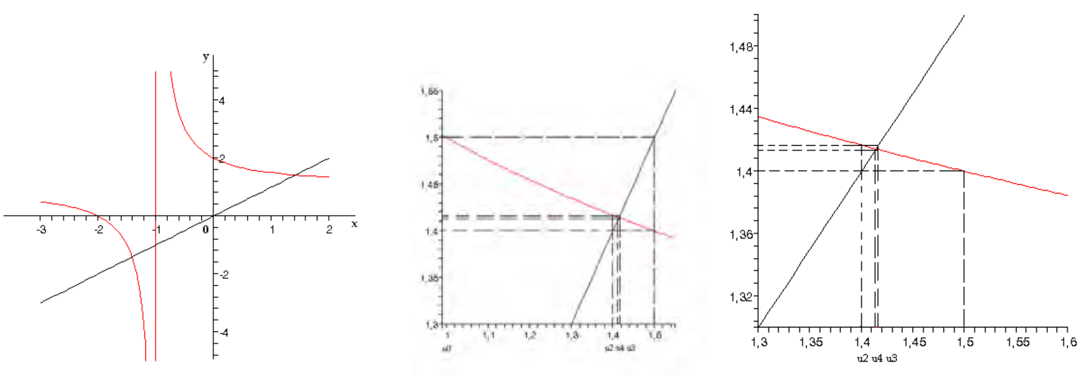


***Figure 2** – Phase 2*

On réitère la construction des u_k de sorte que $u_k = f(u_{k-1})$, k entier naturel non nul.

Le but de l'exercice est de construire une suite de rationnels qui converge vers $\sqrt{2}$.

Le milieu matériel/objectif

Le milieu matériel/objectif doit permettre aux étudiants de formuler la conjecture que la suite (u_k) ainsi construite converge vers $\sqrt{2}$.

Le milieu de référence

Les connaissances des étudiants leur permettent de constater que le recours à la technique qui part de l'étude de la monotonie de la suite et la recherche d'un minorant (ou majorant selon le résultat de la monotonie) n'est pas possible, la suite (u_k) n'étant ni croissante, ni décroissante : $u_2 < u_4 < \sqrt{2} < u_3 < u_1$.

Partant du résultat de la monotonie de f (f est strictement décroissante) établi par un simple calcul algébrique, il est envisageable que l'étudiant tente de procéder à l'étude des suites (u_{2k}) et (u_{2k+1}) pour conclure à la convergence de (u_k). De plus, ses connaissances devraient théoriquement contenir le théorème des accroissements finis et la capacité à manipuler des règles de majoration ou de minoration. Nous prévoyons l'intervention du professeur afin d'amener les étudiants à relier l'usage du théorème des accroissements finis avec les conditions d'application du théorème du point fixe.

- **Troisième phase**

On dispose de la suite (x_n) de rationnels convergeant vers $\sqrt{2}$. On pose $u_n = \frac{p_n}{q_n}$, où p_n et q_n sont deux entiers naturels (q_n est non nul) premiers entre eux, puis on part du tableau ci-dessous.

	0	**1**	**2**	**3**	**4**
$\mathbf{p_n}$	1	3	7	17	41
$\mathbf{q_n}$	1	2	5	12	29

***Tableau 1** –Phase 3*

Le but de l'exercice est de déterminer si possible un entier n_0, de sorte que $\sqrt{2}$ soit encadré entre $\frac{p_{n_0}}{q_{n_0}}$ et $\frac{p_{n_0+1}}{q_{n_0+1}}$ et tel que $\left|\frac{p_{n_0+1}}{q_{n_0+1}} - \frac{p_{n_0}}{q_{n_0}}\right| \leq 10^{-9}$.

Le milieu matériel/objectif

L'entrée par un tableau numérique devrait permettre aux étudiants de calculer un certain nombre de termes p_n et q_n. L'usage de la calculatrice est autorisé mais pas disponible (sa capacité ne permet d'atteindre l'erreur sollicitée, soit à 10^{-9} près) et peut être contesté du fait même que le résultat sera donné sous forme d'une écriture décimale de $\frac{p_n}{q_n}$. L'idée est d'amener les étudiants à effectuer le calcul des termes p_n et q_n en établissant d'abord des relations de récurrence, s'appuyant sur le fait que $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{p_n + 2q_n}{p_n + q_n}$ et que $\frac{p_n + 2q_n}{p_n + q_n}$ est irréductible.

<u>Le milieu de référence</u>

Le professeur va devoir institutionnaliser une procédure de l'analyse réelle : Comment construire une suite de rationnels convergeant vers un irrationnel de la forme $\sqrt{d}$, d un entier plus grand ou égal à 2, avec $d - 1$ un carré parfait.

III. ANALYSE A POSTERIORI

Nous avons choisi de procéder à l'analyse a posteriori suivant deux axes :

1. Un premier axe comporte une description des calculs, expérimentations et conjectures des étudiants, une analyse aussi bien des preuves des étudiants et des interventions du professeur que des difficultés rencontrées par les étudiants.

2. Un deuxième axe comporte une discussion théorique à travers un retour aussi bien sur les savoirs visés que sur les questions posées par les situations.

1. Déroulement effectif

La situation de l'antiphérèse de √2 a été expérimentée, dans sa totalité, dans une classe de première année d'université, mathématiques-informatique, de la Faculté des sciences de Tunis. La séance expérimentale a duré deux heures et s'est déroulée avec 30 étudiants, invités à travailler par groupes de 3. En plus de la transcription de la séance, nous avons pu recueillir les traces écrites du travail des étudiants.

<u>*a) Conjectures sur la nature du processus*</u>

À la question « *Quelle différence y a-t-il entre un irrationnel et un rationnel ?* », les réponses des étudiants étaient diverses et laissent entendre une difficulté à faire fonctionner leurs connaissances concernant les réels. Les réponses telles que « […] *un rationnel est un quotient, un irrationnel n'est pas un quotient* », ou « […] *un irrationnel est un quotient… mais le résultat ne peut pas être un entier* », ou encore « […] *un irrationnel est la somme d'un rationnel et d'un irrationnel* », viennent à l'appui des résultats de recherche concernant les conceptions des étudiants sur les nombres réels (cf. notamment Tall et Pinto, 1996) et leur incapacité à donner du sens aux nombres rationnels et irrationnels à partir de la définition.

<u>*b) Conjectures sur l'existence et la construction d'une suite de rationnels convergeant vers*</u> $\sqrt{2}$

La question préliminaire posée était : existe-t-il une suite de rationnels convergeant vers $\sqrt{2}$? Les étudiants ont tout de suite cherché à en donner des exemples. Nous retenons, en particulier « […] $\frac{E\left[10^n\sqrt{2}\right]}{10^n}$ », la suite proposée n'est autre que la suite des approximations décimales par défaut de $\sqrt{2}$ (liée à l'écriture de $\sqrt{2}$ dans le système décimal de numération). Nous n'avons pas pu exploiter cet exemple à cause de l'intervention du professeur de la classe « […] *répondez-nous d'abord* »[7]. Le souci de faire déboucher efficacement l'activité des étudiants amène le professeur de la classe à aller à l'encontre d'une prise en charge souhaitée, par les étudiants de certaines questions relatives aux savoirs en jeu. Le professeur de la classe

[7] Ce qui sous-entend de répondre à la question d'existence d'une telle suite.

cherchait à faire émerger le contrôle théorique qui légitime l'existence d'une telle suite (soit le théorème de densité, supposé être enseigné a priori). Les étudiants ont, quant à eux, « choisi d'oublier » ce théorème pour adopter une démarche sémantique (via la recherche d'exemples) afin de répondre.

c) Processus infini et preuve formelle

Lorsque les étudiants se sont engagés dans la validation relative au processus infini, ils l'ont tous fait dans le registre de l'analyse réelle. Cette façon de procéder n'était pas du tout envisagée dans l'analyse a priori.

Aussi bien lors du débat collectif que dans la majorité des traces écrites, la validation n'a pas porté sur le support géométrique mais sur la preuve de la convergence de la suite des restes (qui se traduit ici par la suite de l'un des côtés de l'angle droit des triangles T_n).

d) Procédures formelles sur les conditions de convergence vers √2 de la suite construite

Il apparaît que les étudiants « mémorisent » un ensemble de procédures permettant d'étudier une suite récurrente, notamment celle partant de l'étude de la monotonie de la fonction qui lui est associée. Ces procédures sont, dans leur majorité, fréquemment utilisées en terminale. Par contre, ce qui nous a semblé un peu difficile à interpréter est lié à l'acharnement des étudiants à utiliser la procédure de la terminale (théorème des accroissements finis et récurrence descendante) alors même que le professeur de la classe intervenait pour leur rappeler « […] *le théorème que nous avons vu quand on a corrigé l'exercice de la série … f est contractante… donc la suite est convergente… et sa limite...* » Il est peu probable que le comportement des étudiants est dû au fait qu'étant introduit à partir d'un exercice d'une des séries de travaux dirigés, le théorème du point fixe a été considéré par eux seulement comme un entraînement à une démonstration portant sur des objets généraux et l'ont retenu en tant que tel.

e) Encadrement de √2 et usage 'intuitif' du théorème des segments emboîtés

La validation, portant sur les relations de récurrence $p_{n+1} = p_n + 2q_n$ et $q_{n+1} = p_n + q_n$, s'engage une fois l'égalité $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{p_n + 2q_n}{p_n + q_n}$ établie. Au terme de la dernière phase, la validation n'a porté que sur les relations de récurrence $p_{n+1} = p_n + 2q_n$ et $q_{n+1} = p_n + q_n$. Les étudiants ont tablé sur l'encadrement de $\sqrt{2}$ avec comme argument l'application « intuitive » du théorème des segments emboîtés.

f) Autres difficultés

Nous notons :

- Des difficultés à utiliser des savoirs supposés « appris » à l'entrée à l'université.
- En cas de situations problématiques, les étudiants se rabattent sur des connaissances souvent basées sur l'approche du lycée.
- L'entrée des étudiants dans une problématique d'essais, de recherche d'exemples et de contre-exemples, de conjectures, etc. a pris la forme d'une négociation continue depuis le début de l'expérimentation jusqu'à sa fin.

2. *La situation de l'antiphérèse et les connaissances des étudiants*

Les connaissances relatives à la construction d'une suite convergeant vers un réel de la forme $\sqrt{d}$, d entier ≥ 2 non carré parfait et $(d-1)$ un carré parfait, ont été abordées d'une manière assez ambiguë et portent uniquement sur le choix de la fonction associée à une suite récurrente convergeant vers le réel en question, en tenant compte, pour $\sqrt{2}$, des conditions de parité mentionnées ci-dessous. Les connaissances relatives à la précision de l'approximation ont été construites par les étudiants (en particulier, la reconnaissance de l'erreur commise prévue comme devant être une connaissance préalable), hormis celle relative à la rapidité de la convergence.

Certaines connaissances relatives au contrôle de la validité des résultats empiriques ont été construites en reliant ceux-ci aux définitions et théorèmes et réciproquement.

En dépit des carences relatives à un travail sur les nombres, la situation de l'antiphérèse de $\sqrt{2}$ a organisé la confrontation des étudiants aux questions de l'existence et de la construction des objets de l'analyse réelle (les nombres, mais aussi la convergence des suites, la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, le point fixe, etc.), du rôle de la dimension expérimentale et des preuves pragmatiques dans l'acquisition des savoirs institutionnalisés.

IV. CONCLUSION

La situation de l'antiphérèse de $\sqrt{2}$ met en jeu des questions qui ne seraient même pas l'objet de situations didactiques à ce niveau : irrationalité, approximations, construction, etc. Cette situation oblige les étudiants à confronter le fonctionnement du formalisme sur des objets et avec des questions spécifiques.

Le premier objectif que l'on a fixé pour la situation table sur un élargissement du champ d'expérience des étudiants relativement à la nature des nombres réels et à leurs manifestations en partant du développement en fraction continue de $\sqrt{2}$.

Comme nous l'avons précisé plus haut, la situation n'a permis qu'un travail exploratoire sur la nature des nombres et l'approximation des réels non rationnels : certaines connaissances liées aux nombres, supposées préalables, n'ont pas été exploitées, d'autres à construire n'ont pas abouti.

Nous pensons que cette situation est essentiellement due à deux facteurs :

- Les connaissances sur les réels font partie du milieu, mais dans cette situation le but désigné aux étudiants n'est pas la construction de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. Donc, tout naturellement, les étudiants se sont focalisés sur l'objectif visible de la situation, et les connaissances sur les réels ont été construites de façon annexe.
- Une grande quantité de connaissances sur les nombres est gérée par une seule situation : représentation numérique en utilisant les fractions continues, lien avec la rationalité et/ou l'irrationalité, convergence d'une suite et interprétation en termes d'approximations successives d'un nombre, la notion de rapidité de convergence, etc.

La situation a mis à la disposition des étudiants un milieu objectif et des fondations expérimentales qui leur ont permis de procéder dans la majorité des cas à un travail heuristique, de formuler des preuves pragmatiques en exploitant des connaissances graphiques, des connaissances liées au calcul algébriques, certaines des connaissances relatives à l'approximation d'un nombre et des connaissances sur le raisonnement relatives au rôle des exemples et des contre-exemples dans les phases de recherche et de conjectures.

L'entrée dans un processus de preuves mixtes comportant des allers/retours entre preuves pragmatiques et preuves formelles, table essentiellement sur la possibilité de rendre accessible les objets de l'analyse réelle, à travers le recours à des approximations successives, ainsi que sur la consistance du milieu objectif. Dans le cadre de la situation de l'antiphérèse de $\sqrt{2}$, nous pouvons affirmer qu'un retour efficace sur le théorème de densité (existence et construction d'une suite rationnelle d'approximations d'un réel) s'est opéré. Le retour sur le théorème du point fixe, du point de vue de l'existence et de la construction d'une suite rationnelle d'approximations du point fixe, n'est pas concluant. Du reste, les étudiants ont pu le mettre en œuvre ainsi que le théorème des accroissements finis et la définition de convergence d'une suite non sans une intervention (même partielle mais souhaitée) du professeur qui les a amenés en particulier, à se rendre compte que cette mise en œuvre tient dans l'efficacité du lien que l'on peut établir entre les interprétations empiriques et ces savoirs.

L'un des enjeux relatif à la construction de la situation, et visant l'institutionnalisation, est de trouver le moyen pour que la situation traite d'exemples génériques, dans le sens où le mode de traitement spécifique répond à la question générale traitée. Il apparaît que le temps didactique de mise en œuvre d'une telle situation en classe ne peut se réduire à une seule séance, et ce si l'on veut

- exploiter efficacement l'exemple traité dans un but de généralisation ;
- contrôler véritablement certaines des connaissances acquises par les étudiants.

Enfin, insistons sur le changement épistémologique que produit la situation dans la façon des étudiants de concevoir les nombres comme $\sqrt{2}$. Pour certains étudiants, $\sqrt{2}$ avait le statut d'*icône* [8] : un signe que l'on met pour désigner une chose inconnue. Le travail dans la situation a permis aux étudiants d'envisager $\sqrt{2}$ avec son statut d'objet mathématique, relié à d'autres objets et incorporant des règles, ce que Pierce nomme un symbole/argument. C'est ce passage crucial de $\sqrt{2}$ (et des irrationnels, en tous cas ceux du même type) au statut d'argument qu'a produit la situation d'antiphérèse.

[8] Au sens de Peirce, cf. Bloch (2008).

RÉFÉRENCES

Bloch I. (1999) L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'enseignement de l'analyse en première scientifique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19(2), 135-194.

Bloch I. (2000) *L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée/université*. Thèse de l'Université Bordeaux I.

Bloch I. (2002) Différents niveaux de modèles de milieu dans la théorie des situations. *Actes de la XIe Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques* (pp. 125-139).

Bloch I., Ghedamsi I. (2004) The teaching of calculus at the transition between upper secondary school and university. *ICME 10, communication au Topic Study Group 12*, Copenhague.

Bloch I. (2005) Dimension a-didactique et connaissance nécessaire : un exemple de 'retournement' de situation. In M.-H. Salin et al. (Eds) (pp. 143-152) *Sur la théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Bloch I., Ghedamsi I. (2006) L'enseignement du début de l'Analyse. *Petit x* 69, 7-30.

Bloch I. (2008) How mathematical signs work in a class of students with special needs: Can the interpretation process become operative? *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 5)* (pp. 1140-1150). Larnaca, university of Cyprus.

Mamona-Downs J. (2001) Letting the intuitive bear on the formal; a didactical approach for the understanding of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics* 48, 259-288.

Nardi E., Iannone P. (2005) To appear and to be: Acquiring the 'genre speech' of university mathematics. *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 4)*, San Feliu de Guixols, Spain.

Robert A. (1982) L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 3(3).

Robert A. (2003) Tâches mathématiques et activités des élèves : une discussion sur le jeu des adaptations introduites au démarrage des exercices en classe de collège. *Petit x* 62, 61-71.

Robert A. (2004) Une analyse de séance de mathématique du collège, à partir d'une vidéo filmée en classe : la question des alternatives dans les pratiques des enseignants. *Petit x* 65, 52-79.

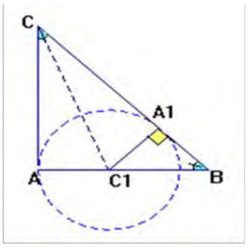
Sackur C., Assude T., Maurel M., Drouhard J.-P., Paquelier Y. (2005) L'expérience de la nécessité mathématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 25(1), 57-90.

ANNEXE (Calcul Mathématiques)

Nous nous limitons dans ce qui suit à exposer les calculs mathématiques, qui peuvent être entrepris dans les trois phases de la situation. Nous tentons pour cela d'adopter une chronologie d'introduction des calculs, suffisamment conforme au déroulement prévu dans l'analyse a priori.

Première partie : antiphérèse de $\sqrt{2}$

Dans la figure ci-contre ABC est un triangle rectangle isocèle en A tel que AB=AC=1. On considère le point A_1 du segment [BC] tel que $A_1C=1$. La perpendiculaire à la droite (BC) en A_1 coupe le segment [AB] au point C_1.



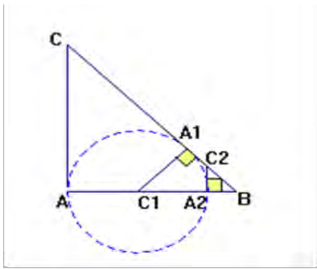
1. $AC_1=A_1C_1=A_1B$.

Comme les triangles AC_1C et A_1C_1C sont isométriques, il vient que $AC_1=A_1C_1$.

D'autre part, A_1BC_1 est rectangle en A_1 et $C_1\widehat{B}A_1=45°$, il suit que $C_1\widehat{B}A_1=A_1\widehat{C_1}B$.

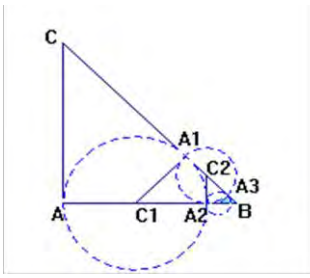
On en déduit que $AC_1= A_1C_1=A_1B$.

2. On désigne par A_2 le point du segment $[BC_1]$ tel que $A_2C_1=A_1C_1$. La perpendiculaire à la droite (BC_1) en A_2 coupe le segment $[A_1B]$ au point C_2. $A_1C_2=A_2C_2=A_2B$.



On procède comme dans 1. en remplaçant A par A_1, A_1 par A_2 et C_1 par C_2.

3. On réitère les mêmes configurations à l'ordre n ($n \geq 2$) et on obtient à chaque fois un triangle A_nC_nB rectangle et isocèle en A_n. Le processus d'itération ne s'arrête jamais.



Si le processus d'itération s'arrête alors on obtient un triangle A_nC_nB rectangle équilatéral. Ce qui est absurde.

4. Interprétation numérique des résultats.

$\sqrt{2} = 1 + r_1$, $R_1 = A_1B$.

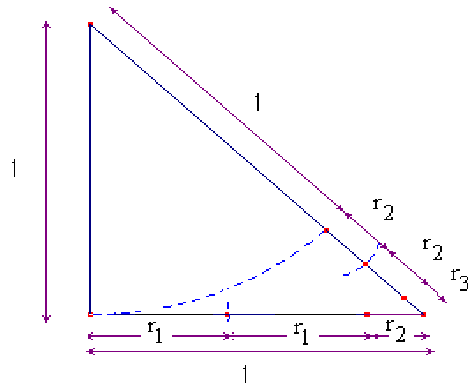
$1 = 2R_1 + R_2$, $R_2 = A_2B$

$r_1 = 2r_2 + r_3$, $R_3 = A_3B$.

$r_2 = 2r_3 + r_4$, $R_4 = A_4B$.

……………………..

$r_{n-1} = 2r_n + r_{n+1}$, $R_{N+1} = A_{N+1}B$ et $n \geq 2$.



Il en résulte que $\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{r_1}} = 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{r_2}{r_1}} = 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{r_3}{r_2}}} = 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\text{etc.}}}}}}}$.

On obtient la développement en fraction continue de $\sqrt{2}$.

On montre, en utilisant l'algorithme d'Euclide de recherche du PGCD de p et q (p et q deux entiers naturels non nuls et p>q), que le développement en fraction continue de $\frac{p}{q}$ est fini.

5. Il est possible de calculer u_1, u_2, u_3, u_4, les valeurs approchées de $\sqrt{2}$, obtenues en arrêtant successivement le processus itératif à l'ordre n = 0, n = 1, n = 2, n = 3 et n = 4.

$u_0 = 1$, $u_1 = \frac{3}{2}$, $u_2 = \frac{7}{5}$, $u_3 = \frac{17}{12}$, $u_4 = \frac{41}{29}$.

Plus précisément :

A l'ordre 0, $\sqrt{2} = 1 + r_1$, $0 \leq r_1 < 1$, il suit que $u_0 = 1$ est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ *à* l'unité près.

A l'ordre 1, $\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{r_2}{r_1}}$, $0 \leq \frac{r_2}{r_1} < 1$, il suit que $u_1 = \frac{3}{2}$ est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à

5×10^{-1} près.

A l'ordre 2, $\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\frac{r_3}{r_2}}}$, $0 \leq \frac{r_3}{r_2} < 1$, il suit que $u_2 = \frac{7}{5}$ est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 1/10 près.

Il est possible de remarquer que $u_{i+1} = 1 + \frac{1}{1+u_i}$, i = 0, 1, 2, 3.

6. On désigne par u_n la valeur approchée de $\sqrt{2}$, obtenu en arrêtant le processus itératif à l'ordre n. Posons-nous la question de la convergence de la suite $(u_n)_n$ vers $\sqrt{2}$.

Pour étudier cette question, il est souhaitable de formuler d'abord une relation de récurrence entre u_n et u_{n+1}.

L'étude de la convergence de cette suite fera l'objet de la deuxième partie, l'égalité $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}$ et la positivité de la suite $(u_n)_n$ permettent d'affirmer que si la suite $(u_n)_n$ converge, alors elle convergera vers $\sqrt{2}$.

Deuxième partie : étude de la suite $(u_n)_n$

Soit la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+u_n}$, $n \geq 0$.

1. La représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto 1 + \frac{1}{1+x}$ ainsi que de la première bissectrice permet de construire successivement les termes de la suite $(u_n)_n$ sur l'axe des abscisses, et d'étudier graphiquement le comportement de la suite et sa limite éventuelle. Le choix est donné pour un usage de la calculatrice afin d'estimer les erreurs commises en approchant $\sqrt{2}$ par des termes successifs de la suite (dans le cas où ceci n'a pas été fait dans la première partie).

L'appui sur la résolution de l'équation f(x) = x sur $[1, +\infty[$ permet de conjecturer raisonnablement que la suite converge vers $\sqrt{2}$.

2. La suite $(u_n)_n$ converge vers $\sqrt{2}$.

On se restreint dans l'étude de f à un intervalle contenant tous les termes de la suite $(u_n)_n$ et sur lequel f est dérivable et f' est majorée par un réel strictement inférieur à 1.

Un raisonnement par récurrence prouve que $u_n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$.

D'autre part f est dérivable sur $[1,+\infty[$ et $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$, $x \in [1, +\infty[$. On en déduit en utilisant le théorème des accroissements finis que f est contractante sur $[1, +\infty[$. Ce qui prouve que la suite $(u_n)_n$ converge vers $\sqrt{2}$.

De plus, $\left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{4^{n+1}}\left|u_0 - \sqrt{2}\right|, n \in \mathrm{N}$, ce qui permet d'approcher $\sqrt{2}$ par un des termes de la suite, avec une erreur fixée a priori.

Troisième partie : un encadrement de $\sqrt{2}$

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \frac{p_n}{q_n}$, avec $(p_n, q_n) \in \mathrm{N} \times \mathrm{N}^*$ et $p_n \wedge q_n = 1$

1. $p_{n+1} = p_n + 2q_n$ *et* $q_{n+1} = p_n + q_n$, $n \geq 1$.

L'égalité $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{p_n}{q_n}}$ implique que $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{p_n + 2q_n}{p_n + q_n}$.

De plus si un entier naturel d divise $p_n + q_n$ et $p_n + 2q_n$ alors il divise q_n et par suite divise p_n. On en déduit que $p_n + q_n$ et $p_n + 2q_n$ sont premiers entre eux.

L'appui sur les formules de récurrence permet de remplir le tableau ci-dessous.

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	…
$\mathbf{p_n}$	1	3	7	17	41	99	239	577	1393	3363	
$\mathbf{q_n}$	1	2	5	12	29	70	169	408	985	2370	

2. La suite $\left(\frac{p_{2n}}{q_{2n}}\right)_n$ *est croissante et la suite* $\left(\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}\right)_n$ *est décroissante.*

Il suffit de remarquer que f est strictement décroissante.

3. $\frac{p_{2n}}{q_{2n}} \leq \sqrt{2} \leq \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}$, $n \geq 0$.

Il suffit de remarquer que $\left(\frac{p_{2n}}{q_{2n}}\right)_n$ et $\left(\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}\right)_n$ sont deux suites adjacentes et appliquer le théorème des segments emboîtés.

4. Encadrement de $\sqrt{2}$ *entre deux rationnels dont la différence est inférieure à* 10^{-9}.

En utilisant le résultat établit dans 3, il suffit de choisir n_0 de sorte que $\frac{p_{n_0+1}}{q_{n_0+1}} - \frac{p_{n_0}}{q_{n_0}} \leq 10^{-9}$ et les deux rationnels en question sont alors $\frac{p_{n_0}}{q_{n_0}}$ et $\frac{p_{n_0+1}}{q_{n_0+1}}$.

Le calcul peut être fait via les relations de récurrence et le tableau établi dans 1.

Quatrième partie : généralisation

Encadrement de $\sqrt{37}$ *entre deux rationnels dont la différence est inférieure à* 10^{-13}.

En utilisant l'égalité $(\sqrt{37}\ \text{-}\ 6)(\sqrt{37} + 6)=1$, il suffit de considérer la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 = 6$ et $u_{n+1} = 6 + \frac{1}{6 + u_n}$, $n \geq 0$, puis de procéder comme pour $\sqrt{2}$, notamment pour établir les relations de récurrence utilisées pour mener le calcul.

LA RÉCURRENCE : CONCEPT MATHÉMATIQUE ET PRINCIPE DE PREUVE

Denise GRENIER*

Résumé – L'induction est reconnue comme un concept très fécond en Sciences. En mathématiques, le raisonnement par induction ou récurrence a la double spécificité de permettre la construction des objets et d'être un outil de preuve. Une étude didactique menée depuis de nombreuses années auprès d'étudiants scientifiques universitaires et d'enseignants de mathématiques révèle que cette double spécificité est mal comprise, voire absente de leurs conceptions, le concept étant réduit à une technique de preuve dont la légitimité est parfois questionnée. Nous donnerons des éléments d'analyse de ce phénomène et de ces effets. Puis nous proposerons des problèmes susceptibles d'améliorer la connaissance de ce concept.

Mots-clefs : récurrence, raisonnement, preuve, didactique, mathématiques

Abstract – Induction is acknowledged as a very fruitful concept in science. In mathematics, inductive reasoning can be used as a tool for constructing objects as well as a tool for proving statements. A didactic study, conducted over many years among university students and math teachers, has shown that this dual specificity is frequently misunderstood, or even absent from their representations : the related concept is reduced to a proof technique, the legitimacy of which is sometimes questioned. We will attempt to provide an analysis of this phenomenon and of these effects. We further suggest exercise sessions that might help to improve the understanding of the relevant concepts.

Keywords: induction, reasoning, proof, didactics, mathematics

I. L'INDUCTION EN MATHÉMATIQUES

En Sciences, le raisonnement inductif a pour objectif essentiel de généraliser à un ensemble d'objets une propriété constatée sur quelques objets particuliers. En mathématique, le raisonnement inductif ou « par récurrence » se différencie relativement aux autres sciences, en particulier aux sciences physiques, par sa validité intrinsèque permettant d'établir la preuve d'un résultat généralisateur. Citons H. Poincaré (1902) :

> L'induction, appliquée aux sciences physiques, est toujours incertaine, parce qu'elle repose sur la croyance à un ordre général de l'Univers, ordre qui est toujours en dehors de nous. L'induction mathématique, c'est-à-dire la démonstration par récurrence, s'impose au contraire nécessairement, parce qu'elle n'est que l'affirmation d'une propriété de l'esprit lui-même.

L'induction mathématique s'applique à des ensembles particuliers relevant de l'axiome de Peano dit « axiome de récurrence » : « Tout ensemble non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément », équivalent à « Il n'existe pas de suite infinie strictement décroissante dans $\mathbb{N}$ ».

II. LA RÉCURRENCE DANS L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE EN FRANCE

1. Différents types de raisonnements dans les manuels et l'enseignement

Une étude sur la transposition de la récurrence dans l'enseignement de fin de secondaire et de l'université montre que :

* Institut Fourier – Grenoble – France – denise.grenier@ujf-grenoble.fr

© Grenier D. (2012) La récurrence : concept mathématique et principe de preuve. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT7, pp. 1005–1015). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

− la récurrence n'est pas enseignée comme un concept, mais comme un « principe de raisonnement » ou un « type de preuve », raisonnement et preuve étant deux termes employés indifféremment ;

− la récurrence est répertoriée dans une typologie très répandue de preuves ou raisonnements, telle celle-ci :

> Raisonnement par implications (ou direct) / par équivalences / par l'absurde / par disjonction des cas / par contraposition / par contre-exemple / par récurrence.

Cette typologie pose de nombreuses questions. D'abord, elle risque d'inférer que chaque type de raisonnement est exclusif des autres. Or, dans un raisonnement « par récurrence », on procède souvent par implication « directe ». De même, dans un raisonnement « par l'absurde », on va tout aussi bien utiliser des raisonnements directs que des raisonnements par contraposition, ou encore un contre-exemple pour arriver à une contradiction. De plus, cette typologie cache la particularité du raisonnement par récurrence : un domaine d'application spécifique, les ensembles dénombrables ou nœthériens, le plus classique étant $\mathbb{N}$. Tout ceci provient nous semble-t-il d'une confusion entre ce qui relève de la syntaxe dans l'écriture d'une preuve et ce qui relève de la sémantique et de l'argumentation. Cette typologie très présente dans l'enseignement en France résiste aux changements de programme. Notre hypothèse est que c'est un outil didactique « efficace », au sens où elle permet d'enseigner la preuve et d'en évaluer la validité à sa conformité avec un schéma d'écriture désigné à l'avance. Ainsi, par exemple, démontrer que A implique B par un raisonnement « direct » consiste à partir des hypothèses A pour arriver à la conclusion B par des propriétés, théorèmes, données, etc.. Le raisonnement par « contraposée » est lui aussi un raisonnement direct sur des propositions reconstruites (Non B et Non A).

2. *Absurde, contre-exemple et récurrence*

Les raisonnements et preuves associées de types absurde, contre-exemple, récurrence ont en commun, nous semble-t-il, de nécessiter une plus grande vigilance sur ce que l'on construit. La question du vrai et du faux et *l'enjeu de vérité* y sont nécessairement présents à chaque étape. Dans une preuve par l'absurde, le schéma consistant à supposer à la fois A et non B pour arriver à une contradiction ou une phrase fausse induit de confronter à chaque étape les inférences faites. Un contre-exemple, quant à lui, devant vérifier les hypothèses et contredire la conclusion, celle-ci doit rester constamment présente. La preuve par récurrence sous sa forme la plus usuelle nécessite de comprendre la distinction entre la vérité d'une implication $A \Rightarrow B$ et la vérité de la proposition « A vraie $\Rightarrow$ B vraie », puisque la première peut permettre d'établir l'hérédité d'une propriété pour tout entier n alors même que cette propriété est toujours fausse.

Une conception très répandue chez les étudiants et certains enseignants est que le raisonnement par l'absurde est difficile, d'où son évitement dans le secondaire et même à l'université, attesté par une recommandation classique : « Dans tous les cas où un raisonnement direct est possible, on évitera le raisonnement par l'absurde ». Sauf que ce n'est pas toujours possible. En fait, le raisonnement par l'absurde n'est pas si difficile à faire comprendre si on s'appuie sur la logique « naturelle » :

> Prouver l'affirmation « si A est vraie, alors B est vraie » revient à prouver qu'on ne peut avoir à la fois A et non B. On suppose donc A et non B, et on en déduit une contradiction.

Une cause possible de cet évitement de l'absurde dans l'enseignement est que l'écriture d'une preuve sous forme « directe » est plus simple à schématiser. Une autre cause est peut-être que l'apprentissage de la preuve se fait d'abord en géométrie et en algèbre, domaines où les propriétés que l'on établit sont souvent des énoncés équivalents[1].

Dans une démarche de preuve, les points de vue déductif et inductif se situent à des moments différents et non linéaires. Le point de vue inductif est présent dans l'élaboration d'une conjecture ou l'étude d'hypothèses, lorsque la conclusion est à construire. Le point de vue déductif est prépondérant dans l'écriture de la preuve, quand il s'agit de rassembler des phrases vraies en passant de l'une à l'autre par des pas de déduction élémentaires jusqu'à la conclusion. Il en est de même pour les aspects syntaxique et sémantique : le passage d'une phrase à sa négation doit se faire parfois de manière purement syntaxique, parce que la sémantique de la phrase est complexe ; c'est le cas par exemple des emboîtements successifs de quantificateurs (quelque soit, il existe).

La récurrence met en jeu de manière imbriquée les points de vue déductif et inductif. Prenons un schéma classique de raisonnement par récurrence : il s'agit d'étudier si une propriété dépendant d'un entier n, notons-la $P(n)$, est vraie ou fausse, sans préjuger de sa véracité[2]. Souvent, l'étude pour quelques valeurs de n permet de faire une conjecture. Le cas qui nous intéresse ici est celui où la conjecture est « $P(n)$ est vraie pour tout n à partir d'un certain rang r », qui relève d'une généralisation à partir de l'étude de quelques cas particuliers. Pour tenter de la prouver, la technique de « preuve par récurrence » va consister à établir l'hérédité de la propriété, puis une valeur r à partir de laquelle on a à la fois l'hérédité et $P(r)$ vraie. L'hérédité s'écrit : $\exists\ r\ ;\ \forall n \geq r,\ P(n) \Rightarrow P(n+1)$, elle sera établie la plupart du temps par un raisonnement déductif « direct ». Il reste à trouver le « rang initial » r (à montrer $P(r)$) sans lequel rien n'est prouvé !

3. Le principe de récurrence dans des manuels de fin de lycée

Une unique écriture souvent mal formulée

Le principe de récurrence est donné sous une forme unique, les variantes de son écriture se situent sur le nombre d'étapes (2, 3 ou 4) de l'algorithme. Les deux étapes communes à toutes ces écritures sont l'initialisation et l'hérédité, toujours présentées **dans cet ordre**. Dans l'hérédité, l'implication n'est pas toujours visible et les quantificateurs parfois erronés. Exemples[3].

• (Maths spécialité Term ES Bordas, Fractale 1994).

[…] procédez en trois étapes :

1° Initialisation : démontrer que P_0 est vraie

2° Hérédité : démontrez que, **s'il existe** un nombre entier n pour lequel la propriété P_n est vraie, alors la propriété P_{n+1} est aussi vraie

3° Conclusion : pour tout n de $\mathbb{N}$, la propriété P_n est vraie.

---

[1] … même si ce n'est peut-être pas le plus pertinent pour apprendre à différencier une implication de sa réciproque !

[2] En fait, dans les pratiques de classe et les manuels, trop souvent, $P(n)$ est affirmée comme vraie et on demande seulement d'écrire la démonstration par récurrence de sa véracité. La conjecture est déjà donnée et s'appelle « hypothèse de récurrence ».

[3] Dans les récents manuels de Terminale, la récurrence a disparu du programme général et n'est traitée que dans la « spécialité maths ».

On notera en gras — c'est moi qui souligne — le quantificateur erroné dans l'étape 2. L'étape 3 est en fait une conséquence et non une étape du principe de récurrence.

• (Maths terminale D analyse géométrie Belin - cours - « principe de récurrence »)

> Quatre étapes sont nécessaires pour montrer qu'une propriété P(n) est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.
>
> 1^re^ étape : mise en évidence de la propriété P(n)
>
> 2^e^ étape : vérification que P(n_0) est vraie
>
> 3^e^ étape : on suppose que, pour un entier k quelconque supérieur à n_0, P(k) est vraie et on montre qu'alors P(k+1) est vraie
>
> 4^e^ étape : on applique le principe de récurrence et on conclut.

Les étapes 1 et 4 sont extérieures au principe de récurrence. La formulation de la 3^e^ étape ne met pas clairement en évidence l'implication, or c'est celle-ci dont on cherche à prouver la vérité ; de plus, elle suppose que l'on peut différencier « pour un k quelconque » avec « quelque soit k ».

La récurrence est explicitement déclarée comme « particulière » dans la plupart des manuels. Sa légitimité comme procédé de preuve est même discutée : il est dit parfois que la validité d'un tel raisonnement se ferait a posteriori, au vu des résultats obtenus ! De plus, la structure du chapitre sur la récurrence est souvent en rupture avec celle de tous les autres, et ce choix est justifié par des discours et des avertissements.

Exemple (Mathématiques, Hachette, Term. C et E, Analyse (1983), ch.0 II : entiers naturels et récurrence, p. 3). « Remarques » – qui reprennent des citations de Poincaré (1902) :

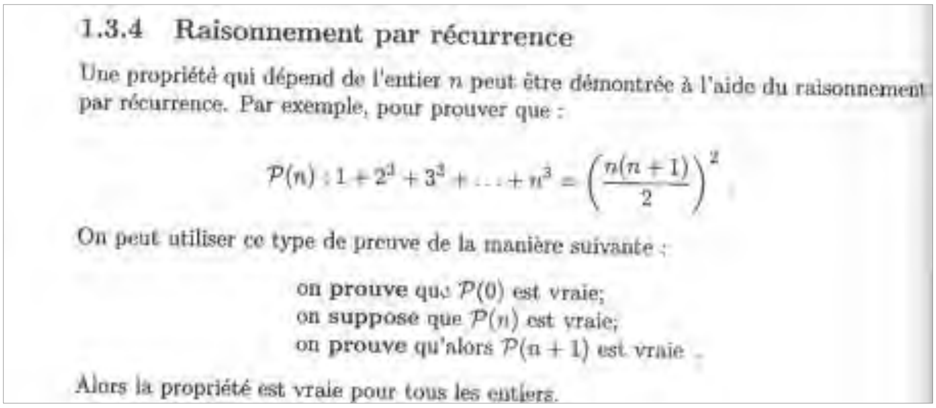
> 1° Le principe de récurrence pose de nombreux problèmes d'ordre logique et aussi philosophique. On peut en effet imaginer que, de proche en proche, on pourrait prouver la propriété pour tout entier naturel, mais on sait de façon certaine que l'on ne peut pas expliciter cette infinité de preuves successives. Comme dans de nombreux cas, la richesse et la cohérence des résultats obtenus apportent une justification a posteriori à ce principe de démonstration. Certains auteurs estiment que le principe de récurrence est le responsable principal de la fécondité des mathématiques qui, sans lui, ne seraient qu'une tautologie stérile.
>
> 2° Pour effectuer une démonstration par récurrence, il importe d'avoir, au préalable, une idée du résultat que l'on veut prouver. Il est donc nécessaire de commencer l'étude par une phase expérimentale. Mais cette phase expérimentale doit se poursuivre par une phase de démonstration.

Cet extrait met l'accent sur le doute logique et philosophique, la justification a posteriori que cela fonde bien des preuves (!!) et en même temps, la force de ce principe. Le deuxième paragraphe peut sembler étonnant : en général, quand on cherche à construire une preuve, il faut bien savoir ce que l'on cherche à démontrer !

4. La récurrence dans deux manuels récents d'université

Nous avons étudié deux collections volumineuses très récentes, éditées pour les étudiants de licence scientifique à l'occasion de la nouvelle organisation des études en LMD. La récurrence étant considérée comme déjà vue au lycée, il s'agit de rappels qui ne prennent que très peu de place dans ces ouvrages. Les deux présentations ci-après sont à l'opposé l'une de l'autre, de manière presque caricaturale.

• *Collection Vauthier 2006 réforme LMD L1 et L2. Volume de cours, 61.3.4, p. 20.*



1.3.4 Raisonnement par récurrence

Une propriété qui dépend de l'entier n peut être démontrée à l'aide du raisonnement par récurrence. Par exemple, pour prouver que :

$$\mathcal{P}(n) : 1 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

On peut utiliser ce type de preuve de la manière suivante :

on prouve que $\mathcal{P}(0)$ est vraie;
on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie;
on prouve qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie .

Alors la propriété est vraie pour tous les entiers.

Figure 1 *- Extrait de l'ouvrage Collection Vauthier 2006*

Cette présentation est indigne d'un ouvrage de ce niveau : aucun quantificateur, aucune implication, le rang initial est 0, l'hérédité a disparu, la définition est donnée sur un exemple. Dans le volume *exercices* de cette même collection, les mêmes erreurs sont reproduites :

> (ch. 0 Raisonnements mathématiques fondamentaux – raisonnement par récurrence)
>
> 1er type : on veut démontrer qu'une proposition qui dépend d'un entier n est vraie pour tout n. On constate qu'elle est vraie pour $n = n_0$, et on suppose qu'elle est vraie au rang p. On la démontre au rang $p+1$: elle est alors vraie pour tout entier $n \geq n_0$.
>
> 2e type : on veut montrer la même chose mais ici après avoir consaté qu'elle est vraie au rang n_0 on la suppose vraie jusqu'au rang p. On la démontre au rang $p+1$: elle est alors vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Notons en plus, ici l'absence totale de relation entre n_0 et p. L'ouvrage ne dit rien d'autre sur la récurrence, dans les 1174 + 840 pages des deux tomes !

• *Collection Ramis Warusfel, 2007, Dunod, p. 67-68*

La récurrence est abordée dans le cadre d'un paragraphe sur la relation d'ordre sur ℕ, après les axiomes de caractérisation de ℕ, dans un « théorème de récurrence » donné comme conséquence des ces axiomes. Voici un extrait.

> Voici maintenant un résultat essentiel, il fournit la base logique du mode de raisonnement par récurrence. Le raisonnement par récurrence et le raisonnement par l'absurde sont deux outils très importants en mathématiques.
>
> Théorème 1 (Théorème de récurrence). Soit n_0 un entier. Pour tout entier $n \geq n_0$, notons P(n) une certaine propriété de l'entier n. On fait les hypothèses suivantes :
>
> (R1) La propriété P(n_0) est vraie.
>
> (R2) Si la propriété P(n) est vraie pour un certain $n \geq n_0$, la propriété P(n+1) l'est aussi.
>
> Sous ces hypothèses, la propriété P(n) est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Ce théorème est démontré par l'absurde. L'écriture est correcte pour le n_0, l'implication « si, alors » est visible (même s'il n'y a pas le « alors »). Cependant, le quantificateur de l'hérédité est encore une fois évité, remplacé par « un certain n ».

En fait, l'hérédité qui s'écrit « Quelque soit n, $n \geq n_0$, P(n) ⇒ P(n+1) » n'est presque **jamais** explicitée sous cette forme dans les manuels que nous avons consultés.

III. CONCEPTIONS D'ÉTUDIANTS ET D'ENSEIGNANTS FRANÇAIS

Les résultats didactiques ci-après proviennent d'analyses de réponses à des questionnaires et des résolutions de problèmes proposés pendant de nombreuses années à des étudiants de Licence et Master et à des enseignants en formation. Le lecteur fera facilement les liens — de cause à effet — avec ce que nous avons relevé dans les manuels. Nous noterons TA les « théorèmes-en-acte » relevés.

TA1. La récurrence est un principe, pas un concept !

Le concept de récurrence stricto sensu est absent des conceptions. Si l'on demande à des étudiants de définir la récurrence, les réponses vont décrire la « technique », le « principe » ou le « raisonnement » par récurrence.

TA2. La récurrence ne construit pas d'objets mathématiques !

« Une preuve par récurrence ne construit rien puisque la propriété P à prouver est donnée comme vraie au départ ». Ceci est mis en opposition avec le schéma A⇒B décrivant un théorème où, pour progresser de A vers B, il faut introduire des propriétés, définitions, données, etc., alors qu'on passe de P(n) à P(n+1) essentiellement par des calculs et la fameuse « hypothèse de récurrence » qui de notre point de vue est porteuse de confusions. Ce théorème-en-acte est la conséquence d'un choix didactique résistant et répandu : l'utilisation quasi-exclusive du principe de récurrence pour établir des propriétés vraies, données ou évidentes, et où P(n) est une fonction algébrique de n.

TA3. La récurrence comme une tautologie !

On trouv de nombreuses écritures de l'hérédité telles que l'énoncé devient une tautologie. Exemple de ce qu'écrit un étudiant (Master 1 mathématiques) :

> 1. On montre tout d'abord que P_0 est vraie.
>
> 2. On suppose ensuite que P_{n-1} est vraie pour un n quelconque.
>
> 3. On montre grâce à cette supposition que P_n est vraie. » [...]
>
> Puisque à l'étape 2, on suppose que P_{n-1} est vraie pour un n quelconque, alors c'est « normal » de trouver que P_n est vraie pour tout n ; on n'a donc rien démontré.

TA4. L'initialisation comme étape première obligatoire !

Dans les réponses des étudiants, les écritures du principe de récurrence débutent **toutes** par l'initialisation n_0 et il est affirmé que c'est nécessaire de commencer par cette étape-là. Mais d'où vient donc le rang initial ? Il est de deux types : « c'est 0 ou 1 », ou « Il est donné dans l'énoncé ». Placer la recherche du rang initial avant l'étude de l'hérédité a une conséquence évidente : n_0 est souvent choisi en essayant « au hasard » les valeurs 0, 1, 2 (plusieurs, « pour être sûr » !), sauf s'il est donné dans l'énoncé du problème. Or, il existe bien sûr des cas où P peut être vraie pour les premières valeurs de n, puis fausse, puis de nouveau vraie.

TA5. Le rang initial est la valeur de n à partir de laquelle l'hérédité est vraie !

La recherche de l'hérédité aboutit à un nombre, notons-le p, à partir duquel l'implication P(n) ⇒ P(n+1) est vraie. C'est ce nombre p qui est candidat à être le rang initial cherché, mais ce n'est pas nécessairement le cas (P(p) peut être faux). Or les problèmes rencontrés dans l'enseignement privilégient la question : « Démontrer par récurrence que, pour tout $n \geq n_0$ (donné), P(n) est vraie ». Ceci induit une règle-en-acte fausse répandue : si P est héréditaire à partir d'un n_0 et que P(n_0) est fausse, alors P est fausse à partie de n_0.

TA6. Comment reconnaît-on une preuve par récurrence ?

Notre questionnaire comporte le problème suivant.

> Soit le Théorème : $\sqrt{3}$ est irrationnel. Voici une preuve. Supposons que $\sqrt{3}$ soit rationnel. Soit a le plus petit entier positif tel qu'il existe b entier positif vérifiant $a / b = \sqrt{3}$. On a donc : $3b^2 = a^2$. Ceci implique que 3 divise a^2 ; a et b étant des entiers et 3 un nombre qui n'est pas un carré d'entiers, 3 divise a et donc, 3^2 divise $a^2 = 3b^2$. Il s'ensuit que 3 divise $3b^2$, donc 3 divise b. Ainsi, 3 divise à la fois a et b et a n'est pas le plus petit entier vérifiant $a/ b = \sqrt{3}$. On a donc une contradiction. Donc $\sqrt{3}$ est irrationnel.
>
> Question : Cette preuve a-t-elle un rapport avec une « preuve par récurrence » ? Justifiez votre réponse.

Le fondement de cette preuve est l'axiome de récurrence caché par l'hypothèse que a / b est irréductible, écrite ici volontairement sous la forme « soit a *le plus petit entier* tel que... ». On peut l'énoncer ainsi : « Si pour tout n tel que P(n) est vraie, il existe m dans $\mathbb{N}$ tel que $m < n$ et P(m) est vraie, alors pour tout n, P(n) est fausse. »

La très grande majorité des étudiants répondent qu'il n'y a pas de rapport avec une preuve par récurrence, car il n'y a pas de propriété dépendant de n et parce que c'est une preuve par l'absurde. Voici quelques réponses-types.

> « Ce n'est pas un raisonnement par récurrence puisqu'on n'a pas P(n) $\Rightarrow$ P(n+1) »
>
> « Non, car la récurrence dépend d'un paramètre » ou « ...dépend d'un rang »
>
> « Non, parce qu'il n'y a pas d'amorce », « non, il n'y pas le cas de base »
>
> « Non, on ne voit pas l'hypothèse de récurrence »
>
> « Non, parce que c'est un raisonnement par l'absurde ».

Nous proposerons à la section IV une autre formulation de cette preuve mettant en évidence l'axiome de récurrence qui la fonde.

Alors, qu'est ce qu'une preuve par récurrence ?

Toutes les réponses correspondent à l'écriture du principe sous la forme « initialisation-hérédité ». Une synthèse des réponses peut se décrire ainsi : C'est une démonstration d'une propriété bien définie, dépendant d'un entier n et pour l'utiliser, on doit pouvoir passer de P(n) à P(n+1) – essentiellement des suites numériques ou des formules algébriques ou de dénombrement. On doit procéder par étapes (2, 3 ou 4 étapes) et l'initialisation est toujours située avant l'hérédité. Une étape « zéro » est parfois donnée : écriture de l'hypothèse de récurrence. La conclusion est aussi parfois rajoutée comme étape finale. Le plus remarquable est l'écriture de l'hérédité souvent en DEUX étapes, pas toujours bien reliées. En voici un exemple classique :

> C'est une preuve où l'on procède par 3 étapes :
>
> 1. On montre tout d'abord que P_0 est vraie
> 2. On suppose ensuite que P_{n-1} est vraie pour un n quelconque

3. On montre alors que P_n est vraie

Rmq : Ce raisonnement nécessite que P_{n-1} et P_n soient liées.

Outre le fait que le rang initial est 0 (et rien d'autre) et qu'il faut une relation entre P_{n-1} et P_n, cette écriture soulève des questions : Quel est ce « *n* quelconque » pour lequel on suppose que P_{n-1} est vraie ? Quelle différence entre « pour un *n* quelconque » et « quel que soit *n* » ? Que se passe-t-il si on démontre que $P(n-1)$ vraie $\Rightarrow$ $P(n)$ vraie alors que $P(n)$ est faux ? Quand on pose ces questions (je l'ai fait régulièrement), les étudiants ne savent pas répondre ou expriment des doutes sur ce type de preuve. Voici quelques affirmations fréquentes.

> « Ce qu'on montre avec une démonstration par récurrence, c'est seulement qu'on « sait comment faire pour », mais évidemment on ne le fait pas pour chaque cas. »
>
> « La récurrence est un moyen de trouver une relation qui est en rapport avec les termes d'avant. »
>
> « Comme on suppose que $P(n)$ est vraie pour un *n* quelconque, c'est normal qu'on trouve que c'est vrai pour tout *n*. »
>
> « On ne fait une preuve par récurrence que si on sait que $P(n)$ est vraie. »
>
> « La récurrence n'est pas une méthode de démonstration car on suppose la propriété au rang *n* quelconque et on calcule au rang $n+1$ en utilisant la supposition. »

Le doute émis sur la fiabilité d'une preuve par récurrence provient de la confusion entre « P est héréditaire » et « P est vraie », entretenue par une expression langagière incorrecte mais courante de l'hérédité : « On suppose vraie au rang *n* et on calcule au rang $n+1$ », où l'implication a disparu et le *n* non quantifié.

IV. PROBLÈMES SUSCEPTIBLES D'AMÉLIORER LES CONCEPTIONS SUR LA RÉCURRENCE

Irrationalité de √3 et descente infinie

Revenons sur la preuve de la non-rationalité de $\sqrt{3}$. Pour mieux « voir » que le fondement de cette preuve est l'axiome de récurrence, on peut l'écrire ainsi.

> Supposons que $\sqrt{3}$ soit rationnel. Soit *a* et *b* entiers strictement positifs vérifiant $a/b = \sqrt{3}$. On a donc : $3b^2 = a^2$. Ceci implique que 3 divise a^2 ; *a* et *b* étant des entiers et 3 un nombre qui n'est pas un carré d'entiers, 3 divise *a* et donc, 3^2 divise $a^2 = 3b^2$. Il s'ensuit que 3 divise $3b^2$, donc 3 divise *b*. Ainsi, 3 divise à la fois *a* et *b*. Il existe donc a' et b' entiers positifs tels que $a' < a$ et $b' < b$, vérifiant $a'/b' = \sqrt{3}$. On peut reproduire ce raisonnement et trouver des entiers positifs a'' et b'' tels que $a'' < a' < a$ et $b'' < b < b$, vérifiant $a''/b'' = \sqrt{3}$.

À la question « Comment terminer cette preuve ? », beaucoup d'étudiants répondent qu'on ne peut pas car l'hypothèse « irréductible » a été oubliée. De fait, ici, nous sommes en train de construire deux suites strictement décroissantes d'entiers positifs, ce qui est impossible dans $\mathbb{N}$ et prouve l'irrationalité de $\sqrt{3}$.

Un type de problème « classique » un peu modifié

Cet énoncé a été construit à partir d'un problème classique dans les manuels.

> Pour quelles valeurs de *n* entier naturel la propriété $P(n)$ suivante est-elle vraie ?
>
> $$P(n) : 2^n \geq (n+1)^2 .$$

La « méthode » prônée dans les manuels scolaires ne fonctionne pas ici. En effet, on vérifie aisément que P(0) est vraie. Et alors ? Passons à l'hérédité de P. Après une cuisine mathématique et un raisonnement **par conditions suffisantes** (souvent écrit de manière erronée par les étudiants), on peut obtenir que P est héréditaire dès que $n \geq 2$. Mais P(2) est fausse. Que conclure ? Aucune des écritures données dans les manuels ne permet de répondre à cette question, que les étudiants déclarent d'ailleurs « mal posée » !! De fait, P est vraie pour $n = 0$, fausse pour $n = 1, 2, 3, 4$ et 5 et vraie pour $n = 6$. On peut maintenant répondre à la question : P étant héréditaire à partir de $n = 2$ et P(6) étant vraie, le théorème de récurrence permet d'affirmer que P est vraie pour tout $n \geq 6$ (et par ailleurs pour $n = 0$).

Il peut être intéressant de transformer l'énoncé en posant trois questions qui admettent trois réponses distinctes :

a) Pour quelles valeurs de n l'implication $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est-elle vraie ? (réponse : $n \geq 1$)

b) Quel est le n_0 du principe de récurrence ? (réponse : $n_0 = 6$, et non 0 ou 1)

c) Pour quelles valeurs de n la propriété $P(n)$ est-elle vraie ? (réponse : $n = 0$ ou $n \geq 6$).

La récurrence comme technique ou comme fondement épistémologique d'une preuve ?

Considérons les problèmes suivants, classiques dans l'enseignement.

Démontrer par récurrence les propriétés suivantes :

P1. Pour tout n, on a $(x^n)' = n\, x^{n-1}$

P2. Pour tout x positif et tout n entier naturel, $(1+x)^n \geq 1 + nx$

P3. Pour tout n entier, $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7

P4. Pour tout n entier positif,

$$1+2+\ldots+n=\frac{(n(n+1))}{2}$$

Les propositions P1 et P2 concernent des propriétés locales de fonctions : continuité, dérivabilité, limites, études locales, infiniment petits. Or, d'un point de vue épistémologique, la récurrence est étrangère au domaine de l'analyse. Ceci pose une vraie question didactique si la majorité des problèmes utilisant la récurrence ne relève pas des ensembles dénombrables. Les propositions P3 et P4 concernent les nombres entiers, on est donc bien dans un domaine mathématique idoine pour une preuve par récurrence ; même si P3 est en fait une propriété de divisibilité valable pour tout n de manière indépendante des rangs suivants.

Des problèmes où P est une propriété d'un ensemble d'objets de taille n

Pavages de polyminos

Dans Grenier (2008, 2010), nous décrivons des problèmes de pavages de polyminos par des dominos et triminos, dans lesquels la propriété $P(n)$ n'est pas une fonction algébrique de n mais détermine un ensemble fini d'objets de taille n. On y montre l'hérédité d'une propriété de type géométrique-combinatoire et dans l'un d'eux, la structure de l'hérédité peut se décrire ainsi : *P(n) et P(n) et P(n) et* $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, car $P(n)$ est utilisée pour des objets de même taille mais différents.

Une propriété des polygones à sommets entiers

« Pour quelles valeurs de n peut-on construire des n-polygones réguliers dont tous les sommets sont sur une grille carrée régulière ? »

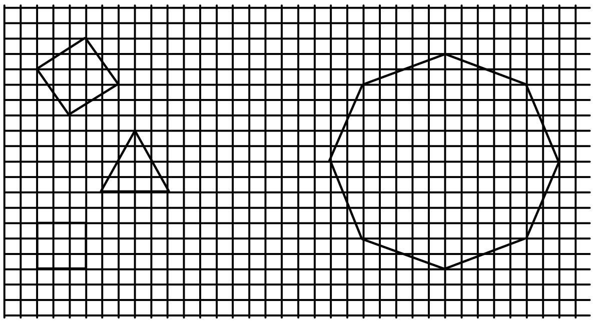


***Figure 2** – Polygones à sommets entiers*

Il est facile de prouver qu'il n'existe aucun triangle équilatéral de sommets à coordonnées entières. Pour $n = 4$, la réponse est évidente, de nombreux carrés sont possibles.

Pour $n = 8$, on démontre qu'il n'existe pas d'octogone régulier dont tous les sommets sont à coordonnées entières. La preuve est basée sur l'axiome de récurrence « Il n'existe pas de suite infinie strictement décroissante dans □ ». On démontre qu'à partir de tout octogone régulier O à sommets de coordonnées entières et d'aire (entière) n, on pourrait construire un octogone régulier O' à sommets entiers d'aire $m < n$, donc strictement plus petite, ce qui est impossible. Il n'en existe donc aucun.

La construction de O' est donnée ci-dessous : A' est l'image de A par la rotation de centre B et d'angle $\pi/2$, B' est l'image de B par la rotation de centre C et d'angle $\pi/2$, etc. Il est facile de prouver que si l'octogone initial est régulier, l'octogone ainsi construit est lui aussi régulier, et que si les coordonnées de A et de B sont entières, alors celles de A' le seront aussi.

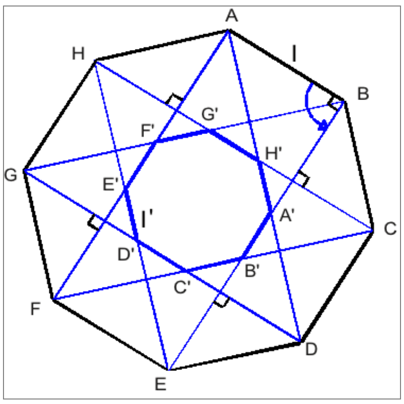


***Figure 3** – Octogones réguliers*

Une propriété des lignes polygonales convexes

« Toute ligne polygonale située à l'intérieur de l'enveloppe convexe d'une ligne polygonale convexe donnée et de mêmes extrémités est de longueur plus petite. »

En nommant $A_0, A_1, \ldots A_n,$ les sommets de la ligne polygonale convexe donnée, et $B_0, B_1, \ldots, B_m,$ ceux d'une ligne polygonale convexe quelconque à l'intérieur de l'enveloppe convexe de la première, et telles que $A_0 = B_0$ et $A_n = B_m$, la propriété se traduit par :

$l(B_0 B_1 \ldots B_m) \leq l(A_0 A_1 \ldots A_n)$ (illustré ci-après pour $n = 5$ et $m = 6$).

La preuve s'établit par récurrence sur le nombre de segments de la ligne polygonale convexe (LPC) B. On prolonge B_0B_1 jusqu'à l'intersection de la ligne A en A'_i, situé entre deux sommets successifs A_i et A_{i+1}. $B_0 B_1 A'_i$ est un segment de droite intérieur à la LPC $A_0 A_1 \ldots A'_i$. Et $B_1 B_2 \ldots B_m$ est une LPC de m segments, intérieure à la LPC $B_1 A'_i A_{i+1} \ldots A_n$.

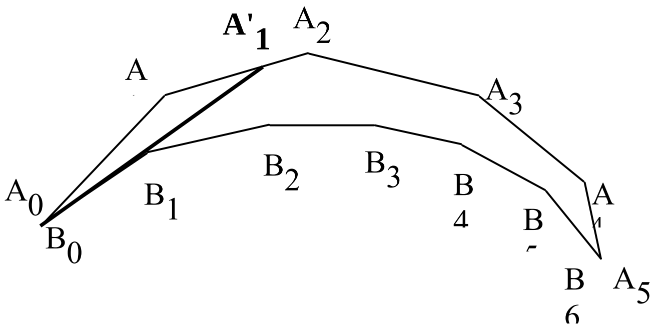


***Figure 4** – Lignes polygonales convexes*

Hérédité : « si $l(B_0 B_1 A'_i) \leq l(A_0 A_1 \ldots A'_i)$ et si $l(B_1 B_2 \ldots B_m) \leq l(B_1 A'_i A_{i+1} \ldots A_n)$, alors $l(B_0 B_1 \ldots B_m) \leq l(A_0 A_1 \ldots A_n)$. Ici, la structure de l'hérédité peut se décrire ainsi :

« $\forall m < n$, $\forall p < n$, si P(m) et P(p), alors P(n) ». Le rang initial est obtenu par l'inégalité triangulaire.

V. CONCLUSION

Nous avons tenté ici un état des lieux de l'enseignement et des connaissances d'étudiants de mathématiques sur le concept de récurrence. Nous avons montré que les conceptions construites par les choix didactiques usuels sont très partielles, comportent de nombreux « théorèmes-en-acte » erronés et sont assez éloignées du concept mathématique, même chez les étudiants de haut niveau. Nous avons suggéré quelques pistes pour modifier ces conceptions. Nous souhaitons que les résultats de cette étude et les problèmes proposés dans ce texte soient repris et permettent de développer une connaissance plus idoine du concept de récurrence.

RÉFÉRENCES

Grenier D. (2010) Changer le rapport des élèves aux mathématiques en intégrant l'activité de recherche dans les classes. *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*. Paris, 2009.

Grenier D. (2008) Des problèmes de recherche pour l'apprentissage de la modélisation et de la preuve en mathématique. *Actes du colloque AMQ*. Sherbrooke, Québec, juin 2006.

Grenier D., Payan C. (1998) Spécificités de la preuve et de la modélisation en Mathématiques Discrètes. *Recherches en didactique des mathématiques* 18(1), 59-100.

Poincaré H. (1902) *La science et l'hypothèse*. Paris : Flammarion.

IDENTIFICATION D'OBSTACLES INHÉRENTS À L'APPRENTISSAGE DE L'ALGÈBRE ABSTRAITE – PRÉSENTATION D'UN CADRE THÉORIQUE

Ismaïl Régis MILI*

Résumé – L'apprentissage de l'algèbre abstraite semble correspondre, pour les étudiants de niveau universitaire ou collégial, à l'introduction d'une multitude de nouveautés conceptuelles. Afin de mieux comprendre les raisons de l'important taux d'échecs mesuré dans cette discipline, nous avons tenté de regrouper les obstacles ou les difficultés rencontrés en quatre familles. Sur la base d'un exemple tiré d'une séquence d'introduction à l'algèbre abstraite, nous relèverons que, en plus de devoir franchir un cap dans le niveau d'abstraction requis, les étudiants sont, souvent pour la première fois de leur parcours, confrontés à une théorie axiomatique développée comme telle, à des définitions de type essentiel dont l'emploi va parfois à l'encontre du sens usuel, à l'absence de représentation graphique ainsi qu'à un processus de preuve formelle pour lequel ils n'ont été jusque-là que peu entraînés.

Mots-clefs : algèbre, abstraction, obstacle, définition, démonstration

Abstract et Learning abstract algebra seems to be related, for undergraduate and college students, to an introduction to a vast number of conceptual novelties. In order to better understand the reasons for the high failure rate in this field of study, we have classified the difficulties and obstacles encountered according to four categories. Based on an example from introductory exercises in abstract algebra, we found that, in addition to having to get past a step with regard to the level of abstraction required, students are, often for the first time, confronted with an axiomatic theory developed as such, to definitions of an 'essential' type that are used sometimes in contradiction with the usual meaning, with the absence of graphic representations, and also with formal proof processes for which they have not been sufficiently trained.

Keywords : algebra, abstraction, obstacle, definition, proof, formal proof

I. INTRODUCTION

Lors de leurs premières années de cursus universitaires, les étudiants des disciplines scientifiques dites fondamentales (mathématiques, physique, ...) seront amenés à suivre un cours d'algèbre qui aura pour objectif de les initier à une théorie centrale en mathématiques modernes : la théorie des groupes. L'importance de cette théorie relève certainement à la fois de ses applications pluridisciplinaires, de son caractère formel et, la démonstration y occupant une place de choix, de la rigueur structurante de sa manipulation.

C'est entre autres pour ces deux dernières raisons que les étudiants sont amenés à franchir un cap important dans le niveau d'abstraction et le degré de formalisme requis. Ces nouvelles sources de difficultés potentielles déroutent plus d'un étudiant, comme en témoignent l'importance du taux d'échec aux examens (Hazzan et Leron 1996 ; Dubinsky, Dautermann, Leron, et Zazkis 1994 ; Lajoie 2009) ainsi que l'insatisfaction ressentie et mesurée au sein de la communauté enseignante universitaire (Findell 2001).

Le caractère calculable, prédictif et explicatif de l'algèbre abstraite, ses critères stricts de cohérence interne et externe ainsi que la précision avec laquelle on peut circonscrire son domaine de validité permettent de considérer l'algèbre abstraite comme un modèle intra-mathématique, au sens de Dupin (1995). Elle consiste en effet en une théorie permettant de considérer plusieurs systèmes mathématiques comme des cas spéciaux de la même structure abstraite, plus générale. L'algèbre linéaire peut ainsi être vue comme un cas particulier de l'algèbre abstraite ; c'est la raison pour laquelle il est tout à fait possible de présenter d'abord

* Université de Montréal – Canada – ismail.mili@umontreal.ca

© Mili I. (2012) Identification d'obstacles inhérents à l'apprentissage de l'algèbre abstraite. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21^e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT7, pp. 1016–1025). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

la seconde en citant la première comme exemple. Il s’agit par exemple de la voie traditionnellement choisie par les filières universitaires française et marocaine, alors que les cursus américains et brésiliens (entre autres) effectuent généralement un large tour d’horizon de l’algèbre linéaire et n’introduisent qu’ensuite la généralisation qui mènera à l’algèbre abstraite (Dorier 1997). C’est pourquoi, selon leur provenance, certains étudiants peuvent être directement confrontés à un formalisme assez radical sans avoir pu recourir au caractère « illustratif » de l’algèbre linéaire :

> la tradition [française voulant] qu’on introduise dès la première année d’université la théorie la plus générale (axiomatique) avec, en général, un fort ancrage dans les exemples géométriques ayant trait à l’algèbre linéaire. (Op. cité, p. 199)

De l'autre côté de l'Atlantique, dans le système d’éducation québécois, l’algèbre abstraite figure typiquement dans les premières années d’un programme universitaire de premier cycle en mathématiques pures comme l'illustrent les programmes d'étude de l'Université de Montréal (Université de Montréal 2011). Elle est parfois abordée en fin d’études collégiales, même s’il s’agit alors plus d’une initiative de certains enseignants qui choisissent d’aborder cette matière dans le cadre du cours d’algèbre linéaire — comme dans le cours NYC du programme en sciences de la nature (MELS 2003) — que d’une disposition du curriculum. Il semble en être de même pour d’autres parcours scolaires étrangers, notamment genevois (DIP 2006).

Et c’est en nous attardant de plus près à la place occupée par cette discipline au sein du curriculum que nous nous sommes aperçu, à l'instar de Harel (1989), que dans la plupart des curriculums, l'algèbre abstraite est probablement la première théorie axiomatique manipulée comme telle. Les principales sources de difficultés liées à l’apprentissage de l’algèbre abstraite résideraient ainsi, du moins en partie, dans le fait que les étudiants sont exposés pour la première fois à une telle vision des mathématiques (Findell 2001 ; Harel 1989 ; Dorier, 1997 ; Gallian 1990).

Ainsi, l'objectif général de notre recherche est d'effectuer une typologie des difficultés et des obstacles (au sens de Brousseau 1983) rencontrés par les étudiants lors de l'initiation à la théorie des groupes, avant d'étudier quelles seraient les éventuelles dispositions des étudiants les aidant à surmonter ces difficultés. Les objectifs particuliers de cette présentation seront de présenter les éléments de cette grille d'analyse sur la base d'une séquence d'introduction à l'algèbre abstraite d'une part et, d'autre part, d'expliquer à l'aide d'éléments théoriques les difficultés exprimées par des étudiants lors d'entrevues semi-dirigées.

II. PRÉSENTATION ET ILLUSTRATION DES ÉLÉMENTS THÉORIQUES

Afin d'introduire et de présenter les quatre principales familles de notre typologie, à l'origine développée à l'aide de recherches théoriques, nous nous baserons sur un exemple extrait d'une séquence didactique proposée à des étudiants de niveau collégial (Pfister 2008). Comme mentionné lors de l'énumération des objectifs de notre recherche, nous développerons ensuite plusieurs composantes pour chacune de ces quatre familles.

Tout au long de cette section, nous illustrerons cette grille à l'aide de commentaires d'étudiants de niveau collégial du CEGEP de Sherbrooke (Québec, Canada) à qui cette séquence d'introduction à la théorie des groupes avait été proposée en octobre 2006 et que nous avons rencontrés en entrevues semi-dirigées quelques jours après la remise des notes par l'enseignant (quatre équipes de deux étudiants chacune).

Le premier énoncé de cette séquence didactique va comme suit :

« Considérons l'ensemble $K_2 = \{0 ; 1\}$. Définir une opération d'addition et une opération de multiplication sur cet ensemble qui fassent de K_2 (muni de ces deux opérations) un corps ».

Un étudiant qui souhaite résoudre cet exercice devra dans un premier temps proposer un candidat et, dans un deuxième temps, vérifier que ce candidat satisfait les différentes propriétés nécessaires pour pouvoir être considéré comme un corps. Indépendamment de l'approche de résolution utilisée, cette activité nécessite par conséquent un recours aux définitions (qui constitueront le deuxième axe de notre cadre théorique) et à la validation (quatrième axe de notre cadre théorique). Enfin, le fait d'utiliser 0 et 1 en guise de symboles dont la signification diffère de celle à laquelle les étudiants sont jusque-là habitués — ils sont employés ici en tant qu'éléments neutres des deux opérations définies sur l'ensemble de référence et non comme les deux plus petits éléments de l'ensemble des nombres naturels — justifiera un détour par la sémiotique et l'étude des registres de représentations (troisième axe de notre cadre théorique).

Mais au-delà de ces éléments mathématiques et didactiques, ce qui déroutera au moment de la première lecture les étudiants rencontrés en entrevue, c'est le côté abstrait de cet énoncé : quelle est donc cette réalité à laquelle un tel énoncé correspond ? S'il ne consiste pas en un pur jeu de l'esprit, quelle situation concrète et réelle cet énoncé peut-il refléter ? Chaque équipe rencontrée en entrevue a en effet insisté sur le malaise ressenti, sur le manque de lien apparent entre cet exercice et une quelconque réalité. Comme le relevait une équipe :

> « Souvent, on peut rattacher, on peut voir des liens, mais ça… » (Equipe 7)

Pour pouvoir comprendre et expliquer ce désarroi, le premier axe de notre cadre théorique s'attardera donc sur la notion d'abstraction et sur les quelques éléments à notre disposition pour pouvoir mesurer celle-ci.

1. L'abstraction

Une première esquisse de la notion d'abstraction nous a été fournie par Aristote pour qui l'intelligence est l'activité de formation d'idées. L'intelligence découvre dans les choses sensibles leur nature même, c'est-à-dire la nature intelligible de la chose. Et c'est par un processus d'abstraction que l'on parvient à extraire l'intelligible des données de l'expérience sensible. Le rapprochement entre diverses observations et événements sera ainsi à la charge de la connaissance intellectuelle que l'on souhaite, afin de tenter d'expliquer fidèlement la « Réalité », la plus certaine et fidèle possible (Cleary 1985).

Aristote considère que cette abstraction, qui permet de « transformer » la détermination sensible en nature intelligible, est en fait le procédé fondamental de l'intelligence humaine. Toutes nos connaissances intellectuelles et nos idées sont abstraites et l'abstraction, vue comme procédé fondamental de l'intelligence humaine, permettra de classer les connaissances intellectuelles d'après leur degré de profondeur, c'est-à-dire d'après la distance qui sépare la réalité de l'objet de sa nature intelligible. Nous pouvons résumer en énonçant que l'abstraction est un procédé qui crée une distance avec la réalité et que l'abstrait est une mesure de cette distance.

Il semble donc naturel que ces étudiants, ne percevant aucune réalité en lien avec cet énoncé, le conçoivent comme parfaitement abstrait.

Cette analyse de systèmes a priori différents que permet l'algèbre abstraite renvoie également au travaux de Dreyfus (2002), qui voit en la généralisation un des trois processus servant à l'abstraction, les deux autres étant la synthèse et la représentation. Alors que la généralisation consiste à dégager ou induire à partir de cas particuliers, d'identifier des situations communes ou d'étendre des domaines de validités (Dreyfus 2002, p. 35) la synthèse tend à combiner ou composer des parties de telle manière qu'elles forment un tout, une entité.

La recherche de régularité entre différents systèmes mathématiques que l'on retrouve au sein de l'algèbre abstraite reviendrait ainsi à pousser l'abstraction au sens d'Aristote et de Dreyfus à son paroxysme. La notion de groupe y est d'ailleurs soulignée par Dreyfus comme étant un bon exemple d'abstraction car elle permet de « montrer à l'étudiant qu'il est possible de décrire de manière unifiée une vaste quantité de situations préalablement considérées de manière séparée et indépendante les unes des autres » (traduction libre, ibid., p. 37).

Nous pouvons ainsi mieux comprendre les réactions de surprise de certains étudiants à qui cet énoncé avait été proposé.

> « C'est très abstrait […] il n'y a pas de réponses claires. » « C'est vrai, on s'dit. T'es-tu malade, je serai jamais capable de faire ça, y a-tu vraiment quelque chose à comprendre ? » « Pour créer de l'intérêt [à l'exercice], il aurait fallu un contexte bien concret. Il aurait pu mettre un contexte comme faire une situation. Susciter un intérêt dans la question tout court. « (Equipe 1)

> « J'ai lu ça et je n'ai rien compris. Il a vraiment fallu que je fasse un travail de recherche pour pouvoir le comprendre. Mais, a priori, il n'y avait rien dans ma tête, je ne savais pas par où commencer ou quoi que ce soit. […] On rencontre beaucoup de problèmes sur toute l'abstraction qu'on doit faire. » (Equipe 3)

Toutefois, la définition qu'Aristote nous fournit de l'abstrait, correspondant à une évaluation de la distance entre l'objet et la réalité, demeure intrinsèque à l'objet et indépendante de celui qui le manipule, ce qui relève d'un intérêt limité pour une étude didactique. Dubinsky (1991) y remédie à l'aide du cadre APOS en proposant une mesure qui prend en considération l'élève, ses conceptions et ses productions. Partant de l'hypothèse théorique selon laquelle toute conception mathématique d'un étudiant peut être comprise en tant qu'action, processus, objet ou schéma (d'où l'acronyme APOS), le cadre proposé permet ainsi d'inclure l'individu au sein de cette mesure de l'abstrait en catégorisant les conceptions des étudiants et non plus strictement les objets mathématiques eux-mêmes.

En référence à la notion d'abstraction réflexive de Piaget qui distinguait les conceptions figuratives (qui se réfèrent à un état momentané et statique) des conceptions opératives (qui prennent en considération les transformations), les conceptions en action et en processus sont d'ordre dynamique ; celles en objet et en schéma sont quant à elles plus d'ordre statique. Plus précisément, Dubinsky qualifie de conception en processus celle d'un étudiant qui considère un concept mathématique comme une entité n'étant que potentielle, dont l'existence nécessite une séquence d'actions.

Un saut ontologique important et souvent délicat appelé *encapsulation* permet ensuite de distinguer une conception en processus d'une conception en objet. Comme nous l'avons déjà souligné, le passage de l'une à l'autre peut être assimilé à la conversion d'un mécanisme dynamique en une entité stable (qui pourra elle-même s'enrichir et être combinée avec d'autres afin de former de nouveaux objets).

Un étudiant qui a une conception en objet d'un concept mathématique peut l'imaginer dans sa globalité et agir dessus avec un haut degré d'habileté, notamment à l'aide d'actions ou de processus. La notion mathématique est alors considérée comme une entité « solide » ; ceci permet entre autres de l'examiner sous différents angles, d'analyser ses relations avec d'autres notions mathématiques et de lui appliquer des opérations. Pour reprendre les mots de Sfard (1991),

> concevoir une entité mathématique en objet signifie être capable de s'y référer comme s'il s'agissait d'une chose réelle, une structure statique, existant quelque part dans l'espace et le temps. Cela signifie aussi : être capable de reconnaître l'idée d'un simple coup d'oeil et de la manipuler dans son entier, sans entrer dans les détails. (Op. cité, p. 4, traduction libre)

Sur le plan chronologique, même s'il existe quelques contre-exemples comme les notions géométriques « pour lesquelles les représentations graphiques statiques apparaissent très naturelles et qui peuvent probablement être considérées de manière structurelle avant même qu'une conscience complète de descriptions sous forme de procédure (conceptions opérationnelles) ne soit achevée, […] la majorité des idées émergent en tant que processus plutôt qu'en tant qu'objets » (Ibid, pp. 10-11).

De façon quelque peu paradoxale, ce passage du processus à l'objet peut être considéré, une fois complété, comme une réduction du degré d'abstraction : en se familiarisant avec le concept mathématique au travers de la réification, l'élève diminue la « distance » qui le sépare de celui-ci. Un sujet est donc d'autant moins abstrait que la conception de l'étudiant peut, au besoin, être évoquée en tant qu'objet ou schéma.

Sans surprise, la quasi totalité des étudiants rencontrés en entrevue avaient appréhendé les concepts mathématiques mis en jeu dans la séquence didactique comme des processus. En effet, la plupart ne savaient comment partir, quelle était la première étape de la démarche de résolution, du processus... Seul un étudiant parmi les huit a tenté de percevoir le concept de corps dans sa globalité, d'en identifier les caractéristiques et a donc cherché, sans le verbaliser explicitement, à en modifier sa conception au travers d'une encapsulation :

> En réfléchissant, je me dis : je suis face à telle situation avec tel ensemble. Est-ce que c'est un corps, comment je dois faire pour déterminer que c'est un corps, etc. (Equipe 3)

Nos entrevues ont également mis en avant l'immense difficulté des étudiants à se détacher des symboles et de leur signification usuelle. La présence de 0 et de 1 laissait présager un exercice mettant en jeu les nombres naturels, avec tout ce que cela peut inclure comme habitudes chez ces étudiants. Mais le fait que 1+1 puisse égaler 0 dans l'ensemble a semblé complètement aberrant, loin de toute réalité. Attribuer à ces symboles une signification autre que « les deux plus petits éléments des nombres naturels » relevait de la pure fiction.

> Là où le cours, je crois, nous a servi beaucoup plus, ça a été pour le … disons, les symétriques pour les neutres, des trucs pour l'ensemble {0 ; 1} où 1+1 doit donner 0. C'est quelque chose de tout à fait aberrant. (Equipe 3)

Cette similitude apparente semble donc plutôt avoir handicapé les étudiants. Ainsi, l'introduction de l'algèbre abstraite par les nombres et les ensembles numériques usuels, si elle permet une certaine facilité dans la mise en contexte des activités didactiques, risque néanmoins de renforcer l'idée que seul les ensembles numériques permettent de construire des structures algébriques. À ce sujet, Lajoie (2009) observe en effet que « les étudiants ont non seulement un nombre restreint d'exemples de groupes en tête mais qu'ils réfèrent surtout à des exemples de groupes de nombres » (Op. cité, p. 241).

Cette familiarité aurait une incidence sur la compréhension du sujet lui-même. En effet, les groupes de nombres « ne sont manifestement pas les meilleurs pour extraire la définition d'un groupe, en particulier parce qu'ils possèdent plusieurs propriétés additionnelles, comme la commutativité, mais aussi parce que les lois d'addition et de multiplication sur les nombres sont toujours associatives, quelques soient les ensembles sur lesquels elles sont définies » (Lajoie 2009, p. 241). En ce sens, comme le remarque Hazzan (1999), les groupes de permutations et les groupes de transformations géométriques d'un polygone régulier seraient plus typique d'un groupe général. Il semble alors pertinent de recommander le développement et l'élaboration de séquences didactiques destinées à l'introduction de l'algèbre abstraite recourant également à des structures algébriques non numériques.

2. *Les définitions*

Dans notre exemple, l'étudiant doit donc, lors de la résolution, proposer un candidat avant de vérifier que ce dernier satisfait les différentes propriétés nécessaires pour pouvoir être considéré comme un corps. Comme lors de la plupart des activités algébriques, se référer à la définition (de corps en l'occurrence) devient indispensable.

La raison de notre intérêt pour les définitions réside toutefois dans la différence d'usage qui en est fait entre le langage courant et le langage mathématique. Dans le premier, les définitions apparaissent comme limitatives et abréviatives alors que dans le second, elles cherchent plutôt à ôter des barrières, notamment à l'aide d'une identification et d'une manipulation des caractéristiques universelles des objets et système (Findell 2001). Comme le souligne Ouvrier-Buffet (2003),

> le langage courant préfère les définitions exclusives : un carré n'est pas un rectangle et un parallélogramme n'est pas un trapèze. En mathématiques, au contraire, on adopte toujours des définitions inclusives et ainsi, on considère un parallélogramme comme un cas particulier de trapèze, un rectangle est un parallélogramme particulier, et par suite, un trapèze particulier. (Fletcher, in Ouvrier-Buffet 2003, p. 21)

Cette différenciation nous montre que toutes les définitions ne sont pas identiques, qu'elles ne remplissent pas toutes la même fonction et qu'il y a donc une distinction à faire entre les différents types de définitions pouvant être rencontrées au sein des manuels et des pratiques d'enseignement.

Les philosophes grecques de l'Antiquité distinguaient déjà deux grandes classes de définitions, issues de deux courants encore présents dans les enseignements et dans certains manuels scolaires (Ouvrier-Buffet 2003) :

- les définitions nominales qui consistent en une énumération de caractères connus suffisants pour distinguer une chose parmi d'autres ; elles pourraient donc posséder un caractère exclusif ;
- les définitions réelles ou essentielles qui expliquent la genèse de la chose notamment par la recherche des caractéristiques essentielles des objets. Elles laissent au terme défini son idée générale ordinaire et pourraient relever d'un caractère plus inclusif.

Les premières sont « le lieu où l'esprit rapproche des idées séparées jusqu'alors et en fixe le résultat par un mot ; ainsi, la définition se résume à une abréviation » (Ouvrier-Buffet 2003, p. 24). Les secondes participent à l'élaboration d'une théorie et sont ainsi soit évidentes soit à démontrer ; elles peuvent par conséquent être fausses et mises en discussion (ibid). De plus, un même concept peut se voir attribuer plusieurs définitions, chacune d'un type différent.

A titre d'exemple, le produit scalaire de deux vecteurs est souvent défini dans les manuels d'études collégiales par le produit de leur norme et du cosinus de l'angle formé à leur origine. Il est pourtant connu par certains mathématiciens comme une « forme bilinéaire symétrique définie positive ». Alors que la première définition est d'ordre plutôt exclusif, la seconde présente un caractère inclusif (car n'importe quelle forme bilinéaire symétrique définie positive est un produit scalaire) et peut donc être qualifiée d'essentielle. Il en est de même pour celles de corps et d'espace vectoriel généralement employées dans les manuels d'introduction à l'algèbre abstraite.

Alors que l'algèbre abstraite invite les étudiants à traiter avec des définitions essentielles, cet exemple illustre que, d'une certaine manière, ceux-ci semblent jusque-là avoir plutôt manipulé des définitions nominales. En effet, notre recension des définitions dans différents manuels du secondaire et du collégial de l'école québécoise a mis en avant que la très grande majorité des définitions employées en mathématiques dans les études pré-universitaires étaient de nature nominale.

Ce glissement entre les définitions essentielles et nominales permettrait, du moins en partie, d'expliquer quelques-unes des difficultés reliées aux concepts de groupes et d'axiomes de groupes recensées par Lajoie (2009). Parmi elles, le manque de discernement par les étudiants des propriétés essentielles des groupes, l'incapacité à délimiter un ensemble de conditions permettant de définir un groupe (i. e. à tenir compte des quatre axiomes de groupe, retrouver la définition, etc.), à considérer des transformations géométriques comme des éléments d'un groupe (et ce à cause d'un trop grand attachement aux ensembles de nombres). Ou encore, de manière plus générale, les difficultés à concevoir le groupe présenté abstraitement, autrement qu'en termes numériques.

De plus, l'usage et le recours aux définitions formelles ne semble pas être la norme. À ce sujet, Tall et Vinner (1981) observent que les étudiants privilégient plutôt des « représentations » sans forcément faire usage des définitions « formelles ». Petit à petit, les étudiants semblent même ne plus avoir recours à la définition. En d'autres termes, malgré leur possible coexistence, l'image d'un concept mathématique (ou la représentation que l'on s'en fait) tend à devenir dominante : elle l'emportera au fur et à mesure de l'apprentissage sur la définition du dit concept. En outre, une définition formelle n'est pas toujours antérieure à l'étude d'un concept : beaucoup de notions abordées en mathématiques sont rencontrées sous une forme ou une autre avant d'être formellement définies. C'est une des raisons pour lesquelles une structure cognitive complexe semble exister dans l'esprit de chacun, produisant une large variété d'images mentales personnelles lorsque le concept est évoqué. À vrai dire, « une grande partie des concepts régulièrement utilisés ne sont en fait pas définis de manière formelle ; on apprend à les reconnaître par expérience et par leur utilisation dans des contextes appropriés » (Tall et Vinner 1981, p. 151, traduction libre).

Ainsi, parce qu'ils n'en ont jamais vraiment pris l'habitude ou parce qu'ils n'ont que rarement été confrontés à des situations dans lesquelles leur image du concept ne fonctionnait pas correctement, l'emploi et le recours systématique aux définitions, nécessaires à l'étude de l'algèbre formelle, n'en deviendraient que plus compliqués pour nos étudiants.

3. Les langages et les registres de représentations

Ce recours à la définition n'est pas exclusif aux objets mathématiques. Comme c'est le cas dans notre énoncé de référence, les opérations sur ces objets demandent aussi fréquemment à être définies. Habituellement, ces opérations seront représentées à l'aide des symboles usuels. Le risque d'assister à ce que Lajoie (2009) appelle une contamination sémantique sur les symboles est donc important.

En effet, lorsque l'énoncé demande de construire deux opérations permettant de faire de l'ensemble K_2 un corps, le solutionnaire mentionne que 1+1 devra être égal à 0. À l'évidence, le symbole + n'est ici pas à prendre dans son acception usuelle, mais bien dans celle relative à l'étude de sa structure de corps. Pourtant, parce que le symbole + ne possédait jusque-là qu'une seule et unique signification pour les étudiants, ceux-ci lui avaient attribué un sens erroné, allant jusqu'à insister en entrevue pour que 1+1 vaille 2.

> « Mais t'sais, t'aurais pensé à faire 1+1, et ben tiens je vais mettre 0 ? […] Comment tu penses d'égaler 1+1 avec 0 » (Equipe 3)

Cet exemple illustre que s'il est possible d'utiliser des symboles identiques pour désigner deux entités pourtant différentes, de recourir à un ancien système de symboles pour représenter un concept pourtant neuf dans les connaissances des étudiants, on court néanmoins le risque d'en entremêler toutes les significations possibles.

Dans son étude sur les registres de représentations sémiotiques, Duval (1995) avait déjà conclut qu'il est capital pour la compréhension en mathématiques qu'on soit apte à effectuer la distinction entre un objet et sa représentation et qu'on ne peut s'approprier l'objet sans en maîtriser quelques-unes de ses représentations (ou, pour reprendre sa formulation originale, qu'« il n'y a pas de noésis sans sémiosis »).

Or, dans le cas de l'algèbre abstraite en général et de notre énoncé de référence en particulier, les représentations originales semblent manquer. Comme le souligne une étudiante rencontrée en entrevue qui ne savait pas trop comment aborder l'exercice :

> « Parce que moi, à chaque fois que je comprends pas un problème, je prends une feuille, je dessine des quelque chose, t'sais… Pis même avec les vecteurs, quand je comprends rien, je fais des axes, je dessine les vecteurs et puis là, à un moment donné, je me dis : « OK ! » Mais là, je savais vraiment pas quoi dessiner ; si il y avait quelque chose qui se dessinait ». (Equipe 6)

Ainsi, alors que les représentations graphiques ont fortement été mises à contribution auparavant dans le curriculum, notamment lors de l'étude des fonctions, le langage graphique (au sens de De Serres et Groleau 1997) semble presque absent de la plupart des séquences didactiques d'algèbre abstraite que nous avons pu consulter. Les transitions entre les différents modes de représentation ne peuvent donc s'effectuer qu'entre les langages naturel et symbolique. Les importantes difficultés observées chez les élèves dans la maîtrise de ce dernier risquent ainsi de ne prendre que plus d'ampleur.

4. La démonstration

Comme nous l'avons déjà soulevé, la dernière phase de résolution de l'exercice consiste en une validation. Après avoir proposé un candidat, l'étudiant devra s'assurer que celui-ci satisfait les propriétés requises d'un corps. Là encore, les entrevues nous ont appris que cette étape n'allait pas de soi pour les étudiants :

> « Une fois qu'on avait compris le corps, il fallait appliquer au problème et le démontrer et c'est ça qui a été super dur. » « Il [le prof] veut tout qu'on prouve. Prouver quelque chose d'évident, c'est pas utile. 0 = 1 ? » « Quand c'est évident, tu sais pas comment le démontrer parce que c'est évident... » « En fait, il faut justifier les étapes de notre démarche. Mais il n'y a rien qui vient de même pour la justification ». (Equipe 1)

Remarquons déjà que, pour ce qui est de l'algèbre abstraite, les preuves principalement admises et présentées dans les manuels sont de type inférentiel et s'appuie sur des définitions ou des propriétés souvent explicites. Elles ont pour but de prouver et non de convaincre. En référence aux niveaux de preuve de Balacheff (1988), elles sont de nature intellectuelle et se situent plus au niveau du calcul sur les énoncés.

Pourtant, au Québec du moins, l'étudiant, au sortir du secondaire, n'a pas encore été vraiment confronté aux principaux obstacles et difficultés inhérents à l'apprentissage de la preuve. C'est du moins une des conclusions de l'analyse de l'emploi de la preuve en géométrie dans les manuels effectuée par Tanguay (2002). Cette étude nous révèle que le recours à la déduction ou à la preuve se cantonne d'abord à la géométrie avant de gagner petit à petit l'algèbre (mais toujours par l'entremise de la géométrie). De plus, Tanguay y relève que l'étape de la pensée déductive formelle n'est que rarement présentée au sein des manuels (7%) et que « les concepteurs [de manuels] semblent réfractaires aux longues chaînes déductives complexes et suggèrent plutôt des problèmes dont la solution ne combine qu'un nombre restreint de résultats apparentés » (ibid, p. 373).

La notion de démonstration n'apparaissant officiellement que pour le dernier des trois cours de mathématiques obligatoires du programme d'étude collégiale en science de la nature (MELS 2003), il semble légitime de croire que les étudiants, au moment de l'introduction de l'algèbre abstraite, ne possèdent qu'une maîtrise partielle de ses procédés et de ses objectifs. Pourquoi prouve-t-on ? Et quelles sont les techniques à notre disposition pour prouver quelque chose ? De plus, à y voir quelque chose de technique, de procédural, on risque de perdre de vue certaines intentions de la démarche de preuve, notamment celle d'assurer une cohérence interne à la théorie étudiée (Cyr 2001). On peut donc supposer que, privés de cette motivation, les étudiants s'exposent à une incompréhension des consignes et des attentes de l'enseignant.

III. CONCLUSION

L'apprentissage de l'algèbre abstraite semble correspondre à l'introduction d'une multitude de nouveautés pour les étudiants, que nous avons regroupées en quatre familles d'obstacles ou de difficultés : en plus de devoir franchir un cap dans le niveau d'abstraction requis, les étudiants sont, souvent pour la première fois de leur parcours, confronté à une théorie axiomatique développée comme telle, à des définitions essentielles dont l'emploi va parfois à l'encontre du sens usuel, à l'absence de représentation graphique ainsi qu'à un processus d'élaboration de preuves formelles pour lequel ils n'ont été jusque-là que peu entraînés.

En effet, une brève recension parmi deux manuels agréés de l'école secondaire québécoise et trois manuels d'algèbre et de calcul utilisés par les collèges québécois n'a relevé qu'une très faible présence de preuves : une très petite proportion des résultats énoncés y sont prouvés et la plupart des preuves présentes dans les manuels d'algèbre concernent les résultats relatifs aux espaces vectoriels ou au calcul matriciel. Nous y avons également noté une quasi absence de définitions essentielles (ou de définitions basée sur le respect de plusieurs propriétés) à la fois au secondaire et au collégial. En algèbre, lorsque celles-ci sont présentes, elles se retrouvent principalement au sein des chapitres consacrés aux espaces vectoriels.

Lors des entrevues avec les étudiants, chaque équipe a fait part d'un certain malaise, d'une incompréhension des termes de l'énoncé, d'une incertitude quant aux attentes de l'enseignant et aux objectifs du problème. Quant aux différentes étapes de la démarche de résolution, elles leurs échappaient au point parfois de leur sembler hors de portée.

On assiste alors à un certain paradoxe : alors que l'enseignant pense proposer un problème bien défini (le but y est précis, les données initiales, contraintes et buts y sont énoncés de façon explicite et opérationnelle) qui pourra être traité en cherchant une décomposition en sous problèmes ou à l'aide d'une manipulation immédiate des variables ou des contraintes déjà clairement explicitées, l'étudiant en a une perception différente : il le conçoit souvent comme un problème mal défini. Or, un étudiant qui voit, dans un problème bien défini, un énoncé mal défini, risque de ne pas savoir « comment partir », comment agencer sa résolution, se mettant ainsi dans une situation qui peut être rapprochée de celle d'un novice, telle que décrite par Schoenfeld (1985). C'est donc à un comportement de novice, qui ne se soucie pas de vérifier sa solution et dont le processus de contrôle n'est que peu opérationnel, que nous nous attendons de la part d'un étudiant dans le cadre d'une initiation à l'algèbre abstraite.

RÉFÉRENCES

Balacheff N. (1988) *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de Collège*. Université Joseph-Fourier, Grenoble.

Cleary J. J. (1985) On the Terminology of "Abstraction" in Aristotle. *Phronesis*, 30(1), 13-45.

Cyr S. (2001) Vers un enseignement signifiant de la preuve au secondaire. *Bulletin AMQ* 41, 19-27.

De Serres M., Groleau J.-D. (1997) *Mathématiques et langages* (Collège Jean-de- Brébeuf.). Montréal.

DIP (2006) *Plan d'étude cantonal*. Département de l'Instruction Publique du Canton de Genève.

Dreyfus T. (2002) *Advanced Mathematical Thinking Process*. Advanced Mathematical Thinking, Mathematics Education Library (Vol. 11, p. 25-41). Springer.

Dubinsky E. (1991) The Constructive Aspects of Reflective Abstraction in Advanced Mathematics. *Epistemological Foundations of Mathematical Experiences*. New York : Springer-Verlag.

Dubinsky E., Dautermann J., Leron U., Zazkis, R. (1994) On learning fundamental concepts of group theory. *Educational Studies in Mathematics* 27(3), 267-305.

Duval R. (1995) *Sémiosis et pensée humaine : registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne : Peter Lang.

Findell B. (2001) *Learning and Understanding in Abstract Algebra*. University of New Hampshire.

Harel G. (1989) Learning and teaching linear algebra: Difficulties and an alternative approach to visualizing concepts and processes. *Focus on Learning Problems in Mathematics* 11, 139-148.

Hazzan O., Leron U. (1996) Students' Use and Misuse of Mathematical Theorems: The Case of Lagrange's Theorem. *For the Learning of Mathematics* 16(1), 23-26.

Lajoie C. (2009) *Un groupe en quête de théorie : un problème pour les étudiants en maths !* Montréal : Éditions Bande didactique.

Ouvrier-Buffet C. (2003) *Construction de définitions / construction de concepts : vers une situation fondamentale pour la construction de définitions en mathématiques*. Université Joseph-Fourier, Grenoble.

Pfister N. (2008) Les différents auteurs d'une situation d'apprentissage par problème : un exemple. *Bulletin AMQ* 47(2), 25-43.

Schoenfeld A. (1985) *Mathematical Problem Solving*. New York : Academic Press.

Sfard A. (1991) On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics* 22(1), 1-36.

Tall D., Vinner S. (1981) Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics* 12, 151-169.

Tanguay D. (2002) Analyse des problèmes de géométrie et apprentissage de la preuve au secondaire. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et de la technologie* 2(3), 371-396.

Université de Montréal (2011) *Programme des études de premier cycle* (UdM). Université de Montréal, Département de mathématiques et de statistique. Consulté le 15 mai 2011, http://dms.umontreal.ca/EtudesBacc/indexPremierCycle.html

L'OBSTACLE DU FORMALISME AU DÉBUT DU SUPÉRIEUR

Ridha NAJAR*

Résumé – Les connaissances ensemblistes formelles jouent un rôle important dans les mathématiques du supérieur mais constituent en même temps un obstacle chez beaucoup d'étudiants entrant à l'université dans leur apprentissage des mathématiques. Un test passé à de bons étudiants tunisiens poursuivant un enseignement scientifique spécialisé montre à quel point les difficultés de gestion du langage ensembliste formel et des éléments de logique conduisent à des blocages dans la résolution de problèmes et rendent inopérantes les connaissances mathématiques apprises. Nous situant dans la perspective anthropologique du didactique, nous essayerons d'expliquer l'origine des difficultés constatées et chercherons des moyens pouvant remédier à cette situation.

Mots-clefs : notions ensemblistes, formalisme mathématique, praxéologie mathématique, rapport institutionnels, connaissances pratiques

Abstract – The knowledge linked to formal set theory plays an important role in higher mathematics. At the same time, they constitute an obstacle for many students entering university in their learning of mathematics. A test administered to highly performing Tunisian students pursuing specialized science studies shows how the difficulties in managing the formal language of set theory and logic elements lead to handicaps in problem solving and render ineffective the mathematical knowledge learned. Relying on the anthropological theory of didactics, we will try to explain the origin of the difficulties encountered and will seek ways to remedy this situation.

Keywords: set theory notions, mathematical formalism, mathematical praxeology, institutional relationships, practical knowledge

I. INTRODUCTION

Plusieurs travaux qui se sont intéressés à l'étude de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques au supérieur ont mis en évidence les difficultés des étudiants dues à l'usage du formalisme mathématique. C'est le cas notamment des recherches menées dans différentes universités françaises entre les années 1987 et 1994 au sujet de l'algèbre linéaire[1]. Ces recherches ont montré que les difficultés des étudiants dans ce domaine sont :

> […] révélatrices d'un même obstacle, massif, qui apparaît pour toutes les générations successives, et pratiquement pour tous les modes d'enseignement : c'est ce que [les auteurs appellent] naïvement : l'obstacle du formalisme. (Dorier 1997, p. 105)

De façon similaire, dans le système d'enseignement québécois, Corriveau (2007) étudie les difficultés liées à l'usage du symbolisme mathématique et des règles de logique dans l'élaboration de démonstrations par les étudiants lors du passage du secondaire au collégial. Elle remarque à ce propos qu'au collégial, les symboles, représentant les nouveaux objets mathématiques et leurs relations, sont introduits par l'enseignant sans insistance sur les choix effectués ni sur les règles qui régissent leur manipulation et dont dépendent les propriétés des objets enseignés. Cette situation conduit la majorité des étudiants à perdre le sens du langage symbolique qu'ils manipulent et le contrôle du travail qu'ils effectuent.

Dans ce travail nous rejoignons les préoccupations de ces chercheurs. À travers une analyse des réponses d'étudiants tunisiens entrant à l'université à un test d'algèbre linéaire, nous montrons à quel point le manque de maîtrise du langage ensembliste et des éléments de logique et les difficultés de gestion du symbolisme mathématique conduisent à des blocages dans la résolution de problèmes et rendent inopérantes leurs connaissances mathématiques. Nous situant dans la perspective anthropologique (Chevallard 1998 ; 1989), nous essayerons à

* Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue – Canada – ridha.najar@uqat.ca

[1] Voir Dorier (1997) pour une synthèse.

© Najar R. (2012) L'obstacle du formalisme au début du supérieur. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT7, pp. 1026–1043). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

la fin d'expliquer l'origine des difficultés constatées et chercherons des moyens pour remédier à cette situation.

II. PROBLÉMATIQUE

Dans l'enseignement secondaire (ES, dans la suite) tunisien, les notions et le langage ensemblistes ainsi que les règles de logique qui ont vu leur apparition avec la réforme des « mathématiques modernes », n'ont pas complètement disparu lors des réformes ultérieures comme ce fut le cas pour l'étude des structures algébriques et de l'algèbre linéaire. L'institution du secondaire a choisi de garder l'usage de ces notions et règles tout en modifiant leur écologie. Elle recommande ainsi de les introduire dans différents thèmes d'étude au fur et à mesure des besoins d'enseignement, mais de ne pas les considérer comme des objectifs d'apprentissage et d'éviter tout exposé général les concernant. À l'entrée de l'université, les enseignants du supérieur, considérant que les concepts de base de la théorie des ensembles et les règles de logique ont été suffisamment manipulés dans le secondaire pour être devenu familiers, passent souvent rapidement sur l'enseignement de ces notions et ne font pas du symbolisme associé un enjeu explicite d'enseignement. Ceci conduit les étudiants à développer des mécanismes de travail peu réfléchis dans ce domaine et est source d'obstacles souvent difficiles à surmonter. Ces obstacles et difficultés ne concernent pas une filière particulière du supérieur, elles intéressent quasiment tous les étudiants entrant à l'université, même ceux poursuivant leurs études dans des filières scientifiques spécialisées. Ceci nous incite à lier les dites difficultés à des choix institutionnels d'enseignement, plutôt qu'à des caractéristiques personnelles des étudiants. Pour justifier ce point de vue, nous avons choisi de réaliser l'expérimentation que nous présentons dans ce travail avec des étudiants de première année de la filière Mathématiques-Physique des classes préparatoires scientifiques (CPS1, dans la suite). Les étudiants de cette institution sont sélectionnés parmi les meilleurs bacheliers[2] de la section *Mathématiques* de l'enseignement secondaire. Les mathématiques constituent par ailleurs la matière de base dans les deux années d'enseignement en CPS1 et le classement des étudiants dans le concours terminal de cette institution[3] est fortement conditionné par leurs résultats à l'épreuve de mathématiques. Ces facteurs font que les sujets de CPS1 sont fortement investis dans le projet de formation mathématique de leur institution. Pour ces raisons, nous pouvons considérer que les étudiants choisis pour notre expérimentation sont de bons sujets institutionnels (Ibid.), ce qui nous a semblé intéressant pour différencier ce qui relève réellement des choix institutionnels d'enseignement de ce qui relèverait d'apprentissages normalement attendus de la part des étudiants mais non réalisés.

III. L'EXPÉRIMENTATION ET LA MÉTHODOLOGIE D'ANALYSE

L'expérimentation a pour objectif l'étude des difficultés éventuelles qu'éprouvent les étudiants dans l'activité de résolution de problèmes. Elle se propose également de voir à quel niveau se situent ces difficultés.

Pour ce faire, nous avons organisé un test avec les étudiants de deux classes de CPS1[4]. Le test porte sur les notions d'application linéaire, de sous-espace vectoriel et d'injection dans le

---

[2] Moyenne générale de réussite à l'examen de Baccalauréat (examen sanctionnant le cycle d'enseignement secondaire) supérieure ou égale à 15 sur 20. La plupart des étudiants (environ 70%) concernés par notre expérimentation ont eu une note supérieure ou égale à 17 sur 20 en mathématiques au Baccalauréat (pour les 30% autres, la note est située entre 15 et 17 sur 20)

[3] pour l'admission dans une école d'ingénieur.

[4] L'expérimentation a été réalisée à l'Institut Préparatoire aux Études d'Ingénieurs de Tunis, au cours de l'année universitaire 2006-2007.

contexte des espaces vectoriels de matrices. Dans la période où le test était proposé, les étudiants finissaient l'étude des chapitres sur les espaces vectoriels de dimensions finies et les matrices. Les étudiants avaient étudié antérieurement en Algèbre, entre autres, les chapitres sur « Ensembles et Applications », « Structures algébriques », « Espaces vectoriels et applications linéaires ».

Pour l'analyse des productions des étudiants, nous avons effectué le dépouillement des copies selon quatre catégories de réponses :

- réponse correcte, convenablement rédigée et bien justifiée (si une justification est requise). Désignée par « C+ » ;
- réponse correcte mais manque de précisions (dans la rédaction et/ou la justification) ou présence d'implicites. Désignée par « C- » ;
- réponse fausse. Désignée par « F » ;
- copie sans réponse. Désignée par « SR ».

Les réponses incomplètes seront considérées, soit dans la catégorie C-, soit dans F, selon ce que la partie fournie apporte à la réalisation de la tâche.

Ceci étant, 43 étudiants ont passé le test. Les étudiants ont disposé d'environ une heure pour répondre aux questions de l'exercice.

IV. LE TEST

1. *Énoncé de l'exercice*

$\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ désigne l'espace vectoriel sur $\mathbf{C}$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

On définit l'application f_A : $\mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$; $M \mapsto AM - MA$.

1) a - Montrer que f_A est une application linéaire.

   b - En déduire que l'ensemble F des matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ vérifiant $MA = AM$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

2) a - Calculer f_A (I_n), où I_n désigne la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

   b - Existe-t-il des matrices A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telles que f_A soit injective ?

2. *Analyse globale*

L'exercice vise l'étude de certaines propriétés, ensemblistes et linéaires, d'une application f_A. La distinction entre les statuts du paramètre A et de la variable M est essentielle pour pouvoir s'approprier les questions de l'exercice et savoir y répondre. La désignation des matrices peut se faire dans différents registres sémiotiques (lettre générique M, suite de coefficients (m_{ij}), tableau de coefficients à n lignes et n colonnes). Le traitement de chaque question et les difficultés qu'il pose sont étroitement liés à la représentation sémiotique choisie pour désigner les matrices ainsi qu'aux formulations adoptées pour les notions en jeu. Les questions 1-a, 1-b et 2-a sont fermées et ne posent a priori pas de difficultés. En revanche, la question 2-b est ouverte et susceptible de diverses formulations dont dépendent le choix de techniques de travail. Outre la connaissance des notions et propriétés intervenant dans l'exercice, la réponse aux questions demande une bonne gestion du langage ensembliste et du symbolisme mathématique à mettre en œuvre.

V. ANALYSE A PRIORI ET ANALYSE DES PRODUCTIONS DES ÉTUDIANTS

Nous procédons dans ce paragraphe à l'analyse a priori des questions de l'exercice et nous analysons pour chaque question les productions des étudiants correspondantes.

Question 1-a (Tâche T_1)

Montrer que f_A est une application linéaire.

Analyse a priori

Cette tâche T_1 se réalise via une application directe de la définition d'une application linéaire. Des difficultés peuvent toutefois apparaître à la suite d'une gestion non appropriée des matrices mises en jeu (du point de vue du statut et/ou des représentations sémiotiques).

Une technique possible pour répondre à la question consiste à montrer que pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$, et pour toutes matrices M et N de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, on a : $f_A(\lambda.M + N) = \lambda . f_A(M) + f_A(N)$.

Analyse des productions des étudiants

Cette question est bien réussie par les étudiants comme le montre le tableau suivant :

	Réponses C+	**Réponses C-**	**Réponses F**	**Copies SR**
Effectif	31	12	0	0
Pourcentage	72 %	28 %	0 %	0 %

Tableau 1 *– Réponses des étudiants à la question 1-a*

Les réponses des étudiants montrent que ceux-ci connaissent bien la définition d'une application linéaire et savent l'appliquer dans une situation particulière. Néanmoins, plus du quart des étudiants éprouve des difficultés pour justifier convenablement le calcul effectué. La formulation de propriétés liées aux structures algébriques et l'usage des écritures indicielles des matrices ne sont pas encore bien maîtrisés par certains étudiants. Nous donnons ci-dessous des exemples de réponses produites par les étudiants.

Réponses correctes de type C+

Dans ce type de réponses, tous les étudiants ont utilisé la définition d'une application linéaire. Diverses formulations ont été cependant employées : calcul de $f_A(\lambda.M + N)$, calcul de $f_A(\lambda.M + \mu.N)$, calculs séparés selon les deux lois. Les hypothèses concernant les matrices et les scalaires sont bien précisées et le calcul est plus ou moins justifié. Nous donnons ci-dessous un exemple de telles réponses.

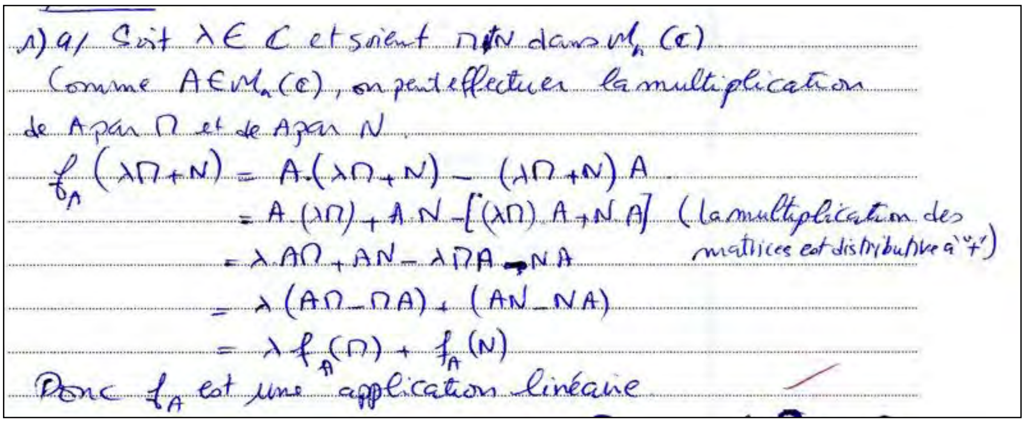

1) a/ Soit $\lambda \in C$ et soient M et N dans $M_n(C)$
Comme $A \in M_n(C)$, on peut effectuer la multiplication de A par M et de A par N.
$f_A(\lambda M + N) = A.(\lambda M + N) - (\lambda M + N).A$
$= A.(\lambda M) + A.N - [(\lambda M).A + N.A]$ (la multiplication des matrices est distributive à "+")
$= \lambda AM + AN - \lambda MA - NA$
$= \lambda(AM - MA) + (AN - NA)$
$= \lambda f_A(M) + f_A(N)$
Donc f_A est une application linéaire

Figure 1 *– Production 1, Tâche T_1*

Réponses correctes de type C-

Dans les 12 réponses de ce type, les étudiants ont convenablement effectué le calcul permettant d'établir la linéarité de f_A (avec diverses formulations, comme dans C+). Nous rencontrons cependant un manque de précision au niveau de la justification des calculs, de l'écriture des hypothèses ou de la conformité des notations symboliques. Les productions ci-dessous montrent des exemples de telles réponses :

Exemple 1

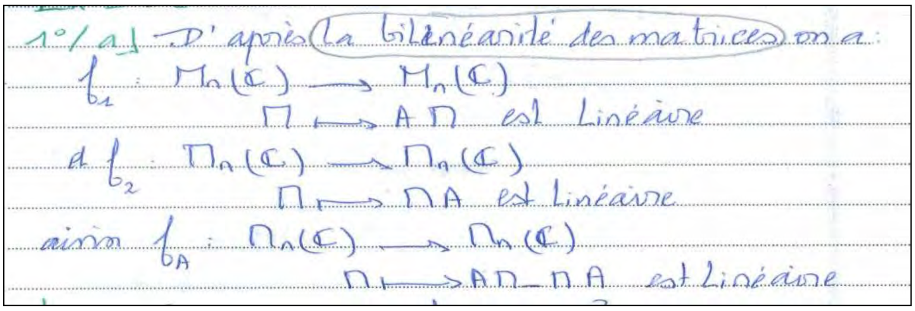

1°/ a) D'après (la bilinéarité des matrices) on a :
$f_{b_1} : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$
$M \longmapsto AM$ est linéaire
et $f_{b_2} : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$
$M \longmapsto MA$ est linéaire
ainsi $f_{b_A} : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$
$M \longmapsto AM - MA$ est linéaire

***Figure 2** – Production 2, Tâche T_1*

L'étudiant ici utilise le fait que f_A est la somme de deux applications linéaires mais n'arrive pas à justifier correctement son raisonnement.

Exemple 2

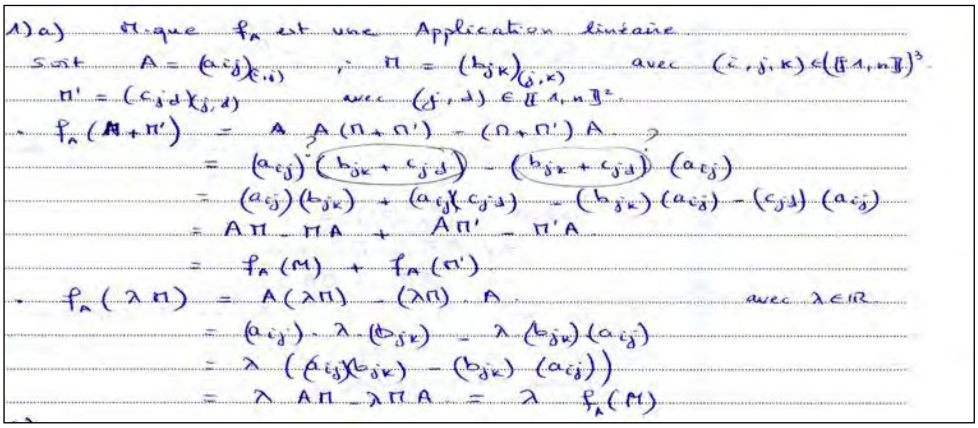

1) a) M.que f_A est une Application linéaire
Soit $A = (a_{ij})_{(i,j)}$, $M = (b_{jk})_{(j,k)}$ avec $(i,j,k) \in ([\![1,n]\!])^3$
$M' = (c_{jd})_{(j,d)}$ avec $(j,d) \in [\![1,n]\!]^2$
. $f_A(M+M') = A(M+M') - (M+M')A$
$= (a_{ij})(b_{jk}+c_{jd}) - (b_{jk}+c_{jd})(a_{ij})$
$= (a_{ij})(b_{jk}) + (a_{ij})(c_{jd}) - (b_{jk})(a_{ij}) - (c_{jd})(a_{ij})$
$= AM - MA + AM' - M'A$
$= f_A(M) + f_A(M')$
. $f_A(\lambda M) = A(\lambda M) - (\lambda M)A$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$
$= (a_{ij})\lambda(b_{jk}) - \lambda(b_{jk})(a_{ij})$
$= \lambda((a_{ij})(b_{jk}) - (b_{jk})(a_{ij}))$
$= \lambda AM - \lambda MA = \lambda f_A(M)$

***Figure 3** – Production 3, Tâche T_1*

Dans cette production, la gestion des coefficients désignant les matrices n'est pas opératoire dans le calcul effectué, elle a juste valeur de notation (par exemple, pour effectuer la somme *M+M'*, les coefficients de *M* et de *M'* doivent être indexés de façon identique : $b_{ij}+c_{ij}$).

Commentaire pour la question 1.a

Les réponses C- montrent que le langage mathématique formel n'est pas complètement maîtrisé par certains étudiants. Pour cette question d'ordre technique, ceci n'a pas empêché les étudiants de produire des solutions globalement correctes.

Question 1-b (Tâche T_2)

En déduire que l'ensemble *F* des matrices *M* de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ vérifiant $MA = AM$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

Analyse a priori

Deux techniques sont possibles pour réaliser cette tâche :

Technique 1 : c'est celle qui est suggérée par la question. Elle consiste à reformuler l'ensemble F comme le noyau de l'application linéaire f_A , puis d'appliquer un théorème du cours.

Technique 2 : elle consiste à vérifier les propriétés d'un sous-espace vectoriel (sev) (F non vide et stable pour les lois de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$).

Dans les deux cas, la réalisation de la technique ne présente pas de difficultés particulières, on peut de plus la supposer facilitée par la première question et suffisamment routinisée en CPS1.

Analyse des productions des étudiants

Cette question est réussie par plus des trois quarts des étudiants. Le tableau ci-dessous donne la répartition des réponses selon les différentes catégories.

	Réponses C+	**Réponses C-**	**Réponses F**	**Copies SR**
Effectif	27	6	10	0
Pourcentage	63 %	14 %	23 %	0 %

***Tableau 2** – Réponses des étudiants à la question 1-b*

Réponses correctes de type C+

Parmi les 27 réponses de ce type, 21 étudiants ont donné une solution selon la technique 1 et les 6 autres ont utilisé la technique 2. À de légères variations près dans les rédactions, ces solutions sont soigneusement présentées comme l'illustrent les productions suivantes :

Exemple 1

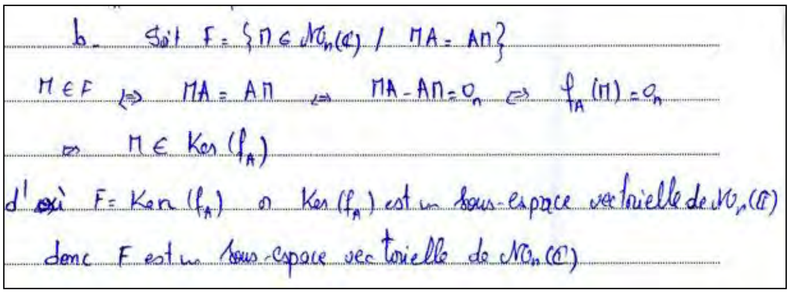

b. Soit $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \ / \ MA = AM\}$
$M \in F \Leftrightarrow MA = AM \Leftrightarrow MA - AM = 0_n \Leftrightarrow f_A(M) = 0_n$
$\Leftrightarrow M \in Ker(f_A)$
d'où $F = Ker(f_A)$ or $Ker(f_A)$ est un sous-espace vectorielle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
donc F est un sous-espace vectorielle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

***Figure 4** – Production 4, Tâche T_2*

Exemple 2

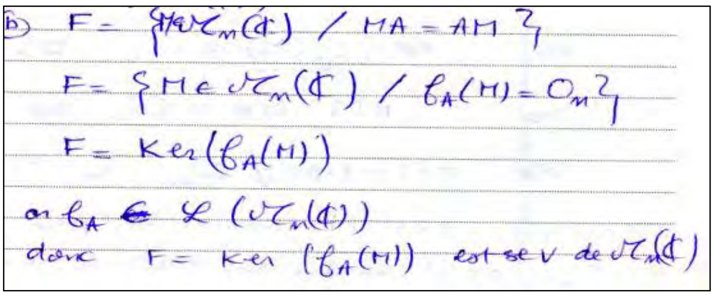

b) $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \ / \ MA = AM\}$
$F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \ / \ f_A(M) = O_n\}$
$F = Ker(f_A(M))$
or $f_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$
donc $F = Ker(f_A(M))$ est sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

***Figure 5** – Production 5, Tâche T_2*

Dans ces deux productions, nous lisons les deux moyens utilisés par les étudiants pour établir l'égalité entre les ensembles *F* et $Ker\ f_A$.

- Démonstration par équivalence, traduisant la double inclusion.
- Différentes écritures de l'ensemble *F*.

Ceci reflète une certaine aisance dans la manipulation de l'égalité ensembliste.

D'un autre côté, nous remarquons dans la production 6 la confusion que fait l'étudiant entre f_A et $f_A\,(M)$ dans l'écriture du noyau.

Pour les réponses C+ données avec la technique 2, les étudiants ont généralement vérifié soigneusement les caractéristiques d'un sous-espace vectoriel, comme le montre la production suivante :

Exemple 3

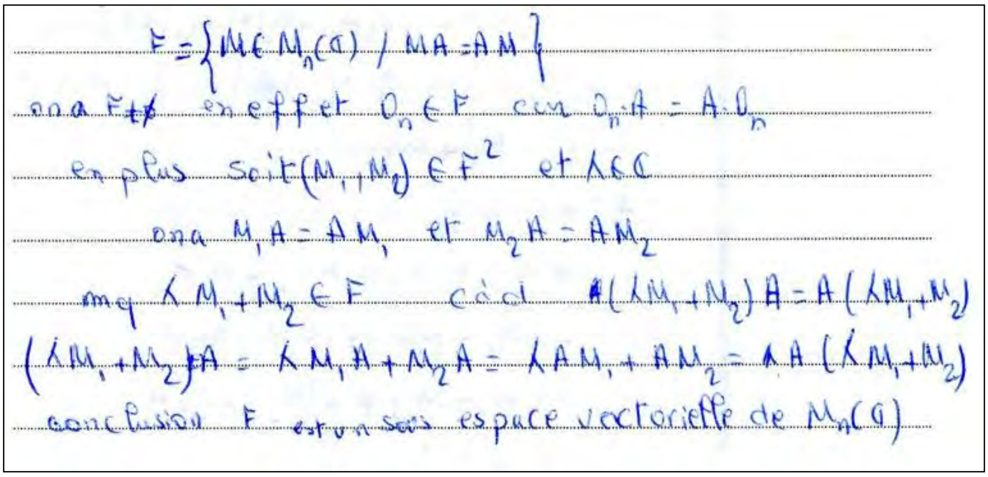

$F = \{M \in M_n(C) \,/\, MA = AM\}$
on a $F \neq \emptyset$ en effet $O_n \in F$ car $O_n \cdot A = A \cdot O_n$
en plus soit $(M_1, M_2) \in F^2$ et $\lambda \in C$
on a $M_1 A = A M_1$ et $M_2 A = A M_2$
mq $\lambda M_1 + M_2 \in F$ càd $(\lambda M_1 + M_2) A = A(\lambda M_1 + M_2)$
$(\lambda M_1 + M_2) A = \lambda M_1 A + M_2 A = \lambda A M_1 + A M_2 = A(\lambda M_1 + M_2)$
conclusion F est un sous espace vectorielle de $M_n(C)$

Figure 6 *– Production 6, Tâche T_2*

Réponses correctes de type C-

Dans ce type de réponses, nous rencontrons aussi chez les étudiants les deux techniques de travail. Ces réponses se caractérisent par des « glissements » entre diverses notions et des imprécisions de rédaction entraînant un changement dans le sens mathématique des propriétés démontrées. Nous donnons ci-dessous un exemple de production pour chacune des techniques employées :

Exemple 1

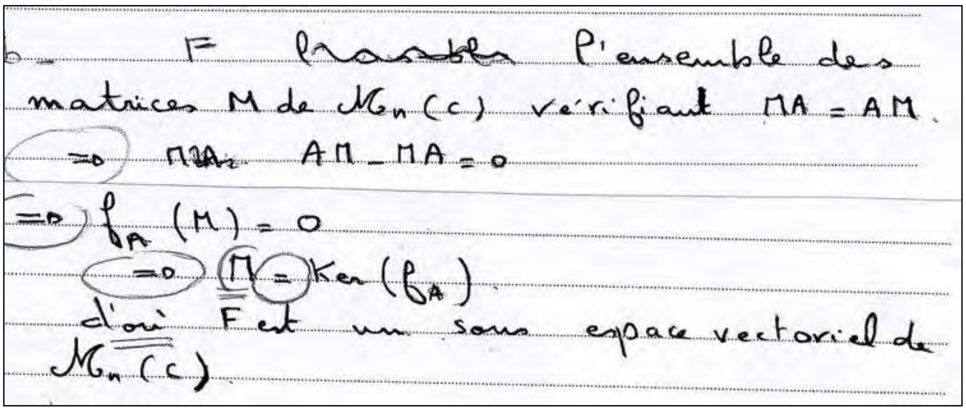

b- F traduit l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_n(C)$ vérifiant $MA = AM$.
$\Rightarrow$ ~~MA~~ $AM - MA = 0$
$\Rightarrow f_A(M) = 0$
$\Rightarrow M = Ker(f_A)$
d'où F est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(C)$

Figure 7 *– Production 7, Tâche T_2*

Le travail de l'étudiant montre que $M \in Kerf_A$. À ce niveau, il y a un glissement de notation $\in / =$. De plus ce travail permet seulement de conclure que $F \subset Kerf_A$, l'inclusion réciproque n'est pas traitée. Cette erreur pourrait être due à une confusion entre les statuts des symboles $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$. Nous rencontrons ce type d'erreurs dans 4 autres copies.

Exemple 2

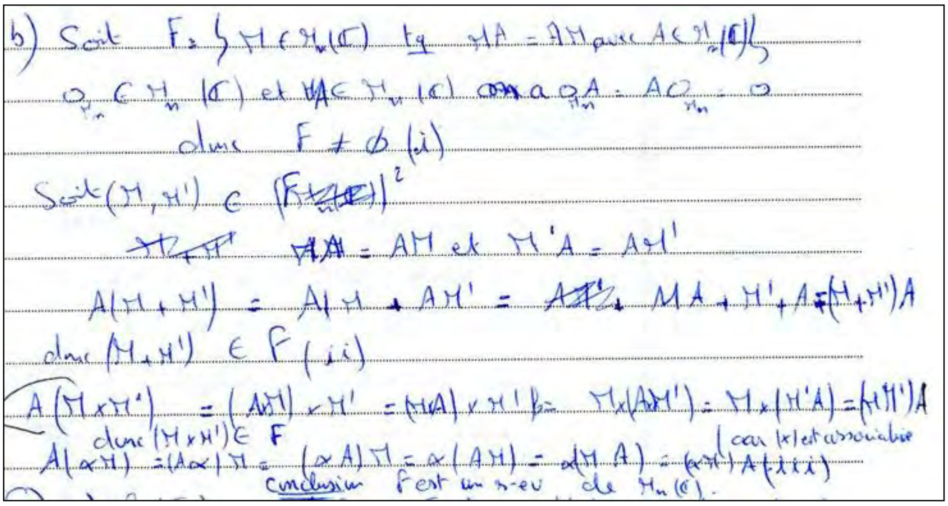

b) Soit $F = \{M \in M_n(\mathbb{C})$ tq $MA = AM$ pour $A \in M_n(\mathbb{C})\}$
$O_{M_n} \in M_n(\mathbb{C})$ et $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$ on a $O_{M_n}A = AO_{M_n} = O$
donc $F \neq \emptyset$ (i)
Soit $(M, M') \in F^2$
$MA = AM$ et $M'A = AM'$
$A(M+M') = AM + AM' = MA + M'A = (M+M')A$
donc $(M+M') \in F$ (ii)
$A(M \times M') = (AM) \times M' = (MA) \times M' = M \times (AM') = M \times (M'A) = (MM')A$
donc $(M \times M') \in F$ car $\times$ est associative
$A(\alpha M) = (A\alpha)M = (\alpha A)M = \alpha(AM) = \alpha(MA) = (\alpha M)A$ (iii)
Conclusion F est un s-ev de $M_n(\mathbb{C})$.

Figure 8 – *Production 8, Tâche T_2*

Pour montrer que *F* est un sous-espace vectoriel, l'étudiant ajoute une propriété concernant la multiplication interne des matrices. Il y a là une confusion entre les caractéristiques des structures algébriques. Nous rencontrons ce genre d'erreurs dans d'autres copies.

Réponses fausses

Dans la plupart des réponses fausses, les étudiants, voulant utiliser l'application f_A pour effectuer une déduction, se sont heurtés à des difficultés de calcul et/ou d'interprétation. Les productions suivantes illustrent les difficultés les plus fréquentes :

Exemple 1

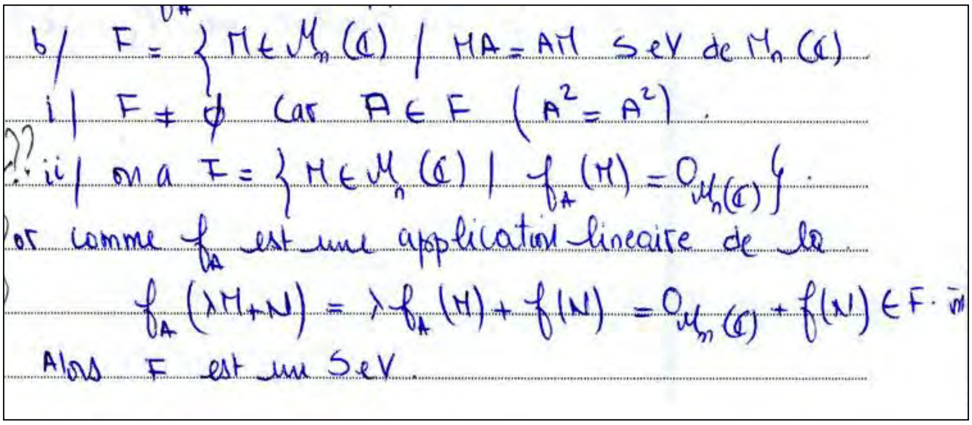

b/ $F = \{M \in M_n(\mathbb{C}) / MA = AM\}$ SeV de $M_n(\mathbb{C})$
i/ $F \neq \emptyset$ car $A \in F$ ($A^2 = A^2$).
ii/ on a $F = \{M \in M_n(\mathbb{C}) / f_A(M) = O_{M_n(\mathbb{C})}\}$.
or comme f_A est une application linéaire de la
$f_A(\lambda M + N) = \lambda f_A(M) + f(N) = O_{M_n(\mathbb{C})} + f(N) \in F$.
Alors F est un SeV.

Figure 9 – *Production 9, Tâche T_2*

Dans cette production, l'étudiant, après avoir utilisé la linéarité de f_A pour calculer $f_A(\lambda.M + N)$ et remplacé $f_A(M)$ par $O_{\mathcal{M}n(\mathbf{C})}$ (ce qui indique implicitement que *M* est choisi dans *F*), l'étudiant semble ignorer quoi faire de $f_A(N)$. Cette difficulté pourrait résulter de la non caractérisation de N, comme élément de F, et/ou d'un problème de compréhension concernant le statut muet de M dans l'écriture de l'ensemble F. Pour terminer, l'étudiant conclut que « $f_A(\lambda M+N) \in F$ », au lieu de ($\lambda M+N \in F$).

Exemple 2

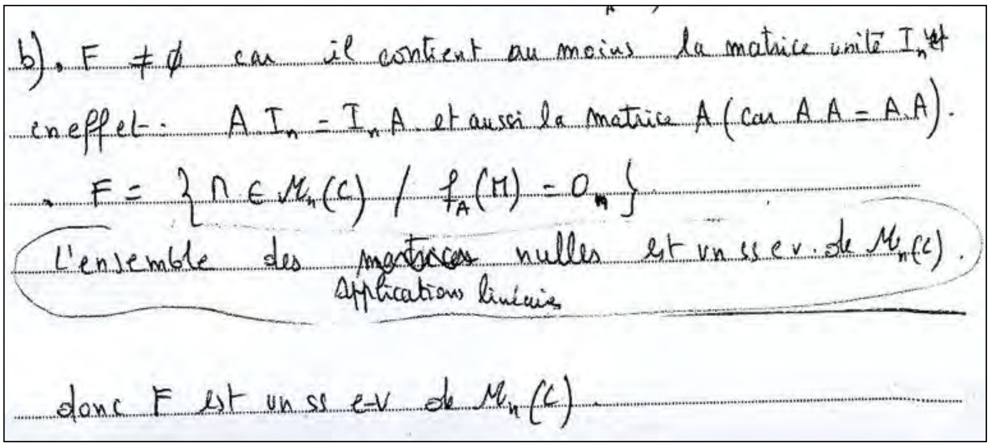

b). F ≠ ∅ car il contient au moins la matrice unité I_n et
en effet : $A I_n = I_n A$ et aussi la matrice A (car A A = A A).
. $F = \{M \in M_n(C) / f_A(M) = O_n\}$
L'ensemble des ~~matrices~~ applications linéaires nulles est un ss e.v. de $M_n(C)$.
donc F est un ss e-v de $M_n(C)$.

Figure 10 – *Production 10, Tâche T_2*

Après avoir écrit que F est un ensemble de matrices, l'étudiant remplace ici « matrices » par « applications linéaires ». Il considère ensuite que ces applications linéaires sont nulles, ce qui indique qu'il a compris l'égalité $f_A(M) = O_n$ comme une égalité fonctionnelle et non matricielle. Il n'est pas clair comment l'étudiant a fait le lien entre la propriété de stabilité de F et le résultat formulé. Nous retrouvons ce type d'erreurs dans d'autres productions et sous d'autres aspects, comme dans la production suivante :

Exemple 3

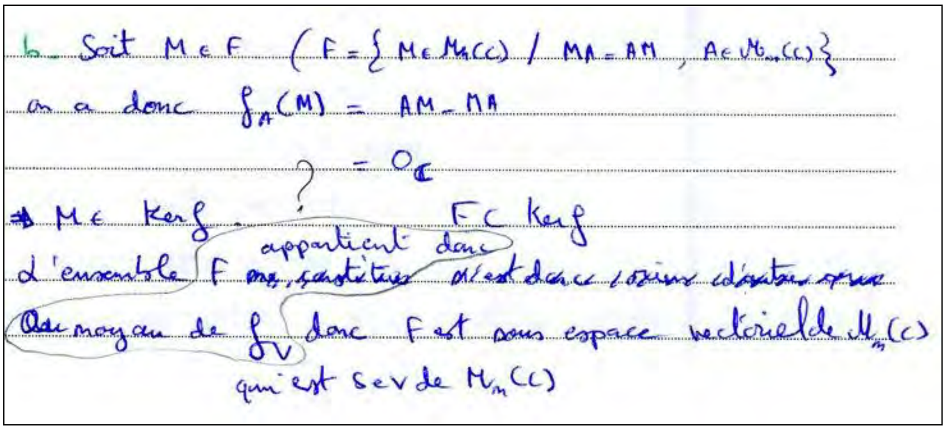

b. Soit $M \in F$ ($F = \{M \in M_n(C) / MA = AM, A \in M_n(C)\}$
on a donc $f_A(M) = AM - MA$
? $= O_C$
⇒ $M \in \mathrm{Ker} f$. $F \subset \mathrm{Ker} f$
l'ensemble F appartient donc
au noyau de f donc F est sous espace vectoriel de $M_n(C)$
qui est sev de $M_n(C)$

Figure 11 – *Production 11, Tâche T_2*

L'étudiant montre ici convenablement que $F \subset Kerf_A$. La formulation de la conclusion laisse croire qu'une partie du noyau $Ker\, f_A$ est un sous-espace vectoriel, ce qui est erroné. Remarquons par ailleurs le « glissement » dans la conclusion entre les notions d'appartenance et d'inclusion.

Commentaire pour la question 1-b

Pour cette question, les réponses correctes C- et les réponses fausses reflètent une certaine fragilité chez les étudiants dans l'usage du langage ensembliste et des éléments de logique :

glissements entre $\in/\subset$ et $\in/=$, usage non conforme des connecteurs logiques $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$, absence de quantification pour les éléments en jeu. Cette situation a entraîné des difficultés de raisonnement et/ou des formulations et interprétations erronées dans les réponses.

Question 2-a. (Tâche T_3)

Calculer $f_A\ (I_n)$, où I_n désigne la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$

Analyse a priori

Il s'agit d'un calcul immédiat, on trouve $f_A(I_n) = O_n$. Toutefois, si l'on désigne les matrices par leurs coefficients, le calcul demandera plus d'attention au niveau de la gestion des écritures indicielles, ce qui pourrait poser des difficultés de calcul.

Analyse des productions des étudiants

Cette question est très bien réussie par les étudiants comme l'indique le tableau suivant :

	Réponses C+	Réponses C-	Réponses F	Copies SR
Effectif	42	0	1	0
Pourcentage	98 %	0 %	2 %	0 %

Tableau 3 *– Réponses des étudiants à la question 2-a*

Commentaire

Parmi les 42 réponses C+, 40 étudiants ont répondu par : $f_A(I_n) = AI_n - I_nA = A - A = O_n$. Certains ont précisé que I_n est neutre pour la multiplication matricielle et d'autres l'ont utilisé implicitement. Dans les deux autres productions, un des étudiants a commencé par montrer que $I_n \in F$, puis, utilisant que $F = Ker\ f_A$, il a conclu que $f_A\ (I_n) = O_n$. Le dernier étudiant a fait le calcul de $AI_n - I_nA$ en utilisant les coefficients des matrices A et I_n. Il semble qu'il n'utilise pas le fait que I_n est neutre pour la multiplication matricielle, comme le laisse penser sa production donnée ci-dessous.

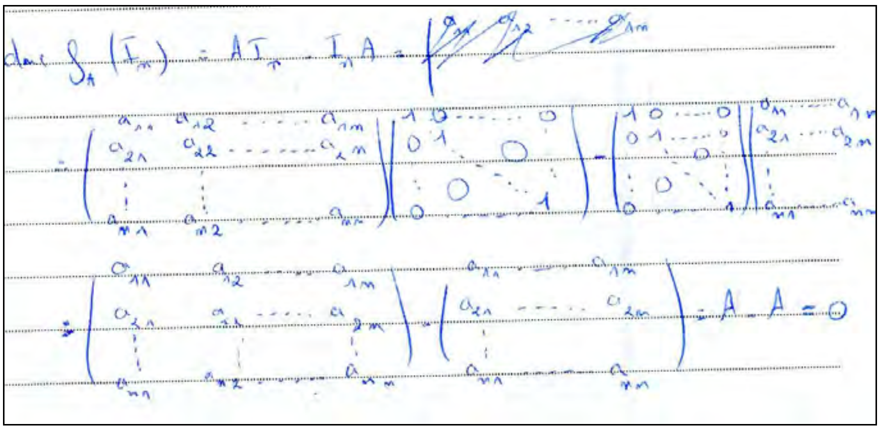


Figure 12 *– Production 12, Tâche T_3*

Concernant la réponse fausse, l'étudiant a inversé les rôles de A et I_n dans le calcul de $f_A(I_n)$. Ainsi, nous lisons sur sa copie :

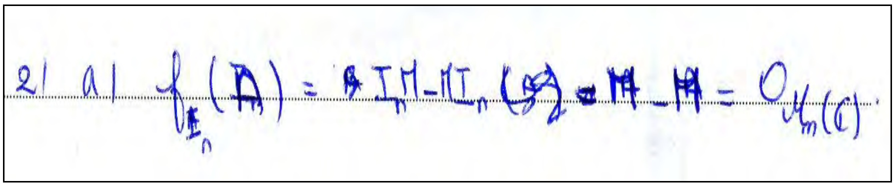


Figure 13 *– Production 13, Tâche T_3*

Nous notons aussi la confusion faite concernant les matrices M et A. Cet état d'hésitation témoigne d'une certaine fragilité dans la maîtrise de la situation de la tâche.

Question 2-b (Tâche T_4)

Existe-t-il des matrices A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telles que f_A soit injective ?

Analyse a priori

Il s'agit d'une question ouverte. Deux stratégies sont possibles pour réaliser la tâche :

Stratégie 1 : Elle consiste à reformuler la question en terme de noyau : f_A est injective $\Leftrightarrow$ $Kerf_A = \{O_n\}$. Puis, utilisant 2-a, on déduit que pour tout A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, $Kerf_A \neq \{O_n\}$. f_A est donc non injective, quelle que soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

Stratégie 2 : Elle utilise la définition générale d'une injection. Plusieurs techniques sont possibles pour cette stratégie suivant la caractérisation de l'injectivité qui sera retenue. On peut par exemple procéder comme suit :

f_A est injective $\Leftrightarrow$ (Pour tous M et N dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, $f_A(M) = f_A(N) \Rightarrow M = N$) *(i)*

Or, $f_A(M) = f_A(N) \Leftrightarrow AM - MA = AN - NA \Leftrightarrow AM - AN = MA - NA$

$$\Leftrightarrow A(M-N) = (M-N)A \qquad (ii)$$

On remarque ensuite que *(ii)* peut se réaliser sans que l'on ait nécessairement $M = N$ (Il suffit par exemple de considérer deux matrices distinctes M et N de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telles que $N = M - I_n$)
On conclut alors que f_A n'est pas injective, quelle que soit la matrice A.

Cette technique demande d'abord de bien distinguer entre le statut de A d'une part et celui de M et N d'autre part. Ensuite, il faut bien gérer les connecteurs et les quantificateurs logiques en jeu et il faut savoir comment résoudre le problème d'existence de M et N vérifiant l'égalité *(ii)*. Ces points pourraient poser problèmes pour les étudiants qui adoptent cette technique de travail.

D'autres techniques sont aussi possibles, comme : utiliser la contraposée de *(i)*, ou chercher pour quelle matrice A, il existe une matrice Y de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telle que l'équation en M : $f_A(M) = Y$ admette plus d'une solution.

Analyse des productions des étudiants

Cette question a été ratée par environ la moitié des étudiants (47%). Le tableau ci-dessous donne la répartition des réponses selon les différentes catégories.

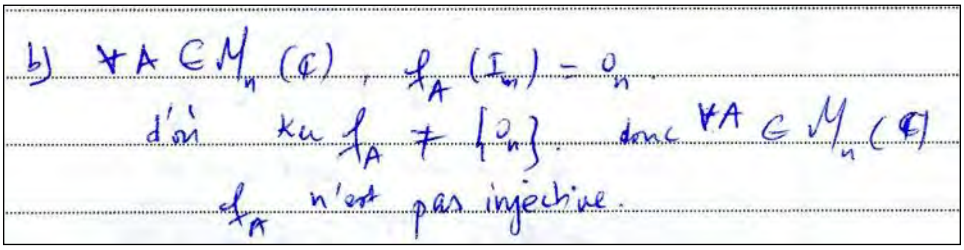
	Réponses C+	Réponses C-	Réponses F	Copies SR
Effectif	16	7	17	3
Pourcentage	37 %	16 %	40 %	7 %

Tableau 4 *– Réponses des étudiants à la question 2-b*

Réponses correctes de type C+

Dans les 16 réponses de ce type, les étudiants ont utilisé la première stratégie avec des formes de rédaction variées. Les solutions correspondantes sont précises et soignées comme l’illustrent les exemples suivants :

Exemple 1



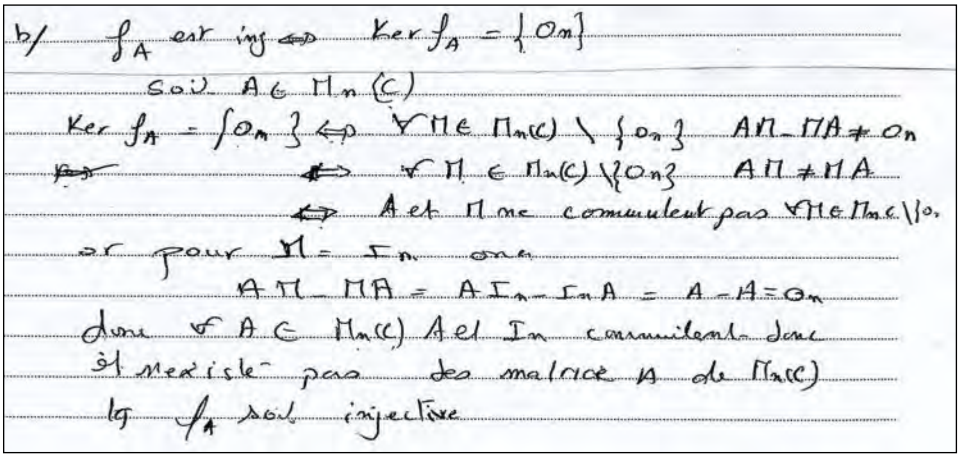
b) $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$, $f_A(I_n) = 0_n$

d'où $Ker\, f_A \neq \{0_n\}$ donc $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$

f_A n'est pas injective.

Figure 14 *– Production 14, Tâche T_4*

Exemple 2



b/ f_A est inj $\Leftrightarrow$ $Ker\, f_A = \{0_n\}$

soit $A \in M_n(\mathbb{C})$

$Ker\, f_A = \{0_n\} \Leftrightarrow \forall M \in M_n(\mathbb{C}) \setminus \{0_n\}$ $AM - MA \neq 0_n$

$\Leftrightarrow \forall M \in M_n(\mathbb{C}) \setminus \{0_n\}$ $AM \neq MA$

$\Leftrightarrow$ A et M ne commutent pas $\forall M \in M_n(\mathbb{C}) \setminus \{0_n\}$

or pour $M = I_n$ on a

$AM - MA = AI_n - I_nA = A - A = 0_n$

donc $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$ A et I_n commutent donc

il n'existe pas des matrice A de $M_n(\mathbb{C})$

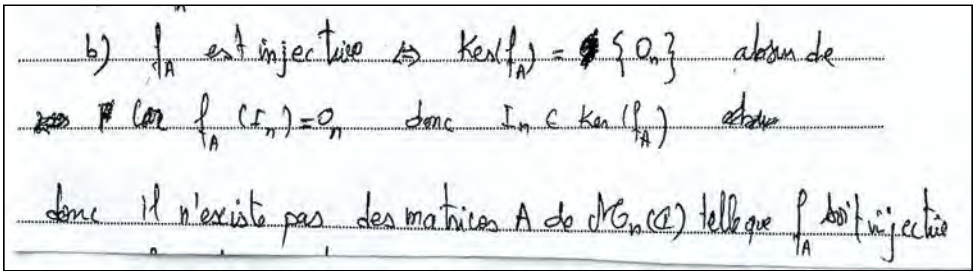
tq f_A soit injective

Figure 15 *– Production 15, Tâche T_4*

L’étudiant, ici, n’a pas exploité le résultat de la question 2-a. Il a effectué une nouvelle recherche qui l’a ramené finalement à utiliser $f_A(I_n)$.

Réponses correctes de type C-

Dans ce type de réponses les productions manquent de précision au niveau de la rédaction, comme dans l’exemple suivant :



b) f_A est injective $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker}(f_A) = \{O_n\}$ absurde
car $f_A(I_n)=O_n$ donc $I_n \in \mathrm{Ker}(f_A)$ absurde
donc il n'existe pas des matrices A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que f_A soit injective

***Figure 16** – Production 16, Tâche T_4*

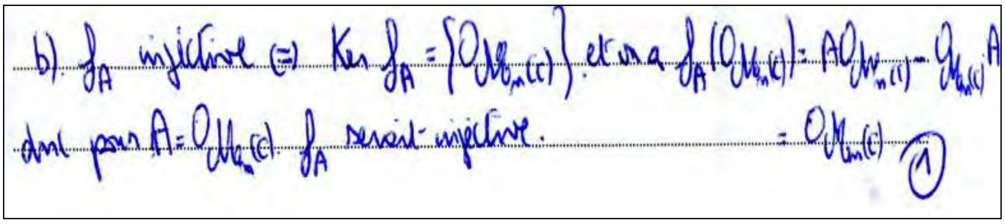
Ici, la quantification, qui constitue un élément clé du raisonnement par l'absurde, est implicite.

Réponses fausses

Sur 17 réponses fausses, 13 étudiants sont arrivés à reformuler convenablement la question en terme de noyau ou en utilisant la définition générale de l'injectivité. C'est dans la gestion et/ou l'interprétation de la situation entraînée par la formulation donnée que les étudiants ont échoué. La plupart d'entre eux se sont heurtés à des difficultés pour distinguer les statuts des matrices en jeu. Pour les 4 autres réponses fausses, les étudiants ne sont pas arrivés à traduire correctement l'injectivité de f_A .

Nous donnons ci-après des exemples de chacun de ces deux types de réponses :

Exemple 1

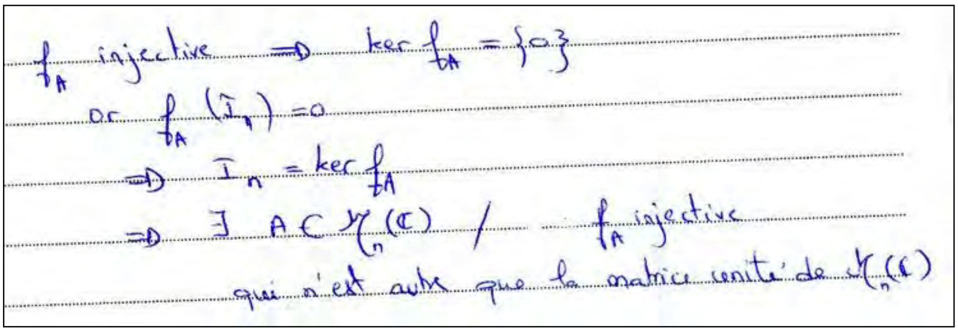


b) f_A injective $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker}\, f_A = \{O_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}\}$ et on a $f_A(O_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}) = AO_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})} - O_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}A$
donc pour $A = O_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$ f_A serait injective. $= O_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$ (1)

***Figure 17** – Production 17, Tâche T_4*

Ici, l'étudiant s'est contenté de vérifier que O_n est un élément du noyau. Dans sa conclusion, il a traité A et O_n sous le même statut.

Exemple 2



f_A injective $\Rightarrow$ $\ker f_A = \{0\}$
or $f_A(I_n) = 0$
$\Rightarrow I_n = \ker f_A$
$\Rightarrow \exists\, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ / f_A injective
qui n'est autre que la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

***Figure 18** – Production 18, Tâche T_4*

Dans cette production, la stratégie 1 est correctement implémentée. À la fin de son travail, l'étudiant a pris I_n pour la matrice A, ce qui indique des confusions entre le statut de A et celui de I_n. Remarquons par ailleurs le glissement dans la notation : $\in / =$.

Exemple 3

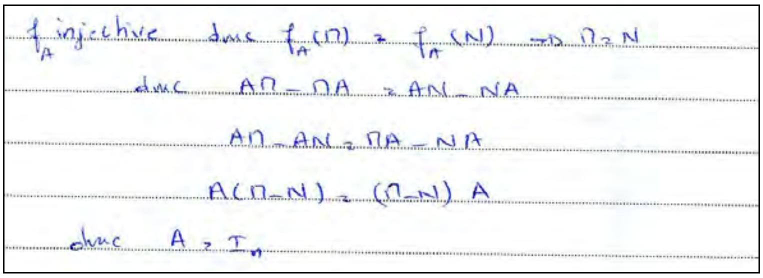


Figure 19 *– Production 19, Tâche T_4*

Dans cette réponse l'étudiant a utilisé une caractéristique ensembliste de l'injection. Dans ce cas, le problème se ramène à chercher la (ou les) matrice(s) A pour lesquelles l'égalité *(i)* $A(M-N)=(M-N)A$ n'est vérifiée que pour $M=N$; ceci quelles que soient les matrices M et N de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Or dans sa conclusion, l'étudiant s'est contenté de donner un cas pour lequel l'égalité *(i)* est vérifiée indépendamment de la propriété d'injectivité qu'il étudie, ce qui indique une confusion dans les rôles que jouent les matrices A, M et N dans l'égalité *(i)*. Il semble aussi que l'absence de quantification n'a pas permis à l'étudiant de s'approprier la tâche qu'il devait réaliser.

Exemple 4

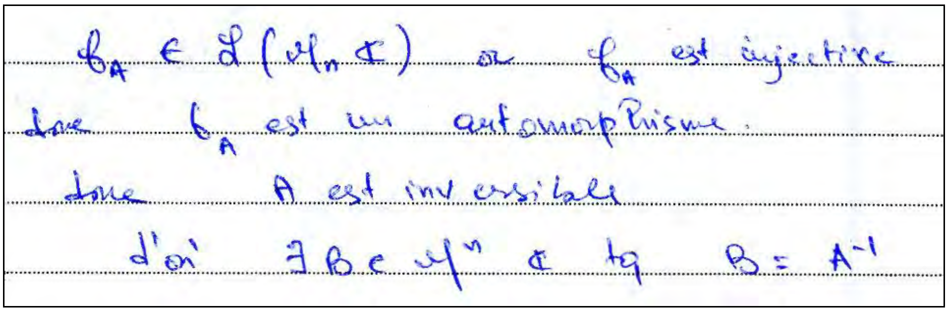


Figure 20 *– Production 20, Tâche T_4*

Dans cette réponse, il y a un glissement d'objets A/f_A. L'étudiant considère que A est la matrice de l'application linéaire f_A.

Commentaire pour la question 2-b

Pour cette question, bien que la plupart des étudiants (84%, toutes catégories de réponses confondues) aient donné des formulations correctes à la notion d'injection et que la résolution soit supposée facilitée par la réponse à la question 2-a, des difficultés au niveau de la gestion des ostensifs mis en jeu dans les formulations symboliques données ont empêché un bon nombre d'étudiants de terminer leur travail. L'insuffisance dans l'appropriation des formulations exprimées, la confusion des statuts des matrices mises en jeu et la négligence de la quantification ont entraîné un flou chez les étudiants à propos de ce qu'ils doivent chercher et de la manière avec laquelle ils doivent gérer la situation. D'un autre côté, nous dénombrons 22 étudiants sur 43 (soit plus de 51%, y compris ceux qui ont donné des réponses correctes) qui ne sont pas arrivés à tirer profit de la question 2-a et à effectuer une déduction. Ceci montre des difficultés dans la mise en relation des données de l'exercice. Par ailleurs, comme dans les questions précédentes, nous remarquons une fragilité dans l'usage du langage ensembliste et symbolique (glissements de notations : $\in/=$, $\Rightarrow$/donc, $\Rightarrow/=$,...), ce qui, dans certains cas, a influé sur les réponses des étudiants.

VI. ANALYSE GLOBALE ET CONCLUSION

L'analyse des réponses des étudiants aux différentes questions du test montre tout d'abord que les savoirs en jeu dans l'exercice (sous-espace vectoriel, application linéaire, injection) sont, dans leur ensemble, convenablement appris. Les étudiants montrent des capacités à mobiliser ces savoirs dans leurs réponses. En atteste les manières avec lesquelles les questions ont été abordées par les étudiants, les reformulations données aux différentes notions et les techniques choisies pour la réalisation des tâches données. Néanmoins, cette disponibilité des connaissances s'est avérée insuffisante chez bon nombre d'étudiants pour permettre de produire des réponses correctes. Un obstacle majeur rencontré réside dans les difficultés de gestion du formalisme en jeu dans l'exercice. Ceci nous amène à nous interroger sur les raisons pour lesquelles de bons étudiants, suivant un enseignement spécialisé de mathématiques, se trouvent perturbés par un formalisme et des écritures symboliques a priori banales et éprouvent des difficultés à mettre en œuvre les connaissances apprises. L'une des raisons qui semble être à l'origine de cette situation concerne les choix institutionnels relatifs à l'enseignement des notions et du langage ensemblistes et plus généralement, du formalisme mathématique dans les institutions ES et CPS1. En effet, l'étude des rapports institutionnels au formalisme mathématique, et plus particulièrement celui lié aux notions ensemblistes fonctionnelles dans les institutions ES et CPS1, effectuée dans le cadre de notre thèse[5], a mis en évidence une rupture et un dysfonctionnement dans les environnements praxéologiques relatifs à l'enseignement des dites notions dans la transition ES/CPS1.

Ainsi, dans l'institution du secondaire, malgré la présence des notions ensemblistes dans le curriculum et la nécessité de leur usage pour le développement de divers thèmes d'étude, notamment ceux liés à l'étude des transformations géométriques, l'institution ES recommande de ne pas considérer ces notions comme un objectif d'apprentissage, de les introduire au gré des besoins et de ne pas s'attarder sur leur aspect théorique. L'analyse des documents d'enseignement officiels (programmes, manuels officiels[6] et sujets de baccalauréat) des différentes classes de lycée[7] a montré que les praxéologies mathématiques (PM) consacrées à l'étude des notions ensemblistes fonctionnelles sont caractérisées par une dominance de PM ponctuelles et rigides (Bosch et al. 2004), dont la mise en œuvre par les élèves est essentiellement axée sur le bloc pratico-technique. En ce sens que la plupart des techniques associées à ces PM sont routinières et stéréotypées et leur réalisation ne nécessite pas de se référer aux blocs technologico-théoriques, de comprendre le sens porté par le symbolisme manipulé ou de connaître les règles de son usage. Ceci amène souvent les élèves à développer des mécanismes de travail peu réfléchi à propos de l'usage de ces techniques ainsi que de la manipulation du symbolisme qui y est mis en jeu. Dans l'institution CPS1, en revanche, les notions ensemblistes et le vocabulaire et symbolisme associés sont considérés comme des outils fondamentaux pour les mathématiques du supérieur, et il est attendu que les étudiants apprennent à les maîtriser et à les utiliser à bon escient. Dans cette perspective, les PM utilisées dans CPS1[8] pour l'étude et la mise en œuvre des dites connaissances sont généralement locales et interviennent dans les exercices et problèmes essentiellement au niveau technologico-théorique. Le choix et la réalisation des techniques associées sont considérés par l'institution comme des activités secondaires jouant un rôle auxiliaire dans l'apprentissage des théories et sont de ce fait laissés le plus souvent à la charge des étudiants.

---

[5] Voir Najar (2010 & 2011).

[6] Dans l'institution ES tunisienne, un seul manuel scolaire est autorisé par le ministère de tutelle pour l'utilisation en classe. Ce manuel (dit « officiel ») traduit, dans une certaine mesure, le point de vue de l'institution quant à l'application et la mise en œuvre des programmes officiels dans l'enseignement.

[7] L'enseignement au lycée comprend 4 classes. Elles concernent des élèves âgés de 15 à 19 ans.

[8] Étudiées à travers l'analyse des fiches de travaux dirigés des deux classes concernées par notre recherche.

Néanmoins, l'importance accordée à l'enseignement des connaissances ensemblistes dans CPS1 ne semble pas avoir permis aux étudiants de répondre à l'attente de l'institution dans ce domaine et de surmonter les difficultés d'apprentissage concernant ces connaissances. Ceci apparaît clairement à travers les difficultés et obstacles rencontrés par les étudiants dans leur résolution de l'exercice analysé ci-dessus. Une première raison qui pourrait être à l'origine de cette situation provient, semble-t-il, de la sous-estimation par l'institution CPS1 du travail d'ordre technique concernant l'usage des connaissances ensemblistes et l'insuffisance dans le travail d'intégration des PM ponctuelles étudiées dans ES dans les PM locales étudiées dans CPS1. Ceci rend difficile la mise en évidence du lien entre les niveaux technique et technologique dans le fonctionnement des connaissances en jeu et accroît la soudaineté des changements auxquels les étudiants sont confrontés au début du supérieur et auxquels ils semblent avoir du mal à s'adapter. Une deuxième raison provient du fait que le langage ensembliste, et plus généralement le symbolisme mathématique, ne sont généralement pas considérés comme un enjeu explicite d'enseignement (dans ES comme dans CPS1), on suppose souvent que leur usage par les élèves et étudiants va de soi s'ils ont compris les notions qui y sont engagées et qu'il n'est pas nécessaire de leur attacher une attention particulière. Dans le même contexte, l'enseignement des connaissances en logique dans CPS1 se limite généralement à la présentation du vocabulaire logico-mathématique et de certaines propriétés et lois logiques (lois de De Morgan, interversion des quantificateurs…), ce qui ne semble pas suffire pour permettre aux étudiants de comprendre le mode de fonctionnement des connaissances en logique et de maîtriser le contrôle de la structure logique des énoncés mathématiques. Pour surmonter ces difficultés, Durand-Guerrier et Arsac (2003) estiment qu'il est impératif de mettre sur pied un enseignement plus systématique des règles de raisonnement prenant en compte

> …de manière explicite l'articulation entre les aspects syntaxique et sémantique qui est au cœur de l'activité mathématique… (op. cit., p. 334)

Les points que nous venons de soulever montrent qu'à l'entrée à l'université, l'institution du supérieur laisse à la charge des étudiants l'acquisition d'un complément de connaissances permettant l'articulation entre les volets techniques et théoriques des praxéologies mathématiques étudiées et l'intégration des PM disponibles (ou préalablement étudiées dans ES) dans des PM locales introduites dans le supérieur. Et ceci, soit par des efforts personnels, soit par des aides à l'étude, soit encore en s'appuyant sur le facteur temps. Or, pour Bosch et al. (2004), on ne peut attendre des étudiants qu'ils construisent spontanément par eux-mêmes des praxéologies mathématiques relativement complètes permettant la mise en œuvre et l'articulation des blocs pratiques et technologiques et leur accordant plus d'autonomie dans le choix des techniques et des représentations sémiotiques. Cette construction, selon les auteurs, doit être prise en charge par une institution d'enseignement. Ceci soulève le problème des nécessités d'apprentissage que les apprenants ne semblent pas pouvoir acquérir par des efforts personnels et que des actions didactiques au niveau de l'enseignement s'avèrent nécessaires pour favoriser leur apprentissage. Castela (2007 p. 180) a relevé l'existence de telles nécessités d'apprentissage chez de bons élèves de Première S[9] qui, malgré leur performance, se trouvent désarmés devant des tâches de résolution de problèmes exigeant initiative, adaptabilité et inventivité. Dans l'objectif de décrire les besoins d'apprentissage qui font défaut et prouver leur nécessité pour la réussite des élèves, Castela (2008), adoptant le modèle des organisations praxéologiques de Chevallard (1998), distingue au niveau de la technologie de toute praxéologie mathématique intervenant dans un problème deux composantes, respectivement théorique et pratique. La composante théorique d'une technologie assure la validité de la technique utilisée. Quant à la composante pratique, elle correspond à ce que

[9] deuxième année de lycée, option scientifique, 16-17 ans. (Il s'agit du système d'enseignement français).

certains mathématiciens considèrent comme *a mathematical folklore*, c'est-à-dire certains savoirs très ancrés dans l'expérience, permettant de choisir, de mettre en œuvre, de piloter la technique (Ibid.). Pour Castela, ces connaissances d'ordre pratique sont dotées d'une légitimité mathématique (par référence à l'activité du mathématicien) et se trouvent implicitement reconnues par l'institution éducative[10], mais celle-ci reste muette à leur propos et n'organise aucun dispositif visant explicitement à permettre leur apprentissage. Une mini-ingénierie expérimentée dans le cadre de notre thèse et se fondant sur l'hypothèse que :

> une action appropriée au niveau de l'enseignement pourrait favoriser l'acquisition de connaissances d'ordre pratique qui, bien qu'elles débordent le savoir théorique, s'avèrent nécessaires pour le fonctionnement du savoir enseigné

a permis d'obtenir des progrès chez les étudiants dans l'activité de résolution de problèmes, particulièrement en ce qui concerne l'exploitation des ressources sémiotiques mises en jeu dans les problèmes et la rédaction des solutions.

En guise de conclusion, notre recherche met en évidence, nous semble-t-il, le rôle crucial que jouent le monde ensembliste et le langage symbolique formel dans l'activité mathématique. Elle montre aussi la nécessité de prendre en charge de façon plus explicite l'enseignement des moyens de gestion des ressources sémiotiques et des connaissances d'ordre pratique en jeu dans l'activité mathématique, afin d'atténuer les difficultés auxquelles se heurtent les étudiants dans leur apprentissage des mathématiques, notamment lors du passage du secondaire au supérieur. Dans cette perspective, un grand travail, nous semble-t-il, reste à faire pour identifier de façon plus précise les connaissances pratiques nécessaires au fonctionnement du savoir mathématique, étudier les modes de leur intervention dans l'activité mathématique et déterminer les moyens et les modalités pouvant aider les apprenants à les acquérir.

[10] Vu que, selon Castela (2008), leur nécessité se manifeste dans les tâches d'évaluation et c'est leur absence qui est institutionnellement invoquée comme facteur d'échec.

RÉFÉRENCES

Bosch M., Fonseca C., Gascon, J. (2004) Incompletitud de las organizaciones matematicas locales en las instituciones escolares. *Recherches en didactiques des mathématiques* 24(2/3), 205-250.

Castela C. (2007) Les ressources autodidactes en mathématiques de très bons élèves de classes scientifiques. In Penloup M-C. (Ed.) (pp. 173-202) *Les connaissances ignorées, Approche pluridisciplinaire de ce que savent les élèves*. Paris : INRP.

Castela C. (2008) Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignorés par les institutions d'enseignement. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 28(2), 135-182.

Chevallard Y. (1998) Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. *Actes de l'université d'été de la Rochelle, Juillet 1998* (pp. 91-118).

Chevallard Y. (1989) Le concept de rapport au savoir, rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel. *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique, année 1988-1989*. Grenoble : Institut Fourrier. IMAG. 211-235.

Corriveau C. (2007) *Arrimage Secondaire-Collégial. Démonstration et formalisme*. Mémoire de Maîtrise en didactique des mathématiques. Université du Québec à Montréal.
http://ldm.math.uqam.ca/catalogue/memoires/pdf/M10123.pdf/view

Dorier J.-L. (Eds.) (1997) *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Durand-Guerrier V., Arsac, G. (2003) Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. Le cas de l'analyse. Quelles implications didactiques ? *Recherches en Didactique des Mathématiques* 23(3), 295-342.

Najar R. (2010) *Effets des choix institutionnels d'enseignement sur les possibilités d'apprentissage des étudiants. Cas des notions ensemblistes fonctionnelles dans la transition Secondaire/Supérieur*. Thèse de Doctorat. Université Paris Diderot-Paris 7. http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00564191/en/

Najar R. (2011) Notions ensemblistes et besoins d'apprentissage dans la transition Secondaire/Supérieur. *Canadian Journal for Science, Mathematics, and Technology Education*. 11(2). Routledge, University of Toronto.

RECHERCHE ET ÉTUDE EN MATHÉMATIQUES SUPÉRIEURES

Carl WINSLØW*

Résumé – Nous examinons l'apport du travail du mathématicien chercheur au travail de l'enseignant universitaire de mathématiques, ce qui nous amène d'abord à revisiter deux notions clés de la didactique des mathématiques, *étude* et *recherche*, pour discuter ensuite comment ces éléments apparaissent dans le travail mathématique des étudiants, dans des contextes communs et surtout plus exceptionnels. Il s'avère que notamment du côté de l'étude, on trouve de vastes potentiels qui, pour des raisons institutionnelles, semblent en gros inexploités.

Mots-clefs : étude, recherche, médias, milieux, enseignement universitaire des mathématiques

Abstract – We examine the transfer from the work of the research mathematician to the work of the university teacher of mathematics. This leads us first to revisit two key notions of the didactics of mathematics, namely *study* and *research*, and then to discuss how these elements appear in the mathematical work of university students, in common and especially more exceptional contexts. It turns out that in particular, study carries great potentials so far largely unexploited, for a variety of institutional reasons.

Keywords: study, research, media, milieus, university teaching of mathematics

I. INTRODUCTION

Qu'est qui distingue l'enseignement universitaire de l'enseignement au primaire et au secondaire ? On peut, sans trop chercher, mentionner les différences suivantes : (1) Les *étudiants* suivent leur programme d'étude « de leur propre gré » et sont donc, en principe, « libre de partir » ; (2) Les *enseignants* sont souvent aussi des *chercheurs*, parfois même avec la recherche comme « métier principal » ; (3) Les étudiants eux-mêmes se dirigent vers une variété de *futures professions*, dont les besoins peuvent plus ou moins imprégner leur cursus et leur rapport à lui ; (4) l'institution (voir même l'enseignant) a une grande liberté de choix par rapport aux méthodes et aux contenus de l'enseignement.

À mon avis, une différence très significative — du point de vue didactique — est la proximité, dans l'université, de la *recherche*, c'est-à-dire *la production de savoirs dits « savants »*. Dans le cas d'un cours de mathématiques, l'enseignant peut bien sûr être physicien (notamment dans un programme de physique), et tous les enseignants de l'université ne sont pas des chercheurs. De leur côté, les étudiants ne sont pas tous des futurs mathématiciens chercheurs, même si c'est une option possible. Ce qu'il est donc important de noter est le contexte institutionnel — plutôt qu'individuel — d'une *cohabitation de diffusion et de production* de savoirs. On parle, dans la littérature anglophone sur « *higher education* », du « teaching-research nexus » pour désigner l'interaction (réelle ou possible) entre ces deux aspects de la vie universitaire, que ce soit du point de vue des enseignants-chercheurs ou de celui des étudiants (cf. Winsløw 2009, pour plus de détails). Une problématique émergeante, pour le didacticien qui s'intéresse au niveau universitaire, est donc, grosso modo : *quels sont les apports réels ou réalisables, dans l'enseignement universitaire des mathématiques, de la proximité de la recherche dans l'institution ? Qu'en est-il du cas où l'enseignant est lui-même chercheur en mathématiques – ou non ? Du cas où l'étudiant se dirige vers la recherche – ou non ? Parmi les « apports », quelles sont les possibilités, avantages et contraintes à envisager, pour les étudiants, au regard d'activités « proches de la recherche », voire même en les faisant participer à des recherches actuelles ?*

* Institut de didactique des sciences – Université de Copenhague – Danemark – winslow@ind.ku.dk

© Winsløw C. (2012) Recherche et étude en mathématiques supérieures. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT7, pp. 1044–1052). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

Mon but ici se résume à regarder de plus proche ces questions, d'un côté pour examiner leur sens (la présence de guillemets signale une partie du flou qui subsiste sur les termes), et d'un autre pour rassembler des éléments de réponses, notamment de pratiques d'enseignement plus ou moins documentées. Vers la fin de l'article, j'en dirai un peu plus sur les directions et rationalités institutionnelles que pourront avoir ces questions dans nos recherches.

II. PRÉCISIONS TERMINOLOGIQUES

Il est remarquable que l'idée de « parcours d'étude et de recherches » (PER) soit née dans le contexte de l'enseignement secondaire (cf. Chevallard 2009, p. 3), et non dans un effort de renouveler l'enseignement supérieur. Certes il existe des efforts ambitieux pour utiliser ce dispositif à l'université, notamment le travail issu de la thèse de B. Barquero (2009). Or, dans ces efforts, le public visé est une classe d'étudiants débutants, et les questions étudiées (et surtout soumises à la « recherche ») relèvent de la modélisation mathématique relativement simple. Le but a été plutôt d'investiguer les conditions, dans l'institution universitaire, pour introduire un enseignement de la modélisation proche (de par ses composantes mathématiques) de ce qui est expérimenté également au secondaire. Mais il est certain que la notion de *recherche* impliquée dans ces travaux, et dans la notion de PER, n'est pas celle que nous venons d'évoquer dans l'introduction. Pour cette raison et pour d'autres, il va être utile de s'arrêter sur ce point terminologique.

La langue dans laquelle nous nous exprimons reste en effet parmi les conditions et contraintes les plus importantes et négligées pour l'avancée de la didactique des mathématiques. C'est peut-être un peu plus évident pour quelqu'un qui, comme l'auteur du présent écrit, se trouve souvent dans la nécessité institutionnelle de se servir d'une langue « étrangère » (qui n'est pas pour lui, comme on dit, « maternelle ») et dans laquelle rien ne va donc, pour ainsi dire, de soi. Plus concrètement, notre question sur l'apport de la recherche à l'enseignement est liée à un domaine sémantique qui semble lourd d'importance pour la didactique en général, et où il règne, néanmoins, une polysémie assez stupéfiante. Il s'agit de ce qui relève des mots *recherche*, *étude* et *enseignement.*

En parlant de l'activité mathématique, on dit en français que l'on « étudie », que l'on « résout un problème », ou que l'on « fait de la recherche », tout en laissant au lecteur selon le contexte le soin d'imaginer de quoi on parle réellement et pourquoi on se sert de l'une de ces expressions et non des autres. En anglais, le mot « scholarship » se propose pour nommer une activité un peu entre les trois ; la personne qui s'y livre peut être désignée par le nom de « scholar ». En même temps, une personne qui s'occupe à la fois de recherche et d'enseignement, dans une institution universitaire, est souvent appelé « enseignant-chercheur ». Cette locution est tellement liée à l'affectation institutionnelle de la personne que le sens est sans doute plus restreint que celui du mot anglais « scholar », mais en même temps, je suis incapable de rendre ce sens plus large de « scholar » par un mot français.

Il me semble que ces difficultés ne sont pas toutes à mettre sur le compte de mes capacités langagières personnelles. Face à des flous sémantiques, on a souvent à affronter explicitement l'équivoque d'une expression donnée pour y établir un sens précis, plus artificiel, mais cette fois expliqué soigneusement par des exemples ou par une définition plus ou moins formelle. Il faut alors — même en mathématiques, et d'autant plus en didactique — établir un nœud de termes essentiellement *indéfinis*, souvent des termes dont on peut dire quelque chose mais qu'en fin de compte, on pense être suffisamment clairs pour être « libres » de toute définition. En dehors de systèmes formels, cela revient à dire que ces expressions sont censées être comprises par les membres de la communauté à laquelle on s'adresse parce qu'il y aurait *consensus*.

Pour ce qui est des mots *recherche*, *étude* et *enseignement*, on a affaire à des rapports personnels ou partagés aux *savoirs* et aux *connaissances*. Ici, *savoirs* et *connaissances* ne sont certes pas plus simples que les trois termes précédents, et comme on le sait, ils ne trouvent pas d'équivalents directs dans d'autres langues comme l'anglais. Mais disons pour l'instant que ces mots sont compris par la communauté francophone, au moins pour ce qui est des savoirs et des connaissances mathématiques. Alors, la difficulté revient à définir aussi précisément que possible les *rapports* aux savoirs et aux connaissances qui sont désignés (ou que nous voulons, ici, désigner) par les expressions *recherche*, *étude* et *enseignement.*

Chevallard (2007) a introduit deux types d'objets qui servent à établir des rapports au savoir (celui-ci étant de toute façon un peu abstrait) ; la différentiation de ces objets servira ensuite à différencier les rapports. Ainsi, on évite le subjectivisme qui pèserait sur une description des rapports liée aux « connaissances » d'un individu, dont on voudrait décrire les « rapports » au savoir ; en même temps, on évacue la nécessité d'une séparation trop formelle entre connaissances et savoirs (car, finalement, que sont les savoirs, sinon que des connaissances partagées par une grande communauté). Les deux types d'objets sont en l'occurrence *médias* et *milieux*. Ils sont différenciés l'un de l'autre, selon Chevallard, par la présence d'une intention (d'informer, de représenter, etc.) dans le média, et donc par l'absence d'intentions du côté d'un milieu (qui est donc à l'étude comme la nature à l'oiseau). Cette définition est certes relative à une situation donnée et en particulier, à la fonction de l'objet pour une ou des personnes. Mais la distinction semble assez opérationnelle en pratique. Par exemple, un étudiant peut tomber sur la formule $\tan(x) = (1-\cos 2x)/\sin 2x$ dans un forum sur Internet (celui-ci est un média, où en effet beaucoup d'intentions se mêlent). Si l'étudiant veut tester si cela tient, il peut par exemple regarder quelques cas avec sa calculatrice (milieu), essayer de vérifier avec papier et crayon (milieu), consulter d'autres sites ou des livres (médias), etc.

Revenons maintenant à notre triplet de *recherche*, *étude* et *enseignement*, comme rapports au savoir. Nous définissons la *recherche* comme « chercher un savoir dans un milieu ». Donc, on fait recherche quand on essaie de trouver un entier x tel que $x = 10 \cos x$, par n'importe quel moyen *en soi dénué d'intention*. De même, l'étude est définie comme « chercher un savoir dans un média ». Pour la question donnée, on peut en effet trouver des informations utiles simplement en cherchant sur Internet ; mais il me semble que l'on ne parvient pas, sans un moment de recherche, au fait que les 7 solutions ne sont pas entières. Finalement, l'enseignement peut être défini comme l'acte d'induire d'autres à la recherche et/ou à l'étude. Dans le cours magistral, l'enseignant se fait entièrement media, même s'il se place dans des milieux (avec des savoirs à chercher), avec l'intention de « montrer » comment faire la recherche. À l'autre extrémité, plus rare sans doute, l'enseignant peut établir un milieu pour les étudiants (comme le problème que l'on vient de citer), sans indications explicites du savoir à chercher ou à consulter. Dans d'autres types de situations, il propose et médias et milieux (comme en posant des « exercices de fin de chapitre », où l'étude est implicitement à faire dans le chapitre ou les chapitres précédents).

Comme le montrent ces cas, ce n'est pas tout ce qui est désormais reconnu comme « recherche » qui va être reconnu comme telle, selon le sens communément convenu chez les mathématiciens universitaires. Ce travail du mathématicien chercheur, que nous appellerons simplement le *travail du mathématicien* (cf. Brousseau 1986, §1.2), vise à établir un savoir qui n'a pas précédemment été établi et exposé par d'autres. C'est là une condition nécessaire mais non pas suffisante, bien sûr, car il y a aussi une question d'intérêt, relevant de la subjectivité collective des chercheurs, et qui exclura, au moins à défaut d'une méthode originale, l'impossibilité de trouver un entier x tel que $x = 10 \cos x$, même si ce serait nouveau. Mais, par rapport à l'enseignement — dont nous voulons établir des apports possibles du *travail du mathématicien* — il est plus important de constater que celui-ci ne se borne aucunement à la recherche (ou à une sous-espèce de recherche plus exclusive) :

> 80 percent of mathematics research consists in reorganizing, reformulating, and "problematizing" mathematics that has already been "done", by the researcher himself or by others. [80 pour cent de la recherche mathématique consiste à réorganiser, reformuler et problématiser les mathématiques déjà produites, par le chercheur lui-même ou par d'autres.] (Brousseau 1999)

Il faut ajouter à ce constat la condition évidente que le mathématicien, avant de procéder au travail de réorganisation, reformulation, etc., des savoirs en place, les *étudie*. Ce travail continu d'étude est certes indispensable et intégré au travail du mathématicien, qui donc, en somme, est constitué *et* de l'étude *et* de la recherche, dans le but ultime de produire des savoirs *qui ne sont pas déjà publiés et donc pas (encore) disponibles dans des médias*.

III. REFORMULATION DE NOTRE PROBLÉMATIQUE

Nous pouvons maintenant poser, en des termes moins vagues, les questions que nous avons évoquées dans l'introduction : *Quels sont les apports réels ou réalisables dans l'enseignement universitaire des mathématiques, de la proximité du travail de mathématiciens dans l'institution ? Qu'en est-il du cas où l'enseignant est lui-même chercheur ? Ou du cas où l'étudiant se dirige vers la recherche ? Parmi les apports, quelles sont les possibilités, avantages et contraintes à envisager, pour les étudiants, à participer au travail du mathématicien – voire à des activités analogues à celles de celui-ci, sauf peut-être pour la contrainte de viser un savoir inédit ?*

Ici, on a avancé en remplaçant « recherche » par « travail du mathématicien », et en ayant spécifié le sens de ce travail comme une combinaison distinctive d'étude et de recherche, visant en particulier la production de savoirs inédits. On distingue également avec plus de précision deux types d'apports, l'un lié à l'intégration directe de l'étudiant dans le travail du mathématicien, l'autre moins direct et où l'analogie reste bien sûr à éclaircir, mais où au moins une différence nette est explicite : la production de savoir qui n'est pas déjà accessible par des médias, n'y est pas requise. Pour faciliter la référence, on va appeler ces deux types d'apports, respectivement *apports directs* et *apports indirects*.

On remarquera alors que l'apport direct suppose en effet que l'enseignant en question soit chercheur impliqué dans un travail de mathématicien, et que l'étudiant ait un rapport proche de celui du chercheur avec le savoir que ce travail vise à développer. C'est là une contrainte évidente mais aussi écrasante pour une grande partie des mathématiciens : développer des apports directs destinés à des étudiants plus ou moins débutants. Il y en a d'autres (cf. Winsløw 2009), y compris le prestige et le secret parfois lié aux travaux du mathématicien en cours, et aussi l'écart possible entre la matière de ces travaux et les buts de formation pour l'étudiant. Nous pensons toutefois que l'apport direct peut être d'intérêt en dehors du contexte où il apparaît avec le plus d'évidence, c'est-à-dire dans la formation doctorale, avec le mathématicien en position de directeur de thèse. En effet, selon le domaine mathématique en question, on peut envisager l'étudiant placé dans l'étude et la recherche de problèmes ou de tâches plus ou moins auxiliaires ou particulières, avec au moins un apport dans le sens inverse (de l'activité de l'étudiant au travail du mathématicien).

Or, dans la suite, nous considérons quelques exemples relevant plutôt de l'apport indirect, y compris du sens que peut avoir « l'analogie » dans notre problématique.

IV. LA RECHERCHE « PURE »

Paul Halmos (1906-2006) fut un mathématicien américain, connu entre autres pour une série de traités didactiques dans une variété de domaines tels que l'algèbre linéaire, l'analyse fonctionnelle et la logique algébrique. Ces manuels ont connu une grande diffusion dans le monde anglophone. Dans son autobiographie (ou, comme il l'appelle, *automathography*), Halmos (1985) évoque, outre ses propres expériences de l'enseignement et de l'écriture mathématique, un topologue du Texas, le professeur Moore, dont la méthode d'enseignement l'a beaucoup inspiré. Ceci peut paraître paradoxal, puisque la « méthode de Moore » avait parmi ses principes de ne pas recourir aux manuels. On peut aussi s'étonner que Halmos en avait seulement pris connaissance indirectement, par les étudiants de Moore. Le cours de celui-ci consistait en une liste de définitions et de théorèmes laissée aux étudiants au premier cours ; ensuite, les étudiants devaient, d'eux-mêmes, suppléer à tout le reste (démonstrations, lemmes etc.), et les sessions se déroulaient essentiellement comme des séminaires, où les étudiants présentaient leur travail depuis le cours précédent. Voici un extrait de ce que Halmos (1985, p. 258) en dit :

> Moore encourageait la compétition. Ne pas lire, ne pas collaborer – pensez, travaillez individuellement, vainquez l'autre type. Souvent un étudiant qui n'avait pas lui-même trouvé une preuve du Théorème 11 quittait la salle quand un autre le démontrait – chaque étudiant voulait présenter à Moore sa propre solution, trouvée sans aucune aide. Une fois, on raconte qu'un étudiant ayant passé devant une salle vide et, à travers la porte ouverte, a entrevu une figure tracée sur le tableau noir. La figure lui a inspiré une preuve qui lui avait échappé jusque-là. Au lieu d'en être content, l'étudiant s'en trouvait confondu et fâché, et se disqualifiait lui-même de présenter cette preuve. Cela aurait été tricher : il avait eu de l'aide extérieur !

Un nombre considérable de mathématiciens illustres sont sortis de ces cours, mais selon Halmos (ibid.),

> La méthode de Moore est la bonne façon d'enseigner n'importe quoi. Elle produit des étudiants qui comprennent et peuvent utiliser ce qu'ils ont appris. Elle les équipe, certes, d'une attitude de recherche — l'attitude de tout remettre en question et de vouloir trouver les réponses de façon active — mais cela est une bonne chose dans toute entreprise humaine, pas seulement dans la recherche mathématique.

On peut sourire de ces déclarations venant d'un auteur illustre de manuels qui, par ailleurs, admet que ses propres expériences avec la méthode l'avaient contraint à des modifications. Or, son enthousiasme pour l'apprentissage par la « recherche pure » (excluant explicitement toute étude dans le sens que nous avons défini) est probablement partagé, en principe, par beaucoup de mathématiciens – qui, comme Halmos, admettraient aussi la difficulté de faire fonctionner ce purisme en pratique. Peut-être aussi par des didacticiens :

> En mathématique, l'activité d'un chercheur est constituée de ***tâches*** et de ***moments*** différents, tels que l'expérimentation, l'étude de cas particuliers, l'énoncé et l'étude de conjectures, la modélisation, l'élaboration et l'écriture de preuves, la définition d'objets, etc. (Grenier 2007, p. 2)

Or, on vient de constater, avec Brousseau, que les mathématiciens eux-mêmes sont peu susceptibles de se priver de médias dans leurs efforts de parvenir à tel ou tel résultat nouveau.

Toujours est-il que la méthode de Moore — que nous connaissons, d'ailleurs, aussi, par d'autres témoignages (par ex. Chalice 1995) — représente une option radicale d'enseignement au supérieur, mais présente certains attraits pour l'enseignant chercheur :

- Il détient le contrôle de ce qui est au programme, puisque tout le cours est structuré par la liste des résultats à obtenir par les étudiants.
- Il peut surveiller et diriger le parcours et intervenir pour corriger ou (au moins on le soupçonne) accélérer le processus.

- La méthode développe chez l'étudiant qui réussit une autonomie technique et théorique considérable, au moins dans le domaine du cours.

Ces points font de la méthode de Moore un dispositif plus évident pour un cours universitaire « ordinaire » que des dispositifs plus libres, comme on les connait en France, par exemple de par les ateliers de « situations de recherche » (Grenier 2007), « Math en Jeans » (Beddou et Mauduit 2005), etc. On note que dans ces activités, les « recherches » sont faites par des groupes avec la participation régulière de mathématiciens. De ce fait, les médias ne sont pas entièrement évacués ou évités, même si l'activité principale visée est la recherche pure.

On n'a guère besoin de signaler que maints obstacles pratiques sont au rendez-vous pour mettre la méthode de Moore en pratique de nos jours. Il est néanmoins clair qu'elle cultive, d'une manière originale, *certaines analogies* avec le travail du mathématicien, à savoir l'expérience d'établir formellement, et par *force brute*, un résultat dont on est assuré, pour une raison informelle, de la validité – une expérience que ne donne pas la résolution de problèmes routinières et par conséquent, un cours moyen d'université.

V. RECHERCHE *ET* ÉTUDE

Aux Etats-Unis de nos jours, le dispositif de « recherche en licence » (*undergraduate research*) est sans doute plus répandu que la méthode de Moore, même si la nature exacte de l'activité peut être plus difficile à cerner, de loin. Il est pourtant très visible que des options multiples existent pour le financement de ces activités (notamment de la *National Science Foundation*, cf. Adams et Narayan 2008). Comme on peut s'y attendre, les programmes des universités différentes diffèrent, mais en général il s'agit d'une activité dans laquelle les professeurs (directeur de « recherche ») et les étudiants s'engagent de leur plein gré, sur quelques mois ou toute une année. Pour les étudiants, travaillant en petites équipes ou individuellement, il s'agit de choisir un sujet ou « problème » mathématique, plus ou moins ouvert, et de produire un article (*paper*) qui rend compte du travail accompli. La forme de ces articles est normalement celle d'un article de chercheur, complet, avec une bibliographie qui témoigne d'une activité non pas seulement de recherche pure mais aussi, et parfois sans doute surtout, d'étude, motivée par le problème choisi. On trouve de nombreuses *revues en ligne* qui ne publie que ce type d'articles, soit provenant d'une seule université, soit des publications nationales telles le *Pi Mu Epsilon Journal* ; celui-ci publie aussi régulièrement des *sujets de recherche* (voir par ex. Ahlin et Reiter 2010). Des conférences où les étudiants présentent et discutent leur travaux s'ajoutent à l'expérience qui est donc, dans le sens de la diffusion des résultats, analogue au travail du mathématicien. Pour cette analogie, le fait de rédiger un texte référencé également important, par l'implication d'un travail d'*étude* où l'on consulte les travaux des autres, en fonction de leur pertinence pour le sujet de recherche. On retrouve d'ailleurs plus ou moins ces mêmes éléments dans l'expérience avec *Maths en Jeans* à l'Université de la Méditerranée (Beddou et Mauduit 2005).

À la différence des cours du style de celui de Moore, les dispositifs que l'on vient de relever ne s'insèrent pas dans le curriculum ordinaire de tous les étudiants, mais apparaissent comme une option pour des étudiants particulièrement motivés ou doués.

Il existe, au niveau licence, plusieurs propositions pour développer, dans le contexte de « cours ordinaires », des types plus ambitieux de recherche et d'étude que la simple résolution d'exercices ou de problèmes, mais en même temps plus encadrés que les projets dirigés sur un sujet choisi librement (étant donné qu'un cours ordinaire a normalement une matière assez précise à traiter). Nous nous bornerons ici à citer le dispositif de *projets thématiques,* où les étudiants ont à traiter des problèmes liés à la théorie du cours (mais non directement résolu avec les éléments de celle-ci), tel qu'exposé et exemplifié par Grønbæk et Winsløw (2007). Une activité de recherche y est certes attendue, notamment pour les parties plus ouvertes du projet. Par ailleurs, en fonction des contraintes relevant de l'institution, une activité d'étude au-delà des médias proposés par le cours, ou des cours précédents, n'est pas demandée, mais à la différence des exercices « de fin de chapitre », des parties plus importantes des textes « officiels » sont susceptibles d'être mobilisées. Parmi les avantages de ce dispositif, il y a la possibilité de baser un examen oral (et individuel – comme le demande l'institution) sur le travail accompli en collaboration par les étudiants. De cette manière, la recherche et l'étude peut être organisée dans un cadre relativement restreint, mais de ce fait est à la fois à la portée des étudiants en première ou deuxième année de licence, et porte sur un secteur précis visé par le cours. Ces deux demandes ne réduisent pas les défis pour les enseignants en ce qui concerne la conception et la direction des projets, même si l'analogie avec le travail du mathématicien est plus indirecte, aussi bien dans ce travail des enseignants que dans celui des étudiants qui font leur projet thématique.

À un niveau plus avancé, le travail de mémoire de master en mathématiques, au moins au Danemark, implique normalement pour l'étudiant d'exposer un travail d'étude de textes provenant de revues ou de monographies de recherche (c'est-à-dire de produits directs du travail des mathématiciens). Il semble donc moins orienté vers la recherche autonome et se présente, a priori, comme une tâche d'étude pure (et d'exposition). En réalité, il n'en est pas ainsi. Je me permets de partager mon expérience personnelle. Pour mon mémoire, j'ai eu pour tâche de faire un exposé des principaux résultats d'un article de Connes (1973). A priori, une tâche d'étude pure… Or, les démonstrations de ce texte étant très courtes, au moins pour l'étudiant que j'étais (avec pas mal de « on voit aisément que », etc.), je me trouvais souvent dans une situation semblable aux étudiants de Moore. Et quand j'ai dû recourir après tout à mon directeur de mémoire, il a souvent fini par faire pour moi ce que je n'avais pas réussi à faire : construire une preuve directement sans se soucier de ce qu'en disait le texte, sauf que le résultat était vrai. Ceci pour dire que la recherche est souvent nécessitée par l'étude, tout comme la recherche nécessite de l'étude. Bien évidemment, cette expérience n'aurait pas été complète sans un directeur de thèse très compétent ; mais c'est plutôt une règle générale que l'étude d'articles mathématiques fait intervenir la recherche, qui peut en effet amener des savoirs nouveaux (sous formes de preuves alternatives, par exemple). Aussi, nous pensons qu'il n'y a pas d'apport indirect sous forme d'étude pure, bien que celle-ci apparaisse trop souvent dans les parcours universitaires.

Le défi le plus intéressant, au moins dans le panorama que nous venons d'établir, semble d'ailleurs être surtout du côté de l'étude. Avec les projets thématiques tels qu'expérimentés à Copenhague, par exemple, les étudiants motivés peuvent en effet parvenir à une pratique de recherche relativement satisfaisante, tandis que pour la quasi-totalité des étudiants, l'étude reste limitée à la consultation du manuel prescrit par le cours. Sauf pour des dispositifs optionnels tels que *undergraduate research*, il semble donc que l'autonomie des étudiants reste très faible du côté de l'accès et du choix des médias, et donc que en ce sens, le travail des étudiants est rarement analogue au travail du mathématicien, peut-être pas même du même genre.

VI. CONTRAINTES INSTITUTIONNELLES À L'APPORT INDIRECT

L'apport *indirect* suppose que l'étudiant rencontre, dans l'institution universitaire, des milieux et des médias qui sont *analogues* ou même *identiques* à ceux que l'on trouve dans le contexte du travail du mathématicien, sauf pour demander la possibilité de produire des savoirs nouveaux (pour la communauté savante). À travers les cas d'apports indirects que nous avons présentés, nous nous sommes aperçus que le défi majeur se trouve en effet du côté des médias et surtout, de l'absence d'autonomie des étudiants vis-à-vis ceux-ci. Ce n'est pas, de nos jours, la difficulté d'accès qui pose obstacle, au moins pour les étudiants d'universités, celles-ci assurant l'accès à Internet et aux ressources scientifiques pertinentes (par exemple, les revues scientifiques à accès payant). L'obstacle est plutôt dans les programmes et plus précisément, dans le contrat institutionnel, qui veut que les contenus d'un enseignement universitaire soient déclarés sous forme de morceaux de texte (typiquement, des extraits d'un ou plusieurs manuels). Il est impossible de concevoir la force de ce contrat sans parler des enjeux institutionnels qui sont liés, dans les universités, aux évaluations des étudiants. Contrairement au mathématicien chercheur, la réussite de l'étudiant est mesurée fréquemment et le plus souvent, par des examens individuels (à l'écrit ou à l'oral), où le recours aux médias extérieurs (notamment d'autres personnes) revient à un acte de fraude.

On ne peut pas nier la différence fondamentale entre les critères de succès liés, d'un côté, à la production de savoirs inédits et intéressants, et à la performance individuelle en quelques heures de l'autre. L'institution universitaire a devant la société une obligation de pouvoir affirmer la compétence de chaque diplômé, et l'organisation modulaire implique que cette affirmation repose finalement sur l'évaluation de l'étudiant liée à chaque module. Les étudiants de leur côté ont un intérêt personnel à veiller à ce que ces évaluations reposent sur des demandes transparentes et abordables. Le modèle commun pour une telle évaluation est bien connu : un contrôle à l'écrit où la recherche (à quel type de tâche correspond cet exercice ?) est aussi limitée que l'étude (sur quelle page dans le manuel on trouve la technique requise ?). Mais pour le maintien du contrat institutionnel *interne*, entre étudiants et institution, l'absence d'analogie forte avec le travail du mathématicien ne pose pas vraiment problème.

Il n'en est peut-être pas de même pour ce qui est du contrat *externe*, entre l'institution et la société. Surtout s'agissant de la discipline mathématique, on peut maintenir que, même si le plus souvent, une minorité seulement d'étudiants des cours de mathématiques seront eux-mêmes mathématiciens-chercheurs, la raison pour laquelle ces derniers sont maintenus comme enseignants repose sur l'apport du travail des mathématiciens à l'enseignement. On trouve, en effet, d'autre profils d'enseignants universitaires de mathématiques, y compris les didacticiens et les chercheurs de disciplines voisines (physique, économie, etc.), et la question de l'apport de ces types de recherche se pose bien évidemment de façon semblable. Mais pour ce qui est de l'apport du travail du mathématicien, il faut surtout maintenir un œil sur le rôle des médias, dont la facilité matérielle d'accès est loin de s'allier à une facilité d'usage pour les étudiants. D'autre part, sous la direction du mathématicien-chercheur, les étudiants seront en principe capables de s'aventurer bien au-delà des notes ou des manuels de cours – ces manuels qui fournissent, dans l'état présent, le seul objet d'étude pour les étudiants, dans la vaste majorité de cours universitaires de mathématiques.

Il est temps de mobiliser de nouveaux efforts et de nouvelles idées pour faire découvrir aux étudiants, dès la licence, que les mathématiques ne se communiquent pas que par des manuels, et que la recherche n'est pas réduite à des actes de prouesse individuelle devant un morceau de papier blanc. Pour y parvenir, il faut également établir de nouveaux contrats institutionnels facilitant l'intégration de dispositifs comme « undergraduate research » dans le curriculum ordinaire, et cela même pour les futurs enseignants (même si, pour ceux-ci, il faut voir si le travail du didacticien ne serait pas aussi, voire plus, pertinent que celui du mathématicien). L'enjeu est d'assurer l'apport à l'enseignement de la production des savoirs, sans lequel l'université n'est plus qu'une école prétentieuse.

RÉFÉRENCES

Adams S., Narayan D. (2008) Ressources for undergraduate research in mathematics. Localisé le 25 juin 2011. http://www.maa.org/columns/resources/resources_2_08.html.

Ahlin A., Reiter H. (2010) Problem Department. *Pi Mu Epsilon Journal* 13 (2), 559-560.

Barquero B. (2009) *Ecología de la Modelización Matemática en la enseñanza universitaria de las Matemáticas.* Thèse de doctorat. U. Autonomica de Barcelone. Localisé le 15 juin http://www.tesisenred.net/handle/10803/3110.

Beddou L., Mauduit C. (2005) L'expérience Math en Jeans : bilan de 11 ans de pratique à l'Université de la Méditerranée. In Ducourtioux C., Hennequin P. (Eds) *La place des mathématiques vivantes dans l'enseignement secondaire*. Paris : APMEP.

Brousseau G. (1986) Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques* 7 (2), 33-115.

Brousseau G. (1999) Research in mathematics education: observation and mathematics. In Schwank I. (Ed.) (vol. 1, pp. 35-49) European research in mathematics education. Osnabrück : Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Chalice D. (1995) How to teach a class by the Modified Moore Method. *American Mathematical Monthly* 102 (4), 317-321.

Chevallard Y. (2007) Communication au Séminaire national de didactique des mathématiques le 23 mars 2007. In Gueudet G., Matheron Y. (Eds) (pp. 344-366) *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques, année 2007*, ARDM et IREM de Paris 7, Paris.

Chevallard Y. (2009) La notion de PER: problèmes et avancées. Manuscrit pour une conférence à l'IUFM de Toulouse, 28 avril 2009. Localisé le 15 juin http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/La_notion_de_PER___problemes_et_avancees.pdf.

Connes A. (1973) Une classification des facteurs de type III. *Annales scientifiques de l'école normale supérieure,* tome 6, 133-252.

Grenier D. (2007) Des situations de recherche en mathématiques pour une formation à la démarche scientifique. In *Actes de l'université du DGESCO à St-Flour du 20 au 24 août 2007*. Paris : Ministère de l'Éducation Nationale. Localisé le 15 juin sur http://media.education.gouv.fr/file/Formation_continue_enseignants/16/0/StFlour2007_Grenier_110160.pdf.

Grønbæk N., Winsløw C. (2007) Thematic projects: a format to further and assess advanced student work in undergraduate mathematics. *Recherches en didactiques des mathématiques* 27 (2), 187-220.

Halmos P. (1985) *I Want to be a Mathematician. An automathography.* New York : Springer Verlag.

Winsløw C. (2009) Recherche et enseignement universitaire en mathématiques, interactions actuelles et possibles. In Ouvrier-Buffet C., Perrin-Glorian M.-J (Eds.) (pp. 59-67) *Approches plurielles en didactique des mathématiques*. Paris : Laboratoire de didactique André Revuz.

ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES AUPRÈS DES PUBLICS SPÉCIFIQUES OU DANS DES CONTEXTES PARTICULIERS

Compte-rendu du Groupe de Travail n°8 – EMF2012

Jean-Philippe DROUHARD[*] – Laurent THEIS[**]
Patricia NEBOUT-ARKHURST[***] – François CONNE[****]

Ce groupe se situe dans le prolongement des travaux réalisés à Sherbrooke en 2006 et à Dakar en 2009, mais prolongement ne signifie pas répétition à l'identique.

I. QUELQUES FAITS SAILLANTS

En tout, le groupe a accueilli 19 participants, dont 9 originaires de la Suisse romande, 4 du Québec, 4 de France, 1 du Liban et 1 de Côte d'Ivoire.

5 présentations ont été réalisées à l'intérieur du groupe de travail. Un sixième texte a été soumis au groupe et accepté pour publication dans les actes, même si l'auteure du texte n'a pas été en mesure de se rendre au colloque. Parmi les cinq présentations, quatre étaient en lien avec les difficultés d'apprentissage, tandis qu'une présentation concernait les contextes culturels particuliers.

Le nombre relativement petit de présentations a permis au groupe de travail d'avoir beaucoup de temps pour discuter des présentations et, de manière plus générale, des spécificités de l'enseignement à des élèves ayant des besoins particuliers.

II. THEMATIQUE ABORDEE

On pourrait caractériser l'enseignement des mathématiques auprès des publics spécifiques ou dans des contextes particuliers par trois « D » : *Diversité, Différence* et *Difficultés*.

1. Diversité

La diversité est ce qui caractérise ces enseignements, d'abord entre les différents systèmes scolaires du monde francophone. Les dénominations elles-mêmes diffèrent, entre les pays et même entre les époques, liées à des évolutions idéologiques et philosophiques divergentes, au point de rendre malaisée la comparaison entre les systèmes.

Diversité des systèmes d'enseignement entre les pays, même dans le seul cadre de la francophonie. Ainsi, une partie du temps de travail du groupe a été consacré à élucider certains « allant de soi » : l'entrée, au Québec, par les élèves « en difficulté », en Suisse Romande, par les élèves « relevant de l'enseignement spécialisé » et, en France, par les élèves « en situation de handicap ».

Diversité également, au sein d'un système éducatif donné et à une époque donnée, des dispositifs d'enseignement auprès des publics spécifiques et dans des contextes particuliers,

---

[*] Université de Nice Sophia Antipolis (EA6308 I3DL) – France – jpdrouhard@gmail.com
[**] Université de Sherbrooke – Québec – laurent.theis@usherbrooke.ca
[***] École Normale Supérieure d'Abidjan – Côte d'Ivoire –- nebout_arkhurst@hotmail.com
[****] Université de Genève – Suisse – francois.conne@unige.ch

---

© Drouhard J.-P., Theis L., Nebout-Arkhurst P., Conne F. (2012) Enseignement des mathématiques auprès des publics spécifiques ou dans des contextes particuliers – *Compte-rendu du Groupe de Travail n°8.* In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21^e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT8, pp. 1053–1057). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

au point d'en décourager les tentatives de description exhaustives. Diversité des situations singulières des élèves enfin, dans la mesure où l'on se refuse à réduire l'élève à une seule dimension, que ce soit celle de sujet épistémique, de sujet de l'institution ou encore d'être souffrant ou désirant.

La description des enseignements des mathématiques pour les élèves à besoins particuliers, du niveau le plus macro (celui de l'institution) au plus micro (celui de la situation d'enseignement), dans une perspective d'élucidation critique et raisonnée, constitue un premier axe dans lequel ont pu s'inscrire certaines des propositions de communication au groupe de travail.

2. *Différence*

La différence peut être d'abord celle ressentie (ou projetée) par le sujet vis-à-vis des « autres », ceux qui n'ont pas de « besoins particuliers » ou ne sont pas dans un « contexte spécifique ». Or ce « je ne suis pas comme les autres » (voire « nous ne sommes pas comme les autres » quand la spécificité est propre à une communauté) concerne directement l'image de soi, et retentit fortement sur les apprentissages, en particulier mathématiques.

La différence peut être également celle de l'enseignement, par les modifications apportées (ou envisagées) à l'enseignement « normal » ou « ordinaire » pour une meilleure prise en compte du sujet singulier dans son apprentissage des mathématiques. À ce propos, notons une difficulté lexicale toujours irrésolue : comment nommer l'enseignement qui n'est pas spécialisé, sans effets connotatifs parasites ? Parler d'école « normale » renvoie en effet aux (anciennes) institutions de formation des maîtres (et l'antonyme de « normal », « anormal », est terriblement péjoratif) ; « ordinaire » (ou « commun ») n'est pas mieux, ayant également, sauf dans des contextes très particuliers, des connotations fortement dépréciatives. Quant à « régulier », décalque de l'anglais « *regular* », il n'est pas très courant en français dans cette acception.

La différence est également ce qui caractérise la place des mathématiques par rapport aux autres enseignements, ainsi que celle (à conquérir ou à confirmer) de la didactique des mathématiques parmi les diverses spécialités consacrées aux élèves à besoins particuliers.

En particulier, comment faire pour que les apprentissages mathématiques soient présents dans l'éducation de ces élèves en prenant pleinement en compte leurs particularités, et non pas simplement comme une discipline parmi d'autres à enseigner « comme d'habitude » ? Cela soulève la question (parfois occultée, mais souvent soulevée par les élèves) du « pourquoi ? » de l'enseignement des mathématiques.

Cette question de la différence était le fil directeur du second axe des contributions.

3. *Difficultés.*

Les difficultés les plus immédiates sont celles d'apprentissage de la part des élèves – mais il ne suffit pas d'étiqueter ces difficultés, encore faut-il les comprendre et savoir les interpréter, en particulier en mathématiques.

D'abord, une fréquentation prolongée des élèves « en difficultés » amène à se demander parfois si bien des élèves en réussite ne seraient pas en fait des élèves en difficulté qui s'ignorent ! Plus sérieusement, la notion de difficulté d'apprentissage (manifestée par les élèves à besoins particuliers) renvoie d'intéressantes questions sur le fonctionnement « normal » des élèves dans les classes « ordinaires ». La difficulté apparaît ici comme un phénomène à analyser en termes systémiques.

Ensuite, il n’y a pas que les élèves à être « en difficultés ». C’est aussi le cas de bien des maîtres, terriblement démunis (surtout en ressources didactiques) face à ces élèves particuliers, surtout lorsqu’il s’agit de les intégrer à une classe « ordinaire », en ne bénéficiant que d’un soutien minimal voire nul de la part de l’institution (formation trop courte, trop superficielle ou carrément inexistante). Lors des discussions du groupe de travail, nous avons été en mesure d'étendre cette idée, initialement située dans des classes intégrant des élèves présentant des difficultés d'apprentissage. En effet, à la suite de la présentation de Gérard Lavigne sur l'enseignement des mathématiques en Nouvelle-Calédonie à des élèves de culture kanak, les discussions du groupe ont permis de constater que des difficultés similaires se présentent également pour des enseignants qui enseignent dans un environnement culturel qui n'est pas le leur. Et, dans ce contexte, l'attribution de ces difficultés à l'enseignant est encore ressortie plus fortement, puisque c'est à l'enseignant d'essayer de s'intégrer dans une culture différente, tandis que les élèves, eux, sont dans leur milieu (« ordinaire » de leur point de vue).

Difficultés aussi des formateurs qui doivent faire face aux questions des maîtres, et partant difficultés des didacticiens, confrontés à leur tour aux demandes des formateurs et à la question des limites (de validité, d’efficacité) de ce qu’ils proposent.

On pourrait dire enfin (en liaison avec le thème des journées) que c’est toute l’institution scolaire qui est en difficulté pour prendre en compte (au delà des déclarations d’intention) les difficultés particulières des élèves.

Ces difficultés ont constitué le thème du troisième axe de contributions.

III. SPECIFICITE DU THEME

Au cours de la dernière journée de travail, le groupe s'est interrogé sur la spécificité du thème des élèves ayant des besoins particuliers, ce qui a conduit à dresser quelques constats. Nous en mentionnerons trois.

- L'interprétation de ce qu'on entend par « besoins particuliers » devrait être large et ne pas se limiter aux difficultés d'apprentissage. Ainsi, des élèves « doués » (ou « précoces ») aussi peuvent être considérés comme des élèves à besoins particuliers. Comme il l'a été mentionné dans les discussions, les besoins particuliers au niveau de l'apprentissage devraient être considérés en fonction des deux extrémités de la courbe de Gauss : à la fois pour les élèves qui se situent à l'extrémité inférieure et pour les élèves qui se situent à l'extrémité supérieure, et ce même si aucune présentation dans le groupe ne s'intéressait aux élèves doués. Par ailleurs, il a été souligné que les besoins particuliers ne relèvent pas toujours de difficultés au niveau de l'apprentissage, mais peuvent également provenir de contextes culturels particuliers, tel que l'a fait ressortir la présentation de Gérard Lavigne.

- Par ailleurs, il semble primordial de faire un travail plus approfondi sur les différents contextes dans lesquels évoluent les élèves en difficulté. D'une part, les cadres utilisés pour parler des élèves à besoins particuliers sont différents et ont soulevé un certain nombre de questions : *élèves à risque* (au Québec), relevant de *l'enseignement spécialisé* (Suisse) ou *en situation de handicap* (France). Par ailleurs, les contextes de scolarisation varient d'un pays à l'autre et d'un élève à l'autre : classes d'enseignement spécialisé ou intégration dans des classes dites « ordinaires ». Finalement, les moyens mis à la disposition des enseignants pour prendre en charge cette population d'élèves varie fortement d'un pays à l'autre : si, dans les pays les plus développés, les moyens pour prendre en charge ces élèves sont relativement abondants, tel n'est pas le cas dans plusieurs pays dits « du Sud », ainsi que l'ont fait remarquer certains participants de ces pays.

- Finalement, les discussions ont permis de faire ressortir que ce n'est pas dans les situations proposées aux élèves à besoins particuliers que se trouve leur spécificité. Les mesures mises en place pour ces élèves sont en effet presque toujours également bénéfiques pour les élèves « ordinaires ». Et ce constat s'applique autant pour les élèves en difficulté d'apprentissage que ceux dont les besoins particuliers proviennent de leur contexte culturel particulier.

IV. ARGUMENTS POUR LA POURSUITE DU GROUPE DE TRAVAIL

Quatre arguments principaux ont été avancés à la fin du groupe de travail pour plaider en faveur d'une continuité du groupe de travail lors des prochaines rencontres EMF.

1. Parce qu'il est important de ne pas abandonner le champ des élèves à besoins particuliers aux neurosciences, aux psychologues ou aux sociologues. Depuis plusieurs années, les arguments en faveur de les catégorisations de ces élèves en termes de « dys »-quelque chose (dyscalculie, dyspraxie, etc.) occupent de plus en plus de place dans le milieu de l'éducation. De plus, les neurosciences semblent gagner du terrain en offrant diverses explications aux difficultés des élèves. Le groupe de travail n'a pas remis en question de manière générale la pertinence de ces approches, mais s'est quand même questionné sur la façon dont certains zélateurs de ces approches tirent des conclusions quant à l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Il a donc semblé primordial au groupe que les didacticiens n'abandonnent pas ce champ.

2. Pour pouvoir passer de la « réussite pour presque tous » à la « réussite pour tous ». Actuellement, les systèmes d'éducation permettent à un grand nombre de réussir, mais laissent de côté un certain nombre d'élèves, situés aux extrémités de la courbe de Gauss de la réussite ou encore évoluant dans un contexte culturel particulier. Les travaux de ce groupe s'intéressent à la minorité d'élèves pour lesquels la réussite n'est pas une perspective évidente.

3. Parce que l'enseignement spécialisé pose à la didactique des questions (des défis) que l'enseignement régulier ne fournit pas, ou pas si clairement. A travers les difficultés vécues par les élèves ayant des besoins particuliers, il est possible d'observer des phénomènes qui n'apparaîtraient pas nécessairement ou dans une mesure moindre dans un contexte d'enseignement régulier. Par ailleurs, les mesures mises en place pour soutenir les élèves ayant des besoins particuliers ne sont pas uniquement bénéfiques pour cette population, mais bien pour l'ensemble des élèves.

4. Parce qu'on a besoin là encore plus qu'ailleurs d'un espace d'échanges sur les pratiques (dans toutes leurs dimensions). De fait, la thématique des élèves en difficulté ne fait pas partie des catégories de classification des contributions dans de nombreux colloques (par exemple PME). Par ailleurs, il n'y a que peu de revues scientifiques qui s'intéressent à cette thématique sous une perspective didactique. Des forums comme ceux d'EMF constituent donc des espaces d'échange et de collaboration primordiaux pour la communauté de chercheurs et d'enseignants qui s'intéressent à la question des élèves à besoins particuliers.

CONTRIBUTIONS AU GT8

ASSUDE T., TAMBONE J., VERILLON A. – Situations d'enseignement spécifiques pour des élèves particuliers ? Problème et débat.

DIAS T., TIECHE CHRISTINAT C. – Spécificités des situations didactiques dans l'enseignement spécialisé.

LAVIGNE G. – Perspectives ethnomathématiques à l'école en Nouvelle-Calédonie.

LESSARD G. – Le travail documentaire d'un professeur de mathématiques. L'adaptation improvisée est à la faveur de l'engagement cognitif des élèves en difficultés et de la découverte du pouvoir qu'ils opèrent sur l'environnement.

MARECHAL C. – Effet des contraintes institutionnelles sur les pratiques enseignantes dans l'enseignement spécialisé.

MARTIN V. – Quelles interventions didactiques un enseignant du primaire met-il en place pour enseigner les probabilités à des élèves en difficultés au sein d'une classe ordinaire ?

SITUATIONS D’ENSEIGNEMENT SPÉCIFIQUES POUR DES ÉLÈVES PARTICULIERS ? PROBLÈME ET DÉBAT

Teresa ASSUDE* – Jeannette TAMBONE* – Aliette VERILLON**

Résumé – Dans cette communication, le problème abordé est celui des situations d’enseignement en mathématiques qui sont proposées aux élèves en situation de handicap dans des classes spécialisées (CLIS)[1] de l’enseignement primaire en France. Ces situations, sont-elles spécifiques pour tel type de handicap ? Nous faisons l'hypothèse que des situations d'enseignement conçues pour des élèves de classes ordinaires peuvent, lorsqu'elles sont suffisamment « robustes », être adaptées pour répondre à des besoins éducatifs particuliers.

Mots-clefs : enseignement mathématique, classes CLIS, handicap, nombre, robustesse

Abstract – In this paper, our problem is that of the mathematics teaching situations which are offered to the educational special needs’ pupils in specialized primary classes in France. Are these teaching situations specific for such types of disabilities? Our hypothesis is that robust situations can be adapted to the educational special needs’ pupils.

Keywords: mathematics teaching, educational special needs, number, robustness

En France, la loi de février 2005 pour l’égalité des droits et des chances, la participation et la citoyenneté des personnes handicapées renforce le droit des personnes en situation de handicap à l’éducation et à la scolarisation. Cette loi marque une forte volonté politique pour que les élèves en situation de handicap soient considérés comme des élèves à part entière et la dimension du savoir apparaît comme un élément constitutif de ce processus. Certains travaux (Plaisance 2009 ; Armstrong 2008) montrent qu’il y a trois étapes historiques concernant la scolarisation des enfants handicapés : d’une manière schématique, la première est une étape ségrégative où ces élèves étaient exclus de la scolarisation, la deuxième est une étape intégrative où les élèves devaient s’adapter aux contraintes de l’école, la troisième est une étape inclusive où l’école doit s’adapter à ces élèves. Pour cela la loi de février de 2005 met l’accent sur deux notions : l’accessibilité et la compensation. L’accessibilité c’est de rendre possible « l’accès à tout pour tous », et dans l’éducation il s’agit de l’accès au savoir et à l’enseignement auquel ils ont droit. La compensation, c’est le droit qui garantit les moyens humains et/ou matériels pour rendre possible l’égalité des droits et des chances.

Ces mesures font écho à des préoccupations internationales. C’est à la Conférence mondiale sur les besoins éducatifs spéciaux, à Salamanque, en 1994 que le concept de l’éducation pour l’inclusion a été avalisé. Selon la déclaration de Salamanque (UNESCO 1994), les écoles ordinaires inclusives sont « le moyen le plus efficace de combattre les attitudes discriminatoires, en créant des communautés accueillantes, en édifiant une société intégratrice et en atteignant l’objectif de l’éducation de tous » (p.ix). Cela implique pour ces écoles qu’elles se donnent les moyens, pour procurer à tous une éducation de qualité, d’améliorer l’efficacité de l’ensemble du système éducatif.

Dans ce contexte social et politique, il nous semble important de se poser le problème des pratiques disciplinaires qui permettent l’inclusion des élèves en situation de handicap. Quelles sont les situations d’enseignement qui permettent à ces élèves de rentrer dans les apprentissages ? Ces situations, sont-elles spécifiques à ces élèves ?

* Université d’Aix-Marseille – France – t.assude@aix-mrs.iufm.fr, jane.tambone@wanadoo.fr
** IEF – ENS Lyon – France – aliette.verillon@ens-lyon.fr

[1] CLIS : Classe pour l’inclusion scolaire

© Assude T., Tambone J., Vérillon A. (2012) Situations d’enseignement spécifiques pour des élèves particuliers ? Problème et débat. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT8, pp. 1058–1066). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

Nous avons rencontré souvent la question de la spécificité des situations d'enseignement dans le cadre de la formation continue des enseignants préparant le diplôme pour devenir enseignant spécialisé (CAPA-SH[2]). Cette question était souvent associée au métier d'enseignant spécialisé. Par rapport à l'activité d'enseignement en général, quels sont les gestes professionnels qui lui sont propres et ceux qui ne le sont pas ?

Dans cette communication, nous allons aborder ce problème de la spécificité par le biais des situations d'enseignement en mathématiques. La question que nous voulons étudier ici est la suivante : est-il possible de proposer des situations d'enseignement dont l'efficacité a été attestée dans des classes ordinaires à des élèves en situation de handicap (ici des élèves ayant des troubles des fonctions cognitives) ? Si oui, peut-on les utiliser telles quelles ou doit-on les adapter ? Quels types d'adaptations ? Ces questions sont abordées dans le cadre d'un projet de recherche qui s'intitule « Pratiques inclusives dans les mathématiques scolaires » (PIMS). Pour étudier ces questions, nous présentons d'abord le contexte de la recherche, et ensuite nous analysons une séance dans une des classes pour pouvoir ensuite lancer le débat sur le problème de la spécificité des situations d'enseignement pour des élèves particuliers.

I. CONTEXTE ET DISPOSITIF DE RECHERCHE

L'un des buts du projet PIMS est d'étudier les pratiques des enseignants dans des classes CLIS (Classes pour l'inclusion scolaire) et certains effets de ces pratiques sur les apprentissages mathématiques des élèves ayant des troubles du fonctionnement cognitif. Ces CLIS sont des classes spécialisées de l'enseignement primaire en France qui accueillent entre 8 et 12 élèves. Pour étudier ces pratiques, nous avons mis en place un dispositif recherche et formation qui alterne des séances d'analyse de besoins, de présentation ou conception de situations d'enseignement, des mises en œuvre et observations dans les classes et des analyses de pratiques à partir des vidéos. Notre dispositif comporte sept étapes :

S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7
Représentations et analyse de besoins	Travail sur des situations	Séances filmées dans les classes	Analyse des pratiques	Travail sur des situations	Séances filmées dans les classes	Analyse des pratiques

***Tableau 1** – Etapes du dispositif*

Notre dispositif concerne quatre enseignantes de quatre classes CLIS et nous avons travaillé ensemble pendant les années 2009/2010 et 2010/2011. Le recueil de données a été fait dans toutes les étapes du dispositif. Nous avons ainsi des films des séances des sept étapes (classe, séances de formation). Nous avons également enregistré des entretiens avec les enseignants avant et après les séances filmées ainsi que des entretiens avec certains élèves après une séance filmée en classe. Enfin nous disposons des fiches de préparations des enseignantes et des productions d'élèves. Nous allons nous intéresser aux étapes S3 et S6 de notre dispositif (les séances en classe), et à l'une des situations qui a été présentée en S2 : la situation « voitures et garages ». Ce choix est justifié par le fait que cette situation a déjà fait ses « preuves » avec des élèves « ordinaires » et qu'elle a été conçue sans tenir compte de la spécificité des élèves. Dans cette communication, nous n'analyserons pas le travail fait dans le cadre du dispositif de formation mais précisons que c'est l'enseignante qui a décidé d'opérer les changements que nous analyserons par la suite. En outre, cette situation a été mise en œuvre par deux enseignantes différentes, donc nous pouvons comparer deux mises en

[2] CAPA-SH : Certificat d'aptitude professionnelle pour les aides spécialisées, les enseignements adaptés et la scolarisation des élèves en situation de handicap.

œuvre différentes. Dans Assude, Perez, Tambone et Vérillon (sous presse), nous avons décrit la situation « voitures et garages » (SVG), fait une triple analyse a priori de cette situation et nous avons analysé l'une de ces mises en œuvre. Nous reprenons ici la même description de la situation SVG, et nous allons nous intéresser à l'autre mise en œuvre dans une classe différente.

II. DESCRIPTION DE LA SITUATION « VOITURES ET GARAGES »

La situation SVG a été conçue et testée par Brousseau dans le cadre de ses travaux à Bordeaux. Pour la description de cette situation, nous nous appuyons, en partie, sur les travaux de Briand, Loubet et Salin (2004).

Cette situation a comme enjeu de savoir la construction du nombre comme mémoire de la quantité. Il s'agit de dénombrer une collection de garages pour produire une collection de voitures ayant le même cardinal que la première collection. Cette situation est organisée en trois étapes :

- Première étape : le proche. Dans cette étape, les collections des garages et des voitures sont proches spatialement. Les élèves doivent dénombrer la collection des garages et prendre autant de voitures qu'il y a de garages. Comme les collections sont proches du point de vue spatial les élèves peuvent utiliser la correspondance terme à terme pour résoudre le problème sans utiliser le nombre comme mémoire de la quantité. Dans cette étape, les élèves s'approprient les règles constitutives du jeu, notamment l'importance de la relation « autant d'éléments que » ;
- Deuxième étape : l'éloignement spatial. Dans cette étape, les deux collections sont éloignées spatialement. Les élèves doivent dénombrer la collection des garages, garder le nombre en mémoire et ensuite produire une collection de voitures ayant le même cardinal. Ici, les élèves ne peuvent pas utiliser la correspondance terme à terme mais ils doivent utiliser le nombre comme mémoire de la quantité ;
- Troisième étape : l'éloignement temporel. Dans cette étape, les deux collections sont éloignées temporellement. Il faut compter le nombre de garages et se rappeler de ce nombre pour aller chercher, ensuite, autant de voitures que de garages. Dans la description faite par Briand, Loubet et Salin (2004), on va chercher les voitures à un autre moment (par exemple le jour suivant). Dans ce cas, il faut se donner un moyen pour garder trace : un symbole, une écriture, un dessin, soit un outil sémiotique qui soit cette trace-là. Il s'agit de travailler sur les représentations du nombre. Cette étude rend également compte des situations de communication, à partir de messages écrits ou dessinés telles qu'elles ont été étudiées par Brousseau (1998).

Cette situation permet aux élèves de valider leurs réponses car ils peuvent vérifier s'ils ont pris autant de voitures que de garages en plaçant chaque voiture sur un garage. Nous ne présentons pas ici l'analyse a priori de cette situation SVG (voir Assude et al. sous presse).

III. OUTILS THÉORIQUES D'ANALYSE ET HYPOTHÈSE DE RECHERCHE

Comme dans l'article déjà cité, nous nous plaçons dans le cadre de la théorie de l'action conjointe professeur-élèves (Sensevy, Mercier, Schubauer-Leoni 2000 ; Assude, Mercier 2007 ; Assude, Mercier, Sensevy 2007 ; Sensevy 2007) où il s'agit de préciser le « jeu » effectivement joué en classe en précisant les enjeux de savoir qui déterminent le système didactique en classe. Pour cela nous utiliserons un double système de descripteurs : le triplet des genèses et le quadruplet des techniques de gestion. Le triplet des genèses nous permettra de décrire l’action en classe du point de vue de la construction de la référence du jeu (mesogenèse), des différentes temporalités présentes dans la classe (chronogenèse) et des différentes positions occupées par les acteurs (topogenèse). Le quadruplet des techniques de gestion nous permettra d’analyser l’action in situ en précisant les techniques de définition et de dévolution du jeu, de régulation et d’institutionnalisation. Ces analyses seront faites en utilisant les outils sémiotiques convoqués par les acteurs dans la classe. Dans l’étude de cas présenté ici, nous analyserons essentiellement le rapport au milieu matériel et la définition de la situation.

Nous faisons l’hypothèse que des situations d’enseignement mathématiques efficaces dans des classes ordinaires favorisent l’engagement des élèves en situation de handicap dans un processus d’acquisition à condition qu’elles soient organisées de façon à permettre des ajustements individuels sans pour autant être dénaturées du point de vue de leurs enjeux de savoir. Compte tenu de cette hypothèse, lorsque nous avons proposé la situation SVT en formation, nous n’avons pas imposé, de façon stricte, selon quelles modalités elle devait être mise en œuvre (consignes, organisation matériel, spatiale, temporelle) afin de pouvoir observer ce qu’intuitivement les enseignantes ressentaient la nécessité d’aménager.

Nous avons mis à l’épreuve cette hypothèse dans le cadre d’une classe CLIS avec la situation SVG (voir Assude et al. sous presse). Nous allons la mettre à l’épreuve une deuxième fois dans le cadre d’une autre classe CLIS avec la même situation.

IV. ELÉMENTS D’ANALYSE

Il s’agit d’une classe CLIS 1 qui accueille des élèves ayant des troubles du fonctionnement cognitif (troubles de mémoire, d’attention, difficultés d’apprentissage, etc.). La classe travaille, selon les disciplines, par petits groupes et les élèves ont un niveau scolaire allant de la petite section (élèves de 3 ans) de maternelle au CE2 (élèves de 8 ans). Nous avons observé un groupe de trois élèves (qui ont entre 8 et 12 ans) qui travaillent sur la situation SVG. Ces élèves savent énoncer la comptine numérique jusqu’à 8 (François, Guillaume) et jusqu’à 5 (Olga), reconnaissent des petites quantités (2 ou 3) et ne savent pas encore dénombrer. La situation SVG est apparue à l’enseignante appropriée pour ces élèves. Nous avons observé une séance de la première étape de la situation SVG.

1. Synopsis de la séance

Le groupe de trois élèves (François, Guillaume et Olga) et la maîtresse sont autour d’une table dans un espace connexe à la salle de classe. La séance dure 18 minutes. La maîtresse annonce que l'« on va s'amuser à jouer au père Noël ». Elle pose un carton rouge sur la table expliquant qu'il représente la hotte du père Noël. Puis, elle montre aux élèves une boite en précisant ce qu'elle contient : « ça ce sont des cadeaux en couleur qui resteront dans la petite boite. Ce sont des cadeaux qu'il va falloir prendre pour mettre dans la hotte ». Il s'agit d'un paquet de petits rectangles de carton de différentes couleurs, sur chacun desquels est représenté un cadeau emballé et entouré d'un ruban. Elle évoque ensuite son rôle dans le jeu : « Moi, je vais commander des cadeaux. Pour commander des cadeaux, je vais vous poser ma commande sur la hotte ». Elle prend un autre paquet de petit cartons qui était posé sur la table, en tire deux, qu'elle dispose sur la hotte du père Noël. Sur chacun de ces cartons-ci, il est représenté un cadeau identique à ceux montrés précédemment, mais « en noir et blanc ». Elle explique ensuite aux élèves que lorsque c'est leur tour de « faire le père Noël, ils doivent prendre des cartons de la boite pour les mettre dans la hotte. Chaque élève doit participer à tour de rôle et il y a deux tours pour Guillaume et François et trois tours pour Olga. Les élèves auront le nombre d'images suivant : Olga (2, 2, 3), Guillaume (3, 3) et François (4, 5).

2. Obstacles du milieu matériel

La maîtresse n'a pas choisi le même milieu matériel que celui des voitures et des garages. Elle a décidé d'adapter la situation SVG à une thématique qui était travaillée par ailleurs dans la classe qui est celle de la fête de Noël. Ainsi elle décide d'utiliser l'histoire du père Noël qui donne des cadeaux : dans ce cas, la hotte du père Noël est représentée par un carton rouge et les cadeaux sont représentés par des images. Dans cette situation, le milieu matériel est constitué par un carton rouge et une collection d'images de cadeaux. Un obstacle du milieu matériel est que le carton rouge représente à la fois le support de la commande et le lieu où les élèves doivent déposer les cadeaux objets de la commande (la hotte). L'enseignante n'a pas différencié ces deux espaces. Il y a ici une superposition de ces deux espaces dans un seul objet. Pour que cela puisse fonctionner il faut que les élèves admettent cette double fonction. En outre, les deux collections de la situation SVG est ici réduite à une seule collection, celle des images de cadeaux. Or cette réduction va poser un certain nombre de problèmes.

La première étape de la situation SVG vise à travailler sur la relation « autant d'éléments que » et le passage de la technique de correspondance terme à terme à une technique de quantification des deux collections (reconnaissance globale de la quantité ou dénombrement).

Il y a un problème de langage car le mot « cadeaux » va servir à la fois pour désigner la collection que la maîtresse va déposer sur le carton rouge (collection A) et désigner la deuxième collection (la collection B), celle que les élèves doivent déposer sur la première. Or la distinction entre A et B n'est pas facile à identifier, surtout pour Olga, qui semble identifier une seule collection, celle des images des cadeaux. La maîtresse, elle-même, est obligée d'utiliser des gestes pour distinguer ces collections :

> Maîtresse : moi, je vais mettre les cadeaux dans la hotte… (elle pose une deuxième image de cadeau sur le carton rouge) je vais faire une commande, donc là je te dis que je veux des cadeaux comme ça (montre les images sur le carton rouge) à toi de prendre dans la petite boîte (montre la boîte) les cadeaux… pour les mettre dans la hotte… d'accord ?

Dans ce passage, elle doit passer par des gestes et des mots (des déictiques) comme « ça » pour distinguer les deux collections. Cette distinction est loin d'être reconnue par les élèves notamment Olga. Voyons un épisode concernant cette élève. C'est le premier tour d'Olga qui est aussi le premier élève à commencer. La maîtresse pose deux images sur le carton rouge et dit « *j'ai commandé ça* » et donne la boîte avec les images à Olga. Celle-ci en prend une dans la boîte et commence à la poser à côté de celles déjà posées par la maîtresse. La maîtresse intervient tout de suite : « *alors regarde, on va les mettre dessus* » Par la suite, Olga va empiler les quatre images, et la maîtresse lui dit :

> Alors regarde Olga… toi tu m'as empilé tous les cadeaux (reprend le carton et les images)… François va te montrer d'accord ? (la maîtresse replace la situation initiale du jeu avec deux cadeaux en commande) moi je veux des cadeaux pour Noël (François superpose une image sur chaque image placée sur le carton rouge par la maîtresse) Tu as vu Olga, François il les a mis dessus (Olga détourne le regard) d'accord Olga ? (Olga sans regarder la maîtresse acquiesce, hochement de tête).

L'enseignante demande l'aide d'un pair (François) et verbalise les actions menées par François pour attirer l'attention d'Olga mais celle-ci n'est plus dans la situation en détournant ostensiblement le regard. Il n'y a pas de mots différents pour parler de ces deux collections, et elle est bien dans une seule collection : elle met les cadeaux dans la hotte, elle met les cadeaux au-dessus les uns des autres. La distinction n'est pas faite et les gestes de l'enseignante ne suffisent pas pour marquer cette distinction.

Ce changement de milieu matériel est le résultat d'une contrainte qui découle d'un principe de travail selon lequel on doit proposer aux élèves des situations qui s'insèrent dans un projet de la vie de la classe. Dans le cadre des séances de formation, l'enseignante a affirmé plusieurs fois ce principe d'une manière générale : « il est important de choisir des situations en lien avec la vie concrète et la vie de classe ». Cette contrainte a amené l'enseignante à changer le milieu matériel de la situation SVG. Dans ce cas, les élèves peuvent apprendre des mathématiques tout en faisant la liaison avec d'autres disciplines comme la lecture d'histoires. Or ce choix n'est pas neutre concernant l'importance pour ces élèves d'avoir deux collections distinctes qui se nomment avec des mots différents. Certes on sait que « A a autant d'éléments que A » est aussi une relation d'équivalence mais l'absence de mots distincts semble être un obstacle pour que Olga puisse rentrer, à ce moment-là, dans l'acquisition de cette relation en mettant en œuvre une technique de correspondance terme à terme. Il nous semble que ce changement apporte une perturbation à la situation SVG.

3. Incomplétude de la définition du jeu

La difficulté d'Olga de rentrer dans la situation n'est pas seulement due au choix du milieu matériel qui ne permet pas une distinction langagière des deux collections. Il y a aussi un problème d'insuffisance au niveau de la définition du jeu, comme nous avons pu le remarquer dans les citations précédentes. Partons de la première occurrence de la consigne :

Maîtresse : des cadeaux, donc la maîtresse elle a préparé des cadeaux (prend une boîte dans laquelle se trouvent des images représentant des cadeaux) des cadeaux en couleurs qui resteront donc dans la petite boîte (montre les images).
Maîtresse : d'accord ? Ca c'est les cadeaux qu'il va falloir prendre pour mettre dans la hotte.
François : dans la hotte… du père Noël ?
Maîtresse : moi je vais commander des cadeaux, pour commander des cadeaux je vais lui poser ma commande (pose des images sur le carton rouge) sur la hotte du père Noël… d'accord ?
François : elle est où la hotte du père Noël ?
Maîtresse : (regarde François et le désigne) et si François c'est à ton tour de faire le père Noël… il va falloir que tu prennes les cadeaux et que tu les mettes dans la hotte.

Dans ce passage, il est indiqué que l'élève doit prendre des images de cadeaux et les mettre dans la hotte du père Noël, soit sur le carton rouge. Or il n'est pas indiqué qu'on doit prendre autant que de cadeaux que ceux qui ont été commandés et qu'on doit les superposer pour vérifier. C'est alors le tour d'Olga (voir passage avant). Olga comprend qu'il faut mettre des cadeaux dans la hotte, c'est bien ce qu'elle fait. En faisant cela elle est bien dans ce qu'on peut interpréter comme ce qu'on doit faire. C'est à la suite de l'intervention d'Olga que la maîtresse indique : « on va les mettre au-dessus ». François a compris que chaque image prise par l'élève dans la boîte doit être mise sur une image de la commande. Cette précision n'est pas encore suffisante puisque Olga va superposer toutes les images de cadeaux. C'est ensuite le tour de Guillaume qui a trois cadeaux commandés. Il pose une image sur la première, une image sur la deuxième et deux images sur la troisième. Là encore, l'élève est bien dans ce qu'on peut interpréter : mettre des cadeaux dans la hotte au dessus des images cadeaux commandés. La maîtresse essaie de réguler l'action des élèves mais avec une certaine difficulté, langagière, mais aussi liée à l'incomplétude de la consigne :

Maîtresse : (à Guillaume à propos de l'image qu'il a mis en trop et qu'il vient de retirer) tu en as besoin de celui là… est-ce que tu as encore de la place pour mettre un cadeau (Guillaume place son image sur le carton rouge) est-ce que là j'ai mis un cadeau ?
Guillaume : non.
Maîtresse : non… (à François qui prend l'image posée par Guillaume et la superpose comme celui-ci l'avait fait) François est-ce que tu peux en mettre deux ? (Guillaume prend une image dans la boîte et la place sur le carton pendant que François déplace l'image en trop sur un autre tas) Guillaume, est-ce que j'avais un cadeau là ? (elle enlève l'image posée par Guillaume)

Guillaume : non.
Maîtresse : alors tu n'en mets pas là (remet l'image dans la boîte) (en parlant à François) est-ce que là j'avais déjà mis un cadeau ? (montre dans un des tas l'image qui est en-dessous)
François : oui.
Maîtresse : Olga, regarde est-ce que là j'avais déjà mis un cadeau ? (montre le tas où trois images ont été superposées)
François : oui.
Maîtresse : est-ce que là j'avais mis un cadeau, est-ce que Guillaume avait déjà mis un cadeau ?
François : oui.
Maîtresse : oui regarde Guillaume tu en a déjà mis un, tu peux pas en mettre deux.

Cet épisode montre que c'est seulement là que la maîtresse indique qu'il doit avoir une et une seule image de B sur une image de A. Nous voyons aussi que le mot « cadeau » indique indistinctement les éléments de A et de B et que maintenant les gestes ne suivent pas forcément.

La définition du jeu est l'un des gestes techniques de l'enseignant. Cette définition passe par la présentation du milieu matériel mais aussi par l'indication des règles constitutives du jeu, à savoir les règles qui font que ce jeu est ce qu'il doit être et non un autre. Les règles constitutives du jeu ne sont pas forcément les règles stratégiques, celles qui permettent (par les connaissances des élèves) de gagner au jeu. Dans notre situation, les règles constitutives du jeu (première étape) qui avaient été explicitées en formation sont :

- A chaque élément de la collection A doit correspondre un et un seul élément de la collection de B.
- On doit prendre d'un seul coup les éléments de B avant de les faire correspondre aux éléments de A.

Plusieurs techniques peuvent être utilisées par les élèves. Dans le groupe ici des élèves, la technique visée est d'abord la technique par correspondance terme à terme, technique qui doit être par la suite remplacée par une technique utilisant le nombre. Or l'enseignante, lorsqu'elle donne la consigne, se focalise sur le milieu matériel et ne précise les règles constitutives du jeu qu'au fur et à mesure que les élèves participent au jeu. Par exemple, au tour suivant qui est celui de François, elle indique :

Maîtresse : je te commande mes cadeaux, attention, on ne peut mettre qu'un seul, une seule étiquette sur le cadeau… tu as compris François ?

Nous pouvons penser que, à partir de ce moment là, les règles constitutives du jeu (au moins dans une première partie) sont explicitées et que les élèves peuvent utiliser ces règles pour valider leurs actions. Or la suite du travail montre la difficulté des élèves de s'investir dans le travail. Malgré les relances de l'enseignante, elle n'a pas réussi à dévoluer le travail à Olga qui reste dans sa stratégie initiale : mettre les images sur le carton rouge ou empiler les images. Guillaume, au deuxième tour, a trois éléments de A, il pose deux éléments et est aidé par François pour le troisième. François arrive à superposer les images en utilisant une technique de correspondance terme à terme mais l'enseignante l'empêche de prendre une autre image lorsqu'il a déjà posé toutes les autres. Qu'aurait-il fait en prenant une image en plus ? L'enseignante a besoin que François réussisse. C'est important pour lui, c'est important pour le groupe. C'est important pour lui car cet élève refusait le travail auparavant comme nous avons pu l'observer pendant la première année. C'est important pour le groupe car l'enseignante peut s'appuyer sur cette réussite pour faire avancer le groupe.

A la fin de la séance (qui dure 18 min.), l'enseignante demande aux élèves ce qu'il faut faire pour gagner à ce jeu, en sollicitant notamment François : « comment tu as fait pour gagner à chaque fois ? » Elle l'aide en disant : « tu sais les mettre comment ? » François répond ensuite : « au-dessus » Et là l'enseignante redit : « François, il a dit que s'il avait gagné c'est parce qu'il avait mis les cadeaux au-dessus » Et elle institutionnalise ce travail en oubliant encore une des règles constitutives du jeu : « on va garder cette phrase et quand on rejouera lundi on regardera comment on peut faire, pour gagner il faut les mettre au-dessus ».

L'incomplétude de la définition du jeu associée à la restriction du jeu à une seule collection au lieu de deux collections distinctes avec les problèmes de langage dérivés sont deux perturbations introduites dans la mise en œuvre de la situation SVG. Ces perturbations semblent induire des obstacles pour les élèves. Sont-ils spécifiques à ces élèves ?

V. DISCUSSION

Quelles situations d'enseignement en mathématiques pour des élèves en situation de handicap ? Ces situations, sont-elles spécifiques à ces élèves ? Nous sommes parties de ces questions et de l'hypothèse suivante : les situations d'enseignement qui ont fait leurs « preuves » avec des élèves ordinaires peuvent être aussi proposées aux élèves en situation de handicap et peuvent être efficaces du point de vue didactique si on tient compte de certains ajustements dus au handicap en question. Nous avons testé cette hypothèse en présentant en formation la situation SVG qui a été reprise dans deux classes différentes. Dans l'une des classes, nous avons montré (Assude et al. sous presse) que cette situation a été adaptée pour des élèves qui ne reconnaissent pas globalement des petites quantités et a permis à ces élèves de faire quelques progrès dans l'apprentissage du nombre et du dénombrement. Les « perturbations » induites dans la mise en œuvre n'ont pas mis en question les enjeux de savoir et les règles constitutives du jeu. Cette situation qui n'a pas été conçue spécifiquement pour ces élèves semble être adaptable et profitable pour les apprentissages.

La deuxième mise à l'épreuve, dont nous venons d'analyser quelques épisodes, n'apporte pas les mêmes éléments de réponse. Les observations réalisées dans la deuxième classe nous ont conduites à nous intéresser à ce qui pouvait rendre compte de la situation d'échec dans laquelle se trouvaient certains élèves lors d'une des séances enregistrées. Les modifications apportées concernant le milieu matériel de l'activité et l'incomplétude de la définition du jeu remettent en question les enjeux de savoir. Les « perturbations » de la situation touchant aux enjeux de savoir dénaturent l'activité proposée et créent des obstacles pour ces élèves.

Pour expliquer les options de l'enseignante, nous avançons l'hypothèse que la contrainte d'adapter les situations à la vie de classe pèse, parfois, davantage que le besoin de respecter les enjeux de savoir. Dans la séquence observée, la situation « garages et voitures » a été transformée en une activité confuse de production de cadeaux à mettre dans la hotte du père Noël. Ce choix nous a semblé guidé par l'importance accordée par les CLIS à montrer qu'elles font comme les autres classes : comme les autres, ces classes doivent fêter Noël.

Par ailleurs, ces perturbations créent des obstacles pour ces élèves. L'identification de ces obstacles dans un cadre spécifique nous permet de poser une autre hypothèse, à savoir que ces obstacles ne sont pas spécifiques à ces élèves mais génériques : des élèves « ordinaires » pourraient se trouver en difficulté face à un jeu dont le milieu matériel est flou et face à l'incomplétude de la définition du jeu. Si ces obstacles sont génériques car compromettant l'accès des élèves aux règles constitutives du jeu et leur possibilité de progresser par rapport aux enjeux de savoir alors ces « perturbations » changent le jeu : la situation « voitures et garages » ne correspond pas à la situation de la « hotte du père Noël ». Ainsi la non-efficacité de cette situation ne remet pas en question le caractère « robuste » et adaptable de la première.

Par ailleurs, la suite de la recherche qui donnera lieu à l'étude des interviews (avant et après les enregistrements vidéo) et des séances d'analyse de pratiques organisées dans le cadre du dispositif de formation, devrait nous permettre d'approfondir la question des éventuelles difficultés à s'approprier et à mettre en œuvre de façon pertinente des situations d'enseignement proposées en formation.

REFERENCES

Armstrong F. (2008) Inclusive Education. In Richards G., Armstrong F. (Eds.) (pp. 7-18) *Key Issues for Teaching Assistants: Working in Diverse and Inclusive Classrooms*. Abingdon : Routledge.

Assude T., Mercier A. (2007) L'action conjointe professeur-élèves dans un système didactique orienté vers les mathématiques. In Sensevy G., Mercier A. (Eds.) (pp. 153-185) *Agir ensemble. Éléments de théorisation de l'action conjointe du professeur et des élèves*. Rennes : P.U.R.

Assude T., Mercier A., Sensevy G. (2007) L'action didactique du professeur dans la dynamique des milieux. *Recherches en didactique des mathématiques* 27(2), 221-252.

Assude T., Perez J.-M., Tambone J., Verillon A. (sous presse) Apprentissage du nombre et élèves à besoins éducatifs particuliers. *Education & Didactique*.

Briand J., Loubet M., Salin M.-H. (2004) *Apprentissages mathématiques en maternelle*. Paris : Hatier. CD-Rom.

Brousseau G. (1998) *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Plaisance E (2009). La scolarisation des enfants handicapés. Débats actuels. *Psychologie et éducation* 2, 11-22.

Sensevy G., Mercier A., Schubauer-Leoni M.-L. (2000) Vers un modèle de l'action didactique du professeur. A propos de la course à 20. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 20(3), 263-304.

Sensevy G. (2007) Des catégories pour décrire et comprendre l'action didactique. In Sensevy G., Mercier A. (Eds.) (pp. 13-49) *Agir ensemble. Éléments de théorisation de l'action conjointe du professeur et des élèves.* Rennes : P.U.R.

UNESCO (1994) *The Salamanca Statement and Framework for Action on Special Needs Education*. Paris : UNESCO.

SPECIFICITÉS DES SITUATIONS DIDACTIQUES DANS L'ENSEIGNEMENT SPECIALISE

Thierry DIAS* – Chantal TIECHE CHRISTINAT*

Résumé – Dans cet article, nous souhaitons interroger le contexte de l'enseignement spécialisé en tant qu'environnement didactique comportant des particularités ; et nous destinons ces travaux à la formation des enseignants. En prenant appui sur la complexité institutionnelle de la situation actuelle, nous proposons une étude de la spécificité du milieu relevant de trois dialectiques potentiellement significatives. Nous référerons ensuite nos recherches à l'analyse des actes langagiers relatifs à des situations d'enseignement et apprentissages en mathématiques. Les dimensions syntaxique, sémantique et pragmatique nous semblent adaptées à l'étude que nous menons dans l'analyse des moments d'enseignement/apprentissage dans les classes de l'enseignement spécialisé en France et en Suisse.

Mots-clefs : enseignement spécialisé, actes langagiers, milieu, contexte, pragmatique

Abstract – In this issue, we wish to question the context of education (in case of children with special needs) as a didactic environment containing peculiarities; and we intend to use these studies in teachers' training. By drawing on the institutional complexity of the current situation, we propose a study of the specificity of the environment recovering from three potentially significant dialectics. We shall refer then our researches to the analysis of the linguistic acts related to situations of teaching and learning in mathematics. We consider the syntactic, semantic and pragmatic dimensions adapted to our analysis of the moments of teaching and learning which we lead in special education classes in France and in Switzerland.

Keywords: special needs education, linguistic acts, environment, context, pragmatic

I. L'ENSEIGNANT SPECIALISE AUJOURD'HUI

Donner ou redonner du sens aux apprentissages est un des défis majeurs que l'enseignant spécialisé doit relever. Les élèves dont il a la charge présentent des profils très différents, comprenant aussi bien des élèves en situation de handicap, qui selon la loi sur la pédagogie spécialisée promulguée en Suisse en 2007 ont droit à des mesures renforcées, que des élèves présentant des difficultés d'apprentissage pour lesquels les mesures pédagogiques de différenciation s'avèrent insuffisantes et qui peuvent bénéficier de mesures de base en pédagogie spécialisées. Les enseignants spécialisés sont dès lors habilités à offrir ces deux types de mesures. Si pour les premières il est fait mention d'adaptation des programmes et des plans d'études, pour les secondes le projet pédagogique individualisé ou personnalisé constitue la référence. Les particularités des élèves ne constituent pas l'unique dimension qui différencie l'enseignement spécialisé de l'enseignement ordinaire. A celle-ci s'ajoute une dimension institutionnelle récente corollaire à un changement de politique sociale et scolaire.

En effet, si la déclaration de Salamanca (1994) a marqué le droit à une éducation pour tous, elle a également fortement initié le mouvement inclusif et l'adaptation souhaitée des structures scolaires aux enfants différents[1]. L'élève n'est plus scolarisé dans une classe séparée regroupant des élèves ayant des difficultés plus ou moins semblables aux siennes et ayant à sa tête un enseignant spécialisé. Ce mouvement a pour effet de permettre à tout enfant en âge de scolarisation de suivre la classe avec ses pairs sous l'égide d'un enseignant ordinaire et de

* HEP Vaud – Suisse – thierry.dias@hepl.ch, chantal.tieche@hepl.ch

[1] Des textes institutionnels y font également référence en France notamment depuis la Loi n°2005-102 pour l'égalité des droits et des chances, la participation et la citoyenneté des personnes handicapées votée le 11 février 2005 (Journal officiel du 12/02/2005).

© Dias T., Tieche Christinat C. (2012) Spécificités des situations didactiques dans L'enseignement spécialisé. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : Enjeux et Défis pour le 21e siècle – Actes du Colloque EMF2012* (GT8, pp. 1067–1074). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

bénéficier de mesures de renfort ou de soutien pédagogique spécialisé. Appelé à collaborer, à soutenir l'élève dans sa progression didactique, la posture de l'enseignant spécialisé se trouve partiellement modifiée. Dans ce contexte, il ne se trouve plus être à la tête d'une classe, il peut se trouver à enseigner à un petit groupe quelques heures au sein de la classe régulière ou à travailler individuellement par petites touches avec un élève. Il n'est ainsi plus maître du temps didactique et doit s'adapter à une double exigence : celle de l'élève et celle du maître titulaire de la classe régulière.

1. Un changement dans les postures enseignantes

Ce changement de posture nous incite à porter une attention particulière à certains paramètres didactiques qui fondent les pratiques de l'enseignement spécialisé. Alors que dans les situations d'enseignement « séparatif », chaque enseignant gère, en fonction des besoins identifiés, l'espace didactique qui lui est conféré ; dans le cas de l'enseignement inclusif, cet espace didactique est partagé. L'enseignant spécialisé et l'enseignant ordinaire sont ainsi appelés à gérer conjointement l'avancée du temps didactique. Nous supputons à travers de nombreux travaux d'étudiants actuellement en formation que cette gestion provoque des tensions par rapport à la tâche qui est proposée à l'élève. Les transactions didactiques et les contrats didactiques noués avec l'élève prennent des colorations différentes, voire contrastées et nécessitent des négociations contractuelles complexes. Ces dernières vont avoir des répercussions sur la situation didactique et par conséquent sur le milieu didactique proposé à l'élève. Même si, dans certains cas de figures, les tâches proposées à l'élève par l'un ou l'autre des enseignants présentent des analogies, les milieux didactiques proposés ne peuvent être considérés comme semblables.

2. Les caractéristiques des situations d'enseignement et d'apprentissage

Construire, développer, mener des situations d'enseignement/apprentissage ne peut se penser que dans un rapport dialectique qui met en jeu l'individu et la société, et en l'occurrence plus particulièrement le développement cognitif de l'élève et la construction de son rapport à un objet de savoir culturellement marqué. Les enjeux sociaux des savoirs mathématiques sont différenciés : ainsi l'exigence de l'institution didactique varie fortement d'un élève à l'autre, d'un enseignant à l'autre, d'un parent à l'autre. Les variations constatées au niveau de l'enseignement ordinaire sont clairement marquées dans l'enseignement spécialisé et dans l'énorme variété des situations d'enseignement/apprentissage que l'enseignant doit prendre en charge. Le rôle de l'enseignant spécialisé consiste à trouver des situations didactiques riches et complexes qui permettent des découvertes multiples autour d'un même objet de savoir. A ce critère de richesse s'ajoute l'idée d'une variabilité potentielle de la tâche donnée à résoudre, afin de pouvoir capturer l'attention et dévoluer la tâche à l'élève. La construction des jeux de tâches (Favre 2008) est un exemple de cette approche. Jovenet (2006) souligne que certaines pédagogies (la pédagogie Freinet est donnée en exemple) offrent des milieux didactiques suffisamment riches et ouverts pour permettre aux élèves de s'emparer du problème et développer de nouvelles connaissances.

A l'éventail et la diversité des situations didactiques qui agissent comme autant de leviers d'enseignement et d'apprentissages différenciés, vient se greffer l'idée de création de situations didactiques qui puissent prendre en compte la diversité des connaissances des élèves. Les divers travaux menés par les didacticiens en mathématiques (Conne, Favre et Giroux 2006; Favre 2008) dans le champ de la pédagogie spécialisée signalent la nécessité de créer un milieu didactique suffisamment robuste pour permettre le développement de savoirs différenciés. Ancrés dans une approche constructiviste, les situations didactiques doivent à la fois permettre de créer un milieu suffisamment antagoniste, sans pour autant plonger l'élève dans une situation d'ignorance complète, et qui ne pourrait que réitérer le sentiment d'incompétence que l'élève de l'enseignement spécialisé ressent vivement. L'orientation dans l'enseignement spécialisé en constitue par ailleurs les stigmates. Le choix des situations didactiques s'avère crucial dans l'enseignement ordinaire comme dans l'enseignement spécialisé. Toutefois, la marge de manœuvre de l'enseignant spécialisé en appui d'une classe ordinaire est relativement étroite. Le choix de la situation n'est pas nécessairement de son ressort, puisqu'il peut être amené à travailler, dans le cadre du renfort, une activité choisie par l'enseignant ordinaire.

II. SPECIFICITÉ DU MILIEU DANS L'ENSEIGNEMENT SPECIALISE

Si l'on peut raisonnablement parler d'une didactique spécifique de l'enseignement spécialisé en référence aux processus d'enseignement/apprentissage qui s'y déroulent, la question reste ouverte en ce qui concerne la spécificité du milieu et de ses contraintes environnementales (Brousseau 1988). Nous souhaitons poser la question de l'existence d'une caractérisation objective des éléments d'un tel milieu. Est-elle donnée a priori ? Faut-il plutôt considérer le milieu comme un processus en constante évolution du fait des apports ininterrompus des protagonistes en son sein : signes, actions, interactions, jeux de langage ? Nous évoquerons trois dialectiques qui nous semblent révélatrices du processus en jeu dans l'enseignement spécialisé (équilibre / déséquilibre, ostension / construction, échec / réussite). Elles permettent selon nous une compréhension des tensions permanentes qui caractérisent les difficultés d'enseignement et d'apprentissage. Nous proposons ensuite une étude fondée sur les dimensions langagières du milieu (syntaxique, sémantique et pragmatique) avant de lancer quelques investigations sur l'une d'entre elles qui nous paraît relativement consistante en vue d'une nouvelle approche de la notion de milieu : la dimension pragmatique (Austin 1970 ; Morris 1974).

1. Trois dialectiques pour mieux comprendre

La notion de milieu est définie dans la théorie des situations didactiques (Brousseau 1998) comme le système antagoniste du système enseigné. Rechercher l'antagonisme renvoie à un modèle d'apprentissage de type adaptatif : le sujet apprend en s'adaptant à un milieu volontairement porteur de déséquilibres. L'une des conditions permettant la qualification d'antagonisme est que le milieu doit être porteur de déséquilibres dans les rétroactions qu'il fournit à l'activité de l'élève. Il faut entendre ici par déséquilibre un état provisoire de la pensée due à la transformation des schèmes dans le processus d'accommodation (Piaget) qui se réalise contre des connaissances acquises auparavant. Ce type de difficultés peut être provoqué par des rétroactions du milieu qui apparaissent contradictoires aux élèves même si elles ne le sont pas intrinsèquement. Pour qu'il y ait construction de connaissances nouvelles lors du processus d'adaptation, il faut que l'élève puisse d'abord engager les connaissances dont il dispose pour tenter de contrôler ce milieu. Il doit ensuite être en mesure d'en recevoir des rétroactions lui indiquant que ses moyens de contrôle sont encore insuffisants et que la résolution du problème ne sera pas instantanée.

L'une des spécificités de l'enseignement spécialisé nous semble être que si le milieu comporte des éléments de déstabilisation cognitive, cela doit également être accompagné par l'apport de ressources[2] pour l'étayage (Bruner 1983) nécessaire au processus d'apprentissage par adaptation. L'une des spécificités de l'enseignement spécialisé pourrait résider dans

[2] savoirs, savoirs faire ou savoirs être.

l'apport de ressources supplémentaires pour l'étayage nécessaire au processus d'apprentissage par adaptation dès lors que le milieu comporte des éléments de déstabilisation cognitive. Il est en effet nécessaire d'anticiper la diversité des réactions des élèves dont une partie d'entre eux peut passer outre les rétroactions du milieu et ne pas entrer dans un véritable processus d'apprentissage. Il s'agit en quelque sorte de redéfinir un environnement dont les différents éléments constitutifs doivent contribuer à un équilibre en son sein grâce à un bon ratio alliance/antagonisme. De cette stabilité dépend la réussite du processus enseignement apprentissage.

Le qualificatif d'antagonisme que nous venons de citer s'oppose à celui d'allié qui renvoie à un schéma plus classique d'enseignement dit par ostension (Sarrazy 2007). Dans ce dernier, le milieu allié signifie que le professeur cherche à montrer à l'élève ce qu'il doit voir et donc comprendre. On exhibe en quelque sorte le savoir en faisant le pari que cette mise en évidence suffira à l'appropriation par les élèves. Berthelot et Salin (Berthelot et Salin 1992) parlent d'ostension assumée ou déguisée selon le degré de maïeutique nécessaire à l'enseignant pour conduire ses enseignements. Ce type de contrat didactique peut apparaître comme un refuge salutaire aux enseignants spécialisés qui, confrontés à de fortes résistances d'apprentissage, font le choix de l'exhibition du savoir au détriment de sa construction trop incertaine, trop exigeante sur le plan du temps didactique. Une dialectique ostension/construction des savoirs nous paraît être une réponse appropriée dans la gestion, le pilotage et le contrôle des situations.

Une autre caractéristique du milieu dans l'enseignement spécialisé renvoie à l'omniprésence de la notion d'échec au sein des processus d'apprentissage qui le constitue. Ceci peut conduire à une volonté relativement jusqu'au-boutiste mais compréhensible : il faut cesser de mettre l'élève en échec ! Cette anticipation de l'échec promue par le contexte (handicap, grande difficulté scolaire) conduit à une volonté de supprimer les obstacles « à tout prix », quitte à réviser profondément à la baisse ses ambitions quant aux contenus traités en classe et aux démarches à mettre en œuvre. L'opposition stricte entre réussite et échec mérite elle aussi un traitement plus dialectique favorisant la consistance des situations proposées aux élèves grâce à une anticipation des adaptations les plus ajustées possible. Ceci sous-entend que l'on identifie mieux les potentiels des élèves notamment par une « évaluation » ou un diagnostic plus précis, plus argumenté notamment grâce à une analyse des interactions dans leur dimension langagière.

2. Dimensions langagières du milieu et spécificité de l'Es

Même si l'approche didactique du milieu (Brousseau 1990 ; Margolinas 1995 ; Bloch 2002), ne nous semble ni close ni complète, nous souhaitons ici investiguer selon une autre approche les éléments caractéristiques de l'environnement des situations d'apprentissage dans le contexte de l'enseignement spécialisé. Pour compléter et enrichir nos études didactiques du milieu, nos différentes observations et analyses des interactions en situation de classe nous amènent à proposer une réflexion plus axée sur le langage et plus précisément sur les actes de langage (Kerbrat-Orecchioni 2001). Nous proposons pour cela d’utiliser les trois registres syntaxique, sémantique et pragmatique. Ces trois domaines peuvent être définis à la manière de Morris (1938) qui dans son texte fondateur distingue la syntaxe (« étude des règles de combinaison des signes »), la sémantique (« étude des règles d’attribution de signification aux signes ») et la pragmatique (« étude des règles d’utilisation des signes par les sujets »). S'ils correspondent à des dimensions mises en évidence en sciences du langage (linguistique, sémiotique et communication) par de nombreux auteurs, nous utiliserons ici Morris (1974) comme référence principale.

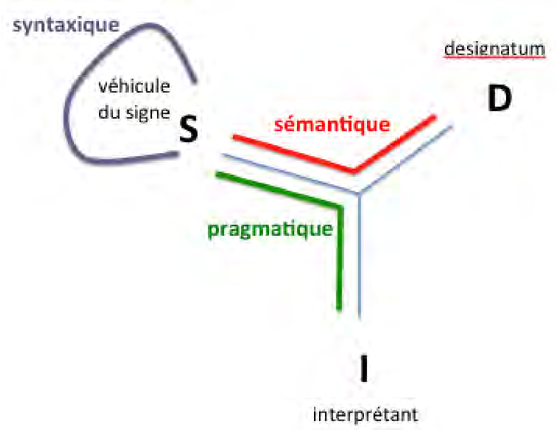


***Figure 1** – modèle de Morris (1974)*[3]

Ce qui nous paraît séduisant dans le modèle de Morris, c'est son assimilation de la sémiosis à un processus (tout comme dans l'approche pragmatique de Peirce). Cette dynamique est particulièrement adaptée à la compréhension des mécanismes qui fondent les interactions en situation de résolution de problème. Dans le modèle de Morris, l'interprétant (I) est un comportement de l'interprète (le sujet agent du processus) et ne doit pas être confondu avec l'interprète lui-même. Cette référence au comportement nous laisse à penser que la dimension pragmatique est essentielle pour comprendre ce qui se passe en classe et plus particulièrement dans le contexte de l'enseignement spécialisé. C'est ce que nous développerons plus loin dans cet article en ouvrant des perspectives de recherche quant à cette dimension pragmatique.

La dimension syntaxique est celle de la « face cachée » aux élèves, celle dont ne sont explicites que les règles qui formalisent le discours, mais aussi celle qui permet la validation. Dans le modèle proposé par Morris, tous les signes[4] ne font pas forcément référence à une chose qui existe réellement (perceptible, sensible et/ou manipulable). Ces *véhicules des signes* sont des médiateurs des objets de savoir en situation didactique. Les actions possibles des élèves dans ce registre syntaxique sont assimilables à des gestes sur les idéalités tels qu'ils sont décrits dans l'espace opératoire de Cavaillès (Cassou-Noguès 2001).

La dimension sémantique est celle où se situent les actions, celle où se construisent les sémioses : les phénomènes d'interprétation. Lorsque ce à quoi on réfère existe vraiment, on parle de denotatum. Ceci représente la principale difficulté lorsque l'on travaille avec des objets mathématiques du fait de la complexité de leur relation avec une certaine idée de leur réalité. C'est dans ce registre que se concentrent les enjeux de signification notamment à cause des différences d'interprétations : plusieurs acteurs interagissent avec des objets similaires dont les représentations ne sont pas toujours partagées. Les échanges peuvent alors converger ou non vers un consensus de sens, c'est la dynamique du milieu (rétroactions, antagonismes) qui doit être contrôlée par l'enseignant. On peut parler ainsi de modèle sémiotique, en effet, si l'élève doit interpréter les instructions du professeur, il faut que ce dernier offre ces instructions dans une zone de compréhension qui soit connue de l'élève. Cette zone de compréhension passe par les objets présents dans le milieu didactique sous forme de signes à interpréter. Les gestes sur les signes se font dans l'espace combinatoire de Cavaillès (Cassou-Noguès 2001). L'enjeu principal de la dimension sémantique est la construction d'un réel partagé (Lelong 2004).

---

[3] S est un signe de D pour I si I prend connaissance de D selon Morris, 1974.
[4] Morris utilise la terminologie de *véhicules des signes* pour insister sur le processus qu'est la sémiosis : *une prise de connaissance médiatisée*.

Comme nous venons de le voir, une situation de classe peut se caractériser par la présence d'individus qui débattent et parfois se débattent avec des significations. En référence au modèle de Morris, la pragmatique est basée sur la notion de « langage en action » et s'attache surtout à définir la relation qui s'établit entre le langage et l'usage qu'en fait le locuteur, dans la communication, en faisant appel à la notion de situation de communication, c'est-à-dire le contexte et toutes les caractérisations qui s'y rattachent. La dimension pragmatique est essentiellement contextuelle puisqu'elle concerne les interactions entre les différents protagonistes des situations de communication. On peut dès lors parler d'une dimension de nature psychosociale, cette dimension est un « poids lourd » de la situation didactique pour l'enseignant dans le contexte de l'enseignement spécialisé. En effet, si l'enseignant veut changer les comportements (au sens de Morris) ou les connaissances de l'élève, il doit nécessairement prendre appui sur des zones de coopération sociale partagées avec ses élèves.

Selon nous, les interactions ne sont ni dépendantes ni indépendantes de leur contexte de production, elles construisent le contexte en même temps qu'elles le manifestent. L'étude de cette dimension pragmatique nous paraît importante à mener dans le cadre de notre recherche de la spécificité de l'enseignement spécialisé, nous espérons montrer qu'une étude de corpus avec cette approche sera appropriée.

III. ANALYSE ET CARACTERISATION DU MILIEU DE L'ENSEIGNEMENT SPECIALISE SELON TROIS COMPOSANTES LINGUISTIQUES

Nous postulons qu'analyser le milieu comme un processus capable de révéler le potentiel des élèves de l'enseignement spécialisé peut s'appuyer sur deux démarches d'enseignement apprentissage : le jeu de tâches (Favre 2008) et la prise en compte de la dimension expérimentale des maths (Dias et Durand-Guerrier 2005). L'étude possible selon les trois dimensions linguistiques que nous avons présentées plus haut permettra de caractériser le milieu comme particulier dans l'enseignement spécialisé pour les raisons suivantes.

Composante syntaxique

Elle relève du projet didactique de l'enseignant spécialisé, elle est nécessaire (du fait de la nature des objets mathématiques) mais non suffisante (elle ne garantit pas l'acquisition des connaissances par les élèves). Elle est spécifiquement importante en mathématiques puisque les signes utilisés dans ce domaine sont très souvent sujets à de multiples représentations dans des registres variés. (Duval 2002). Pour l'exhiber il serait judicieux de la faire repérer aux professeurs notamment en formation (Dias 2009), c'est un pan de la formation des enseignants spécialisés que nous pensons pouvoir ainsi compléter.

Composante sémantique

Elle est révélée par les sémioses qui sont à même de construire le « chassé-croisé » des interprétations lors des moments d'expériences. Cette composante nécessite un travail d'élaboration par l'enseignant et par les élèves de la notion de sens dans les situations didactiques.

Composante pragmatique

Son utilisation relève d'une analyse des discours comme « action sur » (Morris, Austin). Les actes de langage (Kerbrat-Orecchioni 2001) sont considérés comme des processus signifiants :

- de l'interprétation par les élèves (prise de connaissance) ;
- du moyen d'agir sur le contexte interlocutif.

La double contrainte que nous souhaitons mettre en évidence comme spécifique à l'enseignement spécialisé est la suivante :

- la nature des objets mathématiques nécessite un choix judicieux des signes que l'enseignant va choisir pour convoquer les apprentissages ;
- les actes de langage qui permettront de finaliser les processus de sémiose : des interprétations cohérentes des signes (en juste rapport avec les objets qui sont les enjeux d'apprentissage).

Nous proposerons une étude de plusieurs corpus provenant de situations de classe ou de contextes de l'enseignement spécialisé afin de tester la robustesse de cette analyse sur les actes langagiers et sur l'étude du milieu dans l'enseignement spécialisé.

RÉFÉRENCES

Austin J.-L. (1970) *Quand dire, c'est faire* (1ère éd. 1962). Paris: Seuil.

Berthelot R., Salin M. H. (1992) *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire.* Thèse de l'université de Bordeaux 1.

Bloch I. (2002) Différents niveaux de modèles de milieu dans la théorie des situations. In Dorier J.-L. et al. (Eds.) (pp. 125-139) *Actes de la XIème école d'été de didactique des mathématiques.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Brousseau G. (1990) Le contrat didactique: le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 9(3), 309-336.

Brousseau G. (1998). *Théorie des situations didactiques: didactique des mathématiques 1970-1990*. Grenoble : la Pensée Sauvage.

Bruner J. S. (1983) *Le développement de l'enfant : savoir faire, savoir dire*. Paris : Presses universitaires de France.

Cassou-Noguès P. (2001) *De l'expérience mathématique: essai sur la philosophie des sciences de Jean Cavaillès*. Librairie philosophique. Paris Vrin.

Conne F., Favre J. M., Giroux, J. (2006). Répliques didactiques aux difficultés d'apprentissage en mathématiques: le cas des interactions de connaissances dans l'enseignement spécialisé In Doudin P. A., Laforturne L. (Eds.) *Intervenir auprès d'élèves ayant des besoins particuliers. Quelle formation à l'enseignement?* Québec: Presses de l'Université du Québec.

Dias T. (2009). La dimension expérimentale en mathématiques, un exemple avec la situation des polyèdres. *Grand N* 83, 63-84.

Dias T., Durand-Guerrier V. (2005) Expérimenter pour apprendre en mathématiques. *Repères IREM* 60, 61-78.

Duval R. (2002) Comment décrire et analyser l'activité mathématique? Cadres et registres *Actes de la journée en hommage à Régine Douady* (pp. 83-105). IREM, Université Paris 7.

Favre J. M. (2008) Jeu de tâches : un mode d'interactions pour favoriser les explorations et les expériences mathématiques dans l'enseignement spécialisé. *Grand N* 82, 9-30.

Jovenet A. M. (2006). Une "didactique appropriée aux difficulté des élèves" est-elle tributaire des modes d'appréhension de ces difficultés? *La nouvelle revue de l'adaptation et de la scolarisation* 33, 147-158.

Kerbrat-Orecchioni C. (2001). *Les actes de langage dans le discours: théorie et fonctionnement*. Paris : Nathan.

Lelong P. (2004). Le réel et les concepts en mathématiques: une stratégie de création. In Algama D. L. S. (Ed.) *Le réel en mathématiques.* Psychanalyse et mathématiques.

Margolinas C. (1995). La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations. In Margolinas C. (Eds.), *Les débats de didactique des mathématiques : actes du Séminaire national 1993-1994*. Grenoble: La Pensée sauvage.

Morris C. (1974). Fondements de la théorie des signes. *Langages 8*(35), 15-21.

Morris C. W. (1938). *Foundations of the Theory of Signs* (Vol.1): University of Chicago Press.

Organisation des Nations Unies (1994) *Déclaration de Salamanque et cadre d'action pour l'éducation et les besoins spéciaux adoptés par la Conférence mondiale sur l'éducation et les besoins éducatifs spéciaux : accès et qualité.* Salamanque. Espagne.

Sarrazy B. (2007). Ostension et dévolution dans l'enseignement des mathématiques. *Education et didactique* 1(3), 31-46.

PERSPECTIVES ETHNOMATHÉMATIQUES À L'ÉCOLE EN NOUVELLE-CALÉDONIE

Gérard LAVIGNE*

Résumé – L'analyse des résultats de l'enseignement en Nouvelle-Calédonie, particulièrement en ce qui concerne les mathématiques, met en évidence un déficit important de bacheliers kanak et océaniens dans les disciplines scientifiques. L'accord de Nouméa, de 1998, stipulant que « les langues et cultures kanak sont avec le français des langues d'enseignement », nous travaillons, d'une part, à l'Université de Nouvelle-Calédonie, d'autre part, avec des enseignants locuteurs, et des enseignants du secondaire, généralement non locuteurs de langues océaniennes, dans le cadre de la formation continue, à la prise en compte de la langue et de la culture des enfants pour l'enseignement des mathématiques. L'objectif étant de chercher des pratiques innovantes pour l'enseignement des mathématiques en s'appuyant sur l'héritage environnemental, culturel et linguistique des populations océaniennes.

Mots-clé : ethnomathématique, Nouvelle-Calédonie, geométrie, langue, culture

Abstract – The evaluation of teaching results in New Caledonia, particularly regarding mathematics, highlights an important deficit of kanak and oceanian graduates in Sciences. The Nouméa Agreements of 1998 stipulate that "kanak languages and cultures are with French the languages of teaching". We work with both students, speaking their mother language, at the University of New Caledonia and teachers of the secondary, generally not oceanian languages speakers, within the framework of continuing education with the taking into account the language and the culture of children to teach mathematics. This study aims to seek innovating practices to teach mathematics while being based on the environmental, cultural and linguistic heritage of oceanian populations.

Key words: ethnomathematics, New Caledonia, geometry, language, culture

I. INTRODUCTION

La population calédonienne est une véritable mosaïque d'ethnies. Avec la population autochtone kanak, ethnie majoritaire du pays, de nombreuses communautés, entre autres, antillaise, asiatique, européenne, indonésienne, polynésienne et vanuataise sont venues s'y installer.

Malgré cette forte diversité de population, le système institué oppose irrémissiblement la langue française, présentée comme la langue de la modernité, qui serait la seule langue de conceptualisation et de réussite scolaire, aux langues kanak et océaniennes, qui ne seraient que des langues traditionnelles. Il convient de porter une réflexion plus approfondie sur les résultats de l'école calédonienne, qui perdurent, notamment en mathématique. A partir de ces résultats, nous développerons la question de la langue et de la culture dans l'enseignement des mathématiques, en nous appuyant sur la loi du décalage de Vygotski (1992, p. 232) :

> prendre conscience d'une opération, c'est la faire passer du plan de l'action sur celui du langage, c'est donc la réinventer en imagination pour pouvoir l'exprimer en mots.

Ce qui permet de mettre en exergue le concept d'ethnomathématique, développé par d'Ambrosio dans les années 1980. La combinaison de l'ethnomathématique, des intelligences multiples de Gardner (1996) et des modes de pensée de Bruner (1997), tresse le fil conducteur de notre réflexion.

* Université de Nouvelle-Calédonie, Centre des Nouvelles Études sur le Pacifique (CNEP) – Nouvelle-Calédonie – glavigne@kalolo.nc

© Lavigne, G. (2012) Perspectives ethnomathématiques à l'école en Nouvelle-Calédonie. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT8, pp. 1075–1091). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

II. ÉVOLUTION DE LA POPULATION CALEDONIENNE

Sans entrer dans les détails, le tableau 1 montre, en pourcentage, l'évolution des principales ethnies du pays lors des recensements de 1989 à 2009 :

	Kanak	Européens	Autres[1]
1989	44,8	33,5	21,7
1996	44,1	34,1	21,8
2004	44,2	35	20,8
2009	40,3	29,2	30,5

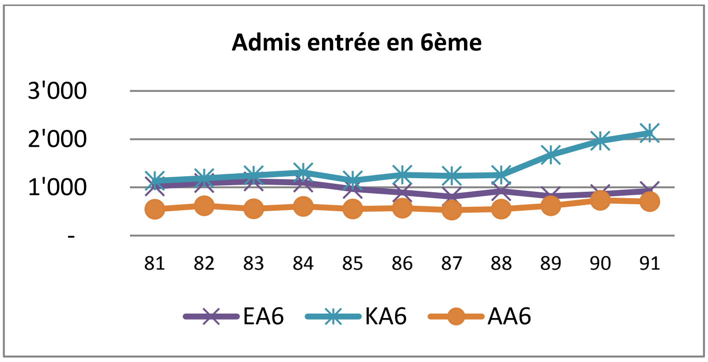
Tableau 1 *– Population de Nouvelle-Calédonie*

Malgré une baisse sur les 20 dernières années, la population autochtone kanak reste majoritairement représentée par rapport aux autres ethnies du pays. De plus, en général, trois habitants sur quatre sont nés en Nouvelle-Calédonie, ce qui montre la forte présence des océaniens, toutes ethnies confondues, dans la population calédonienne.

III. LES RESULTATS SCOLAIRES DE 1981 A 1991

C'est en regard de cette forte océanité de la population qu'il convient d'analyser les résultats de l'école calédonienne.

En se référant aux données de 1981 à 1991 du Vice-Rectorat de Nouméa, les jeunes Kanak admis en 6ème (KA6[2]) sont les plus nombreux. La courbe (graphique 1) suit une importante croissance à partir de 1989, ce qui trouve une part d'explication dans l'application de la loi d'orientation de 1989 qui permet d'éviter les redoublements.

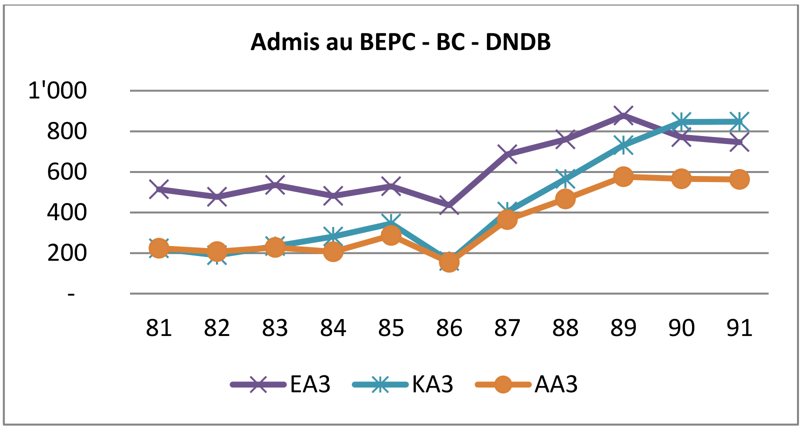


Graphique *. – Source Vice-Rectorat Nouméa*

En fin de 3ème (graphique 2) l'indicateur des admis au BEPC, qui s'est transformé pendant cette période en Brevet des Collèges (BC) puis en Diplôme National du Brevet (DNB) montre que les Européens admis (EA3) sont largement majoritaires jusqu'en 1990. A cette date, les admis Kanak (KA3) deviennent les plus nombreux.

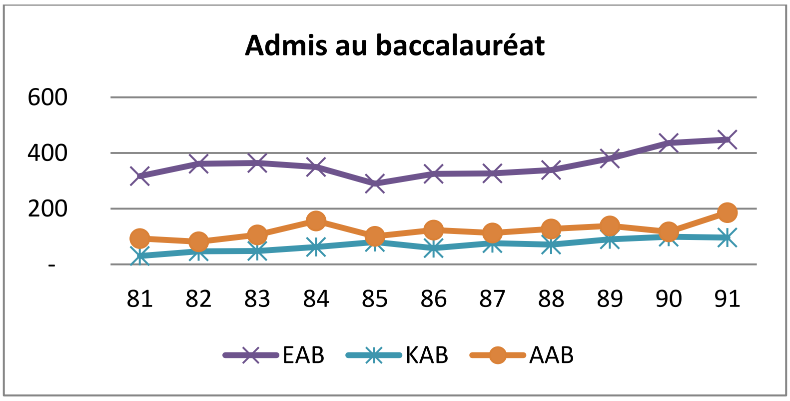
[1] Le groupe constitué « Autres » ethnies regroupe des communautés, majoritairement océaniennes : Ni-Vanuatu, Tahitienne, Wallisienne, Futunienne, ainsi que d'autres venues d'Asie : Indonésienne, Vietnamienne.

[2] Comme pour la population calédonienne, nous avons adopté une répartition de la population scolaire en trois groupes principaux de communauté d'appartenance :
1°) KA6, KA3, KAB : Kanak Admis respectivement en 6ème, au BEPC (BC, DNB), au baccalauréat ;
2°) EA6, EA3, EAB : Européens Admis respectivement en 6ème, au BEPC, au baccalauréat ;
3°) AA6, AA3, AAB : Autres ethnies Admises respectivement en 6ème, au BEPC, au baccalauréat.



***Graphique 2** – Source Vice-Rectorat Nouméa*

Les courbes s'inversent définitivement au baccalauréat[3] (graphique 3). Les Européens admis (EAB) à l'examen phare du système scolaire français sont majoritairement représentés. Par contre, les bacheliers Kanak (KAB) sont les moins nombreux sur toute la période.



***Graphique 3** – Source Vice-Rectorat Nouméa*

Un premier constat s'impose : pendant ces onze années, la population scolaire kanak, majoritaire jusqu'à l'entrée du lycée devient minoritaire en terminale des séries générales.

IV. ACTUALISATION DES RESULTATS

Depuis cette époque, nous ne pouvons plus disposer de données officielles par ethnies. Ce qui nous semble extrêmement dommageable pour un pays susceptible de se construire vers un « *destin commun* ». La population calédonienne augmentant, il apparaît logique que le nombre de diplômés de l'école augmente.

En effet, on pouvait constater en 2009, que près d'un tiers des Calédoniens de plus de 15 ans étaient bacheliers, soit deux fois plus qu'en 1996. Ce qui représente un certain progrès. Ainsi, dans son discours de politique générale du 31 août 2009, le Président du Gouvernement, M. Philippe Gomés, précisait qu'il y a

> un progrès notable global dans la réussite scolaire calédonienne. Nous avons progressé en termes de résultats scolaires. Aujourd'hui 45 % d'une classe d'âge décroche le BAC en Nouvelle-Calédonie pour 65 % en métropole. 20 points d'écart. C'est peu, et c'est beaucoup en même temps. Il faut remonter en 1990, en métropole, pour avoir 45 % d'une classe d'âge bachelière. C'était il y a vingt ans.

Ce qui situe, aussi, l'école calédonienne dans l'école de la République Française.

---

[3] Nous ne considérons, ici, que les séries générales, actuellement ES, L et S.

Mais ces résultats qui peuvent apparaître globalement intéressants, doivent être nuancés par les grandes disparités entre les communautés. Déjà, Kohler et Wacquant (1985) soulignaient l'importance de cette inégalité scolaire :

> un enfant mélanésien a 2,3 fois moins de chances objectives d'obtenir un CAP qu'un enfant européen ; il a trois fois moins de chances de glaner un BEPC, six fois moins de réussir un bac technique et douze fois moins de devenir bachelier des sections classiques. (*Id.,* p. 37)

En 2009, 12,5% des bacheliers sont d'origine kanak, 14,2% d'origine wallisienne et futunienne, et 54,1% d'origine européenne. Ainsi, pour le premier diplôme important de l'école française, ouvrant les portes de l'enseignement supérieur, les résultats vus précédemment sont toujours d'actualité. Pour celui-ci, du reste,

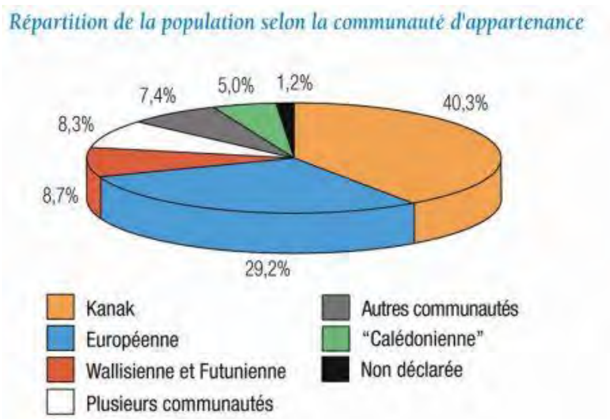
> le constat est encore plus sévère : un jeune Européen sur cinq est diplômé de l'enseignement supérieur, contre un sur vingt dans les communautés kanak ou wallisiennes. (Broustet et Rivoilan 2011)

Le discours dominant tend, systématiquement, à minimiser ces écarts ethniques en invoquant, entre autres, des qualités nécessaires à la réussite scolaire dont les jeunes kanak seraient dépourvus de part leur appartenance culturelle :

> volonté, travail, effort sur soi-même, sens du sacrifice. (Kohler et Wacquant 1985)

1. *La diversité de la population calédonienne en 2009*

Le recensement 2009 (graphique 4) permet également de mettre à jour les données par communauté[4]. Ainsi, selon l'ISEE, 40,3% de la population se déclarait Kanak (99100 personnes) et 29,2% Européen (71100). Cette répartition montre que la population autochtone Kanak est toujours l'ethnie majoritaire du pays.



Graphique 4 *– Source ISEE*

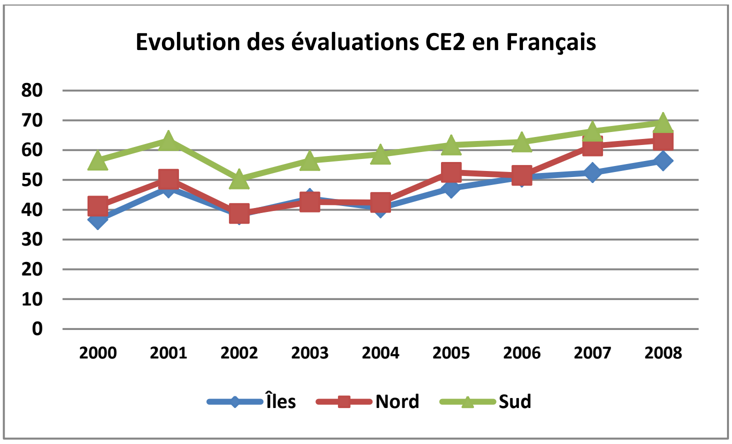
2. *La question des fondamentaux à l'école*

C'est au regard de cette grande diversitén culturelle et linguistique de la population calédonienne, avec néanmoins une dominante océanienne, qu'il convient de prendre en compte la question scolaire. Le processus commence dès l'école maternelle dans laquelle les enfants sont accueillis comme des enfants dont les pré-requis linguistiques seraient ceux de n'importe quel autre enfant francophone. L'analyse des résultats des différentes évaluations du parcours scolaire de ces jeunes montre cette inégalité des chances de réussite.

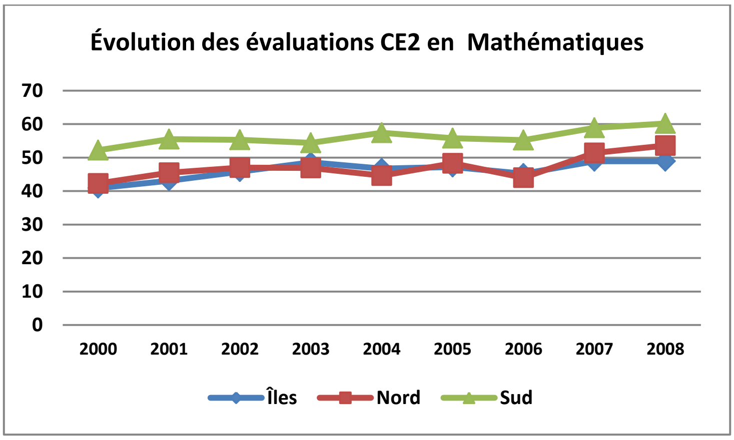
[4] La question de l'appartenance à une communauté a toujours été posée dans les différents recensements, sauf pour celui de 2004 suite à une intervention du Président de la République, M. Jacques Chirac, lors de sa venue en Nouvelle-Calédonie en 2003

3. *Les évaluations en CE2*

Le rapport présenté par la DENC[5], en août 2008, montre que les provinces nord et îles, de population majoritairement kanak et océanienne[6], obtiennent les résultats les plus faibles pour les fondamentaux, en français (graphiques 5.1) et en mathématiques (graphique 5.2), qui se situent en moyenne en-dessous de 50% : 47,6% en français et 46,6% en maths.



Graphique 5.1 *– source DENC (2008)*



Graphique 5.2 *– Source DENC (2008)*

On constate ainsi que, dès le début de la scolarité, les enfants des provinces nord et îles, n'ont pas acquis les fondamentaux nécessaires pour la poursuite d'une scolarité normale.

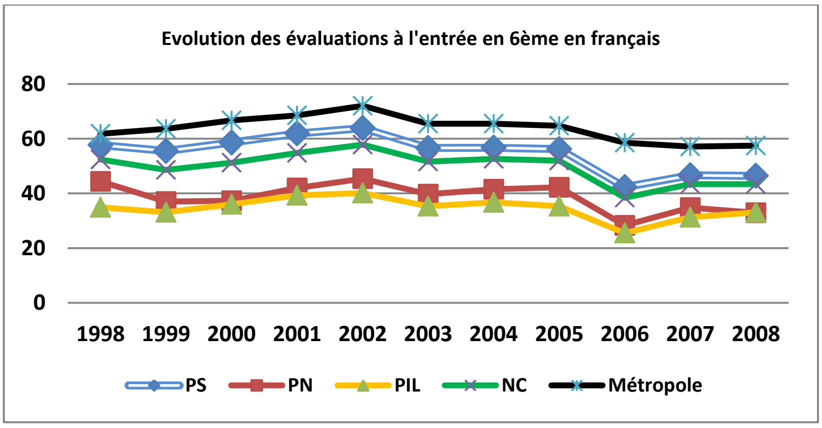
4. *Les évaluations à l'entrée en 6ème*

L'analyse des résultats des évaluations à l'entrée en 6ème, en français (graphique 6.1) et en mathématiques (graphique 6.2) de 1998 à 2008, montrent que la population scolaire de deux provinces nord et île obtient les résultats les plus faibles inférieurs à 40% des fondamentaux. Il est admis que pour suivre une scolarité normale, il convient d'en avoir acquis 75% à l'entrée en 6ème.

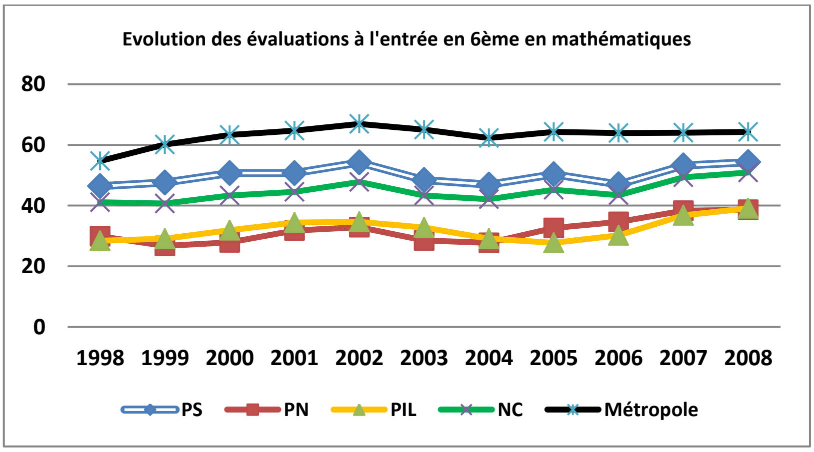
L'écart existant et se répétant au fil des années, ne permet pas à ces jeunes d'accéder à la « réussite scolaire » développé par le système, notamment en ce qui concerne les séries

[5] Direction de l'Enseignement de la Nouvelle-Calédonie
[6] Au recensement de 2009, 74% de la province nord et 97% de la province des îles est Kanak.

générales : ES, L et S, présentées comme celles qui permettent les meilleurs choix d'orientation. Particulièrement la série S, présentée comme celle de tous les choix possibles.



***Graphique 6** – Source Vice-Rectorat Nouméa*



***Graphique 6** – Source Vice-Rectorat Nouméa*

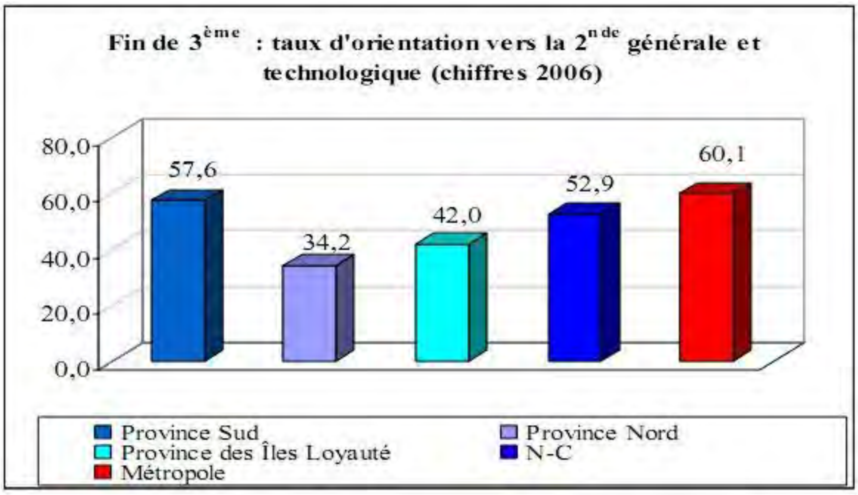
Les résultats des provinces nord (PN) et îles (PIL) plafonnent régulièrement aux environs de 30% des acquisitions des fondamentaux du primaire ; exactement 32% en moyenne sur ces 11 années pour ces deux provinces. Les jeunes arrivent donc au collège avec un manque de connaissances indispensables en mathématiques de plus de 60%.

5. *L'orientation en seconde*

Le document du Vice-Rectorat de Nouméa (Vice-Rectorat 2008, graphique 7.1), montre que le taux d'orientation en seconde générale et technologique, est de 34,2% pour la province nord, 42% pour la province des îles. Par contre, 57,6% des jeunes de la province sud y sont orientés. *A contrario*, 58,2% des jeunes de la province nord (graphique 7.2) sont orientés en lycées professionnels, de même que 56,4% de la province des îles, contre 32,2% des jeunes de la province sud. Le commentaire est à souligner. En effet, selon le Vice-Rectorat :

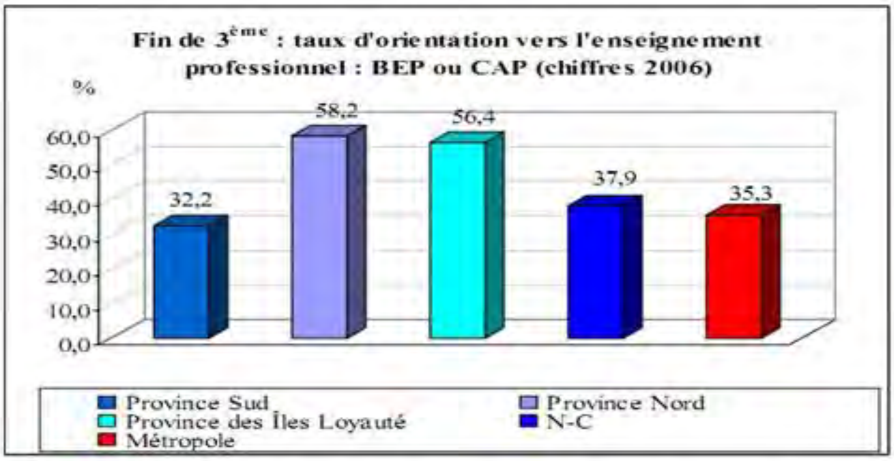
> la promotion de l'enseignement professionnel, comme voie de réussite scolaire et d'insertion, qui a constitué un axe majeur de la politique éducative de ces dernières années, explique en partie ce décalage.

Une question s'impose : pourquoi, cette politique éducative vers les filières professionnelles, ne fonctionne-t-elle pas pour les jeunes de la province sud, qui ont eux un taux d'orientation en seconde générale qui est « *proche de celui de la Métropole* ».



Tout se passe donc comme si les progrès enregistrés par les élèves en fin de collège (voir les résultats du DNB) étaient remis en question face à la perspective de devoir affronter le lycée général et technologique.

Graphique7 – *Source Vice-Rectorat Nouméa, 2008*



La promotion de l'enseignement professionnel comme voie de réussite scolaire et d'insertion, qui a constitué un axe majeur de la politique éducative de ces dernières années, explique en partie ce décalage.

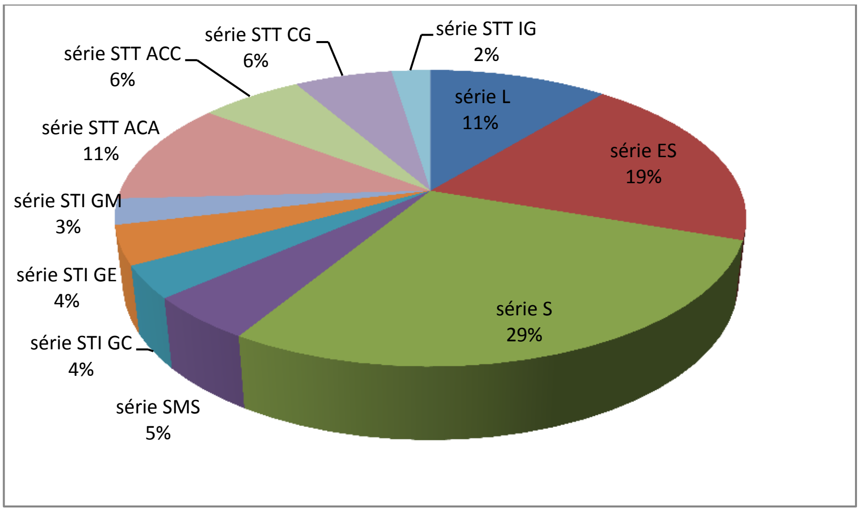
Graphique 7.2 – *Source Vice-Rectorat Nouméa, 2008*

Ainsi, le fonctionnement de l'école calédonienne, reproduction, *in extenso*, de celui de l'école française, implique que les jeunes kanak et océaniens se voient dans la grande majorité orientés vers les séries technologiques et professionnelles dès la sortie du collège. Cette orientation est, pour la plupart de ces élèves, plus « subie » que « choisie », compte tenu des résultats dans les fondamentaux : français et mathématiques.

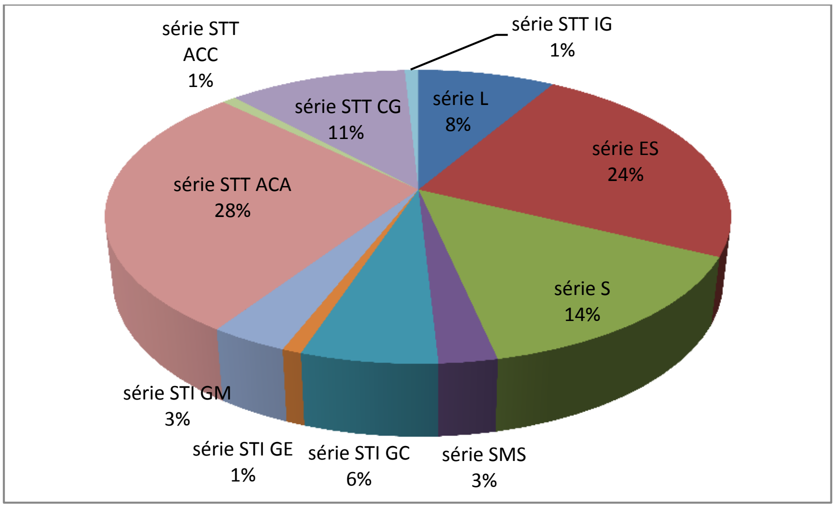
6. Les séries du baccalauréat

Globalement, il y a, évidemment, de plus en plus de bacheliers en Nouvelle-Calédonie. Qu'en est-il pour les séries du baccalauréat ?

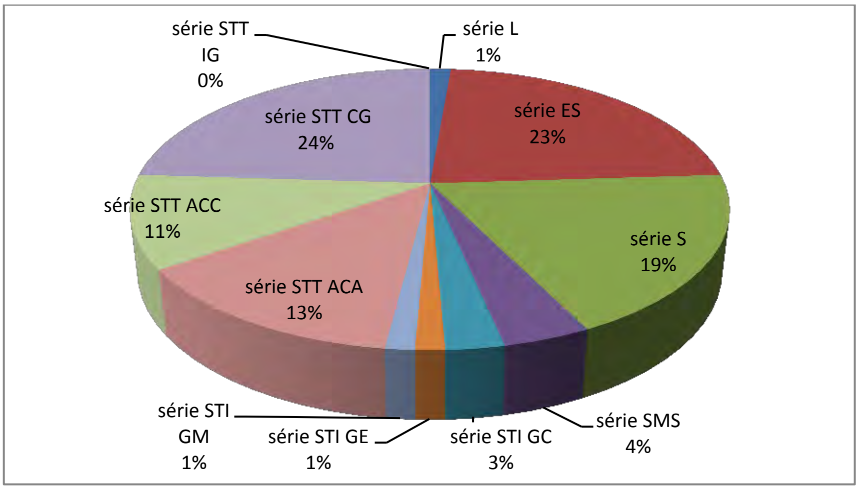
Les résultats du baccalauréat de l'année 2005, par province d'origine, montrent la forte représentation des séries générales pour les 1133 bacheliers de la province sud (graphique 8) avec respectivement 11% en série L, 19% en ES et 29% en S. Celle-ci obtient la plus importante représentation.



Graphique 8 *– Représentation par séries des 1133 bacheliers de la province sud. Source Vice-Rectorat Nouméa*



Graphique 9 *– Représentation 118 bacheliers de la province nord. Source Vice-Rectorat Nouméa*



Graphique 10 *– Représentation des 75 bacheliers de la province des îles. Source Vice-Rectorat, Nouméa*

A contrario, nous constatons une représentation bien plus faible dans ces séries de la réussite scolaire française pour la province nord (graphique 9) : L (8%), ES (24%) et S (14%) ainsi que pour la province des îles (graphique 10) : L (1%), ES (23%) et S (19%).

L'école calédonienne, en reproduisant à la lettre l'école française, construit une inégalité de fait quant à la réussite scolaire et par conséquent réussite sociale entre les jeunes du pays.

I. LA METHODE DE LA DEFINITION COMME PRATIQUE PEDAGOGIQUE

Qu'observons-nous dans les classes, en mathématiques ? La « référence platonicienne » aux mathématiques scolaires implique que la dévolution didactique s'articule autour de la nature idéelle de ces objets, on parle d' « idéalités mathématiques ». En tant qu'animateur pédagogique, nous avons maintes fois observé que lorsque l'enseignant aborde une nouvelle leçon, il commence le plus souvent par donner une définition. Le procédé semble s'imposer comme une évidence pour nombre d'enseignants que nous avons pu accueillir en formation. Or c'est justement ce que dénonce Vygotski, pour qui (Vygotski 1992), le trait fondamental de la méthode de la définition

> est l'étude chez l'enfant de concepts déjà prêts, déjà formés, à l'aide d'une définition verbale de leur contenu.

N'est-ce pas ce que nous observons dans les classes ? La place du langage dans les apprentissages est centrale chez Vygotski, pour qui, au contraire de Piaget, le développement se fait du social vers l'individuel, c'est-à-dire du langage social vers le langage intériorisé. L'enfant doit pouvoir se redire « en lui-même » ce qui aura été développé au travers des interactions interindividuelles.

Or, en classe de mathématiques, l'enseignant utilise des mots « savants » et pour ce qui nous concerne, dans une langue qui n'est pas la langue maternelle de la majorité des enfants des deux provinces nord et îles. Pour les enfants kanak et océaniens, cette « langue des mathématiques » intervient en langue troisième, après la langue maternelle et le français de la maison qui n'est pas non plus celui de l'école. En effet, comme le développe Baruk (1993, p. 209)

> la langue des mathématiques est seconde, par rapport à celle qu'utilise le sujet, elle sécrète elle-même, et de façon interne, des significations qui deviennent troisième, quatrième, etc.

II. L'ETHNOMATHEMATIQUE, COMME NOUVEAU DOMAINE DE RECHERCHE EN NOUVELLE-CALEDONIE[7]

Pour chercher à sortir de la « méthode de la définition » nous préconisons une approche empirique et un enseignement inductif.

Le fil conducteur de notre recherche se fonde sur le principe que l'un des objectifs en ethnomathématique consiste à

> chercher des moyens d'améliorer l'enseignement des mathématiques en l'intégrant dans le contexte culturel des élèves et des professeurs. Une forme souhaitable de l'enseignement des mathématiques est celle qui réussit à valoriser le savoir scientifique inhérent à la culture en utilisant cette connaissance pour préparer des fondations qui permettront un accès meilleur et plus rapide à l'héritage scientifique de toute l'humanité. (Gerdes 1996, p. 13)

En effet, toutes les sociétés humaines se sont développées en s'adaptant et en s'appropriant le milieu naturel dans lequel elles sont installées. Il a fallu beaucoup de temps et d'observations pour développer des connaissances précises sur ce milieu. Chaque société humaine a donc dû résoudre un certain nombre de problèmes (figure 1) avec ses propres modes et techniques

[7] Nous appliquons le titre de Paulus Gerdes : « l'ethnomathématique comme nouveau domaine de recherche en Afrique » à la Nouvelle-Calédonie.

(*Tics*), pour comprendre et expliquer (*Mathema*) l'environnement naturel (*Ethno*) dans lequel elle s'est développée :

Ethno	Mathema	Tics
L'environnement naturel, social, culturel et imaginaire	Expliquer, apprendre, savoir, copier	Modes, styles, arts et techniques

Figure 1 *– Définition de l'ethnomathématique selon D'Ambrosio(2001)*

Le principe de notre recherche consiste à valoriser les savoirs scientifiques développés par les cultures kanak et océaniennes en complémentarité avec ceux de l'école française.

Tout comme les concepts, les manières d'apprendre sont inhérentes à la culture (Bureau & De Saivre 1988). Dans les cultures kanak et océaniennes, la transmission des savoirs se fait en situation réelle par l'observation, la manipulation et l'intériorisation de l'action et non pas à partir d'une définition. La part corpo-kinesthésique est importante dans celle-ci. Mais l'école française, en privilégiant l'abstrait, a dévalorisé ce qui relève des activités manuelles. Si bien que tout ce qui peut être réalisé par le corps paraît moins important que le développement intellectuel.

Par conséquent, nous affirmons que les mathématiques ne s'apprennent pas uniquement en « écoutant, regardant, recopiant et apprenant » une leçon abstraite. Elles peuvent l'être à travers les modes d'apprentissages de cette autre culture en mobilisant les intelligences développées par celle-ci.

Nous considérons qu'au lieu d'opposer, il convient de faire travailler les intelligences (Gardner 1996) développées par les cultures océaniennes, notamment : corpo-kinesthésique, naturaliste, et spatiale, avec celles de l'école occidentale : langagière[8] et logico-mathématique. Cette opposition persistante est la récurrente antinomie « Tradition - Modernité » qui, sous l'angle de vue anthropologique, met toujours l'Autre « traditionnel, de culture orale », en situation d'infériorité par rapport au « moderne, de culture écrite ».

C'est par une combinaison complémentaire de tous ces éléments que l'on pourrait mettre en œuvre un chemin pédagogique serein pour les apprentissages fondamentaux en mathématiques. L'exemple du losange en est une illustration.

III. DE LA CULTURE AU MODELE MATHEMATIQUE : LE LOSANGE COMME ETUDE DE CAS

Partant de l'observation des sociétés kanak et océaniennes, nous nous intéressons, plus particulièrement à l'enseignement de la géométrie, parent pauvre de l'école française qui, de plus en plus, privilégie le nombre.

Les cultures océaniennes ont développé un rapport particulier aux représentations géométriques et non numériques, notamment comme éléments communicationnels, au travers des motifs des poteries Lapita ou des tapas, du tressage, des sculptures (chambranles, flèches faîtières) ou encore des tatouages. Ces motifs pourraient servir d'appuis pour des développements conséquents et atteindre les objectifs mathématiques définis par les programmes scolaires de l'école calédonienne.

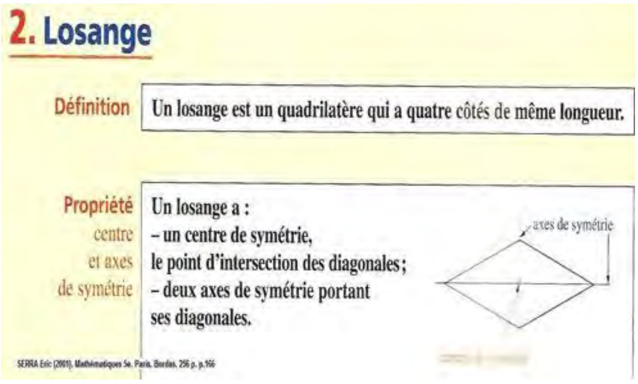
[8] L'intelligence langagière ne considère que la langue de l'école et particulièrement la langue écrite.

1. *Le point de vue scolaire*

La présentation scolaire du losange s'appuie, dans la plupart des cas, sur la « méthode de la définition ». Nous trouvons le plus souvent : le titre, la définition et le procédé de construction de la figure, à la règle et au compas. Le professeur demande ensuite aux élèves de la refaire « tout seul », passe dans les rangs pour vérifier la bonne exécution de l'algorithme institué de la construction. Il procède, ensuite, à des exemples d'applications et à des exercices.

Cette pratique, se trouve exécutée au tableau et reproduite par les élèves sur leur cahier. Le discours du professeur est systématiquement ponctué de remarques comme « Faites bien attention, c'est important », « Suivez bien » et surtout « Vous voyez ! » : les élèves sont censés « voir » la même chose que le professeur… Sauf que la culture façonne l'esprit de manière à analyser le monde en fonction de l'environnement de l'individu. Ainsi, Vinsonneau, (1997, p. 75), développe que la « culture apprend aux hommes à appréhender le monde », tel qu'il est perçu par ladite culture. L'enfant se développant dans un environnement donné, dont il perçoit au fur et à mesure une certaine dimension, « prend » de cet environnement, perçu par sa culture, pour se construire et se développer. Il perçoit cet environnement à travers le prisme de sa culture. Comme, « d'une culture à une autre, à travers un même objet on ne saisit pas la même chose » les comportements perceptifs diffèrent selon les cultures (Ibid., p. 76). Si bien que le « vous voyez » de l'enseignant ne l'assure pas véritablement que les élèves voient la même chose que lui. La grille de lecture développée par la culture particulière des enfants n'est pas prise en compte dans l'enseignement des mathématiques ; comme tel, un losange uniquement dessiné au tableau, régi par une définition, ne saurait avoir de sens pour eux.

Par la suite, le professeur mettra en évidence les propriétés essentielles de la figure. Dans le cahier de cours de l'élève on obtiendra une certaine reproduction (figure 2) du paragraphe du livre, par exemple :


2. Losange

Définition — Un losange est un quadrilatère qui a quatre côtés de même longueur.

Propriété centre et axes de symétrie — Un losange a :
– un centre de symétrie, le point d'intersection des diagonales ;
– deux axes de symétrie portant ses diagonales.

SERRA Eric (2001). Mathématiques 5e. Paris. Bordas. 256 p. p.166

Figure 2 *– Serra E. (2001, p. 166)*

Les exercices d'application, quant à eux, imposent, une lecture explicite et surtout implicite du texte comme le montre ce petit exemple de 6ème (Gotodier 2001) :

Construire un losange ROUE dans les cas suivants :

a. RU = 8 cm et OE = 4 cm : *implicite de la propriété caractéristique des diagonales du losange*.

b. RO = 5 cm et $\widehat{ORU}$ = 20°: *implicite des angles égaux et des diagonales (comme bissectrices), des côtés et du parallélogramme*.

c. OE = 3 cm et RO = 4 cm : *implicite des diagonales (comme médiatrices) et du parallélogramme*.

L'exercice n'est pas si simple pour un élève qui ne maîtrise pas l'implicite de la langue des mathématiques. Pour lui, le rapport au losange sera celui établi par l'intermédiaire du tableau et du cahier. Le losange restera « dans son cahier ». Au mieux, il apprendra le cours et le récitera quand il le faudra. C'est dire que le rapport au savoir reste celui institué dans la salle de classe. Ainsi, ces savoirs, qui n'ont pas de prises directes avec la réalité, deviennent très vite évanescents car leur apprentissage se fait plus par la mémoire que par la pensée.

2. *Une omniprésence dans la culture océanienne : le losange*

Un motif récurrent sur les objets et supports culturels et artistiques océaniens est le losange. On le trouve, entre autres, sur les *siapos* des îles Samoa (figure 3 A, B) ou sur les *tapas* des Fidji (figure 3 C) ou encore sur les *salatasi* de Futuna (figure 3 D) :

A B C D

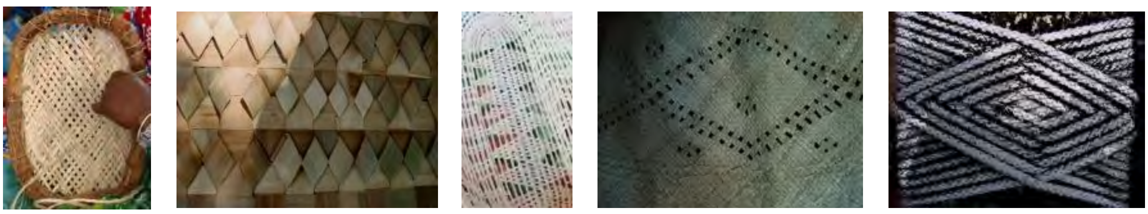
Figure 3 *– Siapos des Îles Samoa (A) et (B). (C) : Tapas des Îles Fidji. Photos de l'auteur. (D) Salatasi*[9] *de Futuna*

ou sur les sculptures anciennes ou modernes :

A B C

Figure 4 *– Chambranle*[10] *(A). Chambranle La Foa (B) et détail (C). Photos de l'auteur*

On le trouve couramment comme motif de tressage kanak (figure 5 A, B), d'un fond de panier wallisien (figure 5 C), d'un panier Vanuatu (figure 5 D) ou encore comme motif de ligature pour l'assemblage de deux bois dans la réalisation d'une rampe d'escalier (figure 5 E) :



A B C D E

Figure 5 *– Berceau kanak (A), panier kanak (B), panier wallisien (C), panier Vanuatu (D). Ligature à Bora Bora (E). Photos de l'auteur*

La prégnance du motif sur les nombreux supports indique l'importance attribuée au losange par les populations océaniennes. Celui-ci est, du reste, fortement repris de nos jours,

[9] Musée de Nouvelle-Calédonie (2001, p. 58)
[10] http://www.museenouvellecaledonie.nc/portal/page/portal/smp/expositions/expos_perm/objets_phares/mnc8656

notamment sur des tissus polynésiens (figure 6 A) ou comme décoration à l'exemple d'un bac à l'entrée de la mutuelle des fonctionnaires à Nouméa (figure 6 B) ou sur tous les poteaux des abribus de Nouméa (figure 6 C) ou encore le plateau d'une table en bambou (figure 6 D). La liste est bien évidemment non exhaustive mais ces quelques exemples montrent que l'environnement « moderne » s'est approprié ce motif culturel marquant de la culture océanienne.

A B C D

Figure 6 *– Tissus (A). Bas relief (B). Poteau support d'abribus (C). Dessus de table (D). Photos de l'auteur*

3. Le point de vue anthropologique

Nous observons le losange sur deux supports distincts qui contiennent la même représentation pour essayer de comprendre le sens d'une telle représentation : les chambranles et les bambous gravés.

Le motif est issu d'une figure anthropomorphe et illustre le cheminement symbolique de la culture kanak.

Les losanges formés entre les zigzags verticaux (figure 7 A) et horizontaux (figure 7 B) de la partie basse du chambranle représentent les hommes du clan reliés entre eux par les lignes de zigzags qui représentent les membres de chaque homme relié à son voisin afin de représenter l'unité et la force du clan (Schuster et Carpenter 1996, p. 95).

A B

Figure 7 *– Représentations symboliques du chambranle*

Cet ensemble est symboliquement placé en dessous d'une large tête qui est celle des ancêtres communs à tous les membres du clan.

Alors, la lecture – car il s'agit bien du sens donné à des signes conventionnels abstraits – du chambranle kanak s'explicite : la puissance de l'union des membres du clan rassemblés sous le regard des ancêtres.

Le même motif se retrouve aussi sur des bambous gravés collectés sur la Grande-Terre de Nouvelle-Calédonie et qui constituaient des supports de récits historiques de la vie quotidienne des Kanak. Certains racontent notamment l'arrivée des Européens. On y relève des motifs figuratifs (Colombo Dougoud 2008, figure 8A) mais aussi de nombreux motifs géométriques (figure 8B) qui avaient des significations précises.

A B

Figure 8 *– Bambou gravé avec des motifs figuratifs (A) ou géométriques (B)*

Ohlen (*in* Colombo Dougoud 2008, p. 61) présente une description attribuée à Émile Rivière. Ce bambou, qui a disparu, fut collecté par un officier d'Infanterie de Marine, Paul Tirat en 1875. Celui-ci

> obtint de son propriétaire, l'un des plus vieux chefs de l'Île des Pins, un commentaire des gravures.

Elle note que le chef

> en donna une description et une interprétation inattendue : ces gravures composées presqu'exclusivement de motifs géométriques seraient destinées à rappeler l'épisode de l'un des premiers débarquements d'Européens dans l'île et de la lutte qui s'en suivie.

La description donnée par Rivière indique que :

> les lignes en zigzags figureraient l'agitation des indigènes à la vue des Européens descendus à terre ; les losanges indiqueraient le groupement des tribus s'élançant au combat, pour chasser de leur île les nouveaux débarqués. Du côté opposé, deux autres séries de losanges représenteraient des Européens massés, s'avançant contre les Kanak sous la conduite de trois de leurs chefs signifiés par des triangles.

Le conditionnel utilisé dans le texte marque bien la « réserve » de l'auteur quant à cette «*interprétation inattendue* ». Pourtant, la mise en relation de ces deux lectures de la figure géométrique, sur deux supports distincts qui coexistaient nécessairement à l'arrivée des Européens, – la gravure sur bambous a repris des motifs existants sur les chambranles – concorde sur l'interprétation de la représentation de l'homme kanak par le losange.

On retrouve de manière plus explicite ce rapport sur certains bambous, avec les jambes des hommes gravés reliées en forme de losange (figure 9). Il n'en fallait certainement pas plus pour passer de la représentation figurative à celle symbolique de la figure géométrique du losange, car

> beaucoup de bambous présentent des sujets figuratifs qui se sont transformés en motifs géométriques (*id.*, p. 62).

Figure 9 *– Motifs anthropomorphes et géométriques (encadré par nous)*

Cette représentation construite et reproduite avant l'arrivée des Européens a été certainement désignée par un terme précis dans les langues des peuples qui ont construit et reproduit ce motif. Il reste qu'avec l'effet colonial de l'interdiction des langues kanak pendant 120 ans[11] ces termes ont été pour le moins oubliés, « *congelés* » comme le dit Gerdes (1993), dans la plupart des langues. Aussi un des rôles de l'ethnomathématique consisterait-il à les rechercher afin de les faire revivre.

Pour se faire et en suivant la ligne de Gerdes, nous suggérons un chemin pédagogique qui prenne appui sur la représentation du losange dans la culture kanak et océanienne.

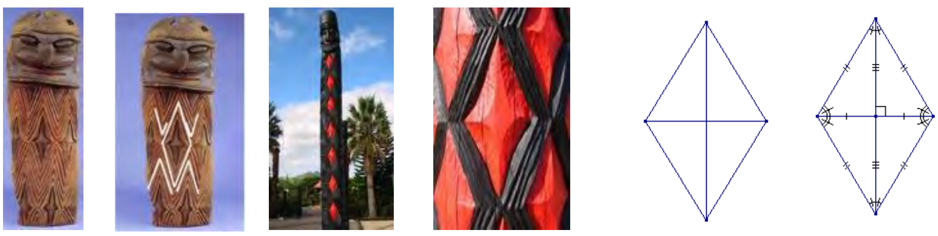
IV. LE POINT DE VUE ETHNOMATHEMATIQUE

Les peuples du Pacifique ont toujours développé une pratique de la géométrie, des concepts en actes comme le développe Vergnaud (2000). Mais aussi un usage des « formes géométriques », non pas au sens des arpenteurs égyptiens, repris par les Grecs, de la mesure de la terre, mais plutôt comme symbole esthétique de communication.

Les recherches en ethnomathématiques nous permettent de développer des stratégies d'apprentissages s'appuyant sur les compétences développées par la culture de l'enfant. De notre point de vue, il nous faut mobiliser ces acquis culturels dans l'enseignement scientifique et mathématiques en particulier.

Nous proposons de partir de l'observation du patrimoine culturel pour prolonger cette connaissance par un travail mathématique plus abstrait. Nous donnerons ainsi à l'enfant la possibilité de se dire en lui-même, au mieux dans sa langue maternelle ce qui aura été vu en classe. L'enfant sera en situation de mettre en œuvre la phase *intrapsychologique,* développée par Vygotski (Rivière 1990), complément indispensable de la phase *extrapsychologique* pour l'apprentissage des concepts. Grâce à ce nouvel outil, le regard qu'il portera désormais sur les objets de sa culture pourra alors s'exprimer par un discours mathématique, y compris quand il ne sera pas à l'école.

Côté enseignant, le chemin pédagogique s'appuiera sur l'un ou l'autre des supports culturels contenant implicitement ou explicitement le losange (figure 10A et C). L'observation de ces symboles forts de la culture kanak permet, en effet, d'en extraire l'objet mathématique qui nous intéresse (figure10B et D) afin de le représenter d'abord par le dessin, puis par les mesures avec les instruments de la géométrie et dans le meilleur des cas, un logiciel de géométrie (figure10E).



A B C D E F

***Figure 10** – De l'observation au concept*

Le travail mathématique se développe à partir de l'observation et de la manipulation pour mettre en exergue les propriétés caractéristiques du losange. Les « *questions élucidantes* » (Barth 1987) permettront d'induire une définition opérationnelle du losange pour en arriver à l'écriture symbolique de ses propriétés (figure10 F). Une démarche active est ainsi installée pour les apprentissages, des triangles et des quadrilatères, en l'occurrence, en lieu et place d'un enseignement « saucissonné » de ces différentes figures géométriques.

[11] De l'arrêté du Gouverneur Guillain du 15 octobre 1863 à l'abrogation de l'article concerné en 1984.

V. CONCLUSION

Notre recherche en ethnomathématique s'inscrit dans la perspective de la réussite des enfants de Nouvelle-Calédonie, en prenant appui sur la compréhension et le respect de l'« Autre », qui existe alors, comme sujet porteur de savoirs liés à sa culture et non par le « manque de » qui le caractérise systématiquement dans la vision occidentale.

Notre pratique en tant que professeur de mathématiques nous a déjà permis d'opérationnaliser ce concept avec des élèves du collège de Baganda à Kaala-Gomen, notamment sur la symétrie axiale (Lavigne 2009), à partir de compétences artistiques généralement reconnues aux populations kanak et océaniennes. Ceci nous met en posture d'émettre qu'il est tout à fait possible d'amener les enfants de la Nouvelle-Calédonie à « faire des mathématiques autrement » et avec plaisir. Nous laissons le dessin ci-contre exprimer le ressenti de son auteure, une élève de 5ème, à la suite d'un travail effectué sur la symétrie axiale fondé à partir de sa culture.

L'environnement océanien foisonne de possibilités géométriques, peu, voire pas, exploitées par l'école. L'environnement immédiat de l'enfant océanien, où qu'il soit, est totalement imprégné de géométrie et de symétrie axiale, comme partout dans le monde du reste. Pour, Leibniz (Nourrisson 1858, p. 476), « il y a de la géométrie, de l'harmonie, de la métaphysique, de la morale partout ». Et le « partout » de Leibniz, concerne aussi le Pacifique. La géométrie et l'harmonie ne sont pas l'apanage des Grecs et de leurs héritiers occidentaux ; tous les peuples du monde ont côtoyé la géométrie de leur environnement et l'ont utilisée au travers de leur culture, à leur façon. Même s'il n'y a pas de vraie symétrie axiale dans la nature – au sens de l'idéalité platonicienne du terme -, celle-ci y est fortement suggérée, car, pour prolonger Desanti (1975) pour qui « les mathématiques ne viennent ni du ciel … ni de la terre », nous disons que c'est l'homme, dans toute sa diversité culturelle, qui crée les mathématiques.

Alors, avec Morin (2000, p. 114), nous énonçons aussi que

> les cultures doivent apprendre les unes des autres, et l'orgueilleuse culture occidentale qui s'est imposée en culture enseignante, doit devenir culture apprenante. Comprendre, c'est aussi, sans cesse, apprendre et réapprendre.

Pour faire en sorte que les enfants de Nouvelle-Calédonie soient confortés dans leur langue et leur culture, il convient aussi de prendre en compte le rapport au monde développé par les cultures kanak et océaniennes. Ceci ne peut se réaliser sans une volonté institutionnelle de faire travailler les langues sur elles-mêmes afin de produire les éléments nécessaires au développement des enfants à l'école dans toute la dimension intellectuelle effective – y compris scientifique – pour qu'ils soient, demain, des citoyens responsables et acteurs du développement du pays.

REFERENCES

Barth B. M. (1987) *L'apprentissage de l'abstraction*. Paris : Retz

Baruk S. (1993) *C'est à dire en mathématique ou ailleurs*. Paris : Seuil, Col Science ouverte.

Broustet D., Rivoilan P. (2011) *Synthèse recensement de la population 2009, "50 000 habitants de plus de 13 ans"*. Nouméa : ISEE, n°1.

Bruner J. (1997) *...Car la culture donne forme à l'esprit. De la révolution cognitive à la psychologie culturelle*. Genève : Georg Eshel, Coll. Psychologie.

Bureau R., De Saivre D. (1988) *Apprentissage et cultures. Les manières d'apprendre*. (Colloque de Cerisy). Paris : Karthala.

Colombo Dougoud R. (Ed.) (2008) *Bambous kanak. Une passion de Marguerite Lobsiger-Dellenbach*. Genève : Infolio editions.

D'Ambrosio U. (2001*) Ethnomathematics. Link between Traditions and Modernity*. Rotterdam : Sense Publishers.

Direction de L'enseignement de la Nouvelle Calédonie (2008) *2000 – 2008. L'évolution de l'école primaire publique en Nouvelle-Calédonie depuis le transfert de compétences. Quelques repères pour mesurer le chemin parcouru*. Nouméa : DENC.

Gardner H. (1996) *Les différentes formes d'intelligence*. Paris : Retz, Coll. Psychologie.

Gerdes P. (1993) *L'ethnomathématique comme nouveau domaine de recherche en Afrique*. Maputo : Institut Supérieur de Pédagogie.

Gerdes P. (1996) *Femmes et géométrie en Afrique Australe*. Paris : l'Harmattan.

Gotodier M. (2001) *Mathématiques 6ème*. Paris : Hatier. Coll. Les petits manuels Hatier.

Kohler, J.M., Wacquant L. (1985) *L'école inégale, éléments pour une sociologie de l'école en Nouvelle-Calédonie*. Nouméa : Institut Culturel Mélanésien, col. Sillon d'ignames.

Lavigne G. (2009) Enseigner les mathématiques en langues kanak et océaniennes. Exemples de supports didactiques. In Vernaudon J., Fillol V. (Eds). (pp. 157-173) *Vers une école plurilingue dans les collectivités d'Océanie et de Guyane*. Paris : l'Harmattan.

Morin E. (2000) *Les sept savoirs nécessaires à l'éducation du futur*. Paris : Seuil.

Musée de Nouvelle-Calédonie (2001) *Tapa, écorces et décors d'Océanie*. Nouméa : Musée de Nouvelle-Calédonie.

Nourisson J.F. (1858) *Tableau des progrès de la pensée humaine de Thalès à Leibniz*. Paris : Didier et Cie.

Rivière A. (1990) *La psychologie de Vygotsky*. Liège : Mardaga.

Schuster C., Carpenter E. (1996) *Patterns that connect: social symbolism in ancient & tribal art.* New York : Harry N. Abrams.

Serra É. (2001) *Mathématiques 5e*. Paris : Bordas.

Vergnaud G. (2000) *Lev Vygotski. Pédagogue et penseur de notre temps*. Paris : Hachette Education.

Vice–Rectorat de Noumea (2008) *Eléments pour un diagnostic du système éducatif en Nouvelle-Calédonie.* Nouméa : Vice-Rectorat, juin.

Vinsonneau G. (1997) *Culture et comportement*. Paris : Armand Colin.

Vygotski L. (1997) *Pensée et langage*. Paris : La dispute, 3ème éd.

LE TRAVAIL DOCUMENTAIRE
D'UN PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES
L'adaptation improvisée à la faveur de l'engagement cognitif des élèves en difficultés par la découverte du pouvoir qu'ils opèrent sur l'environnement

Geneviève LESSARD*

Résumé – S'attarder au défi majeur de ne pas s'enliser dans le cercle vicieux d'une réduction des enjeux de l'apprentissage des mathématiques, dans des classes vouées à l'enseignement auprès d'élèves en difficultés, nous amène à exposer le travail documentaire d'un enseignant de mathématiques dans le cadre d'une formation axée sur l'emploi. À l'aide de deux exemples, nous ferons état d'importants changements dans la topogénèse et la chronogénèse des savoirs (Mercier 1995), tels que le maillage de situations techniques et de situations problèmes effectué par l'enseignant ainsi que le recours chez les élèves à des pratiques mathématiques plus attentives aux données numériques et aux relations entre ces données.

Mots-clefs : Travail documentaire, action didactique conjointe professeur-élève, difficultés d'apprentissage, situation problème, approche écologique

Abstract – Facing the biggest hurdle of avoid getting into the vicious cycle of minimizing the issues related to mathematics learning opportunities of students with a learning disability lead us to investigate the characterization of a teacher documentation work in mathematics. The two examples allowed us to appreciate the significant shifts in the topogenesis and chronogenesis of knowledge (Mercier, 1995). These changes manifested themselves in several ways: 1) the meshing of technical situation and problem solving; b) the use of mathematical methods that took into account the numerical data sets and the relationship between these sets of data.

Keywords: Teachers documentation work in mathematics, professor-pupil didactical joint action, Learning disabilities, problem solving, ecological approach

I. CONTEXTE ET PROBLÉMATIQUE

Le cercle vicieux de la réduction des exigences auprès d'élèves en difficulté d'apprentissage est bien reconnu, mais fort complexe à démanteler, particulièrement lorsqu'il s'agit d'intervenir auprès d'élèves de l'enseignement secondaire ; ces élèves ont construit des rapports problématiques à plusieurs objets de savoir et ont édifié des habitus contre-productifs à l'apprentissage. En effet, ces élèves adoptant des comportements d'évitement de l'acte d'apprendre, de trouble de la paix scolaire (Butlen, Charles-Pezard et Masselot 2009) sont également ceux avec lesquels l'on fait du surinvestissement (Conne 2003), des reprises d'activités (Sensevy 1998), des régressions, des piétinements (Lemoyne et Lessard 2003) et de la simplification d'activités d'apprentissage (Houssart 2002). Rompre cet état de fait est d'autant plus ardu lorsqu'il s'agit d'élèves ayant fréquentés divers milieux au cours de leur scolarité et provenant de différentes institutions de l'enseignement secondaire, donc pour lesquels la mémoire didactique (Centeno et Brousseau 1991 ; Centeno 1995) des enseignants est fort restreinte alors que celle des élèves est façonnée de pratiques, de situations, d'événements didactiques qu'ils ont intégrés depuis leur entrée à l'école primaire.

Pour relever ce défi, il nous semble nécessaire de soumettre aux élèves des situations riches, originales et représentant un défi. La richesse permettra à l'élève de revisiter des savoirs anciens problématiques tout en avançant ; l'originalité évitera que l'élève reçoive conjointement avec la tâche « son » image d'échec et le défi favorisera son engagement

* Université du Québec en Outaouais – Canada – genevieve.lessard@uqo.ca

© Lessard G. (2012) Le travail documentaire d'un professeur de mathématiques. L'adaptation improvisée à la faveur de l'engagement cognitif des élèves en difficultés par la découverte du pouvoir qu'ils opèrent sur l'environnement. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT8, pp. 1092–1101). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

cognitif. Mais, comment convaincre les acteurs, enseignants, élèves et chercheurs, de la pertinence de leur proposer de telles situations ? Comment reconstruire une mémoire didactique porteuse d'espoir ? Comment permettre à l'élève ayant davantage côtoyé l'échec d'oser, d'investir les situations et d'apprécier les effets de son engagement cognitif ?

Cette recherche s'intègre dans la stratégie d'intervention Agir autrement du ministère de l'Éducation du loisir et du Sport (MELS) pour soutenir la réussite des élèves du secondaire en milieu défavorisé (SIAA) dans le cadre de la formation Pré-DEP. Cette formation axée sur les matières de base de 3e secondaire et sur l'exploration de la formation professionnelle est offerte à des élèves en retard scolaire qui souhaitent accéder à une qualification le plus rapidement possible (DEP).

II. CADRE THÉORIQUE

Dans le cadre de notre thèse (Lessard, 2011), nous avons montré la pertinence de recourir à l'inscription écologique de situations d'enseignement/apprentissage auprès d'élèves de 1re secondaire en difficulté d'apprentissage, notamment pour réduire leur côté menaçant et pour accroître l'espace de liberté des acteurs.

1. Inscription écologique de situations riches, originales et « défi »

L'inscription écologique de situations didactiques suppose que leur immersion ne perturbe pas le fonctionnement didactique de la classe, que leur intégration permette au système de « demeurer le même tout en changeant et de se conserver tout en se transformant » (de Rosnay, 1994, Ecologie et approche systémique, §3). Autrement, la rupture de son équilibre entraînerait tôt ou tard leur rejet du système. Ainsi, le chercheur souhaitant accompagner l'enseignant dans l'« Agir Autrement » et proposer des situations riches, originales et défi doit se positionner en tant qu'« écocitoyen [qui] doit mieux comprendre comment situer et insérer son action locale dans un système global » (De Rosnay 1994, Ecologie et approche systémique, §9), de façon à prolonger naturellement le travail de l'enseignant. Cette approche systémique suppose donc la prise en compte, par le chercheur, de l'action didactique conjointe des élèves et de l'enseignant.

2. La prise en compte de l'action didactique conjointe (Sensevy et Mercier 2007) :

Comme les conduites des enseignants et des élèves se modulent, leur considération mutuelle est essentielle à l'identification, à l'ajout ou à la transformation de niches qui permettront d'aménager et d'inscrire des situations didactiques fécondes.

Lorsque le regard est porté vers les élèves, une place prépondérante est accordée à leur rapport au savoir (Chevallard 2007), lequel met en exergue l'influence de l'évaluateur, de la tâche, des conditions dans lesquelles l'élève rend public ce qu'il connaît, ce qu'il sait. Cet angle permet donc de relativiser ce que l'on peut précisément attribuer « à l'élève en difficulté ». D'ailleurs, leurs conduites sont tributaires d'un ensemble de corrélats, dont les habitus (Bourdieu 1980) qu'ils ont ancrés et qui ont été alimentés par l'institution scolaire.

Il semble donc également nécessaire de s'attarder au travail documentaire de l'enseignant, lequel consiste à

> rassembler des ressources, les sélectionner, les transformer, les recomposer, les partager, les mettre en œuvre, les réviser… La documentation, qui désigne simultanément ce travail et son produit, est au cœur de l'activité professionnelle des enseignants, elle en est à la fois le résultat et le moteur. (Gueudet et Trouche 2010, pp. 13-14)

Ce travail nous permettra d'enrichir notre mémoire didactique.

III. OBJECTIFS ET MÉTHODOLOGIE DE RECHERCHE

Dans la recherche initiale, nous nous sommes intéressée à deux objectifs principaux à savoir pour l'objectif 1 : consigner le travail documentaire d'un professeur de mathématiques œuvrant auprès d'une population de PRÉ DEP 3 et PRÉ DEP 4 et les conduites des élèves qui s'y rattachent et pour l'objectif 2 : procéder à l'inscription écologique de situations riches, originales et défis auprès de cette population. Cette recherche s'est déroulée dans une école secondaire offrant une formation PRÉ DEP 3 et 4 sur une période de six mois à raison de 17 périodes. Dans le cadre de cette communication, nous rendrons compte uniquement du premier objectif. Nos pensons toutefois qu'il importe de présenter les différentes phases de la démarche d'inscription écologique.

1. S'informer de l'enseignement possible, analyse a priori de la collection Tardivel (Perrault et Faucher 2009) manuel exploité en classe

La ressource matérielle principale de l'enseignant est le manuel scolaire. Il est donc tout à fait essentiel de l'examiner afin d'effectuer une entrée respectueuse, instruite et harmonieuse du chercheur dans l'institution scolaire. Ce travail nous permettra de mieux comprendre les contraintes et les possibilités didactiques qu'offre son usage ainsi que le projet de l'enseignant (ex. situations privilégiées).

2. Comprendre l'enseignement envisagé : rencontre avec l'enseignant

Les premiers contacts du chercheur avec l'enseignant, tenant compte du fonctionnement de leur institution et des apports précieux qu'ils peuvent fournir aux chercheurs préoccupés par l'enseignement des mathématiques, sont fort importants. Ainsi, lors de cette rencontre nous nous sommes intéressée à l'appréciation et à l'utilisation du manuel par l'enseignant, à son mode de fonctionnement. Nous avons également présenté quelques situations afin de connaître leur potentiel d'inscription au projet de l'enseignant.

3. Assister à l'enseignement : observations passives et actives de « situations régulières2

Au cours d'une première phase d'intégration, nous avons assisté à l'enseignement dispensé par le titulaire de mathématiques et nous avons assumé, en tant que chercheur, les fonctions suivantes : a) prise de notes ; b) échanges avec l'enseignant ; c) interventions pendant l'enseignement, afin de soutenir le travail de certains élèves. Ces interventions s'avèrent particulièrement précieuses : 1) elles permettent de prendre acte des rapports de plusieurs élèves, de leurs habitus, de leurs représentations du contrat didactique (Brousseau 1980) ; 2) elles sont des moments privilégiés pour une acculturation institutionnelle des élèves et du chercheur. Durant cette phase, l'enseignant assume ses rôles habituels. L'enseignant et le chercheur échangent leurs observations et formulent différentes questions. Un tel partage est une source d'informations pour le chercheur et l'enseignant. Le chercheur peut ainsi bénéficier d'observations sur les conduites des élèves effectuées par l'enseignant et de l'expertise de l'enseignant pour interpréter certaines observations qu'il a consignées. L'enseignant peut, de son côté, mieux appréhender les objectifs poursuivis par le chercheur. Soulignons enfin que cette première phase constitue une étape décisive du processus d'acculturation institutionnelle du chercheur, de l'enseignant et des élèves.

4. *Participer à l’enseignement : co-planification, co-enseignement, co-évaluation*

Les phases précédentes servent ainsi d'assises pour une inscription écologique de situations, situations empreintes de l’institution classe. Cette progression nous amènera à réagir avec plus de discernement et facilitera la gestion de diverses situations : a) situations issues de ressources du milieu comportant, au besoin, certaines adaptations ; b) situations construites en référence aux études effectuées dans le domaine prenant appui sur l’analyse des conduites des élèves de la classe ; c) situations découlant d'une analyse de besoins spécifiques exprimés par l'enseignante.

En plus des observations en classe et des rencontres avec l’enseignant, deux entrevues bilan ont été réalisées avec l’enseignant et les élèves comme outil de triangulation. Dans cette communication, nous présenterons deux exemples d’adaptations réalisées par l’enseignant et rendrons compte brièvement des conduites des élèves, pour en dégager les points de convergence. Les phases 2 et 3 nous ont donc permis de rendre plus spécifiquement compte du travail documentaire de l’enseignant.

IV. RÉSULTATS DE RECHERCHE

À la base du travail de l’enseignant, s’inscrit une ressource didactique (Gueudet et Trouche 2010) et majoritairement ancrée dans le milieu, en tant qu’outil adapté pour une population en difficultés et fort hétérogène. Les cahiers Tardivel se rapprochent d’une pédagogie de la maîtrise : préalables, méthode individualisée, respect du rythme des élèves. Tel qu’inscrit à l’entrée du cahier,

> que ce soit pour des élèves en prolongement de cycle, en cheminement particulier, en sport-études, en apprentissage individualisé, pour la récupération de la clientèle régulière ou la mise à niveau durant l'été : la Collection Tardivel vous propose ses cahiers de mathématiques de niveau secondaire […]. Voilà enfin une méthode simple et efficace qui fera vivre le succès scolaire à l’élève tout en augmentant son autonomie. (Perrault et Faucher 2009, p. v)

Chaque chapitre débute par « Mes acquis », section qui, selon ses auteurs, fait un rappel des connaissances antérieures nécessaires à la réalisation des apprentissages et des « exercices éclair » qui permettent de les mettre en pratique ; une section théorique sur les nouveaux concepts et processus à acquérir et des exercices succèdent à ce rappel. Il s’agit d’un enseignement algorithmitisé dont la responsabilité de l’apprentissage est entre « les mains du cahier » et non des élèves, contrairement à ce qu’on voudrait faire croire aux élèves.

L’enseignant nous a fait part de plusieurs remarques à l’égard du manuel choisi et de son utilisation : 1) qu’il s’agissait d’un outil conçu par des personnes qualifiées ou dont c’est le mandat ; 2) peu importe la situation avec laquelle il travaille, il peut procéder à des aménagements : réorganisations, sélections ; 3) cet outil est en continuité avec ce que les élèves ont utilisé les années précédentes et s’apparente à ce qu’ils feront au DEP les prochaines années (enseignement modulaire). De plus, la constitution du manuel permet, lors des périodes d’appui, à l’élève d’avancer par lui-même ou à l’intervenant, majoritairement non-spécialiste en mathématiques, de profiter des « capsules théoriques » pour étayer le travail de l’élève ; 4) l’utilisation qu’il fait du manuel varie d’une période à l’autre. Parfois, il l’utilise de façon linéaire et les élèves travaillent individuellement ou en duo ; parfois, il fait du modelage au tableau, lance un défi aux élèves ; lecture en groupe de la théorie, distinguer l’essentiel du facultatif pour la prise, la construction commune ou individuelle de notes de cours.

Avant de présenter les adaptations de l’enseignant et les conduites des élèves, il semble important de considérer que l’instauration de la paix scolaire a permis cette vigilance didactique (Roiné 2009). De façon générale, l'enseignant est en situation d'improvisation avec les élèves et ils « s'enseignent » ou, pour reprendre les propos de Conne,

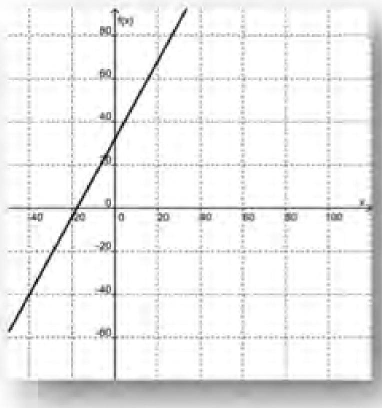
> il faut que tous enseignants se déprennent d'une double illusion, soit celle d'en savoir déjà assez pour enseigner ce qu'il a à enseigner – sinon que pourrait-il apprendre en enseignant ? – et celle de penser qu'il connaît suffisamment ses élèves, leurs manques et difficultés au point de ne plus pouvoir jamais se laisser surprendre parce qu'ils font. (Conne, Favre et Giroux 2006, p. 134)

En somme, la responsabilité de l'apprentissage est partagée. Bien qu'à diverses occasions cet enseignant présentait seul la résolution de problèmes au tableau, des corrigés d'examen, des exposés plus théoriques avant la mise en pratique. Il n'en demeure pas moins que de façon récurrente, il utilise divers gestes professionnels pour mettre les élèves en état de recherche (et non d'attente), pour raviver et alimenter leur curiosité : il ne complète pas ses phrases, il ne répond pas aux demandes des élèves, il leur demande de choisir une question dans leur manuel à résoudre pour le plaisir, il utilise le travail d'équipe et les élèves experts comme outil de gestion de demandes, il laisse une marge de manœuvre et du temps dans la phase d'appropriation de la résolution de problème, ils créent en grand groupe des problèmes loufoques, il joue sur l'élongation des délais entre les évaluations, etc. Ce contrat, les élèves l'ont compris et accepté.

1. Transformations de l'activité originale 1 et justifications par l'enseignant

Les activités présentées ici sont extraites d'un cahier de situations d'évaluation du raisonnement et du langage mathématique de l'élève (Perrault et Faucher, 2009, chapitre 3, 2e année du deuxième cycle du secondaire). Elles sont généralement prévues pour être réalisées individuellement dans le but d'établir un bilan mathématique.

Lors de ton dernier devoir de mathématiques, l'enseignant t'avait demandé de représenter graphiquement la formule qui permet de convertir **les degrés Fahrenheit en degrés Celsius**. À la suite d'une recherche sur Internet, tu avais trouvé la formule suivante : $\mathbf{f(x) = 1{,}8x + 32}$ et tu avais conçu cette représentation graphique :



Cependant, ton enseignant te signale que tu as fait une erreur. Tu as plutôt utilisé la formule qui permet de convertir **les degrés Celsius en degrés Fahrenheit**. Tu dois donc reprendre à nouveau cet exercice. Il te signale qu'il te suffit d'inverser les variables dépendante et indépendante afin de trouver la bonne formule. Malheureusement, tu n'auras pas accès à Internet cette fois-ci.

Bonne chance!

***Figure 1** – Activité 1 originale*

Différentes étapes et questions accompagnent cette situation : 1) J'approfondis la situation : Qu'est-ce que j'ai à trouver ? Quelles sont les données qui vont m'être utiles ? Quels sont les outils mathématiques (concepts et processus) que je vais utiliser ? 2) Je me mets au travail…ma démarche : mes calculs… toutes mes traces doivent être présentes et claires ; 3) Je formule ma réponse.

Les premières transformations de l'enseignant consistent à aborder la situation en grand groupe, dans une visée d'apprentissage et à exploiter le logiciel Excel. La mise en contexte ci-dessous leur a été présentée et ils ont dû ensuite se mettre à la tâche en dyade.

À l'aide du logiciel Excel, vous devez créer, un convertisseur permettant de transformer une température en degré Celsius en Fahrenheit et une température en Fahrenheit en degré Celsius.

2. Conduites d'élèves lors de la réalisation de l'activité 1 adaptée

Les élèves, ayant accès à Internet, se mettent à la recherche de convertisseur et identifient quelques couples. Certains élèves choisissent d'emblée d'entrer 0oC et obtiennent les coordonnées (0,32), choix judicieux leur permettant à la fois de rejeter la fonction linéaire comme modèle de la situation « Tu peux pas multiplier un nombre par 0 et que ça te donne 32 » et obtenir l'ordonnée à l'origine, dans le cas d'une fonction affine. Ils procèdent donc à la recherche du taux de variation. Encore une fois, quelques équipes déploient des stratégies économiques et inscrivent dans le convertisseur deux valeurs successives [(0,32) et (1 ;33,8)], ce qui leur permet - peut-être inconsciemment - d'obtenir 1 au dénominateur (taux de variation unitaire), selon les techniques apprises [y_2-y_1/x_2-x_1] et d'obtenir le taux d'accroissement en procédant à une soustraction des ordonnées (33,8 32 = 1,8). Ils obtiennent alors $y = 1{,}8x + 32$. Il faut dire que le répertoire restreint de fonctions connues ou apprises simplifie la recherche du modèle.

L'enseignant explique ainsi les diverses adaptations, soit de permettre aux élèves : d'utiliser un logiciel courant ; d'être capables de dire à un ordinateur comment faire : « tu ne fais pas de calculs, tu fais le programme » ; d'exploiter la formule en tant que mise en relations et non « affaire à calculer » ; de donner sens concrètement au vocabulaire pour les relations linéaires et leur réciproque (ex. graphe). Et cette sollicitation de pratiques mathématiques plus attentives aux données numériques et aux relations entre ces données, sera également tangible dans les adaptations réalisées au cours la seconde situation d'évaluation que nous présentons maintenant.

3. *Transformations de l'activité originale 2 et justifications par l'enseignant*

Figure 2 – *Activité 2 originale*

Les différentes étapes et questions qui accompagnent cette situation sont identiques aux précédentes : 1) J'approfondis la situation : Qu'est-ce que j'ai à trouver ? Quelles sont les données qui vont m'être utiles ? Quels sont les outils mathématiques (concepts et processus) que je vais utiliser ? 2) Je me mets au travail…ma démarche : mes calculs… toutes mes traces doivent être présentes et claires ; 3) Je formule ma réponse.

Tout d'abord, l'enseignant n'exige en aucun temps l'application des différentes étapes et questions proposées. S'il l'exploite, c'est plutôt a posteriori afin de permettre aux élèves de prendre un recul par rapport à leur processus de résolution de problème, au même titre, pour reprendre ses propos, qu'il est beaucoup plus instructif et intéressant d'entendre un récit de voyage que sa planification. Ensuite, il s'agit de la même situation à laquelle l'enseignant a ajouté une question suite à la résolution de l'énoncé : quelles pourraient être les valeurs pour que les souvenirs de ton grand-père soient réels ? Si l'enseignant a posé une telle question, il ne l'avait cependant pas planifiée. Un telle réplique didactique (Conne, Favre et Giroux 2006) provient du travail entamé par certains élèves (« Il s'est peut-être trompé dans les années le vieux », etc.), un tel travail qu'il voulait nourrir cette curiosité et estimait profitable de poursuivre ce travail sur l'isolation des différentes variables afin de jouer avec les « paramètres ».

4. *Conduites d'élèves lors de la réalisation de l'activité 1 adaptée*

Afin d'affirmer que leur grand-père a tort, nous retrouvons trois différentes démarches exploitées par les élèves, qui ont été exposées - par les élèves - dans cet ordre, soit recherché

1. le prix initial : $10 = a(1{,}04)^{59}$ …

2. le taux d'inflation : $10 = 0{,}5\ (b)^{59}$ … $10/0{,}5 = b^{59}$…$20 = b^{59}$ … (pour ceux qui avaient cette fonctionnalité sur leur calculatrice) ou

3. la durée : $10 = 0{,}5(1{,}04)^{x}$ … $10/0{,}5 = 1{,}04^{x}$

Ce dernier résultat, bien qu’absent du programme scolaire, amène l’enseignant à effectuer une recherche et à explorer la page Wikipédia sur les intérêts composés avec les élèves. L’enseignant découvre en même temps que les élèves, il se questionne, plutôt ils - en tant que communauté d’apprentissage - se questionnent. La qualité et la durée de l’engagement des élèves sont fort remarquables. Un des élèves le plus faible de la classe questionne les diverses variables utilisées. S’ensuivent, l’interprétation des diverses formules au regard de leurs démarches précédentes, des terminologies et des variables utilisées et l’exploration de la période : Sans entrer dans les détails du logarithme népérien, il était possible d’en parler comme réciproque de la fonction exponentielle.

V. DISCUSSION

Les conduites des élèves ont bel et bien modulé les pratiques de l’enseignant qui, en contrepartie, s’était donné la liberté d’écouter. L’improvisation est en ce sens pour l’enseignant une façon de ne pas tomber dans la planification avec ses lames à double tranchant, c’est-à-dire à avoir une intention trop précise, si structurée que tout acte est vite réorienté par l’enseignant vers le but escompté. Faire parler les écritures n’est pas tâche courante auprès de cette population d’élèves, encore moins les suivre dans leur exploration qui va au-delà de ce qui est anticipé dans le programme régulier. Pourtant, nous avons assisté à cette mobilisation remarquable. Si nous comparons les adaptations proposées aux conduites des élèves, nous pouvons constater que la prise de conscience de l’emprise qu’ils exercent sur leur environnement (comprendre la programmation d’un convertisseur; se mesurer à une formule complexe sur Wikipédia) leur est ô combien salutaire ! Pensons à cette élève qui entrait une première valeur dans son convertisseur et allait la valider avec celle trouvée sur Internet, puis une 2^{e}, une 3^{e}, une 4^{e}, et ce, jusqu’à ce qu’elle se convainque que ce qu’elle avait produit était à la hauteur de ce qu’on trouvait sur Internet et qu’en plus elle pouvait maintenant en comprendre le fonctionnement !

Nous avons pu montrer ici comment une ressource à la base fort techniciste et algorithmique a pu constituer un levier à l’élaboration de situations problèmes. Au-delà de ces exemples, il reste un fait, celui d’un enseignant qui a su instaurer un climat de confiance et un contrat responsabilisant conférant aux élèves l’envie de prendre des risques. Ces exemples illustrent comment les choix judicieux de l’enseignant engagent les élèves, comment la vigilance didactique permet d’accroître la paix scolaire (Butlen, Charles-Pezard et Masselot 2009). L’enseignant écoute réellement les demandes, il alimente et nourrit la curiosité intellectuelle de ces élèves. Intrigués, curieux, ils n’adoptent pas de comportements perturbateurs ou d’évitement, ne montrent pas de signe d’inattention. Il semble que ces habitus soient bien opposés à ceux véhiculés à leur égard, ces élèves de 15-17 ans qui ont été maintes fois confrontés à l’échec scolaire de qui dit-on « ne veulent pas faire de mathématiques, qui ne sont pas intéressés, etc. », là s’intéressent à des formules d’intérêts composés impliquant des logarithmes népériens… Cette mouvance de leur statut d’élève en difficulté (Sarrazy 2002) confirme l’importance de ne pas statuer sur une étiquette générale et fixe d’élève en difficulté, mais de rendre compte des conditions dans lesquelles ils exposent un rapport problématique. Ainsi, il est toujours possible de croire en leur potentialité, en leur compétence mathématique.

Avec les élèves en difficultés, on a d’autant plus tendance à leur enseigner, car s’ils sont en difficultés c’est qu’ils ne « savent pas ». Pourtant, il est tout à fait dommageable et dangereux de les considérer sans mémoire : ils se retrouvent avec un amalgame d’informations, de connaissances, qui s’empilent, qu’ils ne peuvent comprendre, rattacher les unes aux autres. Au-delà de cela, si on leur fournit un milieu propice à l’expression, nous faisons de magnifiques découvertes. Et nous apprenons à nous laisser surprendre par eux.

VI. CONCLUSION

Au terme de cette recherche, nous avons pu identifier un invariant dans la pratique improvisée de l'enseignant, soit celui de conférer aux élèves un pouvoir d'action leur permettant de mieux appréhender le monde qui les entoure. Il semble s'agir d'une niche potentiellement féconde auprès d'une population en difficulté d'apprentissage. L'inscription de situations riches, originales et « défi » devient alors un cas de figure que les apprenants en difficulté estiment représentatif du métier de l'élève. La souplesse de l'enseignant favorise la découverte des effets de leur engagement cognitif et revêt à long terme un potentiel de renversement du cercle vicieux de réduction des exigences.

REFERENCES

Bourdieu P. (1980) *Le sens pratique*. Paris : Editions de Minuit.

Brousseau G., Centeno J. (1991) Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 11(2/3), 167-210.

Brousseau G. (1980) L'échec et le contrat. Recherches. *La politique de l'ignorance* 41, 177-182.

Butlen D., Charles-Pezard M., Masselot P. (2009) Pratiques de professeurs des écoles débutants enseignant les mathématiques à des élèves issus de milieux socialement très défavorisés, entre contraintes et marges de manœuvre. *Actes du colloque EMF 2009*. Dakar, Sénégal.

Centeno J. (1995) *La mémoire didactique de l'enseignant*. Thèse posthume. Bordeaux : LADIST.

Chevallard Y. (2007) Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique . In Ruiz-Higueras L., Estepa A., Javier García F. (Eds.) (pp. 705-746) *Sociedad, Escuela y Mathemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de la Didáctico.* Universidad de Jaén, 2007. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=134

Conne F. (2003) Interactions de connaissances et investissement de savoir dans l'enseignement des mathématiques en institutions et classes spécialisées. *Éducation et francophonie* 31(2), Revue électronique.

Conne F., Favre J.-M., Giroux J. (2006) Répliques didactiques aux difficultés d'apprentissage en mathématiques : le cas des interactions de connaissances dans l'enseignement spécialisé. In: Doudin P.-.A., Lafortune L. (Eds.) (chap.6, pp. 118-141) *Intervenir auprès d'élèves ayant des besoins particuliers*. Presses université du Québec.

De Rosnay J. (1994) Éducation, écologie et approche systémique. *Actes du Congrès de l'AGIEM, Larochelle*. http://csiweb2.cite-sciences.fr/derosnay/articles/EduEco.htm

Houssart J. (2002) Simplification and Repetition of Mathematical Tasks: A Recipe for Success or Failure? *Journal of Mathematical Behavior* 21(2), 191-202.

Lemoyne G., Lessard G. (2003) Les rencontres singulières entre les élèves présentant des difficultés d'apprentissage en mathématiques et leurs enseignants. *Éducation et francophonie* 31(2) .Publication électronique.

Lessard G. (2011). *Acculturation institutionnelle du chercheur, de l'enseignant et des élèves dans la conception et la gestion de situations d'enseignement des nombres rationnels auprès d'élèves de 1re secondaire présentant des difficultés d'apprentissage*. Thèse puliée. Université de Montréal : Montréal.

Mercier A. (1995). La biographie didactique d'un élève et les contraintes temporelles de l'enseignement. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 15(1), 97-142.

Perrault A., Faucher C. (2009) *La collection Tardivel*. Donnacona : Commission scolaire de Portneuf.

Roiné C. (2009) *Cécité didactique et discours noosphériens dans les pratiques d'enseignement en SEGPA. Une contribution à la question des inégalités.* Thèse de l'université Victor Segalen Bordeaux 2.

Sarrazy B. (2002). Les hétérogénéités dan l'enseignement des mathématiques. *Educational Studies in Mathematics* 49(1), 89-117.

Sensevy G., Mercier A. (2007) *Agir ensemble : l'action didactique conjointe du professeur et des élèves*. Rennes : PUR.

Sensevy G. (1998) *Institutions didactiques. Étude et Autonomie à l'école élémentaire*. Paris : PUF.

EFFETS DES CONTRAINTES INSTITUTIONNELLES SUR LES PRATIQUES ENSEIGNANTES DANS L'ENSEIGNEMENT SPECIALISE

Céline MARECHAL*

Résumé – Dans notre recherche nous examinons trois différents types d'institutions primaires genevoises (classes « ordinaires », classes spécialisées et classes d'établissements d'enseignement spécialisé). Le but est d'analyser si l'écologie du didactique, c'est-à-dire si les conditions et contraintes qui régissent ces lieux, gênent, voire empêchent, la survenue d'un état du système souhaité (dans notre cas l'introduction de l'addition).

Mots-clefs : praxéologies, organisations mathématiques et didactiques, conditions et contraintes

Abstract – In our research we examine the forms of teaching found in three structurally different primary classrooms in Geneva ("ordinary" classes, specialized classes, and schools with classes dealing with children with troubles in personality and learning). The aim is to analyze if the ecology of the didactics in those three types of classes obstructs, even prevents, the achievement of certain didactical goals, in our case, the introduction of addition.

Keywords: teaching practices, mathematic organizations (MO) and didactic organizations (DO), conditions and constraints

C'est dans le cadre d'une recherche de thèse (Maréchal 2010) que nous avons initié le questionnement que nous proposons de présenter dans cet article. Divers travaux de recherches nous ont conduit à nous intéresser à la question de la spécificité du travail des enseignants exerçant dans des contextes spécialisés. En effet, au-delà des différences évidentes dans les capacités cognitives des élèves, il semble bien que les organisations mathématiques (OM) et didactiques (OD) mises en œuvre par les enseignants jouent un rôle important dans les différences que l'on peut observer. Dans ce sens, la réflexion menée par Conne (1999, 2005) a été un déclencheur pour notre recherche. En effet, cet auteur s'est premièrement interrogé sur l'existence d'une didactique des mathématiques propre à l'enseignement spécialisé (1999) puis, dans un deuxième temps, à savoir si le cadre institutionnel dans lequel les élèves sont intégrés a un impact jusqu'au didactique (2005). Dans la lignée de ces travaux, notre intérêt s'est focalisé sur les contraintes institutionnelles qui pèsent sur les enseignants du secteur spécialisé et leurs effets potentiels sur les pratiques enseignantes, notamment dans ce qui est proposé aux élèves en termes de contenu de savoir.

Notre étude vise donc à déterminer si l'enseignement dispensé dépend du secteur d'enseignement (enseignement « ordinaire » ou spécialisé). Nous faisons l'hypothèse que les conditions et contraintes institutionnelles particulières à chacun des secteurs d'enseignement ont un impact sur les organisations didactiques et mathématiques mises en place par les enseignants et donc sur l'enseignement dispensé. Comme le mentionne Chevallard (1989), c'est en se focalisant sur ce qu'il se passe dans les classes que l'on découvre les conditions et contraintes qui définissent l'écosystème dans lequel les enseignants évoluent. Ainsi, nous avons collaboré avec des classes issues du secteur « ordinaire » et du secteur spécialisé afin de déterminer leur écosystème et déterminer si celui-ci influence les praxéologies mises en place par les enseignants.

I. CONTEXTE

Notre étude prend place dans le contexte de l'enseignement primaire genevois où une politique de différenciation structurale est appliquée. Doudin et Lafortune (2006) définissent

* DiMaGe (Didactique des Mathématiques de Genève) – Suisse – celine.marechal@unige.ch

© Maréchal C. (2012) Effets des contraintes institutionnelles sur les pratiques enseignantes dans l'enseignement spécialisé. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21^e^ siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT8, pp. 1102–1113). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

cette politique comme la création de différents types de classes dans un même système scolaire. Chacun des types de classes correspond à un certain profil d'élèves définit principalement par ses compétences scolaires, niveau et/ou problèmes de comportement en classe. A Genève, il existe trois types de classes différents : les classes « ordinaires » (CO) relevant du secteur « ordinaire » puis les classes spécialisées (CS) et les établissements d'enseignement spécialisé (EES), relevant du secteur spécialisé. Nous avons dès lors choisi de collaborer avec trois classes de chaque type, soit un total de 9 classes. L'école « ordinaire » représente le lieu où la majorité des enfants se rendent. Ce sont généralement des élèves dits « sans difficulté » ou dont les difficultés d'apprentissage sont considérées – par les maîtres – comme étant compatibles avec les attentes de l'institution. Pour qu'un élève intègre une classe spécialisée, il faut en général que son enseignant le signale par le biais d'un bilan pédagogique comme « un enfant inadapté aux critères scolaires «ordinaires» » (Biffiger 2004, p. 34) autrement dit comme ne pouvant pas profiter de l'enseignement « ordinaire » suite à certaines difficultés d'apprentissage et/ou de comportement qui l'empêche d'évoluer correctement (c'est-à-dire conformément au contrat didactique en vigueur). Les établissements spécialisés regroupent quant à eux des élèves qui n'ont été orientés ni vers la filière ordinaire, ni vers les classes spécialisées et qui présentent généralement une « atteinte organique ou psychique majeure et handicapante : cécité, surdité, infirmité motrice cérébrale, handicap mental, psychoses déficitaires » (Ibid., p. 34). Ces lieux ont la particularité d'offrir une prise en charge spécifique des élèves avec, en plus d'un soutien pédagogique, un soutien éducatif et thérapeutique dispensé par une équipe pluridisciplinaire. Les effectifs des classes en moyenne correspondent de 17 à 24 élèves pour les classes « ordinaires », de 7 à 9 élèves pour les classes spécialisées et de 3 à 6 élèves pour les classes des établissements spécialisés.

L'une des particularités du contexte suisse romand, dont Genève fait partie, tient au fait qu'il existe des moyens d'enseignement officiels et unitaires pour l'enseignement des mathématiques. Ces derniers sont la ressource principale et quasi unique des enseignants genevois. Cela n'implique cependant pas qu'ils soient employés de façon identique partout et par tous. En effet, en fonction du canton, de l'établissement scolaire, voire même de l'enseignant, des choix sont opérés, rendant ainsi possibles des variations plus ou moins fortes. Cette particularité suisse romande est cependant bien éloignée du fonctionnement d'autres pays, comme la France, où les manuels sont davantage le fait de publications d'éditeurs privés parmi lesquelles les enseignants ou établissements scolaires doivent effectuer des choix. Différentes conceptions de l'apprentissage et orientations didactiques peuvent ainsi se dessiner au travers des nombreux manuels présents sur le marché. D'ailleurs, comme le cite Jaquet (2000), alors que cette situation de moyens d'enseignement unique apparaît absolument naturelle en Suisse romande, « au-delà de nos frontières, elle suscite de l'étonnement, de l'incrédulité, voire de la réprobation : comment peut-on imaginer que tous les maîtres utilisent le même manuel ? Comment peut-on accepter le monopole de l'Etat sur les moyens d'enseignement ? » (p. 1). Ainsi les moyens d'enseignement COROME[1] ne sauraient se réduire à un manuel au sens où on l'entend en France par exemple. C'est pourquoi nous soulignons que ce sont des moyens officiels distribués dans toutes les écoles de Suisse romande et qui sont encore une fois la seule source reconnue pour les enseignants.

Toutefois, il est important de préciser que les enseignants du secteur spécialisé genevois ne sont pas contraints d'utiliser les moyens d'enseignement officiels. Ils ont en effet davantage de libertés que les enseignants « ordinaires ». Par exemple, ils ne sont pas obligés de suivre « à la lettre » le curriculum officiel, ni d'évaluer leurs élèves à travers des tests officiels. Nous

[1] Les moyens d'enseignement COROME sont diffusés par la COmmission ROmande des Moyens d'Enseignement.

postulons dès lors que ces différents éléments ont une influence directe sur les pratiques des enseignants et donc sur l'enseignement mathématique dispensé.

II. METHODOLOGIE

Notre recherche s'intéresse aux pratiques enseignantes. C'est pourquoi nous faisons appel aux outils de la TAD - théorie anthropologique du didactique (Chevallard 1992). De plus, la TAD permet de considérer les classes « ordinaires », les classes spécialisées et les établissements d'enseignement spécialisé comme trois différentes *Institutions* et ainsi d'aborder notre question de façon systémique.

Dans notre recherche, c'est la praxéologie du professeur de mathématiques qui est l'objet d'étude. Pour étudier les praxéologies mises en place, la TAD propose d'examiner le travail du professeur d'après deux grandes composantes solidaires que sont les « organisations mathématiques » (OM) et les organisations didactiques. L'OM est en quelque sorte une « cartographie » de praxéologies que l'enseignant met en place où les blocs de la pratique et du discours raisonné sont de type mathématique. Quant à l'OD, elle renvoie à la manière dont l'enseignant organise les tâches mathématiques de son OM. Comme l'OM, l'OD se définit alors par un agencement de praxéologies didactiques. De manière plus simple, le travail des enseignants se décline en deux questions « qu'est-ce que j'enseigne ? » avec pour réponse une modélisation en termes d'organisations mathématiques et « comment je l'enseigne ? » avec pour réponse une modélisation en termes d'organisations didactiques. « Pour résumer, analyser les pratiques enseignantes en termes de praxéologies revient à analyser l'OM reconstruite par le professeur ainsi que l'OD mise en œuvre pour permettre l'étude de cette OM » (Ravel 2003, p. 110) tout en s'interrogeant sur la problématique écologique qui permet d'identifier le système de contraintes et les conditions dans lesquelles les enseignants font leurs choix d'OM et d'OD. Comme Chevallard le mentionne, l'analyse de ces deux composantes ne peut pas être réalisée séparément à cause de leur co-détermination.

La TAD permet donc de faire émerger les organisations mathématiques et didactiques mises en place par les enseignants. C'est justement ce que nous proposons d'analyser par le biais de cet article en nous focalisant sur le niveau *régional* [2] uniquement[3] pour chaque type d'*Institutions*, c'est-à-dire sur un secteur mathématique entier ; l'introduction à l'addition.

Etant donné que le secteur spécialisé genevois ne fonctionne pas par degrés scolaires avec, de plus, une certaine souplesse dans le suivi du programme, nous avons fait le choix de nous focaliser sur un contenu mathématique particulier, plutôt que l'âge des élèves.

Pour les besoins de notre recherche, nous avons récolté neuf trames de scénarios d'enseignement relatifs à l'introduction de l'addition dans chacune des neuf classes durant une année scolaire. C'est-à-dire que chaque activité relative à l'addition réalisée dans chacune des classes était répertoriée dans une grille avec des informations telles que « durées des activités », « matériel utilisé », « organisation sociale », « consigne », etc. Grâce à ce matériel, nous avons comparé au sein des neuf classes le temps d'enseignement effectif de l'addition durant une année scolaire (OD), la fréquence d'utilisation des moyens d'enseignement

[2] Concernant l'étude des organisations mathématiques, différents niveaux sont distingués dans la théorie anthropologique du didactique (*ponctuel*, *local*, *régional* et *global*). Une organisation mathématique *régionale* correspond à un secteur mathématique entier comme par exemple la notion d'opération arithmétique représentée par le « + » et le « - » (Chevallard 2002).

[3] Dans notre travail de thèse, nous nous sommes également focalisée sur le niveau *local* grâce à l'observation d'une activité commune au sein des neuf classes. Pour cette partie de la recherche, nos analyses ont été réalisées à partir de la double approche de Robert et Rogalski (2002). Nous ne présentons toutefois pas ces résultats dans cet article.

officiels (OD) puis les types de tâches (OM) et registres d'ostensifs (OD) impliqués dans chacune des activités proposées (nous décrivons plus en détails ces éléments par la suite).

Afin d'analyser les organisations mathématiques et didactiques mises en place par les enseignants nous avons eu la nécessité de réaliser une typologie de tâches selon deux niveaux de spécification que nous présentons dans ce qui suit.

1. *Construction d'une typologie en fonction des types de tâches et des registres d'ostensifs*

Pour analyser chacune des activités proposées par les enseignants en classe, nous avons construit une typologie de tâches qui nous permet de coder toutes les activités travaillées selon les types de tâches et registres d'ostensifs impliqués. La typologie de tâches offre des possibilités d'analyses en termes d'organisations mathématiques (OM), mais aussi d'organisations didactiques (OD) et la caractérisation de registres d'ostensifs vient compléter ce premier outil en considérant différents objets ostensifs qui sont activés lors de la réalisation d'activités mathématiques. La construction d'une typologie de registres d'ostensifs permet des analyses davantage orientées vers les organisations didactiques (OD).

Afin de créer notre typologie de tâches, nous avons procédé en deux étapes. La première permet de constituer notre premier niveau de spécification avec le genre de tâches étudié. La deuxième étape consiste en un enrichissement de cette typologie de tâches à partir d'objets ostensifs. Ci-dessous, nous exposons plus en détails notre manière de procéder :

1. Les calculs numériques[4] (premier niveau)

Premièrement, nous définissons les types de tâches mathématiques disponibles en première année de primaire en lien avec le genre de tâches étudié[5]. Nous pouvons ainsi dégager 3 types de tâches relatifs à une même écriture de type a +/- b = c :

1) « faire des sommes et des différences » lorsque « c » est recherché
2) « trouver le terme manquant dans une addition / soustraction lacunaire » lorsque a ou b sont recherchés, c et l'autre terme étant connus.
3) « recherche de décompositions additives / soustractives » lorsque à la fois a et b sont cherchés pour un c donné.

Nous avons volontairement ignoré l'addition en colonne afin de ne répertorier que des additions sous forme de sommes en ligne, car les algorithmes de calcul en colonnes ne sont introduits, d'après le plan d'étude et les moyens d'enseignement suisses romands, qu'à partir de la troisième année du primaire signifiant qu'il est rare de l'introduire dès l'introduction du thème.

Pour nos analyses, nous regardons donc tout d'abord le calcul numérique impliqué dans chaque activité proposée aux élèves. Ci-dessous nous présentons le codage des différentes possibilités pour l'analyse de activités proposées en classe :

---

[4] Vergnaud (1981) distingue « calcul numérique » de « calcul relationnel ». En effet, alors que le premier décrit une opération ordinaire (addition, soustraction, multiplication et division), le second s'intéresse aux relations impliquées dans la situation (s'agit-t-il d'une transformation positive directe appliquée à un état initial, de trouver une différence entre deux états, etc. ?).

[5] Nous précisons toutefois que l'ordre dans lequel nous introduisons nos types de tâches et sous-types de tâches n'est pas représentatif d'une quelconque hiérarchie.

1 Opération numérique impliquée			
T$_1$	**(+)** a + b = ….	**(-)** a - b = ….	→ *a* et *b* sont donnés et *c* doit être trouvé
T$_2$	**(+)** a + …. = c	**(-)** a - …. = c	→ *a* (ou *b*) et *c* sont donnés and *b* (ou *a*) doit être trouvé
T$_3$	**(+)** …. + …. = c	**(-)** …. - …. = c	→ seulement *c* est donné et quelques/toutes les possibilités pour *a* et *b* doivent être trouvées (décomposition additive)

Figure 1 *– Premier niveau de spécification : les calculs numériques*

Nous distinguons également les symboles (+) et (–) selon si l'activité implique le calcul numérique de l'addition ou de la soustraction[6].

2. Les registres d'ostensifs (deuxième niveau)

Notre premier niveau d'analyse ne nous permettait pas de coder les différentes activités proposées dans les neuf classes de manière satisfaisante. Nous avons en effet constaté que certaines activités, pourtant très différentes, étaient codées identiquement. C'est pourquoi, afin de coder plus finement les activités récoltées, nous avons introduits un deuxième niveau à notre typologie : les registres d'ostensifs introduits par Bosch et Chevallard (1999).

Les objets ostensifs sont définis comme des objets manipulables qui ont une réalité perceptible. A l'inverse, les objets non ostensifs ne sont jamais « vus », « perçus », ni « entendus ». Ils ont besoin des objets ostensifs pour apparaître. Par exemple, la notion d'addition (objet non ostensif) a besoin d'objets ostensifs pour émerger (comme la manipulation des écritures de type $a + b = c$).

Les différents objets ostensifs peuvent être caractérisés en fonction du *registre* auquel ils appartiennent : « registre de l'oralité, registre de la trace (qui inclut graphismes et écritures), registre de la gestualité, etc… Lors de la réalisation d'une activité mathématique, différents objets ostensifs sont activés appartenant à divers registres. Il est rare de voir fonctionner un objet ostensif de façon autonome. Prenons l'exemple donné par Bosch et Chevallard (1999) sur la technique de comptage. Cet exemple fait appel à deux registres : celui du geste (montrer les objets à compter) et celui de l'oral (réciter le nom des nombres pointés). Dans les activités proposées aux élèves, le support choisi par l'enseignant met en avant un registre d'ostensifs dominant qui influence nécessairement le choix des techniques mises en œuvre par les élèves. Par exemple, proposer une activité où des jetons sont mis à la disposition des élèves leur permet de recourir à la technique de dénombrement, ce qui n'est pas le cas dans d'autres situations où les élèves doivent directement recourir au calcul. C'est pourquoi, pour chaque exercice ou problème répertorié dans les neuf classes, nous allons extraire le registre d'ostensifs dominant en fonction du type de support mis à disposition des élèves, qu'il soit matériel (matériel manipulable, fiche avec des quantités représentées, fiche avec des images,…) ou non (discours écrit ou oral). Pointer à quel registre appartient tel exercice ou problème est important, car comme le dit Conne (1987) « ce qui fait la distinction entre dénombrement, comptage et calcul, ce sont les objets que l'on traite (manipule) : des objets concrets, réels, pris pour eux-mêmes ou représentant une quantité […] » (p. 12). Selon Giroux (2007), proposer des supports variés aux élèves pour mettre en scène un même objet de savoir (« jeux de table », papier-crayon, environnement informatique, etc.) permet de varier les « accès » au savoir et par conséquent favorise l'acquisition du savoir par des formes

[6] Dans notre recherche, nous avons également regardé si l'inconnu était *a* (valeur initiale) ou *b* (Vergnaud 1981). Nous ne présentons toutefois pas ces résultats dans cet article étant donné qu'ils ont apportés peu d'éléments significatifs.

différentes d'utilité de la connaissance. De ce point de vue, il est important de varier les registres d'ostensifs impliqués dans les activités relativement à l'introduction de l'addition.

Les registres d'ostensifs ont, dès lors, une influence certaine dans la modélisation des relations en jeu dans les exercices et problèmes proposés aux élèves. En effet, la modélisation des relations en jeu peut être plus ou moins facilitée selon le registre d'ostensifs dominant dans l'activité proposée. Par exemple, poser un problème du type « Audrey a 3 billes, elle en gagne 4 contre Sylvia, combien en a-t-elle à la fin ? » ne représente pas le même niveau de modélisation que de résoudre 3 + 4 = …. sur une feuille de calculs. Le premier nécessite une organisation des éléments en jeu qui n'est pas requise dans le second, mais offre aussi une possibilité matérielle de mise en œuvre de techniques de dénombrement pour résoudre la tâche. Les techniques favorisées, accessibles ou pertinentes ne sont donc pas les mêmes dans les deux cas de figure. C'est pourquoi, il est nécessaire de prendre en compte la nature des ostensifs impliqués dans les activités proposées, afin de mettre en évidence les techniques qui y sont favorisées, accessibles ou pertinentes. Cela nous a conduit à distinguer, parmi 3 registres (gestualité, trace et oralité), 7 variantes à associer à chacun des types de tâches de notre typologie. Nous présentons dans ce qui suit la signification de ces 7 variantes :

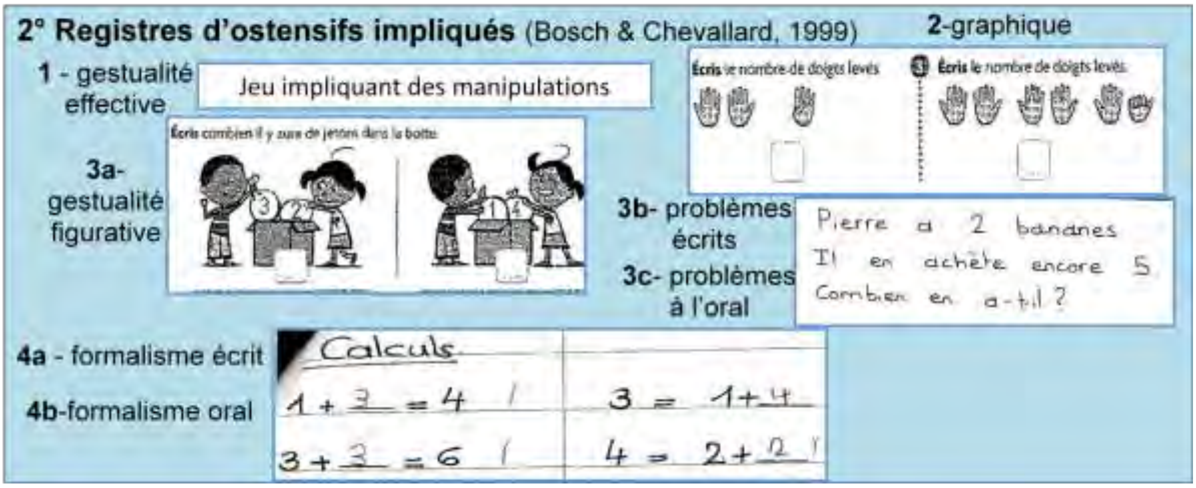


Figure 2 *– Deuxième niveau de spécification : les registres d'ostensifs*

Le premier registre d'ostensifs implique une activité qui met en jeu une situation effective impliquant les élèves. Cette activité permet une validation matérielle par manipulation (dénombrement). Les nombres sont représentés par des collections d'objets concrets représentant des quantités. Le second registre d'ostensifs représente une situation fictive où les manipulations ne sont plus possibles, mais le résultat peut être atteint par un dénombrement. Les nombres sont représentés par des collections d'objets figurés. Le registre d'ostensif 3a représente, à l'aide d'une image, une situation fictive. Les élèves doivent reconstruire mentalement les opérations à effectuer, mais l'image facilite cette organisation. Les manipulations ne sont plus possibles. Les nombres sont représentés par des écritures chiffrées ou des mots-nombres. Les registres d'ostensifs suivants (3b et 3c) correspondent à ce qu'on nomme communément « problèmes mathématiques » dans lesquels une situation fictive est décrite à l'écrit ou à l'oral. Comme dans la variante 3a, l'élève doit reconstruire mentalement les opérations à effectuer pour résoudre le problème. Cependant, ce cas est plus complexe, car il n'y a pas d'images facilitant la compréhension de la situation décrite. Pour finir, dans les activités impliquant les registres d'ostensifs 4a et 4b, il n'y a plus aucune référence à des situations, les élèves agissent uniquement sur des opérations numériques.

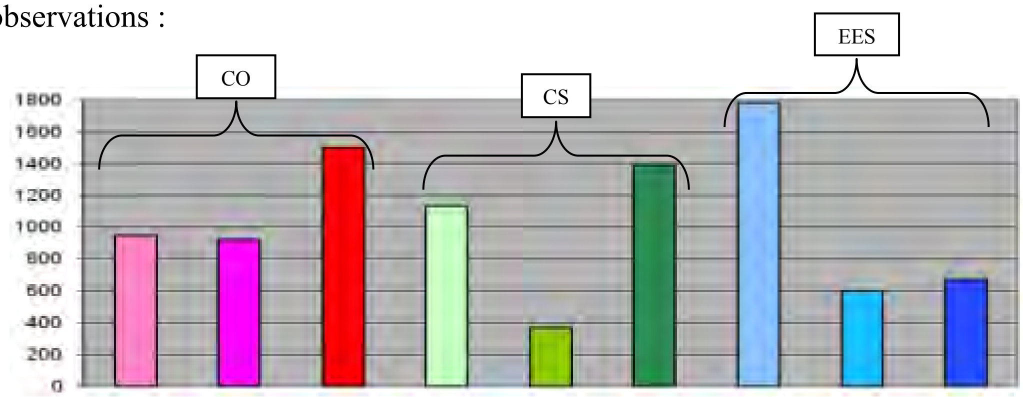
Ce second niveau de spécification nous informe sur la hiérarchie des techniques possibles pour résoudre les types de tâches proposés précédemment dans la figure 1.

Dans ce qui suit, nous présentons les analyses que nous avons développées sur la base de cette typologie de tâches et de registres d'ostensifs et qui nous renseignera sur les « mathématiques vécues » par les élèves des différents types d'institutions.

III. EXPERIMENTATION

Avec les neuf scenarios d'enseignement récoltés, nous avons pu établir une série de données correspondant au temps effectif d'enseignement de l'addition durant une année scolaire (OD), à la fréquence d'utilisation des moyens d'enseignement officiels (OD) et à l'analyse de l'ensemble des activités selon notre typologie de types de tâches (OM) et de registres d'ostensifs (OD). Ces différentes données ont permis de dégager les organisations mathématiques et didactiques, au niveau *régional*, des neuf enseignants relativement à l'introduction de l'addition.

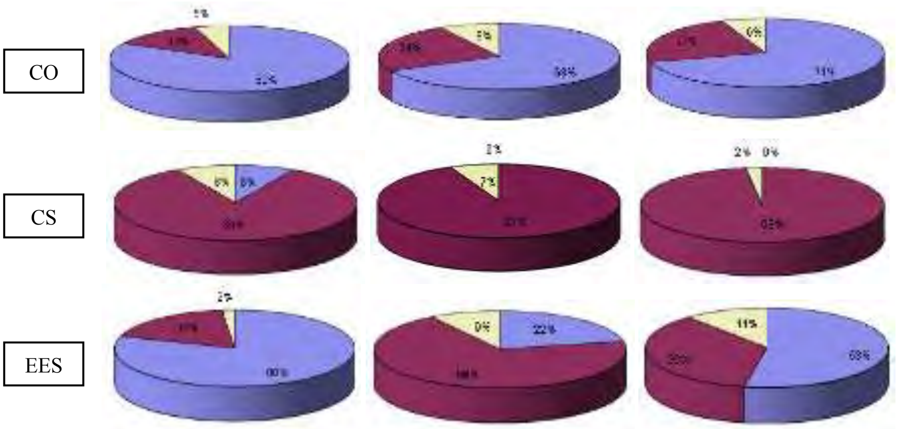
Ci-dessous nous présentons le graphique qui indique (en minutes), pour chacune des classes « ordinaires » (CO), spécialisées (CS) et les établissements d'enseignement spécialisé (EES), le temps d'enseignement attribué à l'introduction de l'addition durant l'année scolaire de nos observations :



***Graphique 1**. – Temps (en minutes) attribué à l'enseignement de l'addition durant une année scolaire dans neuf classes*

Premièrement, nous constatons une nette disparité entre les neuf classes. Toutefois, les valeurs sont plus homogènes dans l'institution CO. Ce constat peut être relié aux fortes contraintes de programme que subissent les enseignants « ordinaires ». Dans le cas des classes spécialisées, un des enseignants a consacré très peu de temps à l'introduction de l'addition. Dans les faits, cet enseignant a choisi d'interrompre son enseignement relatif à l'addition en cours d'année scolaire, car il trouvait cette notion trop complexe pour le seul élève de la classe qui participait à cet enseignement. Cette particularité est révélatrice d'une marge de manœuvre rendue possible du fait de certaines contraintes institutionnelles plus souples dans le secteur spécialisé, telle que la flexibilité dans le suivi du programme officiel. Concernant les deux autres classes, les valeurs montrent un léger surinvestissement de l'addition par rapport aux classes « ordinaires ». Ce constat n'est pas surprenant si l'on se fie aux diverses recherches qui montrent que le domaine numérique est souvent privilégié dans le secteur spécialisé par rapport au domaine géométrique ou des mesures, entraînant souvent un surinvestissement de ce domaine d'étude dans ces lieux. Concernant les trois établissements d'enseignement spécialisé, nous remarquons deux valeurs très basses et une plutôt haute (d'ailleurs la plus élevée du graphique). Dans cette dernière classe, l'enseignant consacre la quasi totalité de son « temps mathématique » annuel pour introduire l'addition. Par conséquent, sont retirés de son enseignement les autres objets de savoir figurant dans le curriculum officiel genevois. A l'inverse, les enseignants des deux autres classes ont investi l'ensemble des modules au programme, c'est pourquoi le temps attribué à l'enseignement de l'addition est plus réduit. Toutefois, nous remarquons que les valeurs dans ces deux classes sont plus basses que dans les classes spécialisées. Nous expliquons ce constat par le fait que les établissements d'enseignement spécialisés offrent moins de temps d'enseignement de façon générale et par conséquent également moins de temps d'enseignement en mathématiques. Ce constat a d'ailleurs été vérifié par diverses études (Pelgrims-Ducrey 1997, 2001, 2006, Maréchal 2004) qui indiquent clairement que s'il n'y a pas de différence significative entre les classes « ordinaires » et spécialisées concernant le temps alloué aux activités académiques et éducatives, il n'en va pas de même dans les établissements d'enseignement spécialisés.

Le graphique qui suit se focalise sur la fréquence d'utilisation des moyens d'enseignement officiels par les enseignants des neuf classes :



..... Utilisation des moyens d'enseignement officiels
..... Utilisation d'autres ressources
..... Leçon commune (faisant partie du dispositif de recherche)

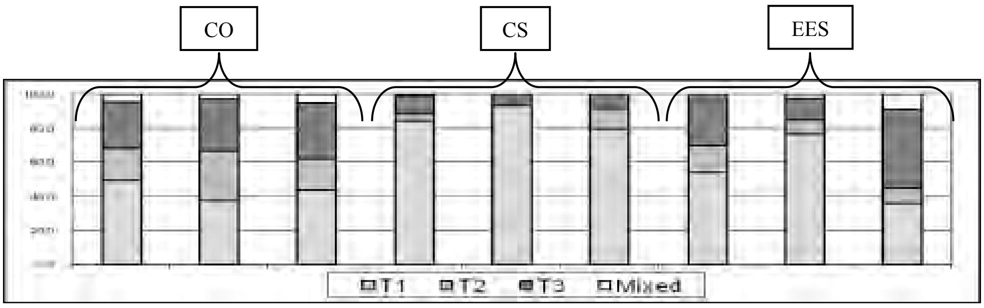
Graphique 2 *– Fréquence d'utilisation des moyens d'enseignement officiels par les enseignants des neuf classes*

Dans les trois classes « ordinaires » nous remarquons des pratiques similaires quant à l'emploi des moyens d'enseignement officiels avec une tendance évidente à les utiliser massivement. Ce constat n'est pas surprenant si l'on considère la forte contrainte que représentent ces documents pour les enseignants de ce type d'institutions. Au contraire, les enseignants des trois classes spécialisées utilisent peu, voire pas, ces moyens d'enseignement. Dans les faits, nous remarquons qu'ils n'utilisent pas nécessairement un manuel de remplacement, mais « piochent » plutôt dans une réserve d'activités accumulée au fil des années par leur soin ou par des collègues. En ne suivant pas un manuel ou des moyens d'enseignement, ils sont, d'une certaine manière, davantage engagés dans le processus de transposition didactique (Chevallard 1991) que ne le sont les enseignants « ordinaires ». Ce travail est normalement pris en charge pas la *noosphère* car il demande une réflexion sur les contenus d'un niveau supérieur. Ces enseignants doivent alors construire une *technologie*[7] *didactique* leur permettant de justifier leurs choix d'activités (tirées d'autres ressources) et la manière de les articuler. Nous pensons en effet que si les enseignants ne construisent pas de *technologies didactiques* « sérieuses », ils peuvent être amenés à proposer des activités inadéquates (par exemple bien plus complexes que celles recommandées par le plan d'étude officiel, ou inversement). Quant aux trois établissements d'enseignement spécialisé, il n'y a pas ici d'homogénéité intra institution. Nous remarquons même trois cas de figure bien distincts. Cette caractéristique peut être mise en lien avec la liberté d'emploi des moyens

[7] Dans la TAD, la *technologie* fait partie du second bloc défini par Chevallard, le bloc technologico-théorique qui relève d'un discours raisonné sur la pratique.

d’enseignement officiels. Cependant, cette liberté n’explique pas la différence de choix entre les deux types d’institutions spécialisées (CS et EES).

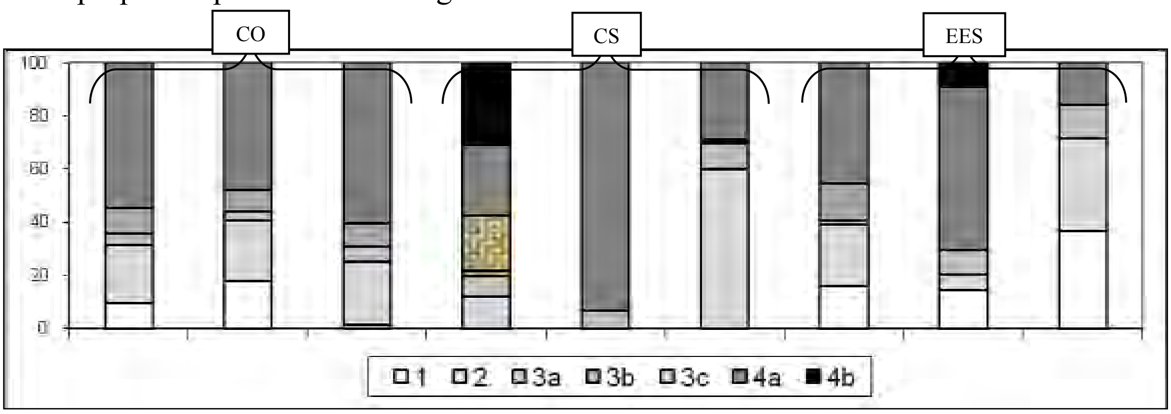
La suite de nos analyses s’intéresse à la distribution des types de tâches T_1, T_2 et T_3 que nous avons décrit précédemment dans la figure 1[8].



***Graphique 3** – Distribution (en %) des types de tâches T_{1+}, T_{2+} et T_{3+} durant une année scolaire dans les neuf classes*[9]

Une nouvelle fois ce graphique met en évidence une homogénéité des données au sein des trois classes « ordinaires ». Nous observons une distribution plus ou moins équivalente entre les trois types de tâches, avec toutefois une majorité d’activités du type T_1, puis T_3 et T_2. Dans les classes spécialisées, une homogénéité est également observée. Toutefois, nous remarquons, dans les trois classes, un surinvestissement du type de tâches T_1 au détriment des deux autres. Ce résultat doit, en partie au moins, être dû au fait que les enseignants n’emploient pas les moyens d’enseignement officiels, ni d’autres manuels de remplacement. Dans l’institution EES, aucune homogénéité n’est constatée entre les trois classes. La première se rapproche du fonctionnement des classes « ordinaires », la seconde des classes spécialisées et la dernière a un fonctionnement plutôt original par rapport à l’ensemble des classes. C’est la seule classe où le type de tâches T_3 (décomposition additive) est le plus représenté.

Pour terminer, nous regardons la distribution des registres d’ostensifs impliqués dans les activités proposées par les neuf enseignants à leurs élèves durant l’année de nos observations.



***Graphique 4** – Distribution (en %) des registres d’ostensifs durant une année scolaire dans les neuf classes*

Comme pour les autres graphiques, nous constatons une homogénéité au sein de l’institution CO que nous attribuons à l’utilisation des moyens d’enseignement officiels et à la forte

[8] Pour rappel : $T_1 = a + b = \dots$; $T_2 = a + \dots = c$; $T_3 = \dots + \dots = c$

[9] Nous ne considérons pas ici les types de tâches soustractifs étant donné que durant l’année d’introduction de l’addition aucune activité soustractive n’est proposée dans les moyens d’enseignement officiels. De plus, nous avons constaté que seules quelques rares classes du secteur spécialisé en ont proposés durant l’année de notre recueil de données et de manière non significative.

contrainte de programme. Nous notons une certaine variété dans les registres d'ostensifs impliqués dans les activités proposées avec toutefois une majorité d'activités sur des opérations numériques impliquant exclusivement des écritures chiffrées (4a) que des activités permettant la technique de dénombrement (1 et 2). Les techniques de calcul, voir de comptage, sont donc favorisées, ce qui rejoint l'idée qu'en fin de première primaire les stratégies de dénombrement doivent être dépassées. Dans les classes spécialisées, une certaine homogénéité peut être pointée étant donné que les trois enseignants choisissent d'introduire l'addition avec un grand nombre d'activités « formalisées » et le registre d'ostensifs 1 « gestualité effective » (permettant de dénombrer des collections d'objets concrets) est absent. Dans les établissements d'enseignement spécialisés, nous remarquons comme précédemment trois différents scénarios.

IV. CONCLUSION

Nos différentes analyses montrent que les différentes contraintes qui pèsent sur les trois types d'institutions ne sont pas les mêmes et engendrent l'activation de différentes praxéologies. Les enseignants « ordinaires » sont confrontés à de fortes contraintes institutionnelles comme l'obligation d'emploi des moyens d'enseignement officiels et le suivi « strict » du programme officiel. Les résultats montrent ainsi des organisations didactiques et mathématiques relativement proches pour les trois classes avec une large variété de types de tâches et de registres d'ostensifs relativement à l'addition.

Dans les classes spécialisées, les contraintes institutionnelles sont nombreuses[10] et accompagnées de contraintes plus « locales » propres à chaque classe telles que le comportement des élèves, l'hétérogénéité des classes, etc. Dès lors, les praxéologies activées dans cette institution sont plus ou moins homogènes avec, en particulier, un accent massif sur les activités « formalisées » impliquant quasi essentiellement le type de tâche T_1 (a et b sont donnés et c doit être trouvé). Cette pratique est en partie due au fait que les enseignants spécialisés n'utilisent pas de manuel de référence. Ainsi, ils proposent des activités « valorisées » par les acteurs de l'éducation, voire de la société plus large, en surinvestissent le domaine numérique au détriment d'autres domaines tels que la géométrie et la mesure. De plus, le fait que les classes spécialisées soient localisées dans le même bâtiment que les classes « ordinaires » (ce qui n'est pas le cas pour les établissements d'enseignement spécialisés) occasionne un certain rapport à la « norme « ordinaire » » et engendre une certaine « pression de réintégration » chez les enseignants spécialisés qui influence nécessairement les choix des praxéologies activées. Dans les faits, nous remarquons une préférence pour les types de tâches T_1 et le registre d'ostensifs 4a avec un grand nombre d'activités « formalisées ». Lors d'un entretien que nous avons mené auprès des trois enseignants spécialisés, l'un d'entre eux a précisé proposer un grand nombre d'activités « formalisées » afin de préparer ses élèves à une possible réintégration dans le cursus « ordinaire ».

Quant aux établissements d'enseignement spécialisés, le fait qu'ils obtiennent des résultats hétérogènes peut être interprété par la grande autonomie dont disposent les enseignants de ce type d'institutions. Ils ont en effet davantage de libertés qu'ils n'ont de contraintes. De ce fait, ils peuvent davantage se focaliser sur des contraintes plus « locales » afin d'adapter leur praxéologies en fonction de leur contexte particulier qui se traduit par une absence d'homogénéité.

[10] Pour une analyse plus détaillée des contraintes, se référer à Maréchal (2010).

Notre étude montre ainsi que les différences dans les pratiques enseignantes dans les trois types d'institutions peuvent, pour certains aspects au moins, être expliquées par les différentes contraintes qui y pèsent.

L'activation de praxéologies dépend donc des conditions et contraintes institutionnelles. Il ressort également de cette recherche que l'écologie du didactique dans le type d'institutions « classe spécialisée » n'est pas optimal et donne lieu à des scénarios d'enseignement répétitifs et appauvris ne coïncidant pas avec le plan d'étude officiel. Ainsi, les enseignants qui participent activement dans une étape supplémentaire du processus de transposition ne semblent pas suffisamment outillés « didactiquement » pour adapter leur pratique de manière optimale.

Pour conclure au regard de ces résultats, il semble nécessaire d'engager une réflexion sur les contenus mathématiques qui figurent au programme officiel genevois avec les enseignants du secteur spécialisé qui sont amenés à ne pas toujours utiliser les moyens d'enseignement officiel (ou d'autres de remplacement). Cette réflexion peut même être entamée dans le cadre de la formation des enseignants spécialisés d'autant plus qu'une Maîtrise universitaire spécialisée en pédagogie spécialisée, orientation enseignement spécialisé vient de s'ouvrir à l'Université de Genève.

REFERENCES

Bosch M., Chevallard Y. (1999) La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19(1), 77–-23.

Cherel C., Giroux J. (2002) Intégration d'élèves en difficulté : une problématique didactique. *Revue Instantanés Mathématiques* 39, 37-48.

Chevallard Y. (1989) On Didactic Transposition Theory : Some Introductory Notes. Communication à l'*International Symposium on Selected Domains of Research and Development in Mathematics Education* (pp. 51-62). Bratislava.

Chevallard Y. (1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chevallard Y. (2002). Organiser l'étude. 3. Ecologie & régulation. In Dorier J.-L., Artaud M., Artigue M., Berthelot R., Floris R. (Eds.) (pp. 41-56) *Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques*. Grenoble : La Pensée sauvage.

Conne F. (1987). Entre comptage et calcul. *Math Ecole* 130, 11-23.

Conne F. (1999) Pouvons-nous parler d'une didactique des mathématiques de l'enseignement spécialisé ? In Bailleul M. (Ed.) (vol. 2, pp. 125-151) *Actes de la 10e école d'été de didactique des mathématiques*. IUFM de Caen.

Conne F. (2003) Interactions de connaissances et investissement de savoir dans l'enseignement mathématiques en institutions et classes spécialisées [version électronique]. *Education et francophonie* 31(2), 82-102.

Conne F. (2005) Comprendre la théorie est en attraper le geste et pouvoir continuer. *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques (année 2003)* (pp. 101-108). Paris VII : Cahier Didirem.

Doudin P.-A., Lafortune L. (2006) Une vision de l'aide aux élèves en difficulté entre inclusion et exclusion. In Doudin P.- A., Lafortune L. (Eds.) (pp. 45-74) *Intervenir auprès d'élèves ayant des besoins particuliers. Quelle formation à l'enseignement ?* Québec : Presse de l'Université du Québec.

Ducrey F., Pelgrims Ducrey G. (1997) Equivalence et différenciation des conditions d'apprentissage dans les classes spéciales : analyse du temps d'enseignement officiel. *Education et Recherche* 19(1), 101-121.

Jaquet F. (2000) Moyens d'enseignement de mathématiques de Suisse romande : défis et nécessité. *Math Ecole* 190, 1-4.

Marechal C. (2004) *Etude descriptive des conditions d'enseignement en institutions spécialisées pour des élèves aux « troubles de la personnalité et de l'apprentissage » : Quel impact sur la mémoire didactique des élèves ?* Mémoire de licence, FPSE, Genève.

Marechal C. (2010) *Effet des contraintes institutionnelles sur les pratiques enseignantes dans l'enseignement spécialisé. Une analyse didactique à partir du cas de l'introduction à l'addition.* Thèse de l'Université de Genève.

Pelgrims Ducrey G. (2001) Comparaison des processus d'enseignement et conditions d'apprentissage en classes ordinaire et spécialisée: des prévisions aux contraintes. *Revue Française de Pédagogie* 134, 147-166.

Pelgrims G. (2006) *Intention d'apprendre, peur de l'échec et persévérance des élèves en classes spécialisées : des composantes générales aux dimensions situationnelles de la motivation à apprendre.* Thèse de l'université de Genève.

Ravel L. (2003) *Des programmes à la classe : étude de la transposition didactique interne, exemple de l'arithmétique en Terminale S spécialité mathématiques*. Thèse de l'université Joseph Fourier – Grenoble I.

Robert A., Rogalski J. (2002) Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies* 2(4), 505-528.

Vergnaud G. (1981) *L'enfant, la mathématique et la réalité.* Berne : Editions Peter Lang.

QUELLES INTERVENTIONS DIDACTIQUES UN ENSEIGNANT DU PRIMAIRE MET-IL EN PLACE POUR ENSEIGNER LES PROBABILITÉS À DES ÉLÈVES EN DIFFICULTÉ AU SEIN D'UNE CLASSE ORDINAIRE ?

Vincent MARTIN*

Résumé – Au Québec, en réponse à des injonctions ministérielles, les enseignants doivent adapter leur enseignement aux besoins des élèves en difficulté, ce qui s'opère différemment dans les classes spéciales et ordinaires. À travers le concept d'intervention didactique et le contexte d'étude des probabilités, nous cherchons à décrire et comprendre les interventions didactiques mises en place par des enseignants du primaire pour l'enseignement des mathématiques à des élèves en difficulté scolarisés en classe ordinaire. La collecte de données en cours permettra de présenter des résultats préliminaires quant aux interventions didactiques mises en œuvres par des enseignants à qui a été proposée une ressource didactique liée aux probabilités afin qu'ils conçoivent et mettent en œuvre un projet didactique adapté à leurs élèves.

Mots-clefs : Enseignement des probabilités, intervention didactique, élèves en difficulté, classe ordinaire, école primaire

Abstract – In Québec, following ministerial injunctions, teachers have to adapt their teaching practices to student's needs, which unfolds differently for special and ordinary classes. Through the concept of didactical intervention, we seek to describe and understand didactical interventions used by elementary teachers to teach mathematics to students with learning difficulties attending ordinary classes. The ongoing data collection will allow the presentation of preliminary results related to didactical interventions used by teachers which were provided with a didactical resource developed for the teaching of probabilities in order for them to conceive and to implement a didactical project adapted to their students.

Keywords: Probability teaching, didactical intervention, students with difficulties, ordinary classroom, elementary school

Depuis quelques années, l'enseignement des mathématiques et ses spécificités auprès des élèves en difficulté font l'objet d'une attention particulière dans les travaux de recherche en didactique des mathématiques (Roiné, en travail). S'inscrivant dans ce courant de recherche, notre projet doctoral de recherche porte sur une problématique précise liée à l'enseignement des mathématiques aux élèves en difficulté au sein de la classe ordinaire au primaire. Ainsi, nous abordons d'abord la question de l'adaptation de l'enseignement, pour ensuite traiter de l'enseignement des mathématiques dans la classe spéciale. Puis, nous décrivons brièvement le contexte d'intégration scolaire et sociale prévalant présentement au Québec et enfin, nous intéressons à l'enseignement des mathématiques au sein de la classe ordinaire. Finalement, nous formulons un problème de recherche et une question générale de recherche.

I. L'ADAPTATION DE L'ENSEIGNEMENT AU QUÉBEC

Au Québec, dans la foulée d'une réforme de l'éducation qui s'est entamée au tournant des années 2000, l'adaptation de l'enseignement est devenue une des voies privilégiées par le ministère pour atteindre la réussite pour tous, et ce, autant pour les niveaux d'enseignement primaire que secondaire. Cette section vise donc à exposer d'une part certains éléments du discours ministériel qui sous-tendent cette perspective d'adaptation de l'enseignement et d'autre part la position de chercheurs en didactique des mathématiques en lien avec cette perspective d'adaptation de l'enseignement.et

* Université de Sherbrooke – Québec – vincent.martin@usherbrooke.ca

© Martin V. (2012). Quelles interventions didactiques un enseignant du primaire met-il en place pour enseigner les probabilités à des élèves en difficulté intégrés au sein d'une classe ordinaire ? In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT8, pp. 1114–1126). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

1. *Le discours ministériel québécois*

Au Québec, des injonctions ministérielles demandant aux enseignants d'adapter leur enseignement aux caractéristiques et aux besoins de leurs élèves se dégagent de différents documents ministériels (Gouvernement du Québec 1999, 2001a ; 2001b ; 2006a, 2006b, 2007 ; 2009). Parmi ceux-ci, la Politique de l'adaptation scolaire (Gouvernement du Québec 1999), qui vise à recadrer les grandes orientations de la réforme de l'éducation du Québec au regard des besoins particuliers des élèves handicapés ou en difficulté d'adaptation ou d'apprentissage (EHDAA), présente l'idée que les services éducatifs offerts par la commission scolaire et par l'établissement scolaire, ainsi que les interventions de tous les acteurs de l'éducation doivent être adaptés aux besoins de ces élèves.

Par ailleurs, dans le Programme de formation de l'équipe québécoise (PFEQ) du primaire (Gouvernement du Québec 2001a), il est dit que la mission de l'école s'articule autour de trois axes, soient instruire, socialiser et qualifier les élèves. La présentation de ce dernier axe de la mission de l'école québécoise – qualifier – soulève l'idée d'adaptation de l'enseignement aux besoins des élèves :

> L'école a le devoir de rendre possible la réussite scolaire de tous les élèves et de faciliter leur intégration sociale et professionnelle, quelle que soit la voie qu'ils choisiront au terme de leur formation. À cette fin, le ministère de l'Éducation définit le curriculum national de base. Toutefois, les établissements scolaires ont la responsabilité d'offrir à chaque élève un environnement éducatif adapté à ses intérêts, à ses aptitudes et à ses besoins en différenciant la pédagogie et en offrant une plus grande diversification des parcours scolaires. Il incombe à chaque établissement, dans le cadre de son projet éducatif, de préciser ses propres orientations et les mesures qu'il entend prendre pour mettre en œuvre et enrichir le Programme de formation, de façon à tenir compte des caractéristiques particulières des élèves et du principe de l'égalité des chances pour tous. (Ibid., p. 3)

Il ressort donc de ce passage que les caractéristiques particulières des élèves, ainsi que leurs intérêts, aptitudes et besoins particuliers, doivent être pris en considération par les établissements scolaires, afin d'offrir un environnement éducatif et une mise en œuvre des programmes adaptés aux élèves qui les fréquentent. De plus, il est mentionné que cette adaptation passerait entre autres par une différenciation pédagogique. Cette dernière idée est également transmise dans un document lié au niveau d'enseignement secondaire, le Cadre de référence pour l'évaluation des apprentissages au secondaire (Gouvernement du Québec, 2006a), qui souligne la nature nécessaire de l'adaptation de l'enseignement et de l'évaluation aux besoins de l'élève, et ce, dans une perspective de différenciation pédagogique.

De surcroît, l'idée d'adaptation de l'enseignement est également présente dans les grandes orientations de la formation initiale des enseignantes et enseignants québécois. En effet, dans le référentiel de compétences professionnelles de la profession enseignante (Gouvernement du Québec 2001b), l'adaptation de l'enseignement est vue comme une des compétences à développer par l'enseignant. Ainsi, il est donc attendu qu'à terme, l'enseignant soit en mesure d'« adapter ses interventions aux besoins et aux caractéristiques des élèves présentant des difficultés d'apprentissage, d'adaptation ou un handicap » (Ibid., p. 103).

En bref, plusieurs documents ministériels publiés à la suite du mouvement de réforme de l'éducation au Québec ont pointé l'importance, voire la nécessité, de l'adaptation de l'enseignement aux élèves à qui celui-ci est dispensé, qu'ils soient en difficulté ou non.

2. *La position de chercheurs*

En lien avec l'adaptation de l'enseignement aux élèves en difficulté, des chercheurs en didactique des mathématiques avancent des réflexions plus spécifiquement au regard de l'enseignement des mathématiques. D'ailleurs, Giroux (2007) décrit et résume cette injonction ministérielle relative à l'adaptation de l'enseignement lorsqu'elle dresse un portrait du contexte scolaire québécois :

> Les enseignants qui interviennent auprès des élèves en difficulté d'apprentissage, que ce soit en classe ordinaire (intégration scolaire) ou en classe spéciale, sont appelés, selon les exigences ministérielles, à adapter leurs interventions aux besoins et aux caractéristiques des élèves présentant des difficultés. (Ibid., p. 3)

En faisant référence à la réflexion de Giroux (2007), Roiné (en travail) parle pour sa part d'une « logique de l'adaptation » qui est à l'œuvre dans l'enseignement aux élèves en difficulté. Il dit voir cette logique comme une « intentionnalité générique » des enseignants responsables des élèves en difficulté à adapter leurs interventions aux besoins et aux caractéristiques de leurs élèves. De plus, il ajoute

> Cette logique s'inscrit dans une culture propre à l'adaptation scolaire (mais elle tend à dépasser les seules frontières de ce champ d'intervention) s'appuyant sur un ensemble de discours, d'injonctions, de prescriptions, mais aussi de dispositifs, de techniques et de procédures rendant légitime et nécessaire ce type de projet d'enseignement pour les élèves hors normes […]. (Ibid., p. 1)

Ces deux auteurs mettent en lumière le fait que cette demande d'adaptation de l'enseignement aux besoins des élèves en difficulté vise autant l'enseignement dans la classe ordinaire que celui dispensé dans la classe spéciale. De plus, ils soulignent que cette logique de l'adaptation ne se traduit pas réellement par une réflexion didactique. D'une part, Giroux (2007, p. 4) affirme qu' « […] il faut bien admettre, qu'officiellement du moins, la référence aux contenus d'enseignement dans la réflexion sur l'intervention adaptée est minimale ». D'autre part, Roiné (en travail) soutient, en abondant dans le sens de Giroux (2007), que :

> La « logique de l'adaptation » a pour caractéristique majeure une forme de « cécité didactique » (Roiné 2009) où la prise en compte de la spécificité du contenu d'enseignement et des déterminants de la situation didactique devient seconde au regard de la volonté de « combler le déficit » repéré chez chacun des élèves « en difficulté ». (Ibid., p. 1)

Tout en pointant le manque de regard didactique dont est empreinte cette vision d'adaptation de l'enseignement, Giroux (2007) décrit le fait que celle-ci s'opère bien souvent autour d'orientations psychopédagogiques, essentiellement tournées vers la gestion de classe. Pour ce faire, l'auteure mentionne la prépondérance de ce thème de la gestion de classe au cours des dernières années dans les formations des enseignants et dans certaines publications destinées aux enseignants (Ibid.).

II. L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES DANS LA CLASSE SPÉCIALE

Pourtant, de nombreuses recherches ont exploré les conditions didactiques mises en place par l'enseignant pour l'enseignement des mathématiques aux élèves en difficulté en mathématiques dans la classe spéciale au primaire. Celles-ci ont observé différentes particularités de l'enseignement des mathématiques dans ces milieux où se retrouvent des élèves reconnus en difficulté par le système scolaire, qui les a placés dans un contexte de classe spéciale en fonction de critères comme l'échec répété ou l'accumulation de certains retards scolaires. Dans une certaine mesure, ces recherches peuvent nous renseigner sur les impacts qu'a de manière générale cette logique de l'adaptation de l'enseignement sur l'enseignement des mathématiques aux élèves en difficulté, notamment dans le contexte de la classe spéciale. Ces travaux se divisent en deux voies distinctes, selon qu'elles ont porté un regard spécifique sur la classe spéciale ou qu'elles ont comparé l'enseignement des mathématiques dans la classe spéciale et dans la classe ordinaire.

D'un côté, des recherches ont identifié des conditions didactiques mises en place par l'enseignant pour l'enseignement des mathématiques aux élèves en difficulté dans la classe spéciale, et ce, en portant un regard spécifique sur ce contexte. Ces travaux ont parfois scruté des classes spéciales du Québec (Giroux 2004 ; Lessard 2011 ; René de Cotret et Fiola 2006), ou encore en France des classes situées en zones d'éducation prioritaire (ZEP) (Butlen, Charles-Pezard et Masselot 2009), dans des sections d'enseignement général et professionnel adapté (SEGPA) (Salin 2006a, 2006b ; Roiné 2009) ou dans le contexte d'une classe de formation par alternance (cours-stage en entreprise) (Minassian et Munoz 2009).

D'un autre côté, des recherches ont étudié les conditions didactiques mises en place par l'enseignant pour l'enseignement des mathématiques aux élèves en difficulté dans la classe spéciale à travers une comparaison avec l'enseignement des mathématiques dispensé dans la classe ordinaire. De tels travaux ont permis des comparaisons de l'enseignement des mathématiques dans des classes spéciales et dans des classes ordinaires en Europe francophone, notamment en France (Mercier 1995) et en Suisse romande (Favre 1997, 1999 ; Maréchal 2010), ainsi qu'au Québec (Cherel 2005 ; Giroux et René de Cotret 2001 ; René de Cotret et Giroux 2003).

Cette multitude de recherches en didactique des mathématiques s'est interrogée sur les interactions didactiques propres à l'enseignement des mathématiques aux élèves en difficulté au sein de la classe spéciale. Salin (2006a) souligne que ces travaux ont permis de mettre en évidence différents phénomènes didactiques spécifiques à l'enseignement de cette discipline auprès de ce type d'élèves. En effet, ces différentes recherches, qui ont étudié la classe spéciale isolément ou en comparaison de la classe ordinaire, ont cherché à mieux comprendre l'enseignement des mathématiques aux élèves en difficulté dans la classe spéciale et ce faisant, elles ont identifié certains phénomènes d'enseignement.

La mise en lumière de ces phénomènes d'enseignement a entre autres permis de montrer que les conditions didactiques mises en place par l'enseignant dans la classe spéciale et dans la classe ordinaire pour l'enseignement des mathématiques aux élèves en difficulté sont singulièrement différentes. Ainsi, il apparaît que par rapport à la classe ordinaire, la classe spéciale présente un contexte d'enseignement des mathématiques où le temps didactique avance plus lentement, notamment en raison de la nature des savoirs véhiculés dans la classe et de la place qu'ils occupent. En effet, les savoirs sont surinvestis ou désinvestis suivant leur statut, ils sont souvent algorithmisés et exposés avec « économie », ils sont généralement morcelés et présentés de manière déconnectée, ainsi qu'ils font rarement l'objet d'une institutionnalisation. De plus, l'avancement plus lent du temps didactique au sein de la classe spéciale semble également influencé par une gestion à chaud des erreurs et de l'échec, qui vise à assurer la compréhension de tous, par certains glissements liés à des dispositifs d'aide, par la grande part commune ou publique du travail des élèves, par une diminution des exigences et une simplification des situations, ainsi que par le recours fréquent au surenseignement et à la remédiation.

Ces conditions didactiques caractérisant l'enseignement des mathématiques dans la classe spéciale peuvent selon nous être reliées à l'injonction ministérielle d'adaptation de l'enseignement aux besoins des élèves. Giroux (2007, p. 6) juge que ces phénomènes d'enseignement « témoignent de la manière dont les contenus d'enseignement sont affectés, transformés par des intentions d'enseignement adaptées à une catégorie d'élèves pour lesquels l'enseignement régulier, avec ses méthodes, a échoué ». Allant dans ce sens, nous croyons que l'enseignant de la classe spéciale, qui se trouve à enseigner les mathématiques à un groupe homogène dans la mesure où il est composé d'élèves qui ont été écartés du système régulier, choisit de dispenser un enseignement des mathématiques différent à bien des égards de celui dispensé dans la classe ordinaire et qu'il tente d'adapter aux besoins des élèves de sa classe. Ces phénomènes d'enseignement associés à l'enseignement des mathématiques en classe spéciale constitueraient-ils, dans une certaine mesure, des impacts directs ou indirects de cette logique de l'adaptation de l'enseignement sur l'enseignement des mathématiques dans un tel contexte ?

III. L'INTÉGRATION SCOLAIRE ET SOCIALE DES ÉLÈVES EN DIFFICULTÉ

Cependant, ces nombreuses recherches qui ont porté sur l'enseignement des mathématiques dans la classe spéciale n'ont fait l'étude que d'un des deux types de contextes dans lesquels se fait la scolarisation des élèves en difficulté au primaire. En effet, au sein du système scolaire québécois prévaut une tendance d'intégration des élèves en difficulté (que ce soit comme partie constituante de la catégorie des EHDAA) dans les classes ordinaires. Celle-ci est à la fois soutenue par le Conseil supérieur de l'éducation (CSE) (1996, 2003) et mise en place par le ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport (MELS) (Gouvernement du Québec 1999, 2007). Elle est le produit de plusieurs réflexions survenues depuis environ 60 ans à différents niveaux en lien avec la scolarisation des EHDAA et des catégories d'élèves que cette appellation englobe.

Ainsi, il n'y a qu'une minorité des élèves en difficulté qui est scolarisée dans le contexte de la classe spéciale au primaire au Québec, puisque la majorité de ces élèves se trouve scolarisée dans le contexte de la classe ordinaire. En effet, dans un document rapportant des Indicateurs nationaux des plans stratégiques et présentant des statistiques plus récentes (Gouvernement du Québec 2010), le MELS met en lumière le fait que 81,6 % des EHDAA (62 545 sur 76 662) étaient intégrés en classe ordinaire au primaire pour l'année scolaire 2009-2010. Ceci montre qu'aujourd'hui, la plupart des élèves en difficulté, qui représentent la plus large part des EHDAA, sont scolarisés dans les classes ordinaires au primaire. Cette réalité d'intégration scolaire et sociale des élèves en difficulté nous amène donc à considérer plus en détail les recherches en didactique des mathématiques qui ont porté sur l'enseignement des mathématiques aux élèves en difficulté, mais au sein de la classe ordinaire.

IV. L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES DANS LA CLASSE ORDINAIRE

Malgré la prévalence du contexte de la classe ordinaire pour la scolarisation des élèves en difficulté au primaire, l'enseignement des mathématiques dispensé à ces derniers dans ce contexte n'a pas été exploré par un grand nombre de recherches. Celles-ci se divisent en différentes catégories selon leur objet d'étude. Certaines recherches étudient le contexte de la classe ordinaire, mais ne portent pas un regard spécifique sur les conditions didactiques mises en place par l'enseignant et proposent plutôt un dispositif didactique, et ce, avec ou sans la collaboration active de l'enseignant (par exemple Blouin et Lemoyne 2002 ; Lemoyne et Bisaillon 2006 ; Martin 2010). Ces recherches choisissent généralement l'angle d'entrée de l'apprentissage des élèves et ne considèrent pas directement les conditions didactiques mises en place par l'enseignant. Enfin, les conditions didactiques mises en place au sein de la classe ordinaire pour l'enseignement des mathématiques sont étudiées par quelques recherches (par exemple Assude, Mercier et Sensevy 2007 ; Roditi 2001, 2003). La plupart du temps, celles-ci ne portent pas spécifiquement sur les élèves en difficulté scolarisés dans ce contexte, mais considèrent plutôt l'enseignement des mathématiques dispensé à l'ensemble des élèves de la classe ordinaire.

Seulement un petit nombre de travaux de recherche en didactique des mathématiques ont porté un regard spécifique sur les élèves en difficulté au sein de la classe ordinaire et sur l'enseignement des mathématiques qui leur est dispensé.

D'une part, les travaux de Sarrazy et Roiné (2006) ont porté sur la place des élèves faibles dans les interactions didactiques survenant durant l'enseignement de l'arithmétique avec des élèves de 9 ou 10 ans au sein de classes ordinaires du primaire en France. Il en ressort que les enseignants semblent avoir tendance à solliciter une participation didactiquement fonctionnelle des élèves dans les interactions didactiques. Dans ce sens, les bons élèves seraient davantage sollicités en fin de séquence et moins en début de leçon, car ils dévoilent trop tôt les enjeux ; au contraire, les élèves faibles seraient peu sollicités car ils brouillent les pistes écartent l'enseignant de sa route ; alors qu'avec les élèves moyens, il est possible de contrôler le déroulement en dosant les interventions et les questions de recadrage permettant de maintenir le cap. Ainsi, la participation des élèves serait sollicitée par les enseignants sous l'influence d'une pression didactique, c'est-à-dire le devoir de faire avancer la leçon. Loin d'être insensibles à la dimension éthique de leur action, les enseignants seraient donc surtout portés à prendre en compte leur mission didactique consistant à faire avancer les connaissances pour le plus grand nombre d'élèves dans un temps nécessairement limité dans la gestion de la participation des élèves dans une discussion de groupe.

D'autre part, les travaux d'une équipe de didacticiens des mathématiques du Québec (Squalli, Mary et Schmidt 2007 ; Schmidt, Mary et Squalli 2009) se sont intéressés, dans une perspective didactique, aux conditions favorables à l'enseignement des mathématiques à des élèves en difficulté en classe ordinaire au primaire. Leurs travaux ont permis d'étudier la pratique exemplaire d'une enseignante d'exception – Calypso – dans l'enseignement des mathématiques, plus particulièrement au regard des conditions favorables qu'elle met en place pour l'apprentissage des élèves en difficulté cheminant dans sa classe. Ces conditions favorables se divisent selon qu'elles sont spécifiquement destinées aux élèves en difficulté (notamment en invitant les élèves en difficulté à expliquer leur compréhension, en les interpellant et en les intégrant au débat) ou qu'elles sont plutôt dédiées à l'ensemble des élèves (notamment en proposant des tâches d'un potentiel riche en constructions mathématiques et en pratiquant une pédagogie du problème plutôt qu'une pédagogie de la réponse).

Ces réflexions associées aux conditions didactiques mises en place pour l'enseignement des mathématiques aux élèves en difficulté en classe ordinaire doivent prendre en compte les spécificités de ce contexte, qui regroupe un ensemble diversifié d'élèves : des élèves en difficulté, mais aussi des élèves moyens, voire doués. Devant conjuguer avec l'injonction ministérielle d'adaptation de l'enseignement aux besoins des élèves de sa classe comme l'enseignement de la classe spéciale, l'enseignant de la classe ordinaire n'est pourtant pas soumis aux mêmes contraintes. Par exemple, il ne peut pas choisir de ralentir le temps didactique pour tous dans le but d'adapter son enseignement aux élèves en difficulté, car il se retrouvera ainsi à désavantager les élèves qui ne sont pas en difficulté ; il ne peut pas non plus choisir de désinvestir certains savoirs jugés trop difficiles pour mettre l'accent sur les savoirs jugés plus importants, car les élèves doivent pouvoir apprendre l'ensemble des savoirs mathématiques prévus au programme. Les recherches présentées dans cette section et qui ont tenté de mieux comprendre cette question de l'enseignement des mathématiques pour les élèves en difficulté dispensé dans la classe ordinaire ont offert des pistes de réponses. Toutefois, les connaissances scientifiques restent rares pour véritablement comprendre la manière avec laquelle l'enseignant de la classe ordinaire arrive à conjuguer avec l'hétérogénéité du groupe d'élève composant sa classe dans la perspective d'offrir un enseignement adapté des mathématiques à tous ses élèves, dont ceux en difficulté.

V. LE PROBLÈME DE RECHERCHE

En bref, de nombreuses recherches se sont intéressées aux conditions didactiques pouvant être mises en place pour enseigner les mathématiques aux élèves en difficulté, et ce, à l'aide de différents devis de recherche. Pour identifier des conditions didactiques propres à l'enseignement des mathématiques aux élèves en difficulté, certains travaux ont étudié spécifiquement l'enseignement des mathématiques au sein de classes spéciales, tandis que d'autres travaux ont comparé les enseignements des mathématiques respectivement dispensés dans la classe spéciale et dans la classe ordinaire. D'autres travaux ont par ailleurs cherché à caractériser l'enseignement des mathématiques dispensé aux élèves en difficulté dans la classe ordinaire au primaire, qui constitue le contexte de scolarisation pour une majorité d'élèves en difficulté pour le niveau d'enseignement primaire au Québec. Ceux-ci ont ainsi permis de mettre en exergue la place occupée par les élèves en difficulté dans les interactions didactiques liés à un certain contenu mathématique (Sarrazy et Roiné 2006) et de mettre en lumière la pratique exemplaire d'une enseignante pour l'enseignement de différents contenus mathématiques (Schmidt et al. 2009 ; Squalli et al. 2007). Toutefois, si ces travaux nous ont permis de mieux comprendre les conditions didactiques mises en place par l'enseignant pour enseigner les mathématiques à des élèves en difficulté au sein de classes spéciales, il reste du travail à faire pour mieux décrire et comprendre l'enseignement des mathématiques aux élèves en difficulté au sein des classes ordinaires du primaire.

Car pour l'enseignant aux prises avec ces injonctions ministérielles d'adaptation de l'enseignement aux besoins des élèves en difficulté, il semble que la classe ordinaire, dont le regroupement d'élèves apparaît hétérogène (comprenant non seulement des élèves normaux et doués, mais également des élèves en difficulté), ne représente pas les mêmes enjeux d'adaptation de l'enseignement des mathématiques pour les élèves en difficulté que dans la classe spéciale, qui contient un ensemble plus homogène d'élèves en difficulté. La composition éclectique d'élèves de la classe ordinaire représenterait donc un grand défi d'adaptation de l'enseignement aux élèves en difficulté pour l'enseignant. Or, si de nombreuses recherches ont caractérisé les conditions didactiques mises en place par l'enseignant pour dispenser un enseignement des mathématiques se voulant adapté aux besoins des élèves en difficulté dans les classes spéciales, les connaissances restent rares et les questions nombreuses relativement aux conditions didactiques mises en place par l'enseignant au sein de la classe ordinaire pour proposer un enseignement des mathématiques adapté aux élèves en difficulté tout en étant destiné à l'ensemble des élèves de sa classe.

En somme, cette problématique et le problème de recherche qui en découle permettent de dégager la question générale de recherche suivante : quelles conditions didactiques sont mises en place par l'enseignant de la classe ordinaire du primaire pour l'enseignement des mathématiques aux élèves en difficulté ?

VI. LES PILIERS CONCEPTUELS DU PROJET DE RECHERCHE

Une question se pose alors : quel angle de vue adopter pour étudier une telle question ? Il semble que de nombreuses perspectives pourraient s'avérer pertinentes. Toutefois, à la lumière d'une recension d'écrits traitant du rôle de l'enseignant dans l'enseignement des mathématiques, nous avons choisi de porter sur cet objet d'étude un regard structuré par deux piliers conceptuels, soit le concept d'intervention didactique de Vannier (2002, 2006), ainsi que le contexte d'étude des probabilités. Ceux-ci sont abordés dans les paragraphes suivants.

1. Les interventions didactiques de l'enseignant

Le concept d'intervention didactique issu des travaux de Vannier (2002, 2006) offre un regard sur les conditions didactiques mises en place par l'enseignant de la classe ordinaire du primaire pour l'enseignement des mathématiques en considérant les interventions didactiques de ce dernier en allant du choix du projet didactique jusqu'à l'institutionnalisation des savoirs visés, en passant par la dévolution de la situation aux élèves et l'accompagnement de ces derniers pendant la résolution. Son développement a été influencé par des travaux de psychologues relevant de deux cadres. D'un côté, le cadre de Vygotski (1997) met en lumière l'idée d'apprentissage médiatisé en reconnaissant le rôle joué par les différents types de médiations sur le processus d'apprentissage. De l'autre côté, le cadre de Bruner (1983) définit les concepts de tutelle et de processus d'étayage en s'appuyant sur les travaux de Vygotski. Toutefois, comme l'a souligné Vannier, les contextes expérimentaux dans lesquels se sont déroulés ces travaux sont très différents du contexte scolaire, ce qui laisse de côté l'idée d'apprentissage de savoirs comme lié à la réussite d'une tâche. Ainsi, Vannier a développé, en s'appuyant sur les travaux des deux psychologues, le concept d'intervention didactique en regardant les actions de tutelle d'enseignants dans l'enseignement des fractions au sein d'un contexte de classe d'élèves en difficulté en France.

Se faisant, l'auteure a identifié et défini quatre niveaux d'intervention didactique. Le premier niveau d'intervention didactique consiste à choisir une situation pour enseigner un concept, c'est-à-dire définir un projet didactique adapté aux élèves de la classe et organiser la mise en scène de l'apprentissage visé. Le deuxième niveau d'intervention didactique consiste à faire émerger le problème, c'est-à-dire à faire en sorte que les élèves se rendent compte de l'insuffisance de leurs propres compétences pour résoudre le problème posé. En d'autres mots, c'est l'organisation, in situ, de la rencontre des élèves avec leur propre ignorance. Le troisième niveau d'intervention didactique consiste à aider les élèves dans la résolution du problème en répondant à leurs besoins locaux pour permettre à l'activité de se poursuivre. Enfin, le quatrième niveau d'intervention didactique consiste à favoriser l'entrée des élèves dans la culture, notamment en décontextualisant la compétence acquise et en évaluant sa pertinence par rapport au passé et à l'avenir du développement des connaissances de l'élève, en établissant les liens nécessaires entre les concepts de manière à favoriser la structuration du savoir, ainsi qu'en introduisant (possiblement) des objets qui resteront pendant longtemps au-delà des possibilités des élèves.

En somme, notre projet de recherche permettra donc de reprendre les niveaux d'intervention didactique élaborés par l'auteure dans le contexte de classes spéciales pour étudier les conditions didactiques mises en place par l'enseignant dans l'enseignement des mathématiques à des élèves en difficulté, mais en classe ordinaire. Ces quatre niveaux d'intervention permettent de considérer les conditions didactiques mises en place par l'enseignant en amont et en aval de la seule collaboration in situ avec l'élève, c'est-à-dire à travers la planification d'un projet didactique, sa dévolution aux élèves, puis l'accompagnement des élèves durant la résolution et enfin, l'institutionnalisation des savoirs visés. De plus, ces niveaux d'intervention didactique permettent de décrire des interventions didactiques de différentes natures et non seulement des interventions efficaces ou exemplaires.

2. Les probabilités comme contexte d'étude

Pour pouvoir orienter nos réflexions dans une perspective didactique, il convient désormais de porter plus précisément notre regard sur l'enseignement d'un des domaines des mathématiques. Ainsi, l'identification d'un contenu mathématique qui peut faire l'objet d'un enseignement au sein d'une classe ordinaire du primaire nous permettra de mettre en place un contexte d'étude pour notre objet. Cela nous fournira également des éléments conceptuels pour la conception d'une ressource didactique que nous proposerons à des enseignants, pour réaliser une analyse a priori de cette dernière, ainsi que pour alimenter notre analyse des interventions didactiques mises en place par ces enseignants pour l'enseignement à des élèves en difficulté à partir de la ressource didactique que nous leur aurons proposée. Or, nous choisissons de regarder le domaine spécifique des probabilités dans les mathématiques et trois arguments majeurs viennent appuyer ce choix de contexte d'étude pour notre objet. Cette section vise donc à justifier le choix des probabilités comme contexte d'étude et à dresser un portrait didactique de ce domaine des mathématiques.

En premier lieu, les probabilités occupent une place prépondérante dans la vie du citoyen (Albert 2006 ; Caron 2002 ; Doerr 2000 ; Hacking et Dufour 2004 ; Pratt 1998) et leur apprentissage constitue un enjeu qui a gagné en importance au cours des dernières années dans le système scolaire québécois (Caron 2002 ; Savard et DeBlois 2005 ; Schmidt 2002), notamment au sein du PFEQ du primaire (Gouvernement du Québec 2001a). En deuxième lieu, les probabilités présentent des particularités conceptuelles, notamment en raison de leur inscription dans une perspective non déterministe (Stohl 2005), en lien avec les modes de construction des probabilités (Albert 2006 ; Batanero, Henry et Parzysz 2005 ; Caron 2002 ; Even et Kvatinsky 2010 ; Savard 2008), ainsi qu'aux nombreuses conceptions probabilistes généralement relevées dans les écrits scientifiques (Martin 2010 ; Savard 2008 ; Tversky et Kahneman 1971 ; Pratt, 1998 ; Shaughnessy 1992). En dernier lieu, l'enseignement des probabilités présente certains défis de taille pour les enseignants, semblant découler d'un manque de formation en lien avec leur enseignement qui laisse globalement les enseignants démunis en termes de connaissances et de compétences pour guider adéquatement les élèves dans le développement d'un raisonnement probabiliste éclairé. Ces défis sont liés à la maîtrise insuffisante des contenus probabilistes par les enseignants, à leur concentration excessive sur l'approche théorique des probabilités, ainsi qu'à leur faible connaissance des conceptions probabilistes que présentent les élèves. Ceci rejoint d'ailleurs le point de vue de Shaughnessy (1992), de Greer et Mukhopadhya (2005), ainsi que de Stohl (2005), qui ont précisément souligné la formation insuffisante ou inadéquate que reçoivent les enseignants relativement à l'enseignement des probabilités. Notre projet de recherche n'est pas directement lié à la formation initiale ou continue des enseignants. Toutefois, il alimentera dans une certaine mesure la formation initiale ou continue d'enseignants, puisqu'il permettra de mieux comprendre certaines interventions didactiques d'enseignants dans l'enseignement des probabilités.

3. *Les objectifs de notre recherche*

À partir de l'articulation de ces piliers conceptuels, nous sommes en mesure d'établir trois objectifs de recherche liés à l'étude de notre objet, c'est-à-dire les interventions didactiques de l'enseignant dans l'enseignement des probabilités à des élèves en difficulté au sein de la classe ordinaire au primaire. Le premier consiste à décrire et comprendre les interventions didactiques mises en œuvre par l'enseignant pour l'enseignement des probabilités en classe ordinaire, et ce, en lien avec la définition et la mise en scène d'un projet didactique, sa dévolution aux élèves, l'aide à sa résolution et l'institutionnalisation des contenus probabilistes ciblés. Le deuxième vise à décrire et comprendre les interventions didactiques réalisées plus spécifiquement pour l'enseignement des probabilités aux élèves en difficulté. Le troisième cherche quant à lui à situer les interventions didactiques faites auprès des élèves en difficulté par rapport aux interventions didactiques faites par l'enseignant auprès des autres élèves pour l'enseignement des probabilités ou de façon générale pour la classe.

VII. POUR LA SUITE…

Dans le but d'atteindre ces objectifs, nous proposerons une ressource didactique liée aux probabilités à quatre enseignants ciblés à partir de laquelle ceux-ci seront invités à concevoir et à mettre en œuvre un projet didactique destiné à leurs élèves. Dans ce sens, la collecte de données, qui impliquera des entrevues avec des enseignants et des enregistrements vidéo de séances d'enseignement en classe, se déroulera au début de 2012. Conséquemment, dans le cadre de notre communication, nous serons en mesure de présenter non seulement la ressource didactique qui aura été proposée aux enseignants, mais également d'exposer des résultats préliminaires liés aux interventions didactiques mises en place par une ou un enseignant pour l'enseignement des probabilités à des élèves en difficulté au sein d'une classe ordinaire du primaire.

RÉFÉRENCES

Albert J. (2006) Interpreting probabilities and teaching the subjective viewpoint. In Burrill G. F., Elliott P. C. (Eds.) (pp. 417-433) *Thinking and reasoning with data and chance*. Reston : National council of teachers of mathematics.

Assude T., Mercier A., Sensevy A. (2007) L'action didactique du professeur dans la dynamique des milieux. *Recherches en didactique des mathématiques* 27(2), 221-252.

Batanero C., Henry M., Parzysz B. (2005) The nature of chance and probability. In Jones G. A. (Ed.) (pp. 15-37) *Exploring probability in school : challenges for teaching and learning*. New York : Springer.

Blouin P., Lemoyne G. (2002) L'enseignement des nombres rationnels à des élèves en difficulté d'apprentissage : une approche didactique de la rééducation et ses effets. *Petit x*,58, 7-23.

Bruner J. S. (1983) *Le développement de l'enfant savoir faire savoir dire*. Paris : Presses Universitaires de France.

Butlen D., Charles-Pezard M., Masselot P. (2009) Pratiques de professeurs des écoles débutants enseignant les mathématiques à des élèves issus de milieux socialement très défavorisés, entre contraintes et marges de manœuvre. *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone 2009*. Dakar, Sénégal.

Caron F. (2002) Splendeurs et misères de l'enseignement des probabilités au primaire. *Actes du colloque Groupe de didactique des mathématiques du Québec 2002* (pp. 85-96). Trois-Rivières, Université du Québec à Trois-Rivières.

Cherel C. (2005) *Deux élèves en difficulté s'intègrent à une classe ordinaire le temps… des mathématiques*. Montréal : Éditions Bande didactique.

Conseil supérieur de l'éducation (1996) *L'intégration scolaire des élèves handicapés et en difficulté. Avis à la ministre de l'Éducation.* Québec : Conseil supérieur de l'éducation.

Conseil supérieur de l'éducation (2003) *L'appropriation locale de la réforme : un défi à la mesure de l'école secondaire.* Québec : Conseil supérieur de l'éducation.

Doerr H.M. (2000) How can I find a pattern in this random data? The convergence of multiplicative and probabilistic reasoning. *Journal of mathematical behaviour* 18(4), 431-454.

Even R., Kvatinsky T. (2010) What mathematics do teachers with contrasting teaching approaches address in probability lesson? *Educational studies in mathematics* 74(3), 207-222.

Favre J.-M. (1997) *L'échec, le temps, la multiplication*. Mémoire de License, Université de Genève, Faculté de Psychologie et des sciences de l'éducation.

Favre J.-M. (1999) La mathématique et le cognitif : deux chimères pour l'enseignant. In Lemoyne G., Conne F. (Eds.) (pp. 235-261) *Le cognitif en didactique des mathématiques*. Montréal : Presses de l'Université de Montréal.

Giroux J. (2004) Échanges langagiers et interactions de connaissances dans l'enseignement des mathématiques en classe d'adaptation scolaire. *Revue des sciences de l'éducation* 30(2), 303-328.

Giroux J. (2007) Adapter l'enseignement en classe d'adaptation scolaire ? La Théorie des situations didactiques à la rescousse des difficultés d'enseignement aux élèves en difficulté d'apprentissage. *Contribution au symposium Entre didactique et politique : Actualités de la Théorie des situations didactiques à propos de quelques questions vives sur l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire.* Bordeaux : Université Victor Segalen Bordeaux 2, mai 2007.

Giroux J., René de Cotret S. (2001) Le temps didactique en classe de doubleurs. *Actes du sixième congrès des sciences de l'éducation de langue française (AFDEC)* (pp. 41-71). Université de Montréal.

Gouvernement du Québec (1999) *Une école adaptée à tous ses élèves. Politique de l'adaptation scolaire.* Québec : Ministère de l'Éducation du Québec.

Gouvernement du Québec (2001*a*) *Programme de formation de l'école québécoise. Éducation préscolaire et enseignement primaire.* Québec : Ministère de l'éducation du Québec.

Gouvernement du Québec (2001*b*) *La formation à l'enseignement. Les orientations. Les compétences professionnelles.* Québec : Ministère de l'Éducation du Québec.

Gouvernement du Québec (2006*a*) *L'évaluation des apprentissages au secondaire. Cadre de référence.* Québec : Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport du Québec.

Gouvernement du Québec (2006*b*) *Programme de formation de l'école québécoise. Enseignement secondaire, premier cycle.* Québec : Ministère de l'éducation, du loisir et du sport du Québec.

Gouvernement du Québec (2007) *L'organisation des services éducatifs aux élèves à risque et aux élèves handicapés ou en difficulté d'adaptation ou d'apprentissage (EHDAA).* Québec : Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport du Québec.

Gouvernement du Québec (2009) *Programme de formation de l'école québécoise. Enseignement secondaire, deuxième cycle (mis à jour).* Québec : Ministère de l'éducation, du loisir et du sport du Québec.

Gouvernement du Québec (2010) *Indicateurs nationaux des plans stratégiques*. Québec : Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport du Québec.

Greer B., Mukhopadhya S. (2005) Teaching and learning the mathematization of uncertainty : historical, cultural, social and political contexts. In Jones G. A. (Ed.) (pp. 297-324). *Exploring probability in school : challenges for teaching and learning* New York : Springer.

Hacking I., Dufour M. (2004) *L'ouverture au probable. Élément de logique inductive*. Paris : Armand Colin.

Lemoyne G., Bisaillon N. (2006) Conception et réalisation de recherches sur l'enseignement des mathématiques dans des classes intégrant des élèves en difficulté. In Giroux J., Gauthier D. (Eds.) (pp. 9-34) *Difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques. Hommage à Gisèle Lemoyne.* Montréal : Éditions Bande didactique.

Lessard G. (2011) *Acculturation institutionnelle du chercheur, de l'enseignant et des élèves de 1re secondaire présentant des difficultés d'apprentissage dans la conception et la gestion de situations-problèmes impliquant des nombres rationnels.* Thèse de l'université de Montréal.

Maréchal C. (2010). *Effets des contraintes institutionnelles sur les pratiques enseignantes dans l'enseignement spécialisé. Une analyse didactique à partir du cas de l'introduction à l'addition.* Thèse de doctorat de l'université de Genève.

Martin V. (2010) *Quand rien n'est sûr, tout est possible : l'apprentissage des probabilités chez des élèves à risque.* Montréal : Éditions Bande didactique.

Mercier A. (1995). Le traitement public d'éléments privés du rapport des élèves aux objets de savoir mathématiques. In Arsac G., Gréa J., Grenier D., Tiberghien A. (Eds.) (pp.1 45-169) *Différents types de savoirs et leur articulation*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Minassian L., Munoz G. (2009) « Partir de l'expérience et y rester » : un exemple de modalité de différenciation des publics de la formation en alternance. *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone 2009,* Dakar, Sénégal.

Pratt D. (1998) The coordination of meanings for randomness. *For the learning of mathematics* 18(3), 2-11.

René de Cotret S., Fiola A. (2006) Une adaptation de l'environnement informatisé *Bouchon les trous* pour des élèves en difficulté d'apprentissage. In Giroux J., Gauthier D. (Eds.) (pp. 113-138) *Difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques. Hommage à Gisèle Lemoyne.* Montréal : Éditions Bande didactique.

René de Cotret S., Giroux J. (2003) Le temps didactique dans trois classes de secondaire I (doubleurs, ordinaires, forts). *Éducation et francophonie* 31(2), 155-175.

Roditi É (2001) *L'enseignement de la multiplication des décimaux en sixième. Étude de pratiques ordinaires.* Thèse de l'université Paris 7 – Denis Diderot.

Roditi É. (2003) Régularité et variabilité des pratiques ordinaires d'enseignement. Le cas de la multiplication des nombres décimaux en sixième. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 23(2), 183-216.

Roiné C. (2009) *Cécité didactique et discours noosphériens dans les pratiques d'enseignement en SEGPA. Une contribution à la question des inégalités.* Thèse de doctorat en sciences de l'éducation, Université Victor Segalen Bordeaux 2, Bordeaux.

Roiné C. (en travail) Les dispositifs d'aide aux élèves en difficulté dans l'enseignement des mathématiques. *Contribution au colloque Recherches sur les difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques : regards didactiques.* Sherbrooke, Université de Sherbrooke, 11-12 mai 2011.

Salin M.-H. (2006*a*) À la recherche de milieux adaptés à l'enseignement des mathématiques. In Giroux J., Gauthier D. (Eds.) (pp. 195-218) *Difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques. Hommage à Gisèle Lemoyne.* Montréal : Éditions Bande didactique.

Salin M.-H. (2006*b*) Situations et assortiments d'exercices pour l'enseignement des mathématiques destiné aux élèves du collège en grande difficulté scolaire. *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone 2006,* Sherbrooke.

Sarrazy B., Roiné C. (2006) Du déficient léger à l'élève en difficulté : des effets de la différenciation structurelle sur la différenciation didactique – Cas des interactions didactiques dans l'enseignement de l'arithmétique à l'école primaire. *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone 2006,* Sherbrooke.

Savard A. (2008) *Le développement d'une pensée critique envers les jeux de hasard et d'argent par l'enseignement des probabilités à l'école primaire : vers une prise de décision.* Thèse de doctorat en didactique, Université Laval, Québec.

Savard A., DeBlois L. (2005) Un cadre théorique pour éclairer l'apprentissage des probabilités à l'école primaire : vers une prise de décision à l'égard des jeux de hasard et d'argent. *Actes du colloque du Groupe de didactique des mathématiques du Québec*. Montréal : Université du Québec à Montréal.

Schmidt S. (2002) Difficultés liées au développement du raisonnement probabiliste. *Instantanés mathématiques* 38(3), 56-97.

Schmidt S., Mary C., Squalli H. (2009) Les conditions favorables à l'apprentissage mathématique des élèves à risque dans la pratique de Calypso. In Schmidt S. (Ed.) (pp. 117-157) *Intervention différenciée au primaire en contexte d'intégration scolaire. Regards multiples.* Québec : Presses de l'Université du Québec.

Shaughnessy J. M. (1992) Research in probability and statistics : reflections and direction. In Grouws D.A. (Ed.) (pp. 465-494)*Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York : National Council of Teachers of Mathematics.

Squalli H., Mary C., Schmidt, S. (2007) Analyse des conditions favorables au cheminement et à la réussite scolaires des élèves en difficulté d'apprentissage en classe ordinaire au primaire. Vol. 5 : Les conditions liées à l'enseignement des mathématiques. Rapport de recherche. Subvention FQRSC-MELS, programme des Actions concertées (Persévérance et réussites scolaires).

Stohl H. (2005) Probability in teacher education and development. In Jones G.A. (Ed.) (pp. 345-366) *Exploring probability in school : challenges for teaching and learning* New York : Springer.

Tversky A., Kahneman D. (1971) Belief in the law of small numbers. *Psychological Bulletin*, 76(2), 105-110.

Vannier M.-P. (2002) *Dimensions sensibles des situations de tutelle et travail de l'enseignant de mathématiques. Étude de cas dans trois institutions scolaires en CLIPA, 4ème technologique agricole et CM2.* Thèse de l'Université René Descartes – Paris V – Sorbonne.

Vannier M.-P. (2006) Fonctions critiques de la tutelle auprès d'élèves en échec scolaire. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation* 9(2), 169-186.

Vygotsky L.S. (1997) *Pensée et langage* (Trad. F. Sève) (3e éd.). Paris : La dispute (1re éd. 1934).

LES PRATIQUES ENSEIGNANTES
ET L'APPRENTISSAGE MATHEMATIQUE DES ELEVES

Compte-rendu du Groupe de Travail n°9 – EMF2012

Lucie DEBLOIS* – Christine DEL NOTARO** – Nadia MAWFIK*** – Éric RODITI****

Le travail de notre groupe s'inscrit dans les réflexions menées sur les pratiques enseignantes durant les précédents colloques EMF. Lors de EMF2003, à Tozeur, le thème 6 portait le titre « Formation initiale et continue des enseignants » et était sous la responsabilité d'Ahmed Daife et Nadine Bednarz. A EMF2006, à Sherbrooke, la formation initiale et la formation continue ont donné lieu à deux groupes de travail distincts. Ainsi, les questions des pratiques enseignantes ont été discutées sous le thème : « Systèmes et pratiques de formation continue des enseignants en mathématiques », mais aussi sous le thème : « Défi de la formation initiale des enseignants en mathématiques ». A EMF2009, à Dakar, les deux groupes de travail 2 et 9 portant sur la formation des enseignants, leurs pratiques enseignantes et l'apprentissage mathématique des élèves ont été finalement été regroupés (faute d'un nombre suffisant de contributions dans chacun). Lors de la défintion des thématiques des groupes de travail pour EMF2012, le GT9 a été défini comme s'intéressant principalement à l'analyse des pratiques enseignantes dans leur articulation avec les activités des élèves à travers des dimensions variées : des milieux, des sensibilités, des dilemmes et des tensions, des contraintes et des marges de manœuvre et enfin des ressources. Ces analyses sont alors liées aux activités des élèves prenant place dans ces pratiques, en repérant notamment : les stratégies, les erreurs, les conceptions, les habitudes, les règles, les modèles implicites, les justifications en lien avec le développement des connaissances mathématiques.

Les EMF précédents avaient permis de nous familiariser avec différents systèmes éducatifs et différents systèmes de formation des enseignants. Ce processus s'est reproduit pour les pratiques enseignantes. Ainsi, différents cadres théoriques ont été convoqués pour étudier les phénomènes de la classe dans les EMF antérieurs. La théorie des situations de Brousseau a conduit à développer un modèle d'hétérogénéité didactique (Chopin et Sarrazy 2009), à préciser des styles de médiation (Malabry 2009), à distinguer certains phénomènes didactiques tels que les effets Topaze, leurs « liaisons » et leur influence sur l'apprentissage des élèves (Notnova et Hošpesová 2009) ou encore, à analyser différentes situations d'action et de formulation d'élèves pour définir à quelles conditions certaines d'entre elles sont assimilables à des raisonnements (Gibel 2009).

Par ailleurs, inspirées par la double approche didactique et ergonomique des pratiques enseignantes (Robert et Rogalski 2005), certaines recherches ont permis de mettre en évidence des analogies dans les pratiques des enseignants à partir de caractéristiques liées à des composantes personnelles telles que le genre, le cursus ou encore l'expérience professionnelle des enseignants (Sayac 2006). Par l'observation des contraintes sociales et institutionnelles liées au métier, Roditi (2005) a pu identifier des analogies dans les pratiques enseignantes au niveau global. Chesnais et Horoks (2009) ont précisé l'influence de la

* Université Laval – Canada– lucie.deblois@fse.ulaval.ca
** Université de Genève – Suisse – christine.delnotaro@unige.ch
*** École Normale Supérieure de Rabat – Maroc – nmawfik@yahoo.fr
**** Université Paris-Descartes – France – eric.roditi@paris5.sorbonne.fr

© Deblois L., Del Notaro C., Mawfik N., Roditi E. (2012) Les Pratiques enseignantes et l'apprentissage mathématique des élèves – *Compte-rendu du Groupe de Travail n°9*. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT9, pp. 1127–1132). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

composante institutionnelle alors que Butlen, Pézard et Masselot (2009) ont repéré les gestes et les routines professionnels des enseignants qui exercent en « milieu populaire ».

Liekin (2006) privilégie le concept de prise de conscience (*awareness*) pour éclairer la transformation de la compréhension de l'apprentissage mathématique des élèves par les enseignants. DeBlois (2006, 2009) a choisi celui de sensibilité qui contribue, à la fois, à distinguer environnement et milieu, ce dernier concept étant emprunté à la théorie des situations didactiques. La notion de sensibilité a permis d'étudier le processus de transformation de l'interprétation des enseignants vis-à-vis de l'apprentissage de leurs élèves, et de repérer l'influence de ces interprétations sur le choix des interventions qu'ils prévoient de réaliser.

L'approche anthropologique a permis à Assude, Mercier et Sensevy (2007) d'étudier trois des dynamiques des milieux. Il a été possible de reconnaître que le processus de dévolution était plus qu'un simple engagement de l'élève et d'observer comment l'enseignant régule le travail de l'élève à travers des processus d'expansion et de réduction du milieu. Ces auteurs ont enfin précisé l'influence des différentes postures du professeur et des élèves sur le jeu avec le milieu. Cette approche a conduit Coppé et Mouhayar (2009) à reconnaître que les mises en œuvre pour montrer la validité d'une réponse étaient différentes d'un milieu institutionnel à un autre. Les pratiques d'enseignement intégrant les TICE dans les classes ont aussi fait l'objet de recherches spécifiques. Ainsi, Maracci, Cazes, Vandebrouck et Mariotti (2009) ont-ils pu mettre en évidence des évolutions sur l'articulation d'un travail papier et d'un travail sur machine, par exemple, ainsi que des résistances souvent liées à des questions de gestions de classe.

Pour EMF2012, le thème du colloque conduit à analyser les conditions dans lesquelles les pratiques d'enseignement des mathématiques contribuent à définir ou à redéfinir un contrat social, à le réaliser ou au contraire à freiner sa réalisation. Nous avons commencé notre réflexion à partir de quatre questions principales :

1) Quelles mathématiques les élèves font-ils et avec quelle diversité ?

2) Quelles pratiques enseignantes pour quels apprentissages, et pour quels élèves ?

3) Quels sont les défis et les enjeux du contrat social que contribue à relever l'enseignement des mathématiques ?

4) Comment penser, analyser et évaluer l'organisation didactique ?

Les présentations ont permis de mettre en évidence que ces questions faisaient émerger une rupture avec la présentation narrative d'un modèle mathématique ; on pourrait dire ici, une rupture avec une manière ostensive de présenter son enseignement. C'est ainsi que Kalloufi (ces actes), Roditi (ces actes) et Lai et Polo (ces actes) observent que problème et phénomènes « naturels » ne sont pas liés de manière évidente. En effet, un problème mathématique obéit à des règles d'élaboration définies dans un processus transpositif, alors qu'un phénomène « de la vie courant » va devoir être « didactifié » avant d'être présenté aux élèves, c'est-à-dire qu'il faudra en extraire les savoirs mathématiques. Sans revenir de manière plus précise ici sur la question de la transposition didactique de certains phénomènes, ajoutons qu'à partir de ce savoir savant, il faudra dégager un savoir à enseigner, ce qui nous amène à considérer le projet de l'enseignant.

Ce projet de l'enseignant peut résider dans le fait de présenter des tâches aux élèves, situées à l'intérieur de phénomènes du quotidien, pour lesquelles il aura dégagé les savoirs mathématiques qui sont à exploiter pour les élèves, ce qui pose la question de l'écart entre l'appropriation des savoirs et la manière de trouver la solution.

À cet égard, les travaux de Maia, Vandebrouck et Bona (ces actes) tentent de cerner les contours du concept d'autonomie. Une autonomie cognitive de l'enseignant pourrait-elle contribuer à la dévolution du phénomène ou du problème aux élèves ? Alors que les thèmes de liberté, d'indépendance et de responsabilité semblent être le noyau dur des conceptions des enseignants français et brésiliens questionnés ; les enseignants des sciences de l'éducation et ceux issus d'une formation mathématique ajoutent respectivement les expressions citoyenneté et pouvoir. Comment dès lors mener une réflexion sur les pratiques enseignantes et les apprentissages mathématiques des élèves à partir de critères didactiques et éthiques ?

Pour revenir à la rupture évoquée plus haut, notons encore qu'elle convie, d'une part, à revoir l'importance du statut de l'école dans la société pour modifier les enjeux du contrat social et, d'autre part, à mettre en relation le point de vue du chercheur et celui de l'enseignant. La recherche de Daina (ces actes) permet de mettre en évidence et de reconnaître l'importance de clarifier le type de partenariat à développer avec les acteurs des milieux scolaires. S'agit-il d'un partenariat de type collaboratif ou d'une démarche individuelle du chercheur ? Ce partenariat s'étale-il sur un temps long ou court ? Les enjeux sont-ils alors davantage disciplinaires ou humains ? Les bénéfices de ce partenariat sont-ils précisés ? Comment l'épistémologie des acteurs de ce partenariat sont-ils pris en compte ?

Enfin, l'exploration des phénomènes présentés aux élèves pourrait voir émerger des procédures variées. C'est ainsi que le calcul de doses médicamenteuses par les infirmiers-ères (Roditi, ces actes), fait intervenir des procédures analogiques, dans lesquelles le geste est ancré dans la notion avant que des procédures normées comme celles du produit croisé ne soient adoptées. Toutefois, ce passage à des procédures normées conduit trop souvent à l'évacuation du sens du raisonnement impliqué. Il est intéressant de relever que les formateurs d'infirmiers-ères ne possèdent pas toujours le recul et/ou le savoir mathématique nécessaires pour évaluer la pertinence d'une procédure, ce qui les conduit à imposer le produit en croix, par exemple, et contribue à une perte de sens. A cet effet, la recherche de Grugnetti, Jaquet, Medici et Rinaldi (ces actes) permet d'observer comment des problèmes faisant intervenir des raisonnements proportionnels ou algébriques font intervenir des procédures intuitives de la part des élèves. Il est nécessaire de les laisser émerger, voire de les encourager. Il pourrait être tentant de distinguer alors « faire faux » et « faire n'importe quoi ». Toutefois, un élève ne fait jamais « n'importe quoi ». Il répond à un problème à un moment donné avec ses connaissances. L'erreur est ainsi la manifestation de son engagement et de son intelligence. Ce qui nous paraîtra du « n'importe quoi » se révèle être une réponse à un problème qui a un sens pour l'élève : à nous de le découvrir !

Les savoirs, considérés dans leurs composantes ontologiques, ontogénétiques et épistémologiques, pourraient aider à trouver le sens que les élèves accordent aux problèmes proposés. La recherche de DeBlois et Larivière (ces actes) contribue à reconnaître qu'un processus de construction qui fait intervenir une médiation devient une voie privilégiée pour susciter une alternance entre procédures normées et procédures intuitives variées. Sans une attention portée à cette alternance entre procédures normées et procédures intuitives, le risque est grand que l'école ne contribue à la construction d'inégalités scolaires entre les élèves à cause de l'incomplétude de l'organisation de l'enseignement comme l'a présenté le travail de Coulange (ces actes). En outre, les procédures normées risquent de masquer des inégalités pourtant présentes. C'est ainsi que les moyens de contrôle donnés aux élèves (Saboya, ces actes) ainsi que la compréhension du contrat pédagogique et didactique (DeBlois et Larivière, ces actes) pourraient aussi contribuer à lutter contre ces inégalités scolaires.

Il reste donc à questionner l'accessibilité des organisations de l'enseignement dans et pour les pratiques enseignantes, l'organisation de la communication et l'organisation de l'évaluation. Les ressources mises à la disposition des organisations de l'enseignement visent à faire évoluer le rapport aux savoirs des élèves. Comment mettre en évidence l'importance d'étudier le contexte dans lequel ces organisations sont proposées pour enrichir les pratiques antérieures ? Bien qu'il semble que le fait de toucher les lecteurs de façon sensible permette aussi de toucher leurs connaissances, la question de savoir comment rassurer les acteurs des transformations demeure néanmoins.

Le lien entre pratiques des enseignants et activités des élèves pourraient être davantage questionné, tant pour améliorer l'enseignement des mathématiques en général que pour améliorer son équité. En outre, il devient important de mettre en lien les pratiques enseignantes et les contextes d'enseignement : en fonction de la formation des maîtres, des effectifs des classes, des langues de l'école et de celle des familles, des moyens en livres ou en technologie, etc.

En conclusion, le travail du GT9 à EMF2012 conduit à inciter à reconduire ce thème à EMF2015 pour mener une réflexion sur les pratiques enseignantes et les apprentissages mathématiques des élèves, en prenant en compte le fait que les critères didactiques et éthiques ne peuvent être distingués. En outre, les procédures et les comportements des élèves nous renseignent tout à la fois sur :

- la diversité de leurs raisonnements et les obstacles qu'ils rencontrent lors de la résolution de problèmes,
- le lien entretenu entre pratique enseignante et apprentissage des élèves, entre contrat didactique et comportements d'élèves,
- les inégalités produites par l'enseignement,
- les conditions favorisant les connexions entre les connaissances.

REFERENCES

Assude T., Mercier A., Sensevy G. (2007). L'action didactique du professeur dans la dynamique des milieux. *Recherche en Didactique des Mathématiques* 27(2), 221-252.

Butlen D. (2005) De l'analyse de pratiques effectives de professeurs des écoles débutants en ZEP/REP à des stratégies de formation. *5e colloque International Recherche(s) et Formation*, IUFM de Nante, France.

Butlen D., Charles-Pézard M., Masselot P. (2009) Gestes et routines professionnels : un enjeu pour analyser et intervenir sur les pratiques enseignantes. In Kuzniak A., Sokhna M. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et développement, enjeux de société et de formation. Actes du colloque EMF2009. Revue internationale Francophone*, numéro spécial. http://www.fse.ulaval.ca/ldeblois/pdf/Butlen.pdf

Chesnais A., Horoks J. (2009) Analyse et comparaison de pratiques effectives d'enseignants et conséquences en termes d'apprentissages. In Kuzniak A., Sokhna M. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et développement, enjeux de société et de formation. Actes du colloque EMF2009. Revue internationale Francophone*, numéro spécial. http://www.fse.ulaval.ca/ldeblois/pdf/Chenais_Horoks.pdf

Chopin M.-P., Sarrazy B. (2009) Apports du modèle d'hétérogénéisation didactique à l'étude des pratiques d'enseignement en mathématiques Perspectives théoriques et praxéologiques. In Kuzniak A., Sokhna M. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et développement, enjeux de société et de formation. Actes du colloque EMF2009. Revue internationale Francophone*, numéro spécial. http://www.fse.ulaval.ca/ldeblois/pdf/CHOPIN_SARRAZY.pdf

Coppé S., Mouhayar R. E. (2009) Des éléments d'analyse des pratiques de classe dans les phases de correction en calcul littéral au collège. In Kuzniak A., Sokhna M. (Eds.)

Enseignement des mathématiques et développement, enjeux de société et de formation. Actes du colloque EMF2009. Revue internationale Francophone, numéro spécial. http://www.fse.ulaval.ca/ldeblois/pdf/coppe_elMouhayar.pdf

DeBlois L. (2009) Comment notre façon de voir influence-t-elle nos interventions ? *Revue Envol* 148, 15-19.

DeBlois L. (2006) Influence des interprétations des productions des élèves sur les stratégies d'intervention en classe de mathématiques. *Educational Studies in Mathematics* 62(3), 307-329. http://www.springerlink.com/content/t135489753878700/fulltext.pdf

Leikin R. (2006) Learning by teaching: The case of Sieve of Eratosthenes and one elementary school teacher. In Zazkis R., Campbell S. (Eds.) (pp. 115-140) *Number theory in mathematics education: Perspectives and prospects*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Malabry Y. (2009) Médiation, conceptualisation et pratiques des enseignants. In Kuzniak A., Sokhna M. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et développement, enjeux de société et de formation. Actes du colloque EMF2009. Revue internationale Francophone*, numéro spécial. http://www.fse.ulaval.ca/ldeblois/pdf/Malabry.pdf

Maracci M., Cazes C., Vandebrouck F., Mariotti M-A. (2009) Casyopée in the classroom: two different theory-driven pedagogical approaches. In Durand-Guerrier V., Soury-Lavergne S., Azzarello F. (Eds.) (WG7, pp. 1399-1409) *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME 6). Lyon : Institut Fran4ais de l'Education. http://ife.ens-lyon.fr/editions/editions-electroniques/cerme6/working-group-7

Novotná J., Hošpesová A. (2009) Effet Topaze et liaisons dans les pratiques des professeurs de mathématiques. In Kuzniak A., Sokhna M. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et développement, enjeux de société et de formation. Actes du colloque EMF2009. Revue internationale Francophone*, numéro spécial. http://www.fse.ulaval.ca/ldeblois/pdf/Novotna_Hospesova.pdf

Gibel P. (2009) Analyse des connaissances et des savoirs utilisés par les élèves lors de l'élaboration de raisonnements. In Kuzniak A., Sokhna M. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et développement, enjeux de société et de formation. Actes du colloque EMF2009. Revue internationale Francophone*, numéro spécial. http://www.fse.ulaval.ca/ldeblois/pdf/Gibel.pdf

Robert A., Rogalski J. (2005) A cross-analysis of the mathematics' teacher activity. An example in a French 10th-grade class. *Educational Studies in Mathematics* 59(1/2/3), 259-298.

Robert A., Rogalski J. (2002) Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *Revue Canadienne de l'Enseignement des Sciences, des Mathématiques et de la Technologie* 2(4), 505-528.

Roditi E. (2005) *Les pratiques enseignantes en mathématiques. Entre contraintes et liberté pédagogique*. Paris : L'Harmattan.

Sayac N. (2006) Étude à grande échelle sur les pratiques des professeurs de mathématiques de lycée : résultats lies à des variables spécifiques et typologie sommaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 26(3), 231-278.

CONTRIBUTIONS AU GT9

BEN NEJMA S. – Pratiques enseignantes et changements curriculaires : une étude de cas en algèbre élémentaire.

CHAMBRIS C. – Étude des conditions pour favoriser les connexions entre les connaissances : une approche écologique.

COULANGE L. – Pratiques d'enseignement et production d'inégalités dans les apprentissages mathématiques à l'école.

DAINA A. – L'utilisation par les enseignants des ressources en mathématiques : analyse comparative des scénarios de cinq enseignants à Genève.

DEBLOIS L., LARIVIÈRE A. – Une analyse du contrat didactique pour interpréter les comportements des élèves au primaire.

GRUGNETTI L., JAQUET F., MEDICI D. RINALDI G. – Vers la construction de concepts au travers de l'analyse des procédures des élèves et des obstacles qu'ils rencontrent lors de la résolution de problèmes.

KHALLOUFI-MOUHA F. – Étude de l'évolution des pratiques d'un enseignant lors d'une séquence d'enseignement intégrant un artefact technologique.

LAI S., POLO M. – Construction d'une culture scientifique pour tous : engagement de l'enseignant et de l'élève dans la rupture de pratiques habituelles.

MAIA L., VANDEBROUCK F., BONA V. – Représentations sociales du concept d'autonomie chez des enseignants.

RODITI E. – L'enseignement du calcul de doses médicamenteuses : un défi pour la santé publique au 21e siècle.

SABOYA M. – Analyse d'une didactique d'intervention autour du développement d'une activité de contrôle : stratégies d'enseignement et indicateurs de contrôle chez les élèves du secondaire.

PRATIQUES ENSEIGNANTES ET CHANGEMENTS CURRICULAIRES : UNE ETUDE DE CAS EN ALGEBRE ELEMENTAIRE

Sonia BEN NEJMA*

Résumé – Cet article qui s'inspire de mon travail de thèse (Ben Nejma 2009) apporte un éclairage sur les effets potentiels d'un changement de réformes sur les pratiques enseignantes. L'étude de cas réalisée dans notre recherche s'est particulièrement centrée sur l'analyse des pratiques algébriques de deux enseignantes chevronnées dans leurs adaptations à une réforme récente de l'enseignement secondaire tunisien entrée en vigueur en 2004-2005. Nous livrons les principaux résultats apportés par cette étude en décrivant les rapports développés par ces enseignantes à l'algèbre enseignée en première année du secondaire et en analysant les pratiques enseignantes en rapport avec les thèmes d'étude équations du premier degré à deux inconnues et systèmes linéaires. Nous mettons en avant différentes formes d'adaptations des pratiques en interrogeant leur conformité aux praxéologies mathématiques et didactique de référence.

Mots-clefs : algèbre, pratiques enseignantes, praxéologies mathématiques et didactiques

Abstract – This paper inspired by my doctorate (Ben Nejma 2009) brings a new light on potential effects of a change in the curriculum on teachers' practices. The study at stake has focused on the analysis of the practice sin Algebra of two experimented teachers in their adaptation to a recent reform in secondary education in Tunisia in 2004-2005. We expose the main results of this study by describing the relations to Algebra taught in first year of secondary school developed by these teachers and by analysing their practices concerning the themes first-degree equations in two unknowns and linear systems. We put forward different forms of adaptations in the practices by questioning their conformity to reference mathematical and didactical praxeologies.

Keywords: Algebra, teachers' practices, mathematical and didactical praxeologies

Nous commençons par exposer les points de vue théoriques ainsi que les éléments de méthodologie qui nous ont permis d'aborder cette problématique puis nous livrons les principaux résultats obtenus à l'issue de cette étude.

I. UN POINT DE VUE THEORIQUE SUR L'ARTICULATION DES DIMENSIONS INSTITUTIONNELLE ET PROFESSIONNELLE DES PRATIQUES

Notre première entrée dans cette thématique de recherche s'est réalisée selon deux dimensions d'analyse des pratiques enseignantes : la dimension institutionnelle et la dimension professionnelle mises en avant par Assude (2004). Nous reprenons à notre compte plusieurs phénomènes d'évolution curriculaires, pour étudier leur impact potentiel sur les pratiques des enseignants. nous situons notre recherche dans le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique pour étudier ce que nous avons appelé les perturbations exogènes du système d'enseignement ,du point de vue des changements prescrits dans les organisations praxéologiques mathématiques et didactiques du savoir à enseigner par opposition aux perturbations endogènes, celles qui proviennent du système lui-même.

L'étude de la dimension institutionnelle concerne celle des prescriptions institutionnelles qui sont précisément à l'origine des évolutions curriculaires. Au sein de cette approche, les acteurs ou individus du système d'enseignement deviennent des sujets qui occupent différentes positions au sein d'institutions. Dès lors, la notion de rapport institutionnel à un objet de savoir, renvoie aux pratiques sociales censées se réaliser au sein d'une institution avec l'objet en question, qui viennent en quelque sorte assujettir et soutenir les pratiques des sujets de cette institution. Ces pratiques relatives à l'activité mathématique ou didactique sont

* Faculté des sciences-Bizerte – Tunisie – sonianejma@yahoo.com

© Ben Nejma S. (2012) Pratiques enseignantes et changements curriculaires : une étude de cas en algèbre élémentaire. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT9, pp. 1133-1142). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

modélisées à travers la notion clé d'organisation praxéologique : [T/τ/ θ / Θ][1]. Le rapport personnel aux objets de savoir se forme alors par l'intégration au fil du temps des influences exercées par les divers rapports institutionnels auxquels la personne a été assujettie.

Dans ce contexte de réforme du curriculum, notre objectif est de montrer en quoi la dimension institutionnelle des pratiques scolaires relatives à l'enseignement de l'algèbre en éclaire la dimension professionnelle : celle des pratiques enseignantes dans l'institution « Première Année du Secondaire » .La prise en compte des différentes périodes d'enseignement permet d'interroger l'influence potentielle ou effective des périodes vécues par des professeurs « expérimentés » en tant qu'acteurs en position d'enseignant sur les pratiques. Les organisations mathématiques et didactiques du savoir à enseigner du passé peuvent surgir comme des alternatives envisagées par des professeurs, ou avoir des influences plus indirectes sur les pratiques enseignantes actuelles. Ces organisations que nous qualifions d'OM et OD de référence sont considérées pour nous comme des repères auxquelles les pratiques enseignantes se réfèrent plus ou moins partiellement, de façon plus ou moins consciente.

En ce qui concerne la dimension professionnelle, Il s'agit de s'intéresser aux pratiques effectives des enseignants, plus précisément, les spécificités potentielles de l'étude des pratiques professionnelles d'enseignants dans le contexte d'une réforme (Assude 2004). Quels que soient leurs fondements, les changements induits par une réforme bousculent des habitudes de travail et des équilibres dans la relation didactique. La prescription de nouvelles pratiques et de nouveaux objectifs représente ainsi, inévitablement, une source de changement ou de résistance au changement pour les enseignants qui sont pris dans une logique de gestion. Prendre en compte cette dimension d'analyse, soulève des questions en rapport avec des formes de pratiques enseignantes, qui peuvent s'avérer de l'ordre d'une résistance au changement ou liées aux perturbations de pratiques routinières :

La résistance au changement est elle présente aussi : une force active lorsqu'on veut préserver quelque chose ou une organisation qui est stable et économe, une force d'inertie lorsqu'on s'oppose au changement d'une manière active soit d'une manière passive. (Assude 2004, p. 324).

Qu'il s'agisse de résistances ou de régulations, conscientisées ou non par les enseignants concernés, ces formes de pratiques peuvent être considérées comme l'écho de perturbations endogènes du système.

> Les régulations ou tentatives de régulations viennent répondre à des perturbations que l'on peut dire endogènes, au sens oŭ elles sont suscitées consciemment ou non par des actions du professeur ou des élèves. Les perturbations peuvent être exogènes, en provenance par exemple de l'autorité ministérielle. (Chevallard 2001, p. 246)

Nous utilisons d'une part, la Théorie Anthropologique pour éclairer la dimension institutionnelle des pratiques enseignantes étudiées en situant ces pratiques par rapport aux pratiques institutionnelles, dites de référence. Cette approche permet de modéliser ces pratiques en termes d'organisations praxéologiques (mathématiques et didactiques) et recourt à la question du rapport aux savoirs pour l'inscrire dans une problématique institutionnelle. Ce qui nous a permis d'identifier le rapport personnel des enseignants aux savoirs en jeu, comme produit de sélections, de restrictions, de concessions, d'oublis faits à propos des divers rapports institutionnels auxquels ils sont confrontés. D'autre part, en nous référant aux travaux sur l'action enseignante de Sensevy et al. (2002), précisément ce que l'on appelle

[1] Un système de types de tâches T, des techniques τ (qui permettent d'accomplir ces type de tâches donné), des technologies θ (qui justifient et légitiment ces techniques), et enfin des théories Θ (qui justifient et légitiment à leur tour ces technologies).

« modèle de l'action didactique de l'enseignant », nous étudions les techniques didactiques mises en œuvre par les enseignants se traduisant par des suites de gestes répétés, ou bien liées à la topogénése (genèse des positions respectives de l'élève et de l'enseignant). Cette notion constitue un descripteur de la coopération entre l'enseignant et les élèves dans la classe sur la base d'une analyse des savoirs en jeu. Elle focalise le regard sur ce que l'on pourrait désigner comme un système de rôles dans l'action conjointe, ou de places dans la relation. Ces rôles, ou places, nécessitent, pour être décrits, une analyse épistémique, c'est-à-dire une analyse des savoirs en jeu. Nous empruntons également à la théorie des situations didactiques : soit pour caractériser les interactions entre élèves et professeurs (en utilisant la notion d'ostension déguisée ou assumée, de contrat didactique), soit de façon plus métaphorique afin d'étudier les régulations dans les pratiques enseignantes.

L'entrée choisie pour ce deuxième empan est liée à la thématique « routines et régulations », située au carrefour de différentes approches théoriques dont celles citées plus haut. Nous nous inspirons également de la double approche pour caractériser des routines de pratiques professorales en situation de classe suivant une dimension plus mixte : exogène/endogène. Cette approche permet d'approcher la complexité des pratiques pour cerner les différentes composantes des pratiques, médiative, cognitive et institutionnelle. La composante cognitive résulte de l'analyse de ce que l'enseignant planifie pour gérer les connaissances mathématiques des élèves, la composante médiative est en lien avec les modes d'interaction en classe et la gestion par l'enseignant des l'organisation de l'étude. Dans le contexte de notre étude, la prise en compte de la combinaison de ces deux composantes permet d'approcher la logique d'action des enseignants observés .La composante institutionnelle peut être approchée par l'étude des contraintes institutionnelles pesant sur les pratiques enseignantes dans une logique de légitimité et de conformité aux nouvelles orientations. Plus précisément, elle permet d'approcher la manière dont les enseignants assument et négocient leurs assujettissements aux contraintes institutionnelles. Cette composante prend dans un contexte de réforme (éventuellement modifié de façon significative) un sens particulier dans la recherche d'un nouvel état d'équilibre ou d'un niveau de cohérence avec les composantes médiative et cognitive des pratiques .Cette cohérence modelée à la fois par l'exercice du métier, par la personnalité du professeur et par les contraintes externes peut être approchée par le repérage de régularités de routines dans les pratiques enseignantes.

Ces éléments de notre cadrage théorique étant posés, nous exposons brièvement la méthodologie suivie pour l'étude de cas qui concerne deux enseignantes expérimentées que nous appelons P1 et P2 observées à l'occasion de leurs enseignements autour des équations et des systèmes.

II. UN ECLAIRAGE SUR LE CONTEXTE INSTITUTIONNEL : LES DEUX DERNIERES REFORMES

L'histoire des réformes de l'enseignement des mathématiques en Tunisie fait apparaître deux finalités associées à cet enseignement et constamment présentes au fil du temps, une finalité culturelle et une finalité pratique. Ces deux finalités prennent toutefois une importance et des couleurs différentes en lien avec les rôles des acteurs et les perspectives d'enseignement de l'algèbre. La visée pratique des années 1980 n'a ainsi plus rien à voir avec la visée pratique des années 1990 et encore moins avec l'époque de la réforme actuelle. L'analyse fait ressortir une rupture forte avec la période de la réforme « contemporaine » encore plus accentuée avec la réforme « actuelle ».Cependant le pari de la réforme de l'enseignement tunisien à vouloir enrichir l'activité conceptuelle de l'élève devient en grande partie implicite et laisse non seulement à la charge des enseignants une marge de liberté importante dans le passage d'un registre ou d'un cadre de travail mathématique à un autre mais aussi une grande part d'autonomie dans l'organisation de l'étude. L'étude du programme entré en vigueur en 2005 et du manuel officiel associé révèle des bouleversements conséquents des organisations mathématiques et didactiques des savoirs mathématiques à enseigner en algèbre : on constate une étude simultanée d'organisations mathématiques relatives à la mise en équation et aux objets algébriques concernés. Ainsi la majorité des activités et exercices proposés présentent des habillages « concrets » qui répondent d'ailleurs aux ambitions utilitaristes affichées dans le programme. Cela va de pair avec le nombre important d'activités de découverte présents dans le manuel qui suggère une part importante laissée à l'élève dans les premiers moments de l'étude, correspondant à la première rencontre et à l'exploration d'un type de tâches. Ce déplacement topogénétique déjà amorcé avec la réforme précédente de 1998 paraît flagrant dans le nouveau manuel officiel. Ces activités révèlent un souci constant de faire émerger au sein des organisations mathématiques de savoir à enseigner, des dialectiques entre le registre algébrique et différents registres : numérique et arithmétique, graphique et fonctionnel.

Mais pour autant dans le manuel officiel, il n'apparaît aucun commentaire d'ordre technologico-théorique à ce sujet. D'ailleurs, plus généralement, le discours technologico-théorique apparaît restreint et concentré uniquement sur les savoirs algébriques. La partie identifiable à un cours de l'ouvrage se réduit grosso modo à une présentation des objets de savoir algébrique « équation à deux inconnues » et « système de deux équations à deux inconnues » (en faisant référence aux types de tâches emblématiques résoudre une équation ou résoudre un système) et une simple description en langage naturel des techniques de résolution algébrique par élimination et par substitution des systèmes d'équations. Contrairement à ce qu'on constate dans le manuel de la période précédente, les techniques de mise en équation sont rendues quasi-invisibles tout comme les techniques de résolution graphiques. Au final, les dialectiques entre différents registres qui semblent pouvoir émerger au fil des activités de découverte ne font l'objet d'aucun discours technologico-théorique au sein de la partie concernée du manuel officiel. Et on peut se demander jusqu'où ces dialectiques sont rendues visibles pour les enseignantes observées.

III. METHODOLOGIE

Notre enquête sur les pratiques enseignantes dans ce contexte de réforme de l'enseignement tunisien est amorcée par une étude d'extraits de cahiers d'élèves. Nous avons utilisé ces cahiers comme des révélateurs de pratiques de professeurs expérimentés (ayant entre 15 et 20 ans de métier). Cette première étude révèle tout d'abord une forte stabilité de pratiques enseignantes typiques de périodes d'enseignement pourtant anciennes, type réforme ou contre-réforme, qui correspondraient aux périodes vécues par les enseignants concernés, lors de leurs premières années d'exercice. Leurs pratiques seraient dès lors « peu transformées » ou marquées par les deux dernières réformes entrées en vigueur. L'étude reste ainsi organisée essentiellement autour de la dimension objet des savoirs algébriques à enseigner ; les techniques de résolution algébrique mises à l'étude font l'objet d'un discours théorique qui reste important, soutenu par des contenus formels explicites. En revanche, les techniques de résolution graphique (présentes à titre principalement illustratif des techniques algébriques) ou la mise en équation de problèmes (absente) sont loin d'occuper la place attendue.

Cette forme de résistance au changement révèle la difficulté apparente de nombreux enseignants porteurs d'un héritage culturel (mathématique et didactique) à adhérer à des innovations importantes pourtant prescrites par l'institution au travers d'une réforme. Ce constat nous paraît d'autant plus fort dans le contexte de l'enseignement secondaire tunisien que la présence d'un manuel officiel « unique » aurait pu nous laisser croire à un système de contraintes explicites imposant une « unique » façon de faire aux enseignants concernés - par contraste avec d'autres pays où, pour une même réforme du curriculum, plusieurs manuels existent, et représentant des alternatives éventuelles de pratiques, plus ou moins conformes aux attentes institutionnelles.

Deux des dix cahiers analysés se sont toutefois démarqués : l'un donnant à voir des organisations mathématiques et didactiques typiques de la période d'enseignement précédente, l'autre révélant un enseignement apparemment fidèle à la réforme actuelle.

A la lumière des résultats obtenus dans cette étude nous avons choisi de nous intéresser aux pratiques effectives de ces deux enseignantes en allant les observer dans leur classe : tout au long de leur enseignement des équations et systèmes d'équations, pendant deux années consécutives pour P1 et une année pour P2. Nous interrogeons plus particulièrement les aspects de conformité ou de non-conformité ou d'évolution des pratiques données à voir par ces deux professeurs aux organisations mathématiques et didactiques prescrites par la nouvelle réforme.

Le tableau suivant synthétise les données recueillies concernant les pratiques de P1 pendant ces deux années d'observation.

Année 1 (2005-2006)	**Année 2 (2006-2007)**
- Transcriptions correspondant à 5 heures d'enregistrement audio ou d'observation dans la classe de P1 correspondant à 5 séances (2 séances sur le thème des équations à deux inconnues ; 3 séances sur le thème des systèmes d'équations) - Cahier « modèle » d'élève, énoncés de devoirs ; - Entretien *post* séquences d'enseignement.	- Transcriptions correspondant à 5 heures d'enregistrement audio ou d'observation dans la classe de P1 correspondant à 4 séances dont une de deux heures. (2 séances sur le thème des équations à deux inconnues 3 séances sur le thème des systèmes d'équations). - Cahier « modèle » d'élève, énoncés de devoirs.

Pour P2 nous avons assisté à l'ensemble des séances consacrées à ces deux thèmes d'études puis nous avons procédé à leur transcription. L'année d'après, P2 ne modifiait pas son cours et conservait les mêmes organisations mathématiques. Nous nous sommes donc contentés des données recueilles la première année d'observation.

Année (2005-2006)
Transcriptions correspondant à 6 heures d'enregistrement audio ou d'observation dans la classe de P2 correspondant à 5 séances dont une de 2 heures. (2 séances sur le thème des équations à deux inconnues ; 3 séances sur le thème des systèmes d'équations) - Cahier « modèle » d'élève, énoncés de devoirs. - Entretien *post* séquences d'enseignement.

IV. PRINCIPAUX RÉSULTATS RELATIFS À L'ÉTUDE DES PRATIQUES DE P1 ET P2

Les résultats obtenus par l'étude des pratiques de l'enseignante P1, illustrent, par différents aspects, ce que nous avons qualifié de conformité de surface aux organisations didactiques et mathématiques mises en texte dans le manuel officiel. L'enseignante reprend les activités ou les bribes de discours technologico-théorique de l'ouvrage presque « tels quels » mais ses interventions didactiques semblent souvent modifier le projet didactique global attendu. Par exemple, sa gestion déséquilibre fortement les dialectiques prévues entre les techniques arithmético-numériques ou graphiques et les techniques algébriques, les premières étant d'emblée rendues muettes ou très faibles. Seules les techniques algébriques apparaissent sur le devant de la scène didactique comme l'illustre l'extrait ci-dessous.

Extrait du manuel officiel : Activité d'introduction des équations à deux inconnues
Deux dés équilibrés ont leurs faces numérotées de 1 à 6, on lance les deux dés et on fait la somme des nombres obtenus, on désigne par x et y les nombres qui apparaissent sur chaque face. a) Quelle relation doivent vérifier x et y si la somme obtenue est égale à 10 ? b) Dénombrer alors tous les couples (x, y).
Extrait de transcription (P1 et E : Elève)
P1 : La question c'est ? Dénombrer tous les couples x, y... E: Madame (Sara: oui) E : 1 plus 9 E : 2+8. P1 : Ne parlez pas ensemble, chut, est ce qu'on peut avoir 2+8 ? Regardez les faces ne dépassent pas… E : Oui madame, encadré entre 1 et 6. P1 : On va donc dénombrer ces couples E : les couples 4,6 ; 5,5 ; 6,4 P1 : Que peut-on dire de des couples ? Chaque couple vérifie l'équation. E : 6+4 égal 10 (P écrit x + y = 10).
Eléments d'analyse a posteriori du déroulement
P1 reformule les réponses données par les élèves formulées dans un registre numérique, dans le registre algébrique, en passant sous silence la conversion opérée.

Extrait du manuel officiel : Activité d'introduction de la technique graphique
Une salle de sport propose à ses clients les deux options ci-après. Première option : le client paye 5 dinars par séance. Deuxième option : le client paye un abonnement de 28 dinars puis 3 dinars par séance. On se propose de déterminer graphiquement l'option la plus avantageuse, en fonction du nombre de séances. 1. Exprimer le prix p(x) à payer pour x séances selon la première option. 2. Exprimer le prix p'(x) à payer pour x séances selon la deuxième option. 3. Le plan est muni d'un repère (O, OI, OJ). Déterminer graphiquement le nombre de séances pour lesquelles les deux options sont équivalentes. 4)…
Extrait de transcription (P1et E : Elève)
P1 : Bon l'équation cartésienne de la première 1ère droite, on représente graphiquement l'équation de la droite : D : y = 5x, la 2ème l'image de 0 est 28 attendez elles vont se couper en un point, est ce qu'on peut déterminer les coordonnées graphiquement puis par le calcul ? (E : brouhaha…..) Graphiquement ? Appelons A l'intersection (...). Qu'est ce que vous remarquez pour A ? Il doit vérifier la 1ère et la 2ème. Si x = 14 ? (P1écrit au tableau) Il faut vérifier à la fois la 1ère et la 2ème, à la fois, les deux options sont équivalentes lorsque (P1 écrit au tableau) p(x) = p'(x). 5x = 3x +28. On détermine 2x = 28, x = 14...
Eléments d'analyse a posteriori du déroulement
L'enseignante sollicite presque immédiatement la technique algébrique de résolution pour valider la solution trouvée par la mise en œuvre de la technique employée dans le registre graphique, qui s'en retrouve affaiblie.

La présentation de ces techniques donne d'ailleurs parfois lieu à l'ajout d'ostensifs symboliques (comme l'ensemble des solutions d'un système d'équations), sans que ceux-ci ne fassent l'objet d'une explicitation quelconque. Ainsi, l'activité 3 sur les équations à deux inconnues devient une occasion d'expliciter ce qui se cache derrière le produit cartésien :

IRXIR. Toutefois, ce changement qui ne va pas dans le sens de la réforme, apparaît comme un résidu « fort » des périodes d'enseignement antérieures vécues par P : le travail algébrique doit comporter cette dimension symbolique.

Une boite contient R boules rouges et N boules noires telles que
- Le triple de N est égal à R diminué de 3.
- Le quadruple de N est égal à R augmenté de 4.

1. Mettre le problème en équations.
2. Déterminer R et N.

Extrait de transcription (P1 et E : Elève)

P : Pour IRXIR, c'est quoi exactement, c'est un ensemble de couples.
P écrit IRXIR = {(x,y), x € IR, y € IR }
E : C'est quoi fois madame ?
P : C'est pas fois mais c'est un produit cartésien d'ensemble, bon c'est une parenthèse, voila un document qui explique cela.
P distribue aux élèves le document (en annexe), il demande aux élèves de le lire et donne la parole à un élève.
P : vous voyez on écrit aussi IR^2, ce n'est pas la multiplication mais c'est un ensemble de couples.
P : Combien il y a de couples solution d'une équation à deux inconnues ? E : une infinité / P : bien, l'ensemble des couples solution d'une équation à deux inconnues est infini puisque x et y varient dans IR.

Eléments d'analyse a posteriori du déroulement

P1 ne reprend pas les propositions d'élèves ancrées dans le registre numérique (prévues par l'analyse a priori puisqu'ils ignorent à ce stade les techniques de résolution algébrique d'un système d'équations). Elle introduit d'emblée la technique de résolution algébrique puis explicite ce qui se cache derrière l'ostensif IRXIR.

L'organisation de l'étude visiblement attendue par les auteurs du manuel officiel, qui sous-entendent un important déplacement topogénétique « vers l'élève » au fil des activités proposées, est loin de ce qui est développé au niveau de la pratique. La répartition des rôles entre enseignant et élève vis-à-vis des savoirs est invariante : le topos de l'élève se résume a maxima à la mobilisation de techniques algébriques déjà étudiées suivant un découpage prédéterminé par l'enseignante.

La pratique de la deuxième enseignante expérimentée nommée P2 montre une reprise de la majorité des activités du manuel officiel correspondant au manuel de la période d'enseignement précédente, dite contemporaine. Contrairement à P1, l'activité de mise en équation apparaît effectivement au fil des activités traitées par l'enseignante comme un enjeu explicite d'enseignement. Ce travail de mise en équation fait ainsi toujours l'objet d'un travail collectif, avec la participation quasi-totale de la classe, même pour la modélisation de situations élémentaires.

On dispose d'une orange et d'une pomme de masses inconnues et de deux masses marquées 200gr et 300gr et d'une balance à deux plateaux
un premier équilibre est réalisé lorsque la pomme et l'orange sont sur un plateau et la masse de 500gr sur l'autre, un $2^{\text{ème}}$ équilibre est réalisé lorsque l'orange et la masse de 200gr sont sur un plateau et la pomme sur l'autre
Mettre le problème en système de deux équations du 1^{er} degré à deux inconnues.
Parmi les couples suivants, quels sont ceux qui vérifient le système obtenu ?
(50,300), (250,150), (125,375), (150,350).

Extrait de transcription (P2 et E : Elève)

E1: 100 mètres Madame ?
P : oui le périmètre doit être égal à 100m
P : c'est quoi le périmètre d'abord d'un rectangle avant de passer ?
E1 : deux fois la longueur plus deux fois la largeur.
P : tout le monde est d'accord ? Votre camarade vous dit le périmètre d'un rectangle d'une manière générale c'est deux fois la longueur plus deux fois la largeur.
E : oui…
E4 : le périmètre égal (AB+BC) x 2 = 100 donc AB+BC il faut qu'il soit égal 50.

P : nous passons donc à la 2éme question, si on pose x égal AB et y égal BC quelle relation doivent vérifier x et y pour toujours obtenir un périmètre égal 100. E1 : on a x + y = 50. E2: (x+y) x2 = 100.
Eléments d'analyse a posteriori du déroulement
P2 amène progressivement ses élèves à formuler des réponses d'abord dans un langage courant, ensuite en substituant progressivement les inconnues par des grandeurs (mesures de longueurs) puis par des lettres. P2 convoque ainsi la technique de mise en équation en explicitant les tâches de conversion rendues accessibles par les élèves.

Un autre point important concerne la gestion des organisations mathématiques autour de la résolution algébrique et la dialectique à l'œuvre avec le registre numérique, mobilisée pour introduire ces nouveaux objets de savoir. P2 fait apparaître les objets d'enseignement « équations à deux inconnues » et « systèmes de deux équations à deux inconnues » comme « outils » de résolution de problèmes, en prenant toujours appui sur le registre numérique, et en suivant une évolution progressive des ostensifs symboliques (couples de nombres solutions, formulation de l'ensemble des solutions d'une équation à deux inconnues…). En outre, l'enseignante aménage le passage du registre arithmétique au registre algébrique et amène les élèves à se détacher progressivement du contexte numérique pour envisager des techniques algébriques. Les dialectiques entre registres arithmétique et algébrique sont souvent objet d'explicitation et d'un questionnement travaillé avec les élèves, ce qui contraste avec les pratiques données à voir par P1, tant pour l'année 1 que l'année 2.

Extrait de transcription (P2 et E : Elève)
P : sachant que AB plus BC égal 50 peux tu déterminer le nombre de valeurs ? E_6 : une. P : alors à chaque valeur comment tu fais pour trouver AB et BC ? Par exemple je prendrai Ahmed, comment tu as trouvé les valeurs 30 et 20, qu'est ce que tu as fait pour les trouver ? P : tu as pris … E2 : la longueur du rectangle fois2 et BC 20x2. E5 : on peut prendre madame deux nombres qui sont égaux à 50. P : leur somme égale à 50 mais vos choix comment vous le faites ? vous tâtonnez comme ça ? E : non… P : est ce que vous prenez AB égal 30 puis je te pose la question à quoi doit être égal BC dans ce cas là , comment vous faites pour trouver AB et BC ? E9 : les deux égal à 50. E4 : le périmètre égal (AB+BC) x2 = 100 donc AB+BC il faut qu'il soit égal 50. P : oui et alors comment tu donnes tes possibilités ? Comment tu les choisis ? est ce que tu les prends en même temps ou l'un après l'autre ? E2 : l'un après l'autre. P : bien tu choisis l'un après l'autre. E2 : AB =30, 30x2 = 60, le périmétre100-60 =40 donc BC 40/2 égal 20. P : pour déterminer vos possibilités vous posez une valeur pour l'un et vous déterminez l'autre en calculant en utilisant x pardon en prenant 2AB +2BC=100 Ou AB+BC= 50 ou encore (AB +BC) x2 = 100.
Eléments d'analyse a posteriori du déroulement
l'enseignante commence par expliciter les stratégies arithmétiques mises en œuvre par les élèves, puis les amène peu à peu à se détacher du contexte arithmétique pour envisager des techniques de type algébrique (fixer la valeur d'une inconnue et rechercher l'autre), sans toutefois passer par le symbolisme algébrique (équation en x et y).

Ainsi, si les organisations mathématiques et didactiques développées par P2 autour des objets algébriques - ici les équations et les systèmes d'équations à deux inconnues - paraissent, « en surface », plus éloignées de la réforme moderne, en substance, l'enseignement qu'elle délivre est globalement plus conforme aux attentes actuelles de l'institution et ceci à plusieurs points de vue : le topos de l'élève paraît nettement plus important, l'enseignante délègue plus de responsabilité aux élèves, notamment dans la modélisation des situations évoquées par les activités avant de passer à la résolution. Son mode de fonctionnement didactique met plus l'accent sur la construction autonome des apprentissages. La mise en équation est plus appréhendée par l'enseignante comme processus de modélisation que comme un type de tâche motivant l'introduction de nouvelles connaissances. Un autre point de rapprochement aux praxéologies de référence mis en avant dans notre analyse des pratiques de P2 concerne les interrelations entre équations et fonctions affines qui apparaissent à travers les tâches rajoutées par l'enseignante. Ces tâches mettent en jeu des recours à des connaissances anciennes, des intermédiaires à introduire et des dialectiques entre registres sémiotiques.

V. CONCLUSION

L'étude de cas présentée permet de pointer des perturbations endogènes propres au système institutionnel tunisien, en mettant en avant les effets apparents d'une réforme sur les pratiques des enseignantes concernées par notre enquête. Elle montre plus particulièrement la difficulté à mettre en œuvre les caractéristiques les plus innovantes de cette réforme, de part, les adaptations que les enseignantes ont fait subir à de nombreuses activités et la création de nouveaux gestes professionnels. L'étude des pratiques de professeures chevronnées, mais davantage engagées dans le processus de réforme nous permet d'interroger les capacités d'adaptation des pratiques enseignantes. L'adhésion au projet global épistémologique et didactique d'une réforme du curriculum (qui sous-entend une interprétation correcte de ce projet) joue un rôle prépondérant dans ces adaptations et ces évolutions de pratiques. La mise en regard des pratiques de P1 et de P2 nous a paru tout à fait éclairante de ce point de vue, le paradoxe étant que les pratiques de P1, pourtant davantage calquées ou inspirées du manuel officiel de la réforme moderne, nous ont semblé plus éloignées « sur le fond » de cette réforme que les pratiques données à voir par P2, que nous avions pourtant référées à la période d'enseignement antérieure. Au final, cette recherche pointe l'illusion de la conformité totale à une réforme qui, permet d'expliquer un certain nombre de paradoxes observés et l'intérêt de distinguer entre « une conformité de surface » et « une conformité en profondeur. »

REFERENCES

Assude T. (2004) Etude du curriculum de mathématiques entre changements et résistances. Liens entre écologie et économie didactique. In Coulange L., Hache C. (Eds.) (pp. 317-334) *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques* Paris : ARDM et IREM Paris7.

Ben Nejma S. (2009) *D'une réforme à ses effets sur les pratiques enseignantes : une étude de cas en algèbre dans le contexte scolaire tunisien*. Thèse des universités de Paris 7 et de Tunis.

Chachouaa H. (1997) *Fonction du dessin dans l'enseignement de la géométrie dans l'espace. Etude d'un cas : la vie des problèmes de construction et rapport des enseignants à ces problèmes*. Thèse de l'université Joseph Fourier – Grenoble 1.

Chevallard Y. (1997) Familière et problématique la figure du professeur. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 17(3), 17-54.

Chevallard Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématique* 19(2), 221-266.

Chevallard Y. (2002) Organiser l'étude 1 : Structures et Fonction. In Dorier J.-L. et al. (Eds.) (pp .1-19) *Actes de la 11éme école d'été de didactique des mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Coulange L. (2001) Evolutions du passage arithmétique-algèbre dans les manuels et les programmes du 20ème siècle. Contraintes et espaces de liberté pour le professeur. *Petit x* 57, 61-78.

Harel G. (1987) Variations in linear Algebra content presentation. *For the learning of Mathematics* 7(3), 29-32.

Robert A., Rogalski J. (2002) Le système complexe stable et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences mathématiques et technologiques* 2(4), 505-528.

Sensevy G., Mercier A., Schubauer-Leoni M.-L., Leutennegger F (2007) *Agir ensemble : L'action didactique conjointe du professeur et des élèves*. Presses universitaires de Rennes.

Sutherland R. (1991). Some unanswered research Questions on the teaching and learning of algebra. *For the learning of Mathematics* 11(3), 29-33.

ÉTUDE DES CONDITIONS POUR FAVORISER LES CONNEXIONS ETENTRE LES CONNAISSANCES : UNE APPROCHE ÉCOLOGIQUE

Christine CHAMBRIS*

Résumé – Nous étudions les conditions curriculaires pour favoriser les connexions entre les connaissances. Nous nous centrons sur les connaissances impliquant la numération décimale au primaire. Nous adoptons un point de vue écologique, relevant de la théorie anthropologique du didactique. Nous caractérisons l'état du système actuel : les praxéologies apprises sont un reflet assez fidèle des praxéologies à enseigner qui sont ponctuelles et peu reliées. Nous mettons en évidence des leviers relevant des techniques à enseigner et des tâches à prescrire susceptibles d'agir sur ces connexions. Il s'agit de connecter les types de tâches – en introduisant notamment des tâches sensibles - et d'étendre la portée des techniques en utilisant un ostensif particulier.

Mots-clefs : numération décimale, système métrique, connexions entre les connaissances, écologie des savoirs, complétude des praxéologies, transposition didactique, numération en unités.

Abstract – In this paper, we study conditions in the curriculum to make connections between knowledge. We focus on knowledge involving decimal number system in primary school. We adopt an ecological approach, from the anthropological theory of didactics. We study current ecological conditions: learned praxeologies are quite similar as praxeologies to taught which are punctual and little linked. We highlight levers in order to improve connections: they belong to technique and problems. The levers rely on connecting type of tasks - introducing some new problems - and enlarging the scope of some techniques using a specific ostensive object.

Keywords: system of place value, metric system, connections between knowledge, knowledge ecology, completeness of praxeologies, didactic transposition, reference unit for numbers.

INTRODUCTION

Les pratiques des enseignants sont fortement conditionnées par de multiples contraintes, notamment institutionnelles. L'influence des programmes et des manuels scolaires est déterminante en particulier pour les types d'exercices et les techniques de résolution enseignés (Chevallard 1985 ; Bosch et Gascon 2005 ; Roditi 2005 ; Chesnais et Horoks 2009).

Les connexions entre les connaissances des élèves constituent un enjeu majeur de l'enseignement des mathématiques. « Connections » est une entrée des « Principles and Standards for school mathematics » (NTCM), au même titre que « Problem Solving » ou « Reasoning and Proof ». Tchoshanov (2011) montre que la réussite des élèves (classes de 6^{e} à 8^{e}) est corrélée aux connaissances du type « concepts et connections » chez les professeurs. Bosch, Fonseca et Gascon (2004) étudient les échecs massifs des étudiants en mathématiques. Ils établissent que leurs connaissances à la sortie du secondaire sont trop rigides pour réussir à l'université. Ils mettent en relation ces connaissances et les contenus de manuels scolaires du secondaire. Ils caractérisent cette rigidité en termes écologiques : par exemple les types d'exercices résolus par un type donné de méthode sont peu variés.

La numération décimale est centrale dans les mathématiques en primaire. Elle intervient, explicitement ou non, dans l'étude des thèmes suivants :

- les nombres entiers avec les « nombres à plusieurs chiffres » ;

* Laboratoire de didactique André Revuz, Université Paris Diderot & IUFM, Université de Cergy-Pontoise – France – cchambris@free.fr

© Chambris C. (2012) Étude des conditions pour favoriser les connexions entre les connaissances : une approche écologique. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21^{e} siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT9, pp. 1143–1156). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

- le système métrique : les systèmes d'unités simples multiples et sous-multiples des gramme, mètre et litre constituent chacun un système d'unités à base dix ;
- les techniques opératoires des quatre opérations reposent sur les propriétés de la numération décimale de position ;
- les décimaux : malgré des différences épistémologiques majeures, entiers et décimaux partagent le même système sémiotique – le système décimal positionnel – pour les désigner.

La numération décimale intervient dans chacun de ces thèmes mais qu'en advient-il dans l'enseignement – apprentissage actuel en France ? Ces différents thèmes apparaissent-ils comme juxtaposés les uns aux autres ou bien semblent-ils se nourrir les uns les autres ? Certaines méthodes de résolution se retrouvent-elles dans l'étude des différents thèmes ou au contraire toutes sont-elles spécifiques de chaque thème ?

En France, depuis les années 1970, numération et système métrique sont étudiés dans deux domaines différents des programmes : Nombres et calcul, Grandeurs et mesures. Des évaluations à l'entrée en 6^{e} montrent des résultats médiocres aux conversions en système métrique. Parouty (2005) montre une relative faiblesse des élèves de 3^{e} à 5^{e} année dans la résolution des problèmes de numération en contexte, et des progrès des élèves *dans toute la numération* lorsque, dans le cadre d'une recherche, leurs enseignants les font travailler ces types de problèmes. Quelles sont les contraintes institutionnelles qui pèsent sur l'enseignement de ces deux thèmes, sur les relations entre eux ? Le rattachement institutionnel à deux domaines différents semble-t-il avoir une incidence sur ces relations, sur les connaissances des élèves ? Ces contraintes semblent-elles favorables aux connexions entre les connaissances ? A défaut, peut-on imaginer des modifications des contraintes institutionnelles qui y seraient plus favorables ?

Ainsi, du point de vue des finalités du groupe de travail, deux questions nous préoccupent : que nous disent les procédures des élèves des processus transpositifs de la numération de position et du système métrique actuels ? D'autres transpositions didactiques de ces objets ne seraient-elles pas mieux adaptées aux enjeux actuels de l'enseignement des mathématiques, ceux relatifs aux connexions entre les connaissances des élèves ?

I. CADRE THEORIQUE, HYPOTHESE ET METHODOLOGIE

1. Cadre théorique

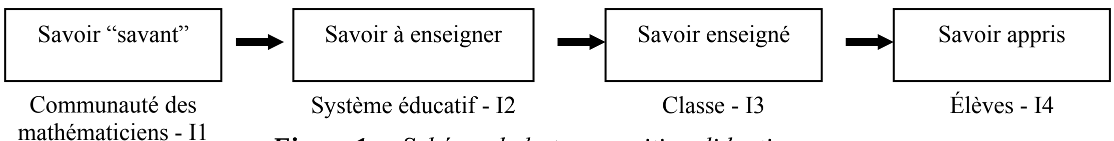


***Figure 1**. – Schéma de la transposition didactique*

Pour étudier ces questions, nous nous plaçons dans le cadre de la Théorie Anthropologique du didactique (TAD) (Chevallard 1997).

> La TAD postule qu'il n'est pas possible d'expliquer les caractéristiques du « savoir appris » (…) sans prendre en considération toutes les étapes de la transposition. (Bosch et Gascon 2005, p. 116)

Un effet de la transposition peut être que des relations entre la numération et d'autres thèmes existent dans certaines institutions sans exister dans d'autres. La dimension écologique de la TAD permet notamment d'étudier la qualité des relations entre objets d'enseignement.

Certains outils visent à mieux modéliser des éléments relatifs à la flexibilité des connaissances des élèves en étudiant l'écologie (Bosch et al. 2004, Bosch et Gascon 2005).

Avant de présenter ces outils, nous décrivons brièvement la notion clé pour les analyses en TAD, il s'agit de la *praxéologie*. Une praxéologie est un système comportant quatre composantes complémentaires permettant de décrire une pratique. Le *type de tâches* est un ensemble de tâches qui se ressemblent en ce sens qu'elles peuvent être traitées par le même *type de techniques*. Ce dernier peut être justifié par une *technologie*, les technologies s'inscrivent dans un ensemble justificatif plus vaste – la *théorie* -. Ce découpage de la pratique est caractéristique de l'institution dans laquelle la pratique est étudiée. Celle que nous étudions est l'école primaire française du début du 21^{e} siècle.

La TAD désigne par *ostensif* (Bosch et Chevallard 1999) un objet qui a une certaine matérialité, une réalité perceptible. La *numération en unités* -la désignation des nombres avec les mots *unités*, *dizaines*, *centaines*, etc.- est un ostensif important dans notre étude. Les manipulations impliquant un ostensif, légitimes dans l'institution considérée, constituent la *valence instrumentale* de l'ostensif.

Les praxéologies s'amalgament (Chevallard 1999). Une praxéologie est dite *ponctuelle* lorsqu'elle est relative à un unique type de tâches. Elle est dite *locale* lorsque des praxéologies ponctuelles sont agglomérées par une technologie commune. Bosch et al. (2004) étudient les discontinuités didactiques à la transition secondaire université en Espagne. Ils donnent sept critères pour caractériser la *complétude* des praxéologies locales qui, quoi qu'il en soit, est relative. Plus les praxéologies apprises sont complètes plus les connaissances sont susceptibles d'être flexibles, moins elles seront rigides. Nous retenons les 3 premiers critères :

1. intégration des types de tâches : les types de tâches peuvent être plus ou moins reliés soit par des discours technologiques, soit par le développement successif des techniques ;
2. existence de différentes techniques pour traiter une tâche et de critères pour choisir entre elles : sans l'existence de plusieurs techniques (qui peuvent être des variations d'une même technique) pour traiter une tâche donnée, il y a une identification absolue entre le type de tâches et la technique associée ;
3. indépendance des ostensifs intégrés dans les techniques : il n'y a pas une identification rigide entre une technique et un ostensif. Une technique donnée accepte diverses représentations ostensives.

Notre projet revient alors :

1. à étudier la complétude des praxéologies mathématiques à enseigner et apprises dans lesquelles la numération décimale intervient,
2. dans la perspective d'une action sur les contraintes institutionnelles, à proposer des praxéologies alternatives qui seraient plus complètes.

2. *Hypothèses :*

Les praxéologies apprises en numération et en système métrique sont peu reliées. Ce fait est à rapprocher d'un autre : dans les contraintes institutionnelles, les praxéologies à enseigner ne sont pas reliées.

Dans la perspective d'une action sur les contraintes institutionnelles, des leviers permettent de concevoir des praxéologies plus complètes qui relient notamment numération et système métrique.

3. *Méthodologie générale*

Un questionnaire permet de recueillir des éléments sur les praxéologies apprises en numération et système métrique. Des éléments bibliographiques apportent d'autres informations sur les praxéologies enseignées ou apprises. Des éléments sur les praxéologies actuellement à enseigner sont recueillis dans des ressources institutionnelles. Praxéologies apprises et à enseigner sont mises en relation.

Une praxéologie – dite alternative – intégrant numération et système métrique est proposée. Elle permet de réorganiser les relations entre les tâches. Elle est notamment construite à partir d'une étude de manuels scolaires antérieurs à 1970 (Chambris 2009). Elle ne vit pas dans le système éducatif français actuel (Chambris 2008) mais a une place dans l'institution « recherche en didactique des mathématiques ».

Dans ce texte, elle permet d'abord d'expliciter des relations possibles entre système métrique et numération. Ensuite, elle est discutée en termes d'alternative aux praxéologies actuellement enseignées en France. Ceci est notamment nécessaire dans la perspective d'une action sur les contraintes institutionnelles. Les caractéristiques des praxéologies actuellement dominante et alternative sont confrontées : complétude respective, caractérisation des ostensifs, liens potentiels avec les autres thèmes impliquant la numération décimale.

II. ELEMENTS SUR LE SAVOIR APPRIS

1. *Méthodologie spécifique*

Le but du questionnaire est de repérer – globalement – les effets de l'enseignement. Nous étudions les connaissances des élèves à la fin du processus d'enseignement (les 273 élèves de 12 classes en fin de 5^{e} année). Les temps de passation doivent permettre que les élèves traitent *tranquillement* les exercices proposés. Ils ne peuvent pas revenir sur un exercice passé.

Les élèves ont traité six tâches (tableau 1) de numération ou de système métrique. Certaines sont formelles, d'autres en contexte. La relation de millier à centaines intervient dans quatre tâches.

	en contexte / formel	numération / système métrique	conversion de millier en centaines	durée
Pour faire les photocopies de l'école, il faut 8564 feuilles de papier. Les feuilles sont vendues par paquets de 100. Combien de paquets faut-il acheter ?	en contexte	numération	oui	2 min
Combien de sachets de 100 g de farine peut-on remplir avec un sac de 4 kg de farine ?	en contexte	système métrique	oui	1 min 45 s
Le chiffre des dizaines de 6529 est …	formel	numération	non	1 min
Le nombre de centaines de 8734 est …	formel	numération	oui	1 min
5 kg = …….g	formel	système métrique	non	1 min 30 s
8 kg = …….hg	formel	système métrique	oui	1 min 30 s

***Tableau 1** – Questionnaire : variables et temps de passation*

Pour identifier les praxéologies apprises, nous étudions les taux de réussite (indices de l'enseignement d'au moins une technique pour traiter la tâche) et les techniques utilisées.

2. *Présentation des réponses et des techniques visibles dominantes*

Le tableau 2. indique la fréquence (par rapport au nombre total d'élèves) des réponses (correcte ou erronées fréquentes) et des techniques dominantes visibles.

Pour faire les photocopies de l'école, il faut 8564 feuilles de papier. Les feuilles sont vendues par paquets de 100. Combien de paquets faut-il acheter ?					
Réponses correcte puis erronée(s) fréquente(s) et (%)		Techniques visibles pour les réponses 86 ou 85			
86 (20%)	85 (20%)	Pas de technique visible (10%)	Division (18%)	Multiplication : 85x100 ou 86x100 (11%)	Indication de 80 (2%)

Combien de sachets de 100 g de farine peut-on remplir avec un sac de 4 kg de farine ?					
Réponses correcte puis erronée(s) fréquente(s) et (%)		Techniques visibles pour la réponse 40			
40 (32%)	25 ou 100 : 4 (11%)	Pas de technique visible (17%)	Division en ligne ou posée : 4000 : 100 (6%)	Multiplication : 40x100 (6%)	Indication de 10 (1%)

Le chiffre des dizaines de 6529 est …		
Réponses correcte puis erronée(s) fréquente(s) et (%)		Techniques visibles pour la réponse 2
2 (76%)	20 ou 29 (8%)	Pas de technique visible

Le nombre de centaines de 8734 est …			
Réponses correcte puis erronée(s) fréquente(s) et (%)			Techniques visibles pour la réponse 87
87 (21%)	7 (46%)	700 ou 734 (23%)	Pas de technique visible

5 kg = …….g		
Réponses correcte puis erronée(s) fréquente(s) et (%)		Techniques visibles pour la réponse 5000
5000 (66%)	500 (14%)	Pas de technique visible

8 kg = …….hg	
Réponse correcte et (%)	Techniques visibles pour la réponse 80
80 (71%)	Pas de technique visible

Tableau 2 *– Questionnaire : réponses et techniques*

3. *Éléments d'analyse des réponses*

Beaucoup de techniques ne sont pas visibles.

Massivement les enseignants des élèves français 3^e^ à 5^e^ année ne reconnaissent pas les problèmes de type « paquets de 100 feuilles » comme des problèmes de numération mais de division (Parouty 2005). Dans ces conditions, les tâches de ce type ne font pas partie de l'étude de la numération des entiers. Cela explique les techniques observées.

A priori, pour les « paquets de 100 g » deux grands types de raisonnements sont possibles : convertir 4 kg en 4000 g, puis diviser 4000 par 100 (ou voir 40x100=4000) ; exploiter le rapport dix entre kg (millier de g) et 100 g (centaine de g), puis 4 fois 10. Parmi les techniques visibles, le premier type (division – éventuellement erronée – ou multiplication) est très dominant. Le second est rare. La rare présence de 80 dans la résolution du problème « paquet de 100 feuilles » relève du même type de raisonnement : technique de numération qui sollicite la relation entre milliers et centaines.

Le « nombre de centaines » est peu réussi. Les réponses erronées indiquent que les élèves connaissent la position du chiffre des centaines. La difficulté vient probablement d'une méconnaissance de ce que représente le nombre de centaines, méconnaissance ayant une incidence sur la capacité à mémoriser (ou à reconstruire) la façon de le trouver.

Dans certaines classes où le questionnaire a été proposé, un tableau de conversion était affiché. La détermination du nombre d'hectogrammes dans 8 kg est plutôt bien réussie. Ceci est surtout étonnant en comparaison des résultats à l'item : 5 kg = … g. Compte tenu du faible usage social de l'hectogramme, il est probable que les élèves mobilisent le tableau (de mémoire ou pas) pour trouver convertir les kg en hg et qu'ils mobilisent leur mémoire (éventuellement défaillante) pour convertir les kg en g.

III. ÉLEMENTS SUR LE SAVOIR A ENSEIGNER

Quelles sont les contraintes institutionnelles ? Comment caractériser des liens entre numération et système métrique ?

En TAD, des liens entre numération et système métrique se traduisent par des praxéologies connectées. Ceci se manifeste par des types de tâches reliés par le développement successif de techniques ou des discours justificatifs. (critère 1)

Qu'en est-il dans les manuels scolaires actuels ? Dans cette section, nous référons explicitement à un manuel de 3^{e} année (Le Nouveau Math Elem paru en 2002, NME), représentatif d'autres manuels.

1. Premiers éléments sur les ostensifs

Entre ces deux extraits de manuels (fig. 2 et 3) relatifs l'un au système métrique, l'autre à la numération, les transformations d'écriture diffèrent : pour l'un un nombre à plusieurs chiffres et des unités métriques ; pour l'autre un nombre à plusieurs chiffres et deux types de sommes.

La deuxième de ces sommes mobilise des écritures chiffrées des puissances de dix (1 ; 10 ; 100 ; 1000…) ; dans la première, les « petits » multiples (de 1 à 9) de ces puissances de dix interviennent (80 ; 400 ; 7000…). Nous appelons ECPD cet ostensif (qui inclut donc les Écritures Chiffrées des Puissances de Dix et leurs petits multiples).

Les unités de longueur du système métrique

km	hm	dam	m	dm	cm	mm
4	5	7	2			
			3	1	8	

1 000 mètres = **1 kilomètre** 1 000 m = 1 km
100 mètres = **1 hectomètre** 100 m = 1 hm
10 mètres = **1 décamètre** 10 m = 1 dam

Exemples : • 4 km 5 hm 7 dam 2 m = 4 572 mètres • 318 cm = 3 m 1 dm 8 cm

Figure 2 *– NME (p. 60)*

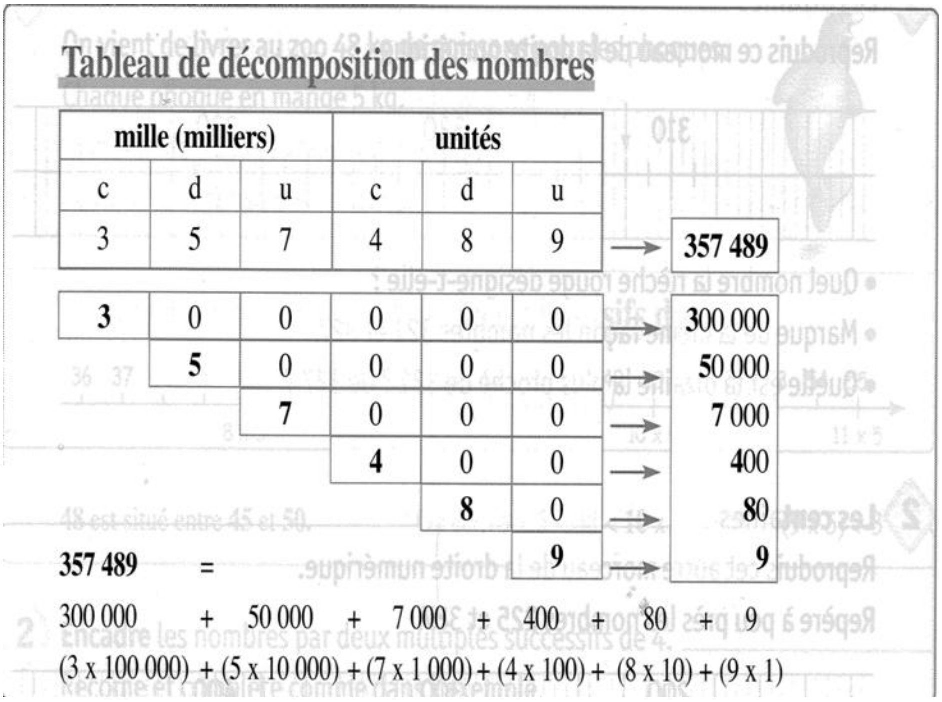


Tableau de décomposition des nombres

mille (milliers)			unités			
c	d	u	c	d	u	
3	5	7	4	8	9	→ 357 489
3	0	0	0	0	0	→ 300 000
	5	0	0	0	0	→ 50 000
		7	0	0	0	→ 7 000
			4	0	0	→ 400
				8	0	→ 80
					9	→ 9

357 489 =

300 000 + 50 000 + 7 000 + 400 + 80 + 9

(3 x 100 000) + (5 x 10 000) + (7 x 1 000) + (4 x 100) + (8 x 10) + (9 x 1)

Figure 3 *–NME (p. 133)*

2. Les relations entre les unités

Dans NME, si la relation 1 millier = 10 centaines est formulée celle de centaine à dizaines ne l'est dans aucune des leçons de rappel sur les nombres de 3 chiffres. Cette absence n'est pas un phénomène exceptionnel dans les manuels actuels.

Dans les deux domaines, interviennent donc des types de décompositions (tâches) et ostensifs différents. Les relations entre unités de numération (voire de système métrique) ne sont pas indiquées systématiquement. Cela a-t-il une incidence sur la complétude des praxéologies à enseigner ? Examinons les techniques actuellement à enseigner.

3. « Chiffre des » et « Nombre de »

En France, le « nombre de » est souvent opposé au « chiffre des ». La technique pour déterminer le « chiffre des » consiste à repérer la « bonne » colonne, celle pour déterminer le « nombre de » à repérer la bonne colonne puis à « couper » le nombre en ne gardant que les chiffres de gauche souvent sans justification (nous appelons cette technique : la troncature).

Le « nombre de » est un exemple de système tâche / technique pour lequel une technique unique a été associée à une tâche (critère 2 de « non » complétude).

4. Numération : technique dominante pour le dénombrement

Considérons la tâche : Combien y a-t-il de petits cubes (figure 4) ? Deux techniques dominent pour traiter cette tâche. Elles mobilisent les ECPD.

1ère technique	2ème technique
Étape 1 :	Étape 1 :
Un, deux, trois petits cubes (3),	Un, deux, trois petits cubes (3),
Dix, vingt petits cubes (20)	ou un, deux (2x10),

Cent, deux cents, trois cents, quatre cents, cinq cents (500)	ou un, deux, trois, quatre, cinq (5x100),
Mille, deux mille, trois mille, quatre mille (4000)	ou un, deux, trois, quatre (4x1000),
<u>Étape 2 :</u>	<u>Étape 2 :</u>
Production d'une ligne de calcul utilisant des écritures chiffrées des puissances de dix (1, 10, 100…) : 4000+500+20+3.	Production d'une ligne de calcul utilisant des écritures chiffrées des puissances de dix (1, 10, 100…) : (4x1000)+(5x100)+(2x10)+3.

Puis calcul des sommes en 4523. Le tableau de la figure 3, avec ses zéros, indique comment calculer ces sommes.

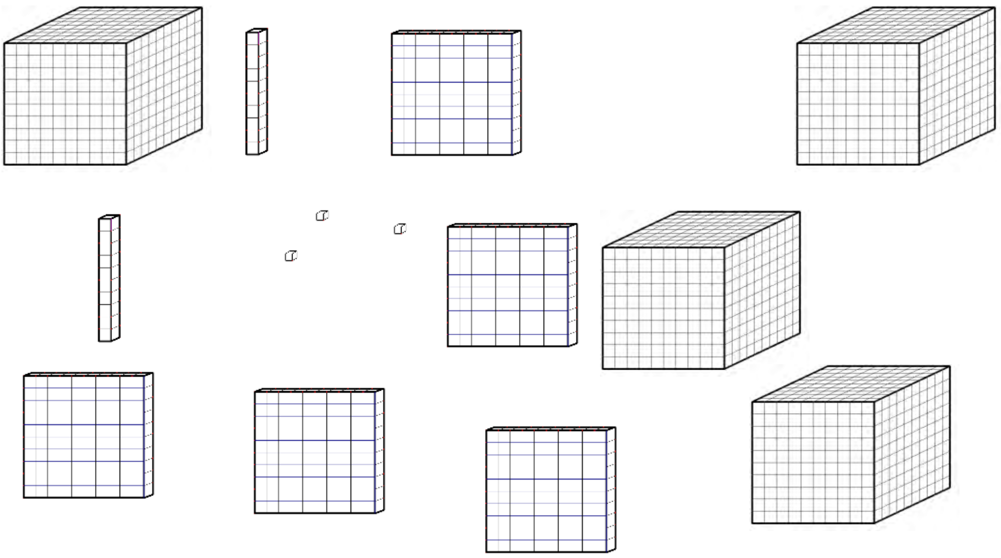


Figure 4 *– Représentation de matériel de numération – base dix*

5. Système métrique : technique dominante pour les conversions

La technique préconisée pour réduire 3 m 1 dm 8 cm en 318 cm (figure 2) consiste à mettre chaque chiffre dans sa colonne puis à repérer la succession des chiffres, puis à se référer à la dernière unité (à droite). Cette technique est dominante pour les manipulations dans le système métrique. Elle permet aussi de convertir 5 kg en g et 8 kg en hg (cf. questionnaire), à condition de « gérer » les cases non occupées en les comblant par des zéros.

6. Mise en relation des praxéologies apprises et à enseigner

L'étude des techniques apprises montre peu d'utilisations visibles de la relation entre centaine et millier dans les problèmes paquets de 100 feuilles et de 100 g. L'étude des manuels montre que ces relations ne sont pas travaillées voire pas énoncées.

Pour ces problèmes, si la présence d'une division indique clairement que les élèves reconnaissent un problème de division, celle d'une multiplication est plus ambiguë. En effet, les ECPD sont les « outils » de la numération et la présence des multiplications 40x100=4000 ou de 85x100=8500 est le signe d'une interprétation des écritures chiffrées : s'agit-il de calcul ou de numération ? Quelle que soit la réponse à cette question, ce n'est pas la relation entre millier et centaine qui est reconnue.

La tâche « nombre de » est peu réussie, un certain nombre d'élèves semblent « couper » le nombre dans le mauvais sens : ils gardent uniquement les chiffres de droite ! Cette procédure erronée est le signe d'un apprentissage échoué de la technique de la troncature.

Les problèmes du type paquets de 100 g sont peu répandus dans les manuels actuels. En revanche, des problèmes relevant des quatre opérations impliquant des changements d'unités sont prescrits. Ceci peut expliquer que les élèves voient dans les premiers des problèmes de division.

Pour les conversions d'unités métriques, la seule technique des manuels de 3^{e} année est celle que nous avons décrite. Le kg et le g sont enseignés en 2^{e} année, alors que les unités intermédiaires ne le sont qu'à partir de la 4^{e}. Par ailleurs, en 2^{e} année, le programme indique la relation entre kg et g et l'étude des nombres jusqu'à 1000. Certains manuels (pas tous !) n'étudient les nombres que jusqu'à 999 et font une leçon sur la relation entre kg et g dans laquelle ils indiquent sans la moindre référence aux centaines 1 kg = 1000 g. Les différences institutionnelles entre les approches des différentes unités sont peut-être des éléments d'explication aux différences de réussite aux exercices entre 5 kg = … g et 8 kg = … hg.

IV. PRAXEOLOGIE ALTERNATIVE : DISCOURS DE POSITION

Voici maintenant deux types de discours explicatifs récurrents sur lesquels vont reposer des techniques alternatives présentées ensuite.

1. Technologies alternatives

- position : dans l'écriture chiffrée d'un nombre, on compte les positions à partir de la droite : les unités sont en 1ère, les dizaines en 2^{e}, les centaines en 3^{e}, les milliers en 4^{e}. Une version plus générale de ce discours est : dans l'écriture chiffrée d'un nombre chaque position désigne une unité dix fois plus grande que celle qui est à sa droite.
- traduction des préfixes métriques en unités de numération : kilo - mille, hecto - cent, déca - dix, déci – dix, centi – cent, milli – mille.

2. Technique alternative pour dénombrer (figure 4)

Voici une technique alternative.

Étape 1 : compter les *différentes unités* :
- les cubes : un, deux, trois,
- les dizaines de cubes, un, deux,
- les centaines de cubes : un, deux, trois, quatre, cinq,
- les milliers de cubes : un, deux, trois, quatre.

J'ai donc : 3 cubes, 2 dizaines de cubes, 5 centaines de cubes et 4 milliers de cubes.
Étape 2 : écrire en chiffres le nombre de cubes (utiliser un discours de position).
On compte les positions à partir de la droite : Les unités sont en première, les dizaines en 2e, les centaines en 3e, les milliers en 4e : il y a 4523 cubes.

Cette technique, sans ECPD, était dominante avant la réforme des mathématiques modernes. Elle a progressivement disparu après.

Dans certains manuels actuels, une technique ressemble à « l'étape 1 » mais elle mène à l'écriture directe des « chiffres » 3, 2, 5 et 4 dans les cases du tableau de numération. Les unités ne sortent pas du tableau !

3. Système métrique : technique alternative pour les décompositions - recompositions

Pour présenter les techniques alternatives en système métrique, nous distinguons plusieurs types de conversions : certains mobilisent principalement la position (décomposition – recomposition) et d'autres les relations entre unités.

Considérons : 3 m 1 dm 8 cm = 318 m. Il s'agit d'une décomposition - recomposition. La signification des préfixes permet d'obtenir : si l'unité est le cm, la dizaine est le dm, la centaine est le m car un m. Ensuite, le discours de position donne : si l'unité est le cm, 3 représente des centaines (3e position), 1 des dizaines (2e position), 8 des unités (1ère position), il y a donc 318 cm.

4. Extension de la technique

Supposons que chaque cube de la figure 4 pèse 1 g. Combien l'ensemble pèse-t-il ? 3 cubes pèsent 3 g, 1 dizaine de cubes pèse une dizaine de gramme soit un dag, etc. Donc l'ensemble des cubes pèse 4 kg 5 hg 2 dag 3 g qui s'écrivent aussi 4523 g (cf. §3).

La technique alternative de dénombrement fonctionne qu'il s'agisse de compter des cubes ou des grammes.

Les techniques pour les trois tâches, dénombrement de cubes et de grammes, décomposition – recomposition sont ainsi articulées, reliées par des éléments technologiques. Dans les manuels actuels les techniques dominantes pour les deux premières tâches ne sont pas articulées : ECPD et tableau de conversion. Par ailleurs, la troisième tâche n'existe pas.

5. L'organisation du savoir : « chiffre des » et « 5 kg= ...g »

Le discours de position relie déjà trois tâches. Il permet aussi de traiter « Le chiffre des dizaines de 6529 est … » (questionnaire). On enchaîne préfixe (kilo – mille) et position (millier en 4e) pour traiter la décomposition – recomposition « complète : 5 kg = ….g ».

Les deux tâches apparaissent alors comme deux tâches du même type relevant du discours positionnel précédé d'une adaptation consistant en la traduction du préfixe kilo pour la deuxième. Ce type inclus plus généralement les décompositions – recompositions en système métrique et en numération. Leurs techniques ont en commun une utilisation du discours de position auquel peuvent être adjoint d'autres éléments, notamment la signification des préfixes métriques. Les tâches de ce type sont utilisées dans les techniques des tâches plus complexes, telles celles de dénombrement.

V. PRAXEOLOGIE ALTERNATIVE : DISCOURS DE RELATION ENTRE UNITES

1. Technologie alternative

Au IV, nous avons introduit deux types de technologies. En voici un troisième qui va aussi soutenir les nouvelles techniques. Il s'agit des discours du type « relation entre unités », par exemple 1 millier, c'est dix centaines.

2. Une nouvelle technique pour une nouvelle tâche

Pour la *conversion élémentaire*, convertir 3 milliers en centaines, ce discours fournit une technique : 1 millier, c'est 10 centaines. 3 milliers, c'est 3 fois plus. Donc, 3 milliers, c'est 30 centaines.

3. L'organisation du savoir : la relation entre centaines et millier

Cette technique de *conversion élémentaire* permet, moyennant certaines adaptations, de traiter les 4 tâches du questionnaire impliquant la relation entre millier et centaines. Par exemple, pour convertir 8 kg en hg, après avoir transformé kg et hg en milliers et centaines à l'aide des préfixes, il reste à convertir 8 milliers en centaines. Pour le nombre de centaines dans 8734 : on repère 8 milliers (position), qu'on convertit en 80 centaines (§2) ; auxquelles s'ajoutent 7 centaines (position).

Les quatre tâches se trouvent reliées par un même type de technique : on constitue ainsi un type de tâches qui les amalgame.

VI. DISCUSSION : MISE EN EVIDENCE DE CONDITIONS ECOLOGIQUES FAVORABLES AUX CONNEXIONS

1. *Complétudes respectives des praxéologies alternative et dominante*

La praxéologie alternative n'existe pas dans l'institution école primaire actuelle, les éléments qui suivent constituent donc des hypothèses à mettre à l'épreuve.

Les technologies alternatives relient d'une part les quatre tâches qui mettent en relation millier et centaines, d'autre part avec la « position » les deux tâches « kg en g » et « chiffre des ». Le premier critère de complétude est en jeu dans cette réorganisation. Les trois technologies alternatives permettent de produire des techniques susceptibles de réorganiser les relations entre les différentes tâches à enseigner en système métrique et en numération.

Disposer des technologies permet des petites variations dans les techniques possibles : on peut automatiser certains enchaînement d'étapes de façon à produire des techniques plus rapides pour certaines tâches, par exemple produire la technique de la troncature pour trouver le « nombre de » à partir de l'utilisation des relations entre unités. Ceci contribue au deuxième critère de complétude.

Disposer de l'ostensif « numération en unités » enrichit *a priori* le répertoire des techniques possibles puisque toutes les techniques en ECPD continuent à exister et de nouvelles techniques apparaissent. (3e critère)

Le questionnaire ne permet pas d'identifier toutes les techniques apprises par les élèves. Néanmoins, les divisions (et multiplications), très présentes pour l'étude des deux problèmes de centaines en contexte, et absentes pour les questions formelles (nombre de centaines et conversion de kg en hg) montrent que ce ne sont pas les mêmes techniques qui sont utilisées. De plus, les techniques qui sollicitent le rapport dix sont très minoritaires parmi les techniques visibles. Ce point est largement compatible avec l'étude des contraintes institutionnelles : les relations entre unités ne sont pas énoncées de façon systématique dans les leçons. Le discours de relation entre unités qui constitue un ciment dans la praxéologie alternative est anecdotique dans la praxéologie dominante et ces tâches pas davantage que leurs techniques ne peuvent être reliées.

Dans les praxéologies à enseigner, les 4 tâches de relations entre unités sont des représentants de 3 types probablement non articulés. Les éléments dont nous disposons amènent à envisager une organisation praxéologique dominante des savoirs qui regrouperait :

- les problèmes à opération (paquets de 100 feuilles, paquets de 100 g),
- les exercices de numération (nombre de, chiffre des),
- les conversions (qui se font à l'aide d'un tableau ou de mémoire).

Notamment, le couple (nombre des, chiffre de) constitue une praxéologie locale dans laquelle les deux techniques ne sont pas reliées par une technologie. Les techniques de conversion sont indépendantes de la signification et des relations entre les unités en jeu.

Revenons sur la praxéologie alternative pour mettre en évidence des leviers utilisés dans son élaboration et pour discuter certains choix.

2. Intégration des tâches du type « relation entre unités »

Pour construire la praxéologie alternative, nous avons introduit des technologies, techniques et tâches.

L'intégration des tâches du type « relation entre unités » dans un nouveau type utilise plusieurs leviers. L'un est l'introduction d'une technique intégratrice, la technique de conversion élémentaire. Des adaptations permettent de traiter toutes les tâches du type. Elle repose sur le discours de relation entre unités qui existe mais est peu sollicité dans la praxéologie dominante.

L'autre levier est l'introduction de la tâche élémentaire qui n'existe pas dans l'enseignement primaire actuel : convertir 30 centaines en milliers (et convertir 3 milliers en centaines). La technique alternative ne peut se formuler sans elle. Une autre technique alternative aurait-elle pu remplir la même fonction, associée à une tâche différente ?

Depuis la réforme, le type « convertir 30 centaines en milliers » n'existe plus en numération des entiers en primaire en France mais son équivalent existe en système métrique. Est-ce parce qu'il n'existe pas en numération que nos quatre tâches apparaissent actuellement isolées ?

Discussion : la tâche élémentaire de conversion favorise les connexions. Est-ce la seule tâche possible ? Un document institutionnel récent se préoccupe des connexions entre système métrique et numération. Les conversions y relèvent seulement de l'étude du système métrique. Le document préconise d'introduire la tâche « nombre de » en système métrique. Il postule implicitement que des tâches communes sont nécessaires aux liens. Le document semble cependant manquer d'une analyse des besoins dans les autres domaines. Par exemple, pour justifier les retenues dans les opérations, les conversions du type 23 dizaines = 2 centaines et 3 dizaines sont souvent nécessaires : les tâches de conversion élémentaire sont plus adaptée que le « nombre de ».

3. Choix d'un ostensif

L'ostensif numération en unités a permis de formuler les praxéologies alternatives.

Très présentes avant la réforme des mathématiques modernes, les unités de numération ont vu leur influence diminuer fortement pendant et après. Dans l'enseignement actuel, cet ostensif a une valence instrumentale souvent réduite : il ne sort pas (ou peu) du tableau de numération. Le travail avec des décompositions en ECPD (figure 3) est apparu vers la fin de la réforme. Ce double mouvement a des raisons multiples. Les ECPD sont le signe de la transposition de la théorie savante de la numération : 10^3 devenant 1000. Et en 1980, il s'agissait probablement d'« éliminer » les « vieilles » unités de numération. Si le registre des écritures chiffrées dont relèvent les ECPD existe indépendamment de l'époque, il n'en va pas de même de celui des unités de numération. Ces dernières sont moins que les ECPD une pratique sociale de référence. Par suite elles n'émergent pas naturellement de situations empruntées à la « vie courante ». Une étude de manuels des années 80 desquels elles sont absentes le montre. (Chambris 2008).

Sur le plan cognitif, au début du primaire, l'utilisation des ECPD est délicate puisqu'il faut montrer coefficients et unités dans des multiplications. Les mots des unités de la numération sont probablement plus adaptés au développement de jeunes élèves.

Thanheiser (2009) identifie deux conceptions correctes de la numération décimale de position chez les futurs enseignants. L'une d'elle « group of ones » n'est pas suffisante pour appréhender la justification des techniques opératoires car elle ne permet pas d'interpréter les chiffres des algorithmes comme des nombres d'unités – en relation les unes avec les autres –. Un 4 en troisième position est vu comme une écriture courte de 400 et non comme 4 centaines qui seraient aussi 40 dizaines (conception « reference unit »). L'absence d'unités de numération semble ainsi peu favorable au développement d'une conception de type « reference unit ».

Les écritures en unités de la numération sont plus congruentes avec les unités métriques que les ECPD, cette congruence est susceptible de favoriser l'adaptation des techniques d'un domaine à l'autre.

Les unités de numération sont un ostensif *naturel* dans l'étude des décimaux puisqu'elles interviennent à l'oral : on dit 27 centièmes pour 0,27 et non 27 centaines pour 2700. En calcul mental, même pour les entiers, les unités de numération interviennent pour formuler certaines techniques : par exemple pour calculer mentalement 251+40, on calcule 251+4 dizaines, on ajoute donc 4 dizaines à 5 dizaines.

Malgré toutes ces raisons, l'ostensif numération en unités est actuellement peu répandu pour l'étude des entiers dans les manuels scolaires français de primaire.

VII. CONCLUSION

Les éléments sur les praxéologies apprises semblent indiquer que les praxéologies à enseigner déterminent assez fortement les praxéologies apprises. Ces praxéologies font intervenir les ostensifs ECPD et unités de numération mais elles semblent peu connectées en particulier car la valence instrumentale du second ostensif est réduite. Ces praxéologies restent donc ponctuelles et ne peuvent s'amalgamer.

Grâce aux praxéologies alternatives introduites, les conditions repérées par Bosch et al. (2004) permettent de caractériser la situation actuelle et aussi des conditions favorables pour recréer des amalgames praxéologiques en agissant à la fois au niveau des tâches : pour introduire certaines tâches clés, et au niveau des techniques et des technologies : pour amalgamer les différents types de tâches. L'ostensif « numération en unités » semble favoriser les connexions impliquant la numération de position.

Nous avons mis en évidence des organisations mathématiques à l'œuvre et des alternatives. Plusieurs questions viennent alors : quelles organisations didactiques mettre en place pour produire des organisations mathématiques plus complètes que celles qui sont actuellement enseignées ? Quels effets pourrait-on alors effectivement observer sur les connexions entre les connaissances des élèves ? Quelles ressources et quelles formations sont-elles nécessaires pour diffuser ces praxéologies ?

REFERENCES

Bosch M., Chevallard Y. (1999) La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en didactique des mathématiques* 19/1, 77-123.

Bosch M., Fonseca C., Gascon J. (2004) Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 24(2/3), 205-250.

Bosch M., Gascon J. (2005) La praxéologie comme unité d'analyse. In Mercier A. et Margolinas C. (Eds) *Balises en didactique des mathématiques. Cours de la XIIe école d'été de didactique des mathématiques.* Grenoble : La pensée sauvage.

Chambris C. (2008) *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20e siècle. Connaissances des élèves actuels.* Thèse de l'université Paris–Diderot.

Chambris C. (2009) Contribution de l'étude des grandeurs à l'étude de la numération de position avant la réforme des mathématiques modernes, en France, au cours élémentaire (2ème et 3ème années de primaire). In Ouvrier-Buffet C.et. Perrin-Glorian M.-J (Eds.) (pp. 211-222) (2009) *Actes du colloque DIDIREM: Approches plurielles en didactique des mathématiques.* Paris: Laboratoire de didactique André Revuz, Université Paris Diderot.

Chesnais A., Horoks J. (2009) Analyse et comparaison de pratiques effectives d'enseignants et conséquences en termes d'apprentissages. *EMF2009* - Dakar.

Chevallard Y. (1985) *La transposition didactique- Du savoir savant au savoir enseigné.* Grenoble : La pensée sauvage.

Chevallard Y. (1992) Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 12(1), 73-112

Chevallard Y. (1997) Familière et problématique, la figure du professeur. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 17(3), 17-54.

Chevallard Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19(2), 221-266.

Parouty V. (2005) Compter sur les erreurs pour compter sans erreurs : état des lieux sur l'enseignement de la numération décimale de position au cycle 3. In Commission Inter-IREM COPIRELEM (Ed., *Actes du XXXIème colloque sur la formation des maîtres (Cédérom). Toulouse : IREM de Toulouse.*

Roditi E. (2005). *Les pratiques enseignantes en mathématiques. Entre contraintes et liberté pédagogique*. Paris : L'Harmattan.

Tchoshanov M. A. (2011) Relationship between teacher knowledge of concepts and connections, teaching practice, and student achievement in middle grades mathematics. *Educational Studies in Mathematics* 76(2), 141-164.

Thanheiser E. (2009) Preservice elementary school teachers' conceptions of multidigit whole numbers. *Journal for Research in Mathematics Education* 40(3), 251-281.

MANUELS SCOLAIRES

Champeyrache G., Fatta J.-C. (2002) *Le Nouveau Math Elem CE2* Paris : Belin (NME)

Peltier M.L., Briand J., Ngono B., Vergnes D. (2009) *Euro Maths CM1*. Paris : Hatier

PRATIQUES D'ENSEIGNEMENT ET PRODUCTION D'INEGALITES DANS LES APPRENTISSAGES MATHEMATIQUES A L'ECOLE

Lalina COULANGE*

Résumé – Notre proposition de contribution s'inscrit dans le cadre d'une recherche commune menée du réseau RESEIDA. Notre travail vise à élucider la co-construction d'inégalités dans les apprentissages mathématiques à l'école : quels sont les effets des pratiques enseignantes sur ces processus de différenciations ? Comment se construisent ou se consolident les différences entre les élèves vis-à-vis des apprentissages ? L'étude présentée découle d'observations réalisées dans deux classes de CM2 (10-11 ans) au public socialement et scolairement hétérogène. Nous étudions les pratiques d'enseignement des mathématiques des deux maîtresses, et les processus de différenciations dans les apprentissages de leurs élèves.

Mots-clefs : différenciations dans les apprentissages, enseignement et apprentissage des mathématiques, pratiques enseignantes, école primaire

Abstract – Our proposition is part of a research within the network RESEIDA. Our research work aims to study the co-construction of differences in learning mathematics in primary education. What are the effects of teacher practices on differentiation? How do these practices reinforce or decrease pupils' differences in the learning of mathematics? Our study is based on observations in two classes of grade 6 (pupils aged 10-11) with a diverse public. We study the teaching of mathematics of the two teachers and the differentiated learning for their pupils.

Keywords: differentiated learning, teaching and learning of mathematics, teaching practices, primary school

Le réseau RESEIDA[1] est un regroupement de chercheurs en sociologie de l'éducation, en psychologie et en didactique des disciplines piloté par J-Y. Rochex. Au sein de ce réseau sont conduites et mutualisées des recherches sur la construction d'inégalités dans les apprentissages scolaires des mathématiques Un ouvrage (Rochex et Crinon 2011) synthétise une part de ces recherches qui adoptent une « approche relationnelle et contextuelle des productions d'inégalités, et plus largement des pratiques scolaires ». Notre étude se situe dans ce cadre et s'appuie sur un corpus de données issu d'une recherche commune et conduite par différents chercheurs du réseau dans deux classes de CM2 de la région parisienne.

I. UNE APPROCHE DIDACTIQUE DE LA DIFFERENCIATION

Notre recherche vise à élucider les effets des pratiques enseignantes sur des apprentissages d'élèves en mathématiques, sous l'angle de la différenciation. Cela nécessite d'interroger d'emblée dans l'étude des pratiques enseignantes, ce qui est à l'origine de la construction d'inégalités dans les apprentissages scolaires. Il s'agit aussi d'interroger les différences entre les élèves et la production de ces différences au fil de ces pratiques enseignantes. On entrevoit la complexité des phénomènes étudiés au sein de cette boucle.

Le modèle de structuration du milieu issu de la théorie des situations (Brousseau 1998, Margolinas 2004) nous sert d'ancrage théorique pour appréhender cette complexité. Ce modèle reprend l'idée fondamentale dans la théorie des situations que l'activité d'un sujet (professeur ou élève) est modélisable du point de vue des connaissances avec un milieu dans le cadre d'une situation. La structuration du milieu permet de distinguer plusieurs niveaux de situations ou de milieux pour le professeur et pour les élèves, que nous résumons ci-après. Si nous avons choisi de présenter séparément ces deux points de vue : celui de la situation du

* IUFM d'Aquitaine et LACES, Université de Bordeaux – France – lalina.coulange@iufm.u-bordeaux4.fr

[1] REcherches sur la Socialisation, l'Enseignement, les Inégalités et les Différenciations dans les Apprentissages

© Coulange L. (2012) Pratiques d'enseignement et production d'inégalités dans les apprentissages mathématiques à l'école. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT9, pp. 1157–1167). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

professeur et des élèves sont à considérer de façon conjointe. Nous ne rendons pas compte ici de la dynamique à considérer entre les niveaux d'activité de l'élève et du professeur.[2]

Figure 1 *– Positions du professeur*

Concernant le professeur et ses positions résumées ci-dessus, nous nous interrogeons également sur les circonstances du travail du professeur qui l'amènent à privilégier certaines dimensions de son activité. L'étude de ces circonstances renvoie à la double approche développée par Robert et Rogalski (2002). Si nous ne reprenons pas à notre compte les descripteurs de cette approche, elle joue un rôle crucial en arrière plan de notre réflexion : elle nous amène à essayer de saisir la rationalité, mais aussi la raison ergonomique de l'activité du professeur, dans nos interprétations.

Figure 2 *– Positions de l'élève*

Concernant le point de vue des élèves, nous détaillons certains éléments propices à l'étude des différenciations dans les apprentissages. Margolinas (2004) met en avant la possibilité de bifurcations au sein du modèle dans le cadre de situations ordinaires d'enseignement. Ces bifurcations correspondent à différentes branches d'une situation didactique : leur première interprétation de cette situation (-3), leurs premières actions (-2), ou leur activité intellectuelle (-1) les amènent à investir différents chemins. Ces cheminements renvoient à différents apprentissages (-1 et 0), qui correspondent ou non à ceux visés par l'enseignant. Par rapport au modèle initial, nous avons modifié et introduit de nouvelles positions surplombant davantage la situation didactique. A l'instar de Castela (2008), nous considérons que des bifurcations peuvent également s'opérer à partir des situations didactiques, au travers de positions dites « autodidactes »[3] d'élèves (+1 et +2). L'élève peut ou non effectuer des

[2] Chaque niveau du modèle est envisagé en interaction avec une position déterminée ou contrainte à la fois des niveaux inférieurs et des niveaux supérieurs. Par exemple, le professeur en situation didactique interagit avec ce qui résulte de ses observations et de ses actions liées à la dévolution de cette situation, tout en étant contraint par son projet de leçon.

[3] Le terme « autodidacte » utilisé par Castela et que nous avons ici repris à notre compte est peut-être discutable : il semble sous-entendre que ces niveaux sont sous l'entière responsabilité de l'élève, alors qu'une des thèses que nous défendons est précisément la nécessité d'une participation enseignante à l'activité afférente à ces positions surdidactiques. Peut-être faut-il troquer le terme « autodidacte » pour celui « d'étudiant » ?

décontextualisations, des mises en relations entre savoirs anciens et nouveaux en s'appuyant sur différentes situations : c'est ce qui détermine son activité au sein de ces nouvelles positions. L'ensemble de ces positions contribue à façonner une position globale : celle d'écolier (+3) qui caractérise le rapport aux savoirs scolaires. Nous nous interrogeons sur la dynamique de ces positions d'élèves et sur leur impact dans les processus de différenciation.

II. CORPUS ET METHODE DE RECHERCHE

Notre recherche s'appuie sur un corpus de données recueilli dans deux classes situées dans des écoles qui accueillent une population d'élèves socialement et scolairement hétérogène. Nous avons mené des observations longitudinales au sein de ces deux classes que nous désignerons par la suite comme la classe de la maîtresse E. et de la maîtresse N : une centaine d'heures d'enregistrements vidéo ainsi que des travaux d'élèves ont régulièrement été recueillis au long d'une année scolaire complète. Le contrat d'observation passé avec les maîtresses peut être qualifié de « naturaliste ».[4] L'étude de ce corpus a été faite suivant différents grains d'analyses (locales ou globales), de différents points de vue (du professeur, de l'élève, de leur activité conjointe), selon un « double principe de récurrence et de convergence » commun aux chercheurs de RESEIDA (Rochex et Crinon 2011). Nous communiquons ici des résultats liés à l'étude des pratiques de E. et de leurs effets sur les apprentissages des mathématiques. Nous reviendrons en conclusion sur l'étude des pratiques enseignantes des deux maîtresses pour mettre en avant les récurrences observées et des convergences avec d'autres recherches sur les pratiques d'enseignement des mathématiques à l'école.

III. UNE SITUATION D'ENSEIGNEMENT DES POURCENTAGES

1. *Quelques mots sur le savoir mathématique à enseigner*

Nous évoquons préalablement quelques spécificités du savoir mathématique à enseigner : les pourcentages Ce savoir est à la croisée de deux thèmes d'étude : la proportionnalité et les fractions. Il repose sur un savoir théorique commun aux deux thèmes d'étude précités : l'équivalence ou l'égalité de rapports. La principale raison d'être du calcul des pourcentages en mathématiques est liée à la comparaison de rapports : il s'agit de comparer des fractions aux dénominateurs différents ou de comparer des proportions[5] faisant référence à des « touts » différents. Ce savoir a ceci de particulier qu'il a une utilité sociale évidente et reconnue. C'est ce rôle important et visible dans la vie du citoyen qui explique peut-être que son enseignement est envisagé de façon précoce alors qu'il s'agit en fait d'une notion « dérivée » plutôt complexe de la proportionnalité. A l'école, c'est en continuité de la proportionnalité que son enseignement est envisagé. Dans le document d'application des programmes officiels en vigueur à l'époque de nos observations, il est écrit que les calculs de pourcentage reposent sur les mêmes procédés ou « raisonnements personnels appropriés » que ceux envisagés pour la résolution de problèmes de proportionnalité. Pour autant, rien n'est dit sur la façon d'illustrer l'intérêt ou la justification mathématique de la notion de pourcentage.

[4] Les chercheurs ne sont pas intervenus dans le travail des deux enseignantes, ou dans le fonctionnement de leurs classes. Il avait été convenu que nous souhaitions observer l'ordinaire de leur travail et de celui des élèves. N. et E. n'ont pas été associées à l'étude du corpus ou à nos interprétations. Si à leur demande, nous leur avons rendu compte de certains résultats saillants dans nos analyses « après coup », cette restitution a gardé un caractère spontané et nous n'en avons pas fait un objet de recherche

[5] Au sens statistique et non au sens euclidien du terme proportion : précisément quand on fait appel au calcul de pourcentages, on n'est pas assuré qu'il y ait « *proportio* ».

A l'instar de ce qui est proposé dans certains manuels écrits en collaboration avec des chercheurs en didactique (comme le manuel Euromaths de Peltier et al. 2009), on envisage qu'une situation d'enseignement amenant la comparaison de sous-populations au sein populations différentes pourrait toutefois jouer ce rôle.[6]

2. Analyse de la première séance sur les pourcentages dans la classe de E.

Le document sur lequel s'appuie la première séance observée dans la classe de E. fait apparaître un tableau de résultats d'élections au sein de la commune et plusieurs questions :

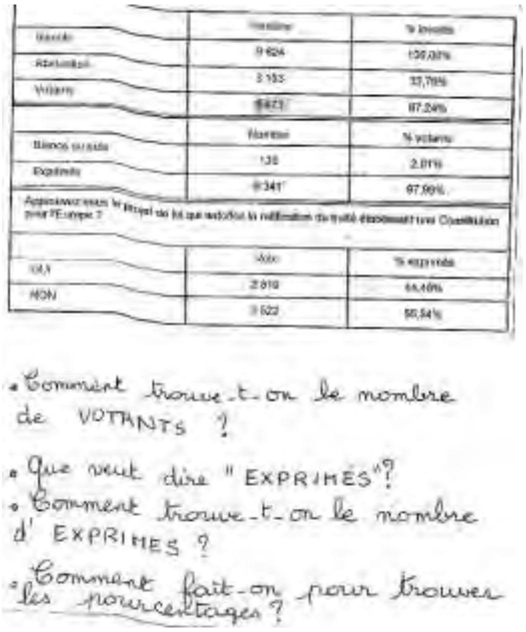


***Figure 3** – document élève – première séance « pourcentages et élections »*

Le choix de ce contexte d'élections comme support pour une situation d'enseignement se justifie du point de vue de l'utilité sociale de la notion de pourcentage. Mais les données numériques de ce tableau ne sont pas élémentaires pour des élèves de CM2 : on a affaire à des grands nombres, à des approximations décimales dans le cadre des pourcentages calculés. La question posée : « comment fait-on pour trouver des pourcentages ? » peut étonner : elle pourrait appeler à une réponse directe du type « on regarde dans la colonne de droite », et si on considère qu'elle convoque un calcul à faire, on ne voit pas quel(s) pourcentage(s) est à calculer, sur la base de quelles données numériques.

E. distribue le document aux élèves. Elle leur demande d'en prendre connaissance, de le commenter. C'est l'occasion pour elle de revenir sur du vocabulaire spécifique des élections. Ce début de séance est plus relatif à des contenus d'éducation civique. E. interroge néanmoins la classe sur ce *que l'on voit dans la colonne de droite dans le tableau*. *Des pourcentages, des pour cent, sur cent* répondent les élèves. La maîtresse reprend l'intervention d'un élève pour préciser : *c'est sur 100 personnes ; s'il y a 2 pour cent, ça veut dire 2 personnes sur 100*. Au travers de cet échange, peu d'élèves semblent de fait connaître ou saisir la signification d'un pourcentage.

[6] Voici un exercice d'Euromaths CM2 qui illustre ce type de situations : « dans une classe de 20 élèves, 12 élèves disent qu'ils aiment aller à la piscine. Dans une autre classe de 30 élèves, 15 élèves disent qu'ils aiment aller à la piscine. Dans quelle classe, l'activité piscine est-elle l'a plus appréciée. » (op. cité, p. 173).

Après une phase de travail et de synthèse autour des deux premières questions, à la demande de l'enseignante, les élèves s'engagent dans la recherche d'une réponse à la question : *comment fait-on pour trouver les pourcentages ?* E. reformule cette question à l'oral, en la contextualisant et en explicitant qu'il s'agit de trouver une méthode de calcul : *vous allez essayer de voir comment on a fait pour calculer les pourcentages d'abstention et de votants ?*

Cela donne lieu à une première bifurcation massive de la situation par rapport aux prévisions de E. et à son projet d'enseignement. La quasi-totalité des élèves constate que la somme des deux pourcentages évoqués est égale à 100% et propose de retrancher l'un ou l'autre à 100%. La tâche mathématique prévue (découvrir la formule du pourcentage à partir du tableau) est de fait impossible à accomplir, à moins de déjà connaître la formule en question, et de savoir l'appliquer dans un contexte non trivial (identifier les variables en jeu pour instancier la formule, opérer sur des grands nombres). Rien n'indique aux élèves à partir de quelles données il s'agit de calculer les pourcentages évoqués. D'autre part, deux des questions précédentes les conduisent à effectuer des différences au sein d'une seule colonne. Conformément à un contrat didactique local, les élèves pensent qu'il s'agit de faire de même pour calculer les pourcentages. Voyant que cela ne se déroule pas comme prévu, la maîtresse s'adresse à la classe pour délimiter la tâche initiale :

> Ne travaillez par sur cette colonne ! (dit-elle en pointant la colonne % inscrits) Cette colonne, il faut trouver… donc c'est ces nombres-là qu'on a (E pointe la colonne Nombre) il faut qu'on trouve, on ne les avait pas… donc la question est comment je fais pour trouver ce nombre là et ce nombre là qui est dans la colonne des pourcentages.

Les élèves font des tentatives de calculs tous azimuts avec les nombres du tableau (en respectant pour la plupart la consigne « utiliser les données de la colonne de gauche »). Mais la tâche prescrite par l'enseignante reste infaisable. La combinatoire des opérations possibles sur les données offre un grand nombre de possibilités, que les élèves explorent de façon aléatoire, sans atteindre le résultat recherché. Et pour cause : l'opération attendue (qui fait intervenir une division d'un nombre par un nombre plus grand puis une multiplication par 100…) est improbable. Devant le caractère infructueux de leurs recherches, des élèves commencent à se décourager et à se dissiper. Cela conduit E. à intervenir de nouveau. Elle transforme nettement la tâche initiale en précisant les données numériques du tableau sur lesquelles opérer. E. demande aux élèves de trouver « quelle opération » permet de retrouver le résultat *avec ces deux nombres-là : 3153 et 9624*, qu'elle recopie au tableau. Affirmant *il y a une seule opération à faire*, elle se reprend immédiatement : *une opération à faire, une et une deuxième*, puis *seulement avec ces deux nombres-là, essayez de voir apparaître ces chiffres 3, 2, 7, 6, avec la calculatrice*. Cette intervention de E. représente une réduction importante de l'incertitude autour de la tâche à accomplir. Pourtant, les élèves ne trouvent pas immédiatement. Le calcul attendu la division de 3153 par 9624, n'est pas envisagé. la division avec un dividende plus petit que le diviseur, n'ayant sans doute pas ou peu été rencontrée auparavant. Quelques minutes plus tard, l'enseignante étaye encore, allant jusqu'à l'effet Topaze[7] :

> On a fait le moins, on a fait le plus… qu'est ce qui reste ? Multiplier, diviser, alors, allez-y !

[7] La première scène du célèbre Topaze de Marcel Pagnol illustre un des processus fondamentaux dans le contrôle de l'incertitude : le maître fait une dictée à un mauvais élève ; ne pouvant pas accepter trop d'erreurs trop grossières et ne pouvant pas non plus donner directement l'orthographe demandée, il « suggère » la réponse en la dissimulant sous des codages didactiques de plus en plus transparents. (…) Si les connaissances visées disparaissent complètement, c'est l'effet Topaze. (Brousseau 1998)

Un élève finit par trouver : *j'ai fait la division inverse* dit-il à la maîtresse à qui il montre le résultat sur sa calculatrice. La maîtresse l'envoie au tableau écrire l'opération (*3153 : 9624* qu'elle commente : *ah c'est plus petit, c'est ça qui vous gêne !*) et le résultat (*0,3276*). Elle reprend la main pour donner du sens à ce calcul par rapport au contexte d'origine :

> Ça veut dire que je fais 3153, j'ai 3153 personnes qui se sont abstenues sur… quand on dit sur, c'est une division, je divise…3153, je vais le diviser par le nombre de gens inscrits. Ça va me donner 0, 3276, et après, je le multiplie par quoi pour avoir le pourcentage ? Par 100, ça (en pointant 0,3276), c'est pour une seule personne. Si vous voulez, j'ai divisé le nombre d'abstentions par le nombre de votants, combien de pour 100… et je multiplie par 100 pour voir sur 100 et ça me donne 32,76.

E. écrit au tableau :

Il y a 3153 abstentions sur 9624 inscrits. Je fais l'opération sur 9624 inscrits. Je fais l'opération (3153 : 9624) × 100 $\frac{3153}{9624} \times 100 = 32,76\%$

Elle demande aux élèves de trouver sur la base de cet exemple, comment procéder pour calculer le pourcentage de votants :

> E. : Qui me dit comment je fais pour trouver 62, 24 / Elève : En fait, on avait 6, le nombre de votants et on l'a divisé par le nombre d'inscrits 9624. E. : Et ça donne quoi ? / Elève : 67,24 / E. : ah non, 0,6724 et après qu'est ce qu'on fait ? Je multiplie par 100…

La séance se conclut ainsi : les élèves recopient le premier exemple indiqué au tableau.

L'ensemble de la situation correspondant à cette séance d'introduction des pourcentages comporte *a priori* un faible potentiel d'apprentissage. Les redéfinitions successives de la tâche initiale impossible à accomplir, la réduction progressive de l'incertitude pour les élèves, au travers des interventions de l'enseignante, appauvrissent le milieu de la situation, à un point tel que l'on peut supposer la quasi-nullité d'apprentissages autour des pourcentages. Pourtant, de nombreux élèves se prêtent au jeu suggéré par la maîtresse. On voit une majorité d'élèves, notamment parmi ceux en difficulté ou de niveau moyen, montrer de l'enthousiasme dans la recherche aléatoire de « l'opération magique ».[8] Cet engagement massif des élèves dans cette situation de découverte « impossible » est liée aux caractéristiques de la situation : l'abondance des données permettant aux élèves d'effectuer de nombreux calculs (et donc « d'agir ») et les interventions de la maîtresse qui relance la recherche dès qu'elle s'essouffle.

Et pourtant, ce n'est qu'à la fin de la séance où E. reprend l'opération donnée par l'élève et se lance dans de brèves explications au sujet des pourcentages, que des apprentissages peuvent se produire. Le statut de ce bref épisode conclusif est ambigu : il ne s'agit pas tant d'une institutionnalisation des connaissances et savoirs ayant émergé en situation, que d'une ostension déguisée, comme si rien ou presque ne s'était produit auparavant. Gageons que le statut ambigu de cet épisode pèse fortement sur les apprentissages visés : les élèves identifient-ils l'enjeu d'enseignement de cette dernière phase collective ? En situation didactique, en s'appuyant sur les exemples commentés par E. et de la phase de recherche qui a précédé, les élèves ont pu retenir des éléments variés relatifs ou non au calcul de pourcentages : *« il faut diviser », « il faut diviser le plus petit par le plus grand », « il faut diviser puis multiplier par 100 », « il faut diviser le plus petit par le plus grand, puis multiplier par 100 »*, etc.

[8] Cette opération n'ayant a priori aucune signification particulière pour les élèves : elle semble en quelque sorte « tirée du chapeau ».

3. *Analyse de la deuxième séance sur les pourcentages dans la classe de E.*

Le document distribué aux élèves en début de deuxième séance correspond à un tableau à compléter, organisé de la même façon que celui de la séance précédente, comportant les résultats des élections du département.

	Nombre	% inscrits
Inscrits	684 036	100,00%
Abstention	215 638	31,52%
Votants	468 398	68,48%
	Nombre	% votants
Blancs ou nuls	8 597	1,84%
Exprimés	459 801	98,16%
Approuvez-vous le projet de loi qui autorise la ratification du traité établissant une Constitution pour l'Europe ?		
	Voix	% exprimés
OUI	229 880	49,99556
NON	229 921	50,004 458

• Calcule :
- le nombre de votants
- le nombre d'exprimés
- les pourcentages du oui et du non

***Figure 3** – document élève – deuxième séance « pourcentages et élections »*

Ce tableau incite à un calcul de pourcentage plus « classique » en apparence, avec des cases à compléter suivant des calculs laissés à la responsabilité des élèves. Mais si l'on considère les connaissances mises en jeu autour des pourcentages pour compléter les cases correspondantes (*pourcentages du oui*, et *du non*), le saut de complexité entre la première et la deuxième situation est conséquent. Les nombres sont plus grands : on passe des milliers aux centaines de mille. Les variables à considérer dans l'application de la formule ne sont pas les mêmes : il faut les retrouver en identifiant la partie et le tout à considérer (le nombre de *oui* et le nombre d'*exprimés*[9]) en décontextualisant les exemples précédents. Les calculs soulèvent des problèmes d'approximation : les divisions indiquées ne tombent pas juste.

Nous n'analysons ici que quelques épisodes révélateurs de processus de différenciation à l'œuvre, pour certains élèves.

Alors que les autres élèves sont répartis en binômes, Ivan travaille seul et complète le tableau (y compris les pourcentages), en à peine 5 min. avec l'aide de sa calculatrice. Quand le vidéaste lui demande s'il a travaillé à la maison après la première séance, il affirme, *avoir relu l'exercice parce qu'il n'était pas sûr d'avoir tout bien compris en classe, comment on calcule les pourcentages*.[10] Si l'on en croit ses propos, on peut supposer que cet élève adopte de lui-même une position d'autodidacte local, voire global par rapport à la situation didactique correspondant à la séance précédente : il a opéré les décontextualisations nécessaires pour identifier la technique de calcul d'un pourcentage à partir des exemples donnés en fin de séance.

Si les autres élèves réussissent à répondre aux questions concernant les nombres de votants et d'exprimés, ils éprouvent des difficultés à calculer les « pourcentages du oui et du non ».

[9] qui n'apparaît pas dans la même zone du tableau que les nombres et les pourcentages des oui, et des non. Un indice textuel (l'intitulé « %inscrits » de la colonne de droite) peut cependant aider les élèves à comprendre que c'est bien le nombre d'inscrits, qui fait l'objet de la question précédente qui est à prendre en considération.

[10] A la question : « tout seul ou avec tes parents ? ». Il répond : « tout seul ».

Ils s'engouffrent dans des stratégies erronées, inspirées de la première séance (par exemple diviser le *nombre de oui* par le *nombre d'inscrits*). Suite aux aides de E. qui circule dans les rangs, ils finissent pour la plupart par trouver la bonne méthode de calcul.

Fatimata et Anaïs réunies dans un binôme, sont en difficulté dès la première question : « calcule le nombre de votants ». Fatimata interpelle E. : *« Maîtresse, on a rien compris. »*. A la surprise de l'enseignante, l'opération que l'élève propose de faire pour trouver le nombre de votants est une division ! Anaïs, interrogée par la maîtresse, approuve ce choix. Suivant un effet de contrat didactique, les élèves cherchent à réinvestir « l'opération magique » de la séance précédente dans un contexte inapproprié. L'enseignante déconcertée les désavoue : *« il ne faut pas faire n'importe quelle opération ! Il faut réfléchir un peu… »*. A travers l'évocation d'une situation concrète de vote au sein de la classe (« rappelez-vous, quand on a fait des élections dans la classe »), elle leur fait trouver la solution. Un peu plus tard, pour le calcul des pourcentages, Fatimata arrivera à faire le calcul attendu, mais après une prise d'indices importante auprès du binôme voisin et une demande de confirmation de ces informations auprès de la maîtresse *(« il faut diviser par le nombre d'exprimés ? »)*.

Ces épisodes permettent de confirmer les effets potentiellement différenciateurs de la première situation « élections et pourcentages ». Les tentatives de réponse de Fatimata et d'Anaïs aux premières questions montrent une interprétation inappropriée du contrat didactique, associé au réinvestissement de l'opération mise en jeu lors de la séance précédente. Ceci illustre l'absence d'apprentissages visés en lien avec les pourcentages à l'issue de la première séance, pour ces deux élèves. Tandis qu'Ivan accomplit seul et rapidement les tâches prescrites, y compris celles autour des pourcentages qui sous-entendent pourtant un important saut de complexité. Les écarts déjà présents entre les apprentissages d'élèves semblent se creuser au cours de cette deuxième séance. Au vu des interactions filmées entre E. et certains d'entre eux, l'hétérogénéité initiale des élèves est accentuée par la nature diverse et la fréquence variée des aides apportées par l'enseignante.

IV. PRATIQUES ENSEIGNANTES ET TRAJECTOIRES D'ELEVES DANS LES APPRENTISSAGES SCOLAIRES EN MATHEMATIQUES

1. *Quelques caractéristiques des pratiques enseignantes de E.*

Les choix d'enseignement faits par E. reposent principalement sur des principes génériques que nous situons au niveau pédagogique ou éducatif (+3). La situation d'enseignement des pourcentages évoquée ci-avant illustre ce phénomène didactique d'effacement des projets didactiques locaux et globaux (niveaux +2 et +1). La référence à une réalité citoyenne prime pour E. plus que la façon dont les savoirs visés vont être mis en fonctionnement dans cette situation : « *suite aux résultats des élections ce week-end, je me suis dit que c'était l'occasion de voir les pourcentages* ». Le cumul de nos observations dans la classe de cette maîtresse nous laisse penser que ses choix de situations d'enseignement reposent sur des motivations non spécifiques des savoirs mais plutôt d'ordre pédagogique ou éducatif : telle que la motivation des élèves par les aspects « concrets », voire ludiques des situations proposées, l'occasion de les faire travailler en équipe ou de coopérer.

Cet effacement des savoirs mathématiques à enseigner dans le projet d'enseignement des mathématiques de E. va de pair avec des dysfonctionnements dans les processus complémentaires de dévolution et d'institutionnalisation des situations didactiques. Du point de vue de la dévolution, les situations font la part belle à une activité visible et « matérielle »

[11] des élèves qui convoque rarement les connaissances visées ou les savoirs relatifs aux projets didactiques de la maîtresse. Par exemple dans la première séance sur les pourcentages, les élèves effectuent des calculs à partir du tableau de données numériques. Pour autant, la notion de pourcentage ne peut émerger sans interventions didactiques fortes de la part de l'enseignante.

Dès lors, à l'instar de ce que nous avons observé dans cette situation d'enseignement, les phases conclusives des situations observées dans la classe de E. reposent davantage sur de l'ostension déguisée où les savoirs sont révélés au fil d'exemples traités collectivement que sur un processus d'institutionnalisation à proprement parler. Ces phases de conclusion sont brèves. Elles portent parfois sur la formulation de connaissances mathématiques qui restent contextualisées dans les situations didactiques (comme le calcul d'un pourcentage dans un cas particulier en fin de première séance). D'autres fois, ces épisodes conclusifs sont centrés sur des démarches peu spécifiques de savoirs : par exemple, sur la résolution de problèmes en général, ou sur les usages des instruments en géométrie.

Nous avons exploré les effets de ces pratiques d'enseignement en étudiant sur le long terme des trajectoires d'élèves dans les apprentissages des mathématiques. Nous exposons à titre d'exemple les résultats d'une étude concernant une élève de la classe de E. : Fatimata (l'élève déjà évoquée dans le II.).

2. Trajectoire d'une élève : Fatimata

Au vu d'une évaluation élaborée par les chercheurs[12] et passée en début d'année scolaire et de nos premières observations, Fatimata est une élève en difficulté en mathématiques. Elle est fréquemment sollicitée par E. en début de séance pour lire la consigne, en expliciter certains aspects : la maîtresse s'assure ainsi que Fatimata investisse la situation. Cette élève se retrouve dès lors de façon récurrente en situation d'action (-2) : elle accomplit des tâches qui convoquent des connaissances élémentaires comme : effectuer des multiplications simples pour compléter un tableau décomposant une multiplication de nombres à plusieurs chiffres ou positionner un gabarit de triangle quelconque puis colorier de couleurs différentes les 3 angles du triangle « qui se suivent et se répètent » tout au long du pavage obtenu. Parfois, les stratégies qui en résultent sont erronées et reposent sur une lecture inadéquate du contrat didactique (comme c'est le cas pour l'épisode cité à l'occasion de la deuxième séance sur les pourcentages). Quoiqu'il en soit, Fatimata ne parvient pas à accéder aux apprentissages en jeu. Les aides de la maîtresse à son égard sont nombreuses mais restent procédurales au sens de Pariès et al. (2008) : par l'intermédiaire d'un recadrage très étroit de son activité, elles permettent à Fatimata de réussir les tâches prescrites, indépendamment des apprentissages visés.[13] Tout au long de cette année scolaire, Fatimata adopte une posture d'écolière confortable (+3), qui participe pleinement à la vie de la classe de mathématiques tout en restant éloignée des enjeux de savoirs (+2 et +1, voire 0).

Cette trajectoire d'élève est proche de celles décrites globalement par Bonnéry (2007) d'élèves qui se retrouvent en situation de décrochage à l'entrée au collège. Si nous n'avons pu observer Fatimata l'année suivante, les données dont nous disposons à ce sujet (appréciations,

[11] Le mot « matériel » est à entendre ici au sens de la théorie des situations didactiques : comme convoquant des connaissances naturalisées.

[12] Le sujet de l'évaluation en mathématiques a été élaboré sur la base d'exercices proposés dans les évaluations nationales à l'entrée en sixième de l'époque, par Denis Butlen, Marie-Lise Peltier et Lalina Coulange.

[13] Ces « modes d'aide qui n'en sont pas » sont fréquents de la part des enseignants qui s'adressent aux élèves en difficulté. Là encore de nombreuses recherches sur les pratiques enseignantes et la construction d'inégalités scolaires convergent sur ce point (Peltier et al. 2004, Bonnéry 2009, Crinon et Rochex 2011).

moyennes sur des photocopies de bulletins des trois trimestres) confirment ce décrochage par rapport aux enseignements reçus en sixième.

V. CONCLUSION

Nous constatons l'effacement des projets didactiques, et donc de réflexion spécifique sur les savoirs mathématiques à enseigner dans les pratiques des deux maîtresses N et E. Ces manières de faire ne sont pas le propre de ces enseignantes. D'autres recherches menées dans le cadre du réseau RESEIDA étudient des faits d'observation proches. Par exemple, les recherches de Margolinas et Laparra (2008) qui reposent sur un fond théorique commun pointent le même genre de phénomènes (sur la suffisance d'une activité visible des élèves, les dysfonctionnements de l'institutionnalisation, etc.) à partir d'observations dans des classes de GS-CP (élèves de 4-8 ans). On peut également citer Bonnéry (2009) qui introduit la notion de dispositif pédagogique pour marquer la récurrence des faits observés en typologisant non pas des pratiques enseignantes, mais des formes d'enseignement modelées par des influences du contexte social et institutionnel. Des travaux menés en dehors du réseau nous paraissent d'une proximité frappante : ceux de Roditi (2010) ou de Chopin (2008), mais aussi ceux antérieurs de Peltier et al. (2004). Ces recherches montrent un brouillage de la forme didactique à l'école qui peut être interrogé du point de vue d'une logique de la polyvalence ou pédagogique qui primerait sur celle de la spécificité des savoirs (Margolinas et Laparra 2008), ou d'une logique éducative qui pèserait sur celle de l'instruction (Roditi 2010, Peltier et al. 2004).

Du point de vue des élèves, nous avons montré comment cet effacement des savoirs mathématiques se traduisait par des effets potentiellement différenciateurs dans les apprentissages. Notre analyse de la situation d'enseignement des pourcentages dans la classe d'une des deux maîtresses révèle que des élèves investissent des cheminements différents au sein de la situation didactique. Le flou laissé autour des tâches réellement « dévoluées » aux élèves, le statut ambigu de la phase conclusive de la première séance qui relève davantage de l'ostension que de l'institutionnalisation ; les aides (souvent à caractère procédural au sens de Pariès et al. 2008) données par l'enseignante aux élèves, tout ceci contribue à fabriquer de l'hétérogénéité dans les apprentissages réalisés au sortir de cette situation. Enfin, nous avons montré comment sur du plus long terme, des chemins de traverse au sein des situations didactiques sont régulièrement investis par certains élèves de la classe comme Fatimata. Dès lors, sous des visages parfois différents d'écoliers, se dessinent des portraits d'élèves en difficulté en mathématiques.

REFERENCES

Bonnéry S. (2007) *Comprendre l'échec scolaire. Elèves en difficultés et dispositifs pédagogiques.* Paris : La Dispute.

Bonnéry S. (2009) Scénarisation des dispositifs pédagogiques et inégalités d'apprentissage. *Revue française de pédagogie* 167, 13-23.

Brousseau G. (1998), Fondements et méthodes de la didactique. In Balacheff N., Cooper, M., Sutherland R., Warfield V. (Eds.) (pp. 47-112)*T héorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Butlen D., Charles-Pézard M., Masselot P. (2010) De l'analyse de pratiques à des scénarios de formation : accompagnement de professeurs des écoles enseignant les mathématiques affectés en première nomination en REP. In Goigoux R., Ria L., Toczeck-Capelle M.-C. (Eds.) (pp. 81-99) *Les parcours de formation des enseignants débutants*. Clermont-Ferrand : Presses universitaires Blaise Pascal.

Castela C. (2008) Approche didactique des processus différenciateurs dans l'enseignement des mathématiques : l'exemple des apprentissages relatifs à la résolution de problèmes, In Rouchier A., Bloch I. (Eds.) (pp. 89-14) *Perspectives en didactique des mathématiques.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Margolinas C. (2004) *Points de vue de l'élève et du professeur : Essai de développement de la théorie des situations didactiques*. Habilitation à diriger les recherches. Université de Provence.

Margolinas C., Laparra M. (2008) Quand la dévolution prend le pas sur l'institutionnalisation. In *Actes du colloque « Les didactiques et leur rapport à l'enseignement et à la formation ».* Bordeaux.

Pariès M., Robert A., Rogalski J. (2008) Analyses de séances en classe et stabilité des pratiques d'enseignants expérimentés du second degré. *Educational Studies in Mathematics* 68, 55-80.

Peltier M.-L. (Eds.) (2004) *Dur d'enseigner en ZEP*. Grenoble : La pensée sauvage.

Rochex J-Y., Crinon J. (2011) *La construction des inégalités scolaires, au cœur des pratiques et dispositifs d'enseignements*, Rennes : Presses Universitaires de Rennes, Coll. Paideia.

Roditi E. (2010) Les pratiques enseignantes en mathématiques d'un professeur d'école et leur évolution en dix années d'exercice. *Actes du Colloque international de l'AREF (2010).*

L'UTILISATION PAR LES ENSEIGNANTS DES RESSOURCES EN MATHEMATIQUES : ANALYSE COMPARATIVE DES SCENARIOS DE CINQ ENSEIGNANTS A GENEVE

Audrey DAINA*

Résumé – Les moyens d'enseignement romands en mathématiques, ressource unitaire pour toutes les écoles primaires genevoises, sont conçus de manière à laisser à l'enseignant une grande liberté quant aux choix et à l'organisation des activités. Notre recherche vise à décrire de quelle manière différents enseignants genevois choisissent, préparent et réalisent en classe une suite d'activités dans le cadre de l'enseignement de la notion d'aire. Nous présentons ici une première partie de nos résultats qui concerne une analyse comparative des scénarios de cinq enseignants. Nous chercherons à mettre en évidence les critères qui entrent en jeu dans le choix des activités et les différentes étapes de préparation des activités.

Mots-clefs : pratiques enseignantes, ressources, manuel scolaire, structuration du milieu, double approche

Abstract – In the French-speaking part of Switzerland, there are official textbooks and teachers' methodology book in mathematics, which are the same for all the elementary schools. However, these unitary resources are conceived in order to leave to the teacher a large space of freedom in the choices and in the organization of the activities. This research plans to describe how various teachers in Geneva choose, prepare and realize in class a series of activities in the domain dedicated to the notion of area. In this presentation, we will make a comparative analysis of six teachers. We will try to bring to light various criteria which occur in the choice of the activities and how the teachers prepare these activities before the class.

Keywords: Teacher practice, pedagogical resources, text-book, structuration of the milieu, double approach

I. INTRODUCTION

Nous présentons ici une partie des analyses issues de notre travail de thèse en cours dans l'équipe DiMage[1]. Notre intérêt se porte sur les pratiques enseignantes et particulièrement sur les dimensions plus privées de l'action enseignante qui concernent la préparation des cours et l'usage des moyens d'enseignement COROME (Commission Romande des Moyens d'Enseignement), ressource officielle pour l'enseignement des mathématiques au primaire en Suisse romande.

Notre problématique se base sur la particularité du contexte dans lequel nous avons fait nos observations. En effet, ces ouvrages COROME, distribués dans toutes les classes du canton comme base pour l'enseignement des mathématiques, sont conçus de manière à laisser à l'enseignant une grande liberté quant aux choix et à l'organisation des activités de façon à permettre une différenciation de l'enseignement suivant le contexte pédagogique.

Comme le soulignent Bailleul et Leroyer (2009), la liberté potentielle accordée aux enseignants quant aux choix des méthodes et des démarches implique une responsabilité. Dans la lignée de ce travail, nous cherchons à mettre en évidence de quelle manière est gérée cette liberté face aux contraintes et aux responsabilités que le terrain implique. Nous nous situons dans la problématique du groupe 9 car nous cherchons à étudier « des pratiques enseignantes dans leur articulation avec les activités des élèves à travers les contraintes et les marges de manœuvre, les ressources, les dilemmes et les tensions » (appel à contribution du GT9 à EMF2012).

* Université de Genève – Suisse – audrey.daina@unige.ch

[1] Didactique des Mathématiques Genève

© Daina A. (2012) L'utilisation par les enseignants des ressources en mathématiques: analyse comparative des scénarios de cinq enseignants à Genève. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT9, pp. 1168–1181).
http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

Notre méthodologie est cependant différente de celle du travail que nous venons de citer, car nous nous situons dans une analyse de cas. En effet, nous avons observé cinq enseignants genevois de 4ème, 5ème et 6ème primaire[2]. L'objectif de notre travail est de décrire de quelle manière ces enseignants préparent et réalisent en classe une séquence dans le cadre de l'enseignement de la notion d'aire.

Dans un premier temps, nous analysons le contexte dans lequel évoluent les enseignants. Ceci implique de recenser et d'analyser les différents documents à disposition pour préparer les cours, notamment les moyens d'enseignement COROME. Cette étape permet de mettre en évidence les ressources et les contraintes en jeu dans la préparation des séances.

En parallèle, nous analysons les scénarios proposés en classe par les enseignants. Au niveau global, nous analysons premièrement le scénario du point de vue des contenus mathématiques et deuxièmement en considérant l'organisation de ces contenus prévue par les enseignants. Nous basant sur les résultats de l'analyse des scénarios et l'analyse des entretiens que nous avons eus avec chaque enseignant, nous mettons en regard les choix des enseignants et les particularités du contexte.

Nous avons fait le choix pour ce texte de ne présenter que trois résultats de nos analyses en cours. Nous allons premièrement considérer le contexte et poser la question des tensions que les ouvrages COROME, tels qu'ils sont conçus, peuvent impliquer sur le terrain. Nous montrerons ensuite quel potentiel de travail mathématique est présent dans les moyens d'enseignement COROME. Finalement nous comparerons ce résultat à l'analyse des scénarios *a maxima.* Le terme *a maxima* désigne le potentiel contenu dans le scénario, c'est-à-dire ce que le projet de l'enseignant a l'ambition de faire travailler. Nous mettrons en évidence le potentiel investi par les différents enseignants.

II. CADRE THEORIQUE

Dans le but d'analyser des pratiques enseignantes, nous tentons de combiner deux modèles théoriques : le modèle de la structuration du milieu (Comiti, Grenier, Margolinas 1995) et le modèle de la double approche (Robert et Rogalski 2002). Une dimension théorique de notre travail de thèse est de tenter de mettre au jour dans les faits les liens possibles entre ces deux approches. Cependant le propos de ce texte étant principalement axé sur une partie de nos analyses, nous ne développons de ces différents cadres théoriques que les aspects qui sont directement évoqués dans les résultats et nous introduisons un troisième cadre théorique, celui de la TAD (Chevallard 1999) dont nous nous sommes inspirée pour l'analyse des tâches.

Le modèle de la double approche, nous fournit un cadre pour l'analyse des scénarios en modélisant les relations entre pratiques enseignantes, activités des élèves et savoir visés.

Pratiques enseignantes → activités du professeur en classe sur un contenu → activités (possibles) des élèves → apprentissage visé. (Robert 2008, p. 39)

On distingue ici les activités (possibles) des élèves, qui sont déterminées par une analyse *a priori* de la situation, et les activités effectives des élèves, qui ne peuvent être effectivement observées pour une classe entière étant donné que chaque élève agit différemment (Robert 2008). L'analyse du scénario permet de déterminer quelles activités des élèves l'enseignant peut potentiellement provoquer en classe.

---

[2] Correspond au degré CM1, CM2 et 6ème du système français. Sachant qu'en suisse l'école commence une année plus tard et la 6ème fait encore partie de l'école primaire.

Afin d’analyser le contenu mathématique des scénarios proposés par les différents enseignants, nous nous basons sur la méthodologie proposée par la double approche que nous croisons à une analyse en termes de types de tâche et de techniques, adaptée de l’analyse praxéologique telle que proposée dans la TAD (Chevallard, 1999).

Nous utilisons toutefois dans notre travail la notion de praxéologie de manière sommaire. Il s’agit pour nous de créer un outil pour analyser les tâches et les catégoriser sans considérer dans un premier temps leur organisation. C’est pourquoi nous n’utilisons que les notions du bloc *praxis* (type de tâche et technique). Notre encrage dans la double approche nous permet d’analyser ensuite les activités de manière à mettre en évidence le parcours cognitif demandé aux élèves dans la réalisation des activités en termes d’adaptation par rapport à un savoir nouveau (Robert 2008)[3].

Le modèle de la structuration du milieu nous permet de faire un lien entre ce qui a été observé dans le contexte, un « milieu » pour l’enseignant, et les choix concernant la préparation.

Le tableau qui suit (Margolinas 2002, p. 5) illustre cette modélisation de l’activité du professeur en interaction avec un milieu décomposé en plusieurs niveaux.

Milieu	Elève	Professeur	Situation
M+3 : M-Construction		P+3 : P-Noosphérien	S+3 : Situation Noosphérienne
M+2 : M-Projet		P+2 : P-Constructeur	S+2 : Situation de construction
M+1 : M-Didactique	E+1 : E-Réflexif	P+1 : P-Projeteur	S+1 : Situation de projet
M0 : M-Apprentissage	E0 : Elève	P0 : P-Professeur	S0 : Situation didactique
M-1 : M-Référence	E-1 : E-Apprenant	P-1 : P-Observateur	S-1 : Situation d’apprentissage
M-2 : M-Objectif	E-2 : E-Agissant		S-2 : Situation de référence
M-3 : M-Matériel	E-3 : E-Objectif		S-3 : Situation objective

Notons que le modèle de la double approche permet également d’expliquer certains choix d’enseignants grâce à la prise en compte de composantes institutionnelles, sociales ou personnelles. Nous mettons ceci provisoirement entre parenthèses dans cette présentation.

III. METHODOLOGIE

1. Recueil de données

Notre recueil de données a été réalisé d’avril à juin 2009 dans 5 classes du canton de Genève réparties dans deux écoles différentes. La première école se situe dans une zone résidentielle plutôt favorisée et nous y avons observé les classes de 4ème primaire (4P), 6ème primaire (6P) et un double degré 5/6ème primaire mais pour lequel nous avons observé que le travail des 6P. La deuxième école est une école du centre ville de Genève et nous y avons observé deux classes, une 5P et une 6P.

Dans chaque classe, nous avons récolté le corpus de données suivant :

[3] L’analyse du parcours cognitif n’est pas présentée dans ce texte.

- Un entretien avant la séquence, qui vise à faire expliciter à l'enseignant sa démarche de préparation.
- Une observation en classe avec enregistrement vidéo des différentes activités de la séquence.
- Un entretien à la fin de la séquence.
- Un « cahier témoin » avec toutes les *activités* réalisées durant la séquence.
- Un entretien environ un an après l'observation.

Dès le début de nos recherches préliminaires sur le sujet (différents entretiens réalisés dans les classes en mai 2007) nous avons observé que les enseignants ne prévoyaient la plupart du temps pas de moments précis pour préparer leurs cours et ne gardaient aucune trace écrite de leur travail. Nous avons donc dû tenir compte de cette particularité dans notre dispositif et nous avons accordé plus d'importance aux entretiens dont l'enjeu était en particulier d'entrer dans la dimension plus privée du travail de l'enseignant, qu'il est difficile d'observer directement. Nous avons donc mis en place un dispositif de recherche qui tienne compte de ces difficultés et qui allie différentes méthodologies d'entretien : des entretiens semi-dirigés structurés selon les niveaux d'activités du professeur, des entretiens d'explicitation, des entretiens d'auto-confrontation et d'introduction d'un sosie (Daina, à paraître).

2. *Analyses du contexte*

Afin de mettre en évidence les contraintes et les ressources, nous avons analysé le contexte dans lequel évolue chaque enseignant. Ceci nous a conduit à distinguer trois niveaux : (1) la structure officielle, (2) l'école, (3) le contexte individuel.

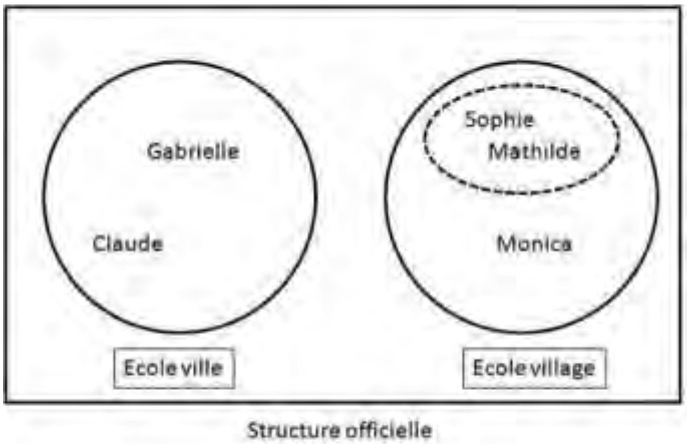


***Schéma 1** – Analyse des niveaux du contexte*

- « La structure officielle » concerne tous les documents officiels communs à tous les enseignants ainsi que les directives de la direction générale de l'enseignement primaire.
- Dans chaque école, nous trouvons des manières de fonctionner différentes. Nous avons observé par exemple des collaborations entre enseignants ou des fonctionnements plus individuels.
- Chaque individu fonctionne ensuite selon ses propres valeurs et conceptions.

Une étape importante de l'analyse du contexte a consisté en l'analyse des ouvrages COROME. L'objectif était de pouvoir caractériser chaque *activité* de manière à mettre en évidence le potentiel mathématique de cette ressource, la principale sur laquelle se base les enseignants.

Nous utilisons le terme « activité », que nous écrivons en italique, comme un terme générique pour indiquer de manière générale à la fois les exercices, les situations-problèmes, les activités de recherche etc. car c'est le terme utilisé dans les moyens d'enseignement COROME. Les enseignants utilisent généralement sans distinction le terme « activité » ou « exercice ».

Au terme d'un travail d'analyse à la fois déductif, se basant sur les plans d'études, et inductif, à partir des *activités*, voici les sept types de tâche que nous avons identifiés dans notre analyse :

- T1 Comparer des aires ou des périmètres
- T2 Mesurer une grandeur à partir d'une unité
- T3 Appliquer une formule d'aire à une forme géométrique donnée
- T4 Trouver des polygones de périmètre et/ou d'aire donnés
- T5 Optimiser le partage d'une surface en des surfaces d'aire et/ou de formes données
- T6 Construire un Tangram sous contrainte
- T7 Conversion d'unité de mesure d'aire.

Pour analyser les *activités*, nous les avons catégorisées selon le type de tâche auquel elle se rapporte. Nous avons ensuite identifié pour chaque tâche des variables didactiques, signe de la particularité de la tâche au sein du type, et les techniques, hiérarchisées selon les variables identifiées.

Nous avons ainsi classé l'ensemble des *activités* des moyens d'enseignement COROME 4P, 5P et 6P. Voici un exemple de l'analyse de trois tâches du type T1, comparer des aires.

Nom de l'*activité*	Variables	Hiérarchie des Techniques
Du plus grand au plus petit (4P) **(Annexe 1)**	Figure : polygones-rectangles, carré, triangles, trapèzes, parallélogrammes Dimension : nombres entiers Rapport : toutes les formes se mesurent avec le triangle H, comparaison direct possible Caractéristique du réseau : au choix de l'enseignant Matériel : forme prédécoupée, possibilité de plier, couper etc	Recouvrement direct Recouvrement après D/R[4] Utiliser des relations complexes Trouver une unité commune et la dessiner (Mesurer à l'aide du triangle H) Mesurer en reproduisant sur un réseau Calculer (pas dans programme en 4ème mais pas bloqué par variables)
Mosaïque (4P) **(Annexe 2)**	Figure : rectangle Support : dessiné sur le sol Rapport entre les figures : peut être mesuré avec format A4, A5 etc Dimension : nombres non entiers Pas de réseau	Pavage à l'aide de différentes unités + Changement d'unité (Le support bloque les autres techniques. Les dimensions ne facilitent pas les calculs)
Ces polygones ont-ils tous la même aire F4 (6P) **(Annexe 3)**	Caractéristique du réseau : quadrillage Position : ne suit pas les mailles du réseau	Procédure de comptage (peu facilité par la position de la figure sur le réseau) D/R des figures pour les ramener à un rectangle.

***Tableau 1** – Analyse comparative de trois tâches T1*

[4] D/R = décomposition-recomposition de la surface

Nous pouvons observer dans ce tableau que selon la valeur de telle ou telle variable, certaines techniques sont favorisées ou non. Par exemple, si l'*activité* propose des figures avec des dimensions qui ne se mesurent pas en nombres entiers, les stratégies de mesure et d'application de la formule seront bloquées car les élèves de 4P, par exemple, ne savent pas manipuler les nombres à virgule dans une multiplication. La variable du matériel est également très importante et peut faire varier sensiblement la hiérarchie des techniques. Si les enseignants choisissent par exemple de distribuer un papier quadrillé et demandent aux élèves de reproduire les surfaces à comparer, les techniques de mesure par comptage d'unités seront favorisées.

Cette analyse nous permet donc de catégoriser chaque *activité* et de mettre en évidence les éléments qui seront intéressants à prendre en compte dans l'analyse de l'organisation des tâches en scénario et des déroulements en classe.

3. *Analyse des scénarios a maxima*

L'objectif de l'analyse est de mettre en évidence, d'une part la cohérence du projet des différents enseignants et, d'autre part de caractériser les choix qu'ils ont faits au vue des contraintes et des ressources.

L'analyse des scénarios est faite à partir de la liste d'*activités* fournie par l'enseignant avant les séances, l'observation du déroulement de la séance et les entretiens. Le scénario est ainsi reconstitué de manière chronologique *a posteriori*.

La plupart des *activités* présentes dans les scénarios sont issues des moyens d'enseignement COROME dont l'analyse *a priori* a été faite lors de la catégorisation des *activités*. Une première analyse de chaque activité est donc disponible et nous l'avons complétée pour les *activités* présentes dans les scénarios qui étaient issues d'autres sources (des manuels ou des *activités* créées par les enseignants). Nous avons également repris le codage des différentes *activités* du scénario selon les types de tâche que nous avons définis pour l'analyse des ressources.

Notons que pour ce niveau d'analyse, nous considérons les *activités* sans tenir compte de leur organisation chronologique dans un premier temps. Il s'agit simplement de mettre en évidence ce qui « peut » être travaillé dans le scénario au niveau des contenus mathématiques. L'analyse de l'organisation des *activités* et des modalités de travail prévues seront pris en compte dans un deuxième niveau d'analyse que nous ne présentons pas ici.

IV. PREMIERS RESULTATS

1. *Analyse du contexte : tensions possibles entre la structure institutionnelle et les deux niveaux inférieurs (classe et individu)*

Dans une première étape de notre travail d'analyse, nous avons caractérisé le contexte dans lequel évoluent les enseignants. Si on se réfère à nos modèles théoriques, il s'agit de décrire le niveau +3 (situation noosphérienne), ainsi que de nous donner des éléments pour comprendre certains choix du niveau +2 (situation de construction), ou du niveau +1 (situation de projet).

Selon les directives officielles l'enseignant doit utiliser pour organiser son enseignement les documents officiels suivants : le plan d'étude, les moyens d'enseignement COROME et des documents d'aide à la planification (disponibles sur un site internet de partage d'informations et de ressources dont l'accès est limité aux enseignants genevois). L'ensemble de ces documents ne propose aucune planification des *activités* et suit la volonté, affichée notamment par les concepteurs des moyens COROME, de laisser à l'enseignant le plus de liberté possible quant aux choix des *activités* et l'organisation de l'enseignement.

Cependant, nous observons dans nos entretiens que, bien que les enseignants disent apprécier les moyens d'enseignement COROME, ils regrettent le fait de manquer de propositions de progressions plus détaillées. L'analyse des entretiens nous permet de mettre en évidence que le travail d'analyse des *activités,* nécessaire à la réalisation d'une planification selon les indications des ouvrages COROME, demande un travail très important qui n'est pas à la portée des enseignants en début de carrière.

Nous voyons ici que le niveau institutionnel et le niveau de l'individu entrent partiellement en tension car les instructions officielles semblent imposer peu de contraintes alors que la logique de conception des ressources devient elle-même une contrainte forte pour les enseignants qui rencontrent une difficulté dans leurs pratiques.

Pour répondre à cette difficulté, nous observons que de nombreux enseignants travaillent en collaboration dans les écoles. Mathilde et Sophie, par exemple, travaillent en collaboration plusieurs demi-journées par mois pour planifier et choisir les *activités* de mathématiques (et d'autres disciplines).

L'analyse de l'entretien de Mathilde nous permet de détailler plus précisément une évolution sur plusieurs années de ce type de collaboration.

- La première fois que Mathilde a enseigné à des 6P, elle a fait pendant l'été une partie des *activités*.

Mathilde : La première fois que j'ai eu des grands, je me suis décidée à faire tous les corrigés de tous les exercices. Et après quand tu vois la quantité tu te dis, ah bah non !... Je vais pas tous les faire… Pour les 3/4P j'avais fait tous les corrigés de tous les exercices du livre, donc ça j'avais tout vu, mais c'est aussi beaucoup plus simple. En 5/6P t'as beaucoup plus de travaux de recherche, de situations-problèmes et c'est quand même plus compliqué. Tu vas jamais tout faire avec les élèves t'es obligée de faire un choix. Donc après je me suis dit non, c'est pas très malin, d'abord tu fais un choix… là y a un collègue qui a de l'expérience, et après tu vas t'y plonger tranquillement plutôt que de tout faire pour avoir tout vu et finalement… Des fois t'as déjà des énoncés qui t'inspirent pas du tout […] la première fois que je l'ai fait… c'est clair que j'avais dû faire entièrement confiance à mon collègue.

- La première année, elle a donc travaillé avec un collègue et s'est basée sur les *activités* qu'il faisait lui, en lui accordant « toute confiance », mettant en avant son expérience et ses compétences en mathématiques.
- Elle a également travaillé avec son collègue la deuxième année, mais elle dit s'être rendu compte que certaines *activités* « lui correspondaient » plus que d'autres et que c'est celles-ci qu'elle a faites en priorité.

Mathilde : Généralement la plupart des choses qu'on a choisi ensemble c'est excellent… Après il y a peut-être un exercice ou l'autre qui va moins me correspondre où je vois moins le sens… Et peut-être je vais en voir un autre et je vais me dire, ah ouais, celui-là on l'a pas mis mais il est bien aussi.

- La troisième année est celle de notre observation. Nous observons que c'est elle qui dans le travail de groupe prend la place de l'expert et conseille ses collègues sur les *activités* et l'organisation du thème en fonction du temps qu'elles ont à disposition.

Mathilde : donc en fait dimanche j'étais la seule à avoir eu deux fois des sixièmes... c'est la troisième là cette année donc voilà c'est vrai qu'elles me font aussi confiance de ce côté là... comme je vois que là on est en retard […] maintenant ça veut pas dire qu'on va bâcler... c'est juste qu'on va prendre l'essentiel […]

- Une fois la liste des *activités* faite, elle reprend durant le week-end le planning de la semaine pour organiser les activités suivant les horaires. Le jour avant elle reprend

> l’activité avec le livre du maître et se demande quels sont les objectifs, quelle stratégie de résolution elle mettrait en place.

> Mathilde : Je vais relire l'énoncé, je vais regarder le correctif, je vais essayer de le faire… je vais regarder le correctif, je vais aller voir ce qu'ils disent dans la méthodologie parce que des fois ils ont des pistes, des explications que j'ai pas toujours…

Nous voyons bien que le choix des activités pour Mathilde ne s’est pas fait par une analyse *a priori* des activités du livre, comme le voudraient les prescriptions des Moyens d’enseignement COROME, mais plus prosaïquement au fil (et au hasard) de l’expérience et de la réalisation en classe des *activités*.

De plus, nous avons observé dans le détail le travail de collaboration entre Mathilde et Sophie et nous notons que peu d’informations ont été partagées sur les choix faits au niveau des *activités* à propos des contenus mathématiques ou de la logique de progression. Les informations échangées étaient plutôt de l’ordre de l’organisation en classe de l’*activité* (individuellement ou en groupe) ou à propos d’objectifs généraux (dans cette *activité* il y tout sur les rectangles, les triangles etc.).

Cette observation nous permet d’émettre l’hypothèse d’une rupture possible dans le processus d’analyse et de préparation des séances. En effet, en ce qui concerne les ressources nous notons qu’il existe d’un côté les ouvrages COROME, avec leur particularité (des activités de recherche regroupées en thèmes mais non hiérarchisées), et d’un autre côté le travail de collaboration qui se réduit souvent à partager des listes d’*activités.*

S’ils se réfèrent à la liste d’*activité*s d’un collègue, les enseignants se retrouvent donc à suivre un projet d’enseignement dont ils ne se sont pas ou peu appropriés le contenu et les raisons d’être, ce qui peut entrainer des tensions entre les niveaux supérieurs (+1) et (+2) car le choix des *activités* peut ne pas correspondre à la construction du thème telle que pensée par chaque enseignant. Ceci pourrait avoir une conséquence observable, surtout la première année de pratique, dans le déroulement en classe. En effet, si l’objectif de l’*activité* ne coïncide pas avec les notions que l’enseignant souhaite introduire, l’activité de recherche devient alors un prétexte à un travail plus directif parallèle. Lors de nos observations, c’était la première fois que Sophie enseignait à des 6P, l’analyse du déroulement en classe des *activités* nous permettra donc de vérifier cette hypothèse.

Analyse des moyens d’enseignement COROME

Consciente de cette tension qui crée comme nous l’avons vu des difficultés, et avant d’analyser les scénarios produits par les enseignants, nous avons analysé le potentiel mathématique des *activités* présentes dans les ouvrages COROME, dans les thèmes ou modules concernant la notion d’aire. Le tableau qui suit présente les résultats d’une partie de cette analyse, la catégorisation en type de tâche.

Rappel des types de tâches : T1 Comparer des aires ou des périmètres T2 Mesurer une grandeur à partir d’une unité T3 Appliquer une formule d’aire à une forme géométrique donnée T4 Trouver des polygones de périmètre et/ou d’aire donnés T5 Optimiser le partage d’une surface en des surfaces d’aire et/ou de formes données T6 Construire un Tangram sous contrainte T7 Conversion d’unité de mesure d’aire.

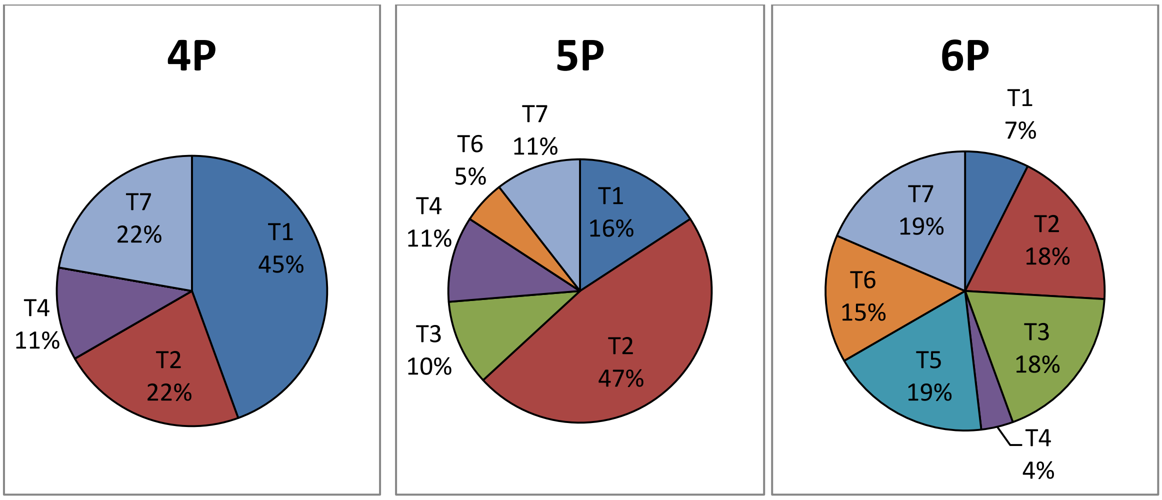


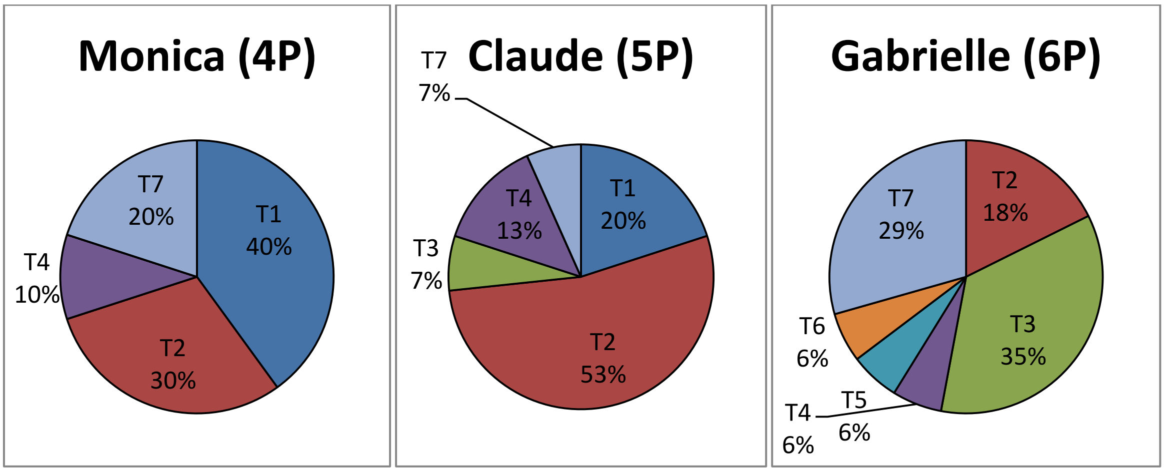
***Figure 1** – Analyse moyens COROME*

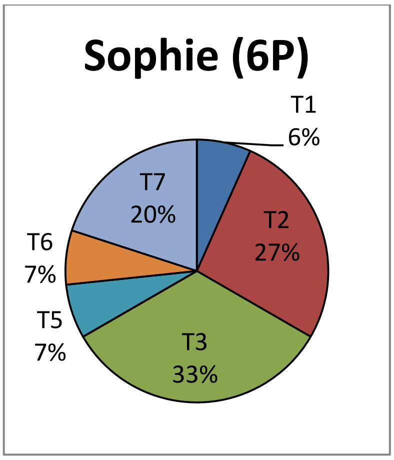
Ceci permet de mettre en évidence la présence en 4P d'une majorité de tâche T1 (comparer des aires), en 5P une grande majorité de tâche de type T2 (mesurer à partir d'une unité), en 6P, des tâches de type T2 et surtout une majorité de situations problèmes de type T5 (optimisation de partage de surface) ou T6 (construire un Tangram sous contraintes) qui permettent de réinvestir les techniques de mesurage ou de décomposition-recomposition de surfaces.

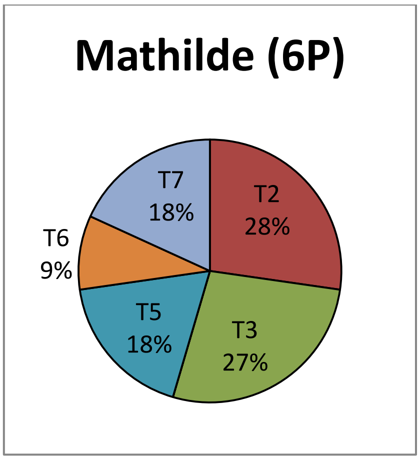
Nous retrouvons dans cette organisation l'influence des recherches en didactique des mathématiques et notamment celles de Perrin et Douady (1988) qui proposent de distinguer trois pôles dans l'enseignement de la notion d'aire : surfaces, grandeurs et nombres. Les auteurs conçoivent dans leur recherche une ingénierie didactique qui amène à « construire la notion d'aire comme grandeur autonome en faisant des comparaisons directes d'aires (par inclusion, par découpage-recollement) et des mesures directes d'aires avec des unités variées, d'autre part d'établir des relations entre aire et longueur en s'intéressant à diverses transformations » (p. 162) afin de mettre en évidence qu'aire et périmètre sont deux grandeurs qui varient indépendamment l'une de l'autre.

2. *Analyse des scénarios a maxima*

Une deuxième étape consiste à délimiter dans ce potentiel ce que l'enseignant va effectivement proposer à la classe. Sans pouvoir aller dans les détails de l'analyse, nous allons comparer le scénario des cinq enseignants aux résultats que nous venons de présenter pour les moyens COROME.







***Figures 2** – Répartition en type de tâche des activités des scénarios*

Nous observons par exemple que les scénarios de Claude et Monica sont très similaires à ce que proposent les ouvrages COROME. Nous émettons l'hypothèse que cette adéquation est due au fait que ces enseignants ont beaucoup d'expérience et connaissent très bien les ressources ainsi que les objectifs d'enseignement pour chaque degré.

Il est intéressant de voir que même si Sophie et Mathilde collaborent dans la préparation d'une première liste d'*activités*, les choix qu'elles font chacune indépendamment dans l'organisation finale de l'enseignement sont différents. Alors que Mathilde investit plus largement le type de tâche T5 et T6, Sophie introduit de manière plus systématique des tâches de type T3, c'est-à-dire des tâches d'application d'algorithme. Ceci nous permet d'émettre l'hypothèse qu'elles ont des conceptions différentes des objectifs d'enseignement (niveau+2). Nous verrons dans l'analyse du déroulement si cette tendance se confirme.

Gabrielle utilise très peu les moyens d'enseignement COROME et nous pouvons voir que son projet d'enseignement est sensiblement différent des types de tâche proposés dans les manuels. Elle investit énormément les types T2 en révision de ce qui a été fait les années précédentes, ainsi que les types T3 et T7, applications d'algorithme et changement d'unités. Ceci ne correspond pas à ce qui est proposé dans les moyens d'enseignement COROME et nous pouvons émettre l'hypothèse que pour définir ses objectifs d'enseignement elle se réfère plus à ses souvenirs de classe ou à ce que représente pour elle la notion d'aire, qu'aux ressources.

Nous n'avons pas la possibilité de développer plus avant ces résultats, mais il apparaît déjà que cette analyse nous permet de formuler un certain nombre d'hypothèses quant à la logique d'action des enseignants. Les analyses des entretiens et du déroulement des séances nous permettront d'aller plus loin sur ces questions.

V. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Ces premiers résultats nous donnent une vision d'ensemble qui nous permet de proposer un début de réponse à nos questions et de formuler des hypothèses pour la suite.

Nous pouvons tout d'abord noter que les *activités* des moyens d'enseignement COROME ont un potentiel mathématique en lien avec ce que les recherches en didactique ont mis en évidence sur l'enseignement de la notion d'aire et ces ouvrages sont utilisés par les enseignants. Cependant, ces-derniers semblent majoritairement rencontrer une difficulté à planifier l'enseignement, surtout dans les premières années de pratique. Ceci conduit certain enseignant à utiliser les listes d'*activités* faites par des collègues ce qui pourrait créer des tensions entre les *activités* choisies et le projet de l'enseignant. Nous observons un manque au niveau des ressources qui pourraient proposer une aide à la planification qui tiendrait compte plus explicitement des objectifs d'apprentissage et de l'évolution des connaissances.

Cette première étape de l'analyse des scénarios nous permet de mettre en évidence des particularités des projets des enseignants et nous entrons à présent dans une deuxième phase de notre travail qui consiste à poursuivre l'analyse, en tenant compte du déroulement en classe et de « l'activité possible » des élèves, selon la méthodologie de la double approche, dont l'objectif est de reconstituer « l'itinéraire cognitif » définit par l'enseignant en mettant en avant les objectifs, les connaissances en jeu et la dynamique d'exposition.

REFERENCES

Chastellain M., Jaquet F. (2001) *Mathématiques cinquième année. Méthodologie-Commentaires.* Neuchâtel : COROME.

Chastellain M. (2002) *Mathématiques sixième année. Méthodologie-Commentaires*. Neuchâtel : COROME.

Chevallard Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19(2), 221-266.

Comiti C., Grenier D., Margolinas C. (1995) Niveaux de connaissances en jeu lors d'interactions en situation de classe et modélisation de phénomènes didactiques. In Arsac G., Gréa J., Grenier D., Tiberghien A. (Eds) (pp. 91-127). *Différents Types de savoirs et leurs articulations* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Daina A. (A paraître). De la préparation à la réalisation d'une séquence en classe : méthodologie et analyse comparative de 3 scénarios. In Bronner A. et al. (Eds) *Actes de la XVIème école d'été de didactique des mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Danalet C., Dumas J. P., Del Notaro C., Villars-Kneubühler F. (1999) *Mathématiques quatrième année. Livre du maître.* Neuchâtel : COROME.

Gagnebin A., Guignard, N., Jaquet, F. (1998). *Apprentissage et enseignement des mathématiques, commentaires didactiques sur les moyens d'enseignement pour les degrés 1 à 4 de l'école primaire*. Neuchâtel : COROME.

Leroyer L., Bailleul M. (2009) Les enseignants travaillent aussi hors la classe : Comment ? In Kuzniak A., Sokhna M. (Eds.) *Actes du Colloque Espace Mathématique Francophone.* Dakar.

Margolinas C. (2002). Situations, milieux, connaissances. Analyse de l'activité du professeur. In Dorier J.-L., Artaud M., Artigue M., Berthelot R., Floris R. (Eds.) *Actes de la 11ème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques* (pp. 141-157). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Perrin M.-J., Douady R. (1988) Conceptions des élèves à propos d'aires de surfaces planes. In C. Laborde (Ed.) (pp.161-172) *Actes du premier colloque franco-allemand*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Robert A., Rogalski J. (2002) Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *Revue Canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies* 2(4), 505-528.

Robert A. (2008). Problématique et méthodologie communes aux analyses des activités mathématiques des élèves en classe et des pratiques des enseignants de mathématiques. In Vandebrouck F. (Ed.) (pp. 31–69) *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* Toulouse : Octares Editions.

ANNEXE 1

Du plus grand au plus petit

Tâche
- Comparer les aires de diverses surfaces.

Du plus grand au plus petit

Nombre d'élèves
- 2

Matériel
- Formes prédécoupées élèves: **"Du plus grand au plus petit"**

Consigne
- *"Classez les pièces de la plus grande à la plus petite en fonction de leurs aires."*

Mise en commun
- Les élèves comparent les classements obtenus. Si nécessaire, ils reprennent la recherche.
- Ils confrontent leurs démarches.

Quelques démarches
- Superposer deux surfaces et comparer les parties qui dépassent
- Découper, réassembler et superposer deux surfaces
- Reproduire les surfaces sur du papier quadrillé et dénombrer les petits carrés
- Mesurer en carrés-unités ou triangles-unités
- Utiliser des relations complexes
  - "L'aire de J est la moitié de celle de E; l'aire de C est la moitié de celle de E; alors l'aire de J est égale à l'aire de C"

ANNEXE 2

Mosaïque

Tâche
- Comparer les aires de surfaces dessinées au sol.

Nombre d'élèves
- 4 (2 groupes)

Matériel
- Bande adhésive (de carrossier, bande isolante, ...)
- Dix feuilles A3 et dix feuilles A4 pour le groupe A
- Dix feuilles A3 et vingt feuilles A5 pour le groupe B

Consigne 1
- *"À l'aide des feuilles reçues, recouvrez exactement la figure qui vous est désignée. Notez le résultat de votre travail."*

Consigne 2
- *"Quel groupe a utilisé le plus de papier?"* (Voir aussi "Dispositif")

Mise en œuvre
- L'enseignant délimite le contour de deux figures à l'aide de bande adhésive, soit:
  - un rectangle A de 105 × 89,1 cm (aire équivalente à 6 feuilles A3 et 3 feuilles A4),

  - un rectangle B de 147 × 59,4 cm (aire équivalente à 6 feuilles A3 et 4 feuilles A5).

Déroulement

Dispositif
- Les figures A et B sont placées hors de la classe et éloignées l'une de l'autre afin qu'aucune comparaison visuelle directe ne soit possible.
- Après avoir pavé leur figure, les élèves des deux groupes enlèvent les feuilles et les laissent à proximité pour les groupes suivants.
- De retour en classe, les élèves reçoivent la consigne 2 et se prononcent sur la base de ce qu'ils ont noté.

Mise en commun
- Quand plusieurs groupes A et B ont achevé leur discussion, les élèves confrontent les méthodes utilisées pour paver et comparer les figures. Si nécessaire, ils retournent auprès des figures.

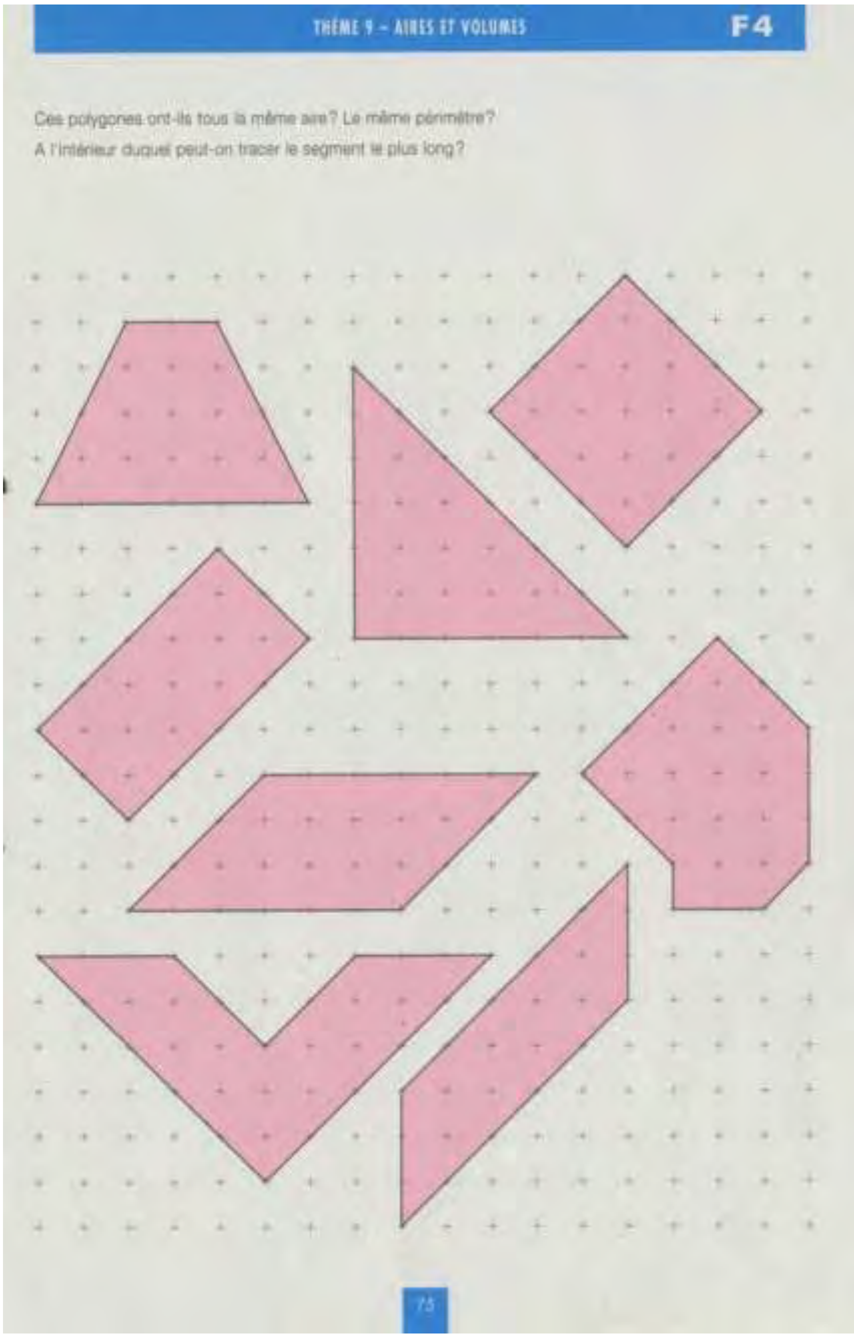
Prolongement
- **"Même aire"** FE p. 39

Démarches possibles de l'élève

Concernant le pavage
- Remplacer des feuilles par d'autres feuilles de dimensions différentes
- Placer les feuilles dans diverses orientations
- Commencer par les grandes feuilles et compléter avec les plus petites
- ...

Concernant la comparaison
- Se fier à la quantité de feuilles plutôt qu'à la surface
- Paver uniquement avec la plus petite unité
- Convertir les diverses unités en une seule (par exemple, tout en A4) avant de compter les feuilles
- Opérer sur les dimensions du rectangle (sommes, produits, ...)
- ...

ANNEXE 3



THÈME 9 – AIRES ET VOLUMES F4

Ces polygones ont-ils tous la même aire? Le même périmètre?

A l'intérieur duquel peut-on tracer le segment le plus long?

75

UNE ANALYSE DU CONTRAT DIDACTIQUE POUR INTERPRÉTER LES COMPORTEMENTS DES ÉLÈVES AU PRIMAIRE

Lucie DEBLOIS* – Alison LARIVIERE*

Résumé – La rupture de contrat didactique a été considérée comme hypothèse expliquant les troubles et du comportement des élèves en classe de mathématiques. Les questions suivantes ont été posées : Sur quels contenus travaillait l'élève lorsque son comportement est devenu inacceptable ? Quelles habitudes ou quelles règles ne fonctionnent plus ? Des médiations ont été réalisées dans deux classes de 6-7 ans durant l'année 2010-2011. L'analyse des médiations montre qu'un des enjeux de l'enseignement des mathématiques consiste à susciter le développement de jugements numériques ou géométriques afin de favoriser le passage du rôle d'élève à celui d'apprenant, diminuant ainsi l'élaboration de règles non mathématiques.

Mots clés: contrat didactique, médiation, troubles du comportement, attentes, mathématiques

Abstract: The failure of didactic contract was considered as a hypothesis to explain the behavior of the pupils' disorders in class of mathematics. The following questions were asked: On what content was working pupil at the time where his behavior has become unacceptable? What habits and what rules were developed by the pupil no longer work? Mediations will take place in two classes of children's of 6-7 years old for the year 2010-2011. The mediations analysis shows that one of issue of the mathematics' teaching is to develop a numerical or a geometrical judgment to facilitate the way between the pupils' role and the learners' role because this judgment diminish the elaboration of non-mathematical rules.

Key words: didactic contract, mediation, behavior disorders, expectations, mathematics

I. INTRODUCTION[i]

Une situation d'enseignement est basée sur des routines et des rituels, ce qui favorise la mobilisation des connaissances de l'élève et suscite une forme de sécurité (Giddens 1987). Ces routines apparaissent dans le choix du langage de la personne qui s'adapte à son interlocuteur, dans les règles sociales qui permettent une adaptation aux différents contextes, dans les conventions établies dans la classe pour favoriser l'insertion des acteurs et dans les savoirs, qui appris sur un temps long conduisent parfois l'apprenant à des contradictions. Dans ces conditions, la notion de rapport au savoir interpelle le monde de l'éducation. Le rapport au savoir comme un ensemble de relations se nourrissant et s'organisant autour du sens que les élèves attribuent aux mathématiques (Charlot 1999).

Nos travaux ont déjà permis d'observer un écart entre la conception des mathématiques chez des élèves de 12-14 ans et ceux de 15 à 17 ans (DeBlois 2008). Les élèves plus jeunes ont manifesté une conception plus instrumentale des mathématiques par l'évocation de calculs et la nécessité de mémoriser alors que pour ceux de 15 à 17 ans, les mathématiques sont une recherche de compréhension. Les premiers jugent les savoirs mathématiques plus difficiles, notamment à cause de l'organisation du symbolisme et des pièges des problèmes alors que les seconds expliquent l'importance de la justification des interprétations qui leur est demandée, notamment lors des activités en statistiques.

Ces conceptions des élèves contribuent à la mise en place d'attentes particulières par rapport aux tâches qui leur sont proposées. Si les attentes des élèves sont issues de leurs conceptions ou du sens qu'ils attribuent aux mathématiques et aux notions à l'étude, il devient important de s'attarder à l'interprétation des élèves à l'égard d'une tâche et au rôle qu'ils croient devoir jouer.

* Université Laval – Canada – lucie.deblois@fse.ulaval.ca, alison.lariviere.1@ulaval.ca

© DeBlois L., Larivière A (2012) Une analyse du contrat didactique pour interpréter les comportements des élèves au primaire. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT9, pp. 1182–1991). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

Cette communication concerne la deuxième question posée par ce groupe de travail : « Quels sont les défis et les enjeux du contrat social que contribue à relever l'enseignement des mathématiques ? » Plus précisément, cet article rapporte une recherche qui vise à documenter un des phénomènes qui joue dans la relation enseignement-apprentissage des mathématiques : les règles que les élèves élaborent et les habitudes qu'ils ont développées. Cerner les attentes entretenues par les élèves, de même que celles entretenues par les enseignants à l'égard des tâches proposées en classe, c'est-à-dire le contrat didactique (Brousseau 1986), conduit à prendre en compte l'intention de l'élève, le contexte dans lequel il a résolu la tâche qui lui a été proposée, de même que l'intention de l'enseignant et le contexte dans lequel a été choisie cette tâche. L'expérimentation de médiations entre l'élève et l'enseignante, particulièrement lorsque l'élève se désorganise, se retire ou évite la difficulté mathématique permettra de cerner les conditions dans lesquelles les élèves réalisent leurs productions pour cerner les règles et les habitudes qu'ils élaborent pour réaliser les tâches proposées.

II. CADRE THEORIQUE

Le contrat didactique permet ainsi d'interpréter autrement les réactions d'évitement ou les difficultés des élèves. Comme construction issue des attentes des élèves et des enseignants, les règles, souvent implicites, se constituent alors comme des connaissances mathématiques pour les élèves. Transférées à d'autres tâches mathématiques, elles ne seront pas adaptées à la nouvelle tâche. Elles sont toutefois la manifestation de la responsabilité de l'élève à l'égard de son apprentissage pour un savoir particulier. Déstabilisés par une tâche mathématique, puisqu'ils ne peuvent transférer ce type de connaissance mathématique, les élèves se désorganisent. Une désorganisation cognitive pourrait donc provoquer une désorganisation comportementale, manifestation d'une rupture de contrat didactique. Même si cette rupture manifeste une opportunité d'apprentissage, elle exige un changement dans leur rapport au savoir. Ainsi, afin d'ancrer nos interprétations à l'intérieur de travaux de recherche en cours, nous utiliserons des travaux issus de la psychologie (Beaumont 2006), de la sociologie (Dencuff 2010, Garcion-Vauter 2003) et de la didactique (Brousseau 1986 ; Beaulac et DeBlois 2007 ; DeBlois 2008).

Les travaux de Beaumont (2006) montrent le processus dans lequel les élèves qui éprouvent des troubles de comportement s'engagent. Ainsi, entre le déclencheur et la désorganisation, Beaumont montre comment l'anxiété, prend son origine dans un ou plusieurs déclencheurs, pour se transformer en agitation puis en escalade et en désorganisation. Ce cadre théorique permet de situer le moment de notre intervention : avant l'escalade. Une analyse des particularités de la situation précédant la désorganisation d'un élève, permettrait de suivre le mouvement de l'élève qui apprend.

Dencuff (2010) ajoute que l'enfant, qui arrive en classe avec ses expériences familiales et sociales, se familiarise avec le contrat pédagogique et avec les règles explicites qui favorisent le bon fonctionnement de la classe. Cette familiarité contribue au développement de ses habiletés sociales d'élève. Elle ajoute que l'élève qui s'engage dans une tâche sur des savoirs particuliers devient apprenti. Nous l'appellerons apprenant. Ce cadre d'analyse permettra d'interpréter les différents rôles joués par les élèves afin de cerner l'influence de ces rôles sur l'élaboration des règles qu'il formule et sur le développement d'une compréhension des concepts mathématiques en jeu.

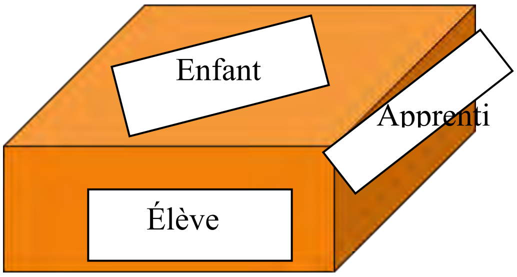


Figure 1 *– Les rôles des élèves (Dencuff 2010)*

Enfin, les transitions entre les activités de la classe exigent de se doter d'un cadre théorique qui en favorise l'interprétation puisqu'elles peuvent faire intervenir tant l'enfant, l'élève que l'apprenant. Les travaux de Garcion-Vauter (2003) précisent comment s'articulent les enjeux sociaux aux enjeux d'apprentissage de la classe de maternelle. Elle considère 5 dimensions : le temps, l'espace, le jeu des échanges, les moments des transitions et l'usage de certains symboles qui pourront devenir objet mathématique. La socialisation est indissociable des apprentissages, et c'est la raison pour laquelle nous choisissons de parler d'une « *socialisation scolaire* » (2003, p. 146). Ce cadre théorique permettra d'étudier la transition entre l'élève et l'apprenant puisque l'élève est davantage un acteur social.

Mary (2003) a illustré comment les paroles d'introduction d'une enseignante pouvaient être interprétées par l'élève comme des indications liées à une nouvelle tâche, créant ainsi un effet de contrat. L'utilisation habituelle d'un rapporteur d'angle gradué par 10 a conduit un élève de 12 ans à déterminer la mesure de l'angle de chacun des 24 secteurs d'un cercle comme étant une mesure de 10 degrés plutôt que de 15 degrés (DeBlois 2009). La longueur d'une équation, l'espace plus grand ou plus petit laissé pour inscrire une réponse sur une feuille-réponse, la présence de problèmes dont la solution est un nombre décimal plutôt qu'un nombre entier sont autant d'exemples de situations pouvant conduire les élèves à élaborer des règles (Beaulac et DeBlois 2007). Ces exemples nous sensibilisent à différentes dimensions à considérer durant les interventions en classe dont le temps, le matériel didactique et le contexte dans lequel la tâche est présentée. Une attention portée à ces règles pourra permettre d'interpréter les résistances et les blocages des élèves en cherchant les règles qu'ils ont élaborées. Une curiosité face à leurs réactions, à leurs réflexions et aux solutions trouvées permettront une adaptation cognitive (DeBlois 2008, 2010).

Les objectifs de ce projet de recherche-action sont : 1) Identifier les règles et les habitudes des élèves lors de réactions d'évitement, d'anxiété, d'agitation, de désorganisation ou de retrait ; 2) Repérer les caractéristiques des tâches qui étaient proposées à ces moments ; 3) Cerner les relations entre les caractéristiques des tâches, les pratiques enseignantes et les règles et les habitudes des élèves ; Au terme des 3 années d'expérimentation, il sera possible de répondre à la question de recherche suivante : Comment se développent et se transforment les règles et les habitudes des élèves lorsqu'ils font des mathématiques ? Cet article présente la première année d'expérimentation.

III. LA METHODE

Quinze études de cas ont été réalisées auprès d'élèves qui s'inscrivent dans un processus de désorganisation. Elles ont été réalisées en classe durant l'apprentissage des mathématiques. Cette première séquence d'études de cas a été réalisée par une enseignante/étudiante[1] en

[1] Nous utilisons l'expression « enseignante-étudiante » puisque la personne qui réalise l'expérimentation détient un permis d'enseignement à la suite d'une formation initiale. Elle peut faire des remplacements mais elle n'est

2010-2011 auprès d'élèves de 6-7 ans. La recherche continuera grâce à une deuxième enseignante/étudiante en 2011-2012, cette fois auprès d'élèves de 8-10 ans. En 2012-2013, une troisième enseignante/étudiante mènera la recherche auprès d'élèves de 10-12 ans. À la fin de la troisième année, une analyse transversale des différents résultats permettra de préciser comment se développent ou se transforment les règles et les habitudes des élèves durant le primaire en fonction des pratiques d'enseignement et des caractéristiques des tâches proposées.

Les élèves sont questionnés de manière à faire surgir les règles et les habitudes qu'ils ont développées au moment où ils adoptent une réaction d'évitement, d'anxiété, d'agitation ou de désorganisation. Plus précisément, une fois par semaine, une médiation avec un élève est réalisée. Nous avons privilégié l'expression médiation plutôt qu'entrevue pour plusieurs raisons. D'abord, bien que cette intervention se réalise sous la forme d'une entrevue, elle se réalise *dans* la classe *avec* l'élève *au moment* de sa réaction d'évitement, d'anxiété, d'agitation ou de désorganisation et *sur* le contenu mathématique enseigné. Cette médiation porte donc sur l'objet d'étude dont il est question dans la classe. Il s'agit ainsi d'une intervention « ad hoc » qui vise à susciter une compréhension chez l'élève et à recueillir les informations qui nous permettent de documenter les phénomènes à l'étude. Les règles du comité d'éthique exigent que les parents signent une autorisation pour réaliser une cueillette de données réalisées au moyen de vidéo. Par conséquent, les élèves qui se sont désorganisés sans que les parents n'aient signé la lettre de consentement n'ont pu être vidéo filmés, même s'ils ont pu faire l'objet d'une intervention.

Une période de 4 mois est prévue afin d'expérimenter le modèle de médiation présenté précédemment. Chaque médiation est d'une durée approximative de 15 à 30 minutes. Cette médiation est enregistrée au moyen d'une vidéo numérique de type Flip. Bien que l'enseignante de la classe soit présente, c'est l'enseignante/étudiante qui intervient auprès de l'élève qui manifeste des comportements d'évitement. L'enseignante/étudiante est connue des élèves puisqu'elle a réalisé ses stages dans l'école l'année précédente. Nous avons prévu une médiation qui s'attarde à la fois à la relation personnelle entre l'enseignante/étudiante, qui mène la recherche, et l'élève et à la relation didactico-pédagogique entre ces mêmes acteurs. Ainsi, certaines questions portent sur la relation personnelle enseignante- élève : 1) Raconte-moi ce que tu as essayé, ou encore, raconte-moi ce que tu pensais ; 2) À quoi te fait penser ce problème ? D'autres questions portent sur la relation didactico-pédagogique (enseignement-apprentissage) : 1) Écouter l'explication de l'élève et sa façon de concevoir la situation pour identifier les règles et les habitudes ; 2) Reformuler les explications de l'élève ; 3) Cerner comment cette tâche est différente de celles déjà traitées pour déterminer le domaine de validité d'une connaissance ; 4) Identifier les attentes respectives. L'ordre et la présence des questions seront adaptées en fonction des besoins des médiations.

Cette cueillette de données réalisée, la transcription des verbatim permet une analyse des données sur les réactions des élèves et leurs attentes. Elle permet de préciser les habitudes, les règles qui émergent des explications de l'élève de même que les pratiques d'enseignement et les caractéristiques de la tâche.

IV. LES RESULTATS

Les analyses nous permettent de décrire ce qui a motivé la médiation de l'enseignante/étudiante pour la numération et les opérations, pour des problèmes ayant une

---

pas nécessairement l'enseignante de la classe dans laquelle a lieu l'expérimentation. En outre, elle est étudiante à la maîtrise.

structure additive, pour la mesure et la géométrie. Les 15 médiations nous permettent de repérer certaines règles et certaines habitudes que les jeunes de 6 et 7 ans ont déjà développées au contact des tâches qui leur sont proposées. Nous avons analysé chacune des médiations en étudiant le jeu de la dévolution, de la régulation et de l'institutionnalisation de même que les transitions entre les rôles à jouer.

1. L'origine des médiations

Interprétée à la lumière du cadre théorique de Garcion-Vautor (2003), l'origine des médiations semble liée aux moments de transitions. C'est ainsi que dans le cas d'un travail que les élèves doivent réaliser seul, une élève semble perdue. Elle regarde sa feuille sans réagir. Un autre joue avec ses crayons de couleurs. Il les place pour faire un long bâton et il empile ses objets sur son bureau. Un troisième ne se met pas au travail alors que les autres élèves terminent. Les moments de transition entre la récréation et le travail à faire seul ou la consigne donnée en classe et le travail à faire seul paraissent provoquer un arrêt de travail.

Dans d'autres cas, les élèves doivent travailler en équipe de 4. D'autres comportements surgissent. Une activité conduit un élève à ne vouloir dénombrer que les jetons de sa couleur préférée. La tâche ainsi amputée le conduit à parler avec les autres élèves sans contribuer à la tâche demandée. Lors d'une autre activité durant laquelle les élèves doivent classer des figures planes et préciser les critères de classement, un élève termine son classement, puis il joue avec les mines de crayons de couleur placées sur le coin de son bureau. Dans ces cas, les élèves n'entrent pas dans le jeu des échanges entre les pairs. Bien que ne manifestant pas de désorganisation qui perturbe le déroulement de la classe, ces deux types de comportements ont conduit à réaliser une médiation avec ces élèves puisqu'ils manifestent de l'évitement.

2. Les règles et les habitudes des élèves

La numération et les opérations

Cinq médiations ont porté sur ce thème avec des élèves différents. Nous avons pu constater que les activités de dénombrement proposées visent le plus souvent à susciter une compréhension de la dizaine. Ces dernières ne permettent toutefois pas aux élèves rencontrés d'élaborer cette compréhension. La dizaine est plutôt comprise comme une association entre des groupements d'objets, quel qu'en soit la quantité, et le mot « dizaine ». En outre, les quantités (habituellement inférieure à 100) ne sont pas suffisamment importantes pour que l'élève utilise le comptage par bonds de 10, une procédure contribuant à la conceptualisation de la numération (DeBlois 1996).

Une deuxième médiation fait intervenir la numération. Dans ce cas, Élie, un autre élève devait, entre autres, associer l'expression 2 dizaines d'oiseaux à un nombre. Comme nous nous y attendions, Élie a inscrit le chiffre 2 sur sa feuille plutôt que 20. Ce type d'erreur n'apparaît pas, dans ses travaux, lorsque sont précisées les unités et les dizaines. Ainsi, pour Élie le 2 indique deux dizaines, ce qui manifeste de la dominance de la notation positionnelle.

Une troisième médiation se développe à partir d'activités portant sur la mise en ordre croissant ou décroissant de nombres. Alex s'appuie sur le repérage des nombres sur une droite numérique au-dessus du tableau, plutôt que sur la valeur des nombres. Ce mode de fonctionnement pourrait toutefois expliquer sa remarque lorsqu'il dit que l'ordre décroissant correspond à placer les nombres « pas en ordre » ou encore « à l'envers ». Cela ne lui permet pas de développer un jugement numérique.

Deux médiations ont porté sur des algorithmes de soustraction. Les deux élèves rencontrés présentent des procédures semblables : elles illustrent les 2 termes de la soustraction de la même façon qu'une addition. Lors de la première médiation, l'élève doit illustrer 57-29 en plaçant des réglettes Cuisenaire dans un tableau de numération (3 colonnes au-dessus desquelles sont inscrits les mots centaines, dizaines, unités). Toutefois, l'illustration des deux nombres conduit ensuite à enlever chacune des réglettes successivement. Bien qu'elle sache que soustraire correspond à enlever, l'apprentissage des additions qui précèdent habituellement celui des soustractions pourrait expliquer cette procédure. Le matériel pourrait aussi expliquer cette procédure comme nous l'apprend les procédures de soustraction sur un abaque (Musée d'histoire des sciences 2012). Une comparaison entre les deux nombres aurait pu conduire à trouver une différence, ce qui n'est pas apparu. Enfin, l'élève explique que le fait que l'enseignante inscrive une réponse au tableau est suffisant pour la confirmer. La deuxième médiation, réalisée avec Lily qui doit soustraire 60-27, montre qu'elle n'illustre pas systématiquement les nombres avec les réglettes Cuisenaire et le tableau de numération comme l'élève précédente. Toutefois, elle dépose le 7 de 27 ce qui la conduit à trouver un reste de 47 plutôt que 33. Cette règle peut découler du fait qu'on indique parfois qu'il est impossible de soustraire une quantité du chiffre zéro, pour expliquer la nécessité d'effectuer un emprunt.

Une sixième médiation porte sur l'association entre les symbolisations (7+7+7, 2+2+2+2+2, 6+6, 5 et 1+1+1+1) et (1x5, 4x1, 3x7, 2x6, 5x2). L'élève cherche d'abord à réaliser les opérations, comme elle le fait habituellement. Elle interprète ensuite le symbole de la multiplication comme s'il s'agissait d'une addition, notamment lorsqu'elle associe 5x1 en expliquant que c'est comme 5+1. En fait, elle y attribue un sens familier.

Des problèmes à résoudre

Trois médiations ont eu lieu avec trois élèves différents. Le premier extrait se situe dans une classe d'élèves de 6-7 ans. Les élèves faisaient, en grand groupe, une révision des étapes déjà enseignées (souligner les mots importants, prévoir une opération, réviser, etc.). Par la suite, ils devaient travailler seul à partir de la tâche suivante : «Mélanie a 8 raisins, elle mange 2 raisons. Combien de raisins reste-il ?»

Cette médiation permet de constater que lorsqu'il fait des mathématiques, l'élève semble s'attendre à réaliser une opération arithmétique. Son regard explore les fiches aide-mémoire sur le tableau avant qu'il n'explique devoir lire plus d'une fois le problème pour le comprendre : « Je lis le problème. Je lis deux fois. Trois fois pour bien comprendre ». Alex manifeste son intérêt à réussir. Il ferme ensuite les yeux pour « voir l'action dans sa tête ». « Je vois Mélanie manger, elle a huit raisins [puis elle] mange 2 raisins… Puis là je vois que, [elle est] en train… que [elle] mange ». L'élève explique : « [Elle] mange ! Ça veut dire qu' [elle] enlève ». Toutefois, Alexis illustre ensuite l'opération en utilisant des cercles. Il dessine huit cercles, puis il ajoute deux cercles aux huit déjà dessinés. Le dénombrement des dix cercles le mène à revoir le sens de l'illustration et à faire des X sur deux des dix cercles, oubliant toutefois que l'ajout de 2 n'est pas annulé pour autant. À nouveau, l'illustration des deux termes d'une opération conduit à une confusion.

Cette même médiation permet de constater qu'Alex considère que faire des mathématiques correspond à faire des « plus » et des « moins » pour résoudre des problèmes. Cette conception le conduit à accorder une importance accrue aux nombres par rapport aux relations entre eux. C'est alors qu'il détermine l'opération à effectuer en fonction de l'ordre de présentation des données de l'énoncé. Il explique : « Parce que le 8 [est] après lui puis le 2 [est] après puis le 2 c'est plus petit [cela fait qu'on] dit un moins ».

La deuxième médiation est réalisée avec Mia. Elle porte sur la tâche suivante : Le papa de Math et de Matie a 33 ans. Leur maman a 4 ans de moins que leur papa. Math a 27 ans de moins que son Papa et Matie a 21 ans de moins que sa maman. 1) Quel âge a Math ? 2) Quel âge a Matie) 3) Quel âge a la maman de Math et Matie ? Mia effectue une soustraction en utilisant tous les nombres comme s'il s'agissait d'une addition.

Cette première représentation de la tâche semble provenir du fait que l'élève considère que tous les nombres sont importants simultanément. En outre, l'algorithme de soustraction est assimilé aux mêmes conditions que celui d'addition. Par des comparaisons, entre les données et les questions, Mia prend conscience que toutes les données prises simultanément ne permettent pas de répondre aux questions.

Une troisième médiation a été réalisée avec Eva. Cette élève se disait à voix basse : « Je ne comprends pas. Qu'est-ce qu'il faut faire? » La tâche suivante lui est proposée : L'équipe de Zoïk doit apporter de l'argent pour acheter un livre qui coûte 24 $. Il y a 6 enfants dans l'équipe de Zoïk. Combien d'argent chaque enfant doit-il apporter si chacun doit fournir le même montant d'argent? À la suite d'une précision apportée à l'égard de l'importance d'attribuer la même valeur à chacun des 6 enfants du problème, Èva utilise une procédure d'approximations successives. Ainsi, elle partage le nombre 24 en 6 en attribuant successivement les valeurs 20, 15, 5 et 4. Elle utilise le dénombrement et son jugement numérique pour déterminer la vraisemblance de ces nombres comme solutions.

La mesure

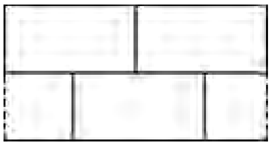
Une seule médiation a été réalisée sur ce thème. La tâche consistait à associer une unité de mesure conventionnelle (mètre, décimètre ou centimètre) avec des images représentant différents animaux, tels qu'une coccinelle ou encore un loup, afin de déterminer l'unité de mesure la plus pertinente pour mesurer. L'élève que nous avons rencontré, Julia, utilise toutefois systématiquement la réglette orange (dm) et le mètre (initialement représenté par girafe). Elle semble considérer la réglette orange et la girafe plus efficace que l'utilisation des unités de mesure conventionnelles. Pour l'élève un centimètre correspond au mètre-girafe. Ce mètre-girafe correspond ensuite à un mètre. Le mètre est ensuite représenté par les cubes blancs (cm^3). Une association, réalisée en classe, entre le préfixe cent dans le mot centimètre semble à l'origine de cette confusion. En effet, « cent » représente une grande quantité. Julia semble ainsi confondre le nombre de centimètres inclus dans un décimètre et le nom de l'unité de mesure du décimètre. Cette médiation illustre l'importance d'introduire les unités de mesure conventionnelle au moment où l'élève pourra communiquer une mesure.

La géométrie

Trois médiations ont été réalisées sur ce thème. La première porte sur une activité durant laquelle les élèves devaient, en équipe de deux, classer des figures planes et préciser les critères qui justifiaient ce classement. Le but de la situation consistait à distinguer des figures comportant des lignes courbes et des lignes droites. Grégoire avait terminé le classement depuis un bon moment et attendait. Il jouait avec sa collection de mines de crayons de couleur placée sur le coin de son bureau.

L'explication sollicitée par l'enseignante/étudiante est suffisante pour que Grégoire ajoute aux critères spécifiques aux figures planes, ceux concernant les solides. Grégoire explique : « Ça c'est un rond. … Mais si ça serait *en vrai*, ça roulerait et ça glisserait ». L'explication sollicitée par l'enseignante/étudiante, plutôt que la tâche elle-même, conduit Grégoire à établir une relation entre la figure en 2 D et un objet en 3D.

La deuxième médiation est réalisée à partir d'une activité qui vise à faire construire des dallages (motifs) et des suites de couleurs en tenant compte des régularités observées. Les élèves doivent terminer les dallages déjà commencés et ajouter la couleur sur ces derniers en respectant les suites de couleurs commencées. Marc ferme les deux bouts du dallage en formant des carrés. Marc semble ensuite hésiter en raison des motifs carrés placés dans ce dallage.



L'hésitation de Marc semble provenir des activités précédentes où le terme « suite » fait intervenir une suite de nombres. Cette confusion entre suite et dallage apparaît d'ailleurs avec Sam pour la même tâche. Familier avec des tâches durant lesquelles il doit continuer une suite de nombres ou colorier les formes en suivant une régularité dans la suite des couleurs, il ne peut terminer son dallage.

V. DISCUSSION

1. Les règles et les habitudes des élèves lors de réactions d'évitement ou d'anxiété

Contrairement à nos attentes, les élèves semblent élaborer des règles différentes pour la numération et pour les opérations. Toutefois, que les opérations arithmétiques soient réalisées comme des exercices ou dans des problèmes, leurs règles sont les mêmes. Ainsi, la caractéristique décimale de notre système de numération n'émerge pas des activités de dénombrement. En effet, un des élèves rencontrés associe un groupe d'objets, quelle que soit la « grandeur des groupes », à une dizaine. En outre, les activités visant à ordonner des nombres sont repérés sur une droite numérique, ce qui exploite moins le jugement numérique des élèves. Ces différentes règles contribuent à entretenir une conception instrumentale des mathématiques.

En ce qui concerne les opérations, deux règles semblent interreliées. La première semble influencée par l'ordre de présentation des apprentissages sur les opérations, alors que la seconde concerne l'utilisation du matériel. Par exemple, les élèves illustrent les deux termes avant de faire un retrait, un peu à la manière de l'utilisation des bouliers russes qui nécessitent l'illustration des deux termes. D'autres présentent 4 nombres superposés pour soustraire comme cela a pu être possible pour l'addition. Enfin, une troisième règle semble spécifique aux opérations à réaliser à partir d'un problème. Si le deuxième nombre du problème est plus petit que le premier, une soustraction devient nécessaire. Ces différentes règles ne permettent pas le développement d'un jugement numérique et entretiennent à nouveau une conception instrumentale des mathématiques.

Enfin, le passage d'unités de mesure non conventionnelles à des unités de mesure conventionnelles ne semble pas lié à la nécessité de communiquer un résultat. Cela le rend laborieux, plus particulièrement à la suite d'une association entre le préfixe cent, représentant une grande quantité, et le mot centimètre. Les activités géométriques, quant à elles, semblent assimilées à celles portant sur les activités numériques.

2. Les caractéristiques des tâches qui étaient proposées à ces moments

Les activités portant sur la numération font intervenir des activités de dénombrement et des opérations de soustraction. C'est ainsi que les jetons, les réglettes Cuisenaire sont d'abord dénombrées avant d'être représentés par des nombres dans des opérations à réaliser. Le fait d'exiger des élèves une illustration par le dessin ou par un matériel semble les conduire à se préoccuper de la méthode de travail, ce qui les conduit à abandonner leur jugement numérique. Il semble que les caractéristiques des méthodes de travail proposées dans la classe invitent à l'élaboration de certaines règles.

Enfin, l'activité portant sur la mesure vise à favoriser le passage des unités de mesure non conventionnelles aux unités de mesure conventionnelle Toutefois, l'absence d'une nécessité à communiquer le résultat d'une mesure semble nuire à cet apprentissage. Enfin, les activités géométriques visent à observer et à poursuivre des motifs et des couleurs. Toutefois, recherche de régularité dans des suites de nombres influence la création de dallages.

L'analyse de l'ensemble des quinze médiations permet de constater que les méthodes de travail proposées en classe conduisent les enfants à demeurer dans le rôle de l'élève en se conformant aux procédures proposées et aux consignes. Ce type d'intervention, plus sociale, semble entretenir une conception instrumentale des mathématiques. Lorsque les élèves rencontrés ont pu poser un jugement, par exemple sur la démarche d'un élève fictif, ils ont pu remettre en question leurs connaissances, ce qui leur a permis d'entrer dans le rôle de l'apprenant.

VI. CONCLUSION

Les objectifs de ce projet de recherche-action visent à identifier les règles et les habitudes des élèves lors de réactions d'évitement, de désorganisation ou de retrait et à repérer les caractéristiques des tâches qui étaient proposées à ces moments pour cerner les relations entre les caractéristiques des tâches, les pratiques enseignantes et les règles et les habitudes des élèves. Certains apprentissages sociaux sont nécessaires. Toutefois, les apprentissages cognitifs exigent de remettre en question ce qui est connu comme nous l'avons vu lors de la réalisation des soustractions. Dans ces conditions, un des enjeux du contrat social que pourrait relever l'enseignement des mathématiques consisterait à intervenir de manière à ce que l'enfant, devenu élève, puisse concevoir les mathématiques pour les jugements, numériques ou géométriques qu'elles proposent. En entrant dans le rôle de l'apprenant, les règles et les habitudes qui émergent de la socialisation de l'élève seraient délaissées.

RÉFÉRENCES

Beaulac S., DeBlois L. (2007) Accompagner l'élève dans l'évolution de sa compréhension de la démarche algébrique. In *Difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques. Hommage à Gisèle Lemoyne* (pp. 167-195). Collection Synthèse. Édition Bande *Didactique.*

Beillerot J. (1994). *Dictionnaire encyclopédique de l'éducation et de la formation.* P. Champy et C. Etévé. Paris : Nathan.

Beaumont C. (2003) *L'intervention en situation de crise à l'école primaire.* Document de formation. Université de Sherbrooke.

Brousseau G. (1983) Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 7(2), 33-115.

Charlot B. (1999) *Le rapport au savoir. Éléments pour une théorie*. Paris : Éditions Anthropos.

DeBlois L. (1996) Une analyse conceptuelle de la numération de position au primaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 16(1), 71-128.

DeBlois L. (2008) Un autre joueur dans la classe de mathématique : le contrat didactique. In Myre Bisaillon J., Rousseau N. (Eds.) (pp. 193-211) *L'élève en grande difficulté : Contextes d'interventions favorables.* Québec : Presses de l'Université du Québec – Collection Éducation et Recherche.

DeBlois L. (2010) Peut-on lire les troubles de comportement autrement ? *Bulletin du CRIRES*. Nouvelles CSQ.

Dencuff M.-P. (2010) *L'éducation dans la presse: la représentation de l'institution et de ses pratiques*. Thèse de de l'université d'Aix-Marseille.

Garcion-Vautor L. (2003) L'entrée dans l'étude à l'école maternelle Le rôle des rituels du matin. *Ethnologie française* 1(33), 141-148.

Mary C. (2003) Interventions orthopédagogiques sous l'angle du contrat didactique. *Éducation et Francophonie* 31(2), 103-124.

Musée d'histoire des sciences (2012) *Les jeux sont faits ! Hasard et probabilités. Dossier pédagogique*. Ville de Genève. Suisse.

---

[i] Cette recherche a été rendue possible grâce à la contribution du Fonds Blouin-Grégoire de la Fondation de l'Université Laval.

VERS LA CONSTRUCTION DE CONCEPTS AU TRAVERS DE L'ANALYSE DES PROCÉDURES DES ÉLÈVES ET DES OBSTACLES QU'ILS RENCONTRENT LORS DE LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Lucia GRUGNETTI* – François JAQUET* – Daniela MEDICI**
Maria Gabriella RINALDI**

Résumé – L'analyse de protocoles où les élèves expliquent la manière dont ils résolvent un problème, donne une idée de leur niveau de connaissances. Lorsque ces protocoles sont très nombreux, qu'ils proviennent de plusieurs pays, qu'ils ont été rédigés par des élèves de degrés scolaires différents et qu'ils font apparaître des procédures typiques, on peut alors déterminer les obstacles caractéristiques à la construction de certains concepts. Cette identification va être utile à l'enseignant pour adapter son action en vue des apprentissages de ses élèves.

Cette présentation est illustrée par un exemple sur l'approche de la proportionnalité et un autre en algèbre.

Mots-clés : résolution de problèmes, obstacles, procédure, concept, justification des élèves

Abstract : Protocols' analyses where pupils explain the way they solve a problem, give us an idea of their knowing level. When there is a large number of protocols coming from several countries, drew up by different school degree pupils and which show typical procedures, we can determinate characteristic obstacles to the construction of certain concepts. This identification can be useful to teachers in order to adapt their action for their pupils' learning.

This paper is illustrated by two examples, on the approach to proportionality and on algebra.

Keywords: problem solving, obstacles, procedures, concepts, students' explanations

I. INTRODUCTION

Lorsque des élèves résolvent un problème en travaillant par groupes sans aucune intervention de l'enseignant et qu'ils doivent expliquer leur démarche, on peut espérer qu'ils vont faire un peu de mathématique, mais on ne peut en être certain.

Ils sont censés faire appel à des savoirs déjà partiellement construits, à des savoir-faire déjà enseignés ou encore à des connaissances encore mal définies ; ils vont élaborer une stratégie ; ils vont interagir au sein du groupe pour valider leurs réponses puis rédiger le compte-rendu de leurs recherches où les concepts qu'ils ont mobilisés doivent apparaître.

C'est au moment de l'analyse des copies qu'on pourra repérer des difficultés ou erreurs typiques et poursuivre les réflexions par des hypothèses sur le genre et la nature des obstacles rencontrés.

On se situe alors à l'interface entre les explications des élèves, la réflexion didactique et, pour l'enseignant, une exploitation des données recueillies en vue de sa pratique de classe.

Notre intervention rejoint ainsi deux des questions formulées dans les buts du groupe de travail : *Quelles mathématiques les élèves font-ils et avec quelle diversité et quels moyens se donne-t-on pour les comprendre ?* tout en s'inscrivant dans une autre de ses demandes : *Que nous disent les procédures des élèves, à propos de la transposition didactique de l'objet enseigné ?*

* Association Rallye Mathématique Transalpin (ARMT) – lucia.grugnetti@unipr.it, f_jaquet@orange.fr.
** Dipartimento di Matematica, Università di Parma – Italie – daniela.medici@unipr.it, mariagabriella.rinaldi@unipr.it

© Grugnetti L., Jaquet F., Medici D., Rinaldi M. G. (2012) Vers la construction de concepts au travers de l'analyse des procédures des élèves et des obstacles qu'ils rencontrent lors de la résolution de problèmes. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT9, pp. 1192–1203). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

II. LE CADRE GENERAL

Nous nous situons dans le cadre du Rallye mathématique transalpin (RMT) où sont engagées actuellement plus de 4000 classes, des degrés 3 à 10 de la scolarité (élèves de 8 à 16 ans) d'Italie, France, Suisse, Luxembourg, Belgique et Argentine. Dans cette confrontation il y a des problèmes, des élèves qui les résolvent dans les mêmes conditions, leurs maîtres et les animateurs de la confrontation : enseignants, formateurs ou chercheurs.

1. Les problèmes

Les épreuves du RMT proposent des problèmes dont une première caractéristique est la nouveauté pour celui qui les résout ; par opposition aux exercices, problèmes d'application, activités d'entraînement, questions d'évaluation.

Un deuxième critère se situe au niveau des capacités à aborder cette situation nouvelle et à élaborer un cheminement autonome : les élèves doivent pouvoir « entrer dans le problème » puis imaginer des procédures de recherche sans aucune aide extérieure. Ils sont devant un défi : percevoir ce qu'il faut chercher et trouver un chemin qui y mène.

Un troisième critère concerne la relation entre les connaissances mathématiques à disposition des élèves et les savoirs nécessaires pour la résolution du problème. L'élève doit pouvoir mobiliser des connaissances personnelles ou des savoir-faire encore insuffisants, mais pas trop éloignés, pour en élaborer d'autres, plus adaptés à la situation nouvelle.

Du point de vue de l'enseignant qui souhaite l'exploiter, le problème doit encore répondre à un quatrième critère : celui de la pertinence et de l'identification des savoirs à mobiliser pour sa résolution. Il faut que les concepts en jeu soient reconnus, qu'on soit en mesure de les analyser et de décrire les phases de leur construction.

Finalement, après les analyses des résultats et expérimentations, le dernier critère sera d'ordre didactique. L'exploitation du problème permettra-t-elle à l'élève de construire des connaissances ?

2. Le contrat

Lors de chaque épreuve du RMT, la classe reçoit une série de cinq à sept problèmes à résoudre, en temps limité (50 minutes), rend une seule copie par problème avec la (les) solution(s) et les explications sur la démarche suivie. L'enseignant est remplacé par une personne extérieure à la classe qui n'intervient en aucune manière ; toutes les tâches sont donc dévolues aux élèves : formation des groupes, répartition des problèmes, lecture et appropriation des énoncés, détermination des stratégies, recherches, hypothèses et validations, au sein du groupe et entre groupes, rédaction des solutions et des explications correspondantes.

Les élèves savent que la copie rendue avec solution et explications déterminera le classement de leur classe dans le concours.

3. Le « milieu » ou « écosystème »

Le milieu créé par le RMT a des caractéristiques très particulières, différentes de la situation classique d'enseignement : le lieu est bien celui de la salle de classe, mais en l'absence de l'enseignant, de ses intentions didactiques et de son aide permanente.

Le travail de résolution s'organise selon la logique d'une confrontation entre classes. Les énoncés sont les mêmes pour tous, à affronter avec les seuls moyens à disposition : les savoirs et compétences individuelles disponibles, les interactions au sein de groupes qui vont entraîner une médiation des connaissances et leur mise en jeu afin de choisir la solution qui semble le mieux convenir.

Il n'y a pas de contraintes matérielles : l'usage de la calculatrice, des instruments de dessin géométrique, de matériel pour d'éventuelles manipulations est à l'initiative des élèves. Il n'y a qu'une limite de temps qui ne permet pas d'attendre que la solution vienne d'ailleurs.

Ainsi on est au-delà d'une situation a-didactique (Brousseau, 1990), avec des spécificités bien particulaires, dans un milieu « protégé » des interventions du maître, et des influences du « programme » de la classe.

La situation ne deviendra didactique que si le maître décide d'exploiter le problème pour sa classe entière, selon les intentions du RMT affichées en permanence des analyses a priori et a posteriori, des recherches expérimentations et propositions qui en découlent.

4. *L'échantillon*

Les élèves qui résolvent nos problèmes sont représentatifs de l'ensemble de la population scolaire puisqu'ils participent par classes entières. Il faut cependant relever que les copies examinées sont des productions de groupes et qu'elles proviennent de classes dont le maître a des conceptions proches de celles du RMT : il estime que la résolution de problèmes peut participer de la construction de connaissances ; il fait confiance aux élèves en acceptant de les laisser travailler de manière parfaitement autonome ; il considére que les erreurs ne sont pas des fautes mais des indicateurs d'un niveau d'élaboration d'un concept …

Les résultats obtenus n'ont donc pas de valeur statistique significative, mais l'intérêt didactique n'est pas là. Il réside dans l'identification des erreurs et obstacles caractéristiques, dans leur évolution en fonction de l'âge des élèves, dans l'observation de l'élaboration des concepts, au travers de centaines de copies provenant de systèmes scolaires différents.

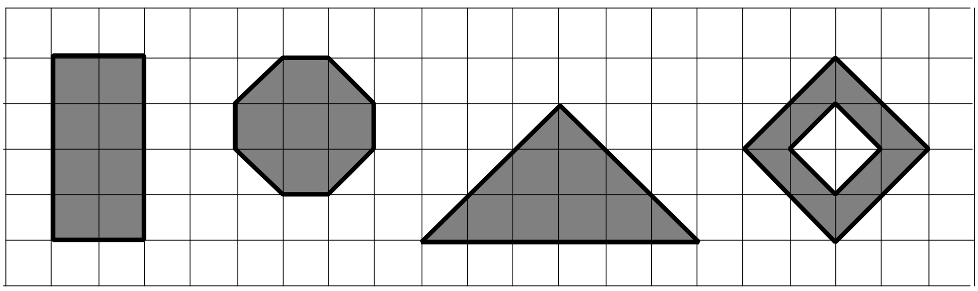
III. UN EXEMPLE POUR L'APPROCHE DE LA PROPORTIONNALITE

Cet exemple est typique d'une démarche où les analyses, expérimentations et réflexions ont évolué sur plusieurs années et font encore l'objet de recherches.

1. *L'énoncé et l'analyse de la tâche*

Décoration

Un peintre a peint ces quatre figures différentes sur un mur, chacune avec une couche de peinture de la même épaisseur.



Il a utilisé des pots de peinture de même grandeur :

- 18 pots de rouge pour une des figures
- 21 pots de bleu pour une autre figure ;
- 27 pots de jaune pour une autre figure
- des pots de noir pour la figure qui reste.

À la fin de son travail, tous les pots étaient vides.

Indiquez la couleur de chaque figure.

Combien de pots de peinture noire a-t-il utilisés<'

Expliquez comment vous avez trouvé.

Il s'agit d'un problème proposé aux classes de degrés 5, 6, 7 (10 à 13 ans) lors du 9e RMT, en 2001, dont l'analyse a priori[1] de la tâche se réduisait à cinq séquences : choisir une unité d'aire, déterminer les aires de chaque figure, ordonner ces mesures, établir la correspondance entre les aires des figures et le nombre de pots de peinture et trouver le nombre de pots de peinture noire.

Cette analyse ne mentionnait pas les conversions d'unités d'aire, de triangles en carrés, elle supposait que le conflit aire / périmètre était dépassé par des élèves de cet âge vu que le contexte de peinture favorisait d'ailleurs le choix de l'aire. Elle ne mentionnait pas non plus les procédures que les élèves utiliseraient pour établir la correspondance entre les aires et les nombres de pots. Et c'est précisément de là que sont issues toutes les réflexions et interrogations suivantes.

2. *Les premières analyses de résultats*

Un premier examen de 130 copies a montré que tous les groupes ont choisi le carré comme unité d'aire, qu'environ 90% ont calculé les aires correctement et 80% en moyenne (de 72% au degré 5 à 92% au degré 7) ont trouvé le nombre de pots de peinture noire. Le problème a donc été jugé « facile » pour ces degrés (Vernex 2001) et proposé aussi à des élèves plus jeunes, soit par groupes, soit individuellement, dont encore une majorité ont su calculer les aires et la moitié sont arrivés au nombre exact de pots noirs.

Les quatre aires trouvées : 8, 7, 9 et 6, (en carrés du quadrillage) il faut les faire correspondre, terme à terme, aux trois nombres donnés de pots 18 (rouges), 21 (bleus), 27 (jaunes) et au nombre inconnu de pots noirs.

C'est la tâche essentielle de résolution, qui n'avait pas été relevée lors de l'analyse a priori pour des raisons que nous expliquons ainsi, a posteriori : nos problèmes sont élaborés, par des enseignants, pour un concours où l'originalité est un critère prioritaire, sans encore de perspectives de recherche ou d'exploitations didactique.

Les explications des élèves permettent d'identifier clairement deux procédures de résolution :

A Un report de régularités. 20 % des groupes reportent les régularités de la suite 6 ; 7 ; 8 ; 9 des mesures d'aires, sur la suite incomplète des nombres de pots 18 : 21 ; 27 ; parfois correctement, mais aussi de manière erronée (dans la moitié des cas) ou douteuse. Trois exemples :

- 24 pots noirs, il y a toujours 3 de différence : 18 – 21 – 24 – 27.
- Il y en a 30 (18 – 21 – 27 – 30).
- Explication : 18 + 3 = 21 21 + 6 = 27 27 + 12 = 39 on a vu que c'était toujours le double de 3.

B Une référence au nombre 3. Les autres groupes, le 80%, mentionnent explicitement le facteur 3 ou la reconnaissance des multiples de 3 dans la suite des nombres de pots ; ce qui les conduit à la réponse exacte. Trois exemples :

[1] Une analyse a priori, dans le sens étymologique de « antérieur » est nécessaire à une élaboration réfléchie des problèmes du RMT et à la définition des critères d'attribution des points.

- Pour trouver la réponse, on doit toujours faire 3 fois. Il a utilisé 24 pots noirs.
- On a compté le nombre de carrés dans chaque figure et on a multiplié par 3 chaque nombre de carrés dans les figures et on a fait la même façon pour savoir combien il y a de noirs (24).
- Il a utilisé 24 pots de peinture (noire). Explication : Si on fait $3 \times 6 = 18$, après on fait $3 \times 9 = 27$ ensuite $3 \times 7 = 21$ ensuite il restait 24 car ce qu'on a fait $3 \times 8 = 24$ on l'a mis en noir.

3. Le passage au concept-clé du problème, la proportionnalité

Le problème *Décoration* semble, d'après ces premiers résultats, à la portée d'élèves dès 9 à 10 ans, mais on peut y répondre juste avec un raisonnement erroné ! Même la procédure qui se réfère au nombre 3 est suspecte et exige qu'on s'intéresse de plus près au concept qu'elle mobilise : la proportionnalité.

Ces doutes ont conduit à l'élaboration d'un nouveau problème, isomorphe, *Truffes au chocolat*, où les figures deviennent des alignements de truffes dans quatre boîtes (16, 24, 28, 36) et où les nombres de pots sont remplacés par des étiquettes indiquant les masses de chocolats de trois des quatre boîtes, (540 g, 630 g, 810 g, la quatrième étant l'objet de la recherche). Dans cette version, les élèves ne peuvent plus évoquer la multiplication par 3 en observant les multiples familiers 18, 21 et 27. Le nouveau facteur n'est plus un nombre entier (22,5). Pour le découvrir, il faut de nombreux essais (multiplications ou divisions) ou des observations sur les écarts dans la suite 16, 24, 28, 36 (moins « régulière » que 6, 7, 8, 9) pour tenter de les reproduire sur la suite incomplète 540, 630, 810.

L'analyse des résultats de *Truffes au chocolat*, expérimenté en classe par M. Vernex (2004) fait apparaître les deux types de procédures précédentes : celle où l'on recherche un « facteur » qui peut être soit un nombre abstrait permettant de passer des nombres d'une suite aux nombres correspondants de l'autre par une multiplication, soit une grandeur concrète, la masse d'une truffe en grammes ou celle consistant à reporter des régularités d'une suite sur l'autre par l'observation des écarts.

C'est à partir de ces observations que quelques animateurs du RMT ont engagé une recherche sur ce type de problèmes « inédits », qui ne s'inscrivent pas dans la tradition des études sur la « proportionnalité » mais qui se situent en amont, bien avant d'aborder les aspects opératoires et la manière de conduire la tâche classique de « recherche de la 4^{e} proportionnelle ».

Trois variantes du problème *Décoration* (Jaquet 2007) ont permis deux constatations révélatrices des obstacles que rencontrent les élèves :

- Lorsque, avec les mêmes figures que dans le problème d'origine (aires 6 ; 7 ; 8 ; 9) mais avec des multiples de 12 successifs : 72 ; 84 ; 96 comme nombres de pots (au lieu des 18 ; 21 ; 27 du problème d'origine), la fréquence des erreurs augmente très sensiblement. Une majorité des élèves, jusqu'à 13 ans, procèdent par reproduction des écarts de 12 et aboutissent soit à la réponse 60, soit à la réponse 108 (50 % et 50%).
- Dans un autre développement de *Décoration*, beaucoup d'élèves qui résolvent le problème en percevant la multiplication par 3 ne réinvestissent pas cette relation-clé pour trouver le nombre de pots nécessaires pour une cinquième figure - un rectangle de 5×4, d'aire 20 - introduit après la résolution du problème d'origine. Ils ne multiplient pas 20 par 3, mais préfèrent partager le nouveau rectangle en deux rectangles de 2×4 (identiques à la première figure pour laquelle ils avaient trouvé 24 pots) et demi-rectangle pour aboutir à $24 + 24 + 12 = 60$. Le nombre 3 n'avait donc pas, pour eux, le statut de facteur de proportionnalité, avec sa dimension de « pots par carré » qui lui donne du sens.

4. *De la découverte des obstacles à leur exploitation pour la classe*

Cinq variantes de *Décoration* ont été proposées dans les épreuves successives du RMT, à des centaines de classes et ont confirmé nos premières constatations (Jaquet 2009). Les élèves y sont confrontés à un obstacle typique : l'identification d'une situation de proportionnalité, avant d'en aborder les phases d'opération. Face à deux grandeurs en relation, ils sont capables de reconnaître les mesures prises sur l'une et sur l'autre, d'ordonner les deux suites de nombres, mais ils ne peuvent pas encore trouver à quel nombre d'une des suites correspond un nombre de l'autre suite parce qu'ils ne perçoivent pas la nature de leur relation. Jusqu'à l'âge de 12 à 13 ans, ils envisagent des différences ou écarts et n'imaginent pas les quotients ou rapports.

Cet obstacle était sos-estimé jusqu'ici dans la construction du concept de proportionnalité. Nous savons le repérer, mais nous sommes encore au stade des hypothèses sur sa nature.

S'il est d'ordre didactique, comment le faire connaître aux enseignants chargés d'organiser le milieu d'apprentissage et de choisir les activités pour que leurs élèves le rencontrent, en prennent conscience et soient en mesure de le surmonter ?

S'il est d'ordre ontologique, comment faire évoluer les programmes pour adapter les objectifs sur la proportionnalité aux niveaux de développement des élèves ?

S'il est d'ordre épistémologique, que faire pour la formation des maîtres, la sensibilisation des auteurs de manuels et des responsables des programmes ?

Ce type de questions est caractéristique d'une démarche qui, au travers de problèmes et d'observations de copies d'élèves, conduit à une réflexion didactique et à des exploitations possibles pour une pratique d'enseignement/apprentissage.

IV. UN EXEMPLE EN ALGEBRE

Nous partons ici d'un des nombreux problèmes du RMT qui peut être résolu par voie arithmétique ou algébrique, proposé aux classes de degrés 6 à 10 (de 12 à 16 ans) lors de la deuxième épreuve du 14^{e} RMT (2006) :

1. L'énoncé et l'analyse de la tâche

Au fitness

Angéla et Rosanna fréquentent la même salle de culture physique mais avec des modalités de paiement différentes.

Angéla paie une somme fixe de 12 euros par mois puis 2,50 euros pour chaque séance où elle est présente.

Rosanna préfère payer 3 euros par présence effective.

Les deux amies qui fréquentent la salle de culture physique avec assiduité ont déterminé le nombre de présences pour lequel le mode de paiement est tout à fait indifférent.

Combien de fois par mois les deux amies doivent-elles aller en salle de culture physique pour être certaines de payer la même somme ?

Expliquez votre réponse.

Les stratégies suivantes étaient prévues par l'analyse a priori de ce problème :

- Procéder par essais, par exemple en supposant, pour commencer, que Rosanna et Angéla fréquentent la salle seulement deux fois par semaine, c'est-à-dire 8 fois par mois. Les frais mensuels de Rosanna sont alors de 24 euros (8 × 3), et ceux d'Angéla de 32 euros (12 + 2,50 × 8), avec une différence de 8 euros. En trois fois par semaine ou 12 fois par mois Angéla dépense 42 euros (12 + 2,50 × 12) et Rosanna 36 euros (3 × 12) avec une différence de 42 - 36 = 6 euros. Émettre ainsi l'hypothèse que la différence diminue avec l'augmentation de la fréquentation et essayer alors avec 4 fois par semaine puis 6 fois par semaine ou 24 fois par mois les deux amies payent la même somme (72 euro).

Ou : établir un tableau donnant les coûts en fonction du nombre d'entrées, du genre :

N (entrées)	1	2	3	4	…	20	21	22	23	**24**	25	26
dépense de A(en €)	14,5	17	19,5	22	…	62	64,5	67	69,5	**72**	74,5	77
dépense de R(en €)	3	6	9	12	…	60	63	66	69	**72**	75	78

Ou : construire une représentation graphique et constater que les données précédentes se trouvent sur deux droites qui se coupent en (24 ; 72)

Ou : se rendre compte que pour chaque présence, Rosanna paye 0,50 euro de plus qu'Angéla, mais que celle-ci a déjà payé 12 euros initialement. Donc les deux amies paieront la même somme quand le nombre de séances fois 0,50 euro de différence fera 12 euros, c'est-à-dire après 24 présences (12 : 0,50).

Ou : désigner par x le nombre de présences selon lequel la dépense est la même et poser une équation du premier degré : $12 + 2{,}5x = 3x$. Déterminer ainsi la valeur $x = 24$, correspondant à 24 présences.

Cette analyse a priori prévoit évidemment les procédures arithmétiques des essais, organisés ou non, mais elle est aussi révélatrice des « attentes » du maître ou de l'adulte : recours à l'algèbre, ou procédures fonctionnelles (croissances ou représentations graphiques) pour les élèves les plus âgés.

2. Analyse des résultats

L'analyse globale des résultats du problème *Au Fitness* fait apparaître une forte progression des réponses exactes selon les degrés scolaires : de 25% en 6^{e} (12-13 ans) à 60% au degré 8 (14-15 ans) voire 80% aux degrés 9 et 10, sur près de 900 classes de 11 sections du RMT sans variations significatives d'un pays à l'autre (France, Italie, Suisse, Luxembourg).

Une analyse plus approfondie des 390 copies des sections de Parma et Siena montre que peu de classes (24 sur 390 ou 6%) ont choisi une procédure algébrique (*Tableau 1*).

Classes des degrés :	6	7	8	9	10	N
Nombre de copies examinées :	121	96	71	76	26	390
Procédures algébriques relevées :	0	0	6	12	6	24

***Tableau 1** – Problème Fitness, réussite globale et procédures algébriques relevées*

Les classes des degrés 6 et 7 n'ont évidemment pas résolu le problème à l'aide de l'algèbre, mais on pensait que les élèves plus âgés auraient choisi majoritairement des stratégies algébriques vu que l'introduction du calcul littéral et la résolution d'équations du premier degré figurent dans les programmes scolaires de l'école secondaire italienne (dès le degré 8)[2].

On trouve quelques rares procédures algébriques (*Exemple 1*) mais la majorité des classes des degrés 8 à 10 ont trouvé la réponse 24, par voie arithmétique (*Exemple 2*) ou par essais successifs, organisés ou non, suivis d'une vérification (*Exemple 3*).

[2] Pour ce problème, les copies de deux sections seulement ont été analysées, mais, pour d'autres problèmes analogues, l'examen des copies ne permet pas de déceler de différences significatives. Un examen des programmes nationaux montre que l'algèbre et les équations sont introduits aux mêmes degrés, avec quelques variations mineures.

Per trovare il risultato del problema abbiamo tradotto sotto forma di equazione i dati necessari, in questo modo : *(pour trouver le résultat du problème, nous avons traduit les données ainsi sous forme d'équation)*	$3x = 12x + 2{,}50x$ $3x – 2{,}50x = 12$ $0{,}5x = 12$ $x = 24$

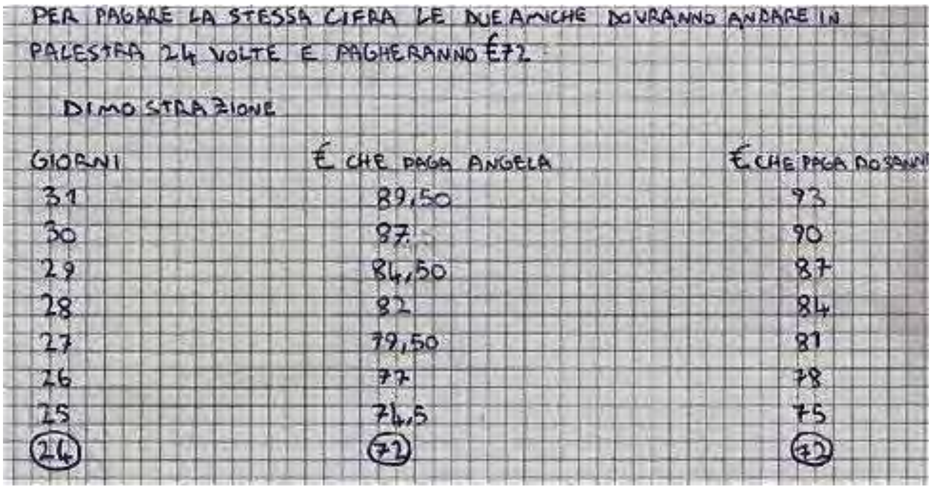
Exemple 1 – *(degré 8) d'une procédure algébrique, prévue par l'analyse de la tâche*

Noi abbiamo cosi : (Nous avons fait ainsi)
3 - 2,50 = 0,50 €
12 : 50 = 24 volte
R = 3 x 24 = 72 €
A = 2,50 x 24 + 12 = 72 €

Exemple 2 – *d'une des procédures arithmétique prévue*

Les essais, aux dires des élèves, suivis d'une vérification sont fréquents.

Très peu de classes ont organisé leurs essais sous forme de « tableau », méthode pourtant considérée par les maîtres comme un bon instrument didactique d'introduction à la notion d'inconnue.


PER PAGARE LA STESSA CIFRA LE DUE AMICHE DOVRANNO ANDARE IN PALESTRA 24 VOLTE E PAGHERANNO €72

DIMOSTRAZIONE

GIORNI	€ CHE PAGA ANGELA	€ CHE PAGA ROSANN
31	89,50	93
30	87	90
29	84,50	87
28	82	84
27	79,50	81
26	77	78
25	74,5	75
24	72	72

Exemple 3 – *où le tableau fait office de « démonstration »*

3. *Pour en savoir plus*

Les résultats précédents nous ont incités à approfondir nos recherches sur l'acquisition de la capacité à résoudre des problèmes par mise en équation. Dans le cas de *Au Fitness*, la simplicité de la relation permettait de choisir des stratégies « élémentaires » masquant d'éventuelles résistances et difficultés dans l'usage du langage algébrique.

D'autres problèmes du RMT ont alors été élaborés précisément pour favoriser une résolution par voie algébrique (Doretti et all. 2009). L'un deux, *Composition de roses* a été proposé aussi aux classes de degrés 6 à 8, lors de la finale du 16e RMT (2008) :

Compositions de roses

Madame Flora, propriétaire d'un célèbre magasin de fleurs, a préparé pour un client deux très belles compositions de roses.

Dans la première composition, faite de roses blanches, rouges et jaunes, elle a utilisé 235 roses.

Dans la seconde composition, faite seulement de roses rouges et blanches, elle a utilisé 263 roses.

Madame Flora observe que :

- le nombre des roses blanches est le même dans les deux compositions,
- dans la première composition le nombre des roses jaunes est le tiers du nombre des roses rouges,
- dans la seconde composition le nombre des roses rouges est le double du nombre des roses rouges de la première composition.

D'après vous combien y a-t-il de roses de chaque couleur dans chacune des compositions ?

Expliquez comment vous avez fait pour trouver vos réponses.

Ce problème peut être résolu algébriquement à l'aide d'une équation ou d'un système d'équations linéaires, mais aussi par arithmétique.

L'analyse, a posteriori, des copies de six sections a témoigné d'un usage très limité de la stratégie algébrique, aux degrés 9 et 10. Pour en savoir plus sur le recours spontané des élèves à « l'outil » équations, sans le conditionnement d'un usage en pratique de classe au chapitre « équation », le problème a été soumis à 993 élèves, de 47 classes de degrés 9 et 10 (14 en lycée scientifique ou classique, 14 en lycée technico-industriel ou commercial, 19 en école professionnelle).

L'analyse des stratégies a donné les résultats suivants pour ce problème :

Degré:	9 (508 élèves)	10 (485 élèves)
Stratégie algébrique :	8%	19%
Procédure algébrique correcte :	1%	13%
Stratégie arithmétique :	18%	23%
Non-réponse :	74%	58%

Tableau 2 *– Les procédures relevées pour « Composition de rose »*

Le problème s'est avéré très difficile. Il avait été bien réussi dans le « milieu » du RMT : par groupes, des classes finalistes, donc sélectionnées, mais c'est aussi la stratégie arithmétique qui a été choisie le plus souvent, bien qu'elle paraisse plus complexe que la résolution d'un système linéaire de deux équations.

L'usage des lettres et du langage algébrique n'est donc pas envisagé comme un outil apte à représenter et résoudre des problèmes.

Même dans la catégorie 10 l'étude, pendant toute l'année, des équations et de leurs propriétés ne semble pas avoir une influence déterminante sur la capacité de résolution des problèmes à l'aide de la stratégie algébrique.

C'est dans la phase de formalisation que les erreurs sont les plus fréquentes, notamment sur la récolte ou la représentation des informations, le choix de l'inconnue et la mise en équation.

Données

1[e] composition 235 roses (r.blanches & r. jaunes & r. rouges)

2[e] composition 263 roses (r.blanches & r. rouges)

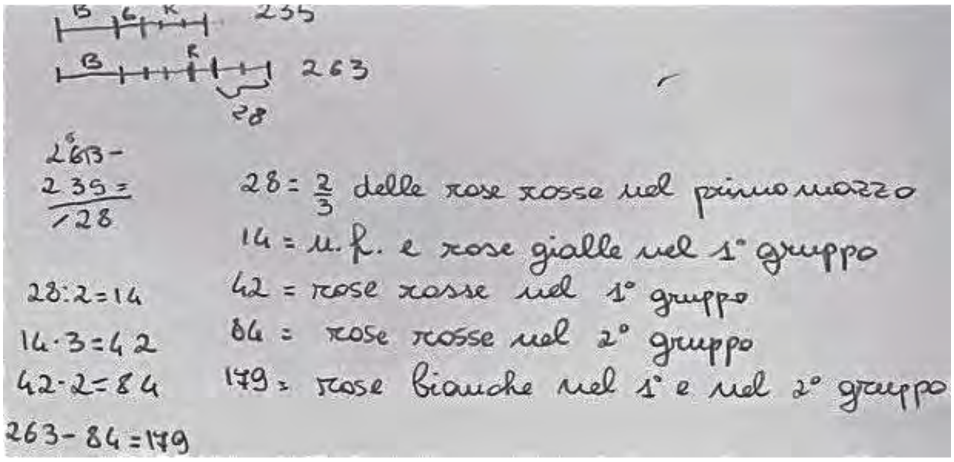
r.blanches 1[e] composition = r.blanches 2[e] composition

r. rouges = x

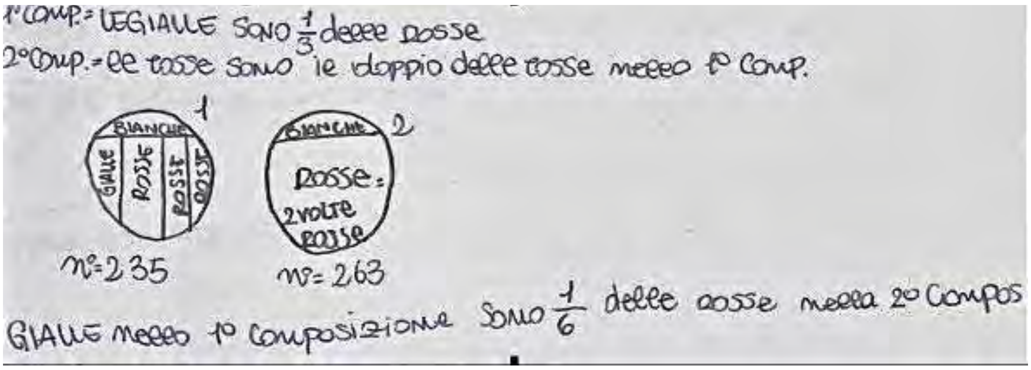
$263 - 2x + x + \frac{1}{3}x$

Exemple 4 *– où l’échec se situe à la mise en équation*

L’algèbre n’est pas perçu comme un moyen de résolution de problème et, là où il est mis en œuvre, il est mal utilisé. En d’autres termes, il semble que les élèves font tout pour ne pas utiliser l’algèbre.



Exemple 5 *– où l’équation est remplacée par un schéma très efficace*



Exemple 6 *– où le diagramme (ensembliste) est inefficace*

4. *Nos hypothèses sur la nature des obstacles à la mise en œuvre de connaissances algébriques*

Une première hypothèse sur le dysfonctionnement des connaissances algébriques, relevé précédemment, est de nature didactique. Elle nous est suggérée par les analyses de nombreux autres problèmes où intervient le calcul littéral et les constatations de nombreux enseignants, en Italie, qui relèvent systématiquement les difficultés que rencontrent leurs élèves des premières années de lycée dans l’acquisition des concepts d’inconnue et d’équation ou, de manière générale, dans l’utilisation du langage algébrique. Ces notions, déjà introduites au collège (vers 13 à 14 ans), ne semblent acquises que superficiellement et une majorité des étudiants appliquent de manière mécanique des procédures dont ils n'ont pas compris le sens.

Nous pensons qu'une des causes de cet échec est à rechercher dans un déroulement « traditionnel » du programme : introduction du calcul littéral suivi d'exercices de difficulté croissante, puis passage aux équations et à la mise en œuvre immédiate des principes d'équivalence, souvent sans tenir compte des concepts d'inconnue, de variable, de paramètre et des difficultés qui leur sont liées. On se limite ainsi aux procédures de résolution des équations, en tant que suites de transformations successives de type essentiellement syntaxique.

On induit ainsi chez les élèves une vision du langage algébrique comme un ensemble de mécanismes et procédures de calcul, et non pas comme un outil pour généraliser une situation, ce qui constitue une perte progressive de sens souvent combinée avec une perte d'intérêt.

Une seconde hypothèse est d'envisager une composante de nature ontologique ou épistémologique de l'obstacle lié à l'âge – tardif – où les élèves semblent capables de passer d'un inventaire systématique à une généralisation. Le groupe « algèbre » du RMT va poursuivre ses recherches dans cette direction.

V. SYNTHESE

Une idée de problème original, analysé a priori puis proposé à des centaines de classes peut aboutir, lors de l'examen des copies, a posteriori, à l'identification de procédures caractéristiques ou d'erreurs récurrentes ou encore d'obstacles spécifiques. Dans ce cas, le problème est inséré dans un des thèmes étudiés par un groupe de travail du RMT, autour d'un concept donné. Les deux exemples présentés montrent que les résultats observés à la lecture des comptes rendus de groupes d'élèves ont fait émerger les difficultés et spécificités des tâches de résolution Il faut alors approfondir les réflexions à leur sujet : travailler sur les variables didactiques du problème, comme dans le premier exemple, pour distinguer les procédures additives et multiplicatives puis pour faire apparaître le facteur de proportionnalité dans son intégralité, avec du sens, sa grandeur physique et sa nature numérique ; élaborer des expérimentations complémentaires, comme dans le deuxième exemple, pour voir apparaître avec évidence la difficulté, voire l'incapacité, de mettre en œuvre des procédures algébriques.

Le travail ne s'arrête cependant pas là si l'on veut aller au-delà des observations, des identifications ou des descriptions d'obstacles, vers des indications qui puissent être utiles aux enseignants : poursuite des recherches, conduite de nouvelles expérimentations avec la participation de praticiens …

Des approches didactiques nouvelles sont à imaginer ; non plus sur la manière d'expliquer les concepts difficiles ou d'éviter les obstacles, mais sur la résolution de problèmes où les élèves les rencontreront, les affronteront et les surmonteront ensuite en situation didactique, mise en scène par l'enseignant.

Pour le cas de la proportionnalité comme pour celui de l'algèbre, il faudra vraisemblablement renverser les priorités : chercher le sens et la nécessité avant d'enseigner les algorithmes autour de la « quatrième proportionnelle » ou les techniques de calcul littéral et de résolution d'équations.

REFERENCES

Brousseau G. (1982) Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 7(2), 33-115.

Brousseau G. (1990) Le contrat didactique : le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 9(2/3), 309-336.

Charnay R., Jaquet F. (2011) Points de départ. (Triangle magique et Décoration, première réflexions). *Grand N* 87, 4-9.

Doretti L., Medici D., Rinaldi M. G., Salomone L. (2009) Dare significato ai concetti di equazione e di sistema : attività in classe con problemi del RMT. In Grugnetti L., Jaquet F. (Eds.) *Actes des journées d'études sur le Rallye mathématique transalpin* Vol. 8 (pp. 121-142). ARMT.

Grugnetti L., Jaquet F., Tièche Christinat C. (2005) Enjeux didactiques des concours mathématiques. In Salin M-H, Clanché P., Sarrazy B. (Eds) (pp. 243-248)*Sur la de la théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Jaquet F. (2007) Quelques aspects de la proportionnalité dans les problèmes du RMT. Groupe de travail n° 2. In Grugnetti L., Jaquet F., Medici D., Rinaldi M-G. (Eds.) *Actes des journées d'études sur le Rallye mathématique transalpin* Vol 6 (pp. 101-116). ARMT.

Jaquet F. (2009) La proportionnalité, des écarts aux rapports. Groupe de travail n° 2. In Grugnetti L., Jaquet F. (Eds.) *Actes des journées d'études sur le Rallye mathématique transalpin* Vol 8 (pp. 73-86). ARMT.

Rouche N. (2002) *Des grandeurs aux espaces vectoriels. La linéarité comme fil conducteur.* Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (CREM). Nivelles, Belgique Collection : Mathématiques de la prime enfance à l'âge adulte.

Rouche N. (2006) *Du quotidien aux mathématiques : Nombres, grandeurs, proportions.* Paris : Ellipses.

Vernex M. (2001) Analyse et utilisation en classe du problème Décoration du 9e RMT. *Math-Ecole* 198, 4-18.

Vernex M. (2004) Une évaluation des procédures pour une remédiation ciblée. *Math-Ecole* 211, 37-46.

ETUDE DE L'EVOLUTION DES PRATIQUES D'UN ENSEIGNANT LORS D'UNE SEQUENCE D'ENSEIGNEMENT INTEGRANT UN ARTEFACT TECHNOLOGIQUE

Faten KHALLOUFI-MOUHA*

Résumé – En se plaçant dans le cadre de l'approche théorique de la médiation sémiotique d'inspiration vygotskienne, l'objectif de ce travail est d'étudier l'évolution des pratiques d'un enseignant lors d'une séquence d'enseignement intégrant un artefact technologique. L'intérêt porte essentiellement sur les stratégies de communications élaborées lors des phases de discussions collectives (Bartolini Bussi 1996) afin de mettre en place et de guider le processus de médiation sémiotique ainsi que sur leur l'impact sur la construction du signifié mathématique de la notion de la fonction cosinus chez les élèves.

Mots-clefs : la théorie de la médiation sémiotique, pratiques de l'enseignant, construction du signifié mathématique, Discussions collectives, l'artefact technologique Cabri géomètre

Abstract – Using the theoretical approach of the semiotic mediation, this work is aimed to study the evolution of a teacher's practices in a teaching experiment integrating a technological artefact. We focus on the communication strategies elaborated by the teacher in the phases of collective discussion (Bartolini-Bussi 1996) and on their impact on the constructional process of significance of trigonometric function among the pupils.

Keywords: the theory of the semiotic mediation, the teacher practices, the construction of mathematical significance, collective Discussions, the technological artefact Cabri geometer

I. INTRODUCTION

L'intégration d'un artefact technologique dans une classe de mathématique nécessite une organisation spécifique des séances d'enseignement de point de vue de la préparation et de la réalisation et nécessite la mise en place d'un nouveau contrat didactique et de nouvelles stratégies d'enseignement. Cette intégration influence ainsi les pratiques de l'enseignant dans la classe et l'apprentissage des élèves. Dans ce travail en se plaçant dans le cadre de l'approche théorique de la médiation sémiotique d'inspiration vygotskienne, nous avons étudié l'évolution des pratiques d'un enseignant lors de la mise en place d'une séance d'enseignement intégrant l'artefact technologique Cabri Géomètre dans le cas de l'introduction de la notion de fonction trigonométrique. Nous nous intéressons essentiellement aux stratégies de communication élaborées par l'enseignant lors des différentes phases de travail et leurs impact sur la construction du signifié mathématique de la fonction trigonométrique « cosinus » chez les élèves.

II. NOS APPUIS THEORIQUES

1. *L'instrument de médiation sémiotique*

L'approche théorique de la médiation sémiotique admet l'hypothèse que l'activité d'enseignement est une activité médiatisée et vise ainsi la transposition dans le domaine de la didactique, des concepts théoriques de l'approche vygotskienne, essentiellement celui de médiation sémiotique.

> The crucial issue is given by the transposition of the theoretical construct of semiotic mediation (Vygotsky 1974) into educational design and classroom implementation. (Bartolini Bussi et al. 2003)

* Faculté des sciences de Bizerte, Université de Tunis– Tunisie –fkhalloufi@yahoo.fr

© Khalloufi-Mouha F. (2012) Etude de l'évolution des pratiques d'un enseignante lors d'une séquence d'enseignement intégrant un artefact technologique. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT9, pp. 1204–1212). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

Cette approche interprète le fonctionnement des *artefacts cognitifs* comme l'élément essentiel pour l'apprentissage et pour cela elle offre un cadre théorique qui permet l'étude de l'utilisation de ces artefacts dans le domaine de l'enseignement. Une grande importance est attribuée au fonctionnement des artefacts en tant qu'instruments de médiation sémiotique. En effet, d'après Bartolini Bussi et Mariotti (2008) l'artefact entretient un double lien sémiotique, un premier lien *artefact/tâche* puisque un artefact est lié à une tâche spécifique afin de fournir une solution et un deuxième lien *artefact/connaissance mathématique* puisque cet artefact est relié à une connaissance mathématique spécifique. Ces deux types de relations s'expriment par différents types de signes. D'un côté, la relation entre l'artefact et la connaissance visée par l'enseignement s'exprime par des signes qui sont cristallisés dans la signification mathématique des opérations menées avec l'artefact. Ainsi, dans un objectif pédagogique ces signes sont ceux visés par l'enseignement et constituent *les signes mathématiques*. D'un autre côté, la relation entre l'artefact et la tâche s'exprime également par des signes généralement contingents à la situation déterminée par la solution d'une tâche particulière. Ces signes peuvent être de natures différentes (des signes langagiers, des gestes, des dessins, des symboles…) et sont attachés à l'activité avec l'artefact et aux opérations accomplies. Ils constituent ce que Bartolini Bussi et Mariotti (2008) appellent les *signes artefact.*

La relation entre ces deux types de signes (les signes artefacts et les signes mathématiques) n'est ni évidente ni spontanée et la construction d'un tel lien peut constituer un objectif d'enseignement. L'enseignant peut ainsi guider le processus de construction des connaissances en favorisant l'évolution des signes artefact attachés directement à l'artefact et à la tâche proposée vers les signes mathématiques visés. Le rôle de l'enseignant consiste à guider l'évolution des signifiés personnels (personal meanings) construit par les élèves lors de la résolution d'une tâche particulière avec l'artefact vers des signifiés mathématiques partagés par toutes la classe et qui constituent la connaissance scientifique visée par l'enseignement et cela essentiellement en établissant des discussions qui s'appuient sur l'activité avec l'artefact. Cela correspond à l'utilisation de l'artefact par l'enseignant en tant qu'outil de médiation sémiotique. En plus des signes mathématiques et des signes artefact, un troisième type de signes peut émerger lors de la construction des connaissances mathématiques et qui joue un rôle très important dans le lien entre les deux types de signes précédents. Ces signes appelés signes pivot (Bartolini Bussi et Mariotti 2008) sont susceptibles de permettre le passage du contexte de la vie ordinaire ou de l'activité avec l'artefact au contexte mathématique. Ils sont fortement polysémiques et ont plusieurs acceptations et signifiés dans le contexte mathématique et le contexte de l'activité avec l'artefact. Pour cela, ils sont susceptibles de permettre le passage d'un contexte à l'autre et de jouer ainsi un rôle « pivot » dans la construction de signifiés mathématiques personnels et puis socialement partagés.

2. *Le rôle de l'enseignant dans le processus de médiation sémiotique*

La mise en place du lien entre les différents types de signes nécessite une organisation spécifique de la part de l'enseignant. Les positions asymétriques (asymmetrical position) de l'élève et de l'enseignant part rapport au savoir mathématique et même au savoir instrumental attribue aux interventions de l'enseignant le statut d'*orchestration.* Une orchestration instrumentale en termes de Trouche (2005) et une orchestration des différentes interventions lors de la phase de discussion collective au sens de Bartolini Bussi (1998). Ces phases de discussion collectives sont généralement déclenchées par l'enseignant qui formule explicitement l'objet de discussion et impliquent toutes la classe.

Ces phases jouent un rôle essentiel dans l'évolution du processus sémiotique elles acquièrent, parfois explicitement, le caractère de véritables *discussions mathématiques* dont caractéristique principale est la dialectique cognitive, soutenue par l'enseignant, entre les signifiés personnels différents élaborés par chaque élève et les signifiés mathématiques associés aux signes spécifiques (Bartolini Bussi 1998).

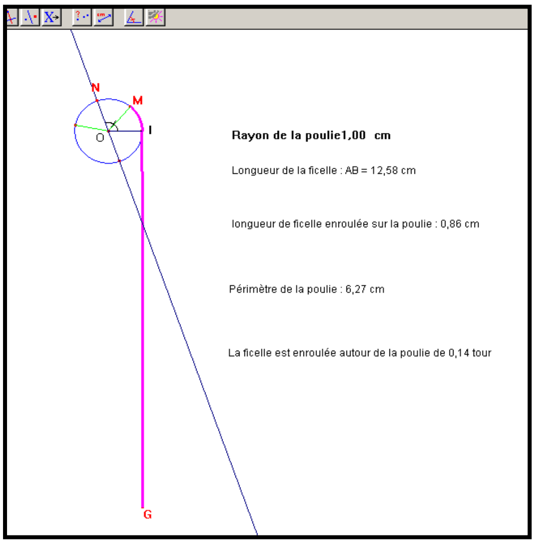
Ainsi, partant du fait que les signifiés personnels des élèves sont liés à l'utilisation de l'artefact pour accomplir une tâche bien particulière alors que le signifié mathématique est lié à l'artefact et à son utilisation. Le rôle de l'enseignant est alors, d'exploiter cette double relation sémiotique qui correspond à la potentialité sémiotique de l'artefact afin de guider l'évolution des signifiés personnels des élèves vers le signifié mathématique objet d'enseignement. Cela correspond essentiellement à guider le processus d'élaboration et de l'évolution de différents types de signes ayant émergé suite à l'utilisation de l'artefact lors des différentes phases de ce que Bartolini Bussi et Mariotti (2008) désignent par cycle didactique (didactical cycle p. 755). Cela nous amène à s'interroger sur les stratégies que l'enseignant peut mettre en œuvre afin de guider le processus de médiation sémiotique et de faire évoluer le processus de construction d'un signifié mathématique

III. PRESENTATION DE LA SEQUENCE D'ENSEIGNEMENT

Dans l'objectif d'étudier les stratégies élaborées par l'enseignant pour faire évoluer le processus de médiation sémiotique, nous avons élaboré une séquence d'enseignement intégrant l'artefact technologique Cabri géomètre. Cette séquence vise la construction du signifié mathématique de la fonction trigonométrique « cosinus » chez des élèves de 2ème année de l'enseignement secondaire tunisien (16/17 ans).

La séquence d'enseignement élaborée est composée de quatre parties :

Les deux premières parties font appel à « la situation poulie[1] » qui est une situation de modélisation dans Cabri d'une poulie et d'une ficelle qui peut être enroulée autour de la poulie en utilisant l'outil déplacement. L'objectif de la première partie est d'amener les élèves, à travers des tâches de descriptions et d'anticipation, à se rendre compte que dans le cas du cercle trigonométrique, la longueur d'un arc est égale à la mesure en radian de l'angle qui l'intercepte.



[1] La situation « A rope on a wheel » a été construite par Genevès (Genevès, Laborde et Soury-Lavegne 2005) au sein de l'équipe I.A.M de l'Université Joseph Fourier dans le cadre du projet européen V.I.M : The Virtual envIronment for experiencing Mathematics http://vim.sis-piemonte.it.

Dans la deuxième partie, à travers l'utilisation des deux outils « déplacement » et « report de mesure » peut permettre à l'enseignant d'amener les élèves à associer à un réel quelconque x un point M sur le cercle trigonométrique et cela en reportant le nombre x sur le cercle trigonométrique à travers l'utilisation du « report de mesure » sur le cercle. Cela peut ainsi, favoriser chez les élèves, l'appréhension d'une relation fonctionnelle entre l'ensemble des réels IR et l'ensemble des points du cercle trigonométrique qui se traduit au niveau du savoir mathématique par l'existence d'un homomorphisme de groupe, surjectif entre la droite des réels et le cercle trigonométrique.

La troisième et la quatrième parties sont basées sur le fonctionnement des outils « déplacement », « trace » et « report de mesure » de Cabri comme outils de médiation sémiotique pour l'idée de variation et de covariation et cela pour l'introduction de la fonction « cosinus » comme une relation de covariation (relation entre deux variations dépendant du temps) et de sa représentation graphique comme la trajectoire d'un point mobile.

Dans sa conception, la séquence d'enseignement fait appel à deux organisations sociales différentes. Des phases de travail par binôme permettant aux élèves de construire à travers l'utilisation de l'artefact, des signifiés personnels relatifs à la notion mathématique visée. Des phases de discussions collectives activées et guidées par l'enseignant. Ces discussions engagent tous les élèves à confronter leurs signifiés personnels et permettent à l'enseignant de les guider dans la construction d'un signifié partagé par toute la classe qui est le signifié mathématique visé. Ces discussions peuvent atteindre le statut de discussions mathématiques au sens de Bartolini Bussi (1996) et peuvent également comporter des phases d'institutionnalisation (Brousseau 1998). L'analyse des signes élaborés et utilisées par les élèves et l'enseignant lors des différentes phases de travail et la façon dont l'enseignant exploite ses signes, nous permettra d'analyser l'évolution du processus de médiation sémiotique.

IV. METHODOLOGIE DE L'ETUDE DES PRATIQUES DE L'ENSEIGNANT ET DE L'EVOLUTION DES SIGNIFIES DES ELEVES

1. Premier plan d'analyse : les signes simples

Le premier plan d'analyse des différents signes élaborés par l'enseignant et les élèves est l'analyse des signes simples que nous avons introduit ci-dessus, les signes artefact, les signes pivots et les signes mathématiques. Dans nos analyses, nous avons repéré pour chaque notion mathématique visée, les différents signes élaborés et utilisés par les élèves. L'utilisation de cette classification permet d'une part, d'analyser l'état évolutif des stratégies langagières utilisées par l'enseignant dans la mise en place et l'évolution du processus de médiation sémiotique. D'autre part, cette classification permet d'analysé l'évolution des signifiés des élèves relatifs à cette notion et cela à travers l'identification des types de signes utilisés. En effet, le passage de l'utilisation de signes artefact vers l'utilisation de signes pivot, pour une notion donnée, sera interprété comme une évolution dans la construction du signifié de cette notion. Par exemple, le passage de l'utilisation de signes artefact tels que « on augmente », « on enroule », « on déplace » pour désigner l'idée de « variation » ou de « variable indépendante » vers l'utilisation du signe pivot « varier » et par la suite vers le signe mathématique « variable » constitue une évolution dans la construction du signifié de variable chez les élèves.

2. *Deuxième plan d'analyse : Les signes complexes*

Ces signes complexes sont introduits par Falcade (2006) dans son analyse des signes langagiers lors des phases de discussion collective. Elle distingue quatre catégories : les caractérisations, définitions, interprétations et instanciations.

Les caractérisations portent de façon plus ou mois implicite sur des signes mathématiques, des signes pivots ou des signes artefact et ont tendance à mettre en valeur quelques caractéristiques qui pourraient être interprétées en termes mathématiques. Néanmoins, les caractérisations ne sont pas de vraies définitions parce que l'intervenant, n'a pas l'intention de le faire.

Les définitions portent sur un signe-mathématique cible. Elles visent explicitement et intentionnellement à expliciter, préciser, délimiter son signifié. Elles ne sont pas des définitions au sens mathématique du terme mais constituent une « mise en mots » sur un objet qui était jusqu'alors inconnu ou peu connu.

Les interprétations portent sur l'établissement d'une correspondance entre deux familles de signes qui appartiennent à deux champs sémantiques différents.

Les instanciations sont des signes qui concernent l'établissement d'un lien interprétatif entre deux signes simples, où l'un est directement issu de l'activité dans l'artefact et est associé à un nom propre et l'autre est un signe mathématique cible.

L'analyse de ces signes permet également d'étudier l'évolution des signifiés des élèves relativement à une notion mathématique. En effet, nous supposons que la première étape dans la construction d'un signifié peut se traduire par l'utilisation des signes complexes « caractérisation », qui ont tendance à mettre en valeur quelques caractéristiques qui pourraient être interprétées en termes mathématiques. Ou bien à travers l'utilisation de signes complexes « définition », qui consiste à chercher à donner une définition d'un objet qui était inconnu ou peu connu. La deuxième étape dans la construction d'un signifié peut s'interpréter par l'utilisation des signes complexes « instanciation » et « interprétation », qui reviennent à donner une interprétation mathématique de l'activité dans l'artefact.

V. ETUDE DE L'EVOLUTION DES PRATIQUES DE L'ENSEIGNANT LORS DES DIFFERENTES PHASES DE LA SEQUENCES

1. *Première discussion collective : difficulté à entrer dans le processus de médiation sémiotique*

Dans la première partie de la séquence les différentes interventions de l'enseignant lors de la phase de discussion collective montrent une difficulté à entrer dans le processus de médiation sémiotique. En effet, dans cette discussion collective, nous n'avons repéré aucune référence explicite à la « situation poulie » et à l'activité avec l'artefact. L'enseignant s'est limité à institutionnaliser la définition de la mesure d'un angle en radian. Toutes ses interventions relèvent du domaine mathématique et il ne fait allusion à l'activité avec l'artefact que dans une seule intervention et de façon non explicite. Cela relève de l'influence du contrat didactique classique[2] et de ses pratiques enseignantes habituelles. Nous supposons que la nouveauté des pratiques relatives au processus de médiation sémiotique, nécessite que

---

[2] Ici le contrat didactique classique est utilisé en opposition par rapport au contrat didactique établit suite à l'intégration d'un artefact technologique. Cela en prenant en considération tous les changements qui affectent les relations entre les différentes composantes de l'enseignement apprentissage des mathématiques.

l'enseignant s'approprie de nouvelles stratégies d'enseignement basée sur le concept de discussion collective au quelle il n'est pas habitué.

2. *Emergence de nouvelles pratiques enseignantes et l'entrée dans le processus de médiation sémiotique*

Dès la deuxième partie de la séquence expérimentale, nous avons remarqué une évolution au niveau des pratiques de l'enseignant qui s'est traduite d'abord par la mise en place d'une nouvelle stratégie suite à un blocage des élèves lors de la phase de travail par binôme. Nous avons désigné cette stratégie par les phases de mini-discussion collective (Khalloufi-Mouha 2009). La phase de mini-discussion collective constitue un modèle réduit de la phase de discussion collective, introduite par Bartolini Bussi (1998), qui ne fait pas intervenir toute la classe mais, se limite à une discussion entre l'enseignant et les élèves d'un binôme (ou d'un petit groupe de travail) à propos d'un objet mathématique visé par l'enseignement. Ces phases sont déclenchées suite à l'apparition d'un un blocage ou d'une déviation importante de l'objectif de travail lors de la phase de travail par binôme. Elles constituent une occasion pour une confrontation entre les signifiés personnels des élèves et le signifié mathématique de la notion mathématique visée. Dans ces phases l'enseignant fait appel à l'activité avec l'artefact afin de faire évoluer la situation il utilise ainsi des signes artefact ainsi que des signes pivot. Il s'appuie alors, sur l'activité dans l'artefact pour amener les élèves à dépasser certaines difficultés et engendre un changement au niveau des significations construites. Ces mini-discussions comportent également des interprétations mathématiques de l'activité dans l'artefact comme, par exemple, l'interprétation de la ficelle comme partie de la droite des réels positifs.

L'évolution dans les pratiques de l'enseignante se traduit également lors des phases de discussions collectives, par la déviation du contrat didactique classique où toutes les interventions relèvent du domaine des mathématiques vers l'établissement de nouvelles stratégies de communication pendant lesquels l'enseignant fait appel à l'activité avec l'artefact et lui donne une interprétation mathématique. Dans ces stratégies l'environnement Cabri géomètre et la situation poulie jouent le rôle de milieu sur lequel l'enseignant se base pour introduire l'idée de relation fonctionnelle entre le cercle trigonométrique et la droite des réels et par la suite le signifié mathématique de la fonction « cosinus ». L'enseignant part donc, d'une expérience pratiquée par tous les élèves, pour d'abord étendre la métaphore au delà de la longueur de la ficelle et de l'idée de l'enroulement pour passer ensuite de cette métaphore à l'idée de variation, de covariation et de fonction trigonométrique.

3. *Dernière partie de la séquence : le problème du temps d'enseignement et retour au contrat classique*

Dans la dernière partie de la séquence, à un certain niveau de la discussion collective, nous avons remarqué que l'enseignant pour des raisons de temps et pour faire évoluer la discussion, ferme le problème et passe à poser des questions fermées. Cela constitue une influence du contrat classique et une déviation de notre objectif de mettre en place une séance de discussion collective.

VI. IMPACT DE CERTAINES PRATIQUES SUR LA CONSTRUCTION DU SIGNIFIE MATHEMATIQUE CHEZ LES ELEVES

Pour étudier l'impact de certaines pratiques de l'enseignant sur le processus de construction du signifié mathématique de la notion de fonction trigonométrique « cosinus », nous présentons ici l'évolution des signifiés des élèves lors d'une discussion collective de la deuxième partie de la séquence. Cette discussion a été mise en place par l'enseignant dans l'objectif de définir une relation fonctionnelle entre l'ensemble des nombres réels et l'ensemble des points du cercle trigonométrique. La définition de cette fonction constitue une étape fondamentale pour la définition des fonctions trigonométriques.

L'analyse des signes simples utilisés lors de cette discussion collective, montre une importante utilisation de la part de l'enseignant et des élèves des signes artefact. Ces signes constituent essentiellement une description des actions des élèves lors de la manipulation de la situation poulie. Ils apparaissent alors, sous forme de verbes d'action ou sous forme d'expressions comportant un verbe d'action. Par exemple, nous avons repéré les signes « changer », « augmenter », « revenir » et « retourner » « enrouler » « partir », « arriver », « atteindre »et « prendre ». Il y a également l'utilisation d'expressions telles que « à chaque fois qu'on prend un réel x positif » ou « on peut trouver un point » ou encore « on peut l'atteindre ». Cela constitue un indice d'évolution par rapport à la première discussion collective et l'établissement d'un nouveau contrat didactique imposé par l'utilisation de l'environnement Cabri-Géomètre et la particularité de la situation poulie. L'évolution apparaît également au niveau des interventions de l'enseignant, qui fait souvent référence à l'activité dans l'artefact à travers l'utilisation de signes simples ou complexes afin d'aider les élèves à se rendre compte de la possibilité d'associer plusieurs mesures pour un même arc.

Guidés par l'enseignant, les interventions des élèves comportent également une importante utilisation des signes pivots ce qui met en évidence une volonté de donner une interprétation mathématique de leur activité dans l'artefact et cela constitue un indice de l'évolution de la construction des signifiés de fonctions et de relation fonctionnelle. Les signes pivot utilisés relèvent en apparence du domaine mathématique, cependant leur apparition dans les interventions des élèves est attachée à l'activité dans l'artefact comme par exemple l'intervention suivante « Alaa : Non le réel x est positif on a pris les x positifs donc c'est $\mathbb{R}^+$ » l'élève fait référence à l'activité dans l'artefact cependant il cherche à l'interpréter dans le domaine mathématique. C'est pour cela que nous considérons les signes « le réel x est positif » et « les x positifs » comme signes pivot.

Dans la suite de la discussion, nous avons repérer l'apparition d'une utilisation de la part des élèves de signes mathématiques relatifs à la classe de fonction. Parmi ces signes, il y a des signes introduits par l'enseignant puis utilisés par les élèves, comme par exemple « fonction » et « relation ». Mais il y a également des signes mathématiques introduits par les élèves, comme par exemple le signe « associer » et « correspondre ». Nous avons également repéré des formulations de type mathématique, comme par exemple l'intervention de Ikbel « Pour tout réel x positif on peut construire un point N sur le cercle tel que l'arc $\widehat{IN} = x.$ » et l'intervention de Sabrine « A chaque réel x on associe un point M du cercle… ».

Concernant les signes complexes, nous avons repéré l'utilisation de plusieurs signes qui relèvent de la catégorie d'interprétation de la part de l'enseignant comme par exemple une interprétation de la longueur de la ficelle enroulée autour de la poulie comme une mesure de l'arc orienté $\widehat{IM}$. Cela constitue une appropriation de la part de l'enseignant de nouvelles stratégies basées sur l'utilisation de l'activité dans l'artefact comme milieu commun à tout les élèves sur lequel il s'appuie pour résoudre certaines difficultés et pour introduire de nouvelles notions mathématiques.

L'analyse de l'évolution du processus de construction du signifié mathématique de la relation fonctionnelle entre l'ensemble des nombres réels et l'ensemble des points du cercle trigonométrique nous a permis de dégager trois étapes.

Étape 1 : les premières interventions des élèves mettent en évidence que lors des phases de travail par binôme, ils repèrent les variations à partir de la manipulation de l'activité dans l'artefact et l'utilisation de l'outil « déplacement » de Cabri. Cela apparaît sous la forme de verbes d'action qui sont des signes artefact décrivant leurs actions.

Étape 2 : par la suite, les interventions des élèves montrent une élimination de la référence à l'espace et/ou au temps présent dans les signes artefact précédemment utilisés et un passage à l'utilisation d'expressions telles que « la mesure de l'arc varie ». Nous avons repéré également la reconnaissance de liens entre deux variations qui se manifeste à travers l'utilisation d'expressions tels que « quand X varie alors Y varie » ou comme « si X varie alors Y varie » ce qui atteste la reconnaissance de variation indirecte.

Étape 3 : par la suite, les élèves utilisent des signes pivot comme « dépend de » ou « en fonction de » qui remplacent les expressions telles que « si X varie alors Y varie. ». Ce qui reflète la prise en considération par les élèves du lien fonctionnel entre les deux variables.

VII. CONCLUSION

L'analyse des différentes phases de la séquence expérimentale met en évidence l'impact de l'intégration d'un artefact technologique sur les pratiques de l'enseignant et l'apprentissage des élèves. Nous avons repéré une évolution au niveau des pratiques de l'enseignant pour la mise en place et l'évolution du processus de médiation sémiotique. Cette évolution s'est traduite par la mise en place de phases de mini-discussions collectives en plus des phases de discussion collective programmées lors de la construction de la séquence d'enseignement. Ainsi que l'utilisation de l'activité avec l'artefact afin de faire évoluer la situation.

Les phases de mini-discussions, vu leur caractère local, constituent une technique adoptée par l'enseignant afin de gérer l'évolution du processus de construction du signifié mathématique visée, face à la particularité de cette situation d'enseignement faisant appel à l'artefact Cabri et à une nouvelle organisation du travail. De plus, lors des discussions collectives, les élèves ne manifestent pas certaines difficultés rencontrées au cours de leur travail et se limitent à donner l'interprétation finale de leur activité dans l'artefact. Or, les mini-discussions, de par leur caractère local permettent de pointer certaines difficultés intermédiaires ou locales dans l'évolution du processus de construction du signifié mathématique d'un concept.

L'évolution dans les pratiques de l'enseignant se traduit également lors des discussions collectives, pendant lesquelles il fait appel à l'activité avec l'artefact, notamment suite à l'apparition d'une difficulté d'ordre mathématique chez l'un des élèves. Dans un tel contexte, l'environnement Cabri géomètre et la situation poulie jouent le rôle de milieu sur lequel l'enseignant se base pour introduire le signifié mathématique visé.

REFERENCES

Bartolini Bussi M.G. (1996) Mathematical Discussion and Perspective Drawing in Primary School. *Educational Studies in Mathematics* 31(1/2), 11-41.

Bartolini Bussi M.G. (1998). Verbal interaction in mathematics classroom: a Vygotskian analysis. In Steinbring H. et& al. (Eds.) (pp. 65-84)*Language and communication in mathematics classroom*. Virginia : NCTM, Reston.

Bartolini Bussi M.G., Mariotti M.A., Ferri F. (2003) Semiotic mediation in the Primary School: Durer's glass. In Hoffmann H., Lenhard J., Seeger F. (Eds.) *Activity and Sign Grounding Mathematics Education (Festschrift for Michael Otte)*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Bartolini Bussi M.G., Mariotti M.A. (2008) Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. In English L. (Ed.) *Handbook of International Research in Mathematics Education (second edition).*Nex York et Londres: Routledge.

Brousseau G. (1998) *Théorie des situations didactiques.* Grenoble : la Pensée Sauvage.

Falcade R. (2006) *Théorie des Situations, médiation sémiotique et discussions collectives, dans des séquences d'enseignement avec Cabri-géomètre pour la construction des notions de fonction et graphe de fonction.* Thèse de l'université Joseph Fourier. Grenoble.

Genevès B., Laborde C., Soury-Lavergne S. (2005) The room of transformations and functions with Cabri-Geometry. *L'insegnamento Della Matematica e delle scienze integrate.* numero spécial – décembre 2005, 11-14.

Khalloufi-Mouha F. (2009) *Etude du processus de construction du signifié de fonction trigonométrique chez des élèves de 2ème année section scientifique*. Thèse de l'université de Tunis.

Trouche L. (2005) Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques_ nécessité des orchestrations. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 25(1), 91-38.

Vygotsky L.S. (1931/1978) *Mind in Society. The Development of Higher Psychological Processes*. Cambridge, MA : Harvard University Press.

CONSTRUCTION D'UNE CULTURE SCIENTIFIQUE POUR TOUS : ENGAGEMENT DE L'ENSEIGNANT ET DE L'ELEVE DANS LA RUPTURE DE PRATIQUES HABITUELLES

Sebastiana LAI[*] – Maria POLO[**]

Résumé – Notre proposition veut soumettre à la discussion les résultats issus de notre travail montrant la nécessité d'une rupture des pratiques habituelles tant de l'enseignant que de l'élève pour une construction significative et en relation étroite de connaissances mathématiques et scientifiques. Elle s'appuie sur deux expériences réalisées entre 2005 et 2008 dans des niveaux équivalents à la troisième et à la seconde.

Mots-clefs : culture scientifique, pratiques habituelles, enseignant, élève

Abstract – Our proposal is to submit to discussion the results of our work showing the need for a brech of the usual practices of teacher and student for a significant construction of mathematical and scientific knowledge in close relationship. It relies on two experiments conducted between 2005 and 2008 to the third and second levels.

Keywords: scientific culture, traditional practices, teacher, student

I. PRATIQUES D'ENSEIGNEMENT ET CULTURE SCIENTIFIQUE : QUESTIONNEMENT PRELIMINAIRE

La construction d'une culture scientifique pour tous et tout au long de la vie est une préoccupation importante au sein de différentes institutions au niveau mondial. A l'école, par contre, se diffuse un phénomène de diminution des compétences et des connaissances scientifiques ; et encore au XXI^{e} siècle persistent les questions liées aux supposées différences de genre en ce qui concerne l'attitude et la prédisposition aux mathématiques et aux disciplines scientifiques.

Notre proposition veut soumettre à la discussion les résultats issus du travail de Lai (2009) montrant la nécessité d'une rupture des pratiques habituelles tant de l'enseignant que de l'élève pour une construction significative de connaissances mathématiques et scientifiques étroitement reliées. Elle s'appuie sur deux expériences réalisées entre 2005 et 2008 aux niveaux équivalents[1] à la troisième et à la seconde en France (âges des élèves, 15-18 ans). La première, concernant mathématiques et sciences sociales, a été réalisée dans deux classes d'un Institut Professionnel pour les sciences sociales de Cagliari, dans le cadre d'un Projet National, financé par l'U.E., visant l'amélioration du rapport des filles aux disciplines scientifiques. La deuxième, concernant mathématiques et astronomie, a été réalisée dans deux classes de la première année de l'école secondaire de la section scientifique à Orosei, une ville de 6.000 habitants à 230 km de Cagliari, dans le cadre du travail de Thèse[2] de S. Lai. Les deux expériences sont caractérisées par la mise en place d'une démarche expérimentale, dont le nœud épistémologique est la modélisation du réel phénoménique.

[*] Observatorio Astronomico – INAF di Cagliari– Italie – tania@oa-cagliari.inaf.it
[**]Dipartimento di Matematica e Informatica – Italie – mpolo@unica.it

[1] Le système scolaire secondaire italien étant organisé en un premier cycle de trois ans en tronc comun et d'un deuxième cycle de cinq ans, le choix de la section se faisant au niveau équivalent à la troisième.
[2] Thèse soutenue le 2 juin 2009 à l'Université Aix-Marseille I.

© Lai S., Polo M. (2012) Construction d'une culture scientifique pour tous : engagement de l'enseignant et de l'élève dans la rupture de pratiques habituelles. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21^{e} siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT9, pp. 1213–1226). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

II. DEMARCHE EXPERIMENTALE ET MODELISATION

L'enjeu de la démarche expérimentale, qui s'applique évidemment à tout savoir scientifique, est la construction du lien monde/représentation, qui mène à la nécessité d'une validation efficace de l'expérience même. Le travail de Lai (2009) pose la question des contraintes qui permettent la mise en place de parcours finalisés à construire des savoirs scientifiques qui dépassent, d'une part la pré-construction, rapport sensible à des objets qui ont été seulement nommés, et de l'autre l'algorithmisation, rapport pratique à des objets construit par l'expérience. Comment établir les relations pertinentes entre l'observation et les concepts théoriques? Dans la démarche expérimentale la mathématisation de l'expérience constitue un passage obligé où le *modèle* a un rôle central. Une telle démarche demande, en effet :

- de recueillir des données par l'observation de quelques phénomènes ;
- d'organiser et fabriquer des constructions mathématiques, qui constituent un modèle mathématique du phénomène ;
- d'essayer de prévoir des phénomènes qu'on peut déduire de ce modèle.

Nous avons pris en considération la définition suivante de modèle :

- un modèle mathématique est la *représentation* d'un phénomène ;
- une telle représentation n'est pas descriptive, discursive ou donnée par de mots, mais formelle, c'est-à-dire exprimée dans le langage mathématique ;
- il n'existe pas une voie directe de la réalité aux mathématiques. En d'autres termes le phénomène spécifique étudié ne détermine pas "sa" représentation mathématique ; ce que l'on fait est de traduire en formules des *idées* et des *connaissances* relatives au phénomène. (Israel 1986, p. 63. Traduction des auteurs).

Dans la démarche expérimentale l'intervention des mathématiques réalise la possibilité d'une topogénèse des connaissances scientifiques concernant le phénomène.

Comment assurer l'apparition, garantir le développement des idées qui en évoluant produiront les questions et la connaissance attendue des phénomènes ? De plus, les idées et les connaissances originelles doivent trouver une représentation formelle: comment faire émerger les représentations efficaces ou en évaluer l'efficacité ? Quelles sont les conditions didactiques permettant de produire, chez l'élève, ce passage de l'expérience sensible à la mathématisation ?

Dès le début de notre expérience, enseignant et élèves sont engagés, dans ces questions. Dans l'enseignement traditionnel, souvent, les *modèles* sont transmis et restent préconstruits. Notre contribution vise à montrer que la démarche expérimentale est viable dans l'école à la condition d'une rupture des pratiques habituelles. Deux expériences sont proposées dans ce texte pour valider notre hypothèse.

1. *Les mathématiques dans le contexte d'une enquête sociale*

Notre première expérience propose une réflexion concernant l'une des préoccupations des travaux du GT9 s'interrogeant sur la question de comment aborder les questions d'équité (filles/garçons, origine sociale, origine culturelle) quant à l'apprentissage des mathématiques.

Le titre[3] donné au Projet par les enseignants de l'école « Le ragazze danno i numeri » contient, en italien, un jeu de mots qui résume le sens ainsi que l'objectif principal du Projet,

[3] La traduction littérale est « Les filles donnent les nombres », la locution italienne signifiant *travailler du chapeau.*

qui nous a permis de nous familiariser avec les filles engagées dans le projet et de leur poser des questions telles que : sommes-nous folles de penser que les femmes puissent bien réussir en mathématiques ?

Les objectifs visés par le projet peuvent se résumer ainsi : promouvoir le succès scolaire par la prise de consciences des filles que la difficulté en mathématiques, ou envers les sciences, n'est pas une culpabilité d'origine de l'univers féminin, mais le résultat de différents rapports à ce savoir qui prennent les racines dans la culture, dans l'opinion sociale et non seulement dans le rapport individuel ; briser un stéréotype et dépasser l'extranéité aux mathématiques par une activité qui lui donne un sens, en tant qu'outil d'un travail significatif et motivant pour les étudiantes. Ces thèmes ont constitué le terrain sur lequel s'est installée la démarche expérimentale, visant l'utilisation de connaissances mathématiques spécifiques en tant que modèle pertinent et efficace dans l'analyse des données d'une enquête sociale.

2. Les mathématiques dans le contexte de l'astronomie

Notre deuxième expérience, réalisée dans deux classes de première année de l'école secondaire de la section scientifique, dans le cadre du curriculum officiel des mathématiques, propose une séquence d'activités finalisées à résoudre le *problème d'Eratosthène* de la mesure du rayon de la Terre. Elle reprend le travail[4] de Lai (2009) qui montre la légitimité de la prise en charge dans l'enseignement obligatoire de certaines notions de l'astronomie classique, à partir d'une réponse négative donnée à la question suivante.

> Si cet objet de savoir (astronomie classique) est *usé*, si tout le monde *connait* l'astronomie de Ptolémée ça veut dire que tout le monde *sait* dans la pratique du quotidien distinguer les conséquences de ces savoirs ? (Lai 2009, p. 43)

En astronomie construire un modèle est une démarche scientifique qui nécessite l'observation et la mathématisation, parce que le calcul conduit sur le modèle (ou le raisonnement géométrique, que le calcul modélise) permet d'éprouver la théorie par la vérification expérimentale de ses résultats. La transposition didactique de ce savoir est viable dans un curriculum de mathématique si l'on retient le rôle crucial du *modèle* géométrique de l'espace, en tant que *forme logique* de la structure des phénomènes astronomiques, qui permet l'attribution du caractère de « vérité » expérimentale à ces phénomènes. Une activité de modélisation fondée sur l'observation est fort éloignée de la pratique scolaire habituelle et nécessite une réponse aux questions suivantes :

Comment parvenir à transformer, dans l'école, les connaissances géométriques des élèves en outil de modélisation des phénomènes astronomiques ? Ces connaissances sont-elles mobilisables telles quelles ?

Si la mobilisation de telles idées mathématiques est cruciale dans le succès du passage de l'observation à la modélisation, alors son absence montrera que le passage est impossible. Le travail de Lai (2009) a aussi montré comment l'absence de mathématisation correspondrait à une absence de description et d'interprétation des phénomènes astronomiques. La vérification globale de cette hypothèse est articulée sur deux plans différents :

- le relevé et l'identification des effets de l'absence de mathématisation, concernant le travail de l'élève, dans le passage monde-représentation soit dans un *processus de représentation* ;
- la description et l'analyse des actions de l'enseignant en situation explicitement aménagée pour permettre ce passage.

[4] Lai (2009) étudie deux cas : l'expérience d'Eratosthène et le mouvement de la Lune.

Avant de donner au paragraphe IV quelques résultats des deux expériences, nous analysons les traits caractérisant la démarche expérimentale et certains aspects de la rupture des pratiques habituelles qui en découlent.

III. DEMARCHE EXPERIMENTALE ET RUPTURE DE PRATIQUES HABITUELLES

La mise en place d'une démarche expérimentale est en soi une rupture des pratiques habituelles, ne serait-ce que du fait qu'elle peut être considérée en lien étroit avec la démarche d'investigation[5] qui est l'une des recommandations pour l'enseignement des disciplines scientifiques dans plusieurs pays depuis les années 2000. Le statut de recommandation n'assure pas la diffusion et la systématicité de cette pratique dans la classe des mathématiques. Notre travail confirme cette résistance au changement des pratiques scolaires comme le montrent, au-delà de notre contingence, les aspects de rupture avec les pratiques habituelles caractérisant la mise en place de la démarche expérimentale. Nous synthétisons ces aspects ci-dessous.

1. Enjeu de la démarche expérimentale et rupture des pratiques habituelles

Un premier choix se présente au départ d'un enseignement avec une composante expérimentale : renoncer aux liens qui unissent modèles et phénomènes, (option « analytique ») ou les prendre comme les clés de l'enseignement (option « synthétique »), qui maintient la liaison entre les deux comme épine dorsale de l'enseignement. Nous avons choisi l'option « analytique » qui est caractérisée par une rupture temporelle entre les *expositions didactiques* du phénomène proposé à l'étude et celles des modèles.

> Cette option conduit à une nouvelle séquentialisation des niveaux d'approche du problème, permettant de satisfaire aux contraintes didactiques. Dans ce cadre, le recours systématique au *concret* et à *l'expérimental* se présente comme le point de départ nécessaire de l'enseignement. La *proposition* du *problème initial* est faite par l'enseignant qui le verse au compte de la classe. Le professeur a donc la fonction cruciale d'engager la *dévolution*, ce qui permet qu'une question scientifique devienne une donnée didactique. (Lai 2009, p. 265)

Lai (2009) a montré que la dialectique expérience/théorie déclenche une sorte de mouvement alternatif, puisque l'action d'introduire les données de la mesure avec une *règle de correspondance* entre entité théorique et objets concrets oblige à transformer continuellement l'un dans l'autre jusqu'à une complète construction du modèle. La complexité du passage expérience/théorie est montrée dans le schéma suivant :

Problématique	Mathématisation	Reproblématisation	Typologie de Situations
Contextualisation Expérience Validation pratique	**Théorisation**	**Décontextualisation de l'expérience par une Théorie Preuve formelle**	**Situation de formulation production de représentations**
Non contextuelle Théorie Validation formelle	**Déthéorisation**	**Recontextualisation Algorithmisation Vérification pratique**	**Situation de validation résolution de problèmes**
Algorithmisée Routine Validation efficace	**Décontextualisation**	**Expérience Epreuves d'efficacité**	**Situation routinière production d'expérience**

[5] Le GT10 de ce colloque est consacré à l'étude de ce thème.

Dans le schéma la première colonne est explicative d'une démarche théorique spécifique des disciplines scientifiques ; la deuxième concerne le processus de mathématisation ; la troisième rend compte d'une dialectique théorie-expérience et la dernière colonne est explicative de la différente nature des activités, en termes de typologie des situations, où enseignant et élève sont confrontés à la nécessité de rupture des pratiques habituelles.

Du point de vue de la transposition à finalité didactique, la démarche expérimentale considère le passage expérience/modèle/expérience selon l'articulation suivante : la reconnaissance de l'expérience, sa prise en compte en tant qu'objet d'étude dans la classe (*contextualisation*) ; la pratique de la mesure par l'emploi d'une théorie mathématique, ce qui permet la *décontextualisation* de l'expérience ; l'*algorithmisation* (situation de résolution des problèmes posés en théorie, retour vers une pratique), la *vérification efficace* du modèle (usage routinier du modèle).

2. *La rupture des pratiques habituelles dans la mise en place de la démarche expérimentale*

Dans la séquentialisation habituelle de l'enseignement scientifique, l'enseignant fait une narration des modèles censés expliquer des faits dénommés mais pas observés. La construction d'un modèle explicatif d'un phénomène observé, par contre, nécessite une temporalité basée sur la topogenèse, où des avancements ou des retours en arrière constituent le processus par lequel les élèves construisent les liens entre le phénomène et son modèle explicatif. Cela demande de considérer, comme le disent Assude, Mercier et Sensevy 2007, que « le processus de dévolution est plus qu'un simple engagement de l'élève ». De fait, l'observation, la reconnaissance d'un problème, la nécessité de mesurer ne vont pas de soi pour les élèves, ainsi que la prise en charge explicite et consciente de la part de l'enseignant de la dévolution d'un savoir ou d'un problème.

Les contraintes didactiques aptes à réaliser une introduction du problème et une désignation du phénomène, ne concernent pas seulement les liens entre le connu et l'inconnu, ou la présentation des techniques et d'objets anciens du point de vue de la transposition didactique. Mais elles concernent surtout l'admissibilité du problème par les élèves, en l'absence d'une correspondance entre la monstration et le phénomène que l'on veut exhiber. Il faut donc que le phénomène à observer et la mesure engagée soient acceptés comme partie du problème étudié, les éléments par lesquels constater les résultats d'une première expérience dans le monde inconnu, même si elle n'est pas suffisante à produire la solution du problème.

La déstructuration du savoir, processus connu et théoriquement encadré dans les premières études de la Transposition Didactique (Chevallard 1985) et dans ses développements, est l'un des nœuds cruciaux de la démarche expérimentale qui, suivant l'option analytique, exige une déstructuration par rapport à la linéarité du savoir à enseigner ; cela va se réaliser dans des situations, au sens de la Théorie des Situations Didactiques (Brousseau 1998), où ces savoirs déstructurés, par rapport au curriculum officiel, prennent du sens aux yeux des élèves. Mais la mise en place de la démarche expérimentale détermine aussi une consubstantielle déstructuration des actions et des taches de l'enseignant et de l'élève, réalisant une rupture des pratiques habituelles notamment par rapport à différents savoirs en acte dans la pratique (Lai et Polo 2002) et à certaines rigidités de la position enseignante (Polo 2008).

Notre contribution vise à montrer comme cette déstructuration doit être nécessairement de nature systémique, c'est-à-dire concernant les relations mutuelles entre enseignant-élève-savoir.

IV. ACTIVITÉ DE L'ENSEIGNANT ET DE L'ÉLÈVE DANS LE CADRE D'UNE DÉMARCHE EXPÉRIMENTALE

1. Une expérience d'enquête sociale dans le curriculum des mathématiques

La démarche expérimentale est à la base du travail de construction, recueil et interprétation des données d'un questionnaire qui a été l'objet de cette expérience. N'ayant pas à notre disposition une observation et des données systématiques sur les séances réalisées nous n'avons pas la prétention de discuter ici de résultats de recherche au sens strict à ce sujet. La description de différents aspects de rupture par rapport aux pratiques habituelles, qui a été réalisée pendant l'expérience, vise à identifier celles que nous posons à la base de la possibilité d'améliorer à l'école non seulement la réussite en mathématique mais surtout un changement nécessaire d'attitude négative et de perception d'échec envers les mathématiques. Cette attitude est très forte chez les filles, de milieux socialement et culturellement démunis, comme celles des classes où nous avons travaillé.

L'expérience du Projet « Le ragazze danno i numeri », qui s'est déroulée pendant l'horaire curriculaire, deux heures par semaine pendant six mois, était organisée en quatre modules, articulés entre eux, gérés par quatre experts[6] externes à l'école (Psychologie, Femme et science, Mathématique, Recherche sociale). Dans le travail de deux premiers modules nous avons essayé de déclencher une certaine hétérogénéité chez les étudiantes se montrant, au départ, comme une groupe homogène par rapport tant aux aspects de leur rapports aux sciences et aux mathématiques notamment, qu'aux aspects psychologiques sur sens du *soi*. Globalement elles étaient considérées par les enseignantes comme très faibles en mathématiques et se elles-mêmes se considéraient telles. Avec les expertes elles ont tout de suite explicité leurs intérêts et leurs attentes par rapport à leur futur se voyant plutôt destinées au mariage ou à des métiers typiques d'une vision stéréotypée de ceux auxquels les femmes puissent aspirer (coiffeuses, esthéticiennes, puéricultrices,…). Une lecture réflexive de l'ancienne histoire russe de Vassilissa, extraite de Pinkola 1993, conduite par S. Lai, a favorisée une première différentiation parmi les filles en ce qui concerne la prise de conscience de soi, développée également par un travail sur l'histoire de femmes qui ont « fait » la science. Ce travail s'est croisé avec celui du pari d'arriver à réaliser un « produit scientifique », à l'aide des mathématiques et de la technologie.

Avec l'expert de recherche sociale les étudiantes ont choisi trois sujets pour un questionnaire[7] soumis auprès des étudiants (garçons dans la majorité) de trois instituts techniques situés dans le même quartier que leur institut. Les données du questionnaire ont fait l'objet d'une tabulation sur Excel, menée en laboratoire d'Informatique. Suite au travail d'analyse des données, conduit en travail par groupe, elles ont rédigé un document final de présentation de l'expérience et des résultats de l'enquête. Les extraits[8] suivants, tirés de ce document, témoignent le dépassement du manque d'estime initial en leurs capacités ainsi que de l'intérêt pour le travail « scientifique » qu'elles ont pu mener.

> Cela a été pour nous un projet très intéressant de regarder et analyser comment les femmes ont donné une forte contribution dans le domaine des nombres. Le travail a duré 50 heures pendant lesquelles nous avons beaucoup discuté et travaillé pour comprendre ce que les garçons pensent sur des sujets tels que la

---

[6] S. Lai a assuré la gestion et la responsabilité scientifique du deuxième module, M. Polo celle du troisième. Nous remercions les enseignantes Anna Garau, Franca Cannas, Patrizia Dore (psychologue) et Patrizia Giancola (experte en sciences sociales), ainsi que les filles avec qui nous avons partagé l'expérience.

[7] Le problème de la classe étant « connaître les opinions des interviewées », il s'agissait de construire un modèle de recueil, organisation et analyse des données. Les savoirs mathématiques concernaient essentiellement les différentes formes d'écriture (fractions, écriture décimale, pourcentages), les opérations et l'ordre dans Q.

[8] La traduction garde forme et contenu du document électronique rédigé par les étudiantes en italien.

> famille, l’amitié et l’amour. Nous y sommes arrivées par des questionnaires que nous avons créés. […] Les filles des classes de troisième et seconde C de l’institut S. Pertini ont fait passer un questionnaire […] à des classes de différentes écoles […].Ce Projet […] nous l’avons réalisé par la passation de 312 questionnaires […]. Après avoir recueilli les copies remplies des questionnaires, nous les avons transcrites sur Excel, nous avons fait les graphiques et déduit les pourcentages.

L’extrait suivant est représentatif des résultats atteints dans le traitement et l’analyse des données. Un travail préparatoire de rappel ou de « re-visite » des contenus mathématiques qui étaient à la disposition de la majorité des étudiantes, en tant que parties du curriculum de leur niveau scolaire, a été nécessaire. L’une des questions de la partie du questionnaire sur le thème de la famille, concernait l’âge à laquelle garçon et filles voudraient quitter la maison. La figure 1 reporte les diagrammes construits par un des groupes d’étudiantes et leur analyse de la représentation des données.

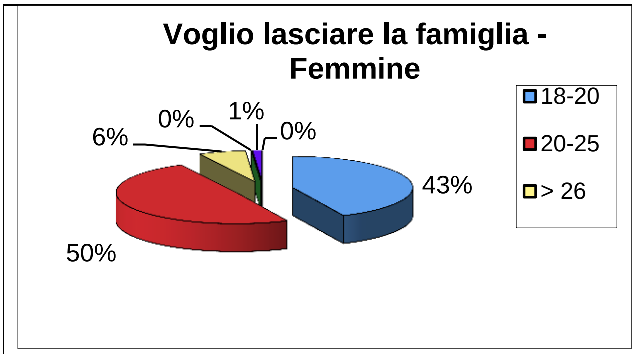
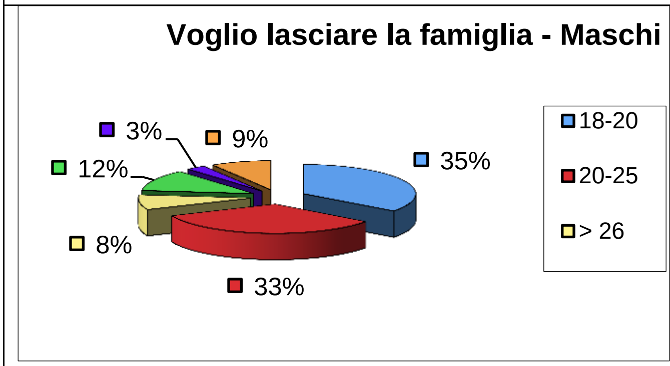
<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Dans ces données on peut observer que le 43% des individus de sexe féminin veulent se rendre indépendantes, en quittant la famille entre 18 et 20 ans, tandis que parmi les individus de sexe masculin seulement le 35% veulent la quitter au même âge.</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>Dans ce graphique en général on note que ce sont les individus de sexe féminin à vouloir quitter en premières la famille, même si cela devrait être en premier les individus de sexe masculin si l’on juge qu’au même âge, ils semblent un peu plus mûrs puisque même seuls, ils arriveraient à mieux se débrouiller.</td>
</tr>
</table>

Figure 1 *– Graphiques des analyses de données du questionnaire*

Des commentaires analogues aux autres questions du questionnaire, montrent l’utilisation routinière de savoirs mathématiques et donc une appropriation du modèle d’analyse des données qui a mené la classe à résoudre le problème initial de connaissance de l’opinion des interviewés.

2. Une expérience en Astronomie dans le curriculum des mathématiques

Le dispositif expérimental mis en place est articulé en trois différentes aspects finalisés, respectivement à :

- Analyser la pensée spontanée des élèves sur certaines connaissances/obstacle en astronomie. (§ 4.2.1)
- Construire une suite de séances de modélisation de phénomènes astronomiques et en observer leur déroulement. (§ 4.2.2)
- Analyser et interpréter les donnes des observations en termes d’actions de l’enseignant et de l’élève. (§ 4.2.3)

3. Cadre théorique et analyse de la pensée spontanée de l'élève

Le thème sur lequel on a cherché à connaître la pensée spontanée des élèves, leurs représentations, est la *forme de la Terre*. Dans la classe 1A, l'enseignant demande aux élèves de représenter comment deux observateurs placés en deux points différents sur la surface de la Terre voient une étoile ou le Soleil, dans l'hypothèse de la Terre plate (TP), dans l'hypothèse de la Terre ronde (TR). Dans la classe 1B, l'enseignant demande aux élèves de représenter « le point de vue » d'un observateur qui regarde un bateau qui arrive au port, dans l'hypothèse de la Terre plate, dans l'hypothèse de la Terre ronde.

Sur la base de l'analyse *a priori* des savoirs astronomiques, enjeux de la modélisation, on a identifié les *observables*, sur la nature du savoir, qui caractérisent la problématique de la forme de la Terre. Dans ce but nous avons identifié les éléments graphiques permettant une mise en rapport géométrique des traits représentant la situation, qui appartiennent à la logique graphique du modèle et permettent d'explorer les deux hypothèses.

Analyse *a priori* : Observables dans la représentation de la hauteur des étoiles

a. Présence du point de vue de l'observateur, en tant que direction du regard vers l'objet observé.
b. Direction rectiligne du regard vers l'objet (ou les objets) observé.
c. Direction parallèle du regard des deux observateurs vers l'objet observé, ou de la lumière.
d. Représentation de la forme plate/ronde par rapport à la hauteur d'une étoile depuis deux points d'observation différents.

Analyse *a priori :* Observables dans le cas d'un bateau entrant dans le port

a. Présence du point de vue de l'observateur, sous la forme de la direction du regard vers l'objet observé.
b. Rectilinéarité du regard en direction de l'objet observé.
c. Stabilité de la partie visible d'un navire pendant qu'il se rapproche du port.
d. Représentation de l'observateur dans un schéma descriptif de la situation, dans l'hypothèse Terre ronde.

Le *processus de représentation* se relève être un concept important de la psychologie cognitive et de la psychologie sociale, d'où il se diffuse vers tous les secteurs de l'analyse des connaissances, notamment vers le secteur de l'éducation. A première vue il semble naturel d'importer le concept du domaine de la psychologie dans celui de la didactique, mais les études récentes dans le domaine de la didactique des mathématiques, notamment en Théorie des Situations Didactiques (Brousseau 1998), permettent et légitiment un usage spécifique à caractère didactique. Ainsi nous allons essayer de déterminer par cette méthode quelles « représentations » sont viables dans l'astronomie (à la fois parce qu'elles permettent la stabilisation d'un modèle et parce que les élèves peuvent les produire comme représentantes des conditions de leur action dans le monde) en utilisant la définition suivante ici synthétisée

> *Les situations objectives de représentation.* Considérons un milieu M (un dispositif) et un actant A, lié à ce milieu par des possibilités d'action et des objectifs modélisés par une situation Σ. (…) Si Σ est tel que A doive nécessairement utiliser la représentation R pour résoudre le problème que lui pose Σ nous dirons que Σ est une situation objective de représentation. (Brousseau 2004, p. 246)

Identifier les *situations objectives de représentation* parmi les situations expérimentales mises en place permet, selon nous, de reconstruire le déroulement de la démarche expérimentale dans le passage monde/modèle. En fait, le caractère de nécessité de l'usage d'une représentation donnée (qui est donc imposée par la situation) justifie la possibilité qu'elle soit constitutive du passage monde/modèle.

Nous allons reprendre ce dernier aspect en le reliant à certains éléments de la Théorie de la représentation de Wittgenstein, notamment dans le *Tractatus*.

Selon son cadre de la *Théorie figurative* des propositions, qui analyse la nature du langage et de son rapport au monde, dans le *Tractatus* (T. 2.1 ; 2.225), Wittgenstein introduit des remarques sur la nature des images. Il entend sous ce terme non seulement les dessins ou les photographies, mais aussi les cartes géographiques, sculptures, modèles matériels, partitions musicales et enregistrements. On peut considérer qu'il propose donc une *Théorie générale de la représentation,* les propositions sont les expressions perceptibles de la pensée et les pensées sont des images. Il affirme que l'on doit toujours avoir en tête deux éléments, face à toute représentation : (a) de quoi ceci est une représentation et (b) si la représentation est fidèle ou infidèle.

Sur le point **a**, qui interroge la possibilité d'une représentation, les éléments du modèle doivent remplacer les éléments de la situation auxquels ils se substituent, c'est la relation figurative qui fait que l'on parle d'une « image » (T 2. 1514). Sur le point **b**, les éléments du modèle doivent sauvegarder un rapport spécifié. Par exemple pour ce qui nous concerne, les relations spatiales dans le monde doivent être respectées dans le modèle.

Une conséquence importante de cette idée est la suivante : les relations parmi les éléments d'une image (le fait que les éléments de l'image soient en relation les uns avec les autres) est un fait. La conclusion de Wittgenstein est alors que dans l'image et dans ce qui est représenté doit se trouver quelque chose d'identique, pour que l'un soit l'image de l'autre (T 2. 161). C'est quelque chose qui porte la forme de la représentation.

Les propositions suivantes, selon Lai (2009), vont donc être le canevas de la méthode d'analyse des copies des élèves :

- Les images ou représentations produisent des faits : stabiliser un fait scientifique c'est le représenter.
- La « forme figurative » d'un fait, et sa transformation en phénomène scientifique susceptible de produire des expérimentations, tient aux propriétés géométriques des représentations produites par les élèves.
- La connexion image/réalité permise par la géométrie donne sa forme logique au travail engagé et conduit à la mesure des grandeurs représentées.
- Les représentations produites montrent l'état théorique des élèves par rapport à leur compétence relative à la modélisation de phénomènes.

Car ce qu'on veut mettre en évidence dans les représentations produites par les élèves est la « forme logique » de celles-ci, la géométrie relevant du monde des représentations constitue la possibilité que ces représentations soient des « faits », au sens de Wittgenstein, pour les élèves. Nous considérons ainsi que les dessins réalisés par les élèves sont des *schémas* représentant leur compréhension théorique (Mercier et Tonnelle 1992) et qu'ils vont en effet être des supports de pensée articulés en énoncés langagiers. Ces dessins sont aussi ce que Brousseau (2004) nomme pour sa part des *représentations,* dont il montre le caractère central dans toute action enseignante qui doit, selon lui, assurer une dialectique représentation/énonciation.

Nous donnons deux exemples de type de traces graphiques, et de leur analyse.

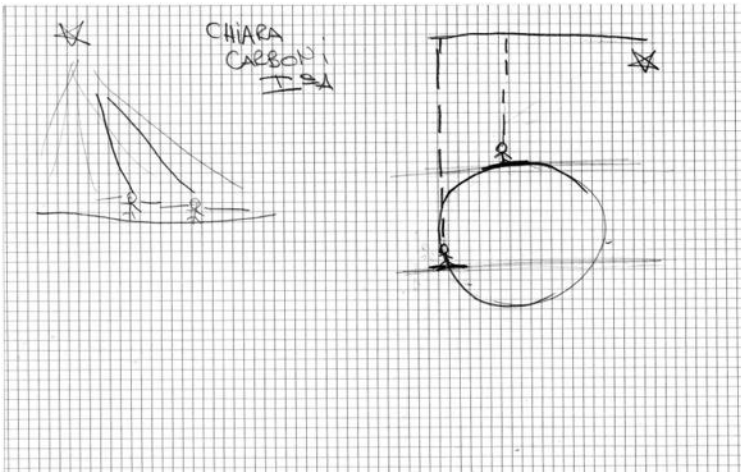


***Figure 2** – Représentation Type A - Chiara*

La *relation figurative* produit une forme de représentation dont les éléments identifiables sont combinables pour supporter une interprétation du monde représenté**.** Sur une Terre plate, les lignes de visée ne sont pas parallèles. Sur une Terre ronde les plans d'horizon ne sont pas tangents.

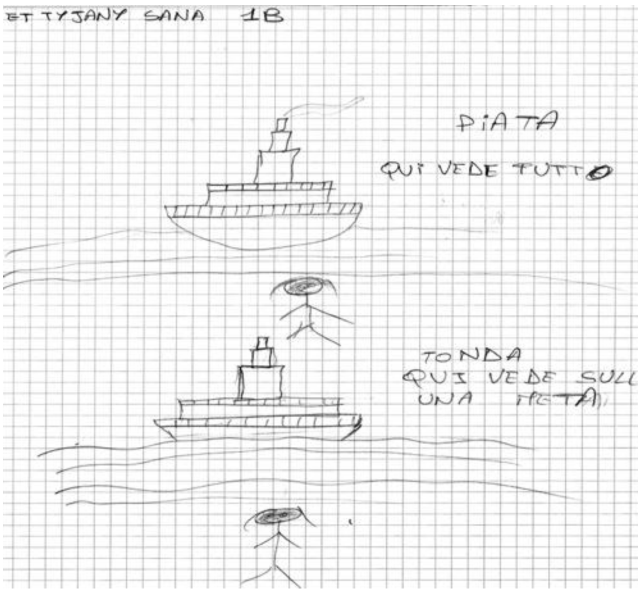


***Figure 3** – Représentation Type B - Sana*

Le navire est entièrement visible sur une Terre plate, il l'est partiellement sur une Terre ronde, caché par les flots. Il n'y a donc pas de profondeur représentée différemment dans l'horizon plat et la courbure de l'horizon circulaire se confond avec le mouvement des vagues. Ce n'est pas une question de perspective et l'observateur est donc sous l'espace du bateau, mais campé sur son propre plan. La relation observateur / vision n'est pas différente et ne fonde pas ce qui empêche la vision complète du navire.

Dans ces représentations nous ne trouvons pas de forme logique. Pas de réponse possible au problème, car dans le cas Terre plate l'observateur ne regarde pas l'objet et dans le cas Terre ronde il est sans rapport avec la vision de l'objet.

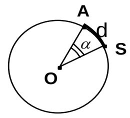
4. *Articulation des séances*

Dans ce paragraphe on donne les phases des séances réalisées[9] concernant le problème d'Eratosthène. Les contraintes temporelles ne permettent pas une *construction de la part des* élèves de tout savoir d'astronomie et des mathématiques impliqué dans cette expérience. Ici nous avons souligné les savoirs qu'on vise construire et ceux qu'on peut donner seulement préconstruits. L'articulation du travail en classe et à l'extérieur est la suivante :

1ère Phase. Introduction à l'expérience d'Eratosthène

Présentation et évocation en terme général de l'expérience d'Eratosthène en soulignant les informations qui étaient à sa disposition et les remarques sur les deux aspects cruciaux présents dans l'hypothèse d'Eratosthène :

a. La forme de la Terre (ronde)
b. Propriétés géométriques (proportionnalité angle-arc)



Le premier problème à résoudre est donc le suivant : Comment mesurer l'angle α ?

2ème Phase. La forme de la Terre

Questionnement sur la forme de la Terre. Evocation de preuves de la sphéricité de la Terre. La conscience de la rotondité de la Terre est un passage prioritaire à ne pas sous-estimer, même s'il reste préconstruit.

3ème Phase. Propriétés géométriques de la sphère

Si on considère que la Terre est ronde (et en première approximation ceci peut être considéré vrai) alors nous pouvons exploiter ses propriétés géométriques et prévoir toutes les implications phénoméniques dues à sa rotondité. Montrer aux élèves toutes les implications : angles et arcs et la proportion angles et circonférence au tableau ; souligner que, donc, le problème premier à résoudre est : *Comment mesurer cet angle α ?*

4ème Phase. Mouvement diurne, annuel du Soleil

La Terre est sphérique, par conséquent la hauteur du Soleil change par rapport à l'horizon local dans une journée et dans l'année en relation à la latitude du lieu d'observation et à la déclinaison du Soleil. Il faut insister sur ces connaissances supposés acquises pour consolider en classe l'idée que le Soleil est en quelque endroit au zénith sur la Terre.

5ème Phase. Mesure hauteur du Soleil. Ligne méridienne

A l'extérieur : observation directe avec un instrument de mesure : le gnomon. Positionnement vertical du gnomon et mesure de l'ombre. Construction du triangle astronomique : gnomon, ombre, direction du Soleil.

6ème Phase. Réduction à l'échelle et calcule de la circonférence

En classe. Travail de groupe : simulation de l'expérience d'Eratosthène. Dessin à l'échelle du triangle astronomique et mesure des angles. Construction de la représentation de la Terre, placement de l'horizon sur la sphère (triangle astronomique) et des rayons du Soleil. Calcul de la mesure de la circonférence.

7ème Phase. Conclusion : Institutionnalisation du processus de modélisation.

---

[9] Pour le détail du découpage en synopsis, de la transcription de l'enregistrement audio et de l'analyse des séances, voir Lai (2009).

5. *Analyse des actions de l'enseignant et de l'élève*

Les résultats de l'analyse des actions de l'enseignant et de l'élève sont de suite donnés par rapport aux différentes phases. Dans les phases 1-2-3-4 l'enseignant dévolue aux élèves le *problème initial,* définit et indique les objets de savoir pour les motiver à mesurer avec le gnomon. La reconnaissance de la nécessité de l'observation se pose comme point de départ d'une *investigation* obscure pour l'élève en ce moment initial. Cela, qui fait d'abord les élèves ignorants de ce qu'ils doivent chercher à apprendre (Mercier 1995), peut provoquer dans la classe une sorte de dépaysement, qui pourrait invalider l'expérience entière et, particulièrement, faire sous-évaluer les opérations de mesure. Cela représente une première rupture des pratiques habituelles pour les élèves et pour l'enseignant. Dans les phases 5-6-7 l'enseignant régule le milieu pour gérer le passage de l'expérience au modèle dans le déplacement du triangle modèle du gnomon de l'horizon à la sphère.

Pour faciliter la réponse des élèves à la question : « comment placer le triangle sur la sphère, dans la représentation de l'expérience »*,* l'enseignant *analyse* l'action des élèves relativement à l'identification du gnomon comme direction du rayon de la sphère, dans le cadre d'un *jeu de formulation* qu'il *définit*. Cela permet l'interaction sur la question:« le rayon est perpendiculaire à la tangente comme le gnomon est perpendiculaire à l'horizon au point d'observation ». Dans ce but l'enseignant *définit* un jeu nouveau, un débat parmi élèves *jeu de validation* sur la formulation produite, et il en *régule* le développement.

On y observe comme l'enseignant réussit à amener les élèves à élaborer des stratégies d'action gagnantes qui conservent une part du sens d'expérience scientifique qui est l'enjeu de cet enseignement. Nous observons donc le réaménagement du milieu de leur action lorsqu'il intervient dans un travail de groupes pour inciter à la production d'une stratégie gagnante en évoquant un moment du passé didactique de la classe (en le *référant* à la mesure, par exemple), toutes actions que nous avons classées comme relevant de l'*analyse de l'action des élèves*. Et lorsqu'il intervient pour faire identifier aux élèves les traits pertinents de leur action passée il ramène le travail dans le monde de la représentation à la situation de mesure qui en fait le sens, par l'identification et la reconstruction des traits pertinents de l'action qu'ils ont effectués dans l'expérience directe d'observation.

La figure 4 donne le résultat du travail d'un groupe d'élèves, qui montre la construction de la situation objective de représentation et de sa logique interne, géométrique.

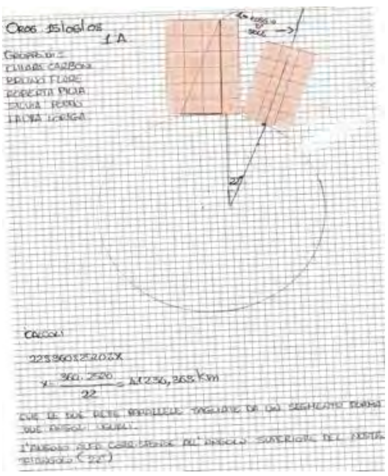


Figure 4 *– Bruno, Giuliano, G.Paolo, Manuel, Lorena e Romina*

Pour tous les élèves, l'activité a constituée une entrée dans la démarche scientifique.

V. DISCUSSION DES RESULTATS ET CONCLUSION

Nous affirmons, en tant que résultat de notre travail, la nécessité et la pertinence du maintien, parmi les savoirs enseignables, d'un savoir *usé* du point de vue de la légitimité épistémologique dont la maîtrise est fondamentale pour la formation du citoyen ; dans le cas de l'astronomie classique ce maintien, non seulement fait appel aux mathématiques mais fournit de plus un scénario donnant du sens à ces mêmes savoirs.

Par les deux expériences présentées nous avons montré comme la mise en place de la démarche expérimentale nécessite un engagement de l'enseignant et de l'élève en rupture avec les pratiques habituelles.

Dans le cas de l'enquête sociale c'est le mouvement conduisant à la situation d'usage routinier du modèle dans l'action qui est le plus concernée (moment de la *vérification efficace* du modèle). En fait, dans cette activité, contrairement à celle d'astronomie, le problème à résoudre était en quelque sorte endogène et établi en autonomie par les étudiantes. Les savoirs mathématiques nécessaires à la construction du modèle étaient à la disposition des étudiantes, et c'est l'utilisation routinière de ces savoirs qui rompt par rapport à l'activité d'entrainement de savoirs mathématiques connus. Celle-ci se configure aussi, dans le cas de notre contexte, comme une rupture avec les pratiques habituelles de l'enseignante qui n'était pas institutionnellement concerné par un travail en salle informatique.

Dans le cas de l'astronomie, les parties du modèle théorique qui doivent être reconstruites par les élèves sont celles qui sont nécessaires à la résolution de ce qui devient *le problème de la classe*, par une première rupture des pratiques habituelles. A l'aide de *représentations opératoires* construites en classe les élèves peuvent appliquer les règles de la géométrie et de sa modélisation algébrique, qui mènent à la solution du *problème initial de la classe*. Il y a, donc dans ce cas, un nouvel aspect, à aménager pour l'enseignant, qui vise à produire la mobilisation par l'élève des concepts mathématiques nécessaires à représenter et comprendre le phénomène, par la construction d'un modèle. Cela constitue une deuxième rupture par rapport à la mobilisation de savoirs mathématiques pouvant ne pas être partie du curriculum officiel du niveau scolaire des élèves. Le modèle considéré comme plausible, est, alors, sous la responsabilité des élèves et il faut qu'il passe par des *expériences de confirmation*. La démarche expérimentale, donc, prévoit nécessairement un dernier passage : la vérification de la correspondance du modèle à l'expérience de référence ou aux expériences de confirmation éventuelles, mais aussi la mise en pratique du modèle dans des nouvelles expériences. Cet aspect de nécessité épistémologique et didactique attribue à la tache de la confirmation le caractère de rupture des pratiques aménageant d'habitude le renforcement des connaissances supposées construites par les exercices ordinaires d'application ou d'entrainement. Ce processus de reconstruction cognitive qui fonctionne sous la responsabilité des élèves, de leur autonomie, est identifié dans notre travail du point de vue de la dimension[10] didactique.

Une étude comparée et croisée du point de vue de différents domaines de recherche (psychologie, pédagogie, sociologie, etc.) serait pertinente.

---

[10] Un point de vue différent d'analyse concernant le concept d'autonomie est proposé dans la contribution de Maia L., Vandebrouck L., Bona V. dans les travaux du GT9.

REFERENCES

Assude T., Mercier A., Sensevy G. (2007) L'action didactique du professeur dans la dynamique des milieux. *Recherche en Didactique des Mathématiques* 27(3/2), 221-252.

Brousseau G. (1998) *Thorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Brousseau G. (2004) Les représentations: étude en théorie des situations didactiques. *Revue des Sciences de l'Education* 30(2), 241-277.

Chevallard Y. (1985) *La Transposition Didactique*. Grenoble : la Pensée Sauvage.

Israel G. (1986) *Modelli Matematici*. Roma : Editori Riuniti.

Lai S. (2009) *La construction d'un curriculum d'Astronomie et d'Astrophysique, étude de son écologie mathématique dans le système scolaire italien*. Thèse de l'université Aix-Marseille I.

Lai S., Polo M. (2002) Un outil théorique d'analyse de la contingence: le concept de milieu a l'épreuve. In Dorier J.-L. et al. (Eds.) *Actes de la XIème Ecole d'Eté De Didactique de Mathématique* (Cédérom). Grenoble : la Pensée Sauvage.

Mercier A., Tonnelle J. (1992) Autour de l'enseignement de la géométrie au collège – 2e partie : Vers une étude rationnelle de l'espace et des objets de l'espace *Petit x* 29, 15-56.

Mercier A. (1995) La construction des phénomènes humains comme objets de science, Notes de cours *Méthodes de la recherche en éducation.* Université de Provence, 1995-2005.

Pinkola C. (1993) *Donne che corrono con i lupi*. Torino : Frassinelli.

Polo M. (2008) Processi decisionali dell'insegnante: analisi di vincoli specifici dell'insegnare matematica. *Notiziario dell'Unione Matematica Italiana* Gennaio/Febbraio 20-24.

Sensevy G., Mercier A., Schubauer-Leoni M. L. (2000) Vers un modèle de l'action didactique du professeur. *Recherche en Didactique des Mathématiques* 20(3), 264-304.

Wittgenstein L. (1968) *Tractatus logico-philosophicus e Quaderni 1914-1916*. Torino : Einaudi Editore.

REPRESENTATIONS SOCIALES DU CONCEPT D'AUTONOMIE CHEZ DES ENSEIGNANTS

Licia MAIA* – Fabrice VANDEBROUCK** – Vivianne BONA*

Résumé – Dans cette communication, nous investiguons les représentations sociales des enseignants du concept d'autonomie, concept clef dans les questions d'enseignement et d'apprentissage. Nous proposons à des enseignants Français et Brésilien, un questionnaire d'association libre, pour investiger ces représentations sociales de l'autonomie, partagées par les enseignants. Nos résultats tendent à montrer que la liberté, la responsabilité et l'indépendance sont des élements centraux et qui approchent les représentations des deux groupes d'enseignants. La dimension plus individuelle ou sociale des représentations de l'autonomie semble éloigner les enseignants français des brésiliens.

Mots-clefs : pratiques enseignantes, représentations sociales, autonomie, activité

Abstract – In this paper, we investigate social representations of the concept of teachers' autonomy, a key concept in regards of teaching and learning processes. We offer French and Brazilian teachers, a questionnaire of free association, to investigate the social representations of autonomy, shared by teachers. Our results suggest that freedom, responsibility and independence are central elements and approach the performances of both groups of teachers. The social and individual dimensions of representations seem to take away French teachers to Brazilian teachers.

Keywords: Teaching practices, social representations, autonomy, activity

Cette communication est le fruit d'une collaboration entre des chercheurs en didactique des mathématiques, en France, et des chercheurs en sciences de l'éducation, au Brésil[1]. Elles ont leur origine dans le cadre d'un projet de recherche commun, sur les pratiques des enseignants et la transition lycée université, en France et au Brésil. Plusieurs ruptures marquent la transition entre l'enseignement secondaire et l'enseignement supérieur de façon générale, en France comme au Brésil : parmi celles-ci pointons la rupture majoritairement étudiée au niveau international en termes de contenus d'enseignement et de modes de pensée (Artigue, Batanero et Kent 2007, Gueudet 2008). Nous nous intéressons ici à une rupture en termes de représentations des acteurs, enseignants et élèves/étudiants, sur les mathématiques elles-mêmes et sur ce qu'est l'activité mathématique. Plus précisément, en amont de la transition lycée-université, nous cherchons à comprendre, en France et au Brésil, les représentations des enseignants de mathématiques du lycée sur le concept d'autonomie.

Les programmes de mathématiques au lycée mettent en effet l'accent sur l'autonomie des élèves dans leurs apprentissages. Au Brésil, les Paramètres Curriculaires Nationaux de 2000, documents nationaux qui orientent l'activité des enseignants dans leurs classes, préconisent par exemple une pratique pédagogique dont le principe de fond est la formation d'individus autonomes et participatifs. En France, dans les derniers programmes de la classe de seconde, on trouve aussi :

> Dans la mesure du possible, les problèmes posés… doivent pouvoir s'exprimer de façon simple et concise et laisser dans leur résolution une place à l'autonomie et à l'initiative des élèves. (bulletin officiel, numéro 30 du 23 juillet 2009, p. 1)

En didactique des mathématiques, les théories socio constructivistes de l'apprentissage supposent des élèves en activité, en classe ou hors la classe. Elles accordent donc de l'importance, elles aussi, aux phases de travail autonome des élèves, leur permettant de déployer une certaine action mathématique. L'autonomie des élèves devient encore plus

* Université Fédérale de Pernenbouc – Brésil – limaia@ufpe.br, vividbona@hotmail.com
** Université Paris Diderot, Laboratoire André Revuz – France – vandebro@math.jussieu.fr
[1] Projet financé dans le cadre du Programme CAPES-COFECUB

© Maia L., Vandebrouck F., Bona V. (2012) Représentations sociales du concept d'autonomie chez des enseignants. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT9, pp. 1227–1234). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

cruciale au début de l'université et de nombreux travaux portant sur la transition secondaire-supérieur pointent le surplus d'autonomie demandé aux étudiants par rapport à leur condition précédente d'élève. Ce concept d'autonomie est donc au cœur des enjeux d'enseignements et d'apprentissage sans pour autant que des recherches aient beaucoup été menées sur les représentations des enseignants à propos de ce concept. C'est l'objet de cette communication. L'étude est menée en parallèle en France et au Brésil, en l'étendant au Brésil à une population plus large que celle des professeurs de mathématiques.

Pour problématiser cette question de recherche sur les représentations de l'autonomie, nous nous exploitons la complémentarité de nos deux points de vue de chercheurs. D'une part, nous inscrivons notre question de recherche dans une théorie didactique : la double approche didactique et ergonomique des pratiques enseignantes (Robert et Rogalski 2002, Vandebrouck 2008). D'autre part, nous complétons ce cadrage par la théorie spécifique des représentations sociales (Jodelet 1989). Cette communication trouve ainsi naturellement sa place dans le GT9 « pratiques d'enseignants dans les classes et apprentissages mathématiques des élèves » et elle permet de répondre, de façon indirecte, à la question de quelles mathématiques les élèves font (ou du moins peuvent faire).

I. CADRAGE THEORIQUE DE LA RECHERCHE

1. La double approche didactique et ergonomique des pratiques enseignantes

Dans nos recherches didactique sur les liens entre enseignement d'un contenu donné et l'apprentissage correspondant, nous sommes amenés à analyser les pratiques des enseignants à la fois dans leurs relations avec l'activité des élèves (intermédiaire entre les contenus enseignés et l'apprentissage) mais aussi en considérant qu'il s'agit d'un métier, dont il faut respecter la complexité, y compris individuelle. Plus précisément, pour analyser, interpréter les pratiques enseignantes et peut-être ensuite pour les former, on ne peut pas faire l'impasse du fait que ces pratiques, tout en ayant pour objectif l'apprentissage des élèves (quelque soit la discipline considérée) concernent l'exercice singulier d'un métier, le métier d'enseignant. Cela nous amène à faire des emprunts à la psychologie ergonomique et plus récemment à la didactique professionnelle. Nous inscrivons donc globalement cet communication dans une démarche théorique appelée « double approche didactique et ergonomique des pratiques enseignantes » (Robert et Rogalski, 2002) qui imbrique de façon générale des analyses des activités des élèves et des analyses des activités des enseignants liées à l'exercice d'un métier.

Dans l'étude de ce versant métier, nous étudions les pratiques enseignantes en considérant que celles-ci sont co déterminée par le professeur lui-même en tant que sujet singulier et par des contraintes qui lui sont extérieures, même extérieures à la classe parfois (contraintes des programmes par exemple, mais aussi contraintes d'ordre social). Ces analyses des déterminants de l'activité ont pour enjeu de mieux comprendre ce que l'enseignant organise comme activité des élèves dans sa classe et aussi d'apprécier ce qui est variable, ce qui est partagé par plusieurs enseignants et/ou ce qui est singulier. Ces déterminants se traduisent aussi par une certaine régularité dans les pratiques d'un enseignant singulier, ce qui peut induire des régularités dans les activités des élèves et influer sur leurs apprentissages. Ces régularités dans la classe peuvent être lues en termes de logiques d'actions de l'enseignant, qui dépassent l'échelle d'une séance, qui font intervenir en particulier des choix personnels de l'enseignant, choix qui doivent donc être questionnés…

Dans cet article nous cherchons donc à investiguer ce que nous appelons aussi les composantes personnelle et sociale des pratiques enseignantes (Robert 2002), c'est-à-dire ce qui détermine l'activité et qui relève du sujet singulier ou du sujet en tant qu'individu d'un groupe social (les professeurs de mathématiques). Les composantes personnelle et sociale permettent de pondérer ce qu'on peut voir en classe et aussi l'intégrer dans le temps long. Ces composantes servent à traduire les représentations du professeur, entre autre les représentations sociales, partagées ou personnelles, les risques que les professeurs consentent dans l'exercice de leur métier, le confort dont ils ont besoin… Les professeurs ne décident pas des programmes, de la composition de leurs classes etc mais ils décident des contenus disciplinaires qu'ils proposent et des déroulements qu'ils organisent.

Par exemple, un enseignant ne peut pas en général adopter spontanément un scénario didactique qui lui ai proposé, si ce scénario suppose des représentations de l'enseignement qui vont à l'encontre des composantes personnelle et sociale de sa pratique (ce qui explique par exemple l'échec relatif des premières ingénieries didactique au début des recherches en didactique des mathématique qui étaient souvent détournées par les professeurs vers un projet qui était plus en phase avec leurs habitudes personnelles et les habitudes de la profession). Dans cet article, ce sont ainsi les composantes personnelle et sociale des pratiques enseignantes qui font l'objet d'une attention particulière, à travers l'étude des représentations sociales des enseignants de ce qu'est l'autonomie.

2. L'apport de la théorie des représentations sociales à l'étude des pratiques

Les représentations sociales - systèmes relativement autonomes des significations sociales - révèlent des conflits socio-cognitifs entre les savoirs savants et ceux du sens commun, des conflits d'identité et d'engagement contradictoires sous la double pression de facteurs idéologiques et de facteurs restrictifs liés au fonctionnement effectif des systèmes éducatifs (Carugati et Selleri 2000).

Penser le système éducatif à partir des composantes personnelles et sociales des protagonistes des processus d'enseignement et d'apprentissage - enseignants mais aussi élèves/étudiants en toute généralité - est une alternative pour affronter les problèmes d'enseignement et d'apprentissage ; par exemple au Brésil les problèmes liés aux faibles taux de réussite indiqués par les évaluations nationales et internationales comme IDEB (Indice d'Evaluation de l'Education de Base) ou PISA (Programme International d'Evaluation Comparée)[2].

Nombreuses études menées au Brésil et en France prennent comme cadre théorique de référence la théorie des représentations sociales. Elles visent à comprendre les difficultés rencontrées par les enseignants pour surmonter les problèmes d'enseignement-apprentissage. Dans le domaine de la didactique des mathématiques, l'origine de ces études s'appuient en particulier sur les travaux développés par Robert et Robinet (1989, 1992), ainsi que sur la thèse de doctorat de Maia (1997), co-encadrée par Gérard Vergnaud et Denise Jodelet, sur les représentations sociales des mathématiques et de son enseignement chez l'enseignant.

La théorie des représentations sociales est une théorie de la connaissance du sens commun et, en tant que telle, permet la prise en compte de la dimension populaire des connaissances scolaires, c'est-à-dire celles qui circulent dans l'école, aussi bien en forme de contenu d'enseignement que de contraintes explicites pour l'exercice d'une perspective pédagogique (en l'occurrence, l'exercice de l'autonomie). La théorie des représentations sociales se fonde sur l'hypothèse de l'existence d'une dynamique de communication entre connaissance scientifique et connaissance non-scientifique (informelle) qui transforme de façon continue la nature de chacun de ces deux types de connaissances (Moscovici 1976). Ainsi, en plus de

[2] Coordonné au Brésil par l'Institut National de Recherches en Education (Instituto Nacional de Pesquisas em Educação - INEP)

connaissances scientifiques - qui font l'objet spécifique de l'enseignement - il faut admettre l'existence d'un autre type de connaissance présente à l'école, les connaissances non-scientifiques. A cette seule condition, il est possible d'approcher vraiment le quotidien scolaire. Ce point de vue a des répercussions sur la manière dont la connaissance scolaire se conçoit ; non comme exclusive au champ de la science et des scientifiques, mais comme interaction entre la connaissance formelle et celle produite par le groupe dans lequel l'apprenant est inséré. D'autre part, ce cadre de référence part de l'hypothèse que toute intervention éducative, didactique en particulier, si elle veut réussir, doit prendre en compte la connaissance non-scientifique qui compose le répertoire de connaissances de l'enseignant et de l'apprenant. Pour Jodelet,

> [l]es représentations sociales sont une forme de connaissance, socialement élaborée et partagée, ayant une visée pratique et concourant à la construction d'une réalité commune à un ensemble social. (Jodelet 1989, p. 36)

En s'appuyant sur ce cadre théorique, on suppose ainsi que la prise de décisions de l'enseignant en classe dépend en partie des représentations qu'il a sur lui-même, sur le rôle qu'il joue dans un certain contexte social, sur les processus d'enseignement et d'apprentissage, ainsi que sur le savoir à enseigner (Maia 2000, 2001, 2009).

3. Le concept d'autonomie : de l'approche scientifique au sens commum

Pour l'approche scientifique des représentations sociales il faut prendre la connaissance scientifique de l'objet étudié pour référence. Cette démarche, permet d'une part de préciser le propos (de quoi on parle) et d'autre part d'identifier des élements qui sont (ou non) à la source de la connaissance de sens commun.

En situant l'objet de cette étude, les représentations sociales de l'autonomie, il a été souligné la place accordée, par la didactique des mathématiques aux théories socio constructivistes de l'apprentissage, qui sont à l'origine de l'importance attribuée à l'autonomie comme source de développement cognitif et moral de l'individu.

Dans l'ancienne Grèce, on peut trouver le sens premier du mot, autogouvernement, c'est-à-dire gouverner à soi-même. Le Robert définit quant à lui autonomie par « *droit de se gouverner par ses propres lois ; faculté d'agir librement* ».

Du point de vue éducatif, c'est Jean Piaget (Piaget 1994), en étudiant le développement moral chez l'enfant, qui a relevé la place fondamental du developpement d'une morale autonome - en opposition à une morale hétéronome - comme condition necessaire à la constrution d'une societé démocratique. Pour lui, l'autonomie est la capacité cognitive et morale du sujet à élaborer des règles, au dépit des règles établies extérieurement. Cependant, ce qui doit diriger ce processus est la pratique du respect mutuel, condition absolument nécessaire à une pratique sociale égalitaire et conséquemment démocratique. Du point de vue cognitif, la descentration, c'est-à-dire la possibilité de considérer plusieurs points de vue à la fois, est condition et conséquence d'une pratique sociale coopérative. L'autonomie apparait donc comme processus et produit d'une pratique entre égaux, où les sujets impliqués doivent créer les règles pour pouvoir les respecter au sein du groupe. De ce point de vue, l'autonomie du sujet doit être considérée au délà d'une pratique d'autogouvernement mais dans une pratique de gouvernement mutuel, où il est necessaire de considerer son propre point de vue mais aussi celui des autres et celui de la collectivité.

En soutenant une Pédagogie de l'Autonomie, Freire (1996) se réfère à l'autonomie en tant qu'idéal pédagogique du développement des compétences des éléves, où ceux-ci doivent être capables de chercher des réponses à leurs propres questions. Freire met en relief la dimension éthique de la pédagogie, comme condition de développement de l'autonomie de l'élève, en respectant sa culture, son individualité et son repertoire des connaissances empiriques. Il est encore possible de retrouver la dimension déontologique de l'autonomie, compromis entre le groupe, la culture et l'individu.

Quoique ce soit souvent le développement de l'autonomie chez l'élève qui est au centre des discussions au sein de l'école, l'autonomie de l'enseignant est aussi objet des préoccupations de ceux qui s'occupent du système éducatif, l'enseignant lui-même. La discussion menée ci-dessus ne se restreint pas a priori à l'autonomie de l'élève. Elle concerne aussi celle de l'enseignant et plus généralement celle des individus qui ont un projet de société régie par les règles du respect mutuel, de la coopération, de la démocratie.

Cette communication présente ainsi quelques premiers résultats d'une étude sur les représentations sociales de l'autonomie, dont le but principal est de comprendre certains éléments des pratiques des enseignants autour de la prise en charge des activités en classe qui exploitent le développement de l'autonomie chez les élèves. Comme il a été déja présenté, les représentations sociales sont une connaissance de sens commun, qui sert de grille de compréhension et d'interprétation de la réalité, ainsi que de guide de l'action du sujet. Rappelons qu'il ne s'agit qu'une dimension de l'étude des pratiques, accrochée aux composantes sociale et personnelle des pratiques des professeurs et que cette étude correspond ainsi à une étape d'une recherche plus large.

II. METHODOLOGIE DE LA RECHERCHE

En suivant les méthodologies classiques induites par la théorie des représentations sociales, nous avons proposé à des professeurs le questionnaire d'association libre suivant :

QUESTIONNAIRE D'ASSOCIATION LIBRE:

Écrivez les 5 mots ou expressions qui viennent à l'esprit quand vous lisez les mots :

L'AUTONOMIE

____
____
____
____
____

Parmi les mots que vous avez associés à l'AUTONOMIE, mettez le numero 1 à côté pour indiquer celui que vous jugez le plus important et 2 pour indiquer celui qui vient juste après.

***Figure 1** – Questionnaire d'association libre en Français*

Pour l'étude des représentations sociales, Abric (1994) a proposé un modèle théorique complémentaire à la théorie originale de Moscovici (1976) : la théorie de noyau central. Les représentations sociales seraient organisées en deux systèmes : central et périphérique. Le noyau central correspond aux éléments les plus stables des représentations, et ce sont eux, de manière générale, qui sont à la source des actions des sujets. Du point de vue de la démarche méthodologique, une des techniques pour identifier ces éléments est de demander aux sujets un travail de reflexion sur leur production initiale. C'est dans ce but qu'il a été demandé, après l'association spontanée de deux mots au mot autonomie, d'indiquer les deux mots les plus importants.

Le questionnaire a été proposé à 102 professeurs de mathématiques en France (essentiellement des professeurs au lycée mais il y avait quelques professeurs de collège). Il a été proposé à 60 professeurs au Brésil (primaire, secondaire, toutes disciplines confondues). Un certain nombre d'item d'identification dans le questionnaire permettaient d'identifier le profil des professeurs : homme ou femme ; tranche d'âge ; ancienneté dans l'enseignement ; enseignement en primaire, collège, lycée ou post secondaire ; enseignement public ou privé ; discipline enseignée (si secondaire) ; formation suivie pour accéder à l'enseignement ; formation complémentaire (en didactique notamment).

III. RESULTATS

A l'aide du logiciel Tri-deux, les données ont été analysées. Le champ sémantique des représentations sociales de l'autonomie a été identifié à partir de la fréquence d'occurrence des mots émis par les enseignants, suivi par l'identification des mots les plus importants. A partir des résultats d'une analyse factorielle des correspondances, nous avons commencé à appréhender les principales différences entre représentations, en fonction des caractéristiques des sujets.

Pour cette communication, il ne sera présenté que les champs sémantiques des represésentations de l'autonomie des enseignants selon leur pays d'origine, France ou Brésil, en essayant de dégager ce qui les rapproche ou les éloignent.

AUTONOMIE (FRANCE)			
Mots associes	Fréquence	Mots associés	Fréquence
Liberté	37	Travail groupe	5
Initiative	29	Methode	5
Indépendance	27	Décision	5
Responsabilité	23	Confiance	5
Se débrouiller	18	Connaissance	5
Maturite	18	Activité	4
Organization	17	Adaptation	4
Recherche	17	Questionne	4
Seul	17	Esprit Critique	4
Travail personnel	11	Aprentissage	4
Individuel	10	Gestion temps	4
Travail	10	Auto gestion	3
Choix	8	Gestion	3
Reflexion	8	Expérience	3
Travaille seul	7	Motivacion	3
Discipline	6		
Total de mots associés : 445 Mots différents : 127			

Tableau 1 *– Mots associés par les enseignants français au terme autonomie et qui ont présenté une fréquence égale ou supérieure à 3*

AUTONOMIE (BRÉSIL)			
Mots associés	Fréquence	Mots associés	Fréquence
Liberté	34	Flexibilité	4
Responsabilité	17	Leader	4
Independance	11	Confiance	4
Capacité - possibilités cognitives	9	Choix	4
Pouvoir	8	Contenu	4
Maîtrise	8	Assurance	3
Droit	8	Motivation	3
Connaissance	7	Créativité	3
Autorité	7	Actions	3
Compromis	7	Compétence	3
Organisation	5	Volonté	3
Discipline	5	Expression	3
Respect	5		
Total de mots associés: 309 Mots différents: 141			

***Tableau 2** – Mots associés par les enseignants brésiliens au terme autonomie, et qui ont présenté une fréquence égale ou supérieure à 3*

La *liberté* semble être un élément premier des représentations de l'autonomie des enseignants, français et brésiliens. Sans doute que selon les définitions présentées, Piaget (1994) et Freire (1996), c'est une condition fondamentale à l'exercice de l'autonomie, c'est elle que d'une certaine façon va permettre l'exercice créateur. Deux autres éléments rapprochent les enseignants français des brésiliens : la *responsabilité* et l'*indépendance*. Donc l'idée d'autonomie comme exercice de liberté, avec indépendance et responsabilité, est présente comme un élément constitutif fondamental des représentations sociales des deux groupes d'enseignants.

En plus des mots *responsabilité, independance,* les termes *connaissance, organisation, discipline, confiance, choix et motivation* sont également partagés par les deux groupes. Il est possible de les grouper en deux dimensions : une première de nature plus sociale, *responsabilité*, *choix*, *discipline* et *organisation*, et une deuxième d'ordre plus cognitive, plus directement liée à l'activité scolaire proprement dite : *connaissance, contenu, motivation* et *apprentissage.*

Du point de vue des éloignements entre les groupes les termes *initiative, independance, individuel, seul, personnel, se débrouiller*, *esprit critique, maturité*, émis par les enseignants français font reférence à une dimension plus individuelle de ces représentations, où le sujet est le seul protagoniste de la *gestion* de son *travail* et sa prise de *décision*.

Du coté des brésiliens, il semble plutôt apparaître la dimension relationnelle-institutionnelle de l'autonomie dans le sens, non plus du sujet individuel, mais des relations avec les autres dans une hiérarchie sociale. Cela semble s'exprimer par les mots : *pouvoir, autorité, respect, compromis, leader et maîtrise*.

Ces premiers résultats nous questionnent sur la nature des différences identifiées, l'autonomie prise comme un concept plutôt individuel chez les professeurs (de mathématique) français et l'autonomie considérée dans la réalité plus large, dans l'exercice des relations sociales, condition necessaire selon Piaget et Freire à l'exercice sociale de l'autonomie (chez les enseignants brésiliens). Elle est peut-être à relier à l'influence de Piaget en France et plus précisément avec la formation des professeurs de mathématique en France, très influencée au fil des années par la théorie (originellement constructiviste plus que socio constructiviste) des situations didactiques (Brousseau 1997). L'élève apprend d'abord en se confrontant à une situation *a-didactique*, en interaction avec le *milieu*.

Il faut cependant considérer que c'est une approche initiale des données récueillies et, que l'analyse du noyau central et des plans factoriels (issus des analyses factorielles) pourront préciser ce premier sens identifié. Il s'agit, rappelons le, d'une étude préliminaire et l'analyse des rapports des représentations et des pratiques est encore en cours de développement.

REFERENCES

Abric J.-C. (1994) *Pratiques Sociales et Representations*. Paris : PUF.

Artigue M., Batanero C., Kent P. (2007) Mathematics thinking and learning at post-secondary level. In Lester F. (Eds.) *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp.1011-1049). Greenwich, Connecticut: Information Age Publishing Inc.

Brousseau G. (1997) *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Carugati F., Selleri P. (2000) Pratiques educatives, socialisation et représentations sociales. In Garnier C., Rouquette M.-L. *Représentations sociales et éducation*. Québec : Editions Nouvelles.

Jodelet D. (1989) *Les représentations sociales*. Paris : PUF.

Gueudet G. (2008) Investigating the secondary-tertiary transition. *Educational Studies in Mathematics.*67, 237-254.

Freire P. (1996) *Pedagogia da autonomia*. 1996. São Paulo: Ed. Paz e Terra.

Maia L. (1997) *Les représentations des mathématiques et de leur enseignement: exemple des pourcentages.* Thèse de doctorat. Lille: Presses Universitaires du Septentrion.

Maia L. (2000). O ensino da geometria – analisando diferentes representações. *Educação Matemática em Revista* 8(Ano7), 24-32.

Maia L. (2001) O que há de concreto no ensino da matemática? *II Jornada Internacional sobre Representações Sociais: Questões Metodológicas*. GTD 01: Representações sociais, educação e infância. Florianópolis.

Maia L. (2009) *Vale a pena ensinar matemática*. In Guimarães G., Borba R. (Eds.) (pp. 13-57) *A sala de aula e a pesquisa em educação matemática.* São Paulo: Cortez.

Moscovici S. (1976) *La psychanalyse, son image et son public*. Paris : PUF.

Piagat J. (1994) *O Juízo Moral na Criança***.** São Paulo: Summus.

Robert A., Robinet J. (1989) *Enoncés d'exercices de manuels de seconde et représentations des auteurs de manuels*. Cahiers de Didirem, Numéro 4, Publication de l'IREM de Paris 7

Robert A., Robinet J. (1992), Représentations des enseignants et des élèves. *Repère IREM* 7, 93-99.

Robert A., Rogalski J. (2002) Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *Revue Canadienne de l'Enseignement des Sciences, des Mathématiques et des Technologies* 2(4), 505-528.

Vandebrouck F. (2008) *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants.* Toulouse : Octarès Editions.

L'ENSEIGNEMENT DU CALCUL DE DOSES MÉDICAMENTEUSES : UN DÉFI POUR LA SANTÉ PUBLIQUE AU 21e SIÈCLE

Éric RODITI*

Résumé – Le calcul de doses médicamenteuses est réalisé par l'infirmier pour administrer un traitement à un patient. Toute erreur peut nuire à la qualité du soin. La recherche présentée ici porte sur les interrogations d'une équipe de formateurs quant à deux convictions partagées dans leur milieu professionnel : 1° l'enseignement d'une méthode de calcul systématique permettrait d'éviter les erreurs ; 2° beaucoup de fautes disparaitraient spontanément grâce aux stages qui permettraient de mieux appréhender l'administration d'une prescription dans sa globalité. La recherche montre quelques conséquences de ces choix didactiques sur les pratiques des formateurs et sur les apprentissages des étudiants, puis questionne leur pertinence par une étude de différents calculs de doses menés par des infirmiers en formation.

Mots-clefs : Pratique enseignante, recherche collaborative, proportionnalité, calcul de doses, soins infirmiers

Abstract – Drug calculations are performed by nurses to administer a treatment to a patient. Any mistake can be detrimental to the quality of the treatment. This research follows some questions of a team of trainers about two beliefs shared in their professional environment which have consequences on their didactic choices: 1° teaching a systematic calculation method would prevent mistakes; 2° Many mistakes would be avoided thanks to training which would allow to comprehend the administration of a treatment globally. The research first shows consequences of these didactic choices on the practice of trainers and on how students learn before challenging its relevance through an evaluation of different drug calculations carried out by nurses undergoing training.

Keywords: Teaching practice, collaborative research, proportionality, drug calculation, nursing

INTRODUCTION

Le calcul de doses médicamenteuses est une activité que l'infirmière ou l'infirmier[1] réalise pour administrer le traitement prescrit à un patient. Le médecin ordonne une quantité de principe actif et une posologie. L'administration de la prescription demande d'effectuer des calculs en lien avec le conditionnement pharmaceutique du principe actif et de la répartition du traitement dans la durée. Une erreur de calcul peut nuire à la qualité du soin parce que le patient reçoit, pendant un certain moment, une quantité de médicament inadaptée. Les conséquences peuvent être graves, soit parce que la pathologie n'est pas suffisamment traitée (cas de sous-dose), soit parce que le principe actif est toxique en trop grande quantité (cas de surdose). Les accidents récurrents, parfois mortels, posent un problème crucial de santé publique (Maisonneuve 2004, 2006 ; *Le Monde* 2009, 2010 ; *Le journal du dimanche* 2011).

En France, les infirmiers sont formés en trois années d'études dans des instituts de formation en soins infirmiers (IFSI). Les étudiants sont admis en 1re année sur concours (un candidat sur trois environ est retenu) après le après le baccalauréat ; les étudiants peuvent donc théoriquement intégrer un IFSI dès l'âge de 18 ans, mais nombreux sont ceux qui commencent la formation plus tardivement, si bien que l'âge moyen en 1re année est de 24 ans. La recherche présentée ici est une recherche en cours menée en collaboration avec l'équipe des formateurs d'un IFSI, et les résultats présentés concernent des interrogations de cette équipe quant à deux convictions généralement partagées dans leur milieu professionnel. La première est que l'enseignement d'une méthode de calcul systématique, indépendante des

* Université Paris Descartes, Laboratoire EDA – France – eric.roditi@paris5.sorbonne.fr

[1] Pour faciliter la lecture du texte, les noms qui désignent des personnes sont écrits au masculin.

© Roditi E. (2012) L'enseignement du calcul de doses médicamenteuses : un défi pour la santé publique au 21e siècle. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT9, pp. 1235–1245). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

particularités mathématiques des tâches à effectuer, permettrait d'éviter les erreurs, notamment pour ceux qui sont le plus en difficulté : la diversité des méthodes étant considérée comme une source de perturbation de l'activité. La seconde conviction est que beaucoup de fautes sont commises par les étudiants qui n'ont pas encore une représentation globale de la tâche à réaliser, et que ces fautes disparaissent spontanément grâce aux stages effectués en milieu hospitalier car ils permettent, par l'activité professionnelle réelle, de mieux appréhender l'administration d'une prescription dans sa globalité.

Ces deux convictions ont des conséquences sur les pratiques d'enseignement des formateurs. Leur validité a été questionnée en les mettant à l'épreuve d'une analyse des copies des étudiants rédigées à l'occasion des évaluations proposées en cours de formation, de la première à la troisième année d'étude. Après une première partie consacrée à présenter les objectifs et les cadres de la recherche, la deuxième partie propose l'analyse d'une tâche de calcul de doses, et montre, sur cet exemple, combien l'activité est à la fois marquée par les savoirs mathématiques sous-jacents et par le contexte professionnel de sa réalisation. Les résultats de la recherche et les perspectives qu'ils permettent d'envisager font l'objet de la troisième partie de ce texte.

I. OBJECTIFS ET CADRES GENERAUX DE LA RECHERCHE

Le calcul de doses est une activité professionnelle qui convoque des mathématiques, elle peut être étudiée du point de vue de trois types d'acteurs : les professionnels eux-mêmes, les étudiants en soins infirmiers et les formateurs. C'est à travers le point de vue de ces derniers que j'ai choisi de mener la recherche, en collaboration avec eux, et avec une approche didactique et ergonomique.

1. Une recherche sur l'enseignement du calcul de doses

Si le calcul de doses ressemble de prime abord à une activité mathématique au cours de laquelle l'infirmier résout des problèmes de proportionnalité, une forte imbrication avec des contraintes et des habitudes professionnelles apparait dès les premières analyses. Cela soulève de nombreuses questions quant à l'activité, à la formation et à l'évaluation ; des questions auxquelles se trouvent confrontés les formateurs en soins infirmiers qui enseignent le calcul de doses. Quelles sont les variables et les paramètres de la tâche, quelles sont les procédures mises en œuvre et avec quelles diversités suivant les contextes et les agents ? Quelle formation à cette activité est-il souhaitable de proposer : quels contenus de formation, quelles modalités d'étude pour les étudiants, et dans quels cadres institutionnels (en centre de formation ou pendant les stages) ? Quelles sont les formes adaptées pour les évaluations de cette activité : dans le cadre d'un examen théorique, d'une pratique simulée ou d'une activité réelle ? Quelles expertises faut-il conjuguer, entre celles les formateurs et celles les infirmiers en exercice, pour évaluer les étudiants ? Comment, enfin, adapter l'évaluation certificative à sa finalité : garantir qu'aucun patient ne puisse être victime d'une erreur de calcul de doses ?

Deux démarches générales distinguent les articles concernant les recherches déjà menées sur le calcul de doses. La première consiste à analyser les compétences mathématiques des étudiants en soins infirmiers (McMullan, Jones et Lea 2010 ; Wright 2010, 2007). Les étudiants répondent à des questionnaires (leur activité n'est donc pas en contexte professionnel) et les résultats conduisent les auteurs à repérer les erreurs commises et à déplorer leur importance. La seconde démarche consiste à analyser l'activité des praticiens (Hoyles, Noss et Pozzi 2001 ; Noss, Hoyles et Pozzi 2002). Les chercheurs envisagent alors le calcul de doses comme une activité mathématique en contexte professionnel, ils tentent de déterminer les connaissances et les procédures des infirmiers, ainsi que de comprendre comment surviennent les erreurs. Les recherches mettent bien au jour des savoirs de la pratique, néanmoins, les erreurs étant très rares, les chercheurs n'ont jamais l'occasion de les observer… La démarche que j'ai choisie est différente, il s'agit de mener une recherche sur l'enseignement du calcul de doses, avec une double approche didactique et ergonomique, et en collaboration avec les formateurs. Ces derniers ont été infirmiers, ils possèdent une pratique du calcul de doses et connaissent, en partie au moins, l'hétérogénéité des contextes et des agents. En outre, ils sont en contact direct avec les étudiants.

Avant de commencer un quelconque travail de recherche, j'avais besoin de savoir comment les formateurs en soins infirmiers appréhendaient le calcul de doses médicamenteuses et les erreurs commises en formation. L'encadrement d'un mémoire de master réalisé par une formatrice en soins infirmiers (Gouvernal 2009) m'a permis de comprendre que certains formateurs concevaient le calcul de doses comme un protocole à appliquer, et que l'évaluation devait garantir la conformité à ce protocole. Les échanges avec des étudiants de mon cours de didactique des mathématiques révèlent aussi que de nombreux formateurs se trouvent parfois démunis pour interpréter les erreurs commises par certains étudiants.

2. *Une recherche collaborative, didactique et ergonomique*

Au milieu de l'année universitaire 2009-2010, je me suis engagé dans une recherche avec l'équipe de l'Institut de Formation en Soins Infirmiers (IFSI) Paul Brousse de Villejuif (94). La recherche est menée de manière collaborative (Desgagné et al. 2001 ; Roditi 2010) en partenariat avec les formateurs de l'IFSI. La démarche adoptée est de partir de problèmes précis qu'ils rencontrent pour aborder des questions plus globales concernant l'enseignement et l'apprentissage du calcul de doses. Plusieurs réunions de travail ont permis de définir un cadre qui soit satisfaisant à la fois pour les formateurs et pour le chercheur. Aucun programme n'a encore été déterminé sur le long terme car je souhaite pouvoir progressivement comprendre ce qu'une recherche, menée de manière collaborative et interdisciplinaire, pouvait apporter. Les premières réunions ainsi que quelques entretiens semi-directifs, ont soulevé différents problèmes et plusieurs pistes de travail :

- les connaissances des formateurs, quant à l'apprentissage du calcul de doses et quant à l'origine des erreurs des étudiants, ne leur semblent plus adaptées à ce qu'ils vivent en formation avec leurs étudiants ;
- dans la pratique, les calculs de doses ne sont pas toujours effectués comme ils sont enseignés en IFSI, les contextes professionnels déstabilisent certains étudiants ou remettent en cause la formation ;
- dans l'enseignement, le calcul de doses n'est peut-être pas suffisamment intégré à l'activité globale d'administration d'une prescription qui dépend de conditions matérielles et de contextes de travail, comme celle de la situation d'urgence par exemple ;
- le calcul de doses vient réveiller des souvenirs scolaires en mathématiques parfois douloureux chez de nombreux étudiants en soins infirmiers ainsi que chez certains formateurs.

Pour commencer cette recherche, il a fallu cerner une question précise, et qui correspondait aux attentes des formateurs. Nous avons collectivement[2] décidé de commencer par une étude

[2] Dans ce texte, le pronom personnel « nous » désigne toujours le collectif chercheur-formateurs, tandis que le pronom « je » désigne le chercheur, auteur de cette proposition de communication. Ainsi l'adverbe « collectivement » n'est plus répété par la suite.

des copies des étudiants aux évaluations afin de mettre en relation les procédures utilisées et la réussite aux calculs. Il s'agissait, ce faisant, de contribuer à la réflexion entamée par l'équipe formatrice quant aux deux convictions indiquées dans l'introduction et qui sont généralement partagées dans leur profession. La première est que l'enseignement d'une méthode de calcul systématique, indépendante des particularités des tâches (les produits en croix) aide les étudiants les plus en difficulté en mathématiques. La seconde est que de nombreuses erreurs sont commises par les étudiants lorsqu'ils n'ont pas une représentation correcte de la tâche globale à réaliser, et qu'elles disparaissent après qu'ils ont effectué des stages en milieu hospitalier.

Du point de vue théorique, des références issues de deux champs de recherche sont convoquées : la didactique des mathématiques, et la psychologie du travail. Je ne le développe pas davantage dans cette proposition de communication car ces cadres ont déjà été présentés dans les colloques EMF précédents, notamment en 2006 à Sherbrooke. Je rappelle simplement que la double approche didactique et ergonomique des pratiques d'enseignement des mathématiques (Robert et Rogalski 2002) permet d'articuler, d'une part, des outils élaborés en didactique des mathématiques pour analyser des situations d'enseignement à l'aune des apprentissages mathématiques potentiels des apprenants, et, d'autre part, des outils de la psychologie ergonomique qui rendent compte des contraintes du métier auxquelles répondent les enseignants ou les formateurs. Le croisement des analyses menées selon ces deux approches contribue à dégager la logique des pratiques de ces derniers (Roditi 2005, 2008).

La première phase de la recherche nous a ainsi permis de faire connaissance par un travail qui n'engageait personnellement aucun formateur. Bien que cela n'ait pas été demandé explicitement par les professionnels, il m'a semblé qu'il était plus respectueux de ma part de commencer notre collaboration de cette manière : n'ayant moi-même jamais été infirmier, je ne souhaitais pas que les résultats des recherches puissent remettre en cause des choix de formation ou des pratiques de formateurs avant même que nous disposions des moyens suffisants pour les discuter. Nous avons convenu de rendez-vous périodiques avec un ordre du jour analogue : 1° présentation par le chercheur des analyses effectuées, des conclusions obtenues et des questions qu'elles soulèvent ; 2° compléments d'analyses menés collectivement en fonction des questions du chercheurs ou des demandes des formateurs ; 3° échanges autour de l'ensemble de ces analyses visant l'explicitation des choix effectués par les formateurs, des problèmes rencontrés, des contraintes, etc. 4° explicitation de nouvelles questions ou de nouvelles perspectives pour la recherche. Dans ce premier travail, les pratiques des formateurs en cours avec les étudiants n'ont donc pas été analysées, la programmation précise des enseignements du calcul de doses non plus. Il s'est agi plutôt d'étudier les résultats des étudiants aux évaluations proposées par les formateurs, en lien avec des conceptions partagées qui président aux choix d'enseignement, pour interroger précisément ces choix d'enseignement.

Près de trois cents copies ont finalement été analysées, l'étude statistique a produit des résultats qui fondent les doutes de nombreux formateurs quant aux deux convictions indiquées précédemment. L'équipe s'est dite prête à retravailler collectivement la programmation de la formation au calcul de doses, bien que des modifications soient aujourd'hui prématurées. L'examen de ces résultats constitue l'objet de la suite du présent texte.

II. PROBLEMATIQUE ET METHODOLOGIE

1. *Un exemple avant de présenter la problématique*

Afin de présenter la problématique, voici un exemple de tâche qui a fait l'objet d'une étude lors de notre recherche. Il s'agissait, pour les étudiants, d'effectuer le calcul de dose correspondant à l'administration d'une prescription médicale en service de réanimation[3] :

Une injection de dobutamine est prescrite à 9 h un patient de 75 kg :
Dobutrex® (ampoules de 250 mg/20 ml) : 10 µg/kg/min en SAP (seringue auto-poussée)
Effectuer les calculs pour administrer cette prescription pendant 12h.

Le lecteur qui n'est pas familier du calcul de doses médicamenteuses, même s'il possède un solide bagage mathématique, aura bien des difficultés à réaliser cette tâche car elle comporte de nombreux implicites liés à l'exercice professionnel. Il s'agit de prélever une quantité adaptée de principe actif – la dobutamine – conditionné en ampoules avec une concentration indiquée par le laboratoire pharmaceutique, de transférer cette quantité dans une seringue auto-poussée, de compléter éventuellement le contenu de la seringue par du sérum physiologique (cela permet de faciliter les calculs de débit), puis de calculer le débit de la seringue afin que le patient reçoive bien, chaque minute, la quantité de produit prescrite par le médecin. La durée de l'injection doit être déterminée afin que l'heure à laquelle il faudra la renouveler soit connue du service : sauf changement de la prescription, le patient ne doit pas rester sans recevoir de traitement.

L'analyse de la prescription permet de savoir que le patient doit recevoir, pour 12 heures, une quantité de dobutamine égale en mg à (10 × 75 × 60 × 12) / 1 000 = 540 mg. Ici, le professionnel en soins infirmiers peut calculer directement le volume de produit conditionné dont il a besoin (et il en déduira le nombre d'ampoules dont il a besoin), ou bien raisonner en comptant les ampoules à utiliser. Supposons qu'il choisisse la seconde méthode : il calculera qu'une ampoule lui fournira 250 mg, qu'avec une deuxième ampoule il disposera de 500 mg et qu'une troisième ampoule sera nécessaire pour obtenir les 40 mg manquants. Le premier calcul complexe est alors à effectuer : quel volume doit-il prélever de la troisième ampoule ? Le raisonnement à effectuer est un raisonnement proportionnel. Une méthode systématique permettant le calcul d'une quatrième proportionnelle est connue, en France, sous le nom de « produits en croix ».

L'infirmier écrit ses données :	250 mg	20 ml
puis ses besoins :	40 mg	x ml

La concentration étant fixée, le volume est proportionnel à la masse, on en déduit l'égalité des rapports 20 / 250 et x / 40 et donc l'égalité des produits des valeurs jointes par les deux diagonales (d'où l'expression de « produits en croix ») : $250 \times x = 40 \times 20$.

Il calcule enfin la valeur cherchée : $x = 40 \times 20 / 250 = 3{,}2$.

L'infirmier en déduit qu'il remplira la seringue électrique avec deux ampoules, soit 40 ml, plus les 3,2 ml qu'il aura prélevés de la troisième ampoule, soit au total 43,2 ml. Le professionnel choisira une seringue de capacité 50 ml qui est, parmi le matériel disponible, la

---

[3] Une injection, en médecine, permet d'introduire une substance liquide dans l'organisme du patient. La dobutamine est un stimulant qui provoque une accélération progressive du rythme cardiaque. Ce médicament est commercialisé sous le nom de Dobutrex® par un laboratoire pharmaceutique français. Son administration s'effectue par injection intraveineuse continue, à l'aide d'une seringue électrique (dite auto-poussée) pour garantir, par un débit constant, une introduction régulière du produit dans l'organisme du patient.

seringue la mieux adaptée à l'injection à réaliser. Le produit devant être injecté en 12h, il reste encore à calculer le débit. Afin de simplifier les calculs (ce qui permettra d'ajuster plus facilement le débit si le médecin décide de modifier la prescription à cause de l'évolution de l'état du patient) l'infirmier complètera ces 43,2 ml avec un solvant neutre – du sérum physiologique – jusqu'à un volume de 48 ml. Il choisira 48 ml car 48 est un multiple de 12 (rappelons que l'injection dure 12h) et c'est le plus petit multiple de 12 qui soit supérieur à 43,2. Le débit correspondant à une injection de 48 ml en 12 h est 4 ml/h, c'est celui qui sera programmé sur la seringue électrique. Si la SAP a été posée à 9h, il faudra la renouveler à 2h.

2. Analyse de la tâche : considérations didactiques et ergonomiques

L'exemple précédent montre que la tâche de calcul est complexe, sa réalisation nécessite de prendre en compte des contraintes liées notamment au matériel (contenance et concentration des ampoules, contenance des seringues) et au travail en équipe (indiquer l'heure du renouvellement aux autres infirmiers), des initiatives (compléter avec du sérum physiologique pour obtenir 48 ml de solution) et des habitudes (négliger, en réanimation adulte, la quantité de produit qui restera dans le prolongateur : le tuyau qui va de la seringue à l'aiguille). À ces considérations qui portent sur un travail écrit fictif, s'ajoutent, dans l'exercice réel de la profession, le contrôle de la prescription (les 10 µg/kg/min sont-ils bien adaptés à l'état du patient ?), l'adaptation de la durée de l'injection à la vie du service (les injections sont proposées sur des fractions de la journée – ici deux intervalles de 12 h – pour éviter que la même erreur soit reproduite : les calculs sont refaits à chaque injection), l'application de protocoles éventuellement imposés dans le service, etc.

En ce qui concerne la tâche de calcul, extraite cette fois de la perspective de l'administration effective de la prescription, on peut remarquer le nombre d'étapes requises implicitement qui nécessite une projection du calcul dans l'activité d'administration. L'analyse des copies montre par exemple que certains étudiants calculent le volume de produit à injecter, mais négligent celui du débit de la seringue ou de l'horaire de renouvellement de l'injection. La tâche peut donc être décomposée ainsi :

- calcul (en µg et en mg) de la dose à injecter au patient de 75 kg pour 12h ;
- détermination du nombre d'ampoules et du volume (dose en ml) à injecter ;
- choix du volume de solution à injecter (pour simplifier le débit) et détermination du volume de sérum physiologique qui complétera la seringue ;
- calcul du débit de la SAP ;
- détermination de l'horaire de renouvellement de l'injection.

Chacune des sous-tâches nécessite seulement d'effectuer quelques opérations arithmétiques élémentaires, certaines d'entre elles demandent néanmoins de tenir un raisonnement proportionnel ou d'effectuer plusieurs opérations consécutivement en gérant différentes unités : de masse (µg et mg pour le principe actif et kg pour le patient), de volume (ml de solution extraite des ampoules, de sérum physiologique et de solution à injecter), de débit (ml/h pour le réglage de la SAP) et de durée (min et h pour l'injection).

De nombreuses erreurs d'étudiants apparaissent dans le raisonnement proportionnel, et dans la détermination de toutes les sous-tâches. Dans d'autres problèmes, de perfusion notamment, des erreurs liées aux unités peuvent être constatées du fait que les calculs de débit en gouttes par minutes nécessitent de convertir des ml en gouttes et d'arrondir les débits. Les deux convictions généralement partagées par les formateurs et qui ont été indiquées dès l'introduction de ce texte constituent, on le comprend d'autant mieux à présent, deux déterminants majeurs de leur pratique de formation puisqu'elles permettent d'attribuer une réponse aux trois types de difficultés fréquemment rencontrées : 1° l'enseignement des produits en croix comme méthode systématique de résolution des problèmes de proportionnalité permettrait d’éviter les erreurs dans le traitement de ces problèmes, notamment pour les étudiants le plus en difficulté en mathématiques ; et 2° les stages en service hospitalier conduiraient les étudiants, d’une part à manipuler le matériel et ainsi à appréhender les différentes unités, et d’autre part à concevoir l’administration de la prescription médicale dans sa globalité et donc à envisager toutes les étapes de calcul permettant cette administration. C’est bien l’étude de ces deux convictions qui constitue la problématique de la recherche.

3. Définition de la problématique et de la méthode de recherche

Plus précisément, il s’agit de mettre ces convictions à l’épreuve des résultats des étudiants lors des évaluations terminales de première, deuxième et troisième année de formation. Comme dans cette première phase de la recherche, les seules données accessibles étaient les copies des étudiants, il a fallu déterminer des observables de ces copies pour les interpréter en fonction de notre questionnement.

Une première catégorie d’observables concerne l’utilisation des produits en croix. Les différentes étapes dans lesquelles peut être tenu un raisonnement proportionnel ont été repérées, ainsi que les méthodes mises en œuvre par les étudiants pour réaliser chacune de ces étapes, et enfin la réussite à ces étapes. Dans la tâche étudiée précédemment, les étapes sont : le calcul en µg de la dose ; la conversion en mg de cette dose ; la détermination du nombre d’ampoules et du volume (dose en ml) à injecter ; et le calcul du débit de la SAP. Parmi ces quatre étapes, une seule nécessite réellement de tenir un raisonnement proportionnel, mais l’analyse des copies montre que l’enseignement du produit en croix engendre une utilisation importante de cette méthode, même lorsqu’elle n’est pas indispensable. Les recherches en didactiques sur la proportionnalité ont permis de distinguer deux autres types de procédures numériques pour résoudre les problèmes : les procédures analogiques qui permettent de passer d’un calcul sur une grandeur au calcul analogue sur la grandeur proportionnelle correspondant, et les procédures analytiques qui permettent de calculer la mesure d’une grandeur à partir de la mesure de la grandeur proportionnelle correspondante en utilisant le coefficient de proportionnalité. Lorsque les deux grandeurs proportionnelles ne sont pas identiques, ce coefficient est une grandeur quotient, c’est fréquemment le cas en soins infirmiers où interviennent des concentrations, des débits, etc.

Une seconde catégorie d’observables concerne la professionnalisation des étudiants, d’une part dans l’appréhension globale de la tâche d’administration de la prescription médicale, et d’autre part dans l’adoption des habitudes du métier. Dans l’exemple étudié précédemment, pour observer l’appréhension de la tâche par les étudiants, nous avons observé le volume à injecter. Deux ne correspondent pas à la pratique professionnelle : celui dont l’infirmier dispose après avoir rempli la seringue avec le contenu des ampoules (43,2 ml), et le volume total de la seringue (50 ml). Les professionnels choisissent en effet de compléter le liquide extrait des ampoules avec du sérum physiologique pour obtenir 48 ml de solution à injecter car cela permet un calcul aisé du débit. Nous avons également retenu le fait qu’ils calculent le débit de la seringue électrique comme un indicateur de la conscience de la tâche globale, notamment du fait que le produit doit être administré au patient : il ne suffit pas, en effet, de remplir la seringue pour le traiter… Nous n’avons, en revanche, pas retenu la détermination de l’horaire du renouvellement de l’injection car la durée de l’administration étant de 12h, des étudiants dont le nombre ne peut être évalué, ont peut-être jugé qu’il n’était pas utile de montrer au correcteur qu’ils savent qu’il est 21h lorsque 12h se sont écoulées depuis 9h.

Trois types de questions nourrissent donc la problématique de la recherche : les premières concernent l'évolution de la réussite et des procédures de résolution des problèmes de proportionnalité au fur et à mesure de la formation, les deuxièmes portent sur l'évolution de la dimension professionnelle des calculs de doses effectués par les étudiants, et les troisièmes les croisements entre la réussite au calcul de doses, l'utilisation des produits en croix et l'appréhension professionnelle de la tâche. Ces questions sont traitées par une étude statistique des copies recueillies, elles visent à confirmer ou à infirmer les convictions généralement partagées par les formateurs et dont doutent les membres de l'équipe avec laquelle s'effectue la recherche.

III. RESULTATS ET DISCUSSION

1. Évolution de la réussite et des procédures

Ayant mené la recherche sur des copies d'évaluation des étudiants, il n'a pas été possible de mener une étude satisfaisante de l'évolution de la réussite au cours de la formation. Les problèmes proposés étaient en effet de plus en plus difficiles et de plus en plus ressemblants à des tâches professionnelles réelles. En revanche, l'évolution des procédures de résolution a pu être menée.

Deux problèmes de proportionnalité ont été proposés aux 102 étudiants de 1re année. *Problème 1* : « Un homme court chaque matin 3 750 m en 18 mn. Quelle distance parcourt-il en 15 mn ? ». *Problème 2* : « Dans une pâte à crêpes, il faut 400 ml de lait, 250gr de farine, 200 gr sucre et 4 œufs. Pour 600 ml de lait, calculez la farine, le sucre et les œufs à ajouter. ». Une brève analyse des énoncés montre que, dans le premier, la résolution nécessite que la vitesse soit constante, ce qui n'est pas indiqué. En l'admettant, les données n'offrent pas de solution facile pour mettre en œuvre une méthode analogique sauf à effectuer un retour à l'unité, mais alors la distance parcourue en minutes n'est pas un nombre entier de mètres, ou à calculer la distance parcourue en 3 minutes puis en 15 minutes en divisant par 6 la distance 3 750 puis en multipliant le quotient par 5. Le second problème permet en revanche de recourir facilement à ce type de méthode : le passage de 400 ml à 600 ml s'effectue en multipliant par 1,5 ou bien en divisant par deux les 400 pour obtenir 200 puis en multipliant 200 par 3 ou en ajoutant 200 à 400. En outre les mesures des grandeurs proportionnelles à 400 sont divisibles par 2 (le nombre d'œufs est pair).

L'analyse des copies confirme les résultats connus en didactique des mathématiques au sujet de la résolution des problèmes de proportionnalité : les procédures analogiques sont davantage mises en œuvre que les procédures analytiques. Pour le premier problème, on constate : 85 produits en croix, 11 procédures analytiques, 6 NRNI (non réponse ou procédure non identifiée). Pour le second, on dénombre : 53 produits en croix, 37 procédures analogiques, et 12 NRNI. Ainsi peut-on remarquer que les produits en croix sont dominants, et cela d'autant plus que les valeurs numériques rendent les procédures analogiques moins simples d'utilisation.

Un seul problème a été proposé en 2^{e} année aux 103 étudiants. « Perfusion veineuse : 2 litres de G5% par 24 heures avec 4 g de NaCl/litre de G5% et 2 g de KCl/litre de G5%. Sachant que vous disposez d'ampoules de NaCl de 20 ml dosées à 20% et d'ampoules de KCl de 10 ml dosé à 10%, Calculez la quantité, en ml, d'électrolytes de NaCl et de KCl à rajouter dans 1 litre de G5%. ». Le principe de fractionnement de la journée conduit les formateurs à poser la question de la perfusion sur 12h et non sur 24h comme l'indiquait la prescription médicale. Si cela peut troubler le lecteur qui n'est pas familier du soin infirmier, cela ne devrait pas gêner les étudiants en IFSI. Il en est de même de l'abréviation G5% pour désigner une solution de sérum physiologique auquel du glucose est ajouté à raison de 5 g de glucose pour 100 g de sérum. Enfin le G5% est conditionné en poches de différents volumes dont certaines de 1 L, cela permet de raisonner conformément à la demande de l'énoncé. Les ampoules de NaCl sont dosées à 20%, cela signifie – avec un abus de langage répandu dans la profession – qu'il y a 20 g de NaCl pour 100 ml. L'étudiant doit donc calculer la quantité de NaCl d'une ampoule, et pour cela, mener un raisonnement proportionnel. Différentes procédures analogiques sont assez faciles à mettre en œuvre : diviser par 5 pour passer de 100 ml à 20 ml, ou diviser par 10 pour passer de 100 ml à 10 ml puis multiplier par 2 pour obtenir 20 ml, etc. Néanmoins, sur 103 copies, on dénombre 92 produits en croix, 8 procédures analogiques et 3 NRNI. Si on compare ces résultats au second problème de 1re année où les procédures analogiques étaient également faciles à mettre en œuvre, on constate un accroissement significatif[4] de la fréquence des produits en croix qui passe de 52% à plus de 89%.

Le problème donné en 3e année est celui qui a été étudié dans l'exemple. Une étape requiert véritablement un raisonnement proportionnel, celui du calcul de la dose, il est réalisé avec des produits en croix par 68 des 74 étudiants, soit par 91% d'entre eux. Cette fréquence confirme une homogénéisation des procédures due à l'enseignement des produits en croix comme méthode systématique pour résoudre un problème de proportionnalité. La question du lien entre l'utilisation de cette procédure et la réussite au calcul de doses reste posée, elle est étudiée ci-après.

2. *Réussite au calcul de doses et utilisation du produit en croix : confirmation d'un doute*

L'utilisation des produits en croix est très forte chez les étudiants de 3e année, nous voulons dire par là qu'ils sont utilisés même lorsque cela n'est pas utile, par exemple pour convertir en mg la dose calculée en µg. Nous avons ainsi repéré quatre étapes de calcul où cette procédure pouvait être utilisée, dont une seule qui relève d'un raisonnement proportionnel. Le nombre moyen d'utilisation des produits en croix est 1,8.

Nous avons séparé les étudiants en deux groupes : ceux qui utilisent les produits en croix deux fois au maximum (utilisation considérée comme « normale » compte tenu de l'enseignement) et ceux qui l'utilisent trois fois ou plus (utilisation considérée comme « forte » compte tenu des besoins d'utilisation de cette procédure). L'analyse statistique montre que l'utilisation des produits en croix pour convertir des µg en mg n'est pas indépendante de l'utilisation « normale » ou « forte » de cette méthode[5]. Évidemment, les étudiants qui l'utilisent fortement, l'utilisent aussi pour convertir, mais réciproquement, une utilisation pour convertir implique également une forte utilisation[6].

Nous avons également distingué ces étudiants de 3e année selon leur réussite au calcul de dose, 76% d'entre eux l'ont effectué correctement. Si la méthode des produits en croix favorisait la réussite, l'analyse statistique permettrait de rejeter l'hypothèse d'indépendance entre la réussite et l'utilisation des produits en croix, or cela n'est pas le cas[7]. L'ensemble de ces résultats obtenu sur cet exemple confirme donc le doute de l'équipe de formateurs de l'IFSI. La recherche a aussi permis d'interroger le lien entre l'effectuation de stages et la réussite aux calculs de doses, c'est l'objet de la section suivante.

3. *Appréhension professionnelle du calcul de dose et réussite : confirmation d'un doute*

Les étudiants de 3e année ont effectué des stages en milieu hospitalier, ce passage du côté de la pratique réelle engendre-t-il une appréhension globale de la tâche et le respect des

---

[4] Un test du chi² d'homogénéité a été utilisé pour comparer les fréquences des produits, en croix, la différence est significative au seuil de 1%.
[5] Un test du chi² d'indépendance a été utilisé, il est significatif au seuil de 1%.
[6] Un test d'implication (test de Régis Gras) a été effectué, il est significatif au seuil de 1%.
[7] Un test du chi² d'indépendance a été effectué, on obtient $p > 69$.

habitudes professionnelles ? Deux indicateurs ont été retenus à ce sujet pour analyser les réponses au problème de calcul de doses présenté précédemment : le fait d'avoir ou non calculé le débit de la seringue et le fait d'avoir ou non choisi de remplir la seringue avec 48 mL de solution pour faciliter le calcul du débit.

Les résultats confirment le doute des formateurs : si 90% des étudiants choisissent bien de remplir la seringue auto-poussée avec 48 ml de solution, ils sont dans le même temps 51% à ne pas calculer le débit de la seringue. Le passage par le stage ne garantit pas la conception globale de la tâche de calcul. En outre le lien entre une appréhension professionnelle du calcul de dose et la réussite dans ce calcul n'est pas avéré. En ne comptant pas comme faux un calcul qui ne mentionne pas le débit de la SAP, l'analyse statistique ne permet de rejeter ni l'hypothèse d'indépendance entre la réussite au calcul et choix du volume à injecter, ni celle entre la réussite et le calcul du débit[8].

Ainsi, contrairement à une croyance souvent partagée par les formateurs, la recherche montre que le fait d'avoir effectué des stages ne résout pas les difficultés de calcul de doses médicamenteuses rencontrées par certains étudiants, même par ceux qui sont déjà très avancés dans leurs études en soins infirmiers. D'après les formateurs avec lesquels la recherche collaborative est menée, cette croyance viendrait du fait que les étudiants réaliseraient des progrès entre la 2e et la 3e année quant à la compréhension des tâches de calcul, progrès dont témoignerait l'évolution des questions posées et des demandes d'informations exprimée en classe.

IV. CONCLUSION

La pratique d'un enseignant ou d'un formateur n'est pas seulement guidée par ses conceptions et ses convictions personnelles concernant l'enseignement et l'apprentissage : elle est également soumise à des croyances, à des habitudes et à des normes partagées par la profession. Alors que le calcul de doses médicamenteuses pose un véritable problème de santé public, une recherche collaborative associant un chercheur en didactique des mathématiques et une équipe de formateurs en soins infirmiers a permis de questionner le doute exprimé par certains de ces professionnels au sujet du bénéfice qu'apportent la méthode des produits en croix, d'une part, et les stages en milieu hospitalier, d'autre part.

L'analyse de copies d'étudiants produites en situation d'évaluation à la fin de la 1re, de la 2e et de la 3e année de formation montre un effet de la formation sur les procédures utilisées par les étudiants : la méthode des produits en croix remplace les méthodes analogiques et analytiques employées par les étudiants en début de formation. En outre ce sont justement ceux qui utilisent le moins cette méthode qui réussissent le plus à conduire un calcul de dose complexe sans faire de fautes. Enfin, l'appréhension professionnelle que procureraient les stages n'est pas avérée par l'analyse des productions des étudiants, ni le lien entre une telle appréhension et la réussite au calcul de dose.

---

[8] Deux tests du chi² d'indépendance ont été utilisés, pour le premier $p > .04$, et pour le second $p > .06$.

RÉFÉRENCES

Desgagné S., Bednarz N., Lebuis P., Poirier L., Couture C. (2001) L'approche collaborative de recherche en éducation : un nouveau rapport à établir entre recherche et formation, *Revue des Sciences de l'éducation* 27(1), 33-64.

Gouvernal C. (2009) *Le raisonnement proportionnel dans l'application d'une prescription médicale, approche didactique*. Mémoire de Master de l'Université Paris Descartes (non publié).

Hoyles C., Noss R., Pozzi S. (2001) Proportional Reasoning in Nursing Practice. *Journal for Research in Mathematics Education* 32(1), 4-27.

Le Journal du Dimanche (2011) *Une patiente meurt d'une surdose de morphine*. http://www.lejdd.fr/Societe/Faits-divers/Depeches/Une-patiente-meurt-d-une-surdose-de-morphine-281861/

Le Monde (2009) Décès d'un bébé : l'hôpital reconnaît « l'erreur de deux personnels ». http://www.lemonde.fr/societe/article/2009/01/03/deces-d-un-bebe-a-la-suite-d-une-suspicion-d-erreur-dans-un-hopital-des-yvelines_1137658_3224.html

Le Monde (2010) Marseille : un enfant de six ans meurt d'une surdose de chimiothérapie. http://www.lemonde.fr/societe/article/2010/03/25/erreur-medicale-fatale-a-l-hopital-de-la-timone-a-marseille_1324100_3224.html

Maisonneuve C. (2004) Surdosage de morphine, un problème d'étiquetage ? *Soins* 690, 6.

Maisonneuve C. (2006) Décès d'une fillette, une infirmière condamnée. *Soins* 703, 8.

McMullan M., Jones R., Lea S. (2010) Patient safety: numerical skills and drug calculation abilities of nursing students and Registered Nurses. *Journal of advanced nursing* 66(4). 891-899.

Noss R., Hoyles C., Pozzi S. (2002) Abstraction in Expertise: A Study of Nurses' Conceptions of Concentration. *Journal for Research in Mathematics Education* 33(3), 204-229.

Robert A., Rogalski J. (2002) Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies* 2(4), 505-528.

Roditi E. (2005) *Les pratiques enseignantes en mathématiques. Entre contraintes et liberté pédagogique*. Paris : L'Harmattan.

Roditi E. (2008) Des pratiques enseignantes à la fois contraintes et personnelles, et pourtant cohérentes : In Vandebrouck F. (Ed.) (pp. 73-94) *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*. Toulouse : Octarès.

Roditi E. (2010) Une collaboration entre chercheurs et enseignants dans le contexte français de la didactique des mathématiques. *Éducation & Formation* 293, 199-210.

Rogalski J. (2008) Des compléments sur les théories de l'activité et du développement pour l'analyse liée des pratiques des enseignants et des apprentissages des élèves. In Vandebrouck F. (Ed.) (pp. 429-456)*La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*. Toulouse : Octarès.

Wright K. (2007) A written assessment is an invalid test of numeracy skills. *British Journal of Nursing* 16(13), 828-831.

Wright K. (2010). The assessment and developpement of drug calculation skills in nurse education. A critical debate. *Nursing Education today* 30(1), 85-97.

ANALYSE D'UNE DIDACTIQUE D'INTERVENTION AUTOUR DU DÉVELOPPEMENT D'UNE ACTIVITÉ DE CONTRÔLE : STRATÉGIES D'ENSEIGNEMENT ET INDICATEURS DE CONTRÔLE CHEZ LES ÉLÈVES DU SECONDAIRE

Mireille SABOYA*

Résumé – Devant une production mathématique, l'élève devrait être capable de vérifier son résultat, de juger de la cohérence, de la validité, de la rigueur de sa démarche et de s'engager de manière réfléchie dans une résolution, en faisant preuve de jugement. Ces actions traduisent ce que nous avons appelé un *contrôle* sur l'activité mathématique. Une expérimentation avec des élèves de 15-16 ans a été menée afin de développer chez eux une telle attitude. Nous rapportons dans ce texte les stratégies d'enseignement susceptibles de développer le contrôle et les indicateurs de contrôle chez les élèves, résultats issus d'une recherche collaborative menée avec une enseignante.

Mots-clefs : contrôle, stratégies d'enseignement, indicateurs de contrôle chez les élèves, algèbre, exposants

Abstract – In front of a mathematical solution, students need to be able to verify their results, judge of the coherence, validity and rigor of that solution and engage reflectively in a solving process using their judgment. These actions illustrate students' control over their mathematical activity. An experiment with students aged 15-16 was conducted to develop among them such an attitude. We report in this text teaching strategies that may develop control and monitoring indicators among students from a collaborative research conducted with a teacher.

Keywords: control, teaching strategies, control indicators among students, algebra, exponents

I. INTRODUCTION

Certaines composantes de l'activité mathématique de l'élève telles que la vérification du résultat obtenu, la justification d'un énoncé, d'une proposition ou de la démarche adoptée dans un problème, un engagement réfléchi dans la tâche, la validation reflètent l'acquisition de ce que nous avons nommé le *contrôle*. Plusieurs études montrent l'importance de ces composantes dans l'activité mathématique chez l'élève (Balacheff 1987 ; Artigue 1993 ; Butlen et al. 1989), et chez les mathématiciens (Hadamard 1945/1975 ; Nimier 1989 ; Smith et Hungwe 1998), cette activité apparaissant également centrale dans le contexte scolaire québécois (MELS 2003, 2006). Néanmoins différentes recherches (Delorme 1985 ; Richard 1998 ; Coppé 1993 ; Dib 2000-01 ; Polya 1945/1965 ; Vivier 1998 ; Chalancon et al. 2002 ; Artigue 2002 ; Cortés et Kavafian 1999 ; Bednarz et Janvier 1992 ; Schmidt 1994 ; Richard 1998 ; Butlen et Pezard 1990-91 ; Schoenfeld 1985) soulignent le peu de *contrôle* exercé par les élèves face à l'activité mathématique et ce, à tous les niveaux et dans différents domaines des mathématiques. Ce constat rejoint celui émis par les enseignants en exercice sous l'angle d'une vérification du résultat, de la démarche.

Cette double préoccupation sur le contrôle que les élèves exercent en mathématiques, provenant à la fois des travaux menés en recherche en didactique des mathématiques et de la pratique à travers ce qu'expriment les enseignants a mené à une recherche collaborative avec une enseignante de secondaire 3 (élèves de 15-16 ans) autour de l'algèbre et plus précisément sur les puissances d'un nombre (Saboya 2010). D'une part, nous avons cherché à cerner les situations qui ont été élaborées conjointement et les stratégies d'intervention mises en place en classe susceptibles de favoriser le développement d'une activité de contrôle chez les

* Université du Québec à Montréal – Canada – saboya.mireille@uqam.ca

© Saboya M. (2012) Analyse d'une didactique d'intervention autour du développement d'une activité de contrôle : stratégies d'enseignement et indicateurs de contrôle chez les élèves du secondaire. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT9, pp. 1246–1258). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

élèves. D'autre part, nous avons cherché à mieux comprendre ce qu'il advient sur le plan du développement du contrôle chez les élèves du secondaire au cours de ces situations. L'analyse des rencontres avec l'enseignante et de l'expérimentation en classe a ainsi permis d'éclairer une didactique d'intervention autour du développement du contrôle.

Pour fonder l'élaboration des situations didactiques, nous avons mené une analyse théorique du concept de contrôle.

II. CADRE CONCEPTUEL SUR LE CONTROLE LES DIFFERENTES COMPOSANTES DU CONTROLE

L'analyse de différentes recherches confirme que, dans une certaine mesure, le concept de contrôle a été étudié sous plusieurs angles, même si tous les auteurs n'utilisent pas explicitement le mot « contrôle »[1].

1. Le contrôle : définition et composantes

L'activité de *contrôle* est associée pour nous à un processus qui se développe, se construit sur du *long terme* chez l'élève. Il se traduit par une *réflexion* de la part de l'élève, sur toute action, sur tout choix tout au long de la tâche : au début, en cours ou à la fin de la résolution ; par la capacité à *prendre des décisions* de façon réfléchie, rationnelle ; par une *prise de distance* par rapport à la résolution ; par le recours aux *fondements* sur lesquels on s'appuie pour valider.

Le contrôle est présent tout au long de la résolution de la tâche. *En amont de la réalisation*, le contrôle permet une anticipation, les élèves posent a priori une condition de validité du résultat avant de le connaître. Il assure une mobilisation des connaissances en jeu, il se manifeste par une relation entre les données et le but à atteindre. *En aval de la réalisation*, le contrôle assure un travail rétrospectif, une vérification, une validation du résultat pour dépasser le doute et acquérir une certitude. Si nécessaire, il permet un retour sur la tâche et contribue à une évaluation des décisions d'action. Il passe également par la perception des erreurs. *En début ou en cours de processus*, le contrôle se manifeste par des prises de décision sur la direction à prendre, la stratégie la plus efficace, la moins coûteuse en temps, par des évaluations périodiques tout au long de la résolution.

Pour ne pas alourdir la lecture, nous faisons le choix de ne présenter que quatre composantes du contrôle issues de différentes lectures, elles permettront d'éclairer l'analyse exposée dans la partie III.

Vérification (Hadamard 1945/1975 ; Cipra 1985 ; Schoenfeld 1985 ; Margolinas 1989 ; Coppé 1993 ; Kargiotakis 1996 ; Richard 1998). On peut distinguer deux types de vérification :

- Une vérification provenant d'une anticipation, on anticipe le résultat et on exerce ensuite une vérification face au résultat obtenu pour le confronter à celui anticipé.
- Une vérification sans anticipation préalable, une fois le résultat obtenu on se pose les questions suivantes « a-t-il du sens dans le contexte? », « est-il conforme à ce qui est demandé? ». La vérification requiert un retour à la tâche, à la question posée. Elle peut porter sur la démarche, la méthode utilisée ; sur le choix de la méthode utilisée ; sur le résultat lui-même. Elle se manifeste à travers un questionnement sur le caractère pertinent de ce résultat, sur sa nature, sur sa forme globale. La vérification permet de dépasser le doute.

[1] Nous avons fait le choix de ne pas traiter des recherches menées autour de l'argumentation et de la preuve.

Engagement réfléchi (Margolinas 1989 ; Schmidt 1994 ; Kargiotakis 1996). L'engagement réfléchi s'exprime à travers une prise de distance, un arrêt devant la tâche avant de résoudre, une réflexion sur l'action. Dans le cas de la résolution de problème, il est relié à la représentation appropriée du problème et dans la construction d'un schéma mathématique pertinent et cohérent. Il s'exprime en termes de jugement réfléchi, d'esprit critique, avant de résoudre comme par exemple quand l'élève est face à des expressions qui ne peuvent se réduire ou un temps d'arrêt marqué devant la simplification d'expressions avec des additions au numérateur et/ou au dénominateur qui sont source de difficultés chez les élèves.

Validation (Perkins et Simmons 1988 ; Lee et Wheeler 1989 ; Saboya 2010). La validation s'appuie sur des fondements (qui vont être explicités) qui permettent de juger du caractère vrai, faux, partiellement vrai de ce qui est avancé. Dans le cas d'énoncés algébriques, elle se traduit par une coordination entre arithmétique et algèbre, par la capacité de passer d'un cadre à l'autre. Ce type de validation permet le développement d'une sensibilité aux erreurs, aux difficultés. La validation peut également s'exprimer à travers l'utilisation d'écritures équivalentes, une flexibilité dans le passage d'une écriture à l'autre; elle requiert un retour au sens des concepts en jeu.

Perception des erreurs/ Sensibilité à la contradiction / Capacité de dépasser la contradiction (Piaget 1974 ; Balacheff 1987 ; Kargiotakis 1996). La sensibilité à la contradiction peut provenir d'une anticipation déçue, d'un effet de surprise face à un résultat qui ne correspond pas à celui attendu. Il peut toutefois ne pas être relié à l'anticipation. Dans une classe, la sensibilité à la contradiction peut s'exprimer à travers une mise en commun des résultats obtenus dans le groupe qui ne sont pas équivalents les uns des autres. Le dépassement de la contradiction est issu d'un retour sur les concepts en jeu, sur leur signification.

Cette conceptualisation du concept de contrôle a guidé la chercheure dans les arguments amenés dans le choix des tâches susceptibles de développer une activité de contrôle chez les élèves lors des rencontres avec l'enseignante. Au-delà du choix des tâches, le rôle de l'enseignant est à prendre en considération pour favoriser le développement d'une telle activité. Les études de Margolinas (1992 ; 1993) s'intéressent à la place de l'enseignant en lien avec la validation.

2. *Des stratégies d'enseignement autour du développement du contrôle*

Margolinas (1993) présente ce qu'elle nomme la phase de conclusion qui prend place à la fin de la résolution d'un problème par l'élève. « Cette phase de conclusion est sous le contrôle du maître, et peut s'analyser selon le rôle qu'y joue le maître » (p. 29) Une phase de conclusion est une phase d'évaluation si l'enseignant émet un jugement sur la validité du travail de l'élève. Nous pensons que cette phase ne permet pas le développement d'une activité de contrôle chez l'élève, celui-ci n'est pas amené à réfléchir sur la validité de sa démarche. C'est quand la phase de conclusion est une phase de validation qu'une activité de contrôle s'exerce. Dans ce cas, la situation permet à l'élève de statuer sur la validité de sa démarche, il est alors responsable de la totalité de ses actions. La chercheure souligne toutefois que ces définitions ne rendent pas compte de toutes les possibilités. En effet, l'enseignant peut intervenir en donnant un contre-exemple, on ne se situe alors ni dans une phase d'évaluation ni de validation. Margolinas (1993) introduit la phase de bilan qui est une phase intermédiaire entre ces deux phases, dans laquelle l'enseignant peut intervenir activement quand c'est nécessaire.

> Un des rôles de la phase de bilan est de permettre la formulation publique des méthodes de résolution par les élèves qui sont envoyés au tableau, où ces élèves doivent formuler leurs stratégies (Margolinas 1992, p. 136).

La phase de bilan rendant publiques les stratégies devant la classe est intéressante du point de vue de l'enseignant qui peut alors reformuler, renvoyer des questions au reste de la classe à des fins de validation.

À travers l'exemple d'une tâche retenue par la chercheure et l'enseignante, nous allons rapporter sur quelle base s'est fait un tel choix et nous allons expliciter l'analyse de la tâche effective en classe sous l'angle des stratégies d'enseignement susceptibles de développer une activité de contrôle et autour des indicateurs de contrôle chez les élèves. L'exemple présenté ici a permis d'exemplifier certaines composantes du contrôle issues de l'analyse théorique.

III. STRATEGIES D'ENSEIGNEMENT FAVORISANT UNE ACTIVITE DE CONTROLE ET INDICATEURS DE CONTROLE CHEZ LES ELEVES : UN EXEMPLE AUTOUR DE LA RESOLUTION DE PROBLEMES

L'expérimentation a eu lieu en secondaire 3 (élèves de 15-16 ans) autour de l'algèbre, plus précisément sur les puissances. L'exemple choisi ici, *les abeilles*[2], relève de la résolution de problèmes et prend place au tout début de la séquence d'enseignement, c'est la deuxième situation traitée visant à donner du sens à l'écriture exponentielle. La situation est la suivante :

> **Abeilles**
>
> Un essaim d'abeilles compte environ 60 000 individus. Une pauvre petite abeille a attrapé une maladie contagieuse et mortelle, sans le savoir elle revient dans sa ruche. Cette maladie se propage au rythme suivant : tous les jours, chaque individu atteint transmet la maladie à 5 autres individus puis meurt. Dans combien de temps, l'essaim sera-t-il complètement décimé?

Figure 1 *– Mise en situation du problème des abeilles*

1. Les arguments invoqués de part et d'autre pour retenir la tâche

Cette situation a été retenue par la chercheure et l'enseignante pour des raisons différentes. Le cadre de référence sur le contrôle guide le choix de la tâche par la chercheure. Deux raisonnements différents peuvent être considérés. On peut raisonner en exposant, on cherche n (le nombre de jours) tel que $5^n > 60\,000$, 5^n représente le nombre d'abeilles mortes le jour n. Dans ce cas, on ne prend pas en considération les abeilles mortes les jours précédents. Pour cela, il faut plutôt raisonner en somme des exposants de 5, on cherche n tel que $1+5+5^2+\ldots+5^n > 60\,000$. Ces deux démarches n'ont pas de conséquence sur la réponse ($n = 8$ jours dans les deux cas) à cause de la donnée 60 000. Elle aurait eu une conséquence si l'effectif avait été autre comme par exemple de 80 000. Il y a ainsi deux démarches différentes qui amènent à une même réponse, ce qui ouvre un espace de discussion sur la validité des démarches : puisqu'on obtient le même résultat, les deux démarches sont-elles équivalentes ? De plus, nous pouvons remarquer que le contexte prête à plusieurs interprétations et débouche sur plusieurs réponses possibles. Par exemple, on peut supposer que les abeilles meurent la journée où elles sont infectées ou alors qu'elles meurent la journée d'après, la réponse donnée au problème n'étant plus la même. Ainsi, l'élève s'il s'approprie le problème en donnant du sens en contexte peut aller vers différentes interprétations, ce qui demande un certain engagement réfléchi qui est une des composantes du contrôle. L'élève est amené à valider le modèle choisi pour représenter le problème.

[2] Ce problème est tiré de Breton et Morand 1995, p. 227.

De plus, dans le cas où l'élève cherche quel est l'exposant de 5 donnant comme réponse 60 000 (le nombre total d'abeilles dans la ruche), le nombre qu'il va trouver est un irrationnel, ce qui suggère une interprétation, à un retour sur la réponse puisqu'on cherche un nombre de jours. Une autre composante du contrôle est mise ainsi à contribution, la vérification. En effet, le résultat obtenu requiert une vérification pour expliciter ce que signifie une réponse à écriture décimale dans ce contexte.

D'autres arguments guident l'enseignante dans le choix de la tâche. Celle-ci cherche à avoir des problèmes présentant des variantes sur le plan du contenu, et qui préparent les élèves aux années suivantes, au contenu à venir. Elle retient ainsi le problème des abeilles parce qu'il s'agit dans ce cas de trouver l'exposant (la base étant connue, ainsi que le résultat), ce qui est différent du premier problème présenté aux élèves (dans lequel la base et l'exposant sont connus et il faut trouver le résultat). Elle évoque de plus la possibilité de préparer ainsi les élèves au secondaire 4 et 5, niveaux dans lesquels on traite explicitement des logarithmes.

L'analyse de la séance en classe permet de relever différentes stratégies d'enseignement susceptibles de développer une activité de contrôle, d'avoir accès à ce que contrôlent les élèves sous l'influence de certaines questions de l'enseignant.

2. Analyse d'une tâche effective en classe

Les élèves ont résolu ce problème en équipes. Deux stratégies différentes sont ressorties :

i. la recherche du nombre d'abeilles décimées le jour *n*. Les élèves ont utilisé deux techniques différentes : la recherche de l'exposant 5 *(quatre démarches différentes ont été dans ce cas relevées)* et la recherche de la racine cinquième de 6 000.

<table>
<tr><th colspan="2">Recherche de l'exposant 5</th></tr>
<tr><td>Démarche 1
L'élève calcule jour après jour le nombre d'abeilles mortes :
Jour 1 : 1
Jour 2 : 5
Jour 3 : 25
Jour 4 :125
Jour 5 : 625
Jour 6 : 3125
Jour 7 : 15 625
Jour 8 : 78 125

<u>Réponse</u> : 7 jours (2 élèves)
<u>Réponse</u> : 8 jours (2 élèves)</td><td>Démarche 2
Ressemble à la stratégie 1 mais pour le jour 1, l'élève comptabilise 5 abeilles mortes.
Jour 1 : 5
Jour 2 : 25
Jour 3 : 125
Jour 4 :625
Jour 5 : 3125
Jour 6 : 15 625
Jour 7 : 78 125

<u>Réponse</u> : 7 jours (5 élèves)</td></tr>
<tr><td>Démarche 3
Les élèves utilisent directement l'écriture exponentielle $5^{\text{nbre de jours}} = 60\ 000$ (on obtient le même résultat qu'en utilisant la stratégie 2).
$5^6 = 15625$
$5^7 = 78\ 125$
<u>Réponse</u> : 7 jours (8 élèves)
<u>Réponse</u> : 6 jours (2 élèves)</td><td>Démarche 4
Les élèves procèdent comme ceux qui ont utilisé la stratégie 3 mais ils cherchent à avoir un nombre décimal en exposant.

<u>Réponse</u> : 6,68 jours (2 élèves)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Recherche de la racine cinquième de 60000
Les élèves calculent la racine cinquième de 60 000 : $\sqrt[5]{60000} = 9{,}03$.
<u>Réponse</u> : 10 jours (4 élèves)</td></tr>
</table>

Figure 2 – *Analyse des productions des élèves autour du problème des abeilles pour la stratégie « Recherche de l'exposant 5 »*

ii. La recherche de la somme du nombre d'abeilles décimées au jour *n*.

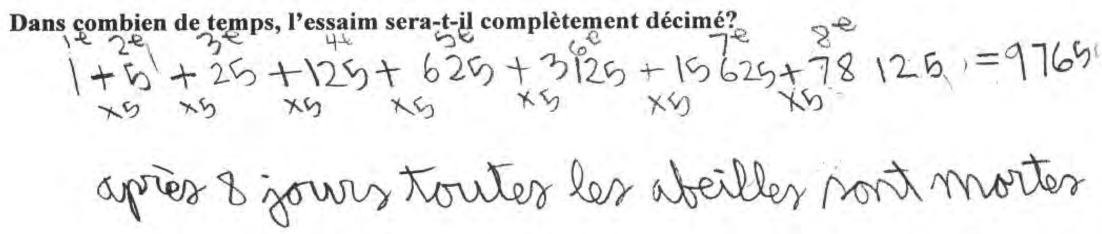


Figure 3 *– Production de la seule équipe qui illustre la stratégie « Recherche de la somme »*

Nous pouvons remarquer que les élèves qui ont utilisé la première stratégie (démarches 1 et 2) ont perçu la structure multiplicative du problème, faisant toutefois les calculs un à un. Ces élèves ont interprété le problème de deux façons différentes (dans la démarche 1, seule la première abeille meurt le premier jour alors que dans la démarche 2, les cinq abeilles meurent le premier jour). On peut remarquer que les réponses 7 jours dans la démarche 1 et 6 jours dans la démarche 3 soulignent une non vérification de la réponse, un non retour à la tâche puisque le nombre de jours trouvé n'excède pas l'effectif total de la ruche. C'est le cas également de la démarche 4 dans laquelle les élèves trouvent une réponse rationnelle, comment interpréter 6,68 jours ? La démarche 3 dénote un contrôle des élèves quant au recours à une écriture efficace, il n'y a pas de calculs un à un. Les élèves ayant produit la deuxième stratégie possèdent une représentation du problème différente, ils ajoutent le nombre d'abeilles décimées jour après jour, faisant preuve d'un contrôle sur la tâche proposée en termes d'engagement réfléchi, une bonne interprétation de l'écriture exponentielle.

Lors du retour en classe, le choix des élèves désignés par l'enseignante n'est pas anodin. Ayant circulé dans les rangées, elle dirige la discussion après avoir repéré les productions des élèves. Elle demande en premier à un élève, Marc, d'aller en avant pour expliquer sa démarche au reste de la classe (stratégie 1, démarche 4). L'élève s'appuie sur une représentation en arbre pour justifier l'utilisation de l'écriture exponentielle. Pour illustrer les échanges dans le groupe, nous reprenons sous forme de vignette les extraits significatifs de cette intervention en mettant en évidence des éléments (dans les commentaires) qui seront repris dans l'analyse.

Extraits	**Commentaires**
Marc : d'accord, au début moi j'ai faite. **Nadia** : c'est quoi ça? **Marc** : ça c'est la petite abeille *(il montre le premier grand trait qu'il a tracé)*, là elle donne sa maladie à 5 personnes puis je n'ai pas fait plus parce que ça prenait de la place. L'élève fait le dessin suivant au tableau :	Solution explicitée par l'élève caractérisée par une schématisation du problème à l'aide de l'arbre qui lui a permis d'anticiper la structure multiplicative du problème.
	L'élève rajoute des traits sur sa représentation en arbre.
Marc : puis là elle *(la première abeille)* elle fait fois 5, 5 fois plus que elle, ça fait 5 fois 1 = 5, 5 fois plus qu'elle *(il montre l'une des abeilles qu'il vient de dessiner)*, puis là ça fait 5 fois 5, ce qui fait 25 et tu fais ça tant que tu remplisses le tableau.	L'élève met en évidence la régularité, la structure multiplicative ($\times 5, \times 5, \times 5$, etc.)
Nadia : ok et qu'est-ce que tu as écrit sur ta feuille? Parce que là tu nous dis ça en mots mais je ne sais pas si…	Un renvoi de l'enseignante à ce que l'élève a fait / à aller plus loin
Marc : non mais là j'ai fait ça puis *(l'élève regarde sur sa feuille),* après je me suis dit « je vais faire 5 à la 30 » pour faire comme avec l'autre numéro, ça faisait 6 millions de trillions donc là je me suis dit « ce n'est pas ça là », donc là j'ai faite… 5 à la 6 et ça m'a donné 50 000 là.	L'élève repère que ce problème a la même structure que le problème précédent, passe à l'écriture exponentielle.
Les autres élèves : mais non c'est 15 625.	Invalidation du calcul par le groupe.
Marc : ça m'a donné 50 000 *(rires)*. Et là je me suis dit ce n'est pas ça, donc j'ai fait 5 à la 7 et là ça m'a donné, on va dire 72 000. Et après j'ai faite entre les deux, fait j'ai faite 5 à la 6 point 5.	L'élève cherche un nombre décimal de jours. Il est guidé par l'idée de trouver l'exposant qui permettra de trouver 60 000. Marc décrit une technique de recherche de l'exposant, il quitte ainsi le contexte.
Nadia : 5 à la 6 point 5.	

Marc : ouais.	
François : mais il n'y a pas de demi journée (appuyé par Nicolas, qui souligne que l'exposant doit être un nombre entier).	Invalidation de la technique utilisée par Marc, la trouvaille d'un résultat, en ramenant le résultat au contexte.
Nadia : laissez-le faire, c'est beau.	Importance pour l'enseignante que l'élève explicite sa stratégie jusqu'au bout avant que la classe se prononce.
Marc : Là ça donnait entre les deux, on va dire entre les deux 60 000, non pas 60 000 on va plutôt dire 66 000, ok? Puis là j'ai fait 5 à la 6 point 9 puis ça, ça me donnait 69 000 puis là c'est pas ça, ça donnait 60 000, fait que les 9 000 abeilles de trop que ça me donnait. Donc j'ai essayé 5 à la 6 point 8 et j'ai rajouté des chiffres, je me suis rendu jusqu'à 5 à la 6 point 8544 puis là ça me donnait 66 778, ça veut dire que ça fait entre 6 point 8 jours, ça veut dire 6 jours et un bon bout de l'autre jour. (8 mars, 90-121)	Marc décrit sa technique. Il trouve une solution mathématique et pas une solution au problème. Son raisonnement, la recherche de *n* tel que 5 exposant *n* fasse ou dépasse juste 60000 est adéquat.
$5^{6.9} = 66\,904,9 =$ $5^{6.844} = 60\,778 = 6{,}8$ j.	L'élève ramène son résultat dans le contexte / interprétation dans le contexte.

***Figure 4** – Exploitation du problème des abeilles : le retour collectif sur les solutions. Autour de la solution explicitée par Marc*

Dans ces extraits, nous avons accès au point de vue de l'élève (Marc), à sa compréhension à travers ce qu'il explicite. Nous pouvons également relever le contrôle exercé par les autres élèves sur la solution présentée ainsi que des stratégies d'intervention de l'enseignante.

Contrôle exercé par Marc sur la tâche

L'élève modélise la donnée « chaque jour, une abeille contamine cinq abeilles » par un arbre. Il passe ensuite directement à la recherche de *n* tel que 5 exposant *n* soit proche de 60 000. Or, le passage à 5 exposant *n*, nécessite d'avoir considéré le nombre de cas possibles, le nombre d'abeilles atteintes, contaminées. Marc perçoit ainsi la structure multiplicative du problème et il passe à l'exponentielle. Le contrôle qu'exerce Marc se traduit également par un encadrement pour trouver 5 exposant quoi qui donne 60 000, faisant dans l'interprétation un retour au contexte.

Contrôle exercé par les autres élèves sur la solution de Marc : les autres élèves valident ou invalident ce qui est avancé par Marc, son calcul. Un élève de la classe, François, se penche sur le sens de la réponse en lien avec le contexte à travers la question « a-t-elle de l'allure ? ».

Dans ces extraits de verbatim, des stratégies d'intervention susceptibles de développer une activité de contrôle sont mises en évidence. Le choix par l'enseignante de l'élève pour le retour n'est pas anodin, ce choix est guidé par le repérage d'une production où le sens de la réponse amène une discussion autour de la réponse rationnelle. Par exemple, est-il plus précis de dire 6 jours et une demi journée que 7 jours ? Ce serait le cas si on considère que les décès ont lieu le matin. De plus, Nadia renvoie à ce que l'élève a fait, à aller plus loin, elle fait en sorte que l'élève explicite jusqu'au bout avant que les autres interviennent.

Après avoir désigné une stratégie qui amène un questionnement autour du sens de la réponse, Nadia choisit une stratégie basée sur des essais erreurs contrôlés avec comme réponse un encadrement (stratégie 1, démarche 1) et finalement une stratégie pour aller plus loin : une introduction aux logarithmes (la recherche de la racine cinquième). Dans ce retour, plusieurs élèves se prononcent sur différentes interprétations possibles de l'énoncé et de l'écriture exponentielle. Lors de cette discussion autour des différentes interprétations, l'enseignante laisse place à l'argumentation, à différents points de vue. Le choix de la présentation des différentes démarches repérées est judicieux. La discussion autour d'une réponse décimale n'aurait pas eu le même impact si elle était arrivée après les autres démarches, les élèves auraient pu statuer sur la validité de la démarche en se basant sur ce qui avait été décidé précédemment. Le passage aux logarithmes se fait alors naturellement à travers l'écriture $5^n = 60\,000$ et la recherche de la racine cinquième.

Une discussion a lieu autour de l'interprétation de la situation. Sam souligne qu'il faut ajouter une autre journée à celles trouvées puisque la première abeille prend une journée pour mourir. Ce commentaire amène un contre argument de la part de François qui avance que dans 5^6 on a compté plus d'abeilles que celles qui sont réellement mortes, il faut donc les retrancher, intervention qui soulève de grosses protestations dans la classe. Il est intéressant de noter que l'enseignante ne se prononce pas sur la discussion autour de l'interprétation de l'écriture 5^6 par François. Cette distinction entre le nombre d'abeilles mortes et le nombre d'abeilles contaminées n'est pas réinvestie par l'enseignante mais le raisonnement de Sam résonne chez Sandra. Ces deux élèves n'étaient pas dans la même équipe (d'après sa production écrite, Sandra n'avait pas su résoudre ce problème). Cette idée fait chemin dans la classe, Carmen reprenant cette résolution comme on le voit dans la vignette suivante :

Extrait	Commentaires
Sandra *: mais on n'ajoute pas les deux en même temps pour avoir le nombre d'abeilles? Là c'est juste le nombre d'abeilles infectées et non pas le nombre d'abeilles mortes.* ***Nadia*** *: mais si elles sont infectées c'est sûr qu'elles meurent.* ***Sandra*** *: oui mais les chiffres qui sont là indiquent le nombre d'abeilles infectées….* ***Sam*** *: à la fin des 7 jours, il va y en avoir ben plus qui sont mortes.* ***Sandra*** *: oui c'est ça.*	Une discussion a lieu autour de l'interprétation amenée par Sam. L'enseignante intervient dans la discussion mais ne fait pas avancer le débat. On peut remarquer que ces élèves contrôlent la situation, donnent du sens à l'écriture dans le contexte. Ils exercent un engagement réfléchi.
Nadia : Carmen? **Carmen** : ben, il faudrait prendre en considération que le jour 1, il y en a 6 qui meurent puisque la première petite abeille elle part puis quand elle revient la même journée elle en contagie est-ce que ça se dit comme ça? Elle contagie 5, donc ça fait 6 abeilles le jour 1 qui meurent.	Réaction d'une autre élève (Carmen) qui appuie les propos de Sam et de Sandra en explicitant le cas de la première abeille.
Nadia : elle contamine 5 abeilles. **Carmen** : moi je n'ai pas faite de même mais je viens de penser à ça. **Nadia** : ok, donc là il y en a qui meurent et il y en a d'autres qui se rajoutent. **Carmen** : la première elle, elle pogne la maladie et elle va la donner à 5 autres, là ça fait 6 puis là les 5 autres la donnent à 5 autres et là ça fait 5 fois 5, 25. La première il ne faut pas l'oublier. **Nadia** : ok, la première, la Carmen. **Edith** : mais elle va infecter les 5 autres dans la même journée. **Nadia** : ouais. **Sam** : donc ça prend une journée. (8 mars, 151-181)	Reprise des propos des élèves par l'enseignante. Les discussions en classe amènent les élèves à voir d'autres chemins possibles, à valider les possibilités émises. L'enseignante fait signe qu'elle comprend. Édith amène une interprétation différente de la situation *(la première abeille et les cinq autres qui sont infectées par cette abeille mourant la première journée)* alors que pour Sandra, Carmen et Sam la première abeille meurt le premier jour et les cinq abeilles infectées ne mourront que le lendemain.

Figure 5 *– Exploitation du problème des abeilles : une multitude de points de vue*

À travers l'analyse de la situation des abeilles, on peut relever différentes stratégies d'enseignement susceptibles de favoriser une activité de contrôle chez les élèves. *Pendant l'explicitation des élèves :* l'enseignante renvoie à ce que l'élève a fait, à aller plus loin ; elle fait en sorte que l'élève explicite jusqu'au bout avant de se prononcer ; elle force une explication pour mieux comprendre ; elle laisse place à l'argumentation, à différents points de vue. L'analyse de cette situation nous renseigne également sur les indicateurs de contrôle chez certains élèves. On note un retour au contexte pour plusieurs élèves (Sam, Carmen, François, Édith). Différentes interprétations possibles sont mises en évidence, discutées, validées en classe.

IV. CONCLUSION

La situation des abeilles est un bon support pour travailler les processus de contrôle. Cette situation permet d'éclairer, d'exemplifier les composantes du contrôle décrites dans la partie II. L'engagement réfléchi est une des composantes travaillées dans cette situation, il s'exprime ici par une appropriation du problème en donnant du sens en contexte, et se manifeste dans le choix d'une interprétation du problème parmi d'autres interprétations possibles. La question de la validation est centrale dans cette situation et est favorisée par la place que l'enseignante l'y accorde. L'enseignante part des productions des élèves, favorise un débat en classe, un espace d'échanges des différents points de vue, une validation de la part des élèves. Elle organise la classe de telle façon à prendre en compte l'articulation et la clarification de points de vue multiples, elle laisse ainsi la place à l'argumentation, à différents points de vue en encourageant la discussion. La validation des stratégies se fait par les élèves, l'enseignante présentant en premier les stratégies qui amènent à un questionnement pour aboutir, graduellement, à l'introduction d'un nouveau contenu qui s'appuie sur la production d'un élève. Elle cherche ainsi à amener une réflexion en classe sur le sens de la réponse, sur l'efficacité de la stratégie. On est ici proches de la phase de bilan présentée par Margolinas (1992) qui permet la formulation publique des méthodes de résolution par les élèves qui doivent formuler leurs stratégies. Les relances de l'enseignante participent à la gestion de cette phase. La chercheure précise qu'il est important que l'enseignant arrive à anticiper les différentes réactions des élèves face au milieu pour qu'il puisse intervenir en conséquence. Dans le cas de la situation des abeilles, on sent que l'enseignante est désarçonnée par la distinction autour des abeilles contaminées et des abeilles mortes et ne sait comment intervenir aux différents points amenés par les élèves. La discussion n'aboutit alors concrètement à aucun résultat.

Nous avons vu dans cet exemple d'une phase de bilan. Lors de l'expérimentation plus large (Saboya 2010), nous avons pu remarquer à quelques reprises des phases d'évaluation telles que définies par Margolinas (1992 ; 1993). Dans une analyse autour de l'exploitation d'exercices en classe portant sur les puissances d'un nombre, l'enseignante est dans une phase d'évaluation, certaines explications sur ce qui a été fait par les élèves ou des réponses à certaines tâches viennent de l'enseignante et ne sont pas renvoyées aux élèves. De plus, certaines explications prennent appui sur des stratégies développées dans les exercices précédents (idée du réinvestissement) mais sont menées par l'enseignante du début à la fin.

Cette recherche éclaire ainsi une didactique d'intervention autour d'une activité de contrôle. L'expérimentation a pris place en algèbre autour plus précisément des puissances, toutefois les stratégies d'enseignement développées susceptibles de développer une activité de contrôle peuvent être réinvesties, exemplifiées dans l'étude d'autres contenus mathématiques.

REFERENCES

Artigue M. (1993) Connaissances et métaconnaissances – une perspective didactique. In Baron M., Robert A. (Eds.) (pp. 29-54) *Métaconnaissances en IA, en EIAO et en didactique des mathématiques.* Cahier de DIDIREM, IREM, Paris.

Artigue M. (2002) Le calcul. In Kahane J.-P. (Ed.) (pp. 171-262) *L'enseignement des sciences mathématiques*. Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques. Paris : Éditions Odile Jacob.

Balacheff N. (1987) Processus de preuve et de validation. *Educational Studies in Matematics* 18, 147-176.

Bednarz N., Dufour-Janvier B. (1992) L'enseignement de l'algèbre au secondaire : une caractérisation du scénario actuel et des problèmes qu'il pose aux élèves. In *Actes du colloque international du 20 au 22 mai 1992 : Didactique des mathématiques, formation normale des enseignants.* École normale supérieure Marrakech.

Bednarz N., Saboya M. (2007) Questions didactiques soulevées par l'enseignement de l'algèbre auprès d'une élève en difficulté au secondaire : une étude de cas. In *Actes de l'ACFAS 2005*. Montréal (Québec).

Breton G., Morand J.-C. (1995) *Carrousel mathématique*, troisième secondaire, tome1.

Brousseau G. (1986) Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherche en Didactique des Mathématiques* 7(2), 33-115.

Butlen D., Lagrange M., Perrin M.-J. (1989) *Une expérience d'enseignement des mathématiques à des élèves de 6eme en difficulté.* Cahier de DIDIREM n°5. IREM de Paris7.

Butlen D., Pezard, M. (1990-91). Calcul mental, calcul rapide. *Grand N* 47, 35-59.

Chalancon F., Coppé S., Pascal N. (2002). Les vérifications dans les équations, inéquations et en calcul littéral. *Petit x* 58, 23-41.

Cipra B. (1985) *Erreurs… et comment les trouver avant le prof… ».* Paris : InterEditions.

Coppé S. (1993) *Processus de vérification en mathématiques chez les élèves de première scientifique en situation de devoir surveillé.* Thèse de l'université de Lyon 2.

Cortés A., Kavafian N. (1998-1999).Les principes qui guident la pensée dans la résolution des équations. *Petit x* 51, 47-73.

Delorme J. (1985) *Étude de la compréhension de problèmes additifs chez des enfants de difficulté en mathématiques.* Mémoire de DEA- Université de Paris VIII.

Dib M. (2000-01) Validation dans l'environnement papier crayon. *Grand N* 68, 41-60.

Hadamard J. (1945/1975) *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique.* Paris : Gauthier-Villars.

Kargiotakis G. (1996) *Contribution à l'étude de processus de contrôle en environnement informatique : le cas des associations droites-équations*. Thèse de l'université Paris VII - Denis Diderot.

Kouki R. (2007) L'articulation syntaxes/sémantique au Coeur des analyses didactiques au niveau de l'algèbre élémentaire ? In *Actes du colloque international EMF 2006*. Sherbrooke (Québec).

Krutetskii V. A. (1976) The psychology of mathematical abilities in school children. In Kilpatrick J., Wirszup I. (Eds.) *Chicago and London.* The University of Chicago Press.

Lee L., Wheeler D. (1989) The arithmetic connection. *Educational Studies in Mathematic* 20, 41-54.

Lenfant A. (2002) *De la position d'étudiant à la position d'enseignant : l'évolution du rapport à l'algèbre de professeurs stagiaires.* Thèse de l'université Paris 7.

Margolinas C. (19899 *Le point de vue de la validation : essai de synthèse et d'analyse en didactique des mathématiques.* Thèse de l'université Joseph Fourier, Grenoble 1.

Margolinas C. (1992) Éléments pour l'analyse du rôle du maître : les phases de conclusion. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 12(1), 113-158.

Margolinas C. (1993) *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques.* Grenoble : la Pensée Sauvage.

M.E.L.S (Ministère de l'Éducation des loisirs et des sports) Gouvernement du Québec (2003) *Programme de formation de l'école québécoise : Enseignement secondaire, premier cycle.* Québec : Ministère de l'Éducation.

M.E.L.S (Ministère de l'Éducation des loisirs et des sports) Gouvernement du Québec (2006) *Programme de formation de l'école québécoise : Enseignement secondaire, deuxième cycle.*. Québec : Ministère de l'Éducation.

Nimier J. (1989) *Entretiens avec des mathématiciens (L'heuristique mathématique)*. IREM de Lyon.

Perkins D.N., et Simmons R. (1988) Patterns of Misunderstanding : An Integrative Model for Science, Math, and Programming. *Review of Educational Research* 58 (3), 303-326.

Piaget J. (1974) Recherches sur la contradiction. Avec la collaboration de A. Blanchet, G. Cellerier, C. Dami. M. Gainotti-Amann, Ch. Giliéron, A. Henriques-Christophides, M. Labarthe, J. De Lannoy, R. Maier, D. Maurice, J. Montangero, O. Mosimann, C. Othenin-Girard, D. Uzan, Th. Vergopoulo. *Les différentes formes de la contradiction. Volume 2*. Paris : Presses Universitaires de France.

Polya G. (1945/1965) *Comment poser et résoudre un problème.* Paris : Éditions Jacques Gabay.

Richard J.-F. (1998) *Les activités mentales : Comprendre, raisonner, trouver des solutions.* Université de Paris VII.

Saboya M. (2010) *Élaboration et analyse d'une intervention didactique co-construite entre chercheur et enseignant, visant le développement d'un contrôle sur l'activité mathématique chez les élèves du secondaire*. Thèse de doctorat inédite. Université du Québec à Montréal.

Schmidt S. (1994) *Passage de l'arithmétique à l'algèbre et inversement de l'algèbre à l'arithmétique, chez les futurs enseignants dans un contexte de résolution de problèmes.* Thèse de l'université du Québec à Montréal.

Schoenfeld A. (1985) *Mathematical problem solving*. Dordrecht: Kluwer Academic Press.

Smith J. P, Hungwe K. (1998) Conjecture and verification in research and teaching: conversations with young mathematicians. *For the learning of mathematics* 19(3), 40-46.

Vivier J. (1988) La tâche de l'élève et l'auto-contrôle. *Revue française de pédagogie* 82, 61-64.

LA DEMARCHE D'INVESTIGATION DANS LA CLASSE DE MATHEMATIQUES, FONDEMENTS ET METHODES

Compte-rendu du Groupe de Travail n°10 – EMF2012

Yves MATHERON[*] – Francesca MORSELLI[**]
Sophie RENE DE COTRET[***] – Maggy SCHNEIDER[****]

I. INTRODUCTION

La première décennie des années 2000 a vu arriver, dans les systèmes éducatifs d'un certain nombre de pays, de nouvelles recommandations pour l'enseignement des disciplines scientifiques et de la technologie. Elles préconisent de favoriser l'engagement des élèves dans une « démarche d'investigation » pour l'étude de sujets aux programmes de ces disciplines. Face à l'arrivée de cette forme nouvelle d'enseignement au sein de plusieurs systèmes éducatifs, la tâche assignée au GT10 est en grande partie exploratoire dans la mesure où un certain nombre de questions relatives à la démarche d'investigation méritent d'être tout d'abord instruites. Dans ce sens, il est nécessaire de s'enquérir des origines, des raisons, des modalités et des finalités assignées à la démarche d'investigation. Ainsi, trois axes de questionnement ont été définis et travaillés dans notre groupe pendant le colloque EMF2012 :

Axe 1) Origines et fondements de la méthode d'investigation

Axe 2) Mise en œuvre de la démarche d'investigation

Axe 3) Aspect transversal de la démarche d'investigation

Ce texte rend compte du travail effectué dans le groupe. Il décrit les grandes lignes des débats – et non pas des communications, lesquelles sont toutes disponibles dans les actes – selon la séquence dans laquelle ils se sont déroulés, à savoir : la mise en œuvre de la démarche d'investigation suivie de son aspect transversal et, enfin, les origines et fondements de la méthode d'investigation. Cette description sera précédée de quelques statistiques sur les participants au groupe de travail 10 et d'une description du déroulement des séances.

1. *Quelques statistiques*

Le groupe de travail comptait trente-sept participants venant d'Europe, d'Afrique et des Amériques. On retrouvait vingt participants de France, sept de Suisse, cinq de Belgique et un de chacun des pays suivants : Italie, Algérie, Mali, Chili, Québec. Seize contributions sous forme d'articles ont été retenues.

2. *Organisation des séances*

Compte tenu du nombre très important des communications envoyées au GT10 et acceptées, il a fallu adopter une forme originale pour leur exposé par leurs rédacteurs afin de laisser de la place au débat. Selon le mode de fonctionnement de EMF, il était attendu de chacun des participants au GT10 qu'il prenne auparavant connaissance de l'ensemble des 16 textes des

[*] IFE-ENS de Lyon – France – yves.matheron@ens-lyon.fr
[**] Université de Gênes – Italie – morselli@dima.unige.it
[***] Université de Montréal – Canada – sophie.rene.de.cotret@umontreal.ca
[****] Université de Liège – Belgique – mschneider@ulg.ac.be

© Matheron Y., Morselli F., René de Cotret S., Schneider M. (2012) La démarche d'investigation dans la classe de mathématiques, fondements et méthodes – *Compte-rendu du Groupe de Travail n°10.* In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT10, pp. 1259–1281). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

communications[1]. Ceci a permis aux communicants de ne pas consacrer le temps de leur intervention à l'exposé du contenu de leur communication.

De notre côté, nous avions auparavant adressé à chacun des intervenants un ensemble de questions issues du texte de leur communication (voir annexe à la fin de ce document). Les dix minutes consacrées à l'intervention de chacun des communicants ont ainsi été prioritairement réservées à leur réponse.

Chaque séance a commencé avec les interventions successives d'auteurs (quatre ou cinq contributions). Après ces interventions, la discussion a pu s'engager au sein du groupe. Ce schéma a permis de prolonger la réflexion autour de chacun des textes retenus tout en laissant une large place au débat dans le groupe.

II. MISE EN ŒUVRE DE LA DEMARCHE D'INVESTIGATION

1. Présentation de l'axe 2 « Mise en œuvre de la démarche d'investigation »

Afin d'enclencher une dynamique de débat et de réflexion au sein du groupe de travail, nous avons fait le choix d'ouvrir la session par une présentation de propositions effectives, mises en œuvre dans les classes, et qui se revendiquent d'une démarche d'investigation en mathématiques. Les participants ont ainsi pu disposer, dès l'ouverture des sessions de travail, des supports de réalisations concrètes sur lesquels appuyer leurs propos. Ceci afin de pouvoir débattre, dans un second temps du groupe de travail, en se situant à un niveau de généralité plus grand tout en le confrontant aux réalisations effectives.

En effet, le terme « démarche d'investigation », traduction française de *Inquiry based science education*, nous a semblé recouvrir des réalités fort différentes ; tout au moins en ce qui concerne les mises en œuvre qui s'en revendiquent. Selon les pays, les réalisations effectives et l'interprétation que les personnes ou les institutions font de ce que l'on peut entendre par « démarche d'enquête » impliquant des élèves pour aboutir à une production de mathématiques, méritaient donc en premier lieu d'être interrogées. Si le sens commun du terme « investigation » est de prime abord très large – le dictionnaire de l'académie française en donne la définition suivante : « recherche minutieuse et suivie » – il nous paraissait donc nécessaire de disposer dès l'ouverture du groupe de travail d'exemples de démarche d'investigation qui préserveraient réellement la dimension « recherche » par les élèves.

Les réalisations que nous souhaitions travailler devaient donc se situer au-delà de la pauvreté didactique et épistémologique de la majorité des propositions d'activités que l'on trouve dans les manuels scolaires ; elles se revendiquent pourtant d'une recherche par les élèves, simplement parce qu'elles se déclinent en questions. On sait, depuis les recherches en didactique, que celles-ci ne sont guère plus que des chemins étroitement balisés vers la solution attendue. C'est la raison pour laquelle cette forme d'enseignement a pris le nom « d'ostension déguisée » : on montre les réponses attendues aux élèves tout en leur faisant croire qu'ils les ont par eux-mêmes construites par leur recherche.

Nous avons donc choisi d'ouvrir le GT10 à partir de la présentation et la discussion de réalisations concrètes afin de commencer à observer et analyser. C'est ainsi que nous avons débuté cette première session de travail par le second des trois axes définissant le cadre général de la problématique du groupe, tels qu'ils figuraient dans sa présentation : « mise en œuvre de la démarche d'investigation ». Partant des réalisations exposées, il s'agissait

[1] Au départ, 17 textes avaient été acceptés, toutefois, Grenier n'ayant pu participer au groupe de travail, sa communication n'a pas été présentée, sa contribution écrite est toutefois disponible dans ces actes.

d'interroger les contraintes pratiques, matérielles et théoriques inhérentes au travail d'investigation en classe. Qui plus est, certaines injonctions institutionelles (par exemple la partie commune aux programmes français du Collège en mathématiques, sciences expérimentales et technologie) insistent sur la mise en œuvre en classe d'une démarche d'investigation… du « réel ». Ce dernier terme, tel qu'utilisé dans ces programmes sans autre précaution, ne peut être accepté comme tel. On le sait, il engage vers de nombreux et rigoureux débats dans le domaine des sciences de la nature, ou encore en épistémologie et philosophie, que l'on ne peut ignorer sans verser dans l'opinion et l'idéologie, c'est-à-dire en allant à l'inverse de la démarche scientifique que l'on souhaiterait promouvoir auprès d'élèves.

2. *Les communications de la première journée consacrée à l'axe 2*

La première des deux journées consacrées à débattre des propositions réunies sous le titre de l'axe 2 « Mise en œuvre de la démarche d'investigation » a donné lieu aux présentations de cinq communications. :

- Graces Morales Ibarra et Laetitia Bueno-Ravel – *Démarche d'investigation et modélisation en mathématiques en maternelle : l'exemple du jeu des trésors*.
- La communication de Serge Quilio, Mireille Morellato et Anne Crumière – *Obstacles à l'usage du nombre et à l'enquête sur ses propriétés dans l'implantation d'une ingénierie sur la soustraction* était ensuite présentée par Serge Quilio.
- Sylvie Coppé – *Démarche d'investigation et aspects temporels des processus d'apprentissage/enseignement*.
- Pierre-François Burgermesiter – *La posture du héron crabier*.
- Florence Ligozat – *La démarche d'investigation dans les moyens d'enseignement suisse-romands pour les mathématiques ? Modéliser les conditions didactiques de l'enquête* concluait cette première plage.

3. *Le débat autour des communications de la première journée de l'axe 2*

Le débat est inauguré à la suite de l'intervention de Florence Ligozat à propos de la définition fonctionnelle de ce que l'on entend par « mener une enquête ». Selon Dewey, l'enquête commence lorsque notre cours d'action est interrompu et que les techniques dont on dispose ne nous permettent pas d'atteindre le but fixé. Le sujet est alors amené à gérer l'incertitude et à mettre ses connaissances à l'épreuve. Il doit alors fabriquer de nouvelles significations et relations et les éprouver. Or il existe divers modes d'évaluation concernant le processus et le résultat de cette mise à l'épreuve. Ils se situent à différents niveaux : niveau épistémique, propre au savoir, et niveau relevant des normes sociales. A l'école, le sujet est élève et le but est fixé collectivement. L'expérience d'une forme d'incertitude est définie par un rapport institutionnel. Le professeur reconfigure les éléments en fonction de son projet d'enseignement réglé par un texte du savoir qui peut prendre diverses formes : par exemple celle de fiches comme c'est le cas dans la démarche d'investigation montrée par F. Ligozat. La forme « démarche d'investigation (DI) » pose des contraintes nouvelles aux enseignants, qui sont adossées à des critères d'acceptabilité mathématique et à des conditions sociales. Si l'on raisonne de manière adidactique, les formes de rationalisation mathématique sont déconnectées de leur pratique sociale d'origine. Les critères n'étant pas visibles pour le professeur, les élèves ne peuvent les faire émerger seuls. Si l'on ne souhaite pas que, dans le cadre d'une DI, les élèves en restent seulement à « faire », l'horizon d'une démarche d'investigation est constitué de pratiques de modélisation dans lesquelles il est nécessaire de les engager.

Le débat peut alors s'engager. Il est, dans ce qui suit, regroupé autour des thématiques générales ayant émergé en son sein. L'ordre ne correspond donc pas exactement à la chronologie du débat.

Les conditions sur la situation qui permettent de générer une démarche d'investigation

Une première question est posée à P.-F. Burgermeister. La démarche d'investigation qu'il avait exposée consistait à faire construire par les élèves, à partir de considérations sur l'homogénéité, la formule de Héron qui donne l'aire du triangle en fonction de la longueur de ses côtés : $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ où p est le demi-périmètre et a, b et c les longueurs de côtés. Est-il imaginable que les élèves puissent trouver des formules différentes qui respectent l'ensemble des contraintes mais qui soient fausses ? La réponse est affirmative, par exemple avec une racine quatrième. Mais en se ramenant à des cas particuliers, on peut alors montrer que la formule est fausse. En fait, la bonne formule est toujours la plus courte ! S. Quilio fait alors remarquer que la vertu économique de la connaissance intervient : quand les pratiques ont été confrontées, la connaissance doit apparaître comme la plus économique possible. Dans la DI, il y a une dimension relative à l'investigation sur l'ensemble des moyens. Alors ensuite peut commencer le travail de l'enseignant afin de mettre en évidence cette économie, relativement à l'environnement dans lequel les solutions ont été éprouvées.

F. Wozniak établit alors un lien entre les contributions de P.-F. Burgermeister et de F. Ligozat. Dans les deux cas, n'est-on pas à travailler sur des critères d'acceptabilité ? C'est-à-dire sur les conditions pour trouver un accord sur la formule alors que sa vérité n'a pas été établie. Se pose aussi une question sur le rôle du professeur : il montre le bon chemin sans autoriser à aller dans les impasses, mais est-ce que les élèves tombent par hasard sur les impasses ou est-ce qu'elles sont provoquées par la situation et / ou voulues par le professeur ? Dans une DI, il s'agit donc de construire un espace des possibles qui permette d'anticiper certaines des impasses et de définir des critères d'acceptabilité.

F. Ligozat intervient sur la question des critères d'acceptabilité. Dans l'exemple qu'elle a montré, il s'agit d'établir l'horizon des recherches en établissant des parallèles ; ce qui n'est pas habituel pour les enseignants du primaire, et il faut que ceci soit indiqué au professeur. Par ailleurs, il faut aussi tenir compte de la contingence s'exprimant au niveau individuel, qui aboutit à des productions distinctes d'un élève à l'autre, et de la façon dont l'enseignant s'en saisit afin de faire jouer une dialectique individu / collectif. Ce qui aboutit à la question suivante : la rencontre de l'incertitude doit-elle être organisée par la situation ?

Un certain nombre des participants interrogent de nouveau la situation proposée par P.F. Burgermeister. Pour M. Gandit, il s'agit typiquement d'un cas où la démarche de preuve est très différente de la démarche d'investigation. Pour C. Houdement, il faut tout de même s'assurer que les contraintes mathématiques et de la situation dans laquelle on engage les élèves ne sont pas contradictoires ; c'est tout le problème de l'heuristique. Pour S. Coppé, l'établissement d'une conjecture est une démarche assez conforme à ce qu'on fait dans une démarche de recherche mathématique. Enfin F. Ligozat et F. Wozniak concluent que ce que P.F. Burgermeister montre de façon transparente est la définition des critères d'acceptabilité et celle de la construction de conjecture.

Le rôle du professeur

Pour Y. Matheron, ces cinq interventions montrent le rôle déterminant du professeur : plus particulièrement dans la contribution de S. Coppé, l'investigation est dirigée, les activités sont « liées » par leur concepteur, les sollicitations des élèves sont fréquentes. Comment faire pour que le professeur soit assez en retrait mais que les élèves mènent l'enquête dans la bonne direction, et qu'est-ce qui lie les activités, surtout du point de vue des élèves, même si cela est clair pour le concepteur ou l'enseignant ? S. Coppé répond que par comparaison avec, d'une part, une investigation « débridée », où le professeur n'intervient pas et, d'autre part, les situations d'enseignement où les élèves ne sont pas confrontés à un problème, on voit dans l'exemple qu'elle a montré une forte régulation au niveau des consignes : l'évolution des consignes permet de guider les élèves. La régulation passe aussi par les institutionnalisations gérées collectivement : elles enrichissent le milieu et les techniques. Le contexte sémantique des activités avec des tâches et des techniques qui évoluent constituent l'élément liant les activités les unes aux autres.

Pour A. Mercier, la démonstration de P.F. Burgermeister fournit des éléments de réponse. La condition est « ne pas laisser les élèves aller dans une impasse ». Pour cela, le professeur doit savoir quel est le bon chemin, il doit fermer les impasses sans montrer le bon chemin, il doit les fermer au bon moment. Cela demande une connaissance des possibles tout à fait extraordinaire et, de son point de vue, c'est la raison pour laquelle faire vivre une démarche d'investigation dans une classe lui paraît quasiment infaisable. C. Houdement fait remarquer que « fermer/ouvrir » les situations est cependant un travail ordinaire d'enseignant. A. Mercier répond que cela est vrai, mais que les contraintes d'un enseignement ordinaire ne sont pas les mêmes que celles nécessitées par la conduite d'une DI. Ce point de vue est exemplifié par S. Coppé. Par exemple, lorsque les élèves viennent au tableau dire comment ils ont procédé, le professeur peut agir et décider de façons très différentes : le pilotage se fait en fonction de ses objectifs. Ce sont des objectifs mathématiques, relatifs à la situation. Or, dans le cadre d'une DI, il existe toujours un moment où les élèves ont à établir une conjecture, comme cela se pratique dans toute recherche, et notamment dans la recherche scientifique. M. Gandit s'interroge : est-ce que le fait que le professeur soit obligé d'intervenir sur la construction du savoir n'est pas dû à la faiblesse de la construction du milieu dévolu aux élèves ? S. Coppé pense que non, car la question est celle de devoir passer à un niveau qui se situe au-dessus de ce que l'on attendait dans les ingénieries telles qu'on a pu les construire avec la TSD ; c'est la raison pour laquelle le professeur doit jouer un rôle important de direction de l'enquête.

La formation des enseignants et les ressources mises à leur disposition, la DI et les ingénieries didactiques en mathématiques

La question des critères de recevabilité des ressources se pose de façon cruciale pour les professeurs de l'école primaire qui sont polyvalents et qui, pour la majorité d'entre eux, n'ont pas suivi une formation mathématique supérieure. Il y a donc un enjeu important relatif à la présentation des situations destinées aux professeurs. D'autant, fait remarquer S. Quilio, que dans un premier temps la DI fait souvent porter le questionnement sur des domaines plus larges que les seules mathématiques ; celles-ci modélisant les situations. P.F. Burgemeister explique que le rôle du professeur est complexe et délicat… C'est ce que montre la situation qu'il a proposée et qui est très ouverte : il faut en effet que les élèves identifient les contraintes géométriques puis algébrisent le problème. Le choix face auquel se trouve le professeur est le suivant : ou bien il part des propositions qui ont été expérimentées et alors il y a une forte probabilité pour qu'il parvienne à mener à bien la DI, ou bien il essaie des propositions nouvelles qu'il aura bâties lui-même et risque alors de devoir consacrer un trop grand nombre de séances pour une DI.

M. Artigue fait remarquer que les situations qui proviennent d'ingénieries didactiques ont été construites dans le cadre d'une toute autre logique, et leur déroulement a été prescrit relativement à d'autres raisons. Si on les ressert autrement, dans une autre culture, alors ce recyclage fait agir certaines dimensions des ingénieries et n'en fait pas agir d'autres. Il faut donc s'interroger sur la façon d'arriver à concevoir des propositions de DI à partir de l'état de nos ressources en matière d'ingénieries didactiques ; d'où la nécessité de poser la question du rôle du professeur. A. Mercier se dit d'accord avec M. Artigue. Il précise qu'existe un conflit entre un courant américain/anglo-saxon et un courant européen. Les ingénieries didactiques et les substrats théoriques sur lesquels elles sont bâties sont fondés sur une position anti-empiriste, sans pour autant être tout à fait constructiviste. La question implicite dont nous devons rendre compte est la suivante : qu'est-ce que la DI permet d'enseigner et qu'est-ce qui s'apprend en DI ? S. René de Cotret précise alors que pour aborder la question, il faut distinguer entre impasse et invalidation. L'invalidation est un travail sur le savoir, elle est constructive. L'impasse est un chemin à éviter, c'est un « endroit » où l'on n'apprend pas.

4. *Les communications de la deuxième journée consacrée à l'axe 2*

Dans la *deuxième séance*, la discussion a porté encore sur l'Axe 2 "Mise en œuvre de la démarche d'investigation". Les questions envisagées a priori étaient les suivantes: *Quelles sont les modalités et les contraintes pratiques, matérielles et théoriques de la mise en œuvre de la DI ?*

Les contributions utilisées pour promouvoir le débat sont les suivantes :

- Pierre Arnoux et Lionel Vaux – *Recherche en mathématiques pour les élèves du secondaire: l'exemple des stages HIPPOCAMPE.*
- Isabelle Dubois – *Démarche d'investigation en Mathématiques: l'exemple des ateliers* MATH.en.JEANS.
- Valérie Henry et Pauline Lambrecht – *Apprentissage de la proportionnalité par la confrontation à la non-proportionnalité via des manipulations.*
- Benoît Ray, Saïd Azziz, Geneviève Couderc, Viviane Durand-Guerrier, Henri Saumade, Mireille Sauter, Sébastien Virduci et Sonia Yvain – *Recherche collaborative et démarche d'investigation : des mathématiques pour appréhender le réel.*

Les contributions montrent des exemples de DI, mises en place à travers des dispositifs très différents entre eux : stages hors de la classe ou activités en classe, activités animées par les enseignants ou par des chercheurs professionnels, savoirs en jeu qui sont dans les programmes ou hors des programmes scolaires. L'analyse et la comparaison des dispositifs ont donné lieu à un riche débat.

5. *Le débat autour des communications de la deuxième journée de l'axe 2*

Le premier point de débat porte sur les *rôles respectifs des enseignants et*, si présents, *des chercheurs.* Dans les stages Hippocampe, par exemple, c'est le chercheur en mathématiques qui guide les élèves dans l'investigation. Dans ce cas-là, on peut aussi affirmer que le stage est une occasion de formation pour l'enseignant.

Liée à cette question nous trouvons aussi la question de la *formation des enseignants à la DI :* traduire les ingénieries de DI dans des textes est quasi-impossible, parce qu'il est très difficile de faire en sorte que les enseignants parviennent au niveau de réflexion qui a permis d'aboutir à la conception de ces ingénieries, étant donné l'investissement qu'elle a représenté.

Une autre question débattue est celle de *l'efficacité des DI*, et, en relation, la question de l'*évaluation*. Les participants ont noté que, normalement, quand l'enseignement se situe dans une sorte de progression des contenus à apprendre, l'évaluation est « automatique » (Mercier) : ce qui est enseigné est requis et réinvesti par la suite. Dans les DI qu'on a présentées, au contraire, il n'y a pas de suite évidente, on ne sait pas comment va être utilisé ce qui a été appris (recherches, résultats, notations, concepts). A noter que, en cela, c'est très proche de l'activité du chercheur en mathématiques.

Les participants ont aussi noté que, par exemple, dans les stages Hippocampe, les élèves sont amenés à se poser des questions, définir des concepts, démontrer : à bien voir, ce sont des méta-savoirs, difficiles à évaluer.

D'une manière plus générale, la question de l'évaluation amène à s'interroger sur la question cruciale des concepts en jeu dans les DI : *quel apprentissage est favorisé* ? On pourrait dire que dans les DI les élèves sont introduits à des mathématiques « différentes », hors de l'ordinaire de la classe. Mais s'agit-il de montrer l'extraordinaire au lieu de l'ordinaire… ou bien de faire intervenir de l'extraordinaire dans l'ordinaire ? L'apprentissage favorisé par les DI doit-il viser des contenus ordinaires d'une façon extraordinaire ou bien viser d'autres contenus ? On pourrait alors se questionner sur les mathématiques travaillées avec ces savoirs ordinaires/extraordinaires. Les acquis des élèves relèvent d'une question de contrat qu'il serait dommage de limiter à l'extraordinaire. D'ailleurs, plusieurs interventions ont questionné l'importance de l'extraordinaire : est-on obligé d'avoir des phénomènes extraordinaires pour intéresser les élèves ? Pourquoi faire vivre certaines valeurs demande-t-il de sortir des programmes ? Et si on multiplie trop les phénomènes extraordinaires, quels sont les risques face aux séances ordinaires en classe ? Il serait intéressant que l'école favorise ces dispositifs différents, mais ce n'est pas forcément possible avec tous les élèves, ni au sein des salles de classe.

Une autre question débattue porte sur les *modes de travail* des élèves dans les DI : il y a une tension entre le cadrage (par le professeur ou le chercheur) et la liberté de recherche : quels types de cadrages pour quels types de savoir ?

Toujours au niveau de la mise en œuvre du dispositif, les participants ont soulevé la question de l'*intelligibilité* (Schneider): quels sont les facteurs qui font bien marcher (ou non) une DI ? Il est possible que d'infimes perturbations du dispositif le fragilisent grandement. Pour répondre à ces questions, une analyse mettant à profit les outils de la recherche en didactique des mathématiques est souhaitable.

III. ASPECT TRANSVERSAL DE LA DEMARCHE D'INVESTIGATION

1. Présentation de l'axe 3 « Aspect transversal de la démarche d'investigation »

La *troisième séance* a été consacrée au Thème 3 « Aspect transversal de la démarche d'investigation ». Les questions qui ont guidé le débat sont les suivantes: *En quoi et pourquoi le concept de DI se décline-t-il différemment, ou non, en mathématiques et dans d'autres disciplines dites scientifiques (physique, chimie, biologie, géologie, technologie, etc.) ? Comment se distingue-t-il de celui de résolution de problème ? Comment les questions de validations sont-elles réglées selon les disciplines en jeu ? Pourrait-on mettre en relation la démarche d'investigation avec l'approche par compétences, si oui comment, si non en quoi se distinguent-elles ?*

Le débat a été favorisé par les interventions des auteurs suivants :

- Catherine Houdement – *Démarche expérimentale en resolution de problèmes.*

- Michèle Gandit, Eric Triquet et Jean-Claude Guillaud – *Des représentations sur les démarches d'investigation aux pratiques de classe : le cas d'enseignants debutants en mathématiques et en sciences expérimentales.*
- Magali Hersant et Denise Orange-Ravachol – *La démarche d'investigation, les mathématiques et les SVT : des problèmes de démarcation aux raisons d'une union*.

Les contributions abordent des questions générales sur les DI, en s'appuyant surtout sur la comparaison entre DI en mathématiques et dans d'autres disciplines.

2. Le débat autour des communications de l'axe 3

Les réactions à ces contributions ont permis d'aborder différents points. Tout d'abord, les participants ont noté que la notion de DI est utilisée en mathématiques mais aussi dans d'autres *disciplines scientifiques*. Une question porte sur les autres disciplines (par exemple, l'histoire) : peut-on parler de DI en histoire (Gueudet) ? Qu'est-ce qui est différent en sciences et dans les autres disciplines ? A bien voir, l'enquête policière est aussi une forme d'investigation (Mercier). La médecine aussi utilise des formes de DI. La comparaison de la DI avec les enquêtes policières montre qu'il n'y a pas une méthode expérimentale mais plusieurs. Cela amène à réfléchir sur la surdétermination didactique de la DI : si on ne la questionne pas, on est tenté de mettre sous la DI tout ce qui peut faire évoluer les pratiques. Il y a alors le risque de perdre en spécificité et rendre le concept de DI un « fourre-tout » (Artigue). Au contraire, il faudrait travailler pour spécifier ce qu'est une DI.

A ce propos, il est important de définir le *milieu* à utiliser : le milieu diffère selon la discipline (Houdement). Le milieu mathématique est d'apparence réelle, mais contraint et déclencheur des savoirs visés. En physique, au contraire, il est impossible de contraindre suffisamment le milieu, étant donné la présence de beaucoup de « bruit ». En biologie, par exemple, pour s'intéresser à la classification des animaux à poils (classement phylogénique), il ne faut pas prendre des dauphins. Cela signifie qu'il faut également contraindre le milieu. En mathématiques, les situations sont plus facilement reproductibles.

La comparaison des DI dans les disciplines porte aussi à réfléchir sur les questions de la *validation et de l'institutionnalisation*. En sciences, la validation passe par le consensus social (Triquet). En mathématiques, la communauté des mathématiciens utilise des méthodes partagées mais non mises en texte. Pourquoi ne pas réfléchir sur des communautés de pratique qui relèvent du même paradigme (Houdement) ?

D'ailleurs, la question de l'institutionnalisation est toujours problématique, parce qu'il faut être sur deux plans à la fois : les savoirs notionnels et les démarches scientifiques (Hersant).

D'autres points de débat portent sur le rôle de l'enseignant et la formation des enseignants à la DI. Cela est lié au fait que l'intégration de la DI dans les pratiques ordinaires de classe est difficile (Matheron).

Un point problématique est le fait que les enseignants, stagiaires mais aussi experts, donnent toujours la priorité aux savoirs et non à la démarche (Triquet), de plus, il y a souvent une volonté exacerbée d'appliquer les canevas. Certains enseignants ont des difficultés et demandent une formation ; ils demandent que les savoirs transversaux soient institutionnalisés en texte (Gandit). Il faudrait institutionnaliser les savoirs épistémologiques (par exemple, qu'est-ce qu'une hypothèse ?) et les aborder dans la formation.

Comme le souligne Hersant, il faudrait aussi repérer des groupes de problèmes et faire une formation par rapport à ça.

IV. ORIGINES ET FONDEMENTS DE LA METHODE D'INVESTIGATION

1. Présentation de l'axe 1 « Origines et fondements de la méthode d'investigation »

Les deux séances suivantes ont été consacrées à l'*Axe 1) Origines et fondements de la méthode d'investigation*. Les questions associées à cet axe sont : *Où et comment le concept de « démarche d'investigation » apparaît-il ? Quelles sont les bases et quels sont les arrière-plans théoriques sur lesquels il se fonde (psychologie, épistémologie, didactique, etc.) ? Quelle place y occupe le traitement ou le questionnement du « réel » ?*

Quatre présentations ont alimenté la réflexion sur ces questions, il s'agit de :

- Marie-Line Gardes – *Démarche d'investigation en théorie des nombres : un exemple avec la conjecture d'Erdös-Straus.*
- Marie-Pierre Lebaud et Ghislaine Geudet – *Démarches d'investigation et collectifs dans la formation des enseignants.*
- Alain Mercier – *Suivre une démarche d'investigation pour enseigner les relatifs, au Collège : une proposition pragmatique et une expérimentation, en France.*
- Floriane Wozniak – *Modélisation et démarche d'investigation.*

Après ces présentations, les discussions se sont entamées. Les principaux éléments débattus concernent le type et la disponibilité des ressources documentaires en jeu dans la DI dans la perspective de la dialectique médias/milieux, la fonction de la démarche d'investigation et de l'évaluation et, enfin, la définition du réel et le rôle du modèle. Nous résumons brièvement les échanges sur ces sujets.

2. Le débat autour des communications de l'axe 1

À propos des ressources documentaires

La communication de Floriane Wozniak montrait l'importance de la dialectique des médias et des milieux, notamment pour changer de paradigme et aller vers la construction d'une réponse plutôt que vers un enseignement de la réponse. La mise en œuvre d'une telle dialectique a suscité plusieurs questions. Un participant se demande s'il existe, en mathématiques, des documents qui permettraient cette forme de recherche documentaire. Plus spécifiquement, et en lien avec la communication d'Alain Mercier, comment par exemple la question des entiers relatifs trouverait-elle des réponses dans les médias ? Ces derniers laissent-ils une place suffisante pour faire vivre la dialectique ? En sciences, comme le mentionne Florence Ligozat, il semble que ce soit parfois l'inverse qui pose problème, il y aurait presque trop de ressources documentaires ce qui donnerait lieu à un phénomène de saturation et découragerait les enseignants de traiter des questions pour lesquelles on peut trouver des réponses partout. Selon Maggy Schneider une enquête sur les nombres relatifs en classe est possible mais, pour ce sujet, c'est peut-être le professeur qui fera l'enquête. Se pose ainsi la question de la place du professeur dans la dialectique médias-milieux, doit-il s'effacer pour permettre la recherche d'une réponse dans le milieu ? Comment alors faire la part des choses entre toutes les réponses de la « nature » ? Pour F. Wozniak, il importe de construire une culture de l'interrogation des médias et de questionner la provenance et la destination du message. Il faut pouvoir repérer la rumeur.

À propos de la fonction de la démarche d'investigation

En France, on voit apparaître la démarche d'investigation principalement à travers les programmes officiels et celle-ci se décline en sept étapes : le choix d'une situation-problème par le professeur ; l'appropriation du problème par les élèves ; la formulation de conjectures, d'hypothèses explicatives, de protocoles possibles ; l'investigation ou la résolution conduite par les élèves ; l'échange argumenté autour des propositions élaborées ; l'acquisition et la structure des connaissances ; l'opérationnalisation des connaissances. Ces étapes soulèvent la question de la fonction de la démarche d'investigation, s'agit-il d'une méthode ou d'une pratique d'enseignement, donc située du côté de l'enseignant, ou plutôt d'une compétence à acquérir par les élèves ? Les avis sont partagés à cet égard. Plusieurs autres interrogations émergent à partir de cette description de la DI : En quoi cette démarche se distingue-t-elle de celle de résolution de problèmes, sont-elles liées ? L'argumentation serait-elle un des éléments qui distinguent la DI de la résolution de problème ?

L'étude de la fonction de la démarche d'investigation conduit à questionner l'évaluation. Qu'est-ce qui est évalué, de quelle manière et dans quel but ? Par exemple, l'évaluation du *Travail d'Initiative Personnelle Encadré* (TIPE), que l'on retrouve dans l'enseignement supérieur français en classe préparatoire, s'avère très difficile, voire étrange, à réaliser. Selon A. Mercier, par l'évaluation on doit rendre compte à la société qu'on fait ce qu'on est supposé faire. Il faut organiser ce qui est appris, assurer la non-contradiction dans l'investigation du savoir.

À propos de la définition du réel

Enfin, la question de la définition du réel est discutée, notamment à partir des éventuelles différences entre la DI en mathématiques et en sciences. Comme l'a proposé M-L. Gardes dans sa communication, le réel en mathématiques est fait des objets sensibles et aussi des objets mathématiques avec leurs propriétés rendues familières. Quel est alors, de ce point de vue, le rôle du modèle dans la DI ? Où intervient-il dans la description en sept étapes préconisée par les programmes français ? Pourrait-on dire qu'une démarche d'investigation en science explore le réel et, en mathématiques, explore un problème ?

Les échanges se sont aussi arrêtés sur le « réel » en jeu dans une DI. S'agit-il d'étudier des questions réelles, d'avoir une réelle pratique de chercheur, de modéliser le réel et, dans chacun des cas, comment caractériser ce réel ?

V. RECOMMANDATIONS POUR L'AVENIR

À l'issue de toutes ces séances de travail, on peut retenir que les traits majeurs du débat ont porté sur : la façon de mettre en œuvre la démarche d'investigation en classe ou en atelier ; le rôle imparti au professeur et aux intervenants (chercheurs, tuteur) de même que la responsabilité dévolue aux élèves selon le cas ; le type d'apprentissage résultant de cette démarche : savoirs du programme, compétences, démarche, et ce, en lien avec la validation qui peut avoir cours et l'institutionnalisation qui est effectuée. Aussi, d'un point de vue comparatiste, que nous apprend la comparaison entre la démarche d'investigation, l'enquête policière, l'enquête historique et l'enquête scientifique ? Enfin, la DI explore le « réel » mais quel « réel » ?

Un groupe de travail consacré à la démarche d'investigation est une nouveauté dans les colloques EMF, c'est dire qu'il y avait un grand travail de défrichage à réaliser que les dix heures de travail de groupe n'auront pas permis de compléter ! En fait, plus de questions que de réponses sont ressorties des discussions. Ainsi, dans la poursuite de sa réflexion, voici les principales questions qui ont été retenues pour l'éventuelle suite du groupe.

1. *Comment définir et caractériser la DI ?*

On retrouve diverses définitions de la DI selon les contextes d'où chacune émane. Qu'y a-t-il de neuf sous cette étiquette ? Il serait utile, d'une part, de faire le point sur ces définitions et, d'autre part, de montrer comment la DI se distingue (ou non) des concepts apparentés, à savoir : la résolution de problème, les tâches complexes, les compétences, la modélisation, la démarche scientifique. Par exemple, les critères d'acceptabilité de la connaissance qui doivent être définis dans la démarche d'investigation en mathématiques la distingueraient-ils de la résolution de problèmes ? Et comment se définiraient ces critères dans les autres sciences ou en histoire ?

2. *Quels sont les buts de la DI*

Les différentes définitions apparaissent liées au but attribué à la DI par les parties intéressées ; on peut ainsi se demander quel est le but de la DI du point de vue de la didactique, du point de vue du Ministère de l'Éducation, du point de vue social etc. Par exemple, la DI vise-t-elle une réelle position de recherche ou est-elle conçue comme une exigence institutionnelle pour donner plus de liberté et de responsabilité à l'élève. Toutes ces questions mériteraient d'être travaillées.

3. *Quelles écologies pour faire vivre la DI ?*

Parmi les exemples de DI qui ont été présentés, certains se déroulaient en classe avec le professeur ou avec un chercheur tandis que d'autres étaient réalisés dans un laboratoire ou en contexte hors scolaire. Il y avait donc des mises en œuvre dans des milieux ordinaires et extraordinaires. Dans chacune de ces configurations, quelles sont les pratiques et les contraintes ? À quelles possibilités donnent-elles lieu ? Quelles conditions épistémologiques faudrait-il respecter pour favoriser la réalisation d'une démarche d'investigation aussi efficace que possible au regard des objectifs visés ? Comment assurer une genèse artificielle qui ne soit pas épistémologiquement avariée ?

4. *Quels types de questions choisir (du quotidien, mathématisées) ?*

Le choix des questions travaillées dans la démarche d'investigation s'est révélé primordial. Quelles questions choisir ? S'agit-il de questions socialement vives ? Dans ce cas, on court le risque de recopiage culturel et donc d'esquiver les vrais apprentissages. De questions de tous les jours ? Avec de telles questions on oublie souvent la dévolution et on fait comme si la question était transparente. Des questions construites par le directeur de l'étude, comme en recherche où le sujet est amené par le directeur de thèse pour son potentiel ? Le choix des questions renvoie à celle de la validation : qu'est-ce qui préside à la validation de la réponse ? La pratique ou le savoir, sachant que les deux ne sont pas toujours compatibles ? Faut-il sortir de la contingence et travailler les mathématiques comme telles ? Devrait-on définir le curriculum en terme de questions relatives à des thèmes plutôt qu'à des savoirs ? En quoi ces questions porteraient-elles alors un caractère de généralité suffisant pour qu'elles méritent d'être étudiées ?

5. *Quelles conséquences (savoir, démarche) résultent de la DI ?*

Le recours à la démarche d'investigation dans le cadre de l'enseignement des mathématiques est encouragé, voire prescrit, dans plusieurs programmes d'étude. Que produit la mise en œuvre d'une démarche d'investigation ? Quels sont les enjeux de la DI ? Vise-t-elle à faire apprendre des savoirs notionnels spécifiques à programme scolaire ? Cherche-t-elle le développement d'une démarche par les élèves ? Y a-t-il des différences, à cet égard, entre la démarche d'investigation en mathématiques et en sciences ? Qu'est-ce qui sera institutionnalisé ? Quelle sera la nature de cette institutionnalisation, c'est-à-dire de quelle institution relèvera-t-elle ? Par exemple, à quelle institution peut-on rattacher la démarche d'investigation ?

6. Doit-on évaluer les élèves ? Par rapport à quoi ?

Dans la foulée de l'institutionnalisation se pose la question de l'évaluation. Doit-on évaluer les élèves dans le cours d'une démarche d'investigation ? Si oui, sur quoi portera cette évaluation ? Sur le produit obtenu à l'issue de la démarche, sur la démarche elle-même, sur l'apprentissage réalisé, sur l'enseignement prodigué ? Par ailleurs, quelle gestion faudrait-il mettre en œuvre dans un contexte d'évaluation pour assurer qu'on ne « tue » pas la DI ? Quelle liberté laisser aux élèves et quel encadrement leur fournir ? Par exemple, jusqu'où le professeur doit-il s'impliquer dans la recherche documentaire et la gestion de l'information prise sur internet ? C'est ici le partage des responsabilités qui entre en jeu.

7. Rôles, responsabilités des acteurs (prof, élèves, chercheurs)

Selon les définitions et les buts retenus, selon les milieux de mise en œuvre, selon les types de questions choisis, selon les produits escomptés, selon l'évaluation anticipée, quelles sont les responsabilités dévolues aux différents acteurs : professeur, élèves, chercheurs ? Quel rôle chacun joue-t-il dans l'enquête qui est menée, partant de la définition du problème jusqu'à la validation des réponses proposées et l'institutionnalisation du savoir ou de la démarche ? En quoi ces différents rôles et responsabilités viendront-ils colorer le déroulement et le résultat de la DI ?

Si le groupe devait être reconduit, il serait sans doute pertinent de cibler quelques thèmes parmi les précédents pour les travailler de manière plus approfondie.

CONTRIBUTIONS AU GT10

ARNOUX P., VAUX L. – Recherche en mathématiques pour les élèves du secondaire : l'exemple des stages Hippocampe.

BURGERMEISTER P.-F. – La posture du héron crabier.

COPPE S. – Démarche d’investigation et aspects temporels des processus d’apprentissage/enseignement.

DUBOIS I. – Démarche d’investigation en mathématiques : l’exemple des ateliers math.en.jeans.

GANDIT M., TRIQUET E., GUILLAUD J.-C. – Des représentations sur les démarches d’investigation aux pratiques de classe : le cas d’enseignants débutants en mathématiques et en sciences expérimentales.

GARDES M.-L. – Démarche d’investigation en théorie des nombres : un exemple avec la conjecture d’Erdös-Straus.

GRENIER D. – La démarche d'investigation dans les situations de recherche pour la classe (SIRC)[2].

HENRY V., LAMBRECHT P. – Apprentissage de la proportionnalité par la confrontation à la non-proportionnalité via des manipulations.

HERSANT M., ORANGE-RAVACHOL D. – La démarche d’investigation, les mathématiques et les SVT : des problèmes de démarcation aux raisons d’une union.

HOUDEMENT C. – Démarche expérimentale en résolution de problème.

LEBAUD M.-P., GUEUDET G. – Démarches d'investigation et collectifs dans la formation des enseignants.

LIGOZAT F. – La démarche d'investigation dans les moyens d'enseignement suisses romands pour les mathématiques ? Modéliser les conditions didactiques de l’enquête ?

MERCIER A. – Suivre une démarche d’investigation pour enseigner les relatifs, au Collège : une proposition pragmatique et une expérimentation, en France.

MORALES IBARRA G., BUENO-RAVEL L. – Démarche d'investigation et modélisation en mathématiques en maternelle : l'exemple du « Jeu des trésors ».

QUILIO S., MORELATO M., CRUMIERE M. – Obstacles à l'usage du nombre et à l'enquête sur ses propriétés dans l'implantation d'une ingénierie sur la soustraction.

RAY B., AZZIZ S., COUDERC G., DURAND-GUERRIER V., SAUMADE H., SAUTER M., VIRDUCI S., YVAIN S. – Recherche collaborative et démarche d’investigation : des mathématiques pour appréhender le réel.

WOZNIAK F. – Modélisation et démarche d’investigation.

[2] Rappelons que ce texte n’a pas pu être présentée lors des séances du GT10.

ANNEXE

QUESTIONS POSÉES AUX DIFFÉRENTS INTERVENANTS AVANT LE COLLOQUE

Chers auteurs,

Vous trouverez dans ce qui suit, d'une part, des questions générales à propos desquelles nous souhaitons que tous les auteurs s'interrogent et, d'autre part, des questions spécifiques posées à chacun des auteurs. Comme vous le constaterez, les contributions ont été regroupées en fonction des 3 axes de questions du GT 10, à savoir :

Axe 1) Origines et fondements de la méthode d'investigation

Où et comment le concept de « démarche d'investigation » apparaît-il ? Quelles sont les bases et quels sont les arrière-plans théoriques sur lesquels il se fonde (psychologie, épistémologie, didactique, etc.) ? Quelle place y occupe le traitement ou le questionnement du « réel » ?

Axe 2) Mise en œuvre de la démarche d'investigation

Dans quels pays ? Selon quelles modalités ? Dispose-t-on d'exemples de réalisations et si oui, que nous apprennent-ils ? Quelles sont les contraintes pratiques, matérielles et théoriques inhérentes au travail d'investigation du « réel » en classe ?

Axe 3) Aspect transversal de la démarche d'investigation

En quoi et pourquoi le concept se décline-t-il différemment, ou non, en mathématiques et dans d'autres disciplines dites scientifiques (physique, chimie, biologie, géologie, technologie, etc.) ? Comment se distingue-t-il de celui de résolution de problème ? Comment les questions de validations sont-elles réglées selon les disciplines en jeu ? Pourrait-on mettre en relation la démarche d'investigation avec l'approche par compétences, si oui comment, si non en quoi se distinguent-elles ?

Nous vous demandons de préparer une communication de 10 minutes dans laquelle vous exposerez brièvement les points majeurs de votre travail et tenterez de répondre aux questions spécifiques qui vont ont été posées tout en montrant comment votre travail contribue à répondre aux questions de l'axe auquel vous êtes associés. Nous avons pensé utile que les auteurs connaissent les questions envoyées aux autres auteurs de manière à ce que chacun puisse se situer dans l'ensemble du questionnement et afin de favoriser les liens entre les communications. Voici, par ailleurs, le déroulement prévu pour le travail du groupe :

Plage horaire	*Sous thème*	*Textes*
Vendredi 3 février 2012 14h30 – 16h30	Axe 2 : Mise en œuvre de la démarche d'investigation	Morales et Bueno-Ravel Quilio et al. Coppé Burgermeister Ligozat
Samedi 4 février 2012 9h – 10h30	Axe 2 : Mise en œuvre de la démarche d'investigation	Arnoux et Vaux Dubois Henry et Lambrecht Ray et al.
Dimanche 5 février 2012 9h – 10h30	Axe 3 : Aspect transversal de la démarche d'investigation	Houdement Gandit et al. Hersant et Orange
Lundi 6 février 2012 9h – 10h30 Lundi 6 février 2012 11h – 12h30	Axe 1 : Origines et fondements de la démarche d'investigation	Gardes Lebaud et Geudet Grenier Mercier Wozniak
Mardi 7 février 2012 8h30–10h30	Bilan	

Questions générales à propos de la démarche d'investigation adressées à tous les auteurs

- Le travail sur les boîtes flottantes de Chevallard constituerait-il un travail relevant d'une démarche d'investigation ?
- La démarche d'investigation est-elle une démarche systématique que l'on pourrait décrire et formaliser ? Ou s'agit-il plutôt du travail qui est fait lors d'une investigation ? Comme le travail d'un détective ou d'un enquêteur ?
- Quelles sont les spécificités d'une démarche d'investigation ? Y en a-t-il ?

Il semble que DI s'apparente à :

- Ingénierie didactique en TSD (action formulation validation institutionnalisation)
- Modélisation
- Dimension expérimentale

Si oui, alors pourquoi avoir développé un autre concept ? Sinon, apporte-t-elle quelque chose que les autres n'apportent pas ? Ou alors elle est superflue ?

Questions spécifiques posées aux auteurs des communications

AXE 1 – *Origines et fondements de la méthode d'investigation*

Où et comment le concept de « démarche d'investigation » apparaît-il ? Quelles sont les bases et quels sont les arrière-plans théoriques sur lesquels il se fonde (psychologie, épistémologie, didactique, etc.) ? Quelle place y occupe le traitement ou le questionnement du « réel » ?

Gardes M.-L. – *Démarche d'investigation en théorie des nombres : un exemple avec la conjecture d'Erdös-Straus*

Résumé – Après avoir définie la démarche d'investigation en mathématiques et plus précisément sa dimension expérimentale, nous montrerons en quoi la théorie des nombres offre un champ d'investigation intéressant pour l'enseignement. Nous exposerons ensuite une mise en œuvre d'une dimension expérimentale en classe sur une situation autour de la conjecture d'Erdös-Straus. Enfin, nous développerons deux spécificités de la dimension expérimentale en mathématiques : une articulation entre les objets sensibles et les objets mathématiques et une articulation entre l'apprentissage de compétences heuristiques et l'approfondissement de connaissances sur les objets mathématiques en jeu dans le problème.

- Comment se définit le réel en maths s'il diffère du réel en sciences ? Quelle est la spécificité de chacun ?
- Quelles distinctions peut-on faire entre expérimentation en sciences et expérimentation en maths ? Ou dimension expérimentale en sciences et en maths ?
- En quoi la méthode expérimentale en maths définie par Perrin et par Durand-Guerrier se distingue-t-elle de la méthode expérimentale en science, notamment OHÉRIC ?
- Dimension expérimentale VS démarche d'Investigation ?

Lebaud M.-P. et Gueudet G. – *Démarches d'investigation et collectifs dans la formation des enseignants*

Résumé – De nombreuses formations d'enseignants, visant les démarches d'investigation en mathématiques, ont recours au travail collectif des professeurs. Nous présentons ici une étude des recherches concernant de telles formations dans l'objectif d'approfondir le lien entre démarches d'investigation en classe et collectifs dans la formation des enseignants. Nous interrogeons les types de démarches et les types de collectifs qui interviennent dans les dispositifs étudiés. Nous montrons que des parallèles sont faits entre la formation et la classe, souvent implicitement. Les travaux qui se réfèrent à la notion de communauté d'investigation modélisent et identifient les transferts possibles, de la formation à la classe.

- Quelles acceptions possibles pour le "réel", les "problèmes ouverts ?
- Comment penser l'articulation entre l'acquisition de connaissances à travers une démarche d'investigation et l'exercice de la compétence "résolution de problèmes" ?
- Quelles dimensions privilégier dans les "DI formations" pour amener les professeurs à se soucier également du milieu ?

Grenier D.– *La démarche d'investigation dans les situations de recherche pour la classe (SIRC)*

Résumé – Nous présentons une analyse du rôle de la démarche de recherche et de l'activité expérimentale dans nos SiRC, en lien avec la démarche d'investigation telle qu'elle est décrite dans les programmes scolaires français des collèges et lycées et les documents Ressources associés. La démarche d'investigation fait partie intégrante des SiRC. Cependant, l'interprétation de ce terme dans les textes officiels porte des aspects de fermeture qui vont à l'encontre de

l'esprit d'invention nécessaire à la recherche et à l'apprentissage des raisonnements inductif et déductif. J'illustrerai cela par des exemples de documents officiels et des SiRC.

- Est-il possible d'enseigner des parties du savoir du programme sous forme de démarche d'investigation ou bien cela est-il hors de portée ? L'auteur plaide pour une réorganisation didactique globale ; en quoi celle-ci pourrait-elle croiser DI et enseignement d'un programme ?
- L'un des buts assignés aux SiRC est l'entraînement à divers types de raisonnements : inductifs, déductifs, par récurrence, etc. L'auteur reprend, pour la rejeter au nom du constat que « les étudiants ne savent pas faire des mathématiques », la critique faite aux SiRC de postuler l'existence d'un « transfert » que la pratique des SiRC favoriserait. Y a-t-il une évaluation du changement du rapport aux mathématiques scolaires ou universitaires après engagement des élèves dans les SiRC ?
- Donner un exemple de SiRC en montrant ce qu'il amène dans le travail mathématique des élèves

---

Mercier A. – *Suivre une démarche d'investigation pour enseigner les relatifs, au collège : une proposition pragmatique et une expérimentation, en France*

Résumé – Aucun travail à ce jour n'a pu montrer de métaphore fondamentale pour les relatifs, parce que tous modélisent les nombres comme opérateurs additifs, *sur les relatifs*. Toute construction des relatifs engage donc à noter (provisoirement) une nouvelle addition pour de nouveaux nombres, puis à y renoncer parce que ces nouveaux nombres comprennent les anciens. Rien à y faire, sauf à considérer que les extensions praxémiques devenues routinières peuvent conduire à l'invention d'algorithmes de calcul qui conduiront à une extension théorique dans un mouvement ultérieur. Un mouvement à l'envers donc, de ce que propose la TSD, mais le résultat d'une démarche d'investigation effective.

- Quels sont les éléments caractéristiques d'une démarche d'investigation ?
- Quelles sont les caractéristiques au regard du travail du professeur et au regard du travail des élèves ?

Wozniak F. – *Modélisation et démarche d'investigation*

Résumé –Le texte aborde la question des conditions de la mise en œuvre d'une démarche d'investigation à partir de l'observation de la façon dont un professeur étudie avec des élèves de 10-11 ans un problème de grandeur inaccessible à l'école primaire. Notre cadre d'analyse, la Théorie Anthropologique du Didactique, nous conduit à interpréter l'(in)existence d'une *dialectique des médias et des milieux* comme un critère de (non) mise en œuvre effective d'une démarche d'investigation. L'observation réalisée met à jour les praxéologies muettes de la modélisation comme indice d'un besoin d'infrastructures didactiques et mathématiques.

- L'auteur, dans sa conclusion, insiste sur le manque d'infrastructures (aidant le professeur) pour la mise en œuvre d'une DI dans la classe. Quels sont les manques les plus criants et les infrastructures qu'il faudrait mettre en place ? Est-ce irrémédiable dans la situation actuelle de la formation des enseignants et des contraintes sous lesquelles se déroulent les processus d'étude ?
- Si l'on envisage la possibilité d'une DI à l'extérieur du système éducatif, de quelles conditions faudrait-il disposer pour sa viabilité ?
- La démarche d'investigation suppose-t-elle toujours la modélisation ? Si tout savoir est le produit d'une modélisation, existe-t-il des « degrés » sur lesquels les élèves peuvent passer, ou encore dont le professeur pourrait décider de l'explicitation, même si elle n'est pas entrevue comme problème par les élèves, sans pour autant que cela entrave la possibilité d'une « authentique » démarche d'investigation ? Autrement dit, quelle place pour l'enseignement dans une DI ?

AXE 2 – *Mise en œuvre de la démarche d’investigation*

Dans quels pays ? Selon quelles modalités ? Dispose-t-on d’exemples de réalisations et si oui, que nous apprennent-ils ? Quelles sont les contraintes pratiques, matérielles et théoriques inhérentes au travail d’investigation du « réel » en classe ?

Morales Ibarra G., Bueno-Ravel, L. – *Démarche d'investigation et modélisation en mathématiques en maternelle : l'exemple du jeu des trésors*

Résumé – L’article vise à identifier des éléments rendant compte d’une démarche d’investigation mise en œuvre par des élèves de maternelle au cours de jeux de création et d’utilisation d’un langage iconique. Les élèves sont amenés, par un processus de modélisation, à représenter une situation en fabricant des outils sémiotiques (listes et désignations) afin d’anticiper des réponses aux questions posées et d'assurer leur réussite. Nous prenons appui sur des données issues d’un historique de l’ingénierie bordelaise le « Jeu des trésors » (Brousseau, 2004) et d’une récente mise en œuvre conduit à Rennes.

- La démarche d’investigation est-elle une démarche structurée et formalisée (selon le texte, elle semble nécessiter un protocole préétabli) ? Pourrait-elle être autrement tout en conservant ses caractéristiques et ses fonctions ?
- Le texte mentionne explicitement qu’il traitera de la question : Quelles sont les contraintes pratiques, matérielles et théoriques inhérentes au travail d’investigation du « réel » en classe ? Il sera donc important de faire ressortir ces éléments lors du colloque.
- Quelles différences entre DI et TSD ? Y a-t-il des éléments présents dans l’une et pas dans l’autre ? En quoi se distinguent-elles ?
- La mise en œuvre d’un processus de modélisation est-il équivalent à la réalisation d’une démarche d’investigation ? Quels sont les liens entre les deux ?
- Quelles différences y a-t-il entre un modèle et un représentant ? Ont-ils les mêmes caractéristiques ? Les mêmes exigences, les mêmes fonctions ? Quel type de relation entretiennent-ils avec le réel ?
- Quels rôles jouent-ils dans la démarche d’investigation ?

Quilio S., Morellato M., Crumière A. – *Obstacles à l'usage du nombre et à l'enquête sur ses propriétés dans l'implantation d'une ingénierie sur la soustraction*

Résumé – L’objectif de cette communication est de montrer quelques obstacles à la reprise et à l’implémentation d’une ingénierie didactique conçu par Guy Brousseau. Pour cela, nous montrerons dans un premier temps les grandes étapes de l’ingénierie didactique sur la soustraction dans une classe de CE1 (élèves de 7 ans, seconde année du primaire), et ensuite nous analyserons une des leçons pour mettre en évidence quelques obstacles à cette implémentation.

- Comment votre cadre théorique (Action Conjointe en Didactique) contribue-t-il à alimenter celui de la démarche d’investigation ?
- Dans quelle mesure diriez-vous que les contraintes pratiques, matérielles et théoriques auxquelles vous avez été confrontés sont inhérentes au travail d’investigation du « réel » en classe ?
- En quoi l’ingénierie didactique proposée s’apparente-t-elle à ce que vous définiriez comme une démarche d’investigation ? En quoi s’en distingue-t-elle ?

Coppé S. – *Démarche d'investigation et aspects temporels des processus d'apprentissage/enseignement*

Résumé – Nous présentons les premiers résultats d'une recherche en cours dans le cadre du projet européen S-TEAM (Science Teacher Education Advanced Methods) qui vise à étudier l'évolution des pratiques des enseignants vers la mise en place des séances qui permettent aux élèves d'être plus actifs dans leurs apprentissages notamment en utilisant les démarches d'investigation ou des dispositifs proches. Nous souhaitons traiter de la question des liens entre démarche(s) d'investigation et aspects temporels des processus d'apprentissage, et donc d'enseignement. A travers l'analyse du cas d'une professeure filmée pendant les 18 premières séances de l'année en classe de 4_e, nous voulons montrer comment des apprentissages peuvent se réaliser en articulant plusieurs activités liées comprenant des phases de dévolution et d'institutionnalisation.

- En quoi des « problèmes liés », comme les nomme le texte, peuvent-ils constituer la base d'une démarche d'investigation en mathématiques, c'est-à-dire engager les élèves dans une recherche et une enquête ? Quelles analyses mathématique et didactique *a priori* spécifiques pour le terme de démarche d'investigation ?
- Pourquoi le passage à la lettre (l'inconnue *x*) dans la séance 15 n'est-il pas vécu comme une nécessité éprouvée par les élèves, même si le professeur leur donnera finalement la clé pour leur question, ce qui suppose que les élèves la rencontrent au préalable ? Cela a-t-il été le cas ? Ce qui pose la question de la place des élèves dans la mésogénèse car s'il n'y a pas de question, comment peut-il exister un milieu pour y répondre ?
- Page 9 « on voit bien à travers cette phase comment sa connaissance [celle du professeur] de la situation et de ses buts, au-delà de la situation elle-même, lui permet de gérer au mieux le temps didactique ». Dans *La transposition didactique*, l'avancée du temps didactique est pilotée par le « chronomaître » à travers l'introduction d'objets nouveaux (dialectique ancien-nouveau). Est-ce encore le « chronomaître », à partir de l'introduction d'objets nouveaux dans une démarche d'investigation, qui fait avancer le temps didactique ? Et sinon qui et comment ?
- Qu'apporte la TACD et qui manque à la TAD ?

Burgermesiter P.-F. – *La posture du héron crabier*

Résumé – Nous présentons une situation d'investigation organisée autour de la *formule de Héron* et dont l'objectif est d'initier des élèves de lycée à l'emploi de la *dimension fonctionnelle* des formules géométriques. Nous décrivons et discutons le déroulement de deux séances expérimentales réalisées sur la base de cette situation avec des élèves de $3^{ème}$ année du Collège de Genève (17-18 ans) avant de dégager les perspectives possibles de ce premier travail en vue d'un renforcement plus consistant de la dimension fonctionnelle dans les pratiques scolaires.

- Pourquoi l'auteur, se référant à la modélisation proposée en TAD pour les ostensifs, adjoint-il aux fonctions sémiotiques et instrumentales d'une formule de géométrie une fonction supplémentaire, celle d'être procédurale ? Qu'entend l'auteur par « procédure » quand la TAD décrit plutôt des techniques mathématiques qui se déploient grâce à des dispositifs que l'on active grâce à des outils (ostensifs) sous le contrôle de non-ostensifs (des notions) ?
- Dans sa conclusion, intitulée « Perspectives », l'auteur énonce que l'objectif visé « est bien à la portée du groupe classe ». Or, la proposition d'une formule proche de celle de Héron vient d'un élève qui l'a déjà rencontrée « dans son parcours antérieur ». Qu'adviendrait-il dans le cas d'une classe où ce type d'élèves est absent, c'est-à-dire quel est le niveau de reproductibilité de cette situation d'investigation ?
- L'auteur, toujours en conclusion, indique qu'il souhaite « construire d'autres situations d'investigation ». Quels enseignements utiles à l'atteinte de cet objectif tire-t-il de l'expérience menée sur la formule de Héron ? Quelles constantes voit-il pour la

construction de démarches d'investigation, au-delà de la variété des objets mathématiques abordés ? Dans ce sens, peut-il nous en dire davantage sur les supports mathématiques envisagés pour son projet ?
- Comment l'auteur envisagerait-il une démonstration de la formule de Héron sous forme de démarche d'investigation, sa conjecture ayant été établie ?

Ligozat F. – *La démarche d'investigation dans les moyens d'enseignement suisse-romands pour les mathématiques ? Modéliser les conditions didactique de l'enquête*

Résumé – Cette contribution se propose de montrer en quoi certaines activités proposées dans les Moyens d'Enseignement suisse-romands pour les mathématiques à l'école primaire peuvent relever d'une démarche d'investigation dans le cadre de cette discipline. Dans un premier temps nous explicitons notre cadre conceptuel pour penser l'enquête comme moyen de construction de connaissance en général, puis nous formulons les spécificités de la démarche d'enquête sous conditions didactiques. Sur la base d'une activité de modélisation sélectionnée dans les Moyens d'enseignement romands pour les mathématiques (mesure, grade 4), nous analysons les contraintes et les possibles liées à la mise en place qu'une démarche d'investigation à partir des ressources fournies à l'enseignant.

- L'auteure fait référence aux domaines d'expérience (Boero, 2011) : l'activité proposée porte sur une « des situations pratiques qui relèveraient de l'expérience disponible de l'élève (au sens de Boero, 2011) dans lesquelles il pourrait voir un intérêt proche de ses préoccupations de la vie quotidienne ». Est-ce que l'auteure trouve que la théorie des domaines d'expérience peut servir de cadre à la DI ? Est-il nécessaire d'engager les élèves dans des situations qui relèvent de leur expérience disponible ? En outre, est-il nécessaire de proposer des situations de modélisation ?
- Dans la théorie des domaines d'expérience, l'expérience disponible des enseignants est prise en compte : est-ce que ce point de vue se lie au fait, observé par Ligozat, qu'il y a des implicites à dévoiler et négocier pour rendre l'activité une véritable DI ?
- Est-ce que l'auteure pourrait développer un peu le rôle de l'enseignant dans la DI ?

Arnoux P. et Vaux L. – *Recherche en mathématiques pour les élèves du secondaire : l'exemple des stages Hippocampe*

Résumé – On présente le mode de fonctionnement des stages Hippocampe. Ce sont des stages de recherche sur 3 jours consécutifs, pour des lycéens ou collégiens, encadrés par des enseignants-chercheurs et des doctorants. Ils se déroulent à l'IREM d'Aix-Marseille depuis juin 2005.

- Quels pourraient être les critères d'évaluation de l'impact de ces stages ?
- Comment les justifier ? Avec quels outils méthodologiques ? Y a-t-il, en particulier, des biais potentiels qui risquent de fausser une telle évaluation ?
- Y a-t-il des perspectives pour accroître les retombées de tels stages dans l'institution scolaire ?
- Quelle est la part d'autonomie des élèves dans l'investigation du sujet, sachant que le mathématicien expose la majeure partie du problème ?

Dubois I. – *Démarche d'investigation en mathématiques : l'exemple des ateliers MATH.en.JEANS*

Résumé – Après avoir présenté l'association MATh.en.JEANS et ses activités, nous expliquons le principe et l'organisation des ateliers MATh.en.JEANS. Ces ateliers scientifiques permettent à des groupes d'élèves de tout niveau scolaire de mener des recherches en mathématiques. Nous mettons ensuite en évidence les différentes caractéristiques de ces ateliers favorisant la mise en œuvre d'une véritable démarche d'investigation en mathématiques. Nous terminons par la présentation de quelques exemples issus d'ateliers que nous avons encadrés.

- La "définition" de démarche de découverte qui se trouve dans les programmes est-elle la définition propre du concept ?
- Ou bien, faudrait-il une définition plus complexe pour mieux définir la démarche d'investigation par rapport à toute résolution de problèmes ?
- Quelles sont les véritables caractéristiques d'une démarche d'investigation ? Sont-elles des caractéristiques portant sur le contenu, sur le rôle du prof, sur le travail des élèves ?
- Il serait aussi intéressant de discuter le rapport entre le rôle du prof et le rôle du mathématicien.

Henry V., Lambrecht P. – *Apprentissage de la proportionnalité par la confrontation à la non-proportionnalité via des manipulations*

Résumé – L'activité dont il est question dans cet article propose d'intégrer des manipulations dans l'étude de la proportionnalité et de confronter une situation proportionnelle à une autre qui ne l'est pas. L'ingénierie proposée a l'espoir non seulement d'améliorer l'apprentissage de cette matière et ce, à long terme, mais également d'avoir un apport positif quant à la réflexion des élèves face à des questions mobilisant principalement le sens commun. Le protocole d'expérimentation complet (pré-tests, post-tests, séquences d'apprentissage, *classes-témoins* et *classes-tests*) ainsi que les premiers résultats sont développés dans cet article.

- Pouvez-vous développer l'ensemble des résultats annoncés ?
- Qu'est-ce qui justifie ici le choix d'une méthodologie de validation externe alors que les ingénieries didactiques sont, elles, des méthodologies de recherche basées essentiellement sur un mode de validation interne ?
- Pourriez-vous approfondir le choix de vos variables didactiques et leur impact sur les stratégies possibles des élèves ? En particulier, il faudrait analyser davantage les usages possibles des ostensifs utilisés, par exemple en termes de rapports externes ou internes liés aux tableaux, ou encore d'écriture d'ostensifs algébriques.
- En quoi les situations de non-proportionnalité font-elles milieu (au sens de Brousseau) pour l'apprentissage de la proportionnalité ?

Ray B., Azziz S., Couderc G., Durand-Guerrier V., Saumade H., Sauter M., Virduci S., Yvain S. – *Recherche collaborative et démarche d'investigation : des mathématiques pour appréhender le réel*

Résumé – Les programmes officiels français du primaire et du secondaire mettent en avant l'importance de la démarche d'investigation, qui a cependant du mal à trouver sa place dans les pratiques ordinaires. Au sein du groupe ResCo de l'IREM de Montpellier, nous avons choisi d'intégrer ces démarches dans un travail collaboratif, autour de problèmes mathématiques appliqués au réel. Nous présentons tout d'abord rapidement la place de la démarche d'investigation dans les programmes français de l'école primaire, du collège et du lycée. Dans un deuxième temps, nous décrivons le dispositif de résolution collaborative de problèmes que nous avons développé.

- Au sein de la DI que vous proposez, quels sont les résultats relevant d'une analyse didactique ?
- Quels sont les outils conceptuels et méthodologiques que vous privilégiez pour une analyse didactique ?

AXE 3 – *Aspect transversal de la démarche d'investigation*

En quoi et pourquoi le concept se décline-t-il différemment, ou non, en mathématiques et dans d'autres disciplines dites scientifiques (physique, chimie, biologie, géologie, technologie, etc.) ? Comment se distingue-t-il de celui de résolution de problème ? Comment les questions de validations sont-elles réglées selon les disciplines en jeu ? Pourrait-on mettre en relation la démarche d'investigation avec l'approche par compétences, si oui comment, si non en quoi se distinguent-elles ?

Houdement C. – *Démarche expérimentale en résolution de problème ?*

Résumé – Deux questions sont soulevées dans cette contribution. (1) Est-il possible de tirer des fils conducteurs communs et en contrepartie de dégager des spécificités entre démarches d'enseignement des sciences, notamment entre mathématiques et autres sciences ? Ces fils seraient en particulier bienvenus pour une culture didactique scientifique des professeurs polyvalents. (2) Les démarches personnelles des élèves dans la résolution des questions mathématiques peuvent-elles ressembler à ce qu'ils font dans les sciences autres que les mathématiques ? Ce serait un pas vers la définition d'éléments minimaux d'intégration d'une culture scientifique chez des élèves de primaire.

- L'auteur met en évidence des spécificités de la démarche expérimentale en maths VS en sciences ; cette démarche étant vue comme une des organisations possibles pour la phase de la démarche d'investigation visant à tester les hypothèses et conduire à des résultats exploitables. Y a-t-il des spécificités relevant des autres phases de la DI : transformation de la situation de départ en problème ; passage du problème en hypothèse à tester ; confrontation des résultats obtenus aux hypothèses ; synthèse ; confrontation au savoir savant ?
- Comment les types de contrôles décrits (sémantique, pragmatique et syntaxique) interviennent-ils dans la DI ? À quelle phase sont-ils mobilisés ? Pourrait-on les retrouver aussi pour des validations en sciences ?

Gandit M., Triquet E., Gillaud J.-C. – *Des représentations sur les démarches d'investigation aux pratiques de classe : le cas d'enseignants débutants en mathématiques et en sciences expérimentales*

Résumé – La recherche s'inscrit dans le cadre du projet européen S-TEAM (Science Teacher Education Advanced Methods) (Grangeat 2011) et porte sur des enseignants débutants, au regard des démarches d'investigation, en mathématiques, sciences de la vie et de la Terre et en sciences physiques et chimiques. Le premier volet est consacré à l'évolution des représentations de ces enseignants relativement à l'épistémologie, l'enseignement et l'apprentissage de leur discipline, à la suite d'une formation centrée sur les démarches d'investigation. L'objet du second volet est l'analyse de la mise en œuvre de démarches d'investigation par des enseignants débutants dans leur classe.

- Dans quelle mesure la mise en place d'une démarche d'investigation dépend-elle des représentations des enseignants ? Comment prendre en compte ce facteur ? Dans quel sens la démarche d'investigation a-t-elle des potentialités en tant que stratégie pour la formation des enseignants ?
- Dans la deuxième partie de l'article, les auteurs analysent des séances d'investigation mises en place par des profs de mathématiques et de sciences. Cela peut amener à une réflexion sur les potentialités et les caractéristiques des démarches d'investigation dans les différentes disciplines.
- Quelles caractéristiques sont communes aux sciences ? Lesquelles sont spécifiques aux maths ?
- Les auteurs distinguent entre notions et savoirs « transversaux » (ex. formuler une conjecture) ; évidemment, les savoirs transversaux sont fondameetntaux dans une démarche d'investigation. Peut-on dire qu'il s'agit des savoirs les plus importants à viser

dans une démarche d'investigation ? Ou, au contraire, s'agit-il de savoirs préalables à la démarche ?
- Comment « former » les enseignants à une bonne mise en place des démarches ?

Hersant M., Orange-Ravachol D. – *La démarche d'investigation, les mathématiques et les SVT : des problèmes de démarcation aux raisons d'une union*

Résumé – En France, les programmes d'enseignements récents de mathématiques, de sciences et de technologie promeuvent l'engagement des élèves de l'école et du collège dans des démarches d'investigation contribuant à l'appropriation de compétences communes. Comment est-il possible qu'une même démarche réunisse à la fois les mathématiques et les sciences ? Notre communication montre que les différences entre les disciplines pointées par l'institution (l'expérimentation, les modalités de validation) font problème. Elle étudie la possibilité de réunir ces disciplines en considérant la construction des savoirs qu'elles opèrent comme des problématisations.

- En mathématiques, a-t-on évalué ce qu'apprennent les élèves au cours du problème « pas 3 points alignés » ? Est-il possible de transposer cette démarche à des contenus de savoir du programme de l'école primaire, comme cela a l'air d'être le cas pour l'exemple donné en SVT ? Si oui comment, si non pourquoi ?
- Pouvez-vous développer davantage la théorisation sous forme de la dialectique registre empirique – registre des nécessités ? En quoi cette modélisation pourrait-elle constituer une théorisation pour la démarche d'investigation ? Comment s'articulent les présupposés empiristes-pragmatiques qui accompagnent l'Inquiry based science éducation issue d'une tradition philosophico-pédagogique américaine avec le rationalisme et le constructivisme bachelardiens ?

Document préparé par l'équipe de coordination du GT10 : Yves Matheron, Francesca Morselli, Sophie René de Cotret, Maggy Schneider.

RECHERCHE EN MATHEMATIQUES POUR LES ELEVES DU SECONDAIRE : L'EXEMPLE DES STAGES HIPPOCAMPE

Pierre ARNOUX* – Lionel VAUX*

Résumé – On présente le mode de fonctionnement des stages Hippocampe. Ce sont des stages de recherche sur 3 jours consécutifs, pour des lycéens ou collégiens, encadrés par des enseignants-chercheurs et des doctorants. Ils se déroulent à l'IREM d'Aix-Marseille depuis juin 2005.

Mots-clefs : Stage de recherche, Activité, Lycée

Abstract – The paper explains how the research experiment Hippocampe works. This is an intensive 3-days research period for high-school students, supervised by university teachers and Ph.D. students. It takes place at the IREM of Aix-Marseille, since june 2005.

Keywords: Research activity, Highschool

I. DEMARCHE

1. *Une démarche de recherche au niveau du lycée ou du collège ?*

Depuis plusieurs années en France, les programmes du secondaire (collège : de la sixième à la troisième, soit de 11 à 15 ans ; lycée : de la seconde à la terminale, soit de 15 à 18 ans) insistent sur la nécessité d'une activité de recherche pour les élèves. Pour ne donner qu'un exemple, le début du dernier programme de première scientifique, publié en juillet 2010, décrit son *objectif général*, en tête du programme, comme suit :

> Outre l'apport de nouvelles connaissances, le programme vise le développement des compétences suivantes :
> – mettre en œuvre une recherche de façon autonome ;
> – mener des raisonnements ;
> – avoir une attitude critique vis-à-vis des résultats obtenus ;
> – communiquer à l'écrit et à l'oral.

Cependant, la manière de développer ces compétences, et en particulier de « *mettre en œuvre une recherche* » n'est pas précisée, et il ne semble pas vraiment y avoir de méthode conseillée, ou même reconnue, pour le faire.

Pourtant, diverses expériences ont été développées dans ce sens par des enseignants et des mathématiciens au cours des dernières années. Elles sont inspirées par les travaux déjà anciens de Georges Pólya sur l'induction et l'analogie en mathématiques (Pólya 1949, 1968) et ceux d'Imre Lakatos sur le rôle de l'erreur dans le développement des mathématiques (Lakatos 1976). On peut citer en particulier les travaux de l'IREM de Lyon sur les problèmes ouverts (Arsac et al. 1991), l'expérience MATh.en.JEANS (Audin et Duchet 1992 ; Beddou et Mauduit, 2001, 2004), ou encore les *Situations de Recherche pour la Classe* étudiées par l'équipe Maths-à-modeler à Grenoble (Grenier 2010).

2. *Le laboratoire Pythéas et les stages Hippocampe*

Le laboratoire Pythéas, qui fait partie de l'IREM[1] d'Aix-Marseille, s'inscrit dans cette démarche ; il se veut un laboratoire de mathématiques pour tous, et notamment pour les élèves du secondaire, avec deux objectifs essentiels :

* Institut de Mathématiques de Luminy (UMR 6206 CNRS–Université de la Méditerranée) et groupe Hippocampe de l'IREM d'Aix-Marseille – France – arnoux@iml.univ-mrs.fr, vaux@iml.univ-mrs.fr

© Arnoux P., Vaux L. (2012) Recherche en mathématiques pour les élèves du secondaire : l'exemple des stages Hippocampe. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT10, pp. 1282–1294). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

- participer à la diffusion de la culture et de l'esprit scientifique ;
- lutter contre la désaffection des élèves pour les filières scientifiques (qui ne reflète pas, selon nous, une désaffection pour les sciences).

Il ne s'agit pas de présenter des résultats ou des travaux à un public non académique. Le cœur de notre démarche, et le fil conducteur de nos activités, est la volonté de placer l'élève lui-même dans la situation du chercheur, lequel construit un savoir personnel avant de le structurer et de le transmettre.

Le laboratoire mène des actions variées, en particulier des ateliers MATh.en.JEANS et des activités de diffusion de la culture scientifique ; l'activité que nous présentons dans cet article, les stages Hippocampe, se développe depuis plus de 6 ans et a pris de plus en plus d'importance.

Un stage Hippocampe en Mathématiques consiste à accueillir une classe de lycéens pendant trois jours consécutifs, à l'université, pour une initiation à la recherche en Mathématiques. Encadrés par des chercheurs, les élèves réfléchissent sur des problèmes de Mathématiques, en lien avec les thèmes de travail du chercheur responsable du stage. Ils posent des questions et élaborent des hypothèses, puis ils expérimentent, discutent, débattent et communiquent, comme le font quotidiennement les chercheurs dans leur activité. Enfin, ils présentent leurs travaux à d'autres chercheurs lors d'une séance de posters.

La particularité de cette démarche, par contraste avec celles citées plus haut, est qu'elle se développe à l'extérieur de la classe, en immersion dans le milieu universitaire, et pour une période brève mais intense.

II. HISTORIQUE ET CONTEXTE

1. À Marseille

L'équipe à l'origine du projet était constituée de Marie-Renée Fleury, Jean-Louis Maltret, Christian Mauduit et Robert Rolland, de l'IREM d'Aix-Marseille. Le format est adapté de celui des stages de recherche en Biologie initiés à l'INMED[2] en 2004 par Constance Hammond et l'association Hippocampe, et maintenant portés par l'association Tous Chercheurs. Dans la suite, l'appellation « stage Hippocampe » désigne les stages en Mathématiques.

Le premier stage eu lieu à l'IREM d'Aix-Marseille en juin 2005. Les retours furent très positifs, tant pour les élèves et leur professeur que pour les tuteurs. Il fut suivi par trois nouveaux stages dont un sur une thématique informatique, en 2005-2006. Cette activité a rapidement atteint un rythme de croisière d'une quinzaine de stages par an.

Une sélection de sujets proposés depuis 2005 est fournie en annexe. L'intégralité des thèmes de stages effectués depuis septembre 2008 est consultable en ligne, dans la rubrique Hippocampe du site de l'IREM : http://www.irem.univ-mrs.fr/-Hippocampe-. Les archives des stages précédents sont disponibles sur http://iml.univ-mrs.fr/~mrd/Hippocampe/.

[1] Les Instituts de Recherche en Enseignement des Mathématiques, forment en France un réseau national de structures qui associent des enseignants du primaire, du secondaire et du supérieur, pour effectuer en commun des recherches sur l'enseignement des mathématiques et assurer ainsi des formations de professeurs s'appuyant fortement sur la recherche. Voir http://www.univ-irem.fr.

[2] Institut de Neurobiologie de la MÉDiterranée : UMR INSERM–Université de la Méditerranée.

Les principaux partenaires scientifiques et pédagogiques du laboratoire Pythéas pour les stages Hippocampe sont le rectorat d'Aix-Marseille, la faculté des Sciences de Luminy (Unité de Formation et de Recherche en Sciences de l'Université de la Méditerranée) et l'Institut de Mathématiques de Luminy (IML, UMR 6206 du CNRS) dont sont issus la plupart des chercheurs impliqués. Il suffit cependant de parcourir la liste des sujets proposés pour établir que les activités ne sont pas strictement ciblées sur les mathématiques : les stages Hippocampe accueillent aussi régulièrement des thèmes d'informatique ou des thèmes pluridisciplinaires, souvent en partenariat avec d'autres unités de recherche marseillaises.

Une collaboration avec le Centre International de Rencontres Mathématiques (CIRM, UMS 822 CNRS–SMF) vient par ailleurs d'être mise en place : dans ce cadre, certaines séances de posters se déroulent dans les locaux du CIRM, à l'occasion de colloques ou de groupes de travail, afin que des chercheurs extérieurs à l'UFR Sciences puissent y participer.

Les stages Hippocampe étaient initialement destinés aux sections scientifiques du lycée. Très tôt, ils se sont ouverts à d'autres publics du secondaire : collèges, classes de seconde, sections non scientifiques. Dès 2006, un effort particulier a été fait pour encourager l'accès aux stages pour des classes d'éducation prioritaire : cet effort a été reconnu et soutenu par une subvention « Promouvoir l'égalité des chances à l'université » (ministère délégué à la Promotion de l'Égalité des Chances, et ministère délégué à l'Enseignement Supérieur et à la Recherche) en 2006. Depuis 2007, un ou deux stages Hippocampe sont en outre réalisés chaque année avec des élèves de l'École de la Deuxième Chance de Marseille,[3] également au laboratoire Pythéas.

Les principaux destinataires de l'action Hippocampe sont évidemment les jeunes stagiaires, avec les objectifs annoncés plus hauts. Les stages ont cependant été conçus en prenant en compte une attente complémentaire : celle de la formation des doctorants, lesquels constituent la majorité des encadrants (ils sont tuteurs : voir plus loin leur rôle exact), et sont généralement de futurs enseignants, dans le supérieur ou dans le secondaire. Nous avons par ailleurs commencé en 2010-2011 à intégrer comme tuteurs des agrégatifs[4], ainsi que des étudiants de la spécialité Éducation et Formation en Mathématiques (EFM) de la deuxième année du master de Mathématiques et Applications de Marseille (préparation au CAPES[5]). Dans ce sens, Hippocampe relève de la recherche et de la formation à la fois en Mathématiques et en Didactique des Mathématiques ; l'un des principaux apports de ces stages est peut-être de convaincre par l'exemple de futurs enseignants que ce type de démarche est possible.

2. *Essaimage*

À partir de l'expérience pionnière de notre IREM, le principe de stages Hippocampe en Mathématiques se diffuse régulièrement en France, notamment à travers le réseau national des IREM. Notre équipe continue de faire connaître et de promouvoir ce type d'activité et fait partager autant que possible son savoir faire et ses méthodes, notamment dans les

---

[3] Initiative européenne portée et soutenue, depuis 1997 par l'État, la Région Provence-Alpes-Côte d'Azur, le Département des Bouches-du-Rhône, la Communauté Urbaine Marseille-Provence-Métropole, la Ville de Marseille, la Chambre de Commerce et d'Industrie Marseille-Provence, avec le soutien des fonds structurels européens FEDER et FSE. Voir http://www.e2c-marseille.net/.

[4] Étudiants préparant l'agrégation, concours pour devenir enseignant en lycée ou au niveau licence, d'un niveau théorique élevé.

[5] Certificat d'Aptitude au Professorat de l'Enseignement du Second degré, concours pour professeur en lycée et collège.

manifestations dédiées à l'enseignement des Mathématiques (rencontres de l'APMEP[6], réunions de l'ADIREM[7], etc.).

Des stages Hippocampe en Mathématiques sont ainsi organisés par l'IREM de Brest depuis 2007 et celui de Lyon depuis 2009. De même à Toulouse, où les premiers stages ont eu lieu en janvier 2011, et à Nice, avec un premier stage en mai 2011.

III. DEROULEMENT D'UN STAGE

1. Le stage type

Chaque stage mobilise une petite équipe d'encadrants scientifiques : un responsable qui détermine la thématique du stage et propose des pistes de recherche, et des tuteurs (souvent des doctorants, de jeunes enseignants-chercheurs, ou des étudiants d'une spécialité de formation à l'enseignement dans un master de mathématiques) qui accompagnent les élèves tout au long du stage.

La première partie du stage consiste en une information sur le déroulement du stage et la présentation du thème par le scientifique responsable. Les élèves forment ensuite de petits groupes, typiquement de quatre élèves. Chaque tuteur accompagne deux groupes au cours des trois jours, ce qui incite à alterner moments de discussion et moments de réflexion.

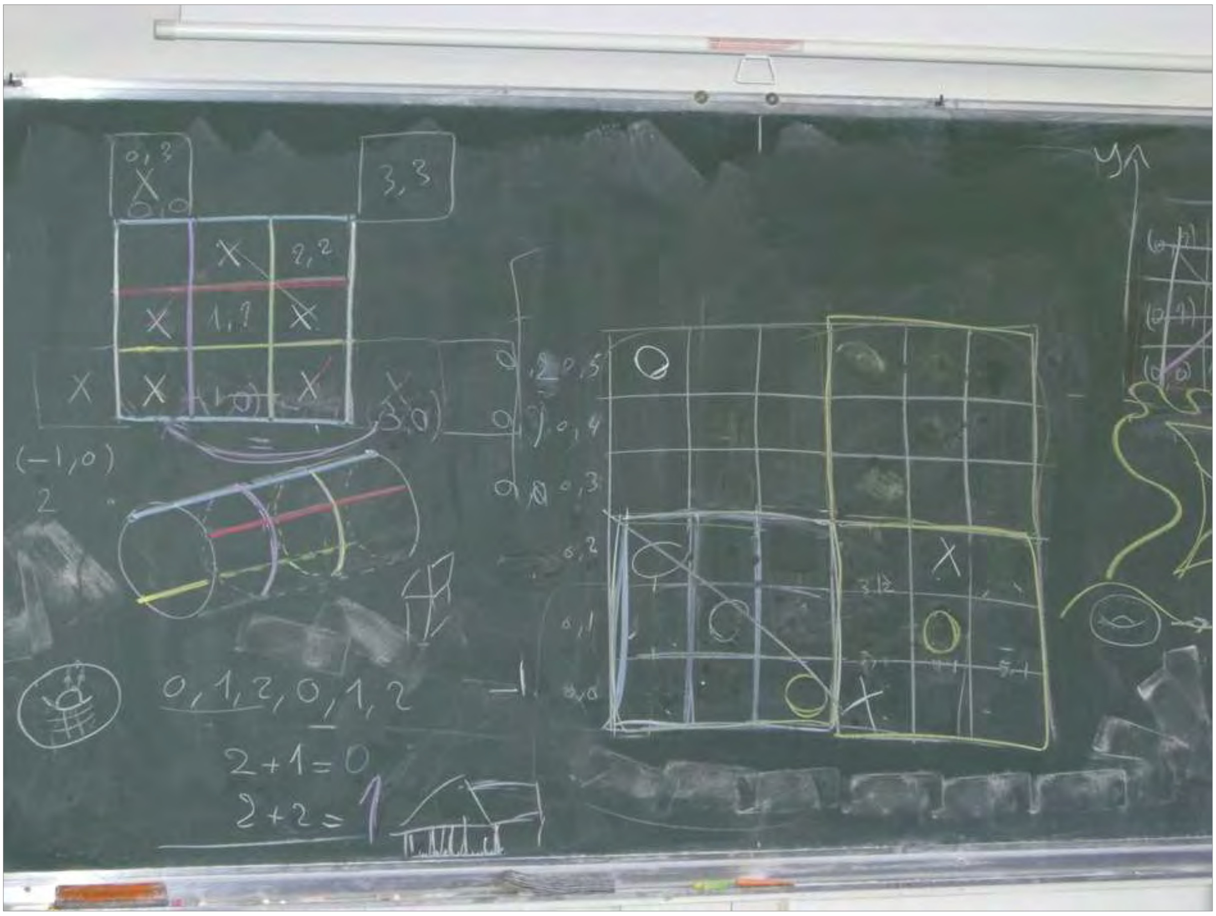


***Figure 1** – Tableau au cours d'une séance de travail*

[6] Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public : association française fondée en 1910, qui représente les enseignants de mathématiques de la maternelle à l'université.

[7] Assemblée des Directeurs d'IREM.

Chaque groupe s’oriente vers une piste de recherche, préétablie ou non. La première tâche des élèves est de s’approprier le thème de travail, de développer et de préciser les questions qui les intéressent, les approches qu’ils envisagent. La simple définition des objets mathématiques en jeu est souvent un problème en soi. Cette première partie peut se passer de façon diverse suivant les stages, nous reviendrons sur ce point.

Le travail de recherche se poursuit ensuite avec les premières conjectures, les tests et expérimentations qui les mettent à l’épreuve, les ébauches d’argumentation. On est rapidement confronté aux erreurs, aux hypothèses erronées, aux fausses évidences. C’est l’occasion de découvrir le caractère non linéaire du développement de nouvelles mathématiques, en contraste avec le déroulement classique d’un cours ou d’un exposé. C’est aussi l’occasion de découvrir la difficulté, et l’importance, de donner une bonne définition d’un concept apparemment simple, ou d’écrire un énoncé cohérent.

Dès le deuxième jour, le travail de recherche à proprement parler est mené en parallèle d’un travail sur la formalisation et la présentation à la fois de la problématique abordée et des possibles résultats déjà établis. Souvent, une courte présentation du sujet traité par chaque groupe, devant les autres participants, est l’occasion de réaliser la difficulté d’un tel exercice. Le responsable du stage passe régulièrement dans les groupes pour discuter avec eux, voir où en est leur travail, et poser des questions (c’est en particulier surtout à lui qu’il incombe d’éviter le risque toujours présent de voir l’activité du groupe se tourner vers une voie sans issue).

Figure 2 *– Séance de posters*

L'après-midi du troisième et dernier jour est consacrée à la présentation de posters, élaborés dans les heures précédentes, parfois dès la veille et jusqu'en début d'après-midi. Tous les chercheurs intéressés sont conviés à cette séance au cours de laquelle ils peuvent découvrir les travaux des élèves, leur faire préciser certains points, les interroger sur leurs conjectures, leur proposer d'autres pistes.

Les élèves sont accueillis dans les locaux de l'IREM. Ils y disposent d'une salle informatique équipée de logiciels utiles à l'expérimentation mathématique (le laboratoire Pythéas propose un serveur Sage[8]). Ils ont aussi accès aux bibliothèques universitaires et du CIRM.

Le laboratoire Pythéas propose également aux participants Hippocampe de rendre publics leurs travaux sur son site Internet.[9] Ceci permet de valoriser l'investissement des élèves au-delà de la seule période du stage.

L'enseignant de la classe est généralement présent, sans que ce soit obligatoire, mais il ne participe pas à l'encadrement du stage. Il n'y a pas pour l'instant d'exploitation formelle du stage en classe, et c'est un point auquel il faudrait réfléchir.

2. *Éléments de variabilité*

Nous conservons une certaine souplesse dans l'application de cette formule, afin de laisser de la place pour l'expérimentation pédagogique, et de permettre à chacun des intervenants d'apporter une touche personnelle au déroulement du stage, en accord avec sa propre pratique de la recherche.

En particulier, la phase initiale se déroule différemment suivant les stages ; dans certains, le parcours est bien balisé, et les élèves choisissent entre plusieurs tâches proposées. Dans d'autres, la présentation est à dessein relativement floue, illustrée d'exemple peu théorisés et de questions imprécises ; il revient aux élèves de construire une question et de trouver, à l'aide des tuteurs, les outils pour la résoudre. Ils se trouvent ainsi vraiment dans la position d'un chercheur, et découvrent que poser une bonne question peut être plus difficile que donner une bonne réponse !

Ce type de stage peut être, au début, assez perturbant pour les élèves, qui se trouvent loin de l'univers encadré qu'ils connaissent habituellement. Le bon équilibre (s'il existe !et) entre encadrement et non-directivité n'est pas clair pour nous, et c'est pourquoi nous n'avons pas souhaité imposer un format.

Si le responsable du stage est généralement un membre permanent des équipes de l'IML, le laboratoire de Mathématiques voisin, il peut également être doctorant ou issu d'un autre laboratoire. Et bien que de nature mathématique, les thèmes abordés peuvent être issus de questions liées à la physique, à l'informatique, aux sciences humaines, à la biologie, *etc.* Dominique Barbolosi a par exemple publié dans le numéro 71 de Repères–IREM une description détaillée et commentée d'une série de stages qu'il a coordonnés sur le thème Mathématiques et Médecine (Barbolosi 2008).

IV. RETOMBEES

Chaque stage concerne une moyenne de 25 élèves pendant 3 jours. Une quinzaine d'établissements sont concernés chaque année, avec une priorité affichée pour les

[8] Sage Computer Algebra System : http://sagemath.org/.
[9] http://pytheas.irem.univ-mrs.fr/hippocampe/.

établissements situés en zone d'éducation prioritaire ou les classes considérées comme difficiles. Si on y ajoute les stages délocalisés ou organisés dans d'autres IREM, plus de 2000 élèves ont été impliqués dans cette action depuis sa création.

Pour les élèves, ces stages sont l'occasion d'une immersion dans le milieu universitaire, bien différente de ce que peuvent apporter des opérations « portes ouvertes » par exemple. Notamment, c'est souvent le seul contact que les élèves auront avec le monde de la recherche avant leur possible entrée dans l'enseignement supérieur. Cette occasion est particulièrement importante pour les effectifs issus de zones défavorisées, pour lesquels l'université peut être perçue comme inaccessible. En faisant découvrir une autre manière, plus ouverte, d'aborder les mathématiques, cette approche a régulièrement donné lieu à d'étonnants retournements de situation, des élèves habituellement considérés comme « faibles » prenant l'initiative de la recherche en groupe. C'est aussi l'occasion pour les élèves de découvrir, souvent avec étonnement, que « tout n'a pas été trouvé en mathématiques », et de se faire une autre idée du travail de recherche, que beaucoup envisageaient comme une activité solitaire consistant à noircir du papier dans un bureau.

Réciproquement, ces stages sont l'occasion pour l'université et ses laboratoires de rencontrer un autre public que celui de l'enseignement supérieur. Pour un certain nombre de tuteurs des stages, qui sont généralement des doctorants, le stage joue aussi un rôle de formation professionnelle. Depuis 2010, il est également proposé aux étudiants des parcours de préparation à l'enseignement (CAPES et agrégation) du master de mathématiques de Marseille de participer aux stages en tant que tuteurs dans le cadre de leur TER[10], et les échos recueillis sont pour l'instant très positifs.

Enfin, cette action produit des retombées localement, dans tout le champ de la diffusion de la culture scientifique et mathématique. Ainsi les élèves du secondaire qui participent aux ateliers MATh.en.JEANS ont généralement suivi un stage Hippocampe. Les étudiants de l'unité MATh.en.JEANS en Licence (une unité d'enseignement de la Faculté des Sciences de Luminy, basée sur la démarche MATh.en.JEANS, et qui initie les étudiants à la création et l'animation d'ateliers dans des manifestations scientifiques) sont conviés aux séances de posters Hippocampe, au même titre que les chercheurs des laboratoires. Ces élèves et ces étudiants sont des recrues de choix qui irriguent tout le champ de la diffusion et de l'animation scientifique : concours, forums, fête de la Science, *etc.*

Et ces synergies portent leurs fruits. Ces interventions sont régulièrement récompensées par divers prix et distinctions : notamment, les élèves de l'atelier Euclide du collège Camus de Miramas (Francis Loret) ont successivement reçu la médaille d'or et le grand prix du CNRS au concours Faites de la Science 2008, la médaille d'or du CEA au concours Faites de la Science 2009 et le prix de la fondation C.Génial 2010. En 2011, ils ont représenté la France au concours INTEL ISEF à Los Angeles et remporté la troisième place en Mathématiques.

V. ÉVALUATION

Les réactions des élèves et de leurs professeurs sont systématiquement positives, comme le prouvent les témoignages recueillis au fil des stages. La participation à l'encadrement des stages est par ailleurs considérée comme un élément important de la formation des moniteurs en mathématiques et valorisée comme telle par le CIES.[11]

[10] Travail d'Etude et de Recherche, mémoire de fin de master.

[11] Centre d'Initiation à l'Enseignement Supérieur, supprimé en 2010 ; il avait pour but de donner une formation pédagogique aux doctorants.

Nous sommes cependant bien conscients que l'enthousiasme suscité chez les participants ne suffit pas à fournir une évaluation sérieuse des résultats à moyen et long terme de cette expérience, mais nous ne disposions pas jusque là des outils méthodologiques nécessaires pour évaluer l'impact des stages sur le parcours scolaire puis universitaire des élèves.

Afin de pallier ce manque, nous avons entrepris une collaboration avec Alain Mercier et Yves Matheron de l'UMR P3 ADEF,[12] pour élaborer des critères pertinents ainsi que les moyens de les mesurer à moyen et long terme. Nous avons mis en place les premiers éléments de cette démarche en 2010–2011, en travaillant avec les étudiants de la spécialité Éducation et Formation en Mathématiques du master de Mathématiques et Applications de Marseille. Nous comptons, dans les prochaines années, approfondir ce travail avec l'aide des étudiants des spécialités d'enseignement du master, dans le cadre de mémoires.

Il faut insister sur le fait que les activités menées par les élèves ne relèvent pas de la simple vulgarisation, mais comportent une importante part technique, que ce soit dans les expérimentations ou les démonstrations (nombres complexes, limites, récurrences, algèbre, programmation…) ; cette part technique utilise les connaissances déjà acquises par les élèves, et les pousse à jeter un autre regard sur ces connaissances. On est souvent surpris de la qualité des travaux réalisés en trois jours ; rappelons que si cela semble un très court intervalle de temps, c'est en réalité l'équivalent, en heures de cours, d'un mois de mathématiques dans une classe, et que les enseignants n'ont en pratique jamais les moyens de consacrer un mois dans l'année à une telle activité.

Terminons en mettant en avant le polymorphisme assez important des stages, qui est selon nous à la fois une des forces du dispositif et une difficulté importante pour l'analyse didactique. En effet, en plus de la variabilité des publics concernés d'un stage à l'autre, l'influence des encadrants se fait assez largement sentir, en ce que le stage est le fruit d'un échange entre apprentis chercheurs et chercheurs tuteurs. On retrouve concrètement cette variabilité dans les productions matérielles des stages : les posters présentés en annexe en donnent un bon aperçu, entre rigueur et foisonnement, directives évidentes et travail personnel et original.

VI. ANNEXE : EXEMPLES DE SUJETS ABORDES PAR LES STAGES HIPPOCAMPE

Création de nouvelles mathématiques : Christian Mauduit (IML) Initiation à la démarche de chercheur. Apprendre, sur des problèmes simples, à poser des conjectures et à les résoudre à l'aide de contre-exemples ou de démonstrations. Réflexion sur le rôle de l'erreur dans le processus créatif.

Les relations d'ordre et ordres partiels : Christian Aperghis (LIF) Lors de leur cursus scolaire, les élèves travaillent uniquement sur des structures totalement ordonnés. Nous leur ferons découvrir l'existence d'autres manières d'ordonner un ensemble. Nous les laissons ensuite suivre leurs idées pour développer les concepts que nous leur avons présentés.

Cryptographie : Christophe Ritzenthaler (IML) La cryptographie moderne a deux facettes : celle à clé privée et celle à clé publique. Pour les illustrer, nous parlerons chiffrement par décalage d'une part et chiffrement RSA et de l'échange des clés d'autre part. La structure mathématique commune sera les congruences. On commencera donc « par découvrir » leurs propriétés basiques sur des exemples. Ensuite, on s'amusera à chiffrer et

[12] Apprentissage, Didactique, Evaluation, Formation : UMR INRP–Université de Provence.

déchiffrer des messages, à la main puis à l'aide de l'ordinateur. On discutera enfin les questions de sécurité en regardant quelles sont les attaques possibles.

La géométrie en action : Jean-Louis Maltret (LSIS) Comment bien découper le plan et l'espace ? Diagrammes de Voronoï et applications.

Logique et théorie du calcul : Marie-Renée Fleury et Myriam Quatrini (IML) Qu'est-ce que le langage, la rigueur mathématique, le raisonnement logique ? Pourquoi est-il nécessaire de démontrer et ne pourrait-on se contenter d'expérimenter ? Le théorème des quatre couleurs remet-il en question la définition d'une démonstration ? La logique est aussi un modèle de calcul : des premiers pas pour aborder les notions de calculabilité seront faits sur des machines à registres.

Mathématiques et médecine : Dominique Barbolosi (IFR 125) Comment peut-on sauver des vies humaines grâce aux mathématiques ? Le stage permettra à des groupes d'élèves de s'initier à l'optimisation des protocoles de chimiothérapie dans la lutte contre le cancer, à d'autres, il leur permettra d'appliquer leurs connaissances mathématiques à l'imagerie médicale.

De Galilée à Einstein : la relativité : Jean-Pierre Labesse (IML). Il s'agit de suivre le développement de la problématique de la relativité qui commence avec Galilée, se poursuit avec Newton, puis aboutit à une contradiction avec Maxwell, contradiction levée par Lorentz, Poincaré et Einstein. Ceci donne lieu à des recherches par les élèves sur Galilée, son temps et ses recherches, sur le pendule de Foucault, sur les équations de Maxwell et les transformations de Lorentz ainsi que sur les paradoxes soulevés par Einstein (paradoxe des jumeaux) etc... pour finir avec les trous noirs en relativité générale.

Pliages de papiers, suites auto-similaire et fractal : Pierre Arnoux (IML) Les objets auto-similaires ont des propriétés fascinantes ; ils apparaissent naturellement dans diverses situations, et pourtant leurs propriétés sont paradoxales, et semblent impossibles au premier abord, à commencer par leur dimension, qui est souvent non entière. Le stage donne l'occasion d'aborder diverses méthodes de construction, dont certaines très concrètes, et d'étudier leur comportement. On rencontrera plusieurs exemples qui remontent à très longtemps, et font actuellement l'objet de recherches actives, en particulier au sein du laboratoire.

Mathématiques pour l'astronomie Jacques Gispert, (LIF) Utilisation des mathématiques pour résoudre quelques problèmes d'astronomie concernant des domaines variés, par exemple : utilisation des fractions continues pour l'établissement d'un calendrier, phénomènes périodiques, quelques calculs relatifs au mouvement des planètes, Vénus au Soleil, résolution de l'équation de Kepler.

Arithmétique : solutions entières d'équations à coefficients entiers : Vincent Secherre (IML) Le thème sur lequel repose le stage est celui de la détermination des solutions entières d'une équation algébrique à coefficients entiers, qui constitue l'un des principaux problèmes de l'arithmétique. Il s'agit de poser quelques questions simples (Un entier donné peut-il s'écrire comme une somme de deux carrés ? Quels sont tous les triangles rectangles à côtés entiers ? Existe-t-il des triangles rectangles à côtés entiers et d'aire donnée ?) et de proposer aux élèves quelques méthodes de démonstration : algorithme d'Euclide, méthodes géométriques, lois de groupe sur des courbes, congruences, etc.

Les équations différentielles et leurs applications : Natalia Tronko (CPT) Les applications portent sur différents domaines :

- Systèmes dynamiques : théorie qualitative des équations différentielles et systèmes dynamiques et systèmes dynamiques en temps discret.
- Physique Général : équations différentielles - analogies entre électricité et mécanique.
- Applications aux sciences de la vie et applications à la finance.

Arithmétique et codage dans la vie courant : Stéphane Ballet (IML) Nous proposons l'étude de quelques cas de codage dans la vie courante :

- Codage des nombres dans les ordinateurs ;
- Codage détecteur d'erreurs : les clés de contrôle ;
- Codage chiffré : cryptographie ;
- Codage correcteur d'erreurs.

Modèles de Calcul : Lionel Vaux (IML) Au cours de ce stage on essaiera de dessiner les contours de la notion de calcul, en se posant une question simple mais fondamentale : qu'est-ce que calculer au juste ? Les réponses possibles et les pistes de recherche qui en découlent sont nombreuses : calculabilité, réécriture, constructibilité, systèmes dynamiques, etc. Dans tous les cas il existe des interrogations fondamentales communes : expressivité (qu'est-ce qu'on calcule ?) ; complétude (peut-on tout calculer ?) ; complexité (en combien d'étapes, en utilisant combien d'opérations ?). Pour certains sujets on peut très bien envisager un travail en partie réalisé sur ordinateur (notamment les automates cellulaires 1D ou 2D : il existe des tas de simulateurs).

REFERENCES

Arsac G., Gilles G., Mante M. (1991) *Problème ouvert et situation-problème*. IREM de Lyon.

Audin P., Duchet P. (1992) La recherche à l'école : MATh.en.JEANS. *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique* 121, 1992.

Barbolosi D. (2008) Un exemple de démarche scientifique. *Repères–IREM* 71, 5-22.

Beddou L., Mauduit C. (2001) Research as a method of teaching mathematics. In *Science and Mathematics Teaching for the Information Society*.

Beddou L., Mauduit C. (2004) Recherche et enseignement, l'expérience MATh.en.JEANS. In *Actes de la 3ème université d'été Animath*.

Ministère de l'Éducation nationale. (2010) Annexe : Mathématiques, cycle terminal de la série scientifique, classe de première. *Bulletin officiel spécial* n°9, septembre 2010.

Grenier D. (2009) Changer le rapport des élèves aux mathématiques en intégrant l'activité de recherche dans les classes. In Coulange L., Hache C. (Eds.) (pp. 161-178) *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2009*. Paris : IREM de Paris 7 et ARDM

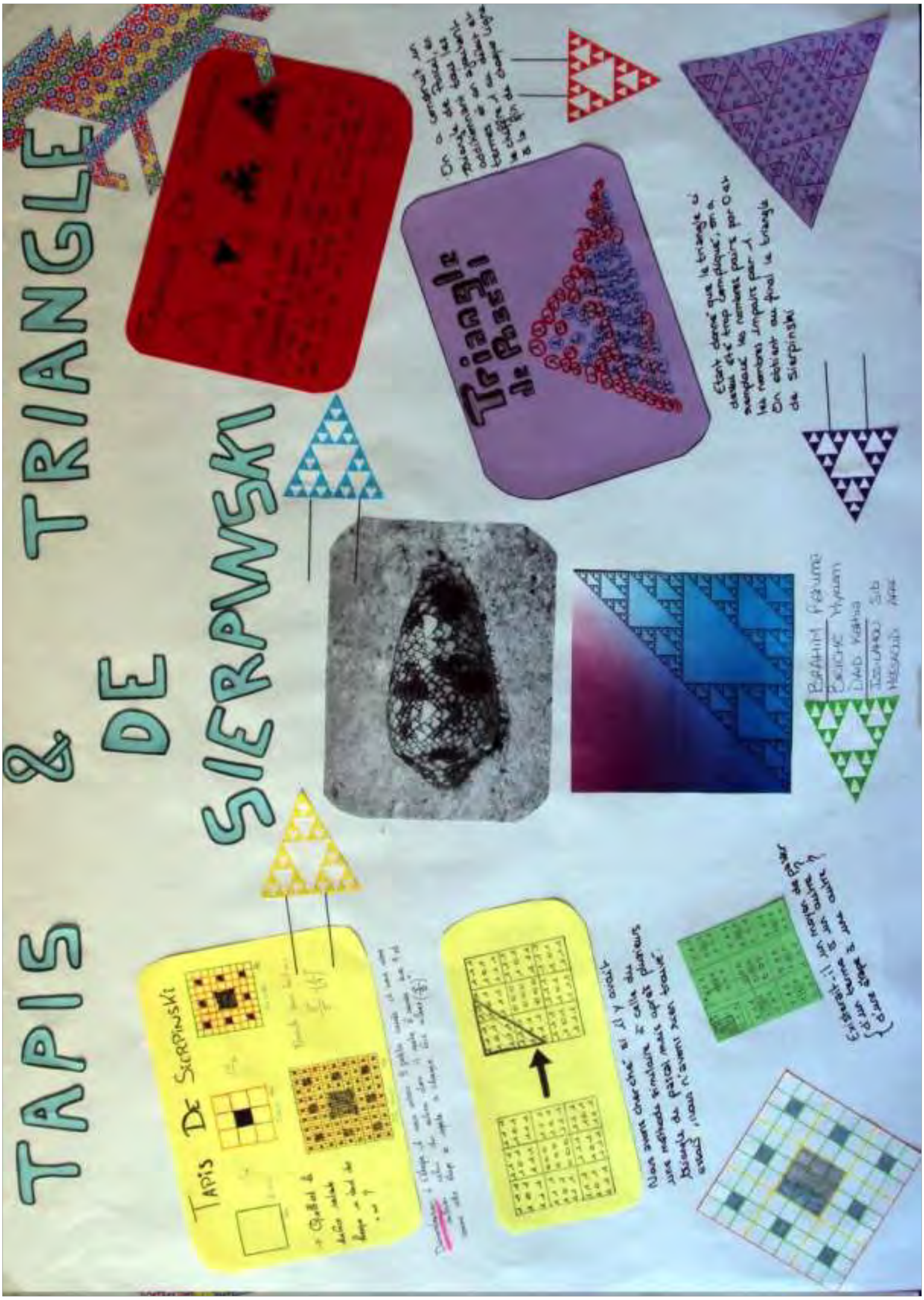
Lakatos I. (1976) *Proofs and Refutations*. Cambridge University Press.

Pólya G (1949) *How to solve it*. Princeton University Press.

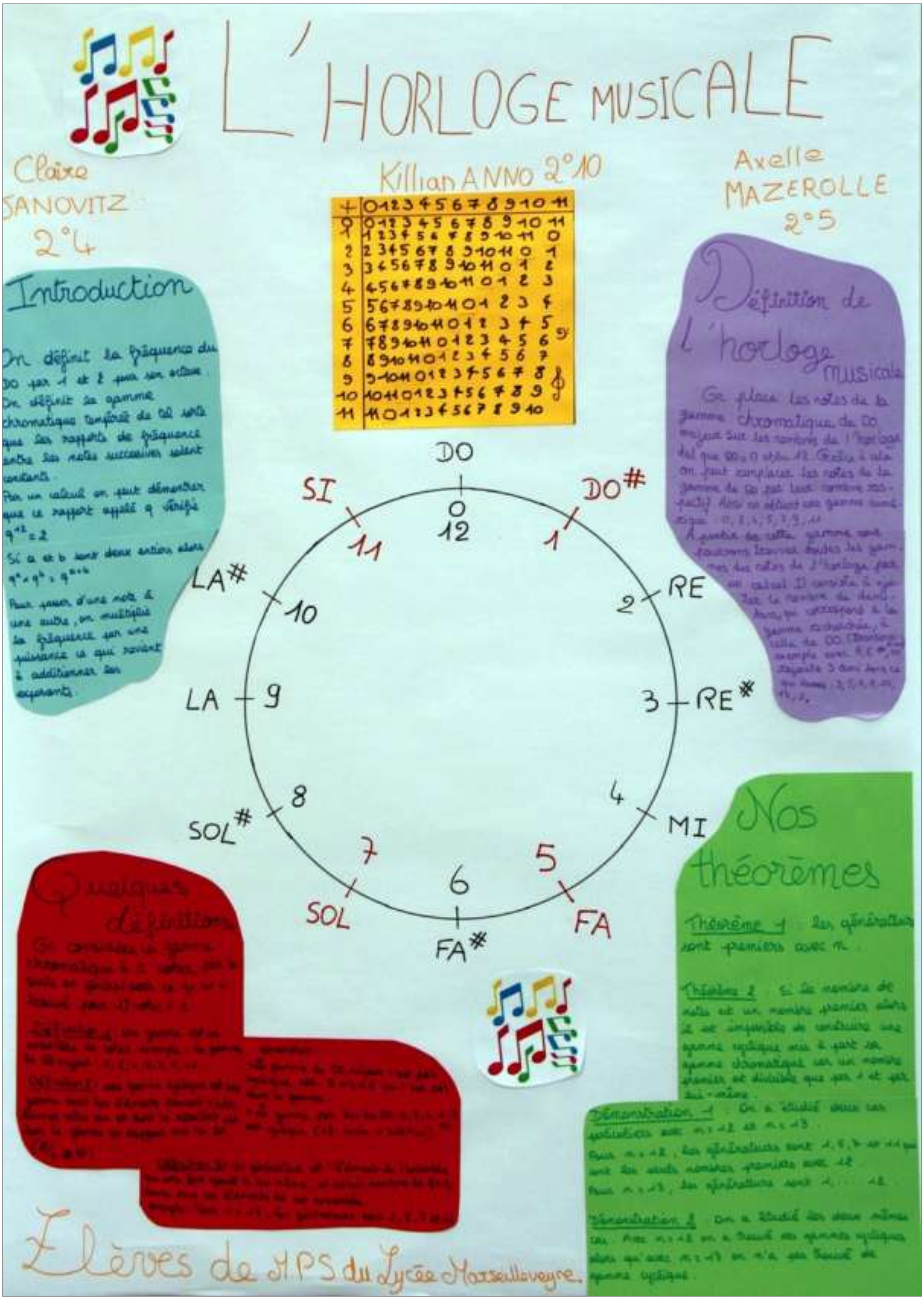
Pólya G. (1968) *Induction and Analogy in Mathematics*. Oxford University Press.

ANNEXE : EXEMPLES DE POSTERS

***Poster 1** – Réalisé par des élèves de terminale S du Lycée Méditerranée (La Ciotat), pendant le stage Modèles de calcul du 1er au 3 décembre 2009 dirigé par Lionel Vaux*



Poster 2 – *Réalisé par des élèves de première S du Lycée Victor Hugo (Marseille), pendant le stage Fractales, pliages de papier, nombres complexes du 28 au 30 mars 2011 dirigé par Pierre Arnoux*



Poster 3 *– Réalisé par des élèves de seconde du Lycée Marseilleveyre (Marseille), pendant le stage Maths et musique du 7 au 9 mars 2011 dirigé par Anne Pichon (Institut de Mathématiques de Luminy)*

LA POSTURE DU HÉRON CRABIER

Pierre-François BURGERMEISTER*

Résumé – Nous présentons une situation d'investigation organisée autour de la *formule de Héron* et dont l'objectif est d'initier des élèves de lycée à l'emploi de la *dimension fonctionnelle* des formules géométriques. Nous décrivons et discutons le déroulement de deux séances expérimentales réalisées sur la base de cette situation avec des élèves de 3ème année du Collège de Genève (17-18 ans) avant de dégager les perspectives possibles de ce premier travail en vue d'un renforcement plus consistant de la dimension fonctionnelle dans les pratiques scolaires.

Mots-clefs : formule géométrique, analyse sémiotique, modélisation algébrique, situation d'investigation, héron crabier

Abstract – We present an inquiry situation for the class organized around the Heron formula which purpose is to introduce the pupils at the use of the functional dimension of a geometric formula. We expose and discuss two experimentations realized from this situation with 3-grade pupils from the College of Geneva (17-18 years old).

Keywords: geometric formula, semiotic analysis, algebraic modeling, inquiry based learning, squacco heron

I. PROBLÉMATIQUE

L'échange ci-dessous se déroule à Genève dans une classe de mathématiques du secondaire 2. Il est fictif bien mais emblématique et il va servir à introduire notre propos :

Thomas (un élève) : L'aire d'un disque, je sais bien que c'est $2\pi r$ ou πr^2, mais je ne me souviens jamais lequel des deux choisir …
Enseignant : Une aire, c'est des mètres ou des mètres carrés ?
Thomas : Des mètres carrés.
Enseignant : Bon. Et bien alors ?
Thomas : Euh … ??
Enseignant : $2\pi r$, c'est des mètres carrés ?
Thomas : Ben … ?

Laissons notre enseignant fictif poursuivre son travail difficile et tentons d'interpréter cet échange. Dans les années qui précèdent, Thomas a appris que la circonférence d'un disque de rayon r est égale à $2\pi r$ et que son aire est donnée par πr^2. Ces formules ont été plus ou moins soigneusement introduites, justifiées et institutionnalisées par ses enseignants, et il a eu l'occasion d'en exercer l'usage dans de nombreux exercices et problèmes. Il est maintenant capable de calculer le périmètre ou l'aire d'un disque de rayon donné en convoquant l'une ou l'autre de ces deux formules, mais le choix qu'il opère entre les deux est incertain et dénué de possibilités de contrôle. En particulier, il ne paraît pas capable de discerner le lien qui existe entre le type de grandeur (longueur ou aire) représenté par chaque formule et la puissance à laquelle y est élevé le rayon du disque.

Cet exemple introductif illustre le propos de ce texte : il vise à apporter des éléments de réflexion sur ce que l'enseignement pourrait faire pour permettre aux élèves d'acquérir une meilleure compréhension des informations plus ou moins explicitement contenues dans une formule géométrique. Ainsi dans un premier temps (section II), nous dégageons et définissons deux fonctions essentiellement distinctes portées par toute formule géométrique, la *fonction procédurale* que maîtrise Thomas et la *fonction sémiotique* dont il ne tire pas profit. A titre d'exemples, nous analysons ensuite la fonction sémiotique de la formule de l'aire d'un

* DiMaGe, Université de Genève – Suisse – pierre.burgermeister@edu.ge.ch

© Burgermeister P.-F. (2012) La posture du héron crabier. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (pp. 1295–1305). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

parallélogramme en fonction des longueurs de deux côtés adjacents et de la mesure de l'angle compris entre les deux (section III), puis celle de la formule de Héron pour l'aire d'un triangle en fonction des longueurs de ses trois côtés (section IV). En renversant la perspective, nous obtenons pour ces deux situations géométriques une liste de conditions que doivent remplir toutes formules potentielles destinées à les représenter. Ces analyses nous permettent alors de dégager des critères heuristiques pour mettre à l'épreuve la validité d'une formule géométrique proposée sous forme de conjecture, critères que nous utilisons pour élaborer un dispositif didactique (section V), sous la forme d'une situation d'investigation autour de la recherche d'une formule géométrique (celle de Héron) par une succession de conjectures et de réfutations. Ce dispositif vise, plus largement, à familiariser les élèves avec la fonction sémiotique des formules géométriques. Nous rendons compte dans la section VI des deux premières expérimentations de ce dispositif et en discutons les résultats. Finalement, la section VII tente de définir les perspectives que peut ouvrir cette étude.

II. LES DEUX FONCTIONS D'UNE FORMULE GÉOMÉTRIQUE

Dans l'institution scolaire, la formule $A = \pi r^2$ possède avant tout une *fonction procédurale* : elle indique comment procéder pour calculer l'aire A d'un disque dont on connaît le rayon r. Cette fonction est la principale raison d'être de la formule dans le cours de mathématiques. Elle est toujours exemplifiée par l'enseignant et largement exercée par les élèves. Elle est au cœur des techniques qui permettent de déterminer l'aire d'un disque donné et on remarque en effet, à l'examen des plans d'études et des moyens d'enseignement, qu'elle possède une niche confortable dans l'écologie des savoirs scolaires.

Mais l'écriture même de la formule $A = \pi r^2$, la façon dont elle associe certains signes, permet de « voir » que l'aire d'un disque est proportionnelle au carré de son rayon, que le coefficient de proportionnalité est π, que, moyennant le fait que π est proche de 3, cette aire correspond à peu près trois carrés de côté le rayon. En outre, le signe du 2 en exposant marque le fait qu'elle s'exprime dans une unité de surface. Nous voyons par là que cette formule possède également une *fonction sémiotique* : elle fonctionne comme une association de signes renvoyant, pour qui sait la décoder, à un ensemble de propriétés mathématiques qui lient le rayon à l'aire du disque.

Pour tenter de préciser le sens que nous donnons à ces deux fonctions, nous nous appuierons sur les notions définies par Bosch et Chevallard (1999) de « valence instrumentale » et de « valence sémiotique » d'un objet ostensif. La première nous semble correspondre assez bien à notre « fonction procédurale » :

> (...) un objet ostensif [dans notre cas : une formule géométrique] est considéré d'abord comme un instrument possible de l'activité humaine, c'est-à-dire comme une entité qui permet, en association avec d'autres, de conformer des techniques permettant d'accomplir certaines tâches, de mener à bien un certain travail [pour nous : calculer l'aire d'un disque dont on connait le rayon]. (Bosch et Chevallard 1999, p. 107)

Et la seconde nous semble englober (mais peut-être en la dépassant) notre « fonction sémiotique » :

> (...) l'ostensif (le représentant) est à la place d'un complexe d'objet (le représenté) qui l'incluent en tant qu'élément intégrant. Pour désigner ce fonctionnement de l'objet ostensif comme signe, nous parlerons de la valence sémiotique ou de la sémioticité des objets ostensifs. (Ibid., pp. 109-110)

Cependant, Bosch et Chevallard voient une ouverture dans l'instrumentalité d'un ostensif :

> Sa nature ostensive donne à l'objet ostensif une instrumentalité potentielle, sa valence instrumentale. Mais c'est son engagement dans un ensemble de techniques institutionnellement déterminées, en vue

> d'accomplir des tâches déterminées, qui en fera un instrument concrètement défini, et cela sans que son instrumentalité cesse d'être ouverte à d'autres usages possibles. (Ibid., p. 107)

ainsi que dans sa sémioticité :

> Les usages possibles d'un objet ostensif dans différentes pratiques font que sa sémioticité reste toujours ouverte, même si sa valeur sémiotique, réalisée concrètement par son engagement dans une *praxis* déterminée, ne peut être fixée à volonté. (Ibid., p. 110)

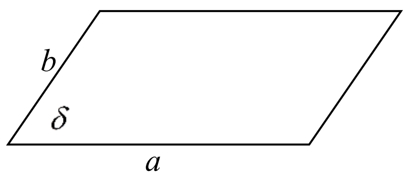
alors que la fonction procédurale d'une formule géométrique est, à notre sens, univoquement déterminée[1], de même que sa fonction sémiotique. Il nous semble que les ouvertures évoquées par Bosch et Chevallard tiennent essentiellement aux possibilités de transformations des objets ostensifs qu'ils décrivent alors que nous considérons ici les formules géométriques de manière statique et que nous nous intéressons à leurs fonctions possibles hors transformation.

Cette contribution s'intéresse plus particulièrement à la fonction sémiotique des formules géométriques et à son apprentissage. Nous considérons que la plupart des élèves du secondaire genevois, à l'image de Thomas, maîtrisent très mal cette fonction. Plus exactement, ils ne sont pas capables d'analyser les liens entre une formule géométrique, c'est-à-dire un ensemble de signes organisés par une syntaxe particulière, et les signifiés concernant les relations entre les variables en jeu auxquelles cette organisation, précisément, renvoie. Dans ce contexte, nous nous proposons de chercher des moyens propres à développer les facultés d'analyse sémiotique des élèves lorsqu'ils sont confrontés à des formules géométriques.

III. UN EXEMPLE ÉLÉMENTAIRE

Ce premier exemple va nous permettre d'expliciter la fonction sémiotique d'une formule élémentaire. Nous renverserons ensuite la perspective pour constater que l'analyse sémiotique d'une formule géométrique peut être vue comme le processus inverse de la modélisation algébrique d'une situation géométrique.

Dans le plan euclidien, un parallélogramme est entièrement déterminé par la donnée des longueurs de deux côtés adjacents et de l'angle compris entre ces deux côtés. L'aire de ce parallélogramme peut s'obtenir de ces trois données par la formule $A = a \cdot b \cdot \sin(\delta)$.



La fonction procédurale de cette formule est évidement de calculer A pour des valeurs données de a, b et δ. Sa fonction sémiotique est de signifier que :

i. A est proportionnelle à a : pour b et δ fixés, A double (respectivement est multipliée par un facteur k) lorsque a double (respectivement est multiplié par k).

ii. A est proportionnelle à b pour la même raison.

iii. l'aire A étant le produit de a, b et d'un facteur dénué d'unité, elle s'exprime dans une unité composée du produit des unités de a et de b.

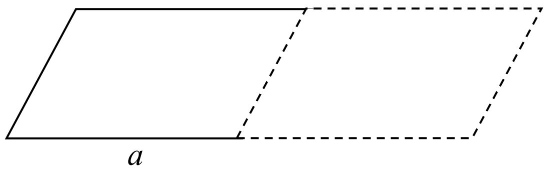
iv. A prend les valeurs 0, ab et 0 lorsque δ prend les valeurs 0°, 90° et 180° respectivement.

---

[1] Ainsi, la fonction procédurale de la formule $A = \pi r^2$ est de calculer l'aire A correspondant à une valeur donnée du rayon r, alors que cette formule admet au moins deux valences instrumentales potentielles : le calcul de A pour un r donné d'une part ; le calcul de r pour un A donné d'autre part, modulo une transformation de formule.

Nous avons établi cette liste de quatre points en partant d'une formule donnée et en cherchant à y « lire » les relations qu'elle signifie entre les grandeurs variables a, b, δ et A. Renversons maintenant la perspective : plutôt que d'aller de l'algébrique vers le géométrique, allons en sens inverse : en partant de la situation géométrique du parallélogramme représenté ci-dessus et en analysant cette situation, déterminons les relations algébriques qui doivent lier a, b, δ et A dans une formule que nous supposons encore inconnue. Cette analyse géométrique nous amène à remarquer que, dans la formule recherchée, l'aire A doit :

C1 être proportionnelle à a : en effet pour b et δ fixés, A doit doubler (respectivement être multipliée par un facteur k) lorsque a double (respectivement est multiplié par k),



C2 être proportionnelle à b pour la même raison,

C3 s'exprimer dans une unité de surface,

C4 prendre les valeurs 0, ab et 0 lorsque δ prend les valeurs 0°, 90° et 180° respectivement.

Remarquons que le chemin parcouru en sens inverse, c'est-à-dire du géométrique vers l'algébrique, nous fait passer par les quatre points déjà rencontrés précédemment, mais formulés cette fois sous forme de conditions déduites de la réalité géométriques et dont la formule algébrique cherchée doit rendre compte.

Récapitulons : l'analyse sémiotique de la formule $A = a \cdot b \cdot \sin(\delta)$ consiste à interroger la syntaxe de l'écriture $a \cdot b \cdot \sin(\delta)$, autrement dit à analyser algébriquement cette formule, pour en retirer les informations i à iv portant sur la situation géométrique à laquelle elle fait référence. En sens inverse, l'analyse géométrique de la situation nous permet de remarquer que les conditions C1 à C4 doivent être respectées par une formule potentielle (supposée encore inconnue). Il nous semble que les deux analyses sont intimement liées sitôt que l'on considère une formule géométrique comme une modélisation algébrique d'une situation géométrique, suivant ainsi Chevallard (1989) pour qui la modélisation mathématique

> (...) suppose essentiellement deux registres d'entités : un système mathématique ou non mathématique et un modèle (mathématique) de ce système. (Op. cité, p. 53)

Considérée ainsi, l'analyse sémiotique d'une formule géométrique consiste à expliciter les informations que porte le modèle (algébrique) relativement au système (géométrique), alors que l'analyse géométrique consiste à retirer les informations essentielles d'un système (géométrique) pour en construire un modèle (algébrique), c'est-à-dire à modéliser algébriquement le système géométrique. Les deux analyses concernent donc un même couple système – modèle. C'est pourquoi nous postulerons par la suite (section V) qu'un travail didactique sur l'analyse géométrique des contraintes et la construction du modèle algébrique à partir de ces contraintes, s'il est porteur d'apprentissages sur la relation entre système et modèle, doit permettre aux élèves de développer, en retour, leurs facultés d'analyse sémiotique des formules géométriques.

Nous passons maintenant à l'analyse de la formule en jeu dans notre situation d'investigation expérimentale.

IV. LA FORMULE DE HÉRON POUR L'AIRE D'UN TRIANGLE

Dans la plan euclidien, un triangle est entièrement déterminé par la donnée des longueurs *a*, *b* et *c* de ses trois côtés. En particulier, son aire *A* peut s'exprimer en fonction de *a*, *b* et *c* uniquement. Ce résultat classique est connu sous le nom de formule de Héron (ou théorème de Héron). Dans la littérature, (par exemple Ostermann et Wanner, à paraître, pp.183–185), il apparaît généralement sous la forme suivante :

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \qquad (1)$$

où $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ représente le demi périmètre du triangle.

Dans ce texte, nous préférerons cependant la forme développée :

$$A = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} \qquad (2)$$

La forme (2) présente sur la première un désavantage esthétique qui explique vraisemblablement l'adoption généralisée de la forme (1) dans la littérature tant scolaire que scientifique, mais elle présente à nos yeux un avantage didactique déterminant, celui de permettre une analyse sémiotique plus directe ou, autrement dit, de proposer une modélisation plus facilement « lisible ». En effet, l'analyse algébrique de cette forme nous permet de constater que

i. *Unités* : *A* s'exprime dans une unité qui est le carré de celle des trois côtés.

ii. *Symétrie* en *a*, *b* et *c* : les trois variables peuvent être interchangées dans la formule sans que le résultat en soit affecté.

iii. *Valeurs extrêmes* : *A* s'annule si $a+b=c$; idem pour $b+c=a$, $c+a=b$ et $a+b+c=0$.

iv. *Valeurs non définies :* $A \notin \mathbf{R}$ si $a+b<c$; idem pour $b+c<a$ et $c+a<b$.

Mais l'avantage de la forme (2) devient encore plus évident lorsque nous nous intéressons, à l'inverse, au travail de modélisation algébrique de la situation géométrique. En effet, mettons nous dans la posture de chercher à établir une formule (supposée inconnue) pour établir l'aire *A* d'un triangle en fonction des longueurs *a*, *b* et *c* de ses trois côtés. Quelles sont, sur la base d'une analyse de cette situation géométrique, les contraintes que la formule recherchée devra respecter ? En voici une liste (non exhaustive mais suffisante pour en déduire la formule) :

C1 *Respect des unités* : le résultat doit être de degré 2.

C2 *Symétrie* en *a*, *b* et *c* : les places des trois côtés doivent pouvoir être interchangées dans la formule sans que le résultat en soit affecté.

C3 *Respect des cas dégénérés de première espèce* : Si $a+b=c$, *A* doit être nulle ; idem pour $b+c=a$ et $c+a=b$.

C4 *Respect des cas dégénérés de deuxième espèce* : Si $a=0$ et si $b=c$, *A* doit être nulle ; idem pour $b=0$ et $c=a$ ainsi que pour $c=0$ et $a=b$.

C5 *Respect des cas impossibles de la première espèce* : Il n'existe pas de triangle avec $a+b<c$. La formule doit rendre compte de cette impossibilité. Idem pour $b+c<a$ et $c+a<b$.

C6 *Respect des cas impossibles de la deuxième espèce* : Il n'existe pas de triangle avec $a < 0$. La formule doit rendre compte de cette impossibilité.

C7 *Respect des cas particuliers connus*, par exemple 3–4–5, 5–12–13 et *a–a–a* : dans ces cas particuliers, la formule doit donner les valeurs adéquates pour A ($6, 30$ et $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ respectivement).

Il apparaît clairement que la modélisation proposée par la forme (2) de la formule de Héron est plus facilement accessible, à partir des contraintes ci-dessus (en particulier C3) que celle de la forme (1).

Nous avons établi cette liste en cherchant à répertorier les contraintes minimales qui pourraient permettre, à elles seules, de déterminer un modèle algébrique aussi proche que possible de la forme (2). Notons toutefois que, pour être déjà relativement longue, cette liste n'est pas exhaustive. Par exemple, nous n'avons pas retenu la contrainte « A doit toujours être positive » qu'il n'est pas nécessaire d'ajouter aux précédentes pour pouvoir construire le modèle recherché.

Dans la section suivante, nous allons construire un dispositif didactique autour de la tâche « modéliser algébriquement la relation qui lie l'aire d'un triangle aux longueurs de ses trois côtés ». Cependant, en raison du contrat de recherche que nous définirons avec les élèves, cette tâche sera énoncée sous une forme proche de « deviner une formule permettant de calculer l'aire d'un triangle en fonction des longueurs de ses trois côtés ». Les contraintes C1 à C7 listées ci-dessus nous servirons de balises pour l'avancement de la recherche.

V. ÉLABORATION DU DISPOSITIF DIDACTIQUE

Le dispositif que nous allons présenter s'adresse à des élèves du collège genevois (équivalent du lycée français), et en particulier à des classes de 3ème année (élèves de 17-18 ans). L'objectif général est d'entraîner les élèves à repérer, par décryptage de la syntaxe algébrique, les traits saillants des relations et contraintes liant les variables à l'intérieur d'une formule géométrique donnée. Nous aimerions que les élèves adoptent dans cette recherche la même attitude que le Héron Crabier – espèce de petit héron discret et au regard particulièrement aiguisé – lorsqu'il scrute ses proies cachées dans la vase du marais :

> Tantôt il s'avance lentement, le dos voûté et le cou rentré, levant haut une patte après l'autre ; ses longs doigts lui permettent de marcher sur la vase molle et sur les plantes sans s'enfoncer, à la manière d'un Râle. Tantôt il s'accroupit à l'affût, penché en avant et le cou un peu allongé, le bec très proche de l'eau qu'il scrute du regard, tout comme un Butor. (Géroudet, p. 71)

Au vu du rôle de « chercheur » conféré aux élèves, nous plaçons ce dispositif dans le cadre des « situations d'investigation », ou Inquiry Based Learning, au sens de Linn et al. (2004) :

> By definition, inquiry is the intentional process of diagnosing problems, critiquing experiments, and distinguishing alternatives, planning investigations, researching conjectures, searching for information, constructing models, debating with peers, and forming coherent arguments. (cité par Rocard et al. 2007, p. 9)

Plus prosaïquement, nous visons essentiellement l'objectif d'apprentissage suivant :

Objectif général (version décodage) :

Être capable de procéder à l'analyse sémiotique d'une formule géométrique. C'est-à-dire savoir lire dans la syntaxe algébrique de cette formule tout ce qu'elle signifie en termes de relations et contraintes entre les variables géométriques qui la composent.

Notre objectif principal est donc l'apprentissage de l'analyse sémiotique d'une formule ou, autrement dit, de son décodage algébrique. Or, nous adoptons comme postulat que pour pouvoir décoder il est nécessaire de connaître le codage. Dès lors, nous nous proposons d'initier les élèves au codage algébrique d'une situation géométrique. Et nous reformulons notre objectif général de la manière suivante :

Objectif général (version codage) :

> Être capable de modéliser une situation géométrique par un modèle algébrique. Plus précisément : savoir expliciter les contraintes qu'une situation géométrique donnée impose à tout modèle algébrique (formule) supposé la représenter, et savoir organiser ces différentes contraintes au sein d'un modèle algébrique à éprouver.

Pour travailler cet objectif sous la forme d'une situation pour la classe, nous avons choisi le cas particulier de la formule de Héron pour trois raisons. Premièrement, le système géométrique qu'elle modélise est suffisamment simple pour que l'entrée des élèves dans l'activité soit aisée. D'autre part, les contraintes algébriques à respecter (cf. C1 à C7 ci-dessus) sont nombreuses et riches ; l'enjeu d'apprentissage, c'est-à-dire l'explicitation de ces contraintes, est ainsi particulièrement consistant. Finalement, cette formule ne faisant pas partie du plan d'étude genevois, nous pouvons raisonnablement faire l'hypothèse qu'elle ne sera pas déjà connue des élèves de notre dispositif expérimental, condition essentielle pour qu'ils puissent entrer dans une réelle démarche d'investigation (ils ne connaîtront pas le résultat à l'avance).

Dans ce cas particulier, notre objectif général se décline comme :

Objectif spécifique (pour la formule de Héron) :

> Être capable d'identifier les contraintes algébriques que doit vérifier un candidat-formule pour exprimer l'aire d'un triangle en fonction des longueurs de ses trois côtés ; savoir organiser ces différentes contraintes au sein d'un modèle algébrique à éprouver ; savoir mettre ce modèle à l'épreuve de quelques triangles particuliers.

Notre propos est maintenant d'élaborer un dispositif didactique visant à mettre les élèves en situation d'investigation autour de la tâche « deviner une formule permettant de calculer l'aire d'un triangle en fonction des longueurs de ses trois côtés ».

L'objectif premier étant l'identification des contraintes algébriques que cette formule devra respecter, nous désirons que ces contraintes soient mobilisées et formulées par les élèves eux-mêmes. C'est pourquoi, nous avons choisi d'organiser la recherche sous la forme d'un débat scientifique (Legrand 1990) avec toute la classe, et plus particulièrement d'un « débat de conjecture » :

> (...) il s'agit alors pour l'enseignant se susciter un certain nombre d'énoncés conjecturaux (...). Le débat porte alors d'une part sur la correction des énoncés proposés en tant qu'énoncés scientifiques (exigence de forme) et d'autre part sur la validité de l'affirmation ; les arguments apportés par les participants sont à leur tour examinés sous ces deux aspects. (Op. cité, p. 92)

Ce dispositif offre en effet deux caractéristiques particulièrement adéquates à notre propos. D'une part, les propositions de tous les élèves d'une classe s'ajoutant les unes aux autres, les probabilités d'apparition des différentes contraintes visées sont optimisées. D'autre part, la forme du débat place sur les élèves la responsabilité d'examiner la validité des conjectures proposées et donc de les tester sur des cas particuliers, de les réfuter lorsqu'il y a lieu et de poursuivre ainsi la recherche de la manière la plus adidactique possible.

Nous devons néanmoins nous demander, pour chacune des contraintes C1 à C7 identifiées plus haut, dans quelle mesure nous pouvons nous attendre à ce que les élèves de notre expérience y fassent appel d'eux-mêmes. Nous procédons maintenant à cet examen préalable :

C1 devrait être rapidement mobilisé par une partie importante des élèves. En effet, cette contrainte est fréquemment utilisée comme critère de pertinence dans les cours de maths et de physique du collège. Et même s'ils ne l'utilisent généralement pas eux-mêmes dans leurs pratiques mathématiques usuelles (c'est-à-dire sous le contrat didactique usuel), il est probable que dans le contexte d'un débat scientifique (et sous le contrat didactique spécifique à ce contexte), les élèves cherchent à mobiliser des outils de contrôle connus.

La mobilisation de C2 par les élèves semble beaucoup moins probable car cette contrainte n'est pratiquement jamais explicitée dans les cours de mathématiques et de physique. Nous nous attendons donc à ce qu'une intervention de l'enseignant soit probablement nécessaire à son apparition.

Par rapport aux deux premières contraintes, C3 à C6 sont plus spécifiques à la situation géométrique. Leur mise en évidence suppose une analyse fonctionnelle (examiner comment varie l'aire lorsque les côtés varient) couplée avec une modélisation algébrique relativement complexe pour les élèves concernés (par exemple, la contrainte « A est nulle si $a+b=c$ » doit être modélisée par la présence du facteur $(a+b-c)$ dans la formule). En ce sens, elles constituent à la fois une difficulté importante et un enjeu fort de notre dispositif. Avant les expérimentations en classe, nous étions très incertains quant à la probabilité de construction de ces contraintes par les élèves au cours du débat.

C7 doit impérativement être mobilisée par les élèves pour que la recherche puisse avancer de manière contrôlée. Nous pouvons essayer de favoriser son emploi en exposant le problème aux élèves à partir d'un cas particulier (par exemple 3–4–5) et en laissant ce cas exposé durant le débat.

Notons enfin que C4 est contenue dans C3 : si $a=0$ et si $b=c$, alors $a+b=c$. De même C6 est contenue dans C5 : si $a<0$, alors $a+b<c$ ou $a+c<b$. Autrement dit, l'identification des cas dégénérés et impossibles de la première espèce est plus utile que celle des cas de la deuxième espèce. Et de fait, ce sont bien les cas de la première espèce qui constituent les clés pour accéder à un modèle algébrique relativement abouti.

La section suivante décrit les deux expérimentations de ce dispositif que nous avons effectuées.

VI. EXPÉRIMENTATIONS

Nous avons expérimenté la situation « Héron Crabier » dans deux classes de 3ème année du Collège genevois (élèves de 17-18 ans). La première, dans laquelle nous occupions nous-même le poste d'enseignant de mathématiques, regroupait des élèves qui avaient choisi un niveau « fort » pour cette discipline (classe F pour la suite), alors que la seconde regroupait des élèves de niveau « normal » (classe N) du même établissement et était placée sous la responsabilité d'un autre enseignant de mathématiques. Dans chaque cas, une séance de 45 minutes du cours de mathématique a été consacrée à cette activité, sans aucune préparation spécifique au préalable. Pour la classe N, nous avons préalablement présenté à l'enseignant les objectifs de la séance (identification et emploi de contraintes algébriques par les élèves) et discuté avec lui des modalités de son déroulement, en imposant la forme générale du débat scientifique, mais en lui laissant adapter les détails de sa mise en œuvre.

Dans la classe F, nous avons introduit la séance en demandant aux élèves s'il était possible de construire un ou plusieurs triangles de côtés 8–15–20 puis, après avoir rapidement obtenu et validé les réponses souhaitées, nous avons institutionnalisé l'existence et l'unicité (à isométries près) pour ce cas particulier. Nous sommes ensuite passé au cas général et avons institutionnalisé par extrapolation l'unicité du triangle de côtés *a–b–c*, lorsque *a*, *b* et *c* sont des réels positifs, sans se préoccuper des cas dégénérés et impossibles. Nous en avons déduit l'existence potentielle d'une formule permettant de calculer l'aire d'un triangle en fonction des longueurs de ses trois côtés uniquement. Finalement, nous avons exposé aux élèves le contrat de la recherche : à eux la responsabilité de proposer une formule possible puis d'en discuter la vraisemblance sans passer par l'élaboration d'un calcul algébrique complexe (du type Aire = ½*base*hauteur, or hauteur = ... , donc ... , etc), et d'affiner ainsi, petit à petit, les conjectures ; à nous de diriger le débat et de prendre note au tableau noir des formules suggérées et des critères utilisés pour en discuter la pertinence. Nous schématisons ci-dessous l'avancée de cette recherche. Les éléments amenés par l'enseignant sont indiqués par un (Ens), le reste provient des élèves.

Dans le schéma ci-dessous, P indique une proposition (ou conjecture) de formule, C une contrainte explicitée, E un essai de mise à l'épreuve d'une conjecture sur un triangle particulier.

Notons que la proposition P4 a été formulée par un élève qui avait déjà rencontré la formule de Héron dans son parcours antérieur et a fait appel aux bribes de souvenirs qui lui en restaient.

P1 (Ens) : $A = abc$

C1 : il ne faut pas des cm^3

P2 : $A = \dfrac{a+b}{2} \cdot c$

C5 : $a+b \geq c$

Réfutation de P2 : $A = \dfrac{h}{2} \cdot c$ où *h* est la hauteur qui correspond à la base *c*. Or, *h* est forcément plus petit que $a+b$.

Deuxième réfutation P2 : si on prend le cas extrême où $a+b=c$, ça nous ferait $\dfrac{c^2}{2}$. Or, dans ce cas l'aire devrait être nulle.

C3 : Si $a+b=c$, l'aire doit être nulle.

P3 : $(a+b-c) \cdot c$

E1 : avec 3–4–5, $a=3, b=4, c=5$, P3 donne une aire de 10 alors qu'il faudrait 6.

E1 bis et P3 : avec 3–4–5, $a=3, b=4, c=5$, $(a+b-c) \cdot a$ est correcte.

I1 (première impasse) : c'est impossible que ça marche quels que soient les côtés que l'on appelle *a*, *b* ou *c*.

Sortie de I1 et C2 (Ens) : si on a une formule qui tient la route, on doit pouvoir échanger les noms sans que ça modifie le résultat.

P4 : $A = \dfrac{(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}{a+b+c}$

Réfutation de P4 avec E1 : on obtient 4 et non 6.

P5 : $A = \dfrac{(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}{a+b+c} + 2$

Réfutation de P5 avec C3 : si $a+b=c$, P5 donne une aire de 2 au lieu de 0.

P6 : $A = \dfrac{(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}{a+b+c} \cdot \dfrac{3}{2}$

E2 et réfutation de P6 : avec *a–a–a*, P6 est fausse car elle donne $\frac{a^2}{2}$ qui ne peut pas être égal à $\frac{ah}{2}$ (où h est la hauteur correspondant à la base a) car la hauteur d'un triangle équilatéral est plus petite que son côté.

E2 suite (sur demande de Ens) : avec *a–a–a*, l'aire est $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

I2 : on ne peut pas adapter P4 avec une multiplication par une constante.

Sortie de I2 (Ens) : $(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$ était nécessaire, mais les unités n'étaient pas respectées. Partant de là, y a-t-il un moyen de respecter les unités autre que de diviser par $a+b+c$?

P7 : $\left(\sqrt[3]{(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}\right)^2$

Réfutation de P7 et C5 (Ens) : si $a+b-c<0$, le triangle est impossible. P7 ne rend pas compte de cette impossibilité.

P8 : $\sqrt{(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)(a+b+c)}$

Test de P8 avec E1 et E2 : on trouve 24 et $\sqrt{3}a^2$ au lieu de 6 et $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ respectivement.

P9 : $\frac{1}{4}\sqrt{(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)(a+b+c)}$

Cette recherche collective, qui a duré moins de 40 minutes, a abouti à conjecturer la formule de Héron elle-même. Mais surtout, et c'est ce qui nous intéresse en premier lieu, les contraintes C1 (respect des unités), C3 (cas dégénérés de la première espèce) et C5 (cas impossibles de la première espèce) ont été explicitées par les élèves, alors que C2 (symétrie en *a*, *b*, *c*) a été amenée par nous sur la base d'une ébauche inaboutie des élèves. Observons aussi un phénomène de co-genèse que nous n'avions pas anticipé : C2 a été élaborée sur la base de l'essai E1 après que les différentes utilisations de ce dernier aient montré la nécessité de la symétrie. L'interdépendance entre les mises à l'épreuve des conjectures sur des cas particuliers et l'élaboration des contraintes s'avère plus complexe que nous le pensions.

Nous ne détaillons pas le déroulement de l'expérience réalisée dans la classe N. Disons seulement que l'enseignant a entamé la séance en annonçant aux élèves qu'ils allaient « enfin faire des mathématiques », mais sans préciser davantage les clauses du contrat de recherche. Il a ensuite demandé aux élèves s'il était toujours possible de construire un triangle de côtés donnés *a–b–c*, puis, face au silence persistant de la salle, il a proposé d'essayer avec des exemples. Un élève a proposé le cas 3–4–5, dont l'existence a été admise par l'enseignant qui a demandé s'il y avait des cas « pathologiques ». Après un nouveau mutisme de la classe, c'est l'enseignant lui-même qui a proposé le cas 100–2–2 et qui a ainsi amené la condition C5 qu'il voulait établir préalablement au démarrage de la recherche d'une formule d'aire. Lorsque cette recherche a alors commencé, il nous semble que le contrat était déjà implicitement biaisé : les élèves se sont installés dans une position d'auditeurs en attente des réponses de l'enseignant à ses propres questions et celui-ci s'est effectivement trouvé peu à peu contraint à prendre sur lui la totalité de l'avancée de la recherche.

VII. PERSPECTIVES

Quelles conclusions pouvons-nous tirer de ces premières expérimentations ? Et quelles perspectives nous laissent-t-elles entrevoir ?

En premier lieu, l'expérience de la classe F montre que l'objectif spécifique que nous visions à travers cette activité est bien à la portée du groupe classe, pour autant qu'un certain encadrement soit apporté par l'enseignant. Quant à l'expérience de la classe N, elle montre bien que la tâche proposée aux élèves n'est – de loin – pas aisée pour les élèves. Elle illustre d'autre part la difficulté du travail de l'enseignant qui doit tenir un équilibre périlleux entre une direction de débat la moins interventionniste possible et la nécessité d'insuffler lorsque c'est nécessaire quelques éléments de relance judicieusement choisis. Ce double constat confirme à la fois l'intérêt de notre situation d'investigation relativement aux objectifs visés et la difficulté de sa mise en pratique dans la classe.

En deuxième analyse, nous devrons examiner plus finement le déroulement des deux séances expérimentales (nous disposons des enregistrements vidéo) et, surtout, réaliser d'autres expérimentations pour essayer d'améliorer notre situation, notamment dans les modalités de son déroulement. On peut par exemple se demander si une première phase de recherche par groupes d'élèves permettrait d'améliorer l'implication de chacun dans le débat en grand groupe qui suivrait dans une seconde phase, ce point étant particulièrement important pour les élèves aux profils les moins scientifiques.

Nous aimerions à plus long terme construire d'autres situations d'investigation en vue d'ancrer la pratique de la démarche d'analyse sémiotiques des formules géométriques dans le bagage technique des élèves. Finalement, il s'agira de s'interroger sur la possibilité d'insérer cette pratique dans l'enseignement usuel, en construisant des situations collant de plus près, dans leur contenu, au plan d'étude du Collège genevois et plus proches, dans leur forme, des exercices habituellement proposés aux élèves dans les cours de mathématiques.

REFERENCES

Bosch M., Chevallard Y. (1999) La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherche en Didactique des Mathématiques* 19.1, 77-124.

Chevallard Y. (1989) Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège, deuxième partie : perspectives curriculaires, la notion de modélisation. *Petit x* 19, 43-72.

Géroudet P. (1978) *Grands Echassiers, Gallinacés, Râles d'Europe*. Neuchâtel : Delachaux et Niestlé.

Legrand M. (1990) Le débat scientifique en cours de mathématiques. In Commission Inter-Irem-Université (Ed.) (pp. 91-109) *Enseigner autrement les mathématiques en DEUG A première année, principes et réalisations*. IREM de Lyon.

Linn M. C., Davis E. A., Bell P. (2004) *Internet environments for science education*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Ostermann A., Wanner G. (à paraître) *Geometry by Its History*. Berlin: Springer.

Rocard M., Cesrmley P., Jorde D., Lenzen D., Walberg-Herniksson H., Hemmo V. (2007) *Science education NOW: A Renewed Pedagogy for the Future of Europe.* http://ec.europa.eu/research/science-society/document_library/pdf_06/report-rocard-on-science-education_en.pdf, consulté en mars 2010.

DÉMARCHE D'INVESTIGATION ET ASPECTS TEMPORELS DES PROCESSUS D'APPRENTISSAGE/ENSEIGNEMENT

Sylvie COPPE*

Resumé – Nous présentons les premiers résultats d'une recherche en cours dans le cadre du projet européen S-TEAM (Science Teacher Education Advanced Methods) qui vise à étudier l'évolution des pratiques des enseignants vers la mise en place des séances qui permettent aux élèves d'être plus actifs dans leurs apprentissages notamment en utilisant les démarches d'investigation ou des dispositifs proches. Nous souhaitons traiter de la question des liens entre démarche(s) d'investigation et aspects temporels des processus d'apprentissage, et donc d'enseignement. A travers l'analyse du cas d'une professeure filmée pendant les 18 premières séances de l'année en classe de 4^e^, nous voulons montrer comment des apprentissages peuvent se réaliser en articulant plusieurs activités liées comprenant des phases de dévolution et d'institutionnalisation.

Mots clefs : démarche d'investigation, résolution de problèmes, activités isolées/liées, algèbre, collège

Abstract – We are presenting the first results of an ongoing research which is part of the European project called S-TEAM (Science Teacher Education Advanced Methods). The aim of this research is to study the evolution of teaching practices through the use of the inquiry-based learning method or other similar devices. In order to show how effective learning processes could be, we would like to integrate the temporal aspects of both learning processes and teaching processes into the inquiry-based learning activities. Through an analysis made on the practice of a teacher whose first 18 lessons with third-year secondary school pupils were filmed, we're aiming to show how acquisition of knowledge can be carried out by working on several activities linked to each other and by having devolution phases alternate with institutionalization phases.

Key words : Inquiry based learning, problem solving, isolated/linked activities, algebra, secondary school

La démarche d'investigation a été introduite en France, dans les programmes officiels du collège de 2005 (BO HS n° 5 du 25 août 2005, p. 6), puis reprise dans les programmes de 2007 et 2008, pour toutes les disciplines scientifiques (y compris les mathématiques) dans « l'Introduction commune à l'ensemble des disciplines scientifiques ». Celle–ci est présentée comme une démarche d'enseignement basée sur la mise en questionnement et en activité des élèves, avec cependant des différences épistémologiques suivant les disciplines : pour les mathématiques, on insiste sur la résolution de problèmes et la validation par la démonstration ; pour les sciences, sur la formulation d'hypothèses et la validation par l'expérimentation.

Pour les didacticien(ne)s des mathématiques, ce discours mettant en avant la résolution de problèmes, la mise en activité des élèves, les procédures de contrôle et de validation n'est pas nouveau. Depuis une trentaine d'année, les programmes de mathématiques français ont commencé à le développer. C'est ce que nous verrons dans la première partie où nous ferons un point sur l'évolution des programmes de mathématiques.

Mais nous savons aussi, par notre expérience en formation des maîtres, que les pratiques n'évoluent pas aussi vite que les injonctions institutionnelles le préconisent et que l'activité des élèves n'est pas toujours favorisée même si l'accent est mis sur ce point en formation. Ceci est certainement dû à la tradition française fortement ancrée sur les savoirs, au faible développement du travail collectif entre les enseignants, au manque de ressources sur le sujet et peut-être à l'organisation de l'enseignement français. Mais tout de même, des évolutions se dessinent dans les pratiques, c'est ce que nous verrons dans la deuxième partie.

* IUFM de Lyon, Université Lyon 1, UMR ICAR (Université Lyon 2, CNRS, ENS Lyon) – France – sylvie.coppe@univ-lyon2.fr

© Coppé S. (2012) Démarche d'investigation et aspects temporels des processus d'apprentissage/enseignement. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21^e^ siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT10, pp. 1306–1318). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

Enfin, dans la troisième partie, nous présenterons les premiers résultats d'une recherche en cours dans le cadre du projet européen S-TEAM (Science Teacher Education Advanced Methods) qui vise à étudier l'évolution des pratiques des enseignants en mettant en place des séances utilisant notamment les démarches d'investigation. Dans le cadre de ce projet pluridisciplinaire (mathématiques, sciences physiques et sciences de la vie et de la terre), visant à étudier des pratiques de classes ordinaires (les chercheurs n'interviennent à aucun moment sur les thèmes ou sujets, les progressions ou les situations de classe), nous avons filmé des séances successives de classe avec des professeurs volontaires qui ne sont pas débutants. Certains d'entre eux participent à un projet de recherche/action intitulé SESAMES (Situations d'Enseignement Scientifique : Activités de Modélisation, d'Evaluation, de Simulation). Ce groupe a pour but la production collaborative (par des enseignants et des chercheurs) de ressources pour les enseignants et les formateurs des disciplines concernées favorisant la mise en activité des élèves et leur prise de responsabilité vis-à-vis des savoirs enseignés, notamment par la mise en place de démarches d'investigation. Pour nous, en mathématiques, le thème est l'algèbre au collège. Les documents sont disponibles sur le site http://www.inrp.fr/pegame/.

Le projet a pour but de montrer d'une part, des régularités chez un même professeur ; nous cherchons notamment à déterminer comment celui-ci organise son enseignement afin de permettre cette prise de responsabilité des élèves vis-à-vis de la construction des connaissances. D'autre part, nous étudions la variabilité des pratiques en fonction des épistémologies des différentes disciplines et des représentations des professeurs sur les apprentissages ou le métier.

Dans cette communication, nous présenterons des éléments d'analyse du cas d'une professeure de mathématiques (qui participe au projet SESAMES) que nous avons filmée pendant les 18 premières séances dans une classe de 4e[1] (soit deux chapitres : l'un sur le raisonnement déductif en géométrie et l'autre sur la multiplication des relatifs) depuis le début de l'année scolaire 2010 jusqu'en novembre. Nous avons également recueilli ses préparations, les évaluations, des copies de cahiers d'élève, un questionnaire portant sur les effets déclarés de la participation au groupe de recherche.

Nous analyserons particulièrement une série de quatre activités liées[2] (nous les désignons par ce terme en opposition à des activités isolées) qui aboutissent à celle proposée à la séance 18 qui se situe au tout début du troisième chapitre intitulé « Calcul littéral ». Nous pensons qu'elles relèvent de la mise en œuvre d'une démarche d'investigation visant à introduire la lettre en algèbre. Nous cherchons à déterminer comment la professeure favorise d'une part l'activité et la responsabilité des élèves par la gestion didactique de ses séances et, d'autre part, l'avancée du savoir par un jeu entre dévolution et institutionnalisation.

Au delà de cette étude, nous souhaitons aborder la question du lien entre démarche d'investigation et apprentissage sous l'angle de la gestion du temps didactique. Nous souhaitons également montrer comment la participation au groupe d'élaboration collaborative de ressources et la connaissance fine de la situation proposée permet au professeur de gérer les séances en favorisant l'activité des élèves mais aussi en orientant fortement son action et celle des élèves. Nous nous situons donc dans le deuxième axe de travail « Mise en œuvre de la démarche d'investigation ».

---

[1] Elèves de 13-14 ans

[2] présentées en annexe 1

I. EN MATHÉMATIQUES : RÉSOLUTION DE PROBLÈMES/DÉMARCHE D'INVESTIGATION

La démarche d'investigation se présente comme un outil pédagogique visant à développer l'autonomie des élèves, le goût pour la recherche, la motivation pour les sciences. Cette méthode a été développée dans les autres pays européens et elle est connue sous le nom de Inquiry Based Learning. Le rapport Rocard (2007) préconise cette nouvelle méthode d'enseignement pour lutter contre la désaffection des élèves pour les études scientifiques. « Inquiry » est défini en référence à Linn et al. (2004) :

> By definition, inquiry is the intentional process of diagnosing problems, critiquing experiments, and distinguishing alternatives, planning investigations, researching conjectures, searching for information, constructing models, debating with peers, and forming coherent arguments. (cité par Rocard et al. 2007, p. 9)

Le rapport explique qu'il y a une volonté de changer les pratiques d'enseignement ainsi que les places respectives du professeur et de l'élève : d'une approche « top down transmission » dans laquelle le professeur présente les savoirs et leurs applications à l'élève qui doit les appliquer vers une approche « bottom up » où le professeur laisse l'élève faire des essais, se tromper, revenir en arrière, etc.

Dans deux études sur les programmes de mathématiques français de l'école primaire (Coppé et Houdement 2010) et du collège (Coppé et Tiberghien 2010), nous avons montré que depuis une trentaine d'années, les programmes officiels de mathématiques préconisent un enseignement basé sur la résolution de problèmes, c'est–à-dire faisant l'hypothèse que l'on apprend en trouvant des solutions à des problèmes bien choisis, pour lesquels la connaissance visée est une solution optimale. Ainsi, nous pensons que s'est dessinée une évolution de la place et de la fonction des problèmes dans l'enseignement qui devrait aller de pair avec une évolution des pratiques des professeurs même si on peut constater que celle-ci est bien lente. Plus précisément on peut noter que dès 1981, dans le programme de la classe de 2nd, apparaît le terme « activité de l'élève » qui sera toujours repris dans les programmes suivants.

> A la base de tout bon apprentissage, il y a le contact avec une pratique sensorielle et concrète, la stimulation de l'activité personnelle de l'élève, l'élaboration de moyens d'investigation aussitôt applicables au monde qui l'entoure. (BO du 5 mars 1981, p. 1)
>
> L'activité mathématique ne s'identifie pas au déroulement d'une suite bien ordonnée de théorèmes. Il importe que toute introduction d'une notion ou d'un théorème soit précédée de l'étude d'une situation assez riche pour en attester l'intérêt et qu'elle soit suivie immédiatement d'applications substantielles. (op.cit., p. 1)

Ces programmes pointent également une certaine tension entre ce qui est appelé un « exposé artificiel de logique mathématique » et les activités et problèmes, qui devraient être nombreux et qui, à ce moment là, interviennent surtout en entraînement ou en réinvestissement.

En 1985 se dessine une évolution de la place et de l'importance de la résolution de problèmes comme participant à la construction des concepts, et donc pouvant être donnés en introduction des notions. A partir de 1985, on retrouve ce même paragraphe dans tous les programmes de collège :

> L'activité de chaque élève doit être privilégiée, sans délaisser l'objectif d'acquisitions communes. Dès lors, seront choisies des situations créant un problème dont la solution fera intervenir des « outils », c'est-à-dire des techniques ou des notions déjà acquises, afin d'aboutir à la découverte ou à l'assimilation de notions nouvelles. Lorsque celles-ci auront été bien maîtrisées, elles fourniront à leur tour de nouveaux « outils », qui permettront un cheminement vers une connaissance meilleure ou différente.
>
> Les activités choisies doivent :

- permettre un démarrage possible pour tous les élèves, donc ne donner que des consignes très simples et n'exiger que les connaissances solidement acquises par tous ;
- créer rapidement une situation assez riche pour provoquer des conjectures ;
- rendre possible la mise en jeu des outils prévus ;
- fournir aux élèves, aussi souvent que possible, des occasions de contrôle de leurs résultats, tout en favorisant un nouvel enrichissement ; on y parvient, par exemple, en prévoyant divers cheminements qui permettent de fructueuses comparaisons.

> Elles nécessitent une synthèse, brève, qui porte non seulement sur les quelques notions, résultats et outils de base que les élèves doivent connaître, mais aussi sur les méthodes de résolution de problèmes qui les mettent en jeu. (BO n° 44 du 12 décembre 1985 p. 20)

Les injonctions à changer les pratiques deviennent plus explicites et plus précises afin de passer d'un enseignement basé sur des exposés magistraux des notions mathématiques dans un ordre logique à la mise en activité des élèves par la résolution de problèmes. On insiste sur la dynamique d'apprentissage : outil/objet/nouvel outil. On peut voir là des influences des recherches en didactique des mathématiques comme la théorie des situations de Brousseau (1986) et la dialectique outil/objet (Douady 1986) ; ces recherches étant basées sur une hypothèse constructiviste dans laquelle la notion de problème est fondamentale, ainsi que les processus d'assimilation et d'accommodation. Brousseau indique que le professeur doit permettre à l'élève de rencontrer la connaissance visée en résolvant un (des) problème(s) dans lesquels cette connaissance constitue un moyen optimal de résolution sans que le professeur montre à l'élève comment il faut faire.

> Dans la didactique moderne, l'enseignement est la dévolution à l'élève d'une situation adidactique, correcte, l'apprentissage est une adaptation à cette situation. […]
>
> Le maître doit effectuer, non la communication d'une connaissance, mais la dévolution d'un bon problème. (Brousseau 1998).

Depuis 2004, les nouvelles épreuves du baccalauréat (BO n° 19 du 8 mai 2003) donnent comme un objectif d'évaluation parmi d'autres « prendre des initiatives » et préconisent aussi, à côté des situations plus classiques « l'étude d'une situation conduisant à choisir un modèle simple, à émettre une conjecture, à expérimenter, … ». Enfin, les récents programmes du lycée (depuis 2009 en classe de 2^{nde}) citent, pour chaque thème, les problèmes qui sont à résoudre. En voici un exemple, en 2^{nde} pour le thème « Fonctions » :

- un problème se ramenant à une équation du type f(x)   k et de le résoudre dans le cas où la fonction est donnée (définie par une courbe, un tableau de données, une formule) et aussi lorsque toute autonomie est laissée pour associer au problème divers aspects d'une fonction ;
- un problème d'optimisation ou un problème du type f (x)   k et de le résoudre, selon les cas, en exploitant les potentialités de logiciels, graphiquement ou algébriquement, toute autonomie pouvant être laissée pour associer au problème une fonction. (BO n°30 du 23 juillet 2009)

Nous constatons que le discours institutionnel évolue et qu'il incite à une évolution des pratiques des professeurs visant à rendre l'enseignement des sciences plus vivant et plus motivant et faire évoluer les responsabilités des professeurs et des élèves face aux savoirs. Voyons maintenant ce qu'il en est dans les pratiques de classes.

II. LES PROBLÈMES DANS LES PRATIQUES DE CLASSE

Depuis une vingtaine d'années, dans les manuels, sont apparues, suivant ainsi l'évolution des programmes, les célèbres « activités d'introduction » (on peut d'ailleurs noter le glissement sémantique de « l'activité de l'élève » aux « activités d'introduction ») qui, telles qu'elles sont conçues le plus souvent, ne permettent pas à l'élève d'entrer dans une réelle activité mathématique, comme nous l'avons déjà écrit (Betton et al. 2005) :

> Souvent, les activités proposées ne sont pas de véritables problèmes, elles se résument à des questions fermées, demandant peu de réflexion et sans véritable enjeu. De plus, le problème peut souvent être résolu par des méthodes que les élèves connaissent déjà ce qui implique le recours à des injonctions fortes de la part des auteurs (par exemple, « appelle x ce nombre » dans le cas de l'introduction des équations). Dans les stages de formation continue que nous avons animés, nous avons pu constater que les professeurs sont bien conscients de cela, qu'ils le déplorent et que cela les conduit souvent à rejeter l'idée même d'activité préparatoire tant elle leur semble peu pertinente et sans enjeu. (Betton et Coppé, op. cit.)

De plus, comme Robert et al. (2004), nous soulignions le fait que ces tâches étaient le plus souvent isolées :

> Les contraintes de temps, rendues encore plus lourdes par les restrictions d'horaires actuelles, sont toujours évoquées pour justifier le fait de privilégier en classe un travail sur « le nouveau » mais sans beaucoup d'exploration, peu d'entretien de l'ancien, pas ou peu de réorganisation entre ancien et nouveau. En termes d'activités, cela correspond à des tâches isolées (qui portent sur le chapitre en cours) sans beaucoup d'adaptation des connaissances à utiliser. (Robert et Rogalski, op.cit.)

Nous montrions comment il était possible, à partir de certains énoncés de problèmes pris dans les manuels de collèges, de changer les questions pour en faire, non pas des problèmes ouverts au sens défini par Arsac et al. (1998) mais des problèmes qui permettent d'avoir une activité mathématique tout en se situant dans le cadre de la progression thématique de la classe. Nous commencions également à développer l'idée d'un même problème avec des énoncés différents en jouant sur les variables didactiques et les cadres au sens de Douady (1986).

Enfin il nous semble que si l'on veut rendre les activités d'introduction intéressantes non seulement du point du vue du problème résolu mais également du point de vue de la progression des apprentissages, il est important de montrer les liens entre le problème proposé et les connaissances mathématiques que l'on institutionnalise. Autrement dit, c'est dans l'articulation et la dynamique contextualisation/décontextualisation que les connaissances antérieures et le problème résolu vont pouvoir se réorganiser pour devenir des connaissances nouvelles (ceci est également souligné par Robert et al., ibid.).

Chevallard (2007) a développé les notions d'AER (Activités d'Etude et de Recherche) et de PER (Programme d'Etude et de Recherche), dont on peut trouver quelques exemples dans Barachet et al. (2007) ou dans le travaux de l'équipe AMPERES (2007). Comme Chevallard (2009) le précise ces dispositifs doivent permettre de travailler à partir de programmes d'étude de questions mathématiques. Là, encore ce ne sont pas des problèmes isolés.

> Le premier principe consiste à ne pas chercher à réaliser des AER « isolées », visant chacune à « engendrer » un (et un seul) élément mathématique – tel théorème, telle définition, telle notion, etc. Il convient au contraire de s'autoriser à concevoir et à réaliser des AER à visée mathématique large, bien que se donnant pour cible certains thèmes ou sujets du programme de l'année. Cela ne signifie pas que l'on s'interdise de proposer des AER de « petite taille » ; mais cela signifie que l'on ne s'imposera pas une « découpe millimétrique » du mathématiquement nouveau qu'une AER donnée est censée faire découvrir. Dans cette perspective, le programme de l'année peut être étudié à travers un nombre fini de quelques « grandes AER » qu'on peut appeler des parcours d'étude et de recherche (PER), et qui se laisseront scinder en AER au sens plus usuel du terme : un PER apparaît alors comme un véritable « parcours de découverte », à l'instar des IDD[3] de 5e et 4e. Dans un langage plus proche de celui des chercheurs professionnels, on pourra entendre aussi bien, par PER, un « programme d'étude et de recherche ». (Chevallard 2009)

On peut donc retenir de cette étude que les pratiques ont du mal à évoluer pour diverses raisons d'origine institutionnelle (injonctions très vagues, manque de formation, contraintes

[3] Itinéraires de découverte, innovation pédagogique pour le collège.

d'organisation des classes, etc) mais également parce qu'il est difficile de trouver de bons problèmes et de les mettre en place dans les classes avec des modalités de travail adaptées (en laissant des temps de recherche, du travail de groupe, etc).

Nous allons maintenant passer à l'étude du cas de Clara filmée pendant 18 séances.

III. QUELQUES RESULTATS

Comme nous l'avons dit, cette recherche est en cours, nous indiquerons donc seulement quelques résultats. Nous analysons une séquence complète sur l'introduction de l'algèbre en classe de 4^{e} (élèves de 13-14 ans) composée de plusieurs activités liées entre elles proposées dans les séances précédant la séance 18 dans laquelle la professeure met en place une situation qui peut relever d'une démarche d'investigation qui vise à montrer la nécessité d'introduire une lettre dans un problème de généralisation en algèbre en produisant une formule ou une expression littérale.

1. Cadre théorique et méthodologie

Pour analyser ces données, un premier cadre utilisé est celui de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard 1998, 1999) qui permet de définir une organisation mathématique (avec des types de tâches, techniques et technologie/théorie associées) et une organisation didactique (en six moments didactiques) des séquences de classe. Ce découpage, en termes de praxéologies, permet de déterminer la variété et la progression des types de tâches, de décrire les techniques associées et de montrer l'existence (ou l'absence) d'éléments technologiques voire théoriques. L'organisation didactique permet de rendre compte de la dynamique créée par le professeur pour mettre en place les apprentissages. Nous obtenons donc un découpage de type macro de l'ensemble des séances de ces deux chapitres. Nous utiliserons ce cadre pour analyser les différentes activités proposées sous la désignation de « calculs rituels » pendant les séances 14 à 17 puis 18 et pour déterminer les types de liens entre ces activités.

Nous utilisons également la théorie de l'action conjointe (Sensevy et al. 2000 ; Assude et al. 2007) pour analyser l'action du professeur dans les structures définies par les auteurs (définir, réguler, dévoluer et instituer) et en fonction des techniques didactiques portant sur les notions de mésogenèse, topogenèse et chronogenèse. Nous analyserons, dans l'action du professeur et des élèves comment ces dimensions sont travaillées et s'articulent entre elles.

Du point de vue méthodologique, nous avons filmé l'ensemble des séances et, pour les traiter, nous utilisons le logiciel TRANSANA notamment en créant des séries de clips indexés par un ou des mots clefs qui permettent d'avoir des séries d'extraits facilement repérables pour un même professeur ou pour des professeurs différents suivant des critères définis a priori portant soit sur le savoir enseigné soit sur l'organisation didactique de la séance.

2. Quelques précisions sur la professeure

Clara est une professeure expérimentée qui a dix ans d'ancienneté (cinq dans un collège ZEP[4] et cinq dans le collège de centre ville où nous l'avons filmée). Elle a suivi la formation à l'IUFM de Lyon. Elle participe aux travaux du groupe SESAMES depuis trois ans. Elle a intégré le groupe parce qu'elle travaillait, dans son collège, avec une autre professeure du groupe. Pour elle, cet aspect collaboratif du travail enseignant semble très important.

[4] Zone d'Education prioritaire : établissements comportant une forte proportion d'élèves de milieux défavorisés

Clara et sa collègue ont adopté un fonctionnement particulier pour l'organisation de leurs séances d'enseignement : elles travaillent sur deux chapitres en même temps. En début de séance, elles proposent aux élèves des activités qu'elles nomment « calculs rituels » (notons que ce terme ne rend pas compte de ce qui est fait) qui sont composées d'exercices ou de problèmes qui, selon elles, préparent le chapitre à venir. En fait, c'est la gestion de classe qui est rituelle : le texte du problème est écrit au tableau ou distribué quand les élèves entrent et ils se mettent aussitôt au travail. Il s'agit de problèmes liés entre eux (soit par le contexte, le support, les types de questions) proposant une progression dans les notions abordées. Des éléments d'institutionnalisation partielle peuvent être construits par la professeure et les élèves à la suite de la correction.

Le deuxième temps de la séance est consacré à la correction des exercices donnés à la séance précédente et le troisième au chapitre en cours (institutionnalisation ou exercices de réinvestissement). Les durées accordées à ces trois phases sont variables ; quelquefois les trois phases ne sont pas présentes. Cette pratique (ainsi que le terme « calcul rituel ») vient d'une pratique ancienne, institutionnellement préconisée, qui était de proposer systématiquement du calcul mental aux élèves en début des séances, mais Clara indique qu'elle n'était pas satisfaite car « c'était trop lourd et fait à partir de fiches communes peu souples ». Elle précise que la participation au groupe SESAMES et le travail commun des deux professeures ont amené ce changement car elle souhaitait à la fois préparer le chapitre suivant et avoir des activités liées :

> je pense qu'alors la nécessité de diversifier l'« exercice rituel » s'est fait sentir pour être plus progressif dans le chemin vers les nouvelles notions.

Notons que depuis deux ans, une partie du travail du groupe SESAMES a consisté à élaborer des activités dites « liées » alors qu'au début, le travail portait sur des activités isolées dans lesquelles les élèves peuvent être actifs et responsables Ainsi, si au départ du travail du groupe l'aspect topogénétique est celui qui a été le plus développé (en élaborant des problèmes avec des questions ouvertes qui ne donnent pas d'indications sur la procédure) l'aspect chronogénétique se révèle beaucoup plus important actuellement.

3. *Quelques éléments d'analyse de la séance 18*

La séance 18 a pour objet le problème très connu[5] « Les carreaux colorés » (voir Annexe 2), d'après Combier et al. (1996) pour la classe de 6e mais avec un énoncé un peu différent. Celui-ci a été élaboré dans le groupe après de nombreuses discussions et corrections auxquelles Clara a fortement participé. Elle connaît donc très bien l'activité. Elle voit clairement son but (introduire la nécessité d'utiliser des lettres à travers un exemple d'utilisation) et elle connaît les procédures et les erreurs des élèves.

La situation vise, à travers le jeu sur les variables, à faire évoluer les procédures des élèves depuis le comptage sur le dessin (pour 5, 6 ou éventuellement 10) vers une procédure de dénombrement utilisant une méthode générale (pour 100 et 123) qui peut être exprimée par une expression algébrique comportant une lettre. Si le premier point est assuré, car les élèves ne peuvent pas réaliser un carré de côté 100, le second est moins sûr puisque les élèves peuvent décrire la procédure de dénombrement en langue naturelle sans utiliser de lettre ou en l'illustrant par un dessin. A ce moment-là de la progression, puisque les élèves ont déjà utilisé des lettres dans d'autres types de tâches (par le biais des calculs rituels), on peut penser que la professeure a mis en place les moyens d'y arriver mais ce n'est pas complètement sûr. Notons que les premiers essais permettent également de comprendre le problème, de faire des

[5] Il est cité dans le document Ressource intitulé « Du numérique au littéral ».

conjectures et de les valider et surtout, de permettre d'invalider certaines. Enfin, le choix de 10 et 100 a été fait pour invalider une procédure basée sur la proportionnalité.

Le scénario envisagé par Clara est celui qui est sur le site : présentation du problème, recherche individuelle pendant 5 minutes, puis en groupe de 4 pendant 20 minutes, écriture des formules produites au tableau par un représentant de chaque groupe, mise en commun animée par la professeure et institutionnalisation.

Nous considérons que cette activité constitue un exemple de démarche d'investigation telle qu'elle est présentée dans le programme du collège avec notamment, parmi les sept étapes : « La formulation de conjectures », « L'investigation ou la résolution du problème conduite par les élèves », « L'échange argumenté autour des propositions élaborées » et « L'acquisition et la structuration des connaissances ». Ainsi, il s'agit de faire produire par les élèves des formules utilisant des lettres pour donner le nombre de carreaux hachurés en fonction du nombre de carreaux des côtés du carré ; en ce sens, il y a bien un travail de recherche pour déterminer ces formules qui peuvent constituer des conjectures qui devront être validées. Le travail de groupe a pour but de comparer les formules produites, d'en invalider certaines et de commencer le travail sur les équivalences. La mise en commun des formules et expressions produites a pour but, d'une part de les valider et d'autre part, de montrer leur équivalence. Enfin la professeure prévoit un moment d'institutionnalisation pour récapituler les formules produites et pour montrer la nécessité de la lettre.

Si on se réfère au cadre des praxéologies de Chevallard (Op. cité), cette activité constitue un « moment première rencontre » avec le type de tâche institutionnellement reconnu dans les programmes du collège « produire une formule ou une expression littérale » ; la technique associée consiste à désigner la variable par une lettre et à exprimer par une suite de calculs le procédé de dénombrement des carreaux. La propriété de la distributivité de la multiplication sur l'addition est l'élément technologico-théorique qui permet de justifier l'équivalence des formules proposées. Ainsi, selon nous, cette activité constitue aussi un moment de « constitution de l'environnement technologico-théorique relatif à ce type de tâche ». Or, nous avons montré (Assude et al. 2012) que dans l'enseignement actuel de l'algèbre au collège, la propriété de distributivité peut ne plus apparaître comme un élément technologique essentiel.

4. *La séance 18 réalisée*

La séance telle que nous l'avons observée est relativement conforme à la préparation ; en voici les principales phases que nous mettons en rapport avec le cadre de l'action conjointe.

L'énoncé est distribué dès l'entrée en classe et les élèves se mettent au travail. Certains posent des questions montrant qu'ils n'ont pas compris ce qu'il faut faire ; la professeure, qui reste au bureau, les prend en compte en demandant des explicitations mais ne donne pas de réponse. (5 minutes). Cette phase sert à entrer dans le problème.

Les élèves travaillent seuls alors que la professeure passe auprès d'eux (5 minutes). Elle souligne une erreur fréquente et intervient collectivement à ce sujet : certains ont écrit 6=20 pour signifier que pour un carré de côté 6 il y a 20 carreaux hachurés. On peut faire l'hypothèse qu'elle met particulièrement en avant cette erreur (qu'elle connaît bien grâce aux discussions du groupe SESAMES) pour rappeler à tous, un élément important (qu'elle a déjà souligné dans d'autres séances) concernant le statut du signe égal qui dépasse largement cette activité. Elle les incite aussi à vérifier leurs conjectures en les faisant dénombrer sur les premiers exemples. On peut noter qu'à ce moment, la dévolution du problème n'est pas encore réalisée puisque certains produisent la réponse erronée qui consiste à multiplier le côté par 4 (référence au carré) pour avoir le nombre de carreaux colorés sans tenir compte de la situation proposée (pour eux il n'y a donc pas de problème). L'intervention de la professeure, grâce à la vérification sur des cas simples, a pour but l'invalidation des réponses mais surtout la dévolution du problème. On peut noter l'importance de cette phase d'un point de vue mésogénétique puisqu'il s'agit bien d'enrichir le milieu pour la validation qui ne peut être qu'intellectuelle.

Elle fait ensuite regrouper les tables pour travailler par groupe de quatre. Elle se place face à la classe et donne les consignes pour la mise en commun notamment sur la nature de la trace publique à fournir : toutes les formules ou expressions produites. Elle en profite pour rappeler la question mais elle la fait évoluer en demandant l'explication, ceci afin de préparer la mise en commun :

> …la réponse à la dernière question : « Trouve une formule un moyen de dire comment calculer ce nombre de carreaux », sachant que le but c'est quand même… si vous en avez déjà trouvé une… c'est peut-être d'en trouver plusieurs et puis la personne viendra écrire au tableau et quelqu'un du groupe, une autre personne expliquera comment elle a trouvé ça. D'accord ! Vous pouvez faire un petit dessin ou quelque chose comme ça pour expliquer pourquoi vous pensez que cette formule est la bonne.

Elle laisse 17 minutes de travail. Comme dans la phase précédente, elle passe auprès des groupes mais de façon systématique. Cela lui permet de prendre de l'information sur ce qui est produit, d'encourager les élèves à vérifier et surtout à produire plusieurs formules et à prouver leur équivalence. Là encore, elle profite de cette phase pour faire évoluer sa demande cette fois-ci, vers la justification de l'équivalence des formules.

Elle organise le tableau en délimitant six colonnes : un élève de chaque groupe vient écrire sa synthèse qui est constituée, selon les groupes, de différentes formules ou de dessins montrant des procédés de calcul ; certains ont tenté de montrer l'équivalence de deux formules produites. La mise en commun dure près de 25 minutes. La professeure est face aux élèves et elle les interroge nommément. Elle institutionnalise (avec l'aide des élèves) les trois points qui ont été largement travaillés dans la mise en commun :

> Il y a plusieurs solutions à ce problème. On a prouvé avec la distributivité que les formules sont égales entre elles. Une lettre peut remplacer un nombre et elle permet d'écrire des expressions.

Nous retiendrons deux points sur cette mise en commun. Le premier est que Clara ne gère pas cette phase selon une technique classique qui consiste à faire passer successivement un membre de chaque groupe au tableau pour qu'il explique ce qui a été fait. Très souvent, ce moment s'avère long et fastidieux, les élèves sont peu attentifs. Ici Clara pilote fortement cette mise en commun en reprenant les objectifs qu'elle s'est donnés. Elle commence par demander ce que désigne la lettre employée (elle le rajoute à la production de chaque groupe). Ensuite, elle fait expliciter les méthodes de calcul du nombre de carreaux afin de vérifier la validité des formules puis elle cherche à faire prouver leur équivalence en mettant fortement l'accent sur la distributivité. Pour chacun de ces points, elle travaille plus particulièrement sur la production d'un groupe, en interrogeant les élèves. On voit bien à travers cette phase comment sa connaissance de la situation et de ses buts, au-delà de la situation elle-même, lui permet de gérer au mieux le temps didactique, l'avancée du savoir et de co-construire avec les élèves des éléments d'institutionnalisation fortement en lien avec ce qui a été fait.

Le second point concerne la participation importante des élèves qui suivent, voire posent des questions. Il y a notamment une discussion mathématique très intéressante sur les aspects sémantiques/syntaxiques des formules produites puisque certaines ont été élaborées à partir de la situation du carré et d'autres par transformations. Or, nous faisons l'hypothèse que cette discussion peut avoir lieu car la professeure, grâce au travail fait dans le groupe sur le savoir mathématique enseigné, est capable de réagir aux raisonnements des élèves.

IV. CONCLUSION

Par manque de place nous ne pouvons pas analyser ici finement les séances 14 à 17. Cependant, nous voulons souligner que la professeure utilise un même objet, rendu ainsi familier aux élèves (les programmes de calcul), pour les engager dans des types de tâches différents (appliquer et écrire un programme, « remonter » le programme pour résoudre des équations simples, montrer que deux programmes sont équivalents ou non) dans lesquels l'introduction de la lettre s'avère nécessaire. C'est aussi l'occasion d'institutionnaliser des éléments de technique ou de technologie (et pas seulement des éléments de savoir). Le problème des carreaux colorés posé à la séance 18 apparaît alors comme l'aboutissement de ce travail et une analyse fine des interactions pendant la synthèse montre que les élèves réinvestissent ce qui a été vu dans les séances précédentes (en particulier le terme « conjecture », la nécessité de prouver autrement que par un exemple, l'utilisation de la distributivité comme élément technologique). C'est donc à travers un jeu entre l'énoncé des consignes et les éléments d'institututionnalisation que la professeure permet l'avancée du savoir (jeu entre les aspects mésogénétiques et chronogénétiques). L'aspect topogénetique peut se répérer à travers la dévolution de ces problèmes aux élèves mais également à travers la gestion des synthèses par la professeure qui reprend la main en fonction de ses objectifs d'institutionnalisation. On voit donc ici une tension, mais certainement aussi le geste professionnel d'un expert, entre la nécessité de laisser une grande autonomie aux élèves et celle de reprendre la responsabilité de faire avancer le savoir dans la classe notamment dans les moments de synthèse, par l'institutionnalisation.

On peut penser que le problème des carreaux colorés, même s'il peut permettre, à lui seul, la mise en place d'une démarche d'investigation, n'aura pas la même portée sur la construction des connaissances des élèves, posé seul ou à la suite des programmes de calcul. Cette question des activités isolées/liées est au centre de notre travail actuel. Or, dans les ressources proposées aux professeurs, notamment dans les manuels scolaires, on ne trouve pas ce genre d'activités ni même des tentatives pour aller vers des propositions d'activités liées.

Ceci nous amène au dernier point concernant la formation des professeurs. Nous avons souligné, à plusieurs reprises, que Clara travaillait de façon collaborative soit dans le groupe de recherche/action, soit avec sa collègue. On peut se demander si c'est une condition nécessaire pour faire évoluer les pratiques. En analysant l'élaboration de ces activités liées et les interactions dans la classe (notamment les relances faites aux élèves), nous pensons que c'est parce que Clara a une excellente connaissance des aspects et des potentiels didactiques de ces activités qu'elle peut mettre en place dans ses classes à la fois une nouvelle organisation et laisser de l'autonomie aux élèves. Ceci est un apport du travail collaboratif, comme le soulignent les réponses des professeur(e)s à un questionnaire sur leur participation au groupe de travail, dans lequel ils/elles indiquent que les modifications de leur pratique portent sur une meilleure connaissance des savoirs enseignés, une diversification de la gestion de classe et sur une plus grande prise en compte des élèves. Il faut donc réfléchir aux conditions qui permettraient le développement d'un travail collaboratif pour la formation.

REFERENCES

Arsac G., Germain G., Mante M. (1998) *Problème ouvert et situation problème*. IREM de Lyon.

Assude T., Coppé S., Pressiat A (2012) Tendances de l'algèbre élémentaire au collège : atomisation et réduction. *Recherches en Didactique des Mathématiques* (*Numéro hors série*. In Coulange L., Drouhard J.-P., Dorier J.-L., Robert A. (Eds.) *Enseignement de l'algèbre élémentaire – Bilan et perspectives*).

Assude T., Mercier A., Sensevy G. (2007) L'action didactique du professeur dans la dynamique des milieux. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 27(2), 221-252.

Barachet F., Demichel Y., Noirfalise R. (2007) Activités d'étude et de recherche (AER) pour dynamiser l'étude de la géométrie dans l'espace en classe de seconde. *Petit x* 75, 34-49.

Betton S., Coppé S. (2005) Favoriser l'activité mathématique dans la class : ouvrir les problèmes. *Bulletin de l'APMEP* 461, 733-748.

Brousseau G. (1986) Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 7(2), 33-116.

Brousseau G. (1998) *Théorie des Situations Didactiques (1970-1990).* Grenoble : La Pensée sauvage.

Chevallard Y. (1998) Analyse des pratiques enseignantes et didactiques des mathématiques : l'approche anthropologique. La notion d'organisation praxéologique. Analyse des pratiques enseignantes et didactiques des mathématiques. In *Actes de l'Université d'été de didactique de La Rochelle* (pp. 119-140).

Chevallard Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19(2) 221–266.

Chevallard Y. (2007) Le mathématiques à l'école : pour une révolution épistémologique et didactique. *Bulletin de l'APMEP* 471, 439-461.

Chevallard Y. (2009) *La notion de PER : problèmes et avancées*. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/La_notion_de_PER___problemes_et_avancees.pdf.

Combier G., Guillaume J.-C., Pressiat A. (1996) *Les débuts de l'algèbre au collège*. Paris : INRP.

Coppé S., Houdement C. (2010) Résolution de problèmes à l'école primaire française : perspectives curriculaire et didactique. *Actes du colloque de COPIRELEM, Auch, juin 2009.*

Coppé S., Tiberghien A (2010) *Teacher collaboration and Inquiry Based Science Teaching : Elements for teachers' development and teaching resources*. Work package 4: Délivrable 4b.

Douady R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 7(2), 5-31.

Equipe AMPERES (2007). Le projet AMPERES (Apprentissages Mathématiques et Parcours d'Etudes et de Recherche dans l'Enseignement Secondaire), vers un autre type de processus d'étude. In Gueude, G., Matheron Y. (Eds.) *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques.* IREM de Paris 7.

Linn M. C., Davis E. A., Bell P. (2004) *Internet environments for science education*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Robert, A. rogalski, M. (2004) Problèmes d'introduction et autres problèmes de recherche au lycée. *Repères IREM* 54, 7-103.

Rocard M., Cesrmley P., Jorde D., Lenzen D., Walberg-Herniksson H., Hemmo V. (2007) *Science education NOW: A Renewed Pedagogy for the Future of Europe*. http://ec.europa.eu/research/science-society/document_library/pdf_06/report-rocard-on-science-education_en.pdf, retrieved March 2010.

Sensevy G., Mercier A, Schubauer-Leoni M. L. (2000) Vers un modèle de l'action du professeur. A propos de la course à 20. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 20(3), 263-304.

ANNEXE 1 : Les séances 14 à 17

Séance 14 : 22 minutes

Je choisis un nombre, je lui ajoute -2, je multiplie le résultat par -3 et j'ajoute 5

Appliquer sur 4, - 3 et 1

Retrouver le nombre de départ si on obtient 5 ou -13

La consigne : « attention vous ne prenez pas n'importe quel nombre je vous demande de choisir ces 3 nombres là et ensuite je vous demande de retrouver le nombre de départ dans ces deux cas là vous ne faites pas des essais y a rien à conjecturer y'a rien à prouver d'accord c'est simplement pour s'entrainer sur les calculs. Et par contre la consigne que je rajoute c'est on essaie d'écrire les calculs en une expression, peut être pas le premier mais le but c'est d'arriver à écrire en une expression. »

Séance 15 : 30 minutes

Je choisis un nombre je le multiplie par -2 j'ajoute 1 je multiplie le résultat par 5 j'ajoute 10 fois le nombre choisi.

Faire plusieurs essais et une conjecture si possible.

La consigne : « Le but n'est pas de remonter. Le but est d'arriver à émettre une conjecture et à la prouver d'accord on en a déjà fait une ou deux donc on essaie de se souvenir de comment on fait. »

Institutionnalisation : si je choisis x comme nombre de départ le programme de calcul s'écrit :

$(-2x+1) \times 5 + 10x$

Séance 16 : 25 minutes

Je choisis un nombre je lui ajoute 3 je multiplie le résultat par -5 et j'ajoute 15

Essai/conjecture/preuve

Institutionnalisation : « donc vous voyez vous avez plusieurs conjectures possible ; après le travail sur la preuve il est à peu près identique c'est-à-dire je produis la formule du programme de calcul et je la transforme en utilisant les propriétés après il reste à traduire ce que j'ai écrit pour bien voir si c'est justifié. »

Séance 17 : 19 minutes

$A = 3(x - 3) - 2x + 5$

$B = 3(x - 2) - x$

Calculer ces expressions pour $x = 2$

Peut-on dire que ces expressions sont égales quelle que soit la valeur de x ?

Institutionnalisation : « on ne peut pas prouver que A = B pour tout x juste avec des exemples. Il faut utiliser des propriétés.

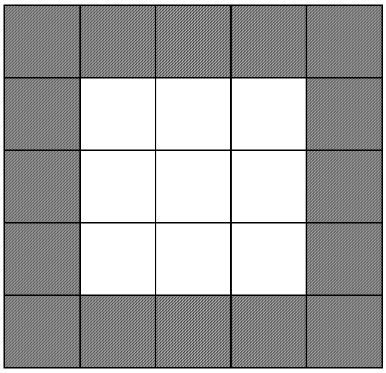
Si x=0, A = -4 et B = -6 c'est un contre exemple car pour x 0 les expressions ne sont pas égales.

Ici c'est important si je veux prouver je vais utiliser les propriétés : la distributivité par exemple, le fait d'avoir le droit de changer l'ordre des termes.

Par contre je ne peux pas prouver que c'est vrai avec un exemple. »

ANNEXE 2 : Les carreaux colorés

Voici un carré quadrillé de côté 5. On hachure tous les carreaux qui sont le bord. Combien de carreaux sont hachurés ?



On refait avec un carré de côté 6, puis de côté 10, puis de côté 100, puis de côté 123. Combien de carreaux sont hachurés à chaque fois.

Trouve une formule, une expression, un moyen de dire comment calculer ce nombre de carreaux.

DEMARCHE D'INVESTIGATION EN MATHEMATIQUES : L'EXEMPLE DES ATELIERS MATH.EN.JEANS

Isabelle DUBOIS*

Résumé – Après avoir présenté l'association MATh.en.JEANS et ses activités, nous expliquons le principe et l'organisation des ateliers MATh.en.JEANS. Ces ateliers scientifiques permettent à des groupes d'élèves de tout niveau scolaire de mener des recherches en mathématiques. Nous mettons ensuite en évidence les différentes caractéristiques de ces ateliers favorisant la mise en œuvre d'une véritable démarche d'investigation en mathématiques. Nous terminons par la présentation de quelques exemples issus d'ateliers que nous avons encadrés.

Mots-clefs : démarche d'investigation, recherche en mathématiques en milieu scolaire, ateliers MATh.en.JEANS, ateliers scientifiques

Abstract – After having presented MATh.en.JEANS association and its activities, we explain the principle and the organization of the MATh.en.JEANS workshops. These scientific workshops make it possible groups of pupils of any school level to undertake research in mathematics. We then highlight the various characteristics of these workshops supporting the implementation of a true inquiry-based approach in mathematics. We finish by the presentation of some examples resulting from workshops which we supervised.

Keywords: inquiry-based approach, research in mathematics at school, MATh.en.JEANS workshops, scientific workshops

Nous présentons dans cet article un exemple d'ateliers mis en place depuis une vingtaine d'années dans des établissements scolaires français (et étrangers depuis peu) par l'association MATh.en.JEANS.

Après avoir précisé les principes fondateurs et les actions de l'association, nous expliquons le principe de fonctionnement des ateliers de recherche MATh.en.JEANS. Ensuite, nous mettons en évidence les caractéristiques « idéales » de ces ateliers permettant la mise en œuvre d'une démarche d'investigation au sein de ces ateliers. Pour finir, nous énonçons quelques problématiques pouvant faire l'objet de recherches ultérieures, en nous appuyant sur des exemples précis expérimentés au cours d'ateliers que nous avons encadrés les années passées.

I. PRESENTATION DE L'ASSOCIATION MATH.EN.JEANS ET DE SES ACTIONS

1. L'association MATh.en.JEANS

L'association MATh.en.JEANS fut créée en 1990 en France, par Pierre Audin et Pierre Duchet, suite à une première opération menée en 1985-1986, intitulée « 1000 classes – 1000 chercheurs », suivie d'un projet pilote MATh.en.JEANS mené sur l'année scolaire 1989-1990.

L'association est soutenue par le CNRS (Centre National de la Recherche Scientifique) et est agréée par le Ministère de l'Education Nationale. D'autres partenaires institutionnels ou associatifs la parrainent ou la soutiennent. Elle a obtenu en 1990 le prix de la démarche scientifique au Salon PERIF (réunissant des projets scientifiques en Ile de France), et en 1992, le prix d'Alembert de la Société Mathématique de France.

* IUFM de Lorraine – France – isabelle.dubois@univ-lorraine.fr

© Dubois I. (2012) Démarche d'investigation en mathématiques : l'exemple des ateliers MATh.en.JEANS. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT10, pp. 1319–1329). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

Le principal objectif de l'association est de soutenir et promouvoir la mise en place d'ateliers de recherche en mathématiques dans les établissements scolaires. Le nom de l'association correspond à un acronyme : **M**éthode d'**A**pprentissage des **Th**éories mathématiques **en J**umelant des **E**tablissements pour une **A**pproche **N**ouvelle du **S**avoir. Cet acronyme met en valeur le principe de ces ateliers : permettre à des élèves de découvrir les mathématiques autrement, par une véritable démarche de chercheur, tout en favorisant les échanges entre pairs. Toutefois, nous pouvons également considérer le nom de l'association au premier degré : les élèves font des mathématiques de façon décontractée – sans évaluation, sans compétition – pour le plaisir.

2. Les activités de l'association MATh.en.JEANS

Nous présentons ci-après les différentes activités menées par l'association. Le détail des activités peut être consulté sur le site de l'association (http://mathenjeans.free.fr/amej/).

Comme dit plus haut, la principale activité de l'association consiste à organiser des ateliers de pratique mathématique en milieu scolaire. Ce point sera développé dans le paragraphe II.

L'association mène également des actions de sensibilisation et de vulgarisation, par le biais d'animations et d'expositions, et par l'organisation de son congrès annuel. Elle conçoit également des ressources documentaires et pédagogiques, participe à la formation de formateurs ou d'enseignants, ainsi qu'à des recherches et expérimentations en éducation, notamment sur la problématique des situations-recherche.

3. Développement des ateliers MATh.en.JEANS

En 1989-1990, le projet pilote MATh.en.JEANS comportait 26 élèves, 2 enseignants et 1 chercheur. Les ateliers se sont vite développés, tout d'abord en région parisienne, puis en province et à l'étranger.

Depuis l'année scolaire 2009-2010 le cap des 1000 élèves concernés a été franchi, et l'année 2010-2011 a connu la création de nombreux ateliers dans les lycées français à l'étranger. C'est ainsi que l'association a dû scinder le congrès national 2011 en quatre lieux afin de faire face aux difficultés d'organisation inhérentes à ce développement. Le tableau 1 donne les statistiques des cinq dernières années (source : Rapport d'activité, année 2010).

	2006 -2007	2007 -2008	2008 -2009	2009 -2010	2010 -2011
Ateliers	**59**	**66**	**73**	**85**	**112**
Collèges et écoles	21	28	34	46	49
Lycées, universités, MJC	38	37	39	39	61
Collèges-lycées					2
Ateliers jumelés	**26**	**30**	**37**	**49**	**59**
Professeurs			142	169	221
Chercheurs			66	73	94
Elèves	**568**	**619**	**840**	**1033**	**1378**
Collèges et écoles	255	321	481	623	588
Lycées, universités, MJC	323	298	359	410	754
Collèges-Lycées					36

Tableau 1 *– Statistiques des ateliers MATh.en.JEANS entre 2005 et 2011*

Les établissements concernés par un atelier MATh.en.JEANS sont essentiellement des collèges et des lycées ; des ateliers ont existé et existent encore en école primaire et dans l’enseignement supérieur, mais de façon marginale. D’autre part, nous pouvons noter que seulement la moitié environ des établissements sont jumelés, malgré le principe fondateur de l’association. Cela est notamment dû aux difficultés concernant la mise en œuvre pratique de jumelages. Concernant la nature des jumelages, il est intéressant de savoir que des établissements de niveaux différents peuvent être jumelés (collège-lycée, école-collège ou lycée-université), ce qui représente un facteur d’enrichissement des jumelages.

II. PRINCIPE DE FONCTIONNEMENT D’UN ATELIER MATH.EN.JEANS

1. Les acteurs d’un atelier MATh.en.JEANS

Un atelier MATh.en.JEANS fonctionne dans un établissement scolaire (primaire, secondaire ou universitaire), durant une année scolaire complète.

Un atelier fait intervenir trois types de personnes : des élèves volontaires de tout niveau et de différentes classes, des enseignants de l’établissement chargés de l’encadrement, de la mise en œuvre et de l’animation de l’atelier, et un chercheur – i.e. un mathématicien « professionnel », ayant une expérience du métier de chercheur – proposant des sujets de recherche et suivant l’avancement des travaux d’élèves.

Dans le cas d’établissements jumelés, le chercheur est commun aux deux ateliers, et propose les mêmes sujets.

L’effectif des ateliers n’est jamais très élevé, en général une dizaine ou vingtaine d’élèves. Les élèves se répartissent par petits groupes en fonction des différents sujets proposés.

2. Organisation et soutien institutionnel d’un atelier

Tout atelier MATh.en.JEANS est une composante du projet de l’établissement dans lequel il se situe, et le projet est voté au Conseil d’Administration. L’établissement soutient et aide à la mise en œuvre de l’atelier. Suivant le cas, l’atelier s’inscrit ou non dans un dispositif institutionnel. Par exemple, depuis la réforme du lycée engagée en 2009-2010, un atelier peut s’insérer dans le cadre de l’accompagnement personnalisé en classe de seconde (secondaire5, 15-16 ans). Dans une grande majorité des cas, un atelier fonctionne sous forme d’un « club » – à l’instar d’un club sportif ou culturel-, c’est-à-dire en dehors des créneaux réservés à l’enseignement obligatoire. De plus, la plupart des ateliers s’inscrivent dans le cadre du dispositif national des ateliers scientifiques et techniques, encadrés par la circulaire n°2001-046 du 21 mars 2001, et actualisés par la circulaire n° 2004-086 du 25 mai 2004. Les monteurs d’un projet d’atelier MATh.en.JEANS peuvent ainsi s’inscrire dans ce cadre et déposer un dossier auprès de la Délégation Académique à l’Action Culturelle de leur rectorat.

D’autres institutions ou partenaires d’un niveau local, régional ou national soutiennent les ateliers ou l’association : rectorats, inspection régionale, inspection générale, ministère de l’Education Nationale, Centre National de la Recherche Scientifique... Ce soutien peut se traduire par une reconnaissance pédagogique de ces ateliers, par le paiement d’heures d’encadrement pour les enseignants, par le remboursement des frais de déplacement pour le chercheur, et bien sûr par des subventions.

Les collectivités locales et territoriales (municipalités, conseils généraux, conseils régionaux) apportent également un soutien financier important, particulièrement déterminant pour l’organisation du congrès national. Un atelier a en effet besoin de moyens afin d'organiser les rencontres entre établissements jumelés et participer au congrès national (transport, hébergement, restauration)…

3. Déroulement d'une année

Nous prendrons l'exemple d'ateliers jumelés, pour lesquels l'organisation est plus riche qu'un atelier isolé.

Un atelier MATh.en.JEANS se déroule sur une année scolaire selon des séances hebdomadaires d'une durée de 1h à 2h, parallèlement dans chacun des établissements jumelés. Ces séances sont ponctuées de séminaires, réunissant sur une demi-journée ou une journée entière, les acteurs des deux établissements et le chercheur. En général, les ateliers peuvent organiser 3 à 4 séminaires sur l'année. Le congrès national, se déroulant fin mars, est un moment fort de l'année : durant trois jours, il réunit les acteurs de tous ateliers nationaux et internationaux, ainsi qu'un public extérieur.

En début d'année scolaire se met en place une première phase de mise en route de l'atelier, durant laquelle : les élèves sont informés et recrutés – ils le sont parfois l'année précédente – ; le chercheur expose ses sujets ; les élèves en choisissent un ; le fonctionnement et le contrat de recherche sont expliqués.

Nous pouvons ensuite découper idéalement une année en plusieurs périodes, ponctuées par les séminaires et le congrès (Audin et Duchet 2009, pp. 350-351).

La première période est une phase exploratoire, caractérisée par la compréhension du sujet par les élèves, l'émergence des premiers essais et des premières idées. Le premier séminaire permet la mise en commun sujet par sujet des premiers travaux. Il en ressort un recentrage et une redéfinition des objets de recherche, une identification de questions-cibles, et de pistes pour les recherches ultérieures ; une aide conceptuelle peut être apportée par les enseignants ou le chercheur.

La deuxième période est une phase expérimentale, durant laquelle sont explorées les pistes et questions-cibles mises en exergue lors du premier séminaire, et durant laquelle les premiers résultats émergent. Le deuxième séminaire permet une mise en commun et un débat autour des premiers résultats obtenus, et favorise l'orientation et l'organisation des recherches ultérieures.

La troisième période est une phase constructive caractérisée par la consolidation et la structuration de la recherche, avec notamment la prise en compte par les élèves de l'enjeu de la preuve, la clarification des différents statuts des énoncés (conjectures, hypothèses, théorèmes…). Elle se ponctue par le troisième séminaire, permettant un tri et une synthèse des différents résultats obtenus, en vue du congrès à venir.

La quatrième période est une phase de mise en forme, de préparation des communications pour le congrès. Le congrès permet la communication publique, sous différentes formes - exposés, posters, animations sur stand-, des travaux de recherche, et favorise les échanges et les discussions avec un public large : élèves de tout niveau, adultes experts ou grand public.

Pour finir, la dernière période est une phase conclusive durant laquelle les connaissances sont validées, institutionnalisées, les oeuvres finales sont réalisées (articles, expositions…), et des prolongements sont envisagés. Un dernier séminaire bilan peut être alors organisé.

III. ÉLEMENTS FACILITANT LA DEMARCHE D'INVESTIGATION DANS UN ATELIER MATH.EN.JEANS

Le principe fondateur de l'association est de faire reproduire par les élèves la démarche du véritable chercheur en mathématiques. Il est difficile de se baser sur cette seule analogie pour analyser les ateliers. En effet, le chercheur en mathématiques est un professionnel, ayant suivi un cursus universitaire long et spécialisé, et exerçant dans un contexte socioprofessionnel spécifique. D'autre part, ses sujets d'étude suivent l'actualité des recherches dans son domaine, s'inscrivent dans un processus de création historique, et évoluent sans cesse. Autant de facteurs éloignés de ce que peuvent vivre les élèves.

Toutefois, nous serons amené à faire référence aux activités « usuelles » du mathématicien professionnel, au « métier de chercheur », hors de tout cadrage théorique conceptualisant ces activités, afin de mieux cerner la richesse des situations.

Nous proposons aussi d'éclairer l'analyse des ateliers par le filtre de la notion de démarche d'investigation, que nous précisons dans un premier paragraphe. Nous mettons alors en évidence les éléments caractéristiques et « idéaux » des ateliers permettant la mise en œuvre de ce type de démarche, en insistant tout d'abord sur le cadrage des rôles des différents intervenants et sur le choix des sujets d'étude.

1. Concept(s) de démarche d'investigation

Il est difficile de proposer une définition complètement établie du concept de démarche d'investigation.

Nous pouvons nous intéresser tout d'abord aux concepts définis ces dernières années dans le milieu scolaire, provenant du mouvement récent de rénovation de l'enseignement des sciences : concept de démarche d'investigation, voire de démarche scientifique, introduits notamment dans les programmes officiels français.

En lycée général, dans le programme de mathématiques de la classe de seconde (secondaire 5 – élèves de 15-16 ans) de 2009 (MEN, BO n°30 du 23 juillet 2009), nous pouvons mettre en évidence l'objectif général :

> L'objectif de ce programme est de former les élèves à la démarche scientifique sous toutes ses formes pour les rendre capables de : modéliser et s'engager dans une activité de recherche ; conduire un raisonnement, une démonstration ; pratiquer une activité expérimentale ou algorithmique ; faire une analyse critique d'un résultat, d'une démarche ; pratiquer une lecture active de l'information […] ; utiliser les outils logiciels [..] ; communiquer à l'écrit et à l'oral. (Op.cité, p. 1)

Les programmes de mathématiques du collège (élèves de 11 à 14-15 ans) parus en août 2008 (MEN, BO spécial n°6 du 28 août 2008) comportent une introduction commune à l'ensemble des disciplines scientifiques et technologiques. L'accent est mis sur l'unité de la culture scientifique et de son enseignement. Un paragraphe spécifique est consacré à la notion de démarche d'investigation (dans la continuité des programmes de l'école primaire).

Retenons les sept moments clés mis en évidence :

> choix d'une situation-problème ; appropriation du problème par les élèves ; formulation de conjectures, d'hypothèses explicatives, de protocoles possibles ; investigation ou résolution du problème conduite par les élèves ; échange argumenté autour des propositions élaborées ; acquisition et structuration des connaissances ; mobilisation des connaissances. (Op.cité, p.4)

Les deux derniers points ne peuvent pas être directement appliqués aux ateliers MATh.en.JEANS, puisque ces derniers ne portent pas d'intention explicite d'apprentissage de connaissances. De même, le premier moment de choix de la situation-problème n'est pas inscrit dans un scénario pédagogique ; il est le fruit d'une proposition du chercheur référent, avec accord et modifications éventuelles par les enseignants encadrant l'atelier.

D'autre part, dans ces programmes, soulignons la différence mise en exergue entre mathématiques et autres sciences :

> Cette démarche s'appuie sur le questionnement des élèves sur le monde réel (en sciences expérimentales et en technologie) et sur la résolution de problèmes (en mathématiques) [de plus] la validation [est effectuée] par l'expérimentation d'un côté, par la démonstration de l'autre. (Ibid., p. 4)

Nous nuançons ce point de vue trop restrictif : les exemples que nous donnerons en partie IV indiquent une frontière parfois floue entre ces deux points de vue.

Un éclairage plus international peut être apporté par la lecture du rapport Rocard (Rocard et al. 2007), se basant sur le concept d'IBSE. Une définition de l'investigation y est proposée :

> Par définition, une investigation est un processus intentionnel de diagnostic des problèmes, de critique des expériences réalisées, de distinction entre les alternatives possibles, de planification des recherches, de recherche d'hypothèses, de recherche d'informations, de construction de modèles, de débats avec des pairs et de formulation d'arguments cohérents (Linn, Davis et Bell 2004). (Op. cité, p. 9)

La particularité des mathématiques est également mise en avant :

> En ce qui concerne l'enseignement des mathématiques, la communauté éducative préfère parler « d'apprentissage basé sur les problèmes ». […] L'enseignement des sciences basé sur l'investigation constitue une approche basée sur les problèmes, mais avec une dimension supplémentaire étant donné l'importance accordée à l'approche expérimentale. (Ibid., p. 9)

Encore une fois, l'expérimentation semble un peu trop vite exclue du champ des mathématiques.

Montrons maintenant comment les dispositifs de fonctionnement des ateliers MATh.en.JEANS permettent de mobiliser des démarches d'investigation telles que citées plus haut.

2. *Les rôles des différents acteurs*

Chaque atelier comprend trois types d'acteurs : les élèves, les enseignants de l'établissement, le chercheur. Les rôles de chacun sont définis par une charte pédagogique, ou contrat de recherche, dont on expose les grands principes aux élèves en début d'année scolaire.

Des repères pour les différents acteurs ont été rédigés et mis en ligne sur le site Web de l'association (http://mathenjeans.free.fr/amej/mej_quoi/memento.html) ; nous pouvons aussi les retrouver dans un article du bulletin de l'APMEP (Audin et Duchet 2009, pp. 354-358). Nous en exposons ici les idées clés.

Le rôle des enseignants est de présenter, rappeler les objectifs, (re)négocier les règles ; d'observer, être attentif, analyser ; de dévoluer, motiver, responsabiliser ; de faire débattre, débattre, mathématiser ; d'orienter, faciliter, valider la recherche ; d'aider, fournir des outils. La difficulté principale de l'enseignant est de savoir s'effacer, voire se taire, pour laisser les élèves suivre leur cheminement. Ce n'est pas toujours facile, d'autant plus que les élèves sont souvent les propres élèves de l'enseignant, et que les rôles diffèrent de la classe ordinaire. L'enseignant est toutefois garant de la bonne marche du projet, et ne doit pas hésiter à intervenir en orientant les élèves ou en débattant avec eux si ces derniers s'enlisent ou se fourvoient. La posture de l'enseignant peut être facilitée lorsque ce dernier ne connaît aucun élément de réponse (ou très peu) concernant le sujet proposé par le chercheur. Cette situation est assez fréquente.

Le rôle du chercheur est de s'informer, concevoir et présenter des sujets, motiver ; d'encourager, donner confiance, déculpabiliser ; de populariser les mathématiques de la recherche ; d'initier à la démarche de recherche mathématique et à la preuve, légitimer ; de diriger les recherches. Le chercheur est moins présent que l'enseignant, est extérieur à l'établissement, et c'est un professionnel du monde de la recherche. Son rôle est ainsi déterminant, en particulier lors des séminaires qui ponctuent les grandes étapes de l'année. Son regard d'expert permet de diriger les recherches de façon plus pertinente que ne le ferait l'enseignant, et son expérience de chercheur permet de dédramatiser les situations, de rassurer les élèves. De plus, son statut professionnel –souvent impressionnant pour les élèves- permet de valoriser les travaux effectués.

Le rôle des élèves est d'être assidu, et participer sérieusement à l'atelier ; de fonctionner en équipe ; de prendre en charge les activités de recherche, de prendre son temps, de demander de l'aide si nécessaire ; de ne pas hésiter à suggérer de nouvelles pistes ou de nouveaux problèmes ; de garder les traces des recherches effectuées ; d'échanger, vérifier, communiquer ses résultats. Les élèves sont au centre du dispositif ; ils sont responsabilisés, mis en autonomie et valorisés.

Le cadrage ainsi mis en place est garant de la mise en route d'une véritable démarche d'investigation pour les élèves en définissant parfaitement le rôle des différents acteurs des ateliers. Nous constatons également que, même si les ateliers ne portent pas d'intention didactique explicite, ils s'inscrivent bien dans un contexte scolaire, dans lequel les enseignants ont un rôle important à jouer.

3. Caractéristiques des sujets proposés

Depuis la mise en place des ateliers, un grand nombre de sujets ont été proposés, pour des élèves de niveaux variés. Le site Web de le l'association permet de retrouver presque tous les énoncés depuis sa création. Nous donnons également quelques exemples en partie IV.

Les sujets sont proposés par le chercheur en concertation avec les enseignants. Les énoncés correspondent à des problèmes ouverts, toujours pour les élèves, souvent pour les enseignants, et quelquefois pour le chercheur également. Le chercheur s'efforce de rédiger un sujet abordable, accessible, motivant et donnant du sens pour les élèves.

En général, les problèmes donnés correspondent à la définition de « problème ouvert » définis par Arsac et Mante (Arsac et Mante 2007, p.20). Néanmoins, l'organisation des recherches n'étant pas contrainte de la même manière -notamment au niveau de la temporalité-, la caractéristique « l'énoncé est court » (Ibid., p. 20) n'est plus aussi impérative.

La problématique doit être assez riche et complexe pour pouvoir être étudiée sur une année entière. Il est d'ailleurs rare que les élèves « épuisent » un sujet. Lors du congrès national, du fait des nombreuses interactions ayant lieu, les élèves prennent conscience des limitations de leurs travaux et des problématiques laissées en suspens, ou prolongeant naturellement leurs résultats.

Les thématiques des sujets sont diverses et parfois très éloignées des mathématiques que les élèves côtoient dans leur scolarité. Les problématiques peuvent être des illustrations d'authentiques sujets de recherche contemporaine. D'autre part, le point de départ des énoncés est souvent une situation concrète, posant ainsi la question de la mathématisation ou de la modélisation du monde réel. Cette richesse des sujets contribue notamment à développer la culture scientifique et mathématique des élèves et les sensibilise aux enjeux actuels de la recherche scientifique. Nous retrouvons ainsi quelques préoccupations communes aux différentes formes de démarches d'investigation en science.

4. Quelques éléments clés caractérisant les ateliers MATh.en.JEANS

Mettons en évidence les caractéristiques essentielles des ateliers MATh.en.JEANS concernant la mise en œuvre d'une démarche d'investigation.

Tout d'abord, le principe fondateur des ateliers est de faire jouer aux élèves le rôle d'un chercheur en mathématiques dans ses aspects usuels : appropriation d'une problématique, activités de recherche autour de cette problématique, communications et échanges autour des premières investigations, synthétisation des résultats obtenus, communications orales et écrites des résultats auprès d'un public élargi… Le temps accordé aux élèves pour leurs activités de recherche est long (une année scolaire) et régulier (séances hebdomadaires). Cela constitue un élément fondamental pour que les élèves puissent s'approprier toutes les phases du métier de chercheur citées ci-dessus. Remarquons que ces différentes phases apparaissent bien dans les définitions des démarches d'investigation relevées en 1.

L'autonomie et la responsabilisation des élèves, la dévolution de la problématique aux élèves sont évidemment les éléments qui permettent à chaque élève de s'engager personnellement dans une démarche d'investigation.

Le choix de donner des sujets attractifs et abordables mais ouverts, riches et profonds est garant de la mise en œuvre d'approches variées par les élèves ; leur imagination et leur créativité est largement favorisée.

L'encadrement assuré par les enseignants et le chercheur, avec pour chacun des rôles complémentaires, évite l'enlisement des travaux ou le découragement des élèves, permet un recadrage des activités, apporte aide, soutien et motivation au groupe.

Un autre aspect fondamental des ateliers est de favoriser au maximum les interactions entre les élèves. Tout d'abord, chaque sujet est travaillé par un petit groupe d'élèves dans un établissement. Ces élèves travaillent en concertation chaque semaine, se répartissent le travail suivant les idées de chacun. Des phases de régulation se mettent en place naturellement. Lorsqu'il y a bien jumelage entre deux établissements, les séminaires organisés permettent d'échanger avec un autre groupe d'élèves, qui aura rarement organisé ses recherches de la même façon. Les interactions sont ainsi très riches. La validation des résultats de chacun, la structuration des connaissances, et la mise en commun des travaux, notamment en vue de la préparation du congrès national, sont bien au cœur de ces échanges lors des séminaires. Et ces aspects constituent bien une partie importante de la mise en œuvre d'une démarche d'investigation. Rappelons également que dans les ateliers, et dans les jumelages, les élèves sont de niveaux variés (classes, cycles, structure, niveau scolaire), ce qui nécessite la mise en place d'un langage commun.

D'autres éléments complètent et enrichissent cette phase de validation, structuration et communication des travaux de recherche : interactions avec les enseignants encadrant l'atelier et avec le chercheur, communications lors du congrès national auprès d'un public élargi et ne connaissant pas la problématique étudiée, rédaction d'un article scientifique, conception d'expositions pour l'établissement...

Nous pouvons mettre en évidence d'autres éléments caractérisant les ateliers. Ainsi, la tenue de cahiers ou de classeurs dans lesquels les élèves consignent les moindres traces des recherches effectuées lors de l'atelier ; c'est un élément fondamental pour les élèves, qui montre l'aspect non linéaire des activités de recherche. Les élèves s'inscrivant dans un atelier sont des élèves volontaires, s'engageant pour toute l'année (après des séances d'essai éventuelles), et qui ne sont pas recrutés suivant leur niveau en mathématiques. De fait, des élèves faibles ou moyens se retrouvent dans ces ateliers. Les élèves travaillent dans une ambiance décontractée, avancent à leur rythme, sans compétition et sans évaluation. La notion de plaisir à faire des mathématiques autrement est souvent évoquée par les élèves lors des bilans de fin d'année. Enfin, la tenue du congrès national, objectif central pour les ateliers, est un moment important dans la vie des élèves ; il est à la fois source de travail, d'appréhension, de découvertes, et de grand plaisir.

IV. EXEMPLES D'ATELIERS MIS EN ŒUVRE EN COLLEGE ET PROBLEMATIQUES SOULEVEES

Nous participons depuis cinq années à la mise en œuvre d'ateliers MATh.en.JEANS au sein de deux collèges jumelés (collèges J. Mermoz de Marly et Hauts-de-Blémont de Metz) en tant que chercheur référent.

Nous n'avons pas étudié et analysé spécifiquement et systématiquement l'organisation et le déroulement de ces ateliers. Il s'agit seulement ici de témoigner de l'expérience acquise, à travers divers exemples et études de cas, et à travers le filtre du rôle du chercheur.

Notre premier rôle fut de proposer des sujets de recherche aux ateliers. Ensuite, nous avons rendu visite régulièrement aux ateliers, en particulier lors des séminaires de jumelage, avons participé au recadrage et au recentrage des problématiques, à la validation des résultats. Nous nous sommes également impliqués dans la préparation et la participation au congrès national, et dans la réalisation –malheureusement peu fréquente- des articles finaux.

Nous présentons ci-après quelques exemples de sujets élaborés et donnés au cours des cinq années passées, et quelques éléments d'étude de l'avancée des élèves sur un exemple. Nous énonçons au travers de ces exemples des problématiques qui resteraient à être explorées.

1. Exemples de sujets

Elaborer un sujet permettant de répondre aux critères énoncés en II.3 n'est pas toujours aisé, surtout si l'on veut proposer un thème original. Nous avons au cours de ces différentes années essayé de recouvrir plusieurs domaines (mathématiques), parfois en lien avec des recherches actuelles, partant de situations concrètes ou « réelles », avec un énoncé court et très ouvert, ou au contraire comportant quelques questions précises suivies de questions plus générales…

Les énoncés détaillés des sujets présentés ci-après peuvent se retrouver en ligne[1].

Certains sujets sont de nature très expérimentale (avec éventuellement utilisation des TICE), comme le « Jeu de la vie » (année 2007-2008, sujet 1). Il n'a pas donné lieu à l'élaboration de conjectures suivies de preuves, mais plutôt à des démarches de classifications et à des essais d'élaboration de conjectures. Le sujet « Exploitation de photos d'éclipse de Lune » (année 2009-2010, sujet 1) est en prise avec le monde « réel », basé sur une modélisation pour laquelle les élèves ont éprouvé des difficultés (des professeurs de sciences physiques encadraient ces ateliers). Signalons aussi le sujet « La Fabrique du hasard » (année 2007-2008, sujet 2), qui soulève des questions ardues lorsque l'on veut quitter le sentier des polyèdres réguliers pour réaliser des générateurs de hasard. Beaucoup de thèmes ont donné lieu à des réalisations et constructions d'objets (exemples de réalisations sur le site[2]). Tous les sujets permettent une prise de contact immédiate à l'aide d'explorations et expérimentations. Ce n'est en général qu'au bout de plusieurs semaines que les élèves ont pu se lancer dans les phases de structuration des recherches, d'élaboration de conjectures et des premières

[1] Annexe 1, sur la page http://www.mmas.univ-metz.fr/~dubois/EMF2012GT10DUBOIS-ANNEXES.html
[2] Annexe 2, sur la page http://www.mmas.univ-metz.fr/~dubois/EMF2012GT10DUBOIS-ANNEXES.html

démonstrations. Rarement, la richesse des différentes pistes évoquées à l'intention des enseignants n'a été exploitée par les élèves.

À partir d'exemples de différentes pratiques au sein de la communauté MATh.en.JEANS, il serait intéressant d'étudier les phases d'élaboration des sujets, les attentes des enseignants, et les interactions entre le chercheur et les enseignants autour de la réception, la représentation, et les modifications de ces sujets. On pourrait également étudier les phases de présentation des sujets auprès des élèves, les phases de découvertes et de choix du sujet (lorsque plusieurs leur sont présentés), et les premières étapes d'appropriation de la problématique.

2. Exemple de déroulement des recherches

Nous présentons à travers un exemple des éléments de réflexion autour de l'avancement des travaux des élèves.

Nous considérons le sujet « Divisons 1 par un nombre entier : après la virgule, que se passe-t-il ? » (Année 2010-2011, sujet 1), étudié par un groupe de quatre élèves de $4^{ème}$ (secondaire $3^{ème}$ année, 13-14 ans). Les élèves ont tout d'abord réalisé des essais sur les premiers entiers, à la calculatrice et à la main (après avoir constaté les limites de la calculatrice). Les élèves n'ont pas étudié de façon systématique chaque entier de façon consécutive, mais, par une initiative personnelle, se sont répartis la tâche, en considérant les entiers multiples de 2, 3, 5, 7 ou 11. Des premières observations ont été effectuées : apparition de périodes, de nombres décimaux… Un tableau récapitulatif a alors été conçu, répertoriant toutes les fractions jusqu'à l'entier 50 (aucune période n'apparaît à ce stade pour les entiers 47 et 49). Les élèves sont alors encouragés par l'équipe encadrante et le chercheur à classifier les observations et à les expliquer. Voici des questions que nous leur avons soumises après une visite en janvier : « Caractérisez les entiers n tels que la fraction $1/n$ soit un nombre décimal ; trouvez un critère sur n et démontrez votre résultat. La technique de la division à la main vous a permis, lorsque n=7, d'observer de nouvelles choses, grâce à la notion de division euclidienne ; appliquez la technique sur d'autres exemples et essayez de comprendre ce qui se passe. Essayez de démontrer pourquoi une période apparaît, dans le cas où $1/n$ ne serait pas un nombre décimal. Pour les fractions 1/47 et 1/49, faites les divisions à la main pour trouver une période. » Ces questions ont été basées sur ce que nous avons pu effectivement voir et apprendre des recherches menées par les élèves. Les élèves ont alors réussi à expliquer dans quels cas la fraction est un nombre décimal, et à démontrer par des exemples génériques l'apparition de périodes. Les enseignants les ont initiés à l'utilisation du tableur pour obtenir des résultats exacts dans leurs divisions (les élèves ont ainsi pu constater une erreur commise dans le calcul à la main de la fraction 1/47). Les élèves ont rédigé un article final après le congrès. L'élaboration de cet article a permis de les sensibiliser plus spécifiquement à la notion d'implication et d'implication réciproque (car les élèves n'avaient pas su repérer et démontrer la propriété « si $1/n$ est un nombre décimal alors n s'écrit sous la forme 2^a5^b »), et de mieux structurer leur raisonnement.

Cet exemple permet de soulever quelques problématiques. À quel moment et comment les élèves ressentent-ils la nécessité de se détacher de leurs premières expérimentations et d'entrer dans la phase d'élaboration d'hypothèses, de conjectures ? Retrouve-t-on réellement les différentes phases de recherche décrites en II.3 ? Comment et jusqu'à quel point guider et recentrer le travail des élèves ? Peut-on différencier ou non le rôle des enseignants et du chercheur ? Comment étudier et analyser les interactions entre les élèves ?

V. CONCLUSION

Nous pensons que le dispositif des ateliers MATh.en.JEANS permettrait d'ouvrir des axes de recherche sur les problématiques soulevées autour des démarches de recherche et d'investigation en mathématiques, et plus généralement en sciences.

Pour aller plus loin dans la découverte des ateliers, découvrir des exemples de travaux de recherche réalisés, et des témoignages d'enseignants et d'élèves, on pourra consulter le dossier thématique paru dans le Bulletin de l'APMEP n°482 (Fournier 2009 ; Grihon 2009 ; Krob 2009 ; Maréchal 2009 ; Proal 2009).

REFERENCES

Arsac G., Mante M. (2007) *Les pratiques du problème ouvert*, Lyon : Scéren CRDP de Lyon.

Audin P., Duchet P. (2009) MATh.en.JEANS : définition, exemples, contre-exemples, propriétés, démonstrations…. *Bulletin de l'APMEP* 482, 347-358.

Fournier F. (2009) « L'invasion des uns » dans deux collèges de Midi-Pyrénées. *Bulletin de l'APMEP* 482, 387-403.

Grihon P. (2009) Analyse comparée de deux sujets traités par des ateliers. *Bulletin de l'APMEP* 482, 371-392.

Krob D. Dir. (2009) Une recherche sur les polyèdres. *Bulletin de l'APMEP* 482, 393-396.

Maréchal G. (2009) Une année MATh.en.JEANS dans l'académie de Poitiers. *Bulletin de l'APMEP* 482, 361-370.

Proal H. (2009) Comment MATh.en.JEANS valorise l'élève. *Bulletin de l'APMEP* 482, 358-360.

Rocard M., Csermely P., Jorde D., Lenzen D, Walberf-Henrikson H., HemmoV. (2007) *L'enseignement scientifique aujourd'hui : Une pédagogie renouvelée pour l'avenir de l'Europe*. Commissions Européennes, Direction de la Recherche. http://ife.ens-lyon.fr/vst/Rapports/DetailEtude.php?&id=674, consulté le 15 novembre 2011.

MEN (2008) *Programmes des enseignements de mathématiques, de physique-chimie, de sciences de la vie et de la Terre, de technologie pour les classes de sixième, de cinquième, de quatrième et de troisième du collège*. Bulletin officiel spécial n° 6 du 28 août 2008. http://www.education.gouv.fr/cid22120/mene0817023a.html, consulté le 15 novembre 2011.

MEN (2009) *Programmes d'enseignement de mathématiques de la classe de seconde générale et technologique.* Bulletin officiel n°30 du 23 juillet 2009. http://www.education.gouv.fr/cid28928/mene0913405a.html, consulté le 15 novembre 2011.

DES REPRÉSENTATIONS SUR LES DÉMARCHES D'INVESTIGATION AUX PRATIQUES DE CLASSE : LE CAS D'ENSEIGNANTS DÉBUTANTS EN MATHÉMATIQUES ET EN SCIENCES EXPÉRIMENTALES

Michèle Gandit* – Eric Triquet** – Jean-Claude Guillaud***

Résumé – La recherche s'inscrit dans le cadre du projet européen S-TEAM (Science Teacher Education Advanced Methods) (Grangeat 2011) et porte sur des enseignants débutants, au regard des démarches d'investigation, en mathématiques, sciences de la vie et de la Terre et sciences physiques et chimiques. Le premier volet est consacré à l'évolution des représentations de ces enseignants relativement à l'épistémologie, l'enseignement et l'apprentissage de leur discipline, à la suite d'une formation centrée sur les démarches d'investigation. L'objet du second volet est l'analyse de la mise en œuvre de démarches d'investigation par des enseignants débutants dans leur classe.

Mots-clés : démarches d'investigation, disciplines scientifiques, formation des enseignants, analyse de séances en classe

Abstract – This article presents a research within the european project S-TEAM (Science Teacher Education Advanced Methods) (Grangeat 2011). This project aims study and inquiry-based science education (IBSE) in mathematics, physics and biology. This paper reports on a study about novice teachers during their teacher training. A first part investigates the effects of an IBSE program on teachers' personal meanings about epistemology, science teaching and learning. The second part places the spotlight on inquiry-based teaching implementation in class.

Key-words: inquiry-based science education, scientific disciplines, teacher training, analysis of classroom sessions

Cette étude se situe dans le cadre du projet européen S-TEAM, portant sur les enseignements scientifiques fondés sur l'investigation (ESFI) (Grangeat 2011). Les changements de pratiques, en sciences, suite au rapport Rocard (Rocard et al 2007) et aux injonctions officielles en France (MEN 2008), passent nécessairement par un travail de formation des enseignants. Celui-ci, à notre sens, est indissociable d'une saisie des conceptions des enseignants sur leur discipline, à la fois sur les plans épistémologique et didactique. Notre recherche étudie des échantillons d'enseignants débutants, en mathématiques, en sciences de la vie et de la Terre (SVT) et en sciences physiques et chimiques (SPC), au cours de leur première année de formation professionnelle, celle-ci comportant des modules spécifiques relatifs à la démarche d'investigation (DI), assurés par des enseignants de sciences de l'éducation (Leroy 2011), d'une part, de chacune des trois disciplines scientifiques, d'autre part.

Le premier volet résume la méthodologie et les résultats obtenus concernant l'étude des conceptions évoquée ci-dessus, déjà publiés par ailleurs. Dans le second volet, nous mettons ces résultats en lien avec les analyses de séances filmées, l'une en mathématiques, l'autre en SVT, où les enseignants débutants disent mettre en œuvre une démarche d'investigation (DI).

* Université Joseph Fourier, Grenoble 1, IUFM & Maths à modeler – France – michele.gandit@ujf-grenoble.fr
** Université Joseph Fourier, Grenoble 1, IUFM & S2HEP Université de Lyon – France – eric.triquet@ujf-grenoble.fr
*** Université Joseph Fourier, Grenoble 1, IUFM – France – jean-claude.guillaud@ujf-grenoble.fr

© Gandit M., Triquet E., Guillaud J.-C. (2012) Des représentations sur les démarches d'investigation aux pratiques de classe : le cas d'enseignants débutants en mathématiques et en sciences expérimentales. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des Mathématiques et Contrat Social : Enjeux et Défis Pour Le 21e Siècle – Actes du Colloque EMF2012* (GT10, pp. 1330–1342). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

I. REPRESENTATIONS D'ENSEIGNANTS DEBUTANTS SUR LEUR DISCIPLINE

La population étudiée est constituée de 33 enseignants en sciences expérimentales (SVT et SPC) et de 44 enseignants en mathématiques, tous débutants, en formation professionnelle[1] à l'Institut Universitaire de Formation des Maîtres, après leur réussite à un concours d'accès au métier d'enseignant. Pour la saisie des représentations de ces enseignants, relativement à leur discipline – sur l'épistémologie, l'enseignement, l'apprentissage –, notre méthodologie s'appuie sur l'utilisation de questionnaires, de type *Q-sort*, inspirés de Darley (1994) et comportant une soixantaine d'affirmations (ou items). L'un est commun aux sciences expérimentales[2], l'autre est propre aux mathématiques. Pour chaque item, l'enseignant interrogé doit choisir entre –2 (« pas du tout d'accord »), –1 (« plutôt d'accord »), 0 (« avis partagé »), +1 (« plutôt d'accord ») ou +2 (« tout à fait d'accord »). Si, pour la rédaction des affirmations concernant l'épistémologie, les fortes spécificités disciplinaires nous ont contraints à séparer les mathématiques des sciences expérimentales, cette séparation est gommée dans les items relevant du domaine didactique.

Deux points de vue sont adoptés pour l'analyse des réponses : 1) on considère chacune des affirmations séparément, 2) par regroupements de réponses, on rend compte de représentations plus globales, sur l'épistémologie et la didactique de chaque discipline.

L'analyse séparée par item utilise comme premier indicateur (Darley 1994) la somme algébrique des réponses. Celle-ci est précisée par un deuxième indicateur qui représente cette somme convertie en pourcentage de la somme maximale (respectivement minimale) possible, compte tenu de la taille de l'échantillon (obtenue si chaque personne de l'échantillon attribue +2 (respectivement –2) à l'item, dans le cas où S est positive (respectivement négative)). Les fréquences, en pourcentage, des réponses strictement positives ou négatives, achèvent de préciser, pour chaque affirmation, l'adhésion ou le rejet de la part des enseignants.

L'analyse plus globale est fondée sur l'hypothèse que des adhésions et des rejets d'items, lorsqu'ils sont effectués simultanément, témoignent ensemble d'une conception forte. Nous définissons ainsi *a priori* pour chacun des champs disciplinaires, trois couples de conceptions *antagonistes*, l'un sur l'épistémologie, les deux autres sur la didactique.

Par exemple, concernant les mathématiques, le tableau 1 montre la caractérisation utilisée de la conception nommée *Investigation* :

[1] L'étude a été faite en 2009-2010, dernière année, en France, où les professeurs stagiaires des lycées ou collèges bénéficiaient d'une formation en alternance : par semaine, 6 ou 8 heures en classe et deux journées de formation à l'IUFM.
[2] Nous avons fait le choix de ne pas distinguer les sciences du vivant des sciences physiques, dans la mesure où nous axons notre comparaison avec les mathématiques, sans toutefois nier les spécificités disciplinaires au sein même des sciences expérimentales.

Adhésion aux items suivants	*Rejet des items suivants*
Un bon enseignement de mathématiques doit commencer par une réflexion autour d'une question problématique pour l'élève. L'enseignement des mathématiques doit faire une place importante au débat entre les élèves, à partir de conjectures à valider ou à réfuter. Un enseignement efficace de mathématiques est construit à partir de problèmes à résoudre. Pratiquer la démarche d'investigation en classe ne fait pas perdre de temps si l'on considère les connaissances diverses qui sont mises en jeu. Un bon enseignement de mathématiques doit favoriser la responsabilité scientifique de l'élève, qui doit pouvoir se prononcer sur le vrai et le faux.	Une bonne méthode à utiliser en séance de T.P. en salle informatique consiste à donner aux élèves une feuille sur laquelle ils trouveront la procédure à suivre, ainsi que les consignes concernant l'utilisation du logiciel. L'enseignement des mathématiques doit être organisé de manière à ce que les connaissances soient introduites logiquement une à une, de la plus simple à la plus complexe. Enseigner les mathématiques par la pratique d'une démarche d'investigation est une pratique pédagogique sans rapport avec l'activité réelle du mathématicien . Un bon enseignement de mathématiques doit débuter par l'exposé clair de ce que l'élève doit retenir. La pratique par les élèves d'une démarche d'investigation est à réserver à des ateliers, mais n'a pas sa place dans le cours « normal ».

***Tableau 1** – La conception « Investigation » en mathématiques*

Cette conception, définie aussi en sciences expérimentales[3], traduit ainsi l'idée que la DI est un processus d'enseignement reposant sur une problématique, proposée au départ, au sujet de laquelle les élèves sont amenés à émettre des *conjectures* ou *hypothèses*[4], qu'ils doivent ensuite tenter de valider, une large part de responsabilité scientifique leur étant dévolue.

Par rapport à chacune de ces conceptions, nous évaluons (Triquet et al. à par.) comment se situe chaque enseignant, en début et en fin de formation. Nous déterminons pour cela, dans chaque réponse, le nombre de *contradictions* (les items rejetés, bien que favorables à la conception, ou bien acceptés, bien que contradictoires avec celle-ci), mais aussi le nombre d'*adhésions* (les items acceptés dans la conception), enfin le nombre de *non prises de position* (les réponses 0 ou les absences de réponse). Nous considérons ainsi qu'à partir de sept contradictions en mathématiques (sur 12 items) et six (sur 10 items) en sciences expérimentales, la conception est rejetée.

Après cette introduction liée à notre méthodologie, nous donnons les résultats obtenus en séparant les domaines épistémologique et didactique.

1. Domaine épistémologique

L'épistémologie des deux champs disciplinaires apparaît marquée à la fois par des points communs et des différences. En effet, si les mathématiques intègrent une dimension expérimentale, celle-ci n'apparaît pas de même nature et ne semble pas occuper la même place qu'en sciences expérimentales. L'expérience, de type papier-crayon, s'appuyant ou non sur du matériel, ou à l'aide d'un logiciel, menée sur un domaine déjà mathématisé, afin de provoquer l'émergence d'une conjecture, ne saurait être assimilée à l'expérience en sciences expérimentales, fondée sur une instrumentation ou une technologie, et surtout développée dans le but de mettre à l'épreuve une hypothèse. Or en mathématiques, la validation repose sur la preuve (ou démonstration), essentiellement de nature déductive, l'induction tenant par

[3] mais avec des *rejets / adhésions* un peu différents
[4] suivant les disciplines

ailleurs un rôle important dans le processus de découverte (Giroud 2011, pp. 65-66), alors qu'en sciences expérimentales elle est limitée à des temps de tâtonnement.

Concernant les sciences expérimentales, on dégage deux grandes approches : la première, centrée sur *les démarches inductives*, la seconde sur *les démarches déductives* (Triquet et al. à par.).

Dans le cadre *inductiviste*, l'observation est première et le réel est *source du savoir*. L'approche consiste à observer le réel pour en tirer – par induction – les lois qui le régissent. Outre qu'elle sous-entend que ces lois existent *a priori,* cette démarche implique la répétition d'un nombre sans fin d'observations. Le problème scientifique est ainsi subordonné à l'observation, laquelle est déterminée par une sorte de curiosité *naturelle* du chercheur. Si historiquement une telle approche a trouvé un certain nombre de partisans, plusieurs épistémologues (Khun 1970, Popper 1985)[5] lui dénient toute valeur opératoire comme démarche de construction du savoir scientifique. Popper dénonce l'absence de tout fondement au principe d'une inférence basée sur la multiplicité des observations.

Concernant les *démarches déductives*, ce sont les données théoriques qui sont premières et le réel est objet de confrontation avec le savoir, et non pas source directe du savoir. Les lois ne renvoient plus à des entités à découvrir, mais bien à des constructions humaines, imparfaites et nécessairement teintées d'une certaine subjectivité. Mais le point majeur est l'*hypothèse*. Celle-ci est le fruit d'un travail de la pensée sur les faits et les idées déjà en place, qui gouverne toute la conduite du scientifique. Claude Bernard (1865) affirme que la méthode expérimentale, en tant que méthode scientifique, repose tout entière sur la vérification expérimentale d'une hypothèse scientifique. Popper (1985) promeut, comme critère de scientificité de tout énoncé scientifique, celui de sa réfutabilité : un énoncé universel ne pourra jamais être vérifiable empiriquement devant l'impossibilité de tester tous les cas. Khun (1970) et Popper ajoutent un critère d'ordre social, celui de l'intersubjectivité, entendu comme fruit de la confrontation entre points de vue, arguments de plusieurs chercheurs. La notion de débat public au sein même de la communauté scientifique est ainsi introduite comme condition du fonctionnement de la production scientifique.

En mathématiques, nous n'opposons pas démarche inductive et démarche déductive en ce sens que *induction* et *déduction* interfèrent dans la pratique mathématicienne (Grenier et Payan 1998). Face à une situation, mathématique ou mathématisable, une méthode d'investigation systématique consiste en une succession d'étapes, éventuellement répétées :

> […] expérience, observation de l'expérience, formulation de conjectures, tentative de preuve, contre expérience, production éventuelle de contre-exemples, formulation de nouvelles conjectures, nouvelles tentatives de preuve… (Perrin 2007, p. 10)

Henri Poincaré (1908) met en avant que la résolution d'un problème passe par trois phases incontournables : la *maturation*, phase de travail sur le problème, puis la *découverte*, résultat d'une inspiration ou d'une intuition, enfin la *vérification* par l'élaboration d'une démonstration. Où se situe l'expérimentation ? Son importance est une question largement débattue en mathématiques, en épistémologie ou didactique des mathématiques (Bachelard 1938 ; Dieudonné 1968 ; Dias 2009 ; Giroud 2011), mais qui ne fait pas consensus (Joshua et *al* 1987). Andler (2005) lui accorde une part de 90% de l'activité du mathématicien, le reste revenant à la démonstration. Giroud (Op. cité, pp. 7-19) la définit par une suite d'actions, non nécessairement ordonnée, en situation de résolution d'un problème, dans laquelle il distingue trois types : « Proposer de nouveaux problèmes », « Expérimenter-observer-valider »,

[5] mais aussi Bachelard (1938), Chalmers (1988)

« Tenter de prouver ». Enfin même s'il s'agit d'expérience, celle-ci peut rester complètement dans le domaine théorique ou bien recourir à l'utilisation de matériel (technologique ou autre). Dans tous les cas, il s'agit d'aboutir à la formulation de conjectures, qui, même si elles se révèlent fausses, permettent d'avancer sur le problème[6].

Notre méthodologie, en sciences expérimentales, reprend les deux conceptions contradictoires définies par Chalmers (1988) au regard du statut accordé à l'observation d'une part, à la théorie d'autre part. Pour l'une, l'*Observation prime* (*OP*), les théories résultent de l'observation et/ou de l'expérience première. Pour l'autre, la *Théorie prime* (*TP*), l'expérience s'appuie nécessairement sur des éléments théoriques disponibles. Ainsi la résolution d'un nouveau problème s'inscrit dès le départ dans le cadre de savoirs déjà en place : ils permettent la formulation des hypothèses, lesquelles seront soumises à l'expérience. Dans l'échantillon observé, la fréquence de la conception *OP* évolue, entre octobre et mai de 34% à 21% ; elle est rejetée de façon constante par 9% des enseignants. La conception *TP* reçoit aussi un pourcentage d'avis favorables stagnant aussi à 9%, mais elle est rejetée par 34% des enseignants en début et par seulement 21% en fin de formation. On pourrait conclure à la persistance d'un *inductivisme naïf* (Robardet 1995) généralisé, probablement hérité, pour chacun, d'un vécu d'élève, puis d'étudiant confronté à des travaux pratiques coupés des enseignements théoriques, pour lesquels l'expérience tient une place première. Cependant, force est de constater que la formation professionnelle[7] proposée lors de l'année de stage produit peu d'effet. Deux points sont ici à prendre en considération : la faiblesse des apports épistémologiques, la concurrence avec des pratiques d'enseignement, au sein même des établissements, qui demeurent largement *inductivistes*. Enfin, l'absence d'une expérience de recherche, chez la plupart des futurs enseignants, pèse inévitablement dès lors qu'il s'agit d'avoir une opinion sur les modes d'élaboration des savoirs scientifiques.

En mathématiques, notre méthodologie oppose deux conceptions en référence à la dimension expérimentale. L'une, *TH* (Théorie), signifie qu'une démarche expérimentale n'a pas sa place en mathématiques, comme l'ont pensé, jusqu'à la fin des années quatre-vingts, la majorité des enseignants, qui ne voyaient leur discipline que comme l'art de démontrer formellement des résultats, à partir de propriétés bien établies (Dossier INRP 2007). L'autre, *EXP*, traduit l'intégration dans l'enseignement des mathématiques d'une forte dimension expérimentale, l'activité de preuve formelle n'étant pas essentielle pour le mathématicien. La puissance de calcul des ordinateurs permet d'aller plus loin dans l'expérimentation en mathématiques (Delahaye 2005, Kahane 2002). Dans l'échantillon observé, la conception *EXP* se révèle majoritairement en début (65%) et en fin (68%) de formation, rejetée par aucun enseignant en début et un seul en fin de formation. La conception *TH* n'est identifiée chez aucun stagiaire fin octobre, un seul en mai, elle est rejetée par une forte majorité en début et en fin de formation. Il apparaît ainsi que l'aspect expérimental soit nettement reconnu par les enseignants, dès le début de la formation[8] et sans évolution au cours de celle-ci.

---

[6] Citons sur ce point un autre mathématicien contemporain, Grothendieck (cité par Perrin 2008, p. 11) : « Quand je suis curieux d'une chose, mathématique ou autre, je l'interroge […] sans me soucier si ma question est peut-être stupide […]. Souvent la question prend la forme d'une affirmation, […] un coup de sonde. […] Souvent, surtout au début d'une recherche, l'affirmation est carrément fausse — encore fallait-il l'écrire pour que ça saute aux yeux que c'est faux, alors qu'avant de l'écrire il y avait un flou, comme un malaise, […]. Ca permet maintenant de revenir à la charge avec cette ignorance en moins, avec une question-affirmation peut-être un peu moins *à côté de la plaque* ».

[7] théorique à l'IUFM, pratique au sein des établissements scolaires

[8] Ceci est largement confirmé par les premiers résultats de l'étude d'un nouvel échantillon de 34 étudiants en première année de master « Enseignement du second degré en mathématiques », l'adhésion à la conception EXP forte se chiffrant à 68 %.

La comparaison des résultats entre les deux champs disciplinaires, par rapport à l'épistémologie, révèle ainsi des différences. En sciences expérimentales, la prédominance de la conception *OP* constitue *a priori* un obstacle à la mise en œuvre en classe des DI, alors que, sur ce point, en mathématiques, le contexte épistémologique est plus favorable.

2. Domaine didactique

Concernant nos cadres de référence, relatifs à la didactique de nos disciplines, nous renvoyons à Gandit et al. (2011), Triquet et Guillaud (2011), ainsi qu'à Triquet et al (à par.).

Pour les mathématiques, nous reprenons l'hypothèse de Giroud (2011) :

> La démarche expérimentale en mathématiques est un savoir-faire qui ne peut s'apprendre qu'à travers sa pratique en situation de résolution de problème. (Op. cité, p. 2)

Et nous distinguons cette démarche expérimentale de la DI en ce sens que cette dernière (MEN 2008), incluant l'acquisition, la structuration et la mobilisation des connaissances acquises, est un processus de nature essentiellement didactique (Op. cité, pp. 17-18).

La comparaison de la mise en œuvre effective des DI dans l'enseignement tend à rapprocher les deux champs disciplinaires. Les pratiques ne sont guère favorables à l'investigation expérimentale, celle-ci se trouvant réduite à une succession d'étapes mises en œuvre de façon quasi-mécanique sous l'autorité de l'enseignant, notamment en sciences expérimentales (Mathé et al. 2008). Des effets de contrats didactiques sont perceptibles, les enjeux de réussite de l'activité l'emportant sur ceux de savoirs à construire et de compétences à développer, liées à la démarche scientifique.

Dans notre étude, pour les enseignants de sciences expérimentales, c'est la conception *Inv* qui l'emporte (56% en octobre ; 58% en mai), alors que son opposée n'apparaît jamais présente. Nous centrons l'analyse de ces résultats sur trois aspects caractéristiques des DI : la place du problème et de l'expérience, la mise en place d'un débat et la prise en compte des conceptions des élèves. Le premier point présente une forte assise épistémologique nous permettant d'apprécier la cohérence des réponses d'un domaine à l'autre. De façon paradoxale, on note que les items proposant de placer la théorie et/ou le problème avant l'expérience sont plébiscités, en accord avec les discours institutionnel et pédagogique sur les DI. Ce résultat peut apparaître contradictoire puisque ce qui est considéré comme vrai par les enseignants stagiaires pour la recherche scientifique, à savoir que l'observation est première, est remis en cause au niveau de l'enseignement. Il y aurait donc, chez ces débutants, deux conceptions distinctes des modes de production des savoirs. Outre les items déjà cités, ceux qui recueillent le plus d'adhésions concernent la prise en compte précoce des conceptions, l'articulation de la démarche autour d'un problème et enfin la place importante accordée au débat entre élèves. Nul doute que les enseignants en formation ont reconnu là des mots-clés du discours pédagogique ambiant. Rien ne permet d'affirmer avec certitude qu'ils se les sont appropriés avec le sens qui leur est affecté, ni même qu'ils aient une réalité au niveau de leurs pratiques d'enseignement. Il convient donc d'être prudent dans notre caractérisation, dans la mesure où parallèlement on constate qu'ils sont une minorité à rejeter l'item suivant :

> L'enseignement des sciences doit être organisé de manière à ce que les connaissances soient introduites logiquement une à une de la plus simple à la plus complexe.

Cette orientation entre en contradiction avec l'esprit même des DI, fondées sur la prise en charge de questions résistantes et le dépassement d'obstacles associés à une situation complexe[9]. De façon cohérente, on note que l'idée d'une exploration ouverte, non complètement guidée, a également des difficultés à s'imposer (item B4[10]). Du point de vue de la formation, il semble donc important de faire vivre aux enseignants débutants de véritables situations-problèmes au travers desquelles les élèves sont amenés à se confronter d'entrée de jeu à la complexité, approche qui, d'une certaine façon, est en rupture avec les pratiques courantes.

Concernant l'enseignement des mathématiques, la conception *Inv* recueille une majorité : 56% des stagiaires lui sont favorables en octobre et 80% en mai, la conception antagoniste étant manifestée par un seul enseignant. Les résultats aux deux items sur la place première du questionnement initial, destiné à problématiser l'enseignement qui va suivre, montrent que les stagiaires sont certes majoritairement favorables, mais il s'agit d'une petite majorité et on note peu d'évolution globale sur les deux affirmations. Nous faisons l'hypothèse que les professeurs stagiaires sont partagés entre les propositions de la formation initiale qui mettent en avant l'importance de cette phase de problématisation, nécessaire à l'apprentissage, et les *habitudes profondes du milieu* (Robert 2005) auxquelles ils sont confrontés dans leur établissement. Pendant longtemps en effet, sous l'influence de mathématiciens renommés, tel Poincaré (1908), l'enseignement des mathématiques s'est refusé à une pratique effective de l'activité mathématique en cours, ignorant toute dialectique entre expérimentation et conceptualisation et niant tout processus de construction des connaissances (Joshua et *al* 1987). Or cette position didactique est encore très répandue, selon laquelle le professeur est celui qui expose le savoir, répond aux questions des élèves, valide les réponses, renvoie toute difficulté rencontrée dans l'apprentissage, soit vers l'élève, considéré comme incapable, soit vers le professeur, considéré comme un mauvais pédagogue. Nous postulons que c'est sur ce dernier point surtout que se focalisent les enseignants débutants, n'ayant encore qu'une confiance timide dans les résultats apportés sur ce sujet par la didactique, qu'ils découvrent en formation. Par ailleurs, la difficulté à mettre en place cette problématisation, particulièrement en mathématiques, est sans doute aussi à prendre en compte. Au regard des résultats sur l'item, selon lequel les connaissances doivent être introduites de la plus simple à la complexe, l'idée progresse selon laquelle l'enseignement ne s'organise pas du simple vers le complexe : en octobre, une majorité pense le contraire, en mai, les avis se partagent également, il reste cependant 18% d'indécis. Ces précisions par item atténuent le résultat sur la forte progression de la conception *Inv*. Outre le frein des composantes *médiatives* et *sociales* des pratiques (Robert 2008) — la position didactique décrite ci-dessus est fondée sur cette progression linéaire dans la complexité — le *temps didactique* au niveau de la formation, finalement très court entre les deux passations du questionnaire, peut aussi expliquer qu'on n'observe pas de changement plus radical, alors que la formation insiste sur ce point. Enfin sur les deux aspects, conceptions et débat, il apparaît en mathématiques également un positionnement conforme aux exigences de la mise en œuvre d'une DI, même s'il est moins marqué qu'en sciences expérimentales. On fait là encore l'hypothèse que l'idée du débat dans le travail de recherche fait aujourd'hui consensus et que celle de la prise en compte des conceptions initiales a peut-être diffusé davantage dans l'enseignement des sciences expérimentales que dans celui des mathématiques. Mais si cela peut constituer des points d'appui pour la formation aux DI, il resterait à explorer plus finement ce que recouvrent pour les sondés (enseignants débutants) les termes de *débat* et de *conception*.

---

[9] Cela peut traduire aussi le fait que les jeunes enseignants ont besoin d'être rassurés par des méthodes d'enseignement où la prise de risque pour eux est plus limitée.

[10] Item B4 : « Une bonne démarche d'investigation doit être conduite suivant les quatre étapes suivantes : mise en route du protocole, observations et/ou mesures, interprétation, conclusion. »

II. ANALYSE DE SEANCES ORDINAIRES QUI RELEVENT DE DEMARCHES D'INVESTIGATION

Dans cette deuxième partie, nous étudions la mise en œuvre d'une DI en classe, par des enseignants débutants, volontaires. Il s'agit de *pratiques ordinaires* au sens où les chercheurs n'interviennent ni dans l'élaboration, ni dans la réalisation des séances. Deux enseignants stagiaires en collège[11], dans chacune des trois disciplines, ont conçu et réalisé eux-mêmes, en classe, une séance mettant en jeu, selon eux, une DI, à la fin de leur année de formation professionnelle (2009-2010). Nous évoquerons ici seulement une séance en SVT et une séance en mathématiques.

Pour l'explicitation de notre cadre de référence et une étude détaillée des séances, nous renvoyons à Gandit, Triquet et Guillaud (à par.). Nous résumons notre méthodologie en disant que notre travail se situe dans la même ligne que Weiss et Monnier (2011) qui ont élaboré un outil qu'elles nomment *l'échographie d'un extrait de leçon filmée*, différenciant les activités des élèves et de l'enseignant et faisant apparaître le savoir au travers des tâches proposées. Nous affinons cependant cette trame analytique des séances, *reconstruite* après coup, en repérant des *événements*[12], révélateurs de certains phénomènes didactiques. Dans cet article, nous aborderons seulement un point essentiel en didactique, *la dévolution* aux élèves de la problématique de l'enseignant, en évoquant le *questionnement initial*, *la nature du problème* et *la place de l'argumentation,* trois des dimensions du *modèle ESFI*[13] proposé par Grangeat (2012).

Ce *questionnement initial* de la séance est apporté par les enseignants des trois disciplines, *directement* en mathématiques, par un problème, ou *en lien avec l'expérience des élèves* en sciences expérimentales. S'il reste le même en mathématiques, tout au long de la séance, celui-ci évolue au cours des séances observées en sciences expérimentales.

1. La séance étudiée en SVT

Elle a lieu dans une classe de sixième[14]. L'enseignante pose une première question *accrocheuse*, au départ, peu problématique, mais liée au vécu des élèves :

> Qu'est-ce que vous avez besoin dans votre organisme pour grandir ?[15]

Elle débouche rapidement, par *effet Topaze*, sur une deuxième question, orientée vers la composition des aliments, à partir de laquelle les élèves doivent formuler des hypothèses. Celles-ci doivent porter sur les constituants alimentaires présents dans six aliments, choisis par la professeure elle-même (le pain, le jus de pomme, le beurre, la farine, une pomme, du lait) :

> Et vous allez essayer d'imaginer quel est le constituant qui est en plus grande quantité dans chaque élément et on va aller le vérifier après.

Lorsqu'il s'agit de passer à l'étape de la validation par élaboration d'un protocole expérimental, la question se porte alors sur « la manière de prouver l'existence de tel constituant dans chacun des aliments », ce que les élèves doivent aussi apprendre à cette occasion. Les tests expérimentaux effectués par les élèves n'étant pas probants et ces derniers

---

[11] élèves de 11 à 15 ans
[12] Nous définissons un *événement* comme une unité de sens qui débute par une phrase (écrite ou orale) ou un geste d'un ou de plusieurs acteurs de la classe – le professeur ou un ou plusieurs élèves – et se termine de la même façon, dès qu'on considère comme traité l'objet en jeu dans la question ou le geste de départ.
[13] Enseignement des Sciences Fondé sur les démarches d'Investigation
[14] élèves âgés de onze ans
[15] Nous reprenons la phrase telle qu'elle est prononcée par l'enseignante débutante.

manifestant une certaine résistance à admettre la présence de plusieurs constituants, alors qu'ils n'avaient pas pu la mettre en évidence, c'est l'enseignante qui tranche d'autorité, dans cette phase de. bilan. Cependant, ce n'est qu'à la fin de la séance que se dévoile la problématique, à laquelle les élèves n'ont pu avoir accès : *Dans quelle mesure trouvera-t-on des constituants identiques dans l'aliment de base et dans l'aliment issu de sa transformation ?* Ainsi l'institutionnalisation porte sur une question qui n'a jamais été posée. Néanmoins, à chaque étape de la DI correspond un *questionnement-consigne* sans construction de lien avec le précédent. Les élèves, qui ne peuvent comprendre la problématique de l'enseignante, doivent s'accommoder de ces ruptures, à la fois sur les questions posées et sur les tâches associées. Il s'ensuit une absence de dévolution du véritable problème en jeu.

Il semble que cette séance illustre la contradiction notée précédemment entre les conceptions des enseignants sur les plans épistémologique et didactique. En effet, si l'enseignante a intégré le discours institutionnel sur les DI – elle entre par une question et invite ensuite les élèves à formuler des hypothèses – celui-ci semble avoir peu d'assise sur le plan épistémologique puisque l'investigation dans laquelle elle entraîne les élèves, a peu de point commun avec une investigation scientifique véritable, les élèves ne disposant même pas d'un problème comme fil directeur.

Si la problématique de l'enseignante de SVT est de nature notionnelle, figurant explicitement dans un chapitre du programme, celle des deux professeurs de mathématiques semble davantage tournée vers *les savoirs transversaux* liés à la pratique d'une démarche expérimentale en mathématiques tels que *expérimenter*, *formuler une conjecture*, *tenter de la prouver*, sans que toutefois cela soit clairement dit. L'un comme l'autre ont la volonté affichée au départ[16] de favoriser l'interaction entre élèves[17] en formant des groupes, chacun d'eux devant produire un transparent.

2. La séance étudiée en mathématiques

Le problème posé, dans la classe d'Antoine, est celui du nombre de diagonales d'un polygone à *n* côtés. La présence de ce fil directeur dans la séance, ainsi que l'installation des élèves en groupes, avec une consigne de production, pourraient constituer *a priori* des conditions plus favorables à l'investigation des élèves que lors de la séance de SVT. Nous montrons cependant que c'est insuffisant pour assurer la dévolution de la problématique de l'enseignant.

Si le questionnement initial présente un potentiel didactique, le *milieu* didactique n'est en effet pas suffisamment construit[18] pour permettre une dévolution aux élèves de *la démarche expérimentale.* L'observation de la séance montre, par exemple, que le *statut de conjecture* n'existe pas dans la classe. Dans le premier groupe abordé par le professeur, on entend :

> Elève : (Pour un carré)… il y en a deux[19], donc à six[20], il y en aurait trois.
> Professeur : […] Essayez de faire des essais… Tu as une idée-là, tu dis, pour avoir le nombre de diagonales on divise le nombre de côtés par deux. Donc ça, c'est une idée de départ… Essayez de vérifier si sur les autres cas, ça marche aussi, et vous confirmerez cette idée, au alors vous essayerez de la réfuter et vous en trouverez une autre, d'accord ?

[16] Confirmée par les entretiens effectués avec ces enseignants au sujet de leur séance
[17] Il s'agit d'élèves de classes de quatrième (âgés de 13 ans).
[18] Ceci nécessite un travail en amont de la séance.
[19] deux diagonales
[20] un polygone à six côtés

Le professeur utilise, au cours de la séance, diverses expressions pour remplacer le mot de conjecture. Par ailleurs, dès le début, il montre, dans ce premier groupe, comment on peut réfuter une conjecture : il donne lui-même un contre-exemple en évoquant un polygone à cinq côtés, sans toutefois prononcer le mot de contre-exemple. Sans cesse, il incite les élèves à faire des essais, tout en leur demandant de choisir des polygones moins compliqués :

> Professeur : […] Alors là, est-ce que vous pensez que vous utilisez les polygones les plus simples pour répondre à la question ? Donc vous allez trou…, enfin ça va marcher de la même manière…, mais je pense, utilisez peut-être des trucs un peu plus, plus…conventionnels, au départ, pour chercher, c'est plus facile, plutôt que de partir directement dans des choses très compliquées. Après, vous pouvez essayer de trouver la règle avec, on va dire, les polygones classiques, et après vérifier que ça marche avec ceux qui sont un peu plus tordus, mais au départ, pour chercher, je pense que c'est plus simple de partir de […].

Ainsi les trois savoirs transversaux, 1) *expérimenter sur des cas particuliers bien choisis*, 2) *observer pour voir ce qu'il y a de généralisable derrière le particulier et l'énoncer sous forme d'une conjecture*, 3) *invalider une conjecture par un contre-exemple*, ne sont pas disponibles chez ces élèves. Le professeur, qui ajoute dans chaque groupe des consignes pour que les élèves fassent fonctionner ces savoirs, ne peut faire partager aux élèves sa problématique de *démarche expérimentale dans la résolution d'un problème*. La dévolution ne se fait pas. La confrontation au groupe-classe aurait pu permettre une amorce de fonctionnement de ces savoirs, sur lesquels l'institutionnalisation aurait dû ensuite être faite.

C'est peut-être aussi cette pauvreté du milieu sur le plan des savoirs relatifs à la démarche hypothético-déductive qui induit que l'enseignante de SVT se raccroche aux différentes étapes d'un canevas de DI, sans se rendre compte qu'elle perd les élèves en changeant sans cesse son questionnement.

III. CONCLUSION

Concernant le premier volet de la recherche, nous avons repéré à la fois des points pouvant faire obstacles dans les conceptions de jeunes enseignants stagiaires et des leviers possibles, concernant la mise en œuvre d'une DI en classe.

Le point faible concerne l'épistémologie pour laquelle les enseignants n'ont bénéficié que de très peu de formation. Sur ce domaine, une distinction est à faire entre mathématiques et sciences expérimentales. Les enseignants spécialisés dans ces dernières apparaissent majoritairement inductivistes, ce qui *a priori* peut paraître contradictoire avec leur positionnement favorable à l'égard des DI. On peut donc penser que cette adhésion est davantage fondée sur une volonté de se conformer à une demande institutionnelle, qu'à des raisons de nature épistémologique et/ou didactique. En mathématiques, les conceptions des stagiaires sur la nature de l'activité mathématique sont globalement plus favorables à la mise en place d'une DI, même s'il ne s'agit que d'une petite majorité. On note ensuite une évolution, au cours de la formation, vers une conception de l'enseignement s'ouvrant positivement à la mise en œuvre en classe d'une telle démarche, au moins dans les intentions déclarées. En formation, un renforcement s'avère ainsi nécessaire sur ces deux plans, conjointement ; il passe, selon nous par une mise en œuvre *en situation* de DI privilégiant une entrée par la complexité[21] articulée avec une réflexion épistémologique.

Le deuxième volet de cette étude renforce les conclusions précédentes. En mathématiques les enseignants cherchent d'abord à mettre les élèves en situation d'investigation, visant davantage l'acquisition de savoirs transversaux que de savoirs notionnels. C'est l'inverse en

[21] Le socle commun de connaissances et de compétences pour le collège (2009) insiste sur le travail autour de tâches complexes pour ce qui concerne les compétences d'une « culture scientifique et technologique ».

sciences expérimentales, où la démarche d'enseignement s'inscrit dans un canevas contraignant qui conduit à une réduction du questionnement aux objectifs de chaque phase du canevas. Dans les deux cas, c'est finalement la pauvreté du milieu sur le plan des savoirs caractéristiques de la *démarche expérimentale en mathématiques* ou *hypothético-déductive en sciences*, qui entraîne la non-dévolution aux élèves de la problématique de l'enseignant. L'absence d'une assise épistémologique peut fournir une explication. Nous avançons une autre hypothèse, à savoir que, si ces savoirs transversaux ne peuvent se construire qu'en situation de résolution de problème, mettant en jeu des connaissances déjà acquises, cette construction doit prendre appui sur un milieu comportant quelques clés permettant aux élèves d'accéder à une certaine autonomie scientifique.

REFERENCES

Andler M. (2005) Transcription de son intervention. In *Actes du Colloque Mathématiques, Sciences expérimentales et d'observation à l'école primaire*, organisé par La Main à la pâte, l'Inspection académique de la Loire et l'École nationale supérieure des mines de Saint-Étienne dans le cadre du projet européen Scienceduc, Saint-Etienne.

Bachelard G. (1938) *La formation de l'esprit scientifique*. Rééd. 1983, Paris : Vrin.

Bernard C. (1865) *Introduction à l'étude de la médecine expérimentale*. Rééd. 1984. Paris : Flammarion

Chalmers A. (1988) *Qu'est-ce que la science ?* 1ère éd. 1976. Paris : La Découverte.

Darley B. (1994) *L'enseignement de la démarche scientifique dans les travaux pratiques de la biologie à l'université ; analyse et propositions.* Thèse de doctorat. Grenoble : Université Joseph Fourier.

Delahaye J.-P. (2005) Mathématiques expérimentales. *Pour la science* 331*,* 90-95.

Dieudonné J. (1968) Que font les mathématiciens ? *L'âge de la science* 2.

Dias T. (2009) *La dimension expérimentale des mathématiques : un levier pour l'enseignement et l'apprentissage.* Thèse de doctorat. Lyon : Université Claude Bernard.

Gandit M. (2008) *Etude épistémologique et didactique de la preuve en mathématiques et de son enseignement. Une ingénierie de formation.* Thèse de doctorat. Grenoble : Université Joseph Fourier.

Gandit M., Giroud N., Godot N. (2011) Les situations de recherche en classe : un modèle pour travailler la démarche scientifique en mathématiques. In Grangeat M. (Ed.) (pp. 35-49) *Les démarches d'investigation dans l'enseignement scientifique, Pratiques de classe, travail collectif enseignant, acquisitions des élèves*. Lyon : Ecole Normale Supérieure.

Gandit M., Triquet E., Guillaud J.-C. (à par.) Démarche d'investigation. Des représentations d'enseignants débutants aux pratiques. In Grangeat M. (Ed.) *Formations et enseignements scientifiques fondés sur les démarches d'investigation : quelles pratiques ? quels effets ?* Lyon : ENS.

Giroud N. (2011) *Etude de la démarche expérimentale dans les situations de recherche pour la classe*. Thèse de doctorat. Université de Grenoble.

Grangeat M. (2011) *Les démarches d'investigation dans l'enseignement scientifique. Pratiques de classes, travail collectif enseignant, acquisitions des élèves*. Ouvrage collectif. Lyon : ENS.

Grangeat M. (à par.) Méthodologie de recherche à propos de l'enseignement des sciences. Conduire des recherches sur les compétences professionnelles des enseignants de science en ce qui concerne les démarches d'investigation. In M. Grangeat (Ed.) *Formations et enseignements scientifiques fondés sur les démarches d'investigation : quelles pratiques ? quels effets* Lyon : ENS.

Grenier D., Payan C. (1998) Spécificités de la preuve et de la modélisation en mathématiques discrètes. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 18(1), 59-100.

INRP (2007) Dossier de la veille : Démarche expérimentale et apprentissages mathématiques. Cellule de veille scientifique et technologique. http://www.inrp.fr/vst

Joshua M.-A., Joshua S. (1987) Les fonctions didactiques de l'expérimental dans l'enseignement scientifique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 8(3), 231-266.

Kahane J.-P. (2002) Rapport de la Commission de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques. http://smf4.emath.fr/en/Enseignement/CommissionKahane/

Khun T. (1970) *La structure des révolutions scientifiques*. Paris : Flammarion.

Leroy N. (2011) Le volet français du projet S_TEAM : évaluation des effets d'un dispositif de formation incitatif à la mise en œuvre des démarches d'investigation en classe. In Grangeat M. (Ed.) (pp. 213-225) *Les démarches d'investigation dans l'enseignement scientifique, Pratiques de classe, travail collectif enseignant, acquisitions des élèves*. Lyon : Ecole Normale Supérieure.

MEN (Ministère de l'Education Nationale). B.O. hors série n°6 du 28/08/2008.

Mathé S., Meheut M., De Hosson C. (2008) Démarche d'investigation au collège : quels enjeux ? *Didaskalia* 32, 41-76.

Pélissier L., Venturini P. (à par.) Qu'attendre de la démarche d'investigation en matière de transmission de savoirs épistémologiques ? In Calmettes B. (Ed.) *Démarches d'investigation : références, représentations, pratiques et formation.* Paris : L'Harmattan.

Perrin D. (2007) L'expérimentation en mathématiques. *Petit x* 73, 6-34.

Popper K. (1963) *Conjecture et réfutation*. Rééd. 1985. Paris : Payot.

Poincaré H. (1908) *L'invention mathématique.* Conférence faite à l'Institut Général Psychologique à Paris, au siège de la société.

Robardet G. (1995) *Didactique des sciences physiques et formation des maîtres : contribution à l'analyse d'un objet naissant.* Thèse de doctorat. Grenoble : Université Joseph Fourier.

Robert A. (2005) Des recherches sur les pratiques aux formations d'enseignants de mathématiques du second degré : un point de vue didactique. *Annales de didactique et de sciences cognitives* 10, 209-249.

Robert A. (2008) Le cadre général de nos recherches en didactique des mathématiques. In Vandebrouck F. (Ed.) (pp. 11-22) *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*. Toulouse : Octarès.

Triquet E., Gandit M., Guillaud J.-C. (à par.) Démarches scientifiques, démarches d'investigation en sciences expérimentales et en mathématiques : évolution des représentations d'enseignants débutants de l'IUFM à l'issue de la formation. In Calmette B. (Ed.) *Démarches d'investigation : références, représentations, pratiques et formation.* Paris : L'Harmattan.

Triquet É., Guillaud J.-C. (2011) Démarche scientifique et démarche d'investigation : points de vue d'enseignants stagiaires à l'IUFM. In Grangeat M. (Ed.) (pp. 63-76) *Les démarches d'investigation dans l'enseignement scientifique : Pratiques de classe, travail collectif enseignant, acquisitions des élèves*. Lyon : ENS.

Weiss L., Monnier A. (2011) *L'échographie d'un extrait de leçon filmée, un outil d'analyse pour la recherche et la formation*. Communication présentée au symposium CADIVAM, Filmer en classe, et après ? La vidéo dans les leçons de maths et de sciences, Lausanne. Repérée à www.hepl.ch/cadivam

DEMARCHE D'INVESTIGATION EN THÉORIE DES NOMBRES : UN EXEMPLE AVEC LA CONJECTURE D'ERDÖS-STRAUS

Marie-Line GARDES*

Résumé – Après avoir définie la démarche d'investigation en mathématiques et plus précisément sa dimension expérimentale, nous montrerons en quoi la théorie des nombres offre un champ d'investigation intéressant pour l'enseignement. Nous exposerons ensuite une mise en œuvre d'une dimension expérimentale en classe sur une situation autour de la conjecture d'Erdös-Straus. Enfin, nous développerons deux spécificités de la dimension expérimentale en mathématiques : une articulation entre les objets sensibles et les objets mathématiques et une articulation entre l'apprentissage de compétences heuristiques et l'approfondissement de connaissances sur les objets mathématiques en jeu dans le problème.

Mots-clefs : théorie des nombres, dimension expérimentale, problème ouvert, fraction égyptienne, conjecture d'Erdös-Straus

Abstract – In this article, we define the investigation in mathematics and more precisely the experimental in mathematics. We show how number theory offers an interesting field of investigation for teaching. Then we explain an implementation of experimental investigation with the Erdös-Straus conjecture. Finally, we develop two features of the experimental dimension in mathematics: a link between sensible objects and mathematical objects and a close relationship between learning heuristics skills and learning new mathematical concepts.

Keywords: number theory, experimental, unsolved problem, Egyptian fraction, the Erdös-Straus conjecture

Depuis quelques années, le questionnement sur le rôle de la dimension expérimentale dans l'apprentissage des mathématiques fait l'objet de nombreuses études (Chevallard 2004 ; Dias 2005 ; Durand-Guerrier 2006 ; Perrin 2007). Plusieurs groupes de travail se sont également intéressés à ce thème[1]. Nous faisons partie d'une équipe lyonnaise[2], intitulée DREAM (Démarche de Recherche Expérimentale pour l'Apprentissage des Mathématiques – anciennement EXPRIME) qui pose explicitement la question de *la dimension expérimentale au cœur des problèmes de recherche en mathématiques*. En retravaillant sur des problèmes de recherche classiques, ou moins classiques, notre équipe se propose d'élaborer des ressources permettant aux enseignants de mettre en œuvre dans le cours ordinaire de la classe des problèmes de recherche en mettant en évidence deux points essentiels. Le premier vise à rendre disponibles les ressorts fournis par la dimension expérimentale de l'activité mathématique pour le développement de compétences heuristiques. Le deuxième point consiste à rendre visibles les connaissances mathématiques potentiellement travaillées en lien avec les programmes à différents niveaux d'enseignement. Une des hypothèses fortes de ce travail est que ces deux aspects sont étroitement imbriqués. Le groupe a élaboré, analysé et expérimenté sept situations[3] dont une concerne la décomposition de l'unité en somme de fractions égyptiennes. Dans cet article, nous nous appuierons sur une situation élaborée autour d'un problème connexe à celui-ci.

Dans notre travail, nous étudions les processus de recherche d'élèves, d'étudiants et de chercheurs confrontés à la résolution d'un même problème ouvert en théorie des nombres. Un

** S2HEP Université Lyon 1 – France – marie-line.gardes@univ-lyon1.fr

[1] ERTé Maths à modeler (Grenoble – www-leibniz.imag.fr/LAVALISE/debutval.php), ResCo (Résolution collaborative de problème – Montpellier – http://www.irem.univ-montp2.fr/Resolution-de-problemes), ERMEL (Ermel 2006).

[2] Equipe mixte IFE (Institut Français de d'Education)-IUFM et IREM de Lyon – S2HEP-Université Lyon 1.

[3] Ce travail a été publié dans un Cédéron (Aldon et al., 2010).

© Gardes M.-L. (2012) Démarche d'investigation en théorie des nombres : un exemple avec la conjecture d'Erdös-Straus. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT10, pp. 1342–1353). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

aspect de cette recherche que nous ne présenterons pas ici est de s'intéresser à ce que l'on pourrait apprendre du travail mathématique effectif des chercheurs pour travailler des mathématiques avec des élèves ou des étudiants dans le cadre de résolution de problème de recherche[4].

Dans cet article, nous soutenons la thèse selon laquelle la théorie des nombres offre un champ d'investigation mathématique pour des élèves et des étudiants. Nous l'illustrons par l'exemple d'une mise en œuvre d'une dimension expérimentale en classe. Nous développons également deux spécificités de la dimension expérimentale en mathématiques : une articulation entre les objets sensibles et les objets mathématiques, et une articulation entre l'apprentissage de compétences heuristiques et l'approfondissement de connaissances sur les objets mathématiques en jeu dans le problème.

I. SPECIFICITE DE LA DEMARCHE D'INVESTIGATION EN THEORIE DES NOMBRES

Depuis les années 2000, les recommandations pour l'enseignement des disciplines scientifiques préconisent de favoriser l'engagement des élèves dans une démarche d'investigation pour l'étude de notions figurant dans les programmes. Cette démarche d'investigation est présentée comme assez commune aux différentes pratiques scientifiques, notamment avec le but commun de contribuer à la formation d'une culture scientifique du citoyen. Toutefois, une différence se fait entre les sciences expérimentales (Sciences et Vie de la Terre, Physique, Chimie) et les mathématiques, tant sur le questionnement du réel que sur la composante expérimentale. En effet, si la définition du réel en sciences expérimentales est assez claire[5], on peut se demander comment définir le réel en mathématiques et quelle définition donner à la dimension expérimentale.

De nombreux travaux didactiques s'intéressent à l'expérimentation en mathématiques, notamment dans le cadre de la résolution de problèmes de recherche (Grenier et Payan (2002), Godot (2006), Giroud (2007), Dias (2009), Aldon et al. (2010)). Perrin (2007), quant à lui, définit l'expérimentation en mathématiques comme « une méthode d'investigation systématique » qu'il n'hésite pas à « désigner sous le nom de méthode expérimentale » pour résoudre des problèmes mathématiques. Cette méthode comprend plusieurs étapes à répéter éventuellement :

> Expérience, observation de l'expérience, formulation de conjectures, tentative de preuve, contre-expérience, production éventuelle de contre-exemples, formulation de nouvelles conjectures, nouvelles tentative de preuve, etc. (Perrin 2007, p. 10)

En d'autres termes, il définit l'expérimentation en mathématiques comme des allers-retours entre la théorie et l'expérience. Durand-Guerrier (2006) précise cette définition en donnant une caractérisation de la dimension expérimentale en mathématiques :

> C'est le va-et-vient entre un travail avec les objets que l'on essaye de définir et de délimiter et l'élaboration et/ou la mise à l'épreuve d'une théorie, le plus souvent locale, visant à rendre compte des propriétés de ces objets. (Durand-Guerrier 2006, p. 17)

Ainsi, dans notre travail, nous retenons la définition de Perrin (2007) pour qualifier la démarche d'investigation en mathématiques par les allers-retours entre théorie et expérience. Nous utilisons la définition de Durand-Guerrier (2007) pour en caractériser la composante expérimentale par un travail sur l'articulation entre les objets sensibles (réels) et les objets mathématiques. Enfin nous prenons en compte l'hypothèse de DREAM pour ajouter une

[4] Cet aspect de la recherche est développé dans Gardes et Mizony (2011).

[5] Nous entendons réel au sens de réalité sensible, celle perçu par nos sens ou par un instrument construit.

seconde spécificité à la dimension expérimentale en mathématiques, à savoir, l'articulation entre un apprentissage de compétences heuristiques et un approfondissement de connaissances notionnelles.

Afin de définir la réalité en mathématiques au sein de cette dimension expérimentale, Durand-Guerrier (2006) précise que pour favoriser le recours à l'expérience,

> [l]e milieu de l'élève doit comporter des objets matériels (sensibles) ou des objets mathématiques suffisamment familiers [pour lui] pour que celui-ci puisse s'engager dans l'action, en dégager des conjectures et les questionner. (Durand-Guerrier 2006, p. 17)

Le questionnement du réel s'opérera si le milieu favorise la mobilisation d'outils (tels que l'élaboration de conjecture, le questionnement des exemples, contre-exemples…) permettant de mettre en œuvre un traitement mathématique général dont les résultats pourront être confrontés aux résultats des actions sur ces objets. Voici un exemple d'un questionnement du réel en mathématiques grâce à l'utilisation d'objets sensibles. Il est emprunté à Dias et Durand-Guerrier (2005), qui ont étudié et construit une situation sur les polyèdres réguliers mettant en œuvre une dimension expérimentale. Le problème se situe en géométrie plane :

> La géométrie des solides nous est vite apparue comme un lieu possible de confrontation entre les contraintes s'imposant aux *objets sensibles* du monde réel et les résultats théoriques concernant les *objets mathématiques* de la géométrie euclidienne. (Dias et Durand-Guerrier 2005, p. 63)

Ils définissent alors les polyèdres réguliers de deux manières :

> Comme des objets mathématiques construits dans une théorie : la Géométrie Euclidienne ; mais aussi comme objets sensibles, connus sous le nom de Solides de Platon, que l'on peut construire effectivement avec différents matériaux. (Ibid., p. 64)

Lors de l'expérimentation de leur situation en classe, les élèves doivent déterminer tous les polyèdres réguliers en disposant de polygones en plastique. Ces derniers jouent le rôle des objets sensibles. Les auteurs ont alors montré que le processus de preuves que la géométrie met en œuvre se « frotte » irrémédiablement au réel. Grenier et Tanguay (2008), qui ont expérimenté ce problème avec des étudiants avancés montrent également ce phénomène. Ainsi la dimension expérimentale est caractérisée ici par une articulation entre les propriétés des objets mathématiques (les polyèdres réguliers) et l'expérimentation avec des objets sensibles (les polyèdres réalisés avec les polygones en plastique ou tout autre matériel).

Le réel mathématique ne se limite pas à la présence d'objets sensibles. En s'appuyant sur les travaux de Tarski (1960), Durand-Guerrier (2006) définit un domaine de réalité :

> Il ne s'agit plus d'objets sensibles, mais d'objets, de propriétés et de techniques, naturalisés, c'est-à-dire suffisamment familiers pour que les résultats des actions soient considérés comme fiables. Ils permettent donc de valider les hypothèses ou les prévisions. (Durand-Guerrier 2006, p .20)

Dans notre travail en théorie des nombres, nous utilisons cette définition du réel en mathématiques. En effet, le domaine des entiers avec ses méthodes élémentaires de calcul peut jouer le rôle de domaine de réalité ceci parce qu'à priori, les calculs sont non problématiques pour les élève concernés. Nous étudions effectivement les recherches d'élèves de terminale scientifique[6] et d'étudiants en classes préparatoires[7] donc, à ces niveaux, les nombres entiers, les fractions et les propriétés élémentaires du calcul sur les entiers ou du calcul fractionnaire sont *a priori* naturalisés.

Nous faisons alors l'hypothèse qu'un domaine mathématique naturalisé jouant le rôle du domaine de réalité et contenant des questions ouvertes offre, pour les élèves et les étudiants, un champ d'investigation mathématique très riche. Ainsi la théorie des nombres est un bon

[6]Elèves âgés de 17-18 ans.
[7]Etudiants âgés de 18 à 20 ans.

candidat pour l'investigation mathématique, d'une part parce que les entiers peuvent être un domaine de réalité et d'autre part parce qu'il existe de nombreuses questions ouvertes accessibles aux élèves[8].

II. UN EXEMPLE DE DEMARCHE D'INVESTIGATION AVEC LA CONJECTURE D'ERDÖS-STRAUS

Dans la première partie, nous avons présenté succinctement un exemple de mise en œuvre d'une dimension expérimentale avec présence d'objets sensibles. Dans cette seconde partie, nous allons exposer une mise en œuvre d'une dimension expérimentale s'appuyant sur un domaine de réalité, celui des entiers. Nous montrerons alors que la dimension expérimentale permet aux élèves de travailler conjointement compétences heuristiques, notions et concepts mathématiques.

Le problème que nous avons choisi afin de mettre en œuvre une dimension expérimentale chez les élèves et les étudiants est une conjecture d'Erdös et Straus. S'intéressant à la décomposition d'une fraction en une somme de fractions unitaires, les auteurs formulent la conjecture suivante :

> Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on peut trouver des entiers non nuls x, y, z (non nécessairement distincts) tels que $\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$. (Erdös 1950)

C'est un problème ouvert au sens non résolu par les mathématiciens[9]. Choisir un problème en état de conjecture a été motivé par le projet de comparer les processus de recherche d'élèves, d'étudiants et de chercheurs sur un même problème[10]. L'énoncé posé aux élèves est le suivant : pour tout n entier naturel, peut-on trouver trois entiers naturels a, b et c tels que $4/n = 1/a + 1/b + 1/c$? La situation a été expérimentée de nombreuses fois et dans différents contextes. Dans cette présentation, nous nous appuierons sur des expérimentations faites en terminale scientifique[11].

1. *Mise en œuvre d'une démarche d'investigation dans la recherche des élèves*

En s'appuyant sur un résultat trouvé par les élèves, nous allons montrer qu'une démarche d'investigation sur un problème de recherche se manifeste par des allers-retours entre la théorie et l'expérience. Le résultat sur lequel nous nous appuyons est le suivant : si n est pair alors l'équation $4/n = 1/a + 1/b + 1/c$ a des solutions.

Dans l'analyse *a priori*, nous avons répertorié les procédures en deux catégories : celles qui s'appuient sur la recherche ou l'exploitation d'exemples (procédures 1 et 2) et celles utilisant des outils algébriques (procédures 3 et 4).

<u>Procédure 1</u> : à partir d'exemples (n = 2, 4, 6, …), remarquer que $a = n/2$, $b = n$ et $c = n$ ou $a = n/2$, $b = n/2 + 1$ et $c = ab$. Ces conjectures peuvent être difficiles à formuler si les exemples relèvent des deux identités différentes (par exemple $4/2 = 1 + 1/2 + 1/2$ et $4/4 = 1/2 + 1/3 + 1/6$). Une seconde difficulté peut être relevée : repérer que $n/2$ est un entier si n est pair.

---

[8] Voici quelques exemples de problèmes ouverts en théorie des nombres accessibles à des élèves et proposés par Math en Jeans (http://mathenjeans.free.fr) : conjecture des nombres premiers jumeaux, conjecture de Syracuse, problème des nombres congruents.

[9] A distinguer des problèmes ouverts au sens de Lyon 1 (Arsac et Mante 2007).

[10] Cette étude fait l'objet de notre thèse. Les premiers résultats sont analysés dans Gardes et Mizony (2011).

[11] Ces expérimentations sont détaillées et analysées dans Gardes (2009) et Gardes (2010).

Procédure 2 : la conjecture est vraie pour $n = 2$ et/ou $n = 4$. Or si on multiplie n par k, les solutions sont aussi multipliées par k. Donc la propriété est vraie pour les nombres pairs. Cette propriété de multiplicité entre n et les solutions peut être difficile à établir pour les élèves.

Procédure 3 : décomposer $4/n = 2/n + 2/n = 1/n + 1/n + 2/n$ puis $2/n = 1/n/2$ ou décomposer $4/n = 2/n + 2/n$ puis $2/n = 1/n/2$ et utiliser l'égalité $1/n = 1/(n+1) + 1/n(n+1)$ d'où $\frac{4}{n} = \frac{1}{\frac{n}{2}} + \frac{1}{\frac{n}{2}+1} + \frac{1}{\frac{n}{2}(\frac{n}{2}+1)}$. L'écriture de $2/n = 1/n/2$ peut être une difficulté pour les élèves ainsi que la propriété « $n/2$ est un entier si n est pair ». La décomposition de $1/n = 1/(n+1) + 1/n(n+1)$ n'est pas nécessairement connue des élèves, elle serait donc à (re)trouver.

Procédure 4 : chercher une relation de récurrence entre $4/n$ et $4/(n+2)$. La difficulté majeure de cette procédure est de conjecturer cette relation de récurrence qui « saute » un rang, le rang $n+1$.

Les deux groupes dont nous présentons ci-dessous la recherche, se sont engagés dans les procédures 1 et 4. D'autres groupes ont utilisé la procédure 3 mais aucun n'a utilisé la procédure 2.

Recherche du groupe 1 : Après avoir longtemps cherché le problème en utilisant des outils algébriques, les élèves effectuent une rupture dans leur recherche pour se centrer sur le caractère expérimental du problème « faire des essais sur n ».

- Première expérience : décompositions pour $n = 3$ et $n = 6$.

$$\frac{4}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \qquad \frac{4}{6} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$$

- Première conjecture :

  E : Ben ça doit être facile, ça fait 2, 2, 3 ; 4, 4, 6.

  Al : Bah oui, c'est multiplié par 2. 4, 4, 6 c'est multiplié par 2. Si n est multiplié par 2, les solutions aussi.

- Contre-exemple : pour $n = 12$, ils ont $\frac{4}{12} = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}$ ce qui est différent de $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12}$, solution obtenue avec cette conjecture. Ils vérifient alors que (8, 8, 12) peut être une solution pour $n = 12$.
- Retour à l'expérience : essais pour $n = 16$ puis pour $n = 18$ à l'aide de la conjecture.
- Seconde conjecture : pour les nombres pairs, ils obtiennent cette égalité[12] : $\frac{4}{n} = \frac{1}{\frac{n}{2}} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n}$.
- Preuve : la première idée est de faire un raisonnement par récurrence puis ils utilisent l'égalité ci-dessus et la nature des nombres en jeu.

  J : Comme n est pair, on peut l'écrire $2n'$. En remplaçant dans l'égalité, on obtient alors $\frac{4}{n} = \frac{1}{n'} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n}$.

Recherche du groupe 2 : Cette phase de recherche arrive très tôt pour ces élèves, au bout de 30 minutes. Elle est dans la continuité de leur travail collectif, centré sur la recherche d'exemples pour un n particulier.

[12] On peut remarquer que cette formule ne découle pas directement des exemples cités. Grâce à leurs échanges, on comprend qu'ils s'appuient sur ces exemples pour formuler la conjecture mais il est difficile de comprendre comment elle a émergée.

- Première expérience : décomposition pour $n = 4$. $\frac{4}{4} = 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$
- Première conjecture :

F : il y a peut être moyen de faire quelque chose puisque 1/6 c'est 1/2 fois 1/3, c'est peut être un hasard mais…

- Contre-exemple : pour $n = 7$, ce lien n'existe pas puisqu'ils ont $\frac{4}{7} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{14}$.
- Retour à l'expérience : un élève cherche une méthode de décomposition d'une fraction en fractions unitaires sur $4/5$. Il effectue $4/5 - 1/10$ (car $2 \times 5 = 10$). Il obtient $7/10$. Il essaie alors d'enlever $1/3$, il obtient $11/30$ qui ne lui convient pas donc il essaie $1/4$ puis $1/5$. Il trouve finalement la décomposition de $\frac{4}{5} = \frac{1}{10} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2}$.
- Seconde conjecture :

F : Donc ce qu'il y a de con c'est que pour 5, ça fait $1/10 + 1/5 + 1/2$, à chaque fois il y a un truc des multiplications. $2 \times 3 = 6, 2 \times 5 = 10$, j'en sais rien moi mais…non c'est vrai, regarde…

- Retour à l'expérience : recherche d'une nouvelle décomposition. Essai de décomposer $4/6$. Il enlève d'abord $1/3$. Comme il obtient $1/3$ il commence par dire que $\frac{4}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$ puis tout de suite il se reprend et modifie par $\frac{4}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$.
- Troisième conjecture :

F : Ça fait 1/3, 1/4, 1/12. C'est pas un petit peu bizarre ça pour vous ? Non ?

- Quatrième conjecture :

F : Pour les nombres pairs ça marche

- Retour à l'expérience : essai de cette conjecture sur $n = 8$ et $n = 20$.
- Preuve : la première idée est de faire un raisonnement par récurrence puis ils utilisent une égalité $\frac{4}{n} = \frac{1}{\frac{n}{2}} + \frac{1}{\frac{n}{2}+1} + \frac{1}{\frac{n}{2}(\frac{n}{2}+1)}$ établie à partir de leurs expériences avec diverses valeurs de *n* où ils ont remarqué que $a = n/2$, $b = a + 1$ et $c = a \times b$. Leur raisonnement est alors basé sur la nature des nombres en jeu :

L : a est un entier naturel car *n* est pair, *b* est un entier naturel car la somme de deux entiers naturels est un entier naturel et *c* est un entier naturel car le produit de deux entiers naturels est un entier naturel.

Nous pouvons donc remarquer que le caractère expérimental des deux recherches correspond tout à fait à caractérisation donnée par Perrin (2007), avec des allers-retours entre les expériences, la formulation de conjectures et les tentatives de preuves. En effet, les élèves procèdent à une expérience (essais sur des valeurs de *n*), observent les résultats de cette expérience afin de formuler des conjectures (si *n* est multiplié par 2 alors les solutions aussi, la première fraction multipliée par la seconde donne la troisième) puis ils retournent à l'expérience (essais sur de nouvelles valeurs de *n*) afin de formuler une nouvelle conjecture (si *n* est pair alors l'équation a des solutions). L'étape de tentative de preuve vient ensuite, soit dans la continuité de leurs recherches (groupe 1), soit plus tard (groupe 2). Leurs preuves sont basées sur l'étude de l'égalité obtenue grâce à leurs expériences sur des valeurs de *n*. La démarche d'investigation est donc identique pour les deux groupes.

Dans les deux paragraphes suivants, nous effectuons des « zooms » sur les processus de recherche des élèves afin de mettre en évidence deux spécificités de la dimension expérimentale en mathématiques. Dans un premier temps, nous montrerons comment un travail d'articulation entre les objets naturalisés (les entiers, les fractions…) et les objets mathématiques s'opère dans la recherche des élèves. Dans un second temps, nous développerons l'hypothèse issue de notre groupe de travail DREAM : la dimension expérimentale permet de travailler conjointement compétences heuristiques, notions et concepts mathématiques.

2. Importance du retour à l'expérience

Définie dans la première partie, une caractéristique de la dimension expérimentale en mathématiques est de permettre aux élèves de s'engager dans l'action, de formuler des conjectures et de les questionner. Ceci est lié à la constitution du milieu qui doit contenir des objets suffisamment familiers pour rendre possibles des rétroactions.

En appui sur quelques extraits de la recherche des élèves du groupe 2 sur la conjecture d'Erdös-Straus, nous allons montrer l'importance de cette confrontation au réel lors des différentes phases d'une recherche. Le premier extrait montre qu'une déconnexion entre la manipulation d'objets et la conduite d'un raisonnement peut déboucher sur un engagement difficile des élèves dans la recherche du problème et la production de résultats.

Al : On va chercher pour supérieur à 1. Après, j'ai fait deux trois trucs euh, j'ai fait, euh, avec 2, tu vois j'ai essayé c'est faisable après
E : Avec 2 ?.
Al : Ben…
E : Ça te fait 2, 1/2 ouais ouais.
Al : Mais euh, après ça doit être possible mais je ne vois pas trop comment le prouver.
E : Ouais après euh, ouais mais après il faut le prouver dans le cas général, tu ne vas pas le faire pour chaque…
Al : Oui ben oui, c'est pour ça, non mais pour voir déjà si ça marchait à partir de 2.

Ils abandonnent rapidement cette piste de recherche pour centrer leur recherche sur l'exploitation de raisonnements ou de connaissances institutionnalisées dans leur cours d'arithmétique, comme en témoigne l'extrait suivant :

Al : Ça faisait joli hein, ça faisait bien de le dire là hein[13]. Parce qu'on est arrivé, vous étiez arrivé à quoi là, à la fin' Moi j'étais arrivé à $4abc = n(bc + ac + ab)$.
E : Non moi j'avais isolé *n*, moi
Al : Hein ?
E : J'ai isolé *n*, j'avais isolé *n* tout seul.
[…]
E : Ah mais c'est ça que vous vouliez faire avec Bézout là ?
Al : Oui, voilà. Mais euh ça fait trop de cas puis c'est pas, je ne vois pas.
E : Pourquoi ça ferait trop de cas ?
Al : Ben parce que avec *n* ça te fait le cas où c'est divisible par 4 ou le cas où ce n'est pas divisible par 4 mais pour prouver que, que, que quand *n* n'est pas divisible par 4, pour prouver $bc + ac + ab$ est divisible par 4 je ne vois pas trop.
E : Non non mais de toutes façons, si, c'est 4*abc*, t'as forcément soit *n* divisible par 4 soit ça divisible par 4.
[…]
Al : S'il y en a deux d'impairs ou les trois d'impairs ça ne marche pas, ce n'est pas divisible par 4 mais après ça fait vachement de cas, c'est ça le…
E C'est peut être ça, parce que à mon avis si tu as une heure et demi c'est pas non plus que c'est en 5 min.
Al Ouais mais là, on part, on part vachement loin là, pas sûr de revenir (rires).
Al Je ne sais pas, on peut partir sur ça pour commencer.
E Pour ouais sur les, ouais.

Les élèves essaient de transformer l'écriture de l'équation initiale en isolant n ou en réduisant au même dénominateur. Ils pensent alors au théorème de Gauss (qu'ils confondent avec le théorème de Bézout) et établissent une conjecture : soit 4 divise n, soit 4 divise $bc + ac + ab$. Dans ce dernier cas, ils étudient la parité de a, b et c afin que 4 $bc + ac + ab$ mais cette piste

[13] Cet élève fait référence au théorème de Bézout, cité par un autre élève du groupe quelques minutes avant.

finit par être abandonnée en raison du nombre élevé de cas à étudier. Ce groupe restera longtemps sur une recherche axée sur l'exploitation de raisonnements ou de connaissances institutionnalisées dans leur cours d'arithmétique mais elle n'aboutira à aucune production en termes de résultats.

Ces deux extraits de recherche montrent que lorsque les élèves n'exploitent pas le caractère expérimental du problème (faire des essais sur n) ou qu'ils se placent dans un domaine qu'ils ne maitrisent pas suffisamment (algèbre et arithmétique), ils n'arrivent pas à s'appuyer sur leurs connaissances pour établir un résultat. Ils ne parviennent pas non plus à déterminer si leur piste de recherche est à poursuivre. Ils vont alors discuter sur le caractère ouvert du problème et la durée de la recherche pour essayer de prendre une décision concernant la piste de recherche à suivre. En revanche, lorsqu'ils quittent le champ de l'algèbre et de l'arithmétique et se concentrent sur des expériences sur les nombres entiers et les fractions, ils réussissent à produire un résultat, comme l'illustre l'extrait ci-dessous :

Al : Non c'est pas ça mais euh…moi c'est dès le début, c'est que, regardez, si on prend $n = 1$.
E/Ar Hum.
Al : Il n'y a pas de solutions.
E : T'es sûr ?
Al : Ouais.
E : Parce que moi j'ai…
Al : Parce que si tu prends $n = 1$ ça veut dire 4.
E : Ouais.
Al : Donc en fait le plus grand, les plus grands entiers naturels pour que ça fasse…c'est 1, 1 et 1.
Ar : Hum.
Al : Donc ça fait $4 = 3$ donc déjà avec 1 c'est pas possible.
Ar : Hum.
E : Mais non, si, parce que ça se trouve, tu peux mettre 1, 1.
Ar : Non c'est obligé.
E : De quoi ?
Ar : C'est obligé ce qu'il dit ouais fin.
Al : Parce que 1 sur, 1 sur un nombre entier c'est obligé que ça soit, que ça soit plus petit que 1.

Les élèves, en s'appuyant sur des connaissances naturalisées (nombres naturels, fraction, opération de comparaison, extremum) établissent une nouvelle propriété sur les nombres entiers et les fractions : 4 ne peut pas être égal à une somme de trois fractions unitaires.

Ainsi, la création de nouveaux objets ou de nouvelles connaissances semble être possible, d'une part lorsque les expériences sont construites sur des connaissances naturalisées afin de permettre au sujet d'agir et d'autre part lorsque les manipulations d'objets entrent en résonnance avec les théories mathématiques sous-jacentes.

3. *Travail conjoint des compétences heuristiques et de notions et concepts mathématiques*

Les exemples qui suivent mettent en évidence une seconde potentialité de la dimension expérimentale en mathématiques, à savoir qu'elle permet de faire fonctionner des notions et participe à une naturalisation des objets manipulés qui entrainent un élargissement du champ d'expériences et permet alors des élaborations théoriques et la construction de connaissances nouvelles. Il existe alors une réelle imbrication entre travail sur les compétences heuristiques et travail sur les notions et concepts mathématiques. Pour illustrer cela, nous reprendrons l'exemple des démonstrations des deux groupes sur le résultat suivant : l'équation a des solutions pour n pair.

Nous avons déjà montré[14] que ce résultat s'est construit sur des allers-retours entre théorie et expérience. Dans ce paragraphe, nous voulons mettre en évidence le rôle prépondérant joué par l'exploitation des exemples dans la formulation des conjectures. En effet, en analysant plus finement les échanges entre les élèves, il apparaît précisément que l'exploitation des exemples a permis aux deux groupes d'établir leur conjecture. Cependant l'utilisation des exemples diffère selon les groupes. En effet, le groupe 1 obtient sa conjecture en observant deux décompositions particulières sans expliquer au sein du groupe comment ces décompositions sont trouvées, tandis que le groupe 2 formule sa conjecture en essayant de déterminer un moyen de décomposer une fraction pour un n particulier. Nous faisons ainsi l'hypothèse que les élèves du groupe 1 utilisent l'exemple comme un produit fini alors que les élèves du groupe 2 cherchent à construire l'exemple. Nous pouvons également constater que ces exploitations différentes des exemples les conduisent à formuler des conjectures différentes. Les rôles du contre-exemple et de la non-unicité des décompositions peuvent également être mis en avant dans les deux groupes. Dans le groupe 1, la prise de conscience en acte de la non-unicité des décompositions par un élève leur permet de distinguer un contre-exemple à leur conjecture sur la forme de la décomposition et l'existence d'une décomposition d'une autre forme. En effet lorsqu'un contre-exemple pour la conjecture établie semblait être identifié, les élèves ne rejettent pas la conjecture mais cherchent une nouvelle décomposition de la fraction. Le groupe 2 semble au contraire, ne pas avoir une claire conscience, à ce moment précis de leur recherche, de la non-unicité des décompositions. En effet l'apparition d'une décomposition ne satisfaisant pas le lien qu'ils ont identifié, les conduit à abandonner leur piste.

Nous pouvons donc remarquer que, en s'appuyant sur des connaissances naturalisées (nombres entiers, fractions…), les élèves ont développé des compétences heuristiques, notamment le questionnement des exemples et la formulation de conjectures pour établir un résultat intermédiaire sur la conjecture. En outre, nous pouvons relever la richesse du problème qui permet aux élèves, avec peu de connaissances au préalable, de s'engager dans une démarche d'investigation qui conduit, selon l'exploitation des exemples à différentes conjectures et résultats.

Les démonstrations de leurs résultats (extraits ci-dessous) révèlent également ce va-et-vient entre travail sur les compétences heuristiques et sur les connaissances notionnelles. En effet, pour valider leur conjecture, les élèves vont s'appuyer sur la nature des nombres en jeu et en élaborant une preuve, ils vont approfondir leurs connaissances des entiers.

Extrait[15] de la recherche du groupe 1

J : Alors si n est pair, donc t'as $1/n$, $1/n$ ok et là si n est pair c'est $2n$' donc c'est $1/n$' et t'as $1/n$', $1/n$ et $1/n$…
E : Attends tu la refais là vite fait parce que…
Al : Ouais ouais.
E : $2/n$, c'est $2/n$' ?
J : Non $2/n$ c'est 1 sur, $2/n$, si n est pair, c'est $1/2n$'.
Al : Ouais ouais, ben oui oui, en disant que c'est pair…
[…]
Al : Ben si tu as celui là égal à ça donc tu divises celui par 2.
J : avec 2 puis tu termines avec le 3e, peut être que ça devrait marche.
Ar : Je divise celui par 2, ça fait, ouais.
Al : Et ben si n est pair, ça, et ben a, b, et c sont bien des nombres entiers donc ça marche.
J : (il est en train de faire la production commune) Pair, deux points, $4/n$ égal $2/n$ plus $1/n$ plus $1/n$.
Al : Alors que si c'est impair, ça ne marche pas ce raisonnement.

[14]Voir le paragraphe 1 Mise en œuvre d'une démarche d'investigation dans la recherche des élèves pp.4-6.
[15]Les transcriptions complètes sont en annexe de notre mémoire (Gardes 2009).

Ar : Hum d'accord.
Al : Donc ça marche si c'est pair.
E : Ça y est nous aussi on a trouvé, du coup.
[…]
J : (il est en train de faire la production commune) Si n est congru à 0 modulo 2 alors $2/n = 2/2n'$avec n'.

L'élève J explique aux autres élèves que l'égalité démontre leur conjecture pour n pair. Il commence par dire que, comme n est pair, on peut l'écrire $2n$'. En remplaçant dans leur égalité[16], il obtient alors $4/n = 1/n' + 1/n + 1/n$. Comme il n'a pas convaincu tout le monde ou qu'il est allé trop vite, il insiste sur l'égalité : $2/n = 1/n'$. A l'oral, il ne précise pas que n' est un entier naturel alors que dans la production écrite, il le mentionne. Cependant, il ne note pas que si n est pair alors n s'écrit $2n$'. Dans leurs discussions, c'est un autre élève, Al qui précise que a, b et c, dans ces conditions, à savoir n pair, sont des entiers naturels, ce qui ne serait pas le cas si n était impair. Or cela n'apparaît pas non plus dans leur production finale. En revanche, ils ont noté n pair sous la forme d'une congruence $n \equiv 0[2]$ dont ils ne se servent pas ensuite. Nous pouvons penser que des liens entre les traductions opératoires du caractère pair d'un nombre ($n \equiv 0[2]$ et il existe k entier tel que $n = 2k$) sont établis par les élèves puisqu'ils utilisent les trois formes. Cependant il n'est pas certain que les élèves aient une claire conscience des équivalences entre ces trois écritures dans la mesure où elles ne sont pas formalisées et écrites par les élèves.

Extrait[17] de la recherche du groupe 2

L : n il appartient à N, n il appartient aux naturels, ça un naturel divisé par un naturel, ça reste un naturel.
F : Ben non.
L : Ben euh…
F : 4/7.
L : Effectivement, mais si n il appartient, il appartient…
F : (rires) mais t'es vraiment trop con.
L : Mais ce n'est pas ce que je voulais dire en fait, c'est pour ça…
L : n c'est un multiple de 2, dans ce qu'on a dit.
F : L vient d'inventer un monde où il n'y a pas de fractions, ouh…
L : Dans ce qu'on a dit, c'est n est un multiple de 2 t'es d'accord ?
F : Quoi ?
L : Dans ce qu'on vient de démontrer, de dire, n est un multiple de 2.
F : Qui nous le dit ?
L : Bah, la conjecture.
L : Ben ça ça marche pour les multiples de 2 t'es d'accord ?
F : Mais oui.
L : Donc là, a c'est égal à $n/2$ donc a c'est un naturel, forcément.
F : Et pourquoi ?
L : Parce que n est divisible par 2.
F : Oui et donc.
L : b c'est $n/2 + 1$ donc ça marche aussi.
F : Ouais.
L : Et c c'est $a \times b$.
F : Et alors…
L : Quand tu multiplies deux naturels, c'est forcément un naturel.
F : Et ouais.
L : Il n'y a pas besoin de faire par récurrence.

Leur raisonnement repose sur la stabilité des entiers par différentes opérations. Il est intéressant de remarquer qu'aucun élève n'évoque le fait que si n est pair alors n s'écrit $2k$, k

[16] Leur égalité est $4/n = 1/n + 1/n + 1/n/2$.
[17] Les transcriptions complètes sont en annexe de notre mémoire (Gardes 2009).

entier. Lorsque F demande à L pourquoi $a = n/2$ est forcement un naturel, L répond « parce que n est divisible par 2 » et F comprend tout de suite. Nous pouvons donc penser que c'est un automatisme mais que la connaissance n est pair équivaut à $n = 2k$, k entier n'est peut être pas acquise pour ces élèves.

Nous pouvons remarquer que les deux démonstrations ont été très riches en questionnement pour les élèves. En effet, après avoir discuté sur la faisabilité d'un raisonnement par récurrence, les élèves ont établi une preuve en mobilisant leurs connaissances des entiers. L'élaboration des raisonnements, différents mais basés sur la même propriété – si n est pair alors $n/2$ est un entier naturel – a permis aux élèves de se poser des questions sur certaines propriétés des entiers. Ainsi, nous pouvons supposer que cette recherche de preuve leur a permis d'approfondir leurs connaissances des entiers et notamment de travailler de nombreuses propriétés de ces objets. En outre, ce nouveau résultat démontré a ouvert aux élèves un nouveau champ d'expérience qui leur a permis de formuler une nouvelle conjecture : si n est un multiple de 3 alors l'équation a des solutions.

III. CONCLUSION

A travers la situation que nous avons construite autour de la conjecture d'Erdös-Straus, nous avons pu mettre en évidence les potentialités de l'arithmétique pour construire des problèmes de recherche pour des élèves ou des étudiants. Les énoncés simples, les connaissances pré-requises peu nombreuses et naturalisées des élèves leur permettent en effet de s'engager dans l'action et de débuter une recherche effective sur le problème. En étudiant leur processus de recherche, nous avons pu illustrer la thèse selon laquelle la démarche d'investigation en mathématiques pouvait se définir par des allers-retours entre la théorie et l'expérience. Nous avons également mis en évidence que ce type de problème de recherche permet de travailler conjointement des compétences heuristiques et des notions et concepts des programmes d'enseignement des mathématiques. En particulier, bien que non développé ici, ce problème est riche pour travailler l'exploitation de nombreux raisonnements, l'algorithmique ou les questions de logique, notions introduites explicitement depuis 2009 dans les programmes français de mathématiques au lycée.

REFERENCES

Aldon G., Cahuet P.-Y., Durand-Guerrier V., Front M., Krieger D., Mizony M., Tardy C. (2010) *Expérimenter des problèmes de recherche innovants en mathématiques à l'école*. Cédérom INRP.

Arsac G., Mante M. (2007) *Les pratiques du problème ouvert*. IREM de Lyon, SCEREN-CRDP Académie de Lyon.

Chevallard Y. (2004) Pour une nouvelle épistémologie scolaire. *Les cahiers Pédagogiques* 427, 34-36.

Dias T. (2005) La dimension expérimentale en mathématiques : mythe ou réalité ? In *Actes des 4èmes rencontres de l'ARDIST*, Lyon, octobre 2005.

Dias T. (2009) La dimension expérimentale en mathématiques. Un exemple avec la situation des polyèdres. *Grand N* 83, 63-83.

Dias T., Durand-Guerrier V. (2005) Expérimenter pour apprendre en mathématiques. *Repères IREM* 60, 61-78.

Durand-Guerrier V. (2006) La résolution de problèmes, d'un point de vue didactique et épistémologique. In Trouche L., Durand-Guerrier V., Margolinas C. et Mercier A. (Eds.) (pp. 17-23) *Actes des journées mathématiques de l'INRP*. Lyon : INRP.

Erdös P. (1950) On a diophantine equation. (Hungarian. Russian, English summaries). *Mat. Lapok* 1, 192-210.

Ermel (2006) *Apprentissages géométriques et résolution de problèmes au cycle 3*. Paris : Hatier.

Gardes M.-L. (2009) *Étude du processus de recherche d'élèves de terminale scientifique confrontés à la résolution d'un problème en cours en arithmétique*. Mémoire de Master 2 HPDS, Université Lyon 1.

Gardes M.-L. (2010) Investigations arithmétiques en terminale : entre essais et conjectures. *Petit x* 83, 51-78.

Gardes M.-L., Mizony M. (2012) La conjecture d'Erdös-Straus : expérimentation en classe et travail du chercheur. *Repères IREM*.

Giroud N. (2007) Experimental and mathematical control in mathematics. In *Proceedings of CERME 6, January 28th-February 1st 2009*. Lyon, France.

Godot K. (2006) La roue aux couleurs : une situation de recherche au cycle 3. *Grand N* 78, 31-52.

Grenier D., Payan C. (2003) Situation de recherche en classe : essai de caractérisation et proposition de modélisation. In *Actes du Séminaire National de didactique des mathématiques 2002* (pp. 189-203). Paris : IREM de Paris 7 et ARDM.

Grenier D., Tanguay D. (2008) L'angle dièdre, notion incontournable dans les constructions pratique et théorique des polyèdres réguliers. *Petit x* 78, 26-52.

Perrin D. (2007) L'expérimentation en mathématiques. *Petit x* 73, 634.

Tarski A. (1960) *Introduction à la logique*. Paris :Louvain.

LA DEMARCHE D'INVESTIGATION DANS LES SITUATIONS DE RECHERCHE POUR LA CLASSE (SIRC)

Denise GRENIER*

Résumé – Nous présentons une analyse du rôle de la démarche de recherche et de l'activité expérimentale dans nos SiRC, en lien avec la démarche d'investigation telle qu'elle est décrite dans les programmes scolaires français des collèges et lycées et les documents Ressources associés. La démarche d'investigation fait partie intégrante des SiRC. Cependant, l'interprétation de ce terme dans les textes officiels porte des aspects de fermeture qui vont à l'encontre de l'esprit d'invention nécessaire à la recherche et à l'apprentissage des raisonnements inductif et déductif. J'illustrerai cela par des exemples de documents officiels et des SiRC.

Mots-clefs : Activité mathématique, situation de classe, expérimental, démarche de recherche

Abstract – We present an analysis of the role of research processes and experimental activities in our Situation of Research in Class (SiRC), in connection with investigation activity in French junior high schools and high schools, as described in curricula and related documents. The investigation activity is a full part of SiRC. However, the interpretation of these words in regulatory texts may lead to restrictions that go against the spirit of invention required for carrying out research and inductive or deductive reasoning. I will illustrate this with examples of official documents and SiRC.

Key-words: Mathematical activity, class situation, experimental and research activity

I. INTRODUCTION

Cette contribution est issue d'une recherche menée depuis de nombreuses années dans l'équipe «combinatoire et didactique des mathématiques » et dans l'ERTé[1] Maths-à-Modeler. L'objet essentiel de ce travail est la construction, l'expérimentation et l'étude de Situations de Recherche pour la Classe (SiRC). Le modèle SiRC (Grenier et Payan2003, Grenier 2009) dont nous rappelons ci-après les caractéristiques, a des points communs avec les « situations-problèmes » et « problèmes ouverts » (Arsac et al. 1991), mais s'en distingue par des aspects essentiels (pour nous) du point de vue de la démarche de recherche, que nous exposerons et illustrerons.

Nous donnons dans ce texte des éléments d'analyse de l'activité mathématique, en essayant d'y situer la « démarche d'investigation » telle qu'elle est décrite dans les programmes scolaires actuels français. Beaucoup de questions se posent sur les choix des problèmes qui assureraient à la fois leur faisabilité en classe (dévolution, durée et gestion) et leur pertinence pour les objectifs visés (savoir faire des mathématiques). Les réponses ne sont pas faciles, contrairement à ce que peuvent laisser croire les commentaires des programmes et les propositions d'exercices des documents ressources. Nous devons construire des problèmes adéquats. Les Situations de Recherche pour la Classe présentées ici en sont des exemples, qui tentent de réunir les caractéristiques pour une vraie activité de recherche et les conditions d'un fonctionnement raisonnable dans la classe.

L'objectif des SiRC est l'apprentissage des savoir-faire fondamentaux pour faire des mathématiques, tels : expérimenter, étudier des cas particuliers, modéliser, formuler des conjectures et les étudier par la production d'exemples et contre-exemples, argumenter, distinguer condition nécessaire/condition suffisante, définir, prouver. Pour de nombreuses

* Équipe Combinatoire et Didactique des mathématiques, Institut Fourier, Université Grenoble 1 – France – dgrenier@ujf-grenoble.fr

1 Équipe de Recherche Technologique sur l'enseignement, Ministère de l'enseignement 2002-2010.

© Grenier D. (2012) La démarche d'investigation dans les situations de recherche pour la classe (SiRC). In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT10, pp. 1354–1364). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

SiRC, nous avons maintenant une analyse a priori fiable et des éléments de gestion pour la classe. Certaines sont intégrées dans des cursus de formation d'enseignants, et dans des enseignements universitaires pour lesquels les étudiants doivent être évalués – l'évaluation porte sur l'apprentissage des savoir-faire fondamentaux de l'activité mathématique que nous venons de décrire. L'intérêt de ces situations est renforcé du fait des programmes actuels du collège et lycée français.

II. DEMARCHE DE RECHERCHE, DEMARCHE EXPERIMENTALE ET DEMARCHE D'INVESTIGATION

1. L'activité mathématique du chercheur

Rappelons d'abord la phrase de Lichnerowicz (in Nimier 1989, p. 19) : « L'activité mathématique pour moi, enfin pour n'importe quel chercheur en mathématiques est d'une espèce assez différente [de celle qui est communément admise] : vous vous posez une question, vous vous préoccupez d'un problème ». Plus proche de nous, Perrin (2007, p. 7) écrit, en le posant comme « maxime » : « Faire des mathématiques c'est poser et – si possible – résoudre des problèmes ».[2]

Pour faire des mathématiques, il faut savoir « chercher ». Une question se pose alors : Quelles conditions permettent de faire la dévolution aux élèves de la *démarche de recherche*, composante essentielle d'une activité mathématique conforme à celle évoquée par ces deux mathématiciens ? Cela ne va pas de soi, et c'est peut-être une erreur qui est souvent faite dans l'enseignement : poser différemment un exercice usuel (d'application d'une définition, d'un théorème ou d'une technique) pour en faire une situation « de recherche ». Autre erreur familière : cacher le problème mathématique sous un contexte « de la vie courante ». Ces effets non pertinents ont été étudiés par les didacticiens (je renverrai juste ici à Coulange 1998).

2. La démarche expérimentale

Dans son quotidien, un chercheur va faire des essais, résoudre des cas particuliers, calculer, dessiner, étudier des conjectures, changer de cadre ou de registre, se poser une nouvelle question, mais aussi s'informer sur ce qui a été fait, échanger et débattre avec d'autre chercheurs. Où commence et où s'arrête l'activité expérimentale dans tout ça ? Quel est le rôle de l'expérimental dans la résolution d'une question, d'un problème ? Il n'y a pas de réponse simple, car tout est imbriqué. Perrin (Op. cité) décrit une expérience mathématique en deux phases, l'une expérimentale, l'autre d'observation des résultats de l'expérience. Giroud (2011), dans sa thèse sur la démarche expérimentale dans les SiRC, la décrit comme « un ensemble d'actions et de rétroactions entre les différents léments suivants : questions, expérimentations, hypothèses, conjectures, preuves ».

3. La « démarche scientifique » dans le programme de seconde

En France, le récent programme de la classe de seconde (élèves de 15 à 16 ans) décrit ainsi la « démarche scientifique » dans l'introduction du programme de mathématiques pour la classe de seconde, BO n°30 du 23 juillet 2009, page 1, dont voici un extrait.

> L'objectif de ce programme est de former les élèves à la démarche scientifique sous toutes ses formes pour les rendre capables de :

[2] Il faudrait pouvoir citer plus largement ces deux textes, très intéressants pour le thème qui nous préoccupe ici.

- modéliser et s'engager dans une activité de recherche ;
- conduire un raisonnement, une démonstration ;
- pratiquer une activité expérimentale ou algorithmique ;
- faire une analyse critique d'un résultat, d'une démarche ;
- pratiquer une lecture active de l'information (critique, traitement), en privilégiant les changements de registres (graphique, numérique, algébrique, géométrique) ;
- utiliser les outils logiciels (ordinateurs ou calculatrices) adaptés à la résolution d'un problème ;
- communiquer à l'oral et à l'écrit.

Tout y est, ou presque. Il reste le plus difficile pour les enseignants, à savoir quels problèmes proposer aux élèves pour réaliser ces objectifs ambitieux. Ce que propose le document « ressources » associé[3] est nous semble-t-il très en deçà des ambitions avancées.

4. La démarche d'investigation dans les documents officiels pour le collège

Dans les programmes des collèges français actuels, la démarche d'investigation occupe une page entière dans le document commun aux quatre années de collège[4]. En voici un premier extrait.

> La démarche d'investigation présente des analogies entre son application au domaine des sciences expérimentales et à celui des mathématiques. La spécificité de chacun de ces domaines, liée à leurs objets d'étude respectifs et à leurs méthodes de preuve, conduit cependant à quelques différences dans la réalisation. Une éducation scientifique complète se doit de faire prendre conscience aux élèves à la fois de la proximité de ces démarches (résolution de problèmes, formulation respectivement d'hypothèses explicatives et de conjectures) et des particularités de chacune d'entre elles, notamment en ce qui concerne la validation, par l'expérimentation d'un côté, par la démonstration de l'autre. (Extraits de l'introduction commune aux quatre niveaux du programme de collège en mathématique – B.O. Spécial n°6 du 28 août 2008, p. 4)

Une remarque immédiate : la démarche d'investigation en mathématique ne se distinguerait de celle en sciences expérimentales qu'au moment de la validation. Or, l'observation expérimentale et le raisonnement inductif n'ont pas les mêmes fonctions en mathématiques et dans les autres sciences. Dans ces dernières, si aucune observation contraire ne vient contredire celles qui ont été faites, elles seront considérées comme valides (ce sera le cas sur un petit nombre d'observations en classe). C'est bien sûr faux en mathématiques.

Que se cache-t-il derrière cette affirmation d'une (grande) « proximité » entre les deux domaines ? Le risque est de masquer les spécificités du raisonnement mathématique, indispensable pour mener la résolution d'un problème, pour construire et étudier des conjectures. Il n'est peut-être pas prévu que les conjectures des élèves puissent être fausses ! Ce qui est effectivement rarement le cas avec des logiciels de géométrie dynamique qui donnent des conjectures évidemment vraies, ou avec des calculatrices sophistiquées qui donnent des calculs justes. Or les incertitudes font partie intégrante d'une situation permettant une vraie investigation.

Continuons la lecture de la page consacrée à la démarche d'investigation. Un « canevas d'une séquence d'investigation » est proposé. Ce canevas est commun aux disciplines scientifiques, il est dit qu'il doit être « aménagé » pour chacune d'elles. Il contient sept « moments essentiels » non nécessairement linéaires, des aller et retours entre eux étant possibles. Les voici :

- le choix d'une situation-problème
- l'appropriation du problème par les élèves
- la formulation de conjectures, d'hypothèses explicatives, de protocoles possibles

[3] Ressources pour la classe de seconde, notations et raisonnement mathématiques, juillet 2009. Ministère de l'éducation nationale, site Éduscol.

[4] *B.O. Spécial n°6 du 28 août 2008.*

- l'investigation ou la résolution du problème conduite par les élèves
- l'échange argumenté autour des propositions élaborées
- l'acquisition et la structuration des connaissances
- la mobilisation des connaissances.

Chacun de ces moments est décrit, nous ne ferons ici que quelques remarques sur leurs choix, leurs intitulés et leur description. Les sept « moments » sont de types et d'importance très inégaux, rien n'est dit à ce sujet. Il y a ceux qui ne concernent que l'enseignant tel le choix d'une situation-problème (moment qui se situe hors du temps de la classe). Les phases didactiques et adidactiques ne sont pas clairement distinguées : ainsi, dans la description du moment d'appropriation du problème par les élèves, il est dit l'enseignant peut intervenir pour guider et recentrer le travail, reformuler la question. Que reste-t-il comme investigation à l'élève ? L'acquisition des connaissances est-elle un « moment » ? Les deux derniers moments font-ils vraiment partie de l'investigation ? On peut se demander si ce canevas donnera réellement aux enseignants des outils pour choisir et gérer une situation d'investigation pertinente pour les élèves.

Le document « Ressources pour les classes de 6^e, 5^e, 4^e et 3^e du collège » sur le thème « raisonnement et démonstration » contient un paragraphe intitulé « démarche d'investigation et raisonnement » (page 3).

b) Démarche d'investigation et raisonnement

Dans le domaine scientifique, la démarche d'investigation occupe une place essentielle à chaque fois qu'une question est posée et que la réponse ne peut être donnée immédiatement à partir de connaissances disponibles. La mise en œuvre d'une telle démarche dans une séquence d'enseignement doit déboucher sur des acquisitions de connaissances et de compétences.
En mathématiques, elle trouve véritablement sa place dans la résolution de problèmes (ou de questions ouvertes) et doit donner l'occasion, par sa mise en œuvre, d'acquérir ou de consolider des compétences pour concervoir ou utiliser un raisonnement.

✓ *Les étapes possibles d'une démarche d'investigation en mathématiques*

Réflexion sur le problème posé :
1. appropriation du problème, vocabulaire, contexte,
2. confrontation avec les savoirs disponibles (il est donc nécessaire de « connaître son cours »),
3. recherche éventuelle d'information sur le thème.

Élaboration d'une conjecture :
1. recherche, avec mise en place éventuelle d'une première expérimentation
2. émission de la conjecture,
3. confirmation, avec mise en place éventuelle d'une seconde expérimentation.

Mise en place d'une preuve argumentée.

Figure 1 *– extrait du document « ressources pour les classes de 6^e, 5^e, 4^e et 3^e du collège » thème « raisonnement et démonstration »*

La démarche d'investigation est donc prévue dans des problèmes relatifs à une notion qui fait l'objet d'un « cours » qu'il faut connaître. L'activité de recherche est donc ici biaisée, puisque l'on sait déjà ce qui va résoudre la question. Et même plus, une vraie investigation est-elle possible si le savoir à mettre en jeu est désigné à l'avance ? Pour comprendre un peu mieux ce qu'il y a derrière ces étapes suggérées, étudions les deux exemples proposés dans ce même document, rubrique « raisonnement déductif et démarche d'investigation ».

Premier exemple du document Ressources, page 4

Exemple 1*, en troisième (élèves de 14 à 15 ans) :*

$\boxed{\sqrt{2} \text{ est-il un nombre décimal}}$

Pour étudier la question « est-ce vraiment un nombre décimal ? », il faut qu'il y ait un doute, des expérimentations accessibles et des connaissances disponibles pour établir la preuve. On peut préparer le « milieu pour une investigation », en ayant travaillé auparavant les deux propriétés suivantes concernant la multiplication des nombres décimaux : « Le carré d'un nombre décimal ayant n chiffres après la virgule est un nombre décimal ayant $2n$ chiffres après la virgule » et « Le dernier chiffre du carré d'un nombre décimal est le dernier chiffre du carré de la dernière décimale de ce nombre ». Si les élèves savent que $\sqrt{2}$ n'est pas un décimal, et alors il n'y a pas de vraie investigation en jeu qui aboutirait à des conjectures (vraie ou fausse) à débattre, il reste malgré tout à construire une preuve. Si les élèves savent seulement que, par définition, c'est le nombre positif dont le carré est égal à 2, quelle investigation peuvent-ils faire ? Le document Ressources en décrit une possible, qui me semble peu probable dans son déroulement (voir ci-après). En effet, si l'utilisation de la calculatrice permet d'afficher une valeur décimale prise comme un *nombre* décimal, et que le carré de ce nombre donne 2, quelle rétroaction la situation apporte-t-elle à l'élève pour qu'il mette en doute ce résultat ? Le raccourci fait dans le document Ressources affirmant que la calculatrice conduit à la bonne conjecture est, de mon point de vue, assez utopique, sauf si l'enseignant induit les « bonnes » questions (comme il est prévu dans le canevas décrit ci-dessus).

Première expérimentation : la calculatrice donne, comme valeur de $\sqrt{2}$ une première conjecture :

$$\boxed{1{,}414213562}$$

qui doit amener la remarque : « Quelle est la dixième décimale ? ».

Une deuxième expérimentation pourrait être d'effectuer $1{,}414213562 \times 1{,}414213562$ avec la calculatrice, ce qui donne 2.

L'infirmation de la conjecture : « $\sqrt{2} = 1{,}414213562$ » pourrait être élaborée à partir de la remarque d'un élève qui a commencé à poser l'opération et qui dit « le dernier chiffre après la virgule est un 4 ».

Émission d'une nouvelle conjecture : « il n'y a pas de nombre décimal dont le carré est 2 ».

Et la preuve : s'il y en avait un, il s'écrirait 1,41421356 …..... 1
ou 1,41421356 …..... 2
ou 1,41421356 …..... 3
ou 1,41421356 …..... 4 etc.

- ✓ tous les cas peuvent être examinés avec le raisonnement précédent, ***raisonnement par disjonction des cas.***
- ✓ d'où la conclusion : ***raisonnement par l'absurde.***

Figure 2 *– Commentaires du document « ressources ... accompagnant l'exemple 1*

Second exemple du document Ressources (page 5)

Exemple 2, à partir de la quatrième : Deux points A et B étant donnés, déterminer l'ensemble de tous les points C tels que le triangle ABC soit un triangle rectangle en C

On peut supposer que ce problème induit une investigation seulement si l'élève ne connaît pas le théorème qui répond à la question : l'ensemble des points C du plan est le cercle de diamètre $[AB]$ privé de A et B. Cette remarque qui peut sembler banale ne va pas de soi pour certains enseignants. Lors d'un stage de formation continue, j'ai fait étudier cet exemple du point de vue de la démarche d'investigation, sans donner les commentaires du document. Pour une large majorité de ces enseignants, il n'y avait que deux possibilités : soit l'élève connaissait le théorème (donc, le résultat) et le travail qu'on lui demandait était d'écrire la preuve ; soit, il devait utiliser un logiciel de géométrie dynamique, pour avoir la conjecture. Dans chacun de ces choix, la part laissée à l'élève pour expérimenter et chercher est très réduite, car considérée comme inaccessible, le problème ne pouvait donc remplir son objectif[5].

Les commentaires du document Ressources (voir ci-après) situent bien le problème dans la recherche du théorème. Cependant, ils mettent sur le même plan la construction des points *C* avec les instruments matériels et celle avec un logiciel de géométrie dynamique. Or, du point de vue de l'investigation, ce n'est pas du tout la même activité pour l'élève. On aurait pu s'attendre au contraire que dans un tel paragraphe, les deux soient bien dissociés.

D'autre part, le déroulement fictif présenté pour la situation ne distingue pas les apports de l'enseignant du travail personnel des élèves.

Première expérimentation : tracé d'un certain nombre de points avec une équerre ou avec un logiciel de géométrie dnamique (dans les deux cas, l'élève est amené à raisonner pour faire sa construction).

Observation : cela semble être un cercle. Mais quel est son centre ?

Émission d'une conjecture : l'ensemble des points est le cercle de diamètre [AB].

Vérification expérimentale avec une règle graduée, un compas ou le logiciel : la distance du milieu de [AB] aux points tracés est-elle égale à la moitié de AB ?

Un triangle tracé en partant d'un point du cercle est-il toujours rectangle ?

Justification :

Qu'est-ce qui permet de montrer que C est sur le cercle de centre M et de diamètre [AB] (privé des deux points A et B) ?

La diagonale d'un rectangle ?

Des triangles isocèles (grâce aux angles) ?

Les médiatrices des côtés de l'angle droit ? Et réciproquement ?

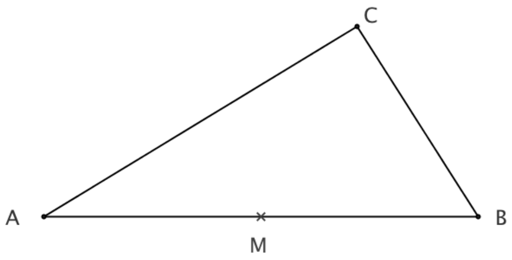


***Figure 3** – Commentaires du document « ressources … » accompagnant l'exemple 2*

En conclusion de cette étude partielle, il nous semble que l'investigation proposée aux élèves est (trop) contrainte à la fois par la désignation des notions ou propriétés visées, l'utilisation d'outils externes (calculatrice, logiciel) qui donnent les « bonnes » conjectures, et une interaction fréquente de l'enseignant avec la situation (pour guider, recentre, reformuler). Nous n'avons trouvé aucune remarque dans ce texte sur l'importance du doute, la part de l'empirique, celle de l'intuition, la gestion des erreurs et des impasses, etc., ni aucun moyen ou critère pour que l'enseignant puisse faire sa propre analyse a priori et choisir les situations pertinentes et leur gestion (sauf quelques remarques très générales).

III. LA DEMARCHE D'INVESTIGATION DANS LES SITUATIONS DE RECHERCHE POUR LA CLASSE

1. *Nos postulats pour la garantie d'une vraie activité mathématique*

- Il n'y pas réellement la possibilité d'une investigation par l'élève sans un enjeu de vérité dont il peut s'emparer, qu'il peut tester et non évident à prouver.

[5] Un enseignant de collège de l'académie l'a expérimentée avec succès dans sa classe, avec règle, équerre et compas.

- Il n'y pas réellement possibilité d'une investigation par l'élève si une « boîte à outils » (théorèmes, propriétés, algorithmes) est disponible et désignée de manière évidente pour la résolution.
- Il n'est ni nécessaire ni suffisant d'aller chercher des contextes « de la vie courante » pour faire pratiquer une démarche de recherche, expérimentale ou d'investigation : cela ne garantit pas la pertinence du problème, et peut même apporter des bruits qui font obstacle à l'investigation.
- Il n'est pas raisonnable de faire travailler la démarche de recherche – et donc la démarche d'investigation – en même temps que l'apprentissage de notions nouvelles difficiles. En conséquence, les problèmes seront accessibles à de nombreux niveaux de connaissance (parfois du primaire à l'université) sans être caducs.

2. Le modèle de Situation de Recherche pour la Classe

Il était déjà en gestation dans Arsac et al. 1995 et Grenier et Payan 1998. Rappelons ici la caractérisation du modèle SiRC, telle qu'elle a été reprise dans Grenier 2009, car les ressemblances avec le sujet qui nous intéresse ici sont évidentes. Comme tout modèle, celui-ci est une référence (aussi bien épistémologique que pratique) pour les situations que nous construisons, qui peuvent s'en démarquer plus ou moins.

- Une SiRC est proche d'une question vive de la recherche mathématique. Cette condition, assez contraignante, a pour but d'éviter que la question ou la réponse semblent évidentes ou familières. L'objectif est de donner une pertinence à l'activité de recherche. Cette condition peut être artificiellement recréée par la mise en scène du problème, lorsque celui-ci est résolu dans la recherche.
- La question initiale est facile d'accès et pertinente à des niveaux différents. Notre intention est de rompre avec la pratique didactique usuelle qui tend à attribuer tout problème à un niveau scolaire précis. Les savoir-faire transversaux doivent en effet être pris en charge tout au long de la scolarité, du primaire à l'université. Pour remplir cette condition, les énoncés des SiRC sont forcément peu mathématisés, mais nous cherchons à éviter les « bruits » non mathématiques courants dans les problèmes dits « concrets », qui complexifient la tâche de l'élève et l'empêchent parfois de rentrer dans les mathématiques.
- Des stratégies initiales existent, mais elles ne résolvent pas complètement la question. En d'autres termes, il faut assurer la dévolution du problème, tout en laissant une incertitude qui ne peut être réduite par la seule application de techniques ou propriétés usuelles connues (c'est ainsi que Brousseau décrit, dans sa théorie, une « bonne » situation). Le cadre théorique de résolution n'est ni donné, ni évident, mais il est possible de s'emparer du problème sans cela.
- Plusieurs avancées dans la résolution sont possibles, par essais-erreurs, étude de cas particuliers, production d'exemples, etc. Il s'agit de favoriser la construction par les élèves de conjectures — issues de l'exploration de la question — qui ne seront pas évidemment vraies, mais pourront être examinées au moyen d'exemples et de contre-exemples construits par les élèves eux-mêmes.
- On peut changer les hypothèses, ou la question initiale, et s'emparer d'un nouveau problème. La question initiale peut déboucher sur des questions annexes : fermeture du problème par choix de valeurs de certains paramètres, ou question nouvelle issue de l'activité de recherche.

Enfin, une SiRC est caractérisée par des variables (didactiques ou adidactiques), et au moins une **variable de recherche** (Godot 2005), paramètre du problème qui pourrait être une variable didactique, mais qui est laissé à la disposition de l'élève. Cette variable de recherche détermine ce qui, dans la situation, conduit à une activité mathématique, parce que :

- il y a, à la charge de l'élève, une question et un enjeu de vérité, dont il peut s'emparer mais qui ne sont pas résolubles rapidement,
- il n'y a pas de « boîte à outils » (théorèmes, propriétés, algorithmes) disponible de manière évidente pour la résolution.

On s'accordera aisément sur le fait que très peu de problèmes de la recherche actuelle en mathématiques peuvent être transposés ainsi. Le choix des « bonnes » questions de recherche et de leur transposition pertinente en SiRC est donc une tâche difficile. Mais c'est peut-être à ce prix que l'on peut assurer une vraie activité mathématique. Les mathématiques discrètes sont un domaine privilégié, mais pas le seul comme b-nous le verrons ensuite.

Des analyses *a priori*, des organisations didactiques et les objets des phases collectives et d'institutionnalisation, sont décrits dans Grenier 2009. Nous renvoyons le lecteur à ce texte. Ils montrent que l'on peut assurer la dévolution d'une investigation « mathématique » ouverte, à des niveaux très différents. Des exemples de ces SiRC et leur analyse ont été présentées aux colloques EMF2006 et AMQ2006[6] à Sherbrooke (Grenier et Payanb 2007, Grenier 2008b), ainsi que dans un ouvrage de vulgarisation (Grenier 2008a). En particulier, nous montrons comment, dans la situation « pavage de polyminos par des dominos ou triminos » l'investigation, induite par la *manipulation* de polyminos matériels, permet la résolution de cas particuliers et l'énoncé de conjectures (vraies ou fausses) à tous les niveaux scolaires, avant de devenir un outil de preuve. La preuve reste à faire, mais tous les éléments en ont été construits par les élèves.

Dans ses travaux, Ouvrier-Buffet (2003) a étudié *l'activité de définition* dans un domaine mathématique pour lequel les étudiants n'avaient aucun support théorique disponible – les mathématiques discrètes. Ses travaux montrent bien comment la phase expérimentale, les essais et les recherches systématiques sur un objet qui reste à découvrir, aboutissent à des « zéros-définitions », ce qui était le but de ces problèmes. Ceci est repris dans Ouvrier-Buffet 2010 avec la question « comment permettre à des étudiants d'avoir une expérience mathématique ? »

Toujours dans le domaine des mathématiques discrètes, Cartier (2008a et 2008b) a étudié un problème qui se modélise par deux types de graphes, l'un étant pertinent et l'autre non. C'est clairement l'investigation qui permet de choisir le « bon » modèle. Les notions en jeu sont celles du programme de la spécialité Maths de Terminale ES. Ses travaux analysent aussi comment les choix de transposition faits réduisent l'activité de modélisation à quasiment rien, alors que le modèle « graphe » est pertinent et accessible même à des élèves de primaire.

Deloustal-Jorrand (2004), quant à elle, a au contraire construit une SiRC mettant en jeu des notions géométriques très institutionnalisées (les quadrilatères), l'activité de recherche étant assurée à la fois par le choix du sous-ensemble de quadrilatères à étudier et les questions posées, comme celle-ci par exemple :

> On se place dans l'ensemble des quadrilatères ayant deux côtés opposés de même longueur. A quelles conditions sur les diagonales les deux autres côtés sont-ils parallèles ?

6 Association Mathématique du Québec

L'étude de cas particuliers, les tracés de figures génériques et la reformulation de la question sont nécessaires pour faire des conjectures, non évidentes à prouver. En effet, aucune des propriétés connues n'est suffisante pour résoudre la question, mais les propriétés classiques sur les quadrilatères vont permettre d'en faire la dévolution et d'initier la résolution.

Dans la situation « Polyèdres réguliers de l'espace » (Tanguay et Grenier 2009, 2010), une SiRC a été construite sur une propriété bien connue (celle des cinq polyèdres de Platon) par un choix des questions (définir, construire, prouver) et une mise en scène du problème (manipulation de matériel sommets-arêtes). Nous décrivons comment la manipulation induit une démarche d'investigation qui, avant d'aboutir à des conjectures, permet de repérer des conceptions erronées (parfois étonnantes) sur les objets du plan concernés (polygones, régularité, angle « digone »), les objets de l'espace (polyèdre, angle dièdre) et les rapports entre eux. En particulier, nous y avons repéré l'absence totale de la notion d'angle dièdre chez les étudiants de niveau licence préparant le concours d'enseignement (à Grenoble comme à Montréal), alors que celle-ci est présente (mais implicite) dès qu'on fait de la géométrie dans l'espace au lycée (Grenier et Tanguay 2008).

3. *Les raisonnements inductif et déductif*

Entraîner les élèves à ces deux types de raisonnement – inductif et déductif – est un des objectifs des programmes de collège et lycée. Le raisonnement inductif a pour objectif essentiel de généraliser à d'autres objets une propriété connue sur certains objets et de construire des objets nouveaux. L'induction mathématique se différencie de l'induction dans les autres sciences, en particulier en sciences physiques, par sa validité intrinsèque. Citons H. Poincaré :

> L'induction, appliquée aux sciences physiques, est toujours incertaine, parce qu'elle repose sur la croyance à un ordre général de l'Univers, ordre qui est toujours en dehors de nous. L'induction mathématique, c'est-à-dire la démonstration par récurrence, s'impose au contraire nécessairement, parce qu'elle n'est que l'affirmation d'une propriété de l'esprit lui-même. (H. Poincaré, La science et l'hypothèse)

L'activité consistant à expérimenter et étudier des cas particuliers joue un rôle important, quasi nécessaire, dans l'apprentissage du raisonnement inductif, car il permet de justifier la formulation de conjectures – non posées au hasard, et l'étude de ces conjectures par des allers-retours entre l'expérimental et la mise en en place de leur preuve.

Le *raisonnement par récurrence* présente la caractéristique particulière d'être à la jonction de l'inductif et du déductif. Dans mon étude des conceptions d'étudiants et d'enseignants sur le récurrence (Grenier 2002 et 2003), il apparaît que le concept est largement absent, la récurrence étant réduite à une ou deux techniques non constructives dont la justification comme outils de preuve est parfois mise en doute. En conséquence, le champ des problèmes associé généralement par les enseignants à ce concept mathématique est extrêmement réduit. Des problèmes de différents types, permettant de construire une connaissance plus idoine de la récurrence ont été étudiés (Grenier 2012).

IV. CONCLUSION

En guise de conclusion, je vais réagir à une question souvent posée, celle du transfert, dans l'activité quotidienne de l'élève, des savoir-faire en jeu dans les SiRC. En fait, cette question se pose pour tous les apprentissages quels qu'ils soient, et à ma connaissance, il n'y a pas de réponse universelle connue. En revanche, nous sommes nombreux, enseignants et chercheurs, à convenir que nos élèves et étudiants ne savent pas « faire des mathématiques ». Ce qui montre que les « contenus standards » du second degré – et au-delà – sont inadéquats pour l'apprentissage des savoir faire qui constituent une vraie activité mathématique. Il est donc temps de proposer autre chose à nos élèves que la pratique de « techniques » ou de « méthodes » bien définies, pour résoudre des « types de problèmes » bien précis, qui ne leur permettent de résoudre que les problèmes ... qu'ils ont déjà rencontrés ! C'est l'organisation didactique globale qui doit être repensée, dans laquelle les situations de type SiRC rempliraient tout simplement les objectifs qui leur sont assignés, en accord avec les programmes actuels.

REFERENCES

Arsac G. Germain G., Mante M. (1991) *Problème ouvert et situation-problème.* Lyon :IREM.

Arsac G., Gréa J., Grenier D., Tiberghien A. (1995) (Eds) *Différents types de savoirs et leur articulation*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Cartier L. (2008a) A propos du théorème d'Euler et des parcours eulériens dans les graphes. *Petit x* 76, 27-53 :

Cartier L. (2008b) *Le graphe comme outil pour enseigner la preuve et la modélisation.* Thèse de l'Université Joseph Fourier. Grenoble.

Coulange L. (1998) Les problèmes « concrets à mettre en équation » dans l'enseignement. *Petit x* 47, 33-58.

Deloustal-Jorrand V. (2004) *Etude épistémologique et didactique de l'implication en mathématique*. Thèse de l'Université Joseph Fourier. Grenoble.

Giroud N. (2011) *Le rôle de la démarche expérimentale dans les SiRC*. Thèse de l'Université Joseph Fourier. Grenoble.

Godot K. (2005) *Situations de recherche et jeux mathématiques pour la formation et la vulgarisation*. Thèse de l'Université Joseph Fourier. Grenoble.

Grenier D. (2002) Different aspects of the concept of induction in school mathematics and discrete mathematics. In A*ctes du European Research in Mathematics Education,* Klagenfurt, august, 23-27.

Grenier D. (2003) The concept of « induction » in mathematics. *Mediterranean Journal For Research in Mathematics Education* 3.

Grenier D. (2008a) Expérimentation et preuve en mathématiques. In Viennot L (Ed.) *Didactique, épistémologie et histoire des sciences. Paris :* PUF.

Grenier D. (2008b) Des problèmes de recherche pour l'apprentissage de la modélisation et de la preuve en mathématique. In *Actes du colloque AMQ, Sherbrooke*, Québec, juin 2006.

Grenier D. (2009) Changer le rapport des élèves aux mathématiques en intégrant l'activité de recherche dans les classes. In *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*, ed. IREM de Paris7.

Grenier D. (2012) Une étude didactique du concept de récurrence. *Petit x* 88, 27-47.

Grenier D. (à paraître) Some specific concepts and tools of Discrete Mathematics. In *Actes de l'International Congress on Mathematics Education ICME11*, Monterrey, juillet 2008.

Grenier D., Payan Ch. (1998) Spécificités de la preuve et de modélisation en Mathématiques Discrètes. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 18(1), 59-100.

Grenier D., Payan Ch. (2003) Situation de recherche en classe : essai de caractérisation et proposition de modélisation. *Cahiers du séminaire national de l'ARDM*, Paris.

Grenier D., Payan Ch. (2007) Des « situations recherche » pour l'apprentissage des savoirs transversaux. In *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone* EMF, Sherbrooke, mai 2006.

Grenier D., Tanguay D. (2008) L'angle dièdre, notion incontournable dans les constructions pratique et théorique des polyèdres réguliers. *Petit x* 78, 26-52.

Nimier J. (1989) *Entretiens avec des mathématiciens.* Lyon : IREM.

Ouvrier-Buffet C. (2003) *Construction de définitions / construction de concept : vers une situation fondamentale pour la construction de définition en mathématiques*. Thèse de l'Université Joseph Fourier. Grenoble.

Ouvrier-Buffet C. (2010) Mathématiques discrètes : un champ d'expérimentation mais aussi un champ des mathématiques. In *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques :* IREM de Paris7.

Perrin D. (2007) L'expérimental en mathématiques. *Petit x* 73, 6-34.

Poincaré H. (1902) *La Science et l'Hypothèse.* Paris: Flamarion.

Tanguay D., Grenier D. (2010) Experimentation and Proof in a spatial Geometry Teaching Situation. *For the Learning of Mathematics*.30(3), 36-42.

Tanguay D., Grenier D. (2009) A classroom situation confronting experimentation and proof in solig geometry. In *Proceedings of ICMI Study19 Proof and Proving, in Mathematics Education*, vol.2, 232-238, ISBN 978-986-01-8210-1.

APPRENTISSAGE DE LA PROPORTIONNALITÉ PAR LA CONFRONTATION À LA NON-PROPORTIONNALITÉ VIA DES MANIPULATIONS

Valérie HENRY* – Pauline LAMBRECHT**

Résumé – L'activité dont il est question dans cet article propose d'intégrer des manipulations dans l'étude de la proportionnalité et de confronter une situation proportionnelle à une autre qui ne l'est pas. L'ingénierie proposée a l'espoir non seulement d'améliorer l'apprentissage de cette matière et ce, à long terme, mais également d'avoir un apport positif quant à la réflexion des élèves face à des questions mobilisant principalement le sens commun. Le protocole d'expérimentation complet (pré-tests, post-tests, séquences d'apprentissage, *classes-témoins* et *classes-tests*) ainsi que les premiers résultats sont développés dans cet article.

Mots-clefs : manipulations, grandeurs, proportionnalité, laboratoire, expérimentation

Abstract – The activity discussed in this paper suggests to integrate handlings for the study of proportionality and to confront a proportional situation to another non-proportional. The engineering suggested hopes not only to improve the learning of this subject and that, on the long view, but also to have a positive contribution to students' thinking about questions mobilizing mainly common sense. The complete experimental protocol (pre-test, post-tests, learning sequences, *control-classes* and *test-classes*) and first results are developed in this paper.

Keywords: handlings, magnitudes, proportionality, laboratory, experimentation

I. INTRODUCTION

Ce travail s'appuie sur une recherche actuellement en cours au Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (CREM) de Nivelles en Belgique. Il s'agit de la conception et de la mise au point d'ingénieries didactiques (Brousseau 1989) appelées *Math & Manips* (Guissard, Henry, Agie et Lambrecht 2010), intégrant des manipulations, et destinées à diverses tranches d'âge de l'enseignement primaire et secondaire [6-18 ans]. L'apport de telles activités est parallèlement analysé dans une thèse de doctorat en cours aux Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix de Namur en Belgique. À l'instar de Dias et Durand-Guerrier (2005, p. 61), « nous soutenons l'intérêt et la possibilité de concevoir des situations d'apprentissage mettant en œuvre le recours à l'expérience dans la perspective de favoriser l'accès aux connaissances mathématiques pour le plus grand nombre d'apprenants ».

Ces *Math & Manips* qui présentent une forte composante a-didactique (Brousseau 1998) visent à provoquer chez certains élèves de la curiosité par des expérimentations dont les résultats semblent en contradiction avec leurs connaissances antérieures. Elles doivent amener les élèves à entrer dans un processus de questionnement visant à faire émerger un modèle qui correspond au mieux à la réalité de la situation. En particulier, l'activité présentée dans la section III, et qui fait l'objet de la thèse citée plus haut, confronte des situations de proportionnalité à d'autres qui ne le sont pas.

Le passage du contexte expérimental aux modèles mathématiques se fait dans différents contextes afin de favoriser le passage d'un registre de représentation sémiotique à un autre (Duval 1993). En effet, l'activité expérimentale débouche nécessairement sur un relevé d'informations qui devront être traitées de diverses manières. Les résultats seront analysés dans le langage courant, intégrés dans des tableaux de nombres et interprétés sous forme de graphiques, ce qui permet, par exemple dans le cas présenté à la section III, de mettre en

* ULG, FUNDP, CREM – Belgique – v.henry@ulg.ac.be
** FUNDP, CREM – Belgique – paulinel@crem.be

© Henry V., Lambrecht P. (2012) Manipulations, proportionnalité et non-proportionnalité. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT10, pp. 1365–1377). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

évidence différents aspects de la comparaison entre le modèle linéaire et les modèles non linéaires.

Le contexte dans lequel les élèves évoluent lors de la réalisation d'une *Math & Manip* doit les amener à entrer dans des démarches de modélisation. En effet, notre volonté de confronter les conceptions (Giordan et De Vecchi 1987) des élèves avec le vécu expérimental puis d'en faire naître un modèle mathématique les conduit à explorer différentes étapes d'un processus de modélisation telles que : conjecture, protocole, expérimentation, interprétation des résultats, construction d'un modèle, validation, comparaison entre résultats théoriques et expérimentaux, exploitation du modèle, …

L'intérêt de cette recherche est de présenter aux enseignants l'apport d'une activité expérimentale dans le processus de construction des savoirs mathématiques.

Dans cet article, nous nous centrons sur une activité proposée pour des élèves du début du secondaire et qui fait l'objet de la thèse de Pauline Lambrecht. Cette activité, décrite en détails à la section III, vise principalement à ébranler les conceptions initiales des apprenants relativement à la prégnance du modèle linéaire (De Bock, Van Dooren, Janssens et Verschaffel 2007). Dans la section II, nous décrivons les problématiques générales que nous avons identifiées ainsi que les questions de recherche qui ont émergé. La section IV se penche sur la méthodologie mise en place pour étudier ces questions de recherche et nous avançons quelques résultats dans la section V. Des résultats plus complets pourront être proposés lors de la présentation au colloque.

II. PROBLÉMATIQUES

Nous présentons dans cette section les différents choix sur lesquels la thèse repose.

1. Transition primaire – secondaire

Dans les classes maternelles et primaires, les enseignants sont habitués à faire manipuler les élèves. Toutefois, certaines manipulations sont, plus que d'autres, susceptibles d'installer des concepts mathématiques fondamentaux. Nous nous efforçons de proposer des activités où la nécessité de la manipulation est réellement motivée par le contexte, et où l'expérimentation fournit la réponse à une question pertinente. Notre but est de mettre en évidence pour les enseignants les compétences qui sont développées par chacune de nos *Math & Manips*, ainsi que les notions qu'elles installent, mais aussi de montrer en quoi elles contribuent à une meilleure compréhension de notions parfois abstraites. Les *Math & Manips* s'inscrivent dans un contexte plus général de construction des savoirs par l'élève, elles visent à construire de nombreux concepts dans le domaine des grandeurs, font percevoir la nécessité de certains outils. Elles ne remplacent pas tous les exercices traditionnels mais leur donnent du sens.

La transition de l'enseignement primaire vers l'école secondaire est problématique à de nombreux niveaux. En mathématiques, on observe un glissement des mathématiques concrètes issues du monde sensible vers une formalisation de plus en plus importante. Le passage de l'arithmétique à l'algèbre en est un exemple frappant. Pour beaucoup d'élèves, ce cap est très difficile à franchir.

Notre recherche vise à réintroduire dans les classes du secondaire un espace où les liens entre le concret et les modèles mathématiques émergent des manipulations physiques réalisées par les élèves et où ces modèles deviennent une nécessité pour traiter les problèmes posés plutôt qu'une donnée préexistante.

Si dans l'enseignement des sciences l'idée des laboratoires s'est, de toute évidence, imposée très tôt, il n'en a pas été de même pour les mathématiques. Et pourtant les incitations n'ont cessé depuis un siècle. En 1904, Émile Borel propose la mise en place de laboratoires de mathématiques lors d'une conférence à Paris. Lors de cette conférence, il cherche à montrer l'intérêt, le rôle et la nécessité des exercices pratiques (de vrais exercices, expériences et manipulations de calculs numériques, de dessins géométriques, d'arpentage, de cosmographie ou de mécanique) qui permettent d'introduire « plus de vie et de sens du réel » dans l'enseignement des mathématiques (Borel 1904).

Alors qu'aux cours de sciences l'aspect expérimental a été réintroduit pour les élèves du degré supérieur du secondaire, dans les laboratoires de physique, de chimie et de biologie, le cours de mathématiques a tendance à devenir de plus en plus abstrait au fur et à mesure de la progression dans le cursus. Certains professeurs vont même jusqu'à rejeter toute forme de manipulation, estimant que le cours de mathématiques est exclusivement le lieu de la construction théorique, des démarches abstraites.

Dans les *Math & Manips*, nous proposons des activités qui donnent du sens aux concepts qu'elles introduisent et aux outils qu'elles nécessitent, et par là même, nous tentons de rendre un certain plaisir d'apprendre aux élèves démotivés par l'aspect théorique et abstrait des mathématiques.

2. *Illusion de linéarité*

Nous avons choisi de travailler la proportionnalité au début du secondaire en proposant une situation de non-proportionnalité notamment suite aux travaux de Dirk De Bock. En effet, avec son équipe, il a étudié le phénomène qu'il appelle « illusion de linéarité » à l'aide de questions telles que celle traduite ci-dessous qui ont été posées à des élèves issus de la deuxième primaire à la deuxième secondaire [7 à 14 ans].

> Maman a placé 3 essuies sur la corde à linge. Après 12 heures ils étaient secs. Grand-mère a placé 6 essuies sur la corde à linge. Combien de temps est-ce que ça leur a pris pour être secs ? (De Bock, Van Dooren, Janssens et Verschaffel 2007, p. 9)

Dans l'ouvrage qui présente leurs recherches (Op. cité), les auteurs soulignent que la tendance des élèves à utiliser un modèle linéaire est très forte, profondément enracinée et résistante au changement. Selon eux, plusieurs facteurs peuvent être à l'origine de ce fait : la nature intuitive du modèle linéaire en est un et les expériences vécues par les élèves dans leur classe en est un autre. C'est pourquoi la thèse s'appuie sur une activité intégrant une situation non proportionnelle à partir de manipulations en espérant améliorer l'aptitude des élèves à choisir un modèle adéquat pour traiter les diverses situations rencontrées.

Un enjeu important est d'établir le lien entre phénomène linéaire, tableau de proportionnalité et graphique en ligne droite d'une part, phénomènes non linéaires, tableaux de non-proportionnalité et graphiques de fonctions non linéaires d'autre part.

3. *Analyse a priori*

Dans de nombreux manuels belges, la proportionnalité est étudiée à partir d'une situation présentant deux grandeurs proportionnelles pour lesquelles un coefficient de proportionnalité est mis en évidence. Suivent ensuite de nombreux exercices utilisant les coefficients de proportionnalité pour compléter des tableaux de valeurs. C'est ce que nous appelons par la suite « enseignement classique ». Nous pensons qu'un tel concept ne peut être défini et interprété par les élèves sans recourir à des contre-exemples. Nous tenons donc à proposer une ingénierie (Artigue 1989) dans laquelle une situation de proportionnalité est confrontée à une autre impliquant deux grandeurs non proportionnelles pour définir ce concept.

Les nombreux exercices réalisés dans les classes sont un atout pour ancrer les concepts mais nous craignons que ces apprentissages ne soient efficaces qu'à court terme s'ils ne sont pas accompagnés de faits marquants créant des images mentales. Nous espérons que les manipulations proposées dans l'activité de la section III joueront ce rôle.

De plus, nous supposons que les manipulations pourraient améliorer la réflexion des élèves par le rapprochement du monde sensible à la salle de classe. Les élèves s'habituent à des cours de mathématiques où ils appliquent ce qu'on leur enseigne sans toujours réfléchir au contexte des questions posées. Dirk De Bock et son équipe (2007) l'ont déjà souligné.

Les questions de recherche de la thèse sont ainsi centrées sur :

- l'apport des situations de non-proportionnalité dans l'étude de la proportionnalité ;
- l'apport des manipulations quant à la démarche mise en place par les élèves face à des questions de mathématiques mobilisant principalement le sens commun ;
- l'apport des manipulations pour les apprentissages à long terme liés à la proportionnalité.

Afin d'étudier ces questionnements, nous avons développé l'ingénierie présentée dans la section suivante ainsi que la méthodologie dont il est question dans la section IV.

III. ACTIVITE PROPOSÉE

La *Math & Manip*, intitulée « Des cylindres », s'adresse à des élèves du premier degré de l'enseignement secondaire [12-14 ans]. L'expérience proposée aux élèves leur fait découvrir que le volume d'un cylindre ne se modifie pas de la même manière si on agit sur sa hauteur ou sur son diamètre. Les tableaux de nombres issus des relevés expérimentaux permettent d'observer et de construire avec les élèves les caractéristiques d'un phénomène proportionnel par comparaison avec un phénomène qui ne l'est pas. Les graphiques qui en découlent leur font rencontrer tout d'abord la fonction linéaire, puis une première approche de la fonction $y = ax^2$. L'accent est mis sur la confrontation des deux situations. Cette ingénierie a notamment été présentée lors du colloque de la CII-Collège à Orléans (Guissard M.-F., Henry V., Lambrecht P. et Vansimpsen S., à paraître).

Pour commencer, une situation simple est présentée aux élèves de sorte qu'ils se familiarisent avec le matériel qu'ils vont utiliser dans la suite du travail. Il s'agit du remplissage d'une casserole cylindrique jusqu'à la moitié de sa hauteur dans un premier temps et jusqu'à sa hauteur totale dans un second temps. Avant toute expérimentation, il est demandé aux élèves d'estimer le nombre de verres qui leur sera nécessaire pour atteindre ces différentes hauteurs. Cette première partie de la *Math & Manip* a pour objectif de mettre en évidence des points essentiels d'une démarche scientifique : placement des repères, précision, utilisation d'un matériel adéquat, etc.

Ensuite, les élèves reçoivent un récipient cylindrique assez haut (tel qu'un verre à long drink dans lequel ils versent un certain nombre de mesurettes[1], trois par exemple. Après avoir marqué la hauteur atteinte par le liquide, ils font deux nouvelles marques au double et au triple de la hauteur initiale. Les élèves estiment alors et vérifient ensuite par expérimentation

[1] On appelle mesurette un petit récipient servant à doser notamment des liquides.

les nombres de mesurettes qu'il faudra verser dans le cylindre pour atteindre ces différentes hauteurs. Ils écrivent leurs résultats dans un tableau comme l'illustre le tableau 1.

Hauteur	Nombre de mesurettes
haut. 1 = 3,5 cm	3
haut. 2 = 7 cm	6
haut. 3 = 10,5 cm	9

Tableau 1

Il est demandé aux élèves de repérer et d'écrire les différents liens qu'ils observent entre les valeurs du tableau, en les symbolisant par des flèches. Les réactions des élèves sont principalement de deux sortes : certains remarquent dans ce tableau des liens de type multiplicatif et d'autres des liens de type additif.

	Hauteur	Nbre de mes.	
	haut. 1 = 3,5 cm	3	
$\times 2$	haut. 2 = 7 cm	6	$\times 2$
$\times 3$	haut. 3 = 10,5 cm	9	$\times 3$

	Hauteur	Nbre de mes.	
	haut. 1 = 3,5 cm	3	
$+3{,}5$	haut. 2 = 7 cm	6	$+3$
$+3{,}5$	haut. 3 = 10,5 cm	9	$+3$

Tableaux 2 et 3

Les relations mises en évidence dans les tableaux doivent permettre aux élèves d'imaginer combien de mesurettes seraient nécessaires pour atteindre quatre fois, cinq fois voire dix fois la hauteur initiale et de construire un graphique reprenant ces différents résultats.

Dans l'activité, l'accent est porté sur la multiplication car, même si les liens additifs sont plus prégnants chez les élèves comme le souligne Brousseau, notamment dans la section où il décrit la situation-problème du « puzzle » (1998, pp. 237-241), ces liens dépendent des valeurs initiales et de l'organisation du tableau. De plus, ces liens peuvent apparaître dans des tableaux qui ne sont pas de proportionnalité (correspondant à une fonction affine par exemple).

La deuxième partie de l'activité consiste à conjecturer puis observer et comprendre ce qui se passe si on fait varier le diamètre du cylindre, pour une hauteur fixée. L'importance de la démarche qui consiste à ne faire varier qu'une seule grandeur à la fois est explicitée.

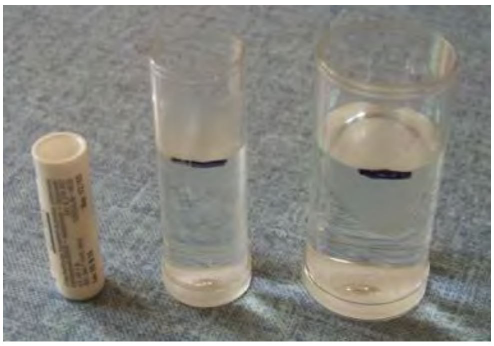


Figure 1

Les élèves reçoivent les trois cylindres de la figure 1. Les deux cylindres transparents ont des diamètres double et triple du plus petit. Ce dernier est utilisé comme mesurette étalon.

La question posée est la suivante : combien de fois faut-il verser le petit cylindre pour remplir les cylindres de diamètres double et triple jusqu'à la même hauteur que celle du cylindre de départ ?

Après avoir noté leurs estimations dans un tableau, les élèves effectuent la manipulation pour vérification.

Les estimations que font les élèves en général sont : deux mesurettes pour remplir le cylindre de diamètre double et trois mesurettes pour celui de diamètre triple. Le passage par l'écriture des estimations est important car les élèves sont ensuite confrontés à la non-concordance des résultats avec leurs prévisions. Cela les incite à se poser davantage de questions et à chercher des justifications aux résultats obtenus. Les erreurs liées à l'expérimental sont présentes et cruciales pour les élèves. Cependant, nous ne développons pas ce point ici, il le sera dans la thèse.

En réalisant l'expérience, les élèves observent que quatre et neuf mesurettes sont nécessaires pour remplir les cylindres de diamètres double et triple jusqu'à une même hauteur.

Comme pour le travail concernant la variation de la hauteur, il est demandé de placer, dans un tableau, les résultats obtenus pour la variation du diamètre. À nouveau, les liens découverts entre ces différentes valeurs doivent être mis en évidence afin d'en dégager les valeurs correspondant à des diamètres quatre fois ou cinq fois plus grands que celui de départ.

	Diamètre	Nbre de mes.	
	diam. 1 = 0,8 cm	1	
$\times 2$	diam. 2 = 1,6 cm	4	$\times 2^2$
$\times 3$	diam. 3 = 2,4 cm	9	$\times 3^2$
$\times 4$	diam. 4 = 3,2 cm	16	$\times 4^2$
$\times 5$	diam. 5 = 4 cm	25	$\times 5^2$

hauteur = 3,5 cm

Tableau 4

Les liens mis en évidence dans le tableau 2 font suite à une discussion au sein de la classe. Ils sont argumentés de diverses manières. Les élèves expliquent, par exemple, que deux mesurettes n'étaient pas suffisantes et l'illustrent par un dessin tel que celui de la figure 2.

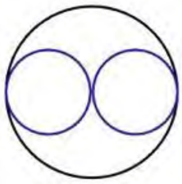


Figure 2

L'analogie avec des récipients parallélépipédiques à base carrée, comme dans la figure 3, permet d'observer à quoi correspondent les facteurs multiplicatifs 4, 9 et de conjecturer les nombres de verres qui seront nécessaires au remplissage d'autres cylindres.

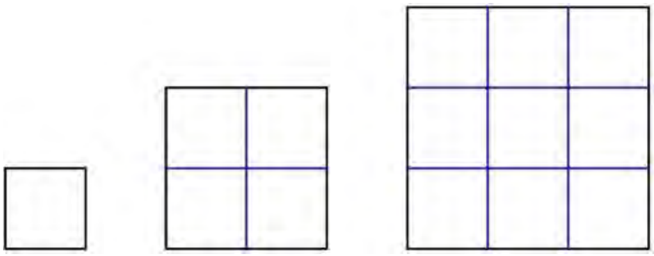


Figure 3

Les résultats sont ensuite placés dans un graphique. Une synthèse est produite à partir des tableaux et graphiques construits au cours de l'activité. Elle met notamment en évidence des caractéristiques permettant de distinguer les phénomènes proportionnels des autres.

La figure 4 illustre les graphiques des deux situations rencontrées.

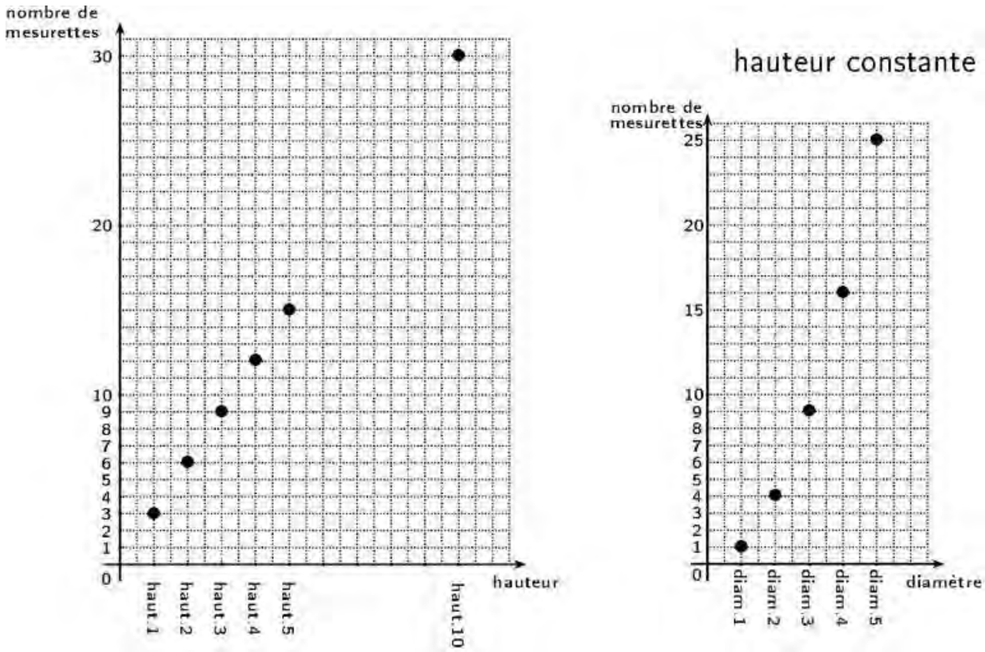


Figure 4

L'activité proposée a permis aux élèves de rencontrer une situation de proportionnalité et une autre qui ne l'est pas dans un contexte particulier : celui du cylindre.

Pour compléter cette démarche, il est nécessaire de leur présenter d'autres solides et de se poser les mêmes questions. Ceci vise à éviter toute généralisation abusive et à déterminer rapidement le domaine de validité des « règles » mises en évidence. La question suivante leur est donc posée : parmi les récipients de la figure 5, quels sont ceux pour lesquels le volume varie proportionnellement à la hauteur ?

Figure 5

IV. MÉTHODOLOGIE

Pour traiter les questions de recherche présentées dans la section II.3, nous avons mis en place un protocole d'expérimentation décrit dans cette section et basé sur l'introduction, dans certaines classes, appelées *classes-tests*, de l'activité décrite ci-dessus tandis que d'autres classes, qualifiées de *classes-témoins,* poursuivent l'enseignement classique dont il est question à la page 3. Bien que nous soyons conscients des limites de cette méthodologie, celle-ci nous paraît néanmoins pertinente pour apporter des éléments de réponse à nos questions de recherche.

Une première expérimentation a eu lieu au cours de l'année scolaire 2009-2010. Les résultats ont permis d'observer des améliorations à apporter en vue d'une seconde expérimentation qui s'est déroulée pendant l'année scolaire 2010-2011. Nous détaillons brièvement ci-dessous ces deux expérimentations de même que les problèmes rencontrés et solutions proposées pour y remédier.

Le protocole d'expérimentation est le suivant. L'ensemble des élèves passe un pré-test suivi d'une séquence d'apprentissage élaborée soit à partir de l'ingénierie présentée dans la section III, soit à partir du cours habituel des enseignants. Celle-ci se clôture avec un premier post-test permettant d'analyser l'impact de l'ingénierie à court terme. La séquence d'apprentissage complète, post-test y compris, dure deux semaines de cours, c'est-à-dire huit périodes de cinquante minutes. Un second post-test réalisé en fin d'année scolaire permet quant à lui de se rendre compte des apprentissages à long terme. Outre ces tests qui nous donneront une analyse quantitative, d'autres méthodologies pourront être mises en place (questionnaires, interviews d'enseignants, …) pour permettre une approche plus qualitative.

1. Pré-test

Le pré-test a pour objectif d'analyser le niveau des connaissances des élèves à propos de l'utilisation des règles de proportionnalité ainsi que de repérer l'usage abusif de ces propriétés. Il est composé d'une série de questions du même type que celles de Dirk De Bock (2007) qui font référence à des situations proportionnelles et à d'autres qui ne le sont pas.

Nous avons délibérément choisi de ne conserver que des questions possédant une et une seule réponse. En effet, nous avions opté au départ pour certaines situations absurdes : « Un nouveau-né de 50 cm pèse 4 kg. Combien pèsera-t-il lorsqu'il fera 1,5 m? » par exemple. Il n'est pas dans l'habitude des élèves de donner une réponse approximative à une question au cours de mathématiques et encore moins de faire remarquer à l'enseignant qu'on ne peut trouver de réponse exacte à la question posée. Nous aurions en plus été confrontés à la difficulté d'interprétation d'une réponse donnée : celle-ci résulterait-elle d'un simple effet de contrat (Brousseau 1990) de type « âge du capitaine » (Baruk 1985) ou d'une véritable conviction de l'élève ? De plus, nous avons dû nous rendre compte que ces questions ne nous amenaient aucune information pour notre recherche et avaient déjà été traitées par Dirk De Bock et son équipe (2007).

Pour les situations de proportionnalité, nous commençons par une question très simple du type : « Une paire de ciseaux pèse 50 grammes. Quel est le poids de deux paires de ciseaux ? ». Ce genre de question nous permet de savoir si les élèves maîtrisent les règles de proportionnalité. De plus, elle met les élèves en confiance car ils sont généralement rebutés par les questions de type « problème ». Nous demandons effectivement aux élèves de justifier chacune de leur réponse de manière à pouvoir les interpréter le plus correctement possible.

Les situations inversement proportionnelles sont des situations classiques pour lesquelles les élèves appliquent régulièrement un raisonnement linéaire. Par exemple, ils sont nombreux à répondre « 3 » à la question suivante : « Avec une bouteille d'eau, je remplis 6 verres de 20 cl. Combien aurais-je pu remplir de verres de 10 cl ? ». Nous avons donc choisi de placer plusieurs de ces situations dans le pré-test.

Nous proposons également deux sortes de situations affines. La première est très fortement inspirée de Dirk De Bock (2007) et a été à la base du pré-test. Par exemple : « Sur une corde à linge, une chemise prend une heure pour sécher. Combien de temps faut-il pour faire sécher trois chemises placées les unes à côté des autres sur cette corde ? ». Ce genre de situation est la plupart du temps associée par les élèves à une situation de proportionnalité. La seconde sorte de situation affine est du type suivant : « Pierre est allé au cinéma. Sa place lui a coûté 6 €. Pendant l'entracte, il a acheté 3 friandises. Toutes les friandises coûtent le même prix. Sa sortie au cinéma lui a coûté en tout 12 €. Combien sa sortie au cinéma lui aurait-elle coûté s'il avait acheté 4 friandises ? »

À toutes ces questions s'en ajoute une qui n'est volontairement pas mise dans un contexte : « Un carré ABCD a une aire de 9 cm². Le côté d'un carré A'B'C'D' est 2 fois plus long que le côté du carré ABCD. Quelle est l'aire du carré A'B'C'D' ? ». Contrairement aux autres questions, celle-ci est plus spécifique à la *Math & Manip* proposée. En effet, il est question de la variation de l'aire d'un carré en fonction de son côté, problème de même type que la variation du volume du cylindre en fonction de son diamètre.

Il est intéressant de remarquer que la plupart des erreurs relevées dans les réponses des élèves proviennent en fait d'un raisonnement linéaire appliqué à une situation non proportionnelle. Nous appelons « erreur » les réponses qui proviennent d'un raisonnement inadapté. Une réponse fausse amenée par une erreur de calcul peut donc être considérée comme correcte si le raisonnement l'est.

2. Post-test

Dans le but de vérifier si les manipulations améliorent la pertinence des démarches des élèves, une première partie du post-test est composée de questions semblables à celles du pré-test.

Nous avons souhaité garder le même ordre dans les questions posées au pré-test et au post-test pour éviter que ce facteur puisse influencer les résultats.

La deuxième partie du post-test a, pour sa part, l'objectif d'évaluer les apprentissages liés à l'étude de la proportionnalité et de permettre ainsi une comparaison entre les *classes-tests* et *classes-témoins*.

Pour chacune des situations proposées, les élèves doivent dire s'ils se trouvent face à des situations de proportionnalité ou non et expliquer les raisons qui guident leur choix. Contrairement à la première partie du post-test, ce ne sont plus des énoncés de « problèmes », ce sont des situations présentées sous différentes formes : des tableaux, des graphiques, des situations géométriques, … Ces situations ainsi que leur présentation sont fortement inspirées d'une publication du CREM (2002).

Nous avons pris soin de présenter les tableaux sous différentes formes : verticale, horizontale ou encore comme dans la situation de la figure 6.

Situation 1

Agrandissements de photos

10 cm × 15 cm
13 cm × 18 cm
20 cm × 23 cm
30 cm × 45 cm
40 cm × 60 cm

Proportionnalité ou non-proportionnalité ?

car

Figure 6

3. *Expérimentation 2009-2010*

Tous les enseignants du premier degré secondaire [12-14 ans] d'une école ont accepté d'adhérer à notre projet. Seize classes ont donc fait partie du protocole d'expérimentation. Sur ces 16 classes, il y avait 8 premières années secondaires [12-13 ans] et 8 classes de deuxièmes [13-14 ans]. Nous avons de cette façon eu la possibilité d'avoir 4 *classes-tests* et 4 *classes-témoins* pour chacune de ces années.

Nous avons proposé à ces enseignants des séquences d'apprentissage complètes sur l'étude de la proportionnalité. L'une d'elles intègre la *Math & Manip* tandis que l'autre propose de réaliser une activité classique du manuel suivi par l'école. Cette activité fait intervenir des tableaux de nombres ainsi que des graphiques, tout comme dans la *Math & Manip*. De plus, nous avons proposé aux élèves des *classes-témoins* de réaliser les problèmes tout autant classiques de règle de trois issus du manuel. Ensuite nous avons complété les séquences d'apprentissage, tant pour les *classes-tests* que pour les *classes-témoins*, par une activité permettant de rencontrer une fonction affine ainsi qu'une autre travaillant les coefficients de proportionnalité.

Suite à un contretemps, le pré-test, initialement prévu un mois avant le début de l'implémentation des séquences d'apprentissage, n'a pu avoir lieu que le vendredi précédant ces séquences d'apprentissages. Deux semaines ont alors été consacrées à l'étude de la proportionnalité, suivant les séquences proposées. À la fin de ces deux semaines, le post-test a été passé par l'ensemble des élèves durant leur cours de mathématiques sous forme de test.

Un second post-test était envisagé mais n'a pas été réalisé, nous en reparlons ci-dessous.

4. *Problèmes rencontrés et décisions pour la seconde expérimentation*

Nous décrivons ci-dessous les constatations issues de cette première expérimentation ainsi que les changements qui ont été apportés pour la deuxième expérimentation.

Premièrement, le contretemps qui nous a contraints à faire passer le pré-test juste avant de commencer les expérimentations a engendré des difficultés pour exploiter les données de cette première expérimentation.

En effet, nous n'avons pas eu le temps d'analyser les réponses des élèves au pré-test et de vérifier la bonne répartition des *classes-tests* et *classes-témoins*. Nous avons dû nous fier aux enseignants qui nous ont dit avoir des classes de même niveau. Nous nous sommes donc basés sur une répartition des *classes-tests* et *classes-témoins* au sein des classes d'un même enseignant. Les pré-tests ont révélés par la suite que le niveau des *classes-témoins* était plus élevé que celui des *classes-tests*.

Cette différence de niveau au départ empêche d'analyser l'évolution des élèves à grande échelle. Nous avons dès lors abandonné l'idée du second post-test à long terme étant donné le peu d'informations que nous pourrions en retirer.

Néanmoins, nous comptons exploiter les données issues de cette première expérimentation en identifiant, par une méthode de clusters, des échantillons d'élèves ayant adopté un même comportement lors du pré-test dans les *classes-tests* et *classes-témoins*. Si la taille de ces échantillons est suffisamment significative, leurs résultats au post-test pourront être exploités.

Deuxièmement, lors des corrections des pré-tests, nous nous sommes rendus compte que l'ensemble des élèves de deuxième secondaire [13-14 ans] avaient un très bon niveau, tant dans les *classes-témoins* que dans les *classes-tests*. Nous avons alors décidé de centrer l'expérimentation de l'année suivante uniquement sur les élèves de première secondaire [12-13 ans].

Troisièmement, la confrontation des résultats des pré-tests et post-tests a mis en avant des comportements des élèves très différents face à des questions que nous pensions similaires. Nous avons alors décidé de vérifier l'équivalence des questions pour mettre ainsi au point un post-test dont les questions soient réellement équivalentes à celles du pré-test.

Plusieurs enseignants ont accepté de faire passer un questionnaire à leurs élèves, dans lequel les questions dont nous voulions tester l'équivalence ont été mélangées. Nous avons proposé ce questionnaire jusqu'à obtenir l'équivalence parfaite des questions du pré-test et du post-test pour la seconde expérimentation.

Par exemple, nous pensions les deux questions suivantes tout à fait semblables :

- Quatre amis achètent ensemble un gros paquet de chocolats. Cela leur revient à 2 € chacun. S'ils avaient été huit amis pour payer le même paquet de chocolats, combien paierait chaque ami ?
- Avec une bouteille d'eau, je remplis 6 verres de 20 cl. Combien aurais-je pu remplir de verres de 10 cl ?

Lorsque ces questions ont été présentées dans le test d'équivalence, nous nous sommes aperçus que les élèves ne les résolvaient pas de la même manière, ceci étant parfois dû à une mauvaise compréhension de la situation. Nous avons alors remplacé la première question par la suivante :

- Avec un gros sac de bonbons, j'ai pu faire 6 sachets de 300 grammes. Combien de sachets de 100 grammes aurais-je pu faire ?

Les tests qui ont suivis ont bien montré que la question portant sur la bouteille d'eau amenait les mêmes types de réponses (dans un même pourcentage) que celle-ci-dessus.

Les questions équivalentes à celles du pré-test ont donc été placées dans la première partie du post-test.

5. *Expérimentation 2010-2011*

Tous les enseignants de la première année du secondaire [12-13 ans] d'une seconde école ont accepté d'adhérer à notre projet. Nous avons ainsi eu 10 classes prêtes à suivre les séquences d'apprentissages que nous leur proposions. Sur ces 10 classes, 5 d'entre elles ont été *classes-témoins* et les 5 autres *classes-tests*.

Nous avons proposé aux enseignants, tout comme pour l'expérimentation précédente, des séquences d'apprentissage complètes sur l'étude de la proportionnalité : l'une d'elle intégrant la *Math & Manip*, l'autre proposant de réaliser les activités classiques issues du cours conçu par les enseignants de l'école. Les séquences d'apprentissage comportent, tant pour les classes témoins que pour les classes tests, un travail sur les coefficients de proportionnalité.

Le pré-test nous a assuré que les élèves avaient des niveaux équivalents. Bien que le cours des enseignants était d'avance bien construit et intégrait notamment des situations de non-proportionnalité, nous avons préféré attribuer le rôle de *classe-test* à l'ensemble des classes de deux enseignants et celui de *classe-témoin* aux classes des deux autres enseignants. Ces derniers n'ont ainsi pas été du tout au courant de la *Math & Manip* proposée afin de ne pas influencer leur cours témoin.

Les deux semaines consacrées aux séquences d'apprentissage sur la proportionnalité ont été clôturées par le premier post-test dont l'équivalence des questions avec celles du pré-test avait été assurée auparavant. Les élèves ont répondu au second post-test destiné à comparer leurs apprentissages à long terme au mois de juin 2011.

V. RÉSULTATS

Une des questions de recherche concerne l'apport de situations de non-proportionnalité dans l'étude de la proportionnalité. L'expérimentation de cette année scolaire 2010-2011 ne nous donne pas de réponse étant donné que les élèves des *classes-témoins* ont également été confrontés à ces deux types de situations. Par contre, la première expérimentation (2009-2010) nous fournit des données. Les analyses doivent encore être réalisées après avoir sélectionné les échantillons d'élèves adoptant un même comportement face à une sélection de questions.

Les *classes-témoins* de l'expérimentation de l'année scolaire (2010-2011) ayant reçu un cours dans lequel les situations de non-proportionnalité étaient présentes nous permettent d'isoler l'étude de l'apport des manipulations quant à la pertinence des démarches des élèves face à des questions de mathématiques mobilisant le sens commun. L'évolution des comportements des élèves vis-à-vis des questions du pré-test à celles du post-test doit encore être établie. Les premiers résultats seront présentés lors du colloque.

L'impact des manipulations ne sera pas nécessairement visible autant que ce que nous espérons. En effet, les élèves des *classes-tests* n'auront qu'une seule *Math & Manip* à leur actif or nous pensons que c'est à long terme, en réalisant des manipulations régulièrement au cours des années, que la réflexion peut s'améliorer.

La dernière question de recherche est centrée sur l'apport des manipulations pour les connaissances à long terme. Le second post-test, réalisé en juin 2011, permettra de donner des éléments de réponse.

Les analyses étant en cours, nous présenterons l'ensemble des résultats en février 2012, lors du colloque.

RÉFÉRENCES

Artigue M. (1989) Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 9(3), 281-308.

Baruk S. (1985) *L'âge du capitaine : de l'erreur en mathématiques*. Paris : Seuil.

Borel É. (1904) *Les exercices pratiques de mathématiques dans l'enseignement secondaire*. Conférence prononcée le 3 mars 1904, Musée Pédagogique, Paris. http://smf.emath.fr/Publications/Gazette/2002/93/smf_gazette_93_47-64.pdf

Brousseau G. (1989) Obstacles épistémologiques, conflits socio-cognitifs et ingénierie didactique. In Bednarz N., Garnier C. (Eds.) (pp. 277-285) *Construction des savoirs – Obstacles et conflits*. Montréal : CIRADE Les éditions Agence d'Arc inc.

Brousseau G. (1990) Le contrat didactique : le milieu. *Recherches en didactique des mathématiques* 9(3), 309-336.

Brousseau G. (1998) *La théorie des situations didactiques*. Recueil de textes de Didactique des mathématiques 1970-1990 présentés par N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland et V. Warfield. Grenoble : La Pensée Sauvage.

CREM (2002) *Des grandeurs aux espaces vectoriels, la linéarité comme fil conducteur.* Nivelles : Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques.

De Bock D., Van Dooren W., Janssens D., Verschaffel L. (2007) *The illusion of linearity. From analysis to improvement*. New-York : Springer.

Dias T., Durand-Guerrier V. (2005) Expérimenter pour apprendre en mathématiques. *Repères-IREM* 60, 61-78.

Duval R. (1993) Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 5, 37-65.

Giordan A., De Vecchi G. (1987) *Les origines du savoir*. Neuchâtel : Delachaux.

Guissard M.-F., Henry V., Agie S., Lambrecht P. (2010) Math & Manips. *Losanges* 7, 39-46.

Guissard M.-F., Henry V., Lambrecht P., Vansimpsen S. (À paraître) Compte-rendu de l'atelier *Math & Manips* : l'apport des manipulations à la confrontation des modèles linéaire et non linéaires. In *Actes du Colloque de la CII-Collège 2010*. Orléans.

LA DÉMARCHE D'INVESTIGATION, LES MATHÉMATIQUES ET LES SVT : DES PROBLEMES DE DEMARCATION AUX RAISONS D'UNE UNION

Magali HERSANT* – Denise ORANGE-RAVACHOL*

Résumé – En France, les programmes d'enseignements récents de mathématiques, de sciences et de technologie promeuvent l'engagement des élèves de l'école et du collège dans des démarches d'investigation contribuant à l'appropriation de compétences communes. Comment est-il possible qu'une même démarche réunisse à la fois les mathématiques et les sciences ? Notre communication montre que les différences entre les disciplines pointées par l'institution (l'expérimentation, les modalités de validation) font problème. Elle étudie la possibilité de réunir ces disciplines en considérant la construction des savoirs qu'elles opèrent comme des problématisations.

Mots-clefs : démarche d'investigation, mathématiques, problématisation, sciences de la vie et de la Terre

Abstract – In France, the recent curriculum for mathematics, sciences and technology have been promoting the commitment of the pupils of the school and the middle school in "demarche d'investigation" whose goal is to contribute to the appropriation of shared skills. How can a unique approach combine both Mathematics and sciences? In this contribution, we explain how differences brought into light by the institution (experiment, modalities of validation) raise problem. We study the way of combining these disciplines by considering the construction of the knowledge that they operate as "problématisations".

Keywords: inquiry based learning, mathematics, problematisation, Earth and life science

I. INTRODUCTION

Dans l'enseignement en France (primaire ou secondaire), on assiste actuellement à une volonté institutionnelle de rapprocher les mathématiques et les sciences (SVT, sciences physiques et chimie, technologie). Ce rapprochement se concrétise, en particulier, dans les récents programmes d'enseignement du collège (MEN 2008) dont l'introduction est commune à toutes ces disciplines, dans le socle commun de connaissances et de compétences (MENESR 2006) où la compétence 3[1] les réunit explicitement, enfin dans une modalité pédagogique commune, la démarche d'investigation, à partir de laquelle il s'agit d'élaborer des savoirs, de les mettre en texte et d'acquérir des compétences.

Pourtant, en raison des histoires différentes de ces disciplines et des problèmes qu'elles étudient, un tel rapprochement n'a rien d'évident, comme le soulignent de nombreux auteurs, en particulier Vandebrouck, de Hosson et Robert (2010). Il est donc essentiel de se demander de quel(s) point(s) de vue et à quelles conditions il est possible de penser une modalité pédagogique qui leur serait commune.

Dans cette communication, nous avons choisi de travailler ces questions en nous focalisant sur les mathématiques et les sciences de la vie et de la Terre. Nous situons notre réflexion dans le cadre théorique de la problématisation (Fabre et Orange 1997). Après avoir rappelé les origines de la démarche d'investigation, nous mettons en question certains de ses éléments constitutifs qui semblent fortement distinguer les mathématiques et les sciences[2] : il s'agit de

* IUFM des Pays de la Loire, CREN, Université de Nantes – France – magali.hersant@univ-nantes.fr, denise.orange@univ-nantes.fr

[1] Les principaux éléments de mathématiques et la culture scientifique et technologique.

[2] Dans les programmes de l'école primaire (cycle des approfondissements), les sciences de la vie et de la Terre et les sciences physiques sont réunies sous la dénomination de sciences expérimentales (MENESR 2008). Elles

© Hersant M., Orange-Ravachol D. (2012) La démarche d'investigation, les mathématiques et les SVT : des problèmes de démarcation aux raisons d'une union. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT10, pp. 1378–1388). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

la question de l'expérience et de celle de la validation. Puis, nous interrogeons le rapport qu'entretiennent les mathématiques et les sciences de la vie et de la Terre avec les logiques du possible et du nécessaire, du vrai et du faux et la question de la nécessité. Cela nous permet de donner à voir une façon de considérer autrement, voire de dépasser, certaines de leurs oppositions.

II. DEMARCHE D'INVESTIGATION EN MATHEMATIQUES ET EN SVT : DES POINTS CRITIQUES

La démarche d'investigation (DI) qui figure dans les actuels programmes français d'enseignement des mathématiques et des sciences, à l'école et au collège peut être mise en perspective de l'« Inquiry Based Learning » (IBL) qui s'est imposé dans les textes institutionnels de plusieurs pays anglo-saxons. Elle est introduite à l'école primaire en 2002 (MEN 2002) et en 2004 dans les programmes de collège (MEN 2004) et elle « *apparaît comme un nouveau sésame pour l'enseignement des sciences, en privilégiant la construction de savoir par l'élève, sans faire référence à un modèle pédagogique ou une théorie de l'apprentissage* » (Coquidé, Fortin et Rumelhard 2009, p. 55).

Dans les pays anglo-saxons et le nord de l'Europe, l'Inquiry-Based Science Education (IBSE) représente une modalité d'enseignement considérée comme motivante pour les élèves :

> As faculty, we engage ourselves in inquiry throughout our academic careers when we explore questions and try to make sense out of what is going on in our fields. My guess is that most of us chose our field of study because one question, somewhere along the way, peeked our curiosity and motivated us to find an answer. A common question asked by faculty is, "How can I motivate my students' interest and get them excited about the subject they are studying?" One way to do this is to give your students inquiry-based assignments and activities that are relevant to their lives and future careers and give them the opportunity to engage in course concepts and tasks. After reading the next few pages, you will learn more about inquiry-based learning (IBL) and along with some tips on effectively integrating IBL into your course. (Lane 2007, http://www.schreyerinstitute.psu.edu/pdf/ibl.pdf)

Au niveau européen, le rapport Rocard (Rocard et al. 2007), qui fournit des recommandations pour ranimer l'enseignement des sciences en Europe, reprend l'idée d'investigation. L'*Inquiry Based Science Education* (IBSE) est alors présentée comme un rempart contre la désaffection des études scientifiques et mathématiques par les jeunes dans la mesure où elle permet un enseignement basé sur une approche inductive, moins abstraite et plus attrayante que l'approche déductive jusqu'alors utilisée (ibid p. 9) :

> [Dans l'approche déductive] le professeur présente les concepts, leurs implications logiques (déductives) et donne des exemples d'applications. Cette méthode est aussi désignée sous le nom de « transmission descendant ». Pour fonctionner, les enfants doivent être capables de manipuler des notions abstraites, d'où la difficulté à commencer l'enseignement des sciences avant l'enseignement secondaire. Par opposition, la seconde approche a longtemps été désignée en tant qu'approche « inductive ». Cette approche laisse plus de place à l'observation, à l'expérimentation et à la construction par l'enfant de ses propres connaissances sous la conduite du professeur. Cette approche est aussi qualifiée d'« approche ascendante ».
>
> Au fil des années, la terminologie a évolué et les concepts se sont affinés. À l'heure actuelle, l'approche inductive est le plus souvent désignée en tant qu'enseignement des sciences basé sur la démarche d'investigation (IBSE) *et porte essentiellement sur l'enseignement des sciences de la nature et de la technologie.*
>
> Par définition, une investigation est un processus intentionnel de diagnostic des problèmes, de critique des expériences réalisées, de distinction entre les alternatives possibles, de planification des recherches,

---

sont parties prenantes des disciplines scientifiques et technologiques dans la présentation de la démarche d'investigation de l'introduction commune des programmes du collège (MEN 2008).

de recherche d'hypothèses, de recherche d'informations, de construction de modèles, de débat avec des pairs et de formulation d'arguments cohérents (Linn, Davis et Bell 2004)

Au regard des préconisations institutionnelles (françaises, anglo-saxonnes) et des rapports internationaux, force est de constater que démarche d'investigation et *Inquiry-based Science Education* ne sont pas totalement équivalentes. Pour Coquidé et al. (2009, p. 57), la démarche d'investigation promue par les programmes français ne se limite pas à une démarche inductiviste. Elle est « *plus centrée sur la démarche expérimentale et le recours à la situation - problème avec développement d'un raisonnement hypothético-déductif* » et semble donc plus restrictive que l'ISBE. Cette focalisation de la démarche d'investigation sur l'expérimental nous intéresse. Nous y trouvons une entrée pour questionner la pertinence d'en faire une démarche commune dans l'enseignement des mathématiques et des sciences, les sciences de la vie et de la Terre en particulier.

1. L'expérience comme démarcation entre les mathématiques et les sciences ?

La première démarcation, et la principale, concerne la place attribuée à l'expérience et à l'expérimentation en mathématiques et en sciences.

Dans le rapport Rocard (2007, p. 9), il est en effet précisé d'emblée que l'enseignement des sciences basé sur la DI, prise comme synonyme d'IBSE, concerne essentiellement les sciences de la nature et la technologie. Voici l'opposition qui est alors faite entre d'une part, le fonctionnement des sciences et de la technologie et, d'autre part, celui des mathématiques.

Sciences et technologie (DI ou IBSE)	Mathématiques (PLB)
« Par définition, une investigation est un processus intentionnel de diagnostic des problèmes, de critique des **expériences**[3] réalisées, de distinction entre les alternatives possibles, de planification des recherches, de recherche d'hypothèses, de recherche d'informations, de construction de modèles, de débat avec des pairs et de formulation d'arguments cohérents (Linn, Davis, et Bell, 2004). (…) L'enseignement des sciences basé sur l'investigation constitue une approche basée sur les problèmes, mais avec une dimension supplémentaire étant donné l'importance accordée à **l'approche expérimentale**. » (Rapport Rocard, p. 9)	« En ce qui concerne l'enseignement des mathématiques, la communauté éducative préfère parler «d'apprentissage basé sur les problèmes» (PBL) plutôt que d'IBSE. En réalité, l'enseignement des mathématiques peut facilement utiliser une approche basée sur les problèmes alors que, dans de nombreux cas, **l'approche expérimentale** s'avère plus difficile. » (Rapport Rocard, p. 9)

Dans l'introduction de la démarche d'investigation des programmes du collège, c'est une démarcation par l'expérimentation qui place d'un côté les mathématiques et les sciences expérimentales de l'autre.

> Une éducation scientifique complète se doit de faire prendre conscience aux élèves à la fois de la proximité de ces démarches (résolution de problèmes, formulation respectivement d'hypothèses explicatives et de conjectures) et des particularités de chacune d'entre elles, notamment en ce qui concerne la validation, par **l'expérimentation**[4] d'un côté, par la démonstration de l'autre.

L'expérience, l'expérimental, l'expérimentation n'auraient donc de sens que pour les disciplines scientifiques. Cela appelle des clarifications et des discussions.

[3] Surligné par nous.
[4] Surligné par nous.

Considérons d'abord les choses du point de vue des mathématiques. La conception des mathématiques qui sous-tend cette remarque correspond-t-elle à une conception pythagoricienne que Russel caractérise bien (cité dans Chouchan 1999, p. 20) ?

> Loin des passions humaines, loin même des faits pitoyables de la nature, les générations ont progressivement crée un cosmos ordonné, où la pensée pure peut habiter comme sa demeure naturelle, et où l'une, au moins, de nos plus nobles aspirations peut échapper au sombre exil du monde réel. […] Les mathématiques nous entraînent […] loin de l'humain, dans le domaine de la nécessité absolue, à laquelle obéissent non seulement le monde réel, mais tous les mondes possibles.

On peut en douter, même si dans les programmes de mathématiques l'idée de rigueur et de raisonnement est plus présente que celle de réalité lorsqu'il est question de résolution de problème. Ainsi, dans les programmes du cycle 3 on peut lire :

> L'apprentissage des mathématiques développe l'imagination, la rigueur et la précision ainsi que le goût du raisonnement.

Est-on alors en présence d'une conception étroite de l'idée d'expérience ? Ne peut-on parler d'expérience en mathématiques qu'à partir du moment où l'on utilise un ordinateur pour calculer ou faire de la géométrie dynamique ? Que lorsqu'on réalise effectivement un découpage comme dans la situation du puzzle de Brousseau (1998) ? Faire des calculs à la main avec l'objectif de dégager une conjecture n'est-ce pas aussi réaliser une expérience ? Les propos de mathématiciens autorisent une conception plus large de l'expérience, associée systématiquement à la résolution de problèmes. Ainsi, D. Perrin écrit : « la méthode expérimentale est universelle en mathématiques, qu'elles soient appliquées ou non » (Perrin 2007, p. 4) et précise que l'expérience est le premier pas de cette méthode (id., p. 8). J.-P. Allouche (2007) considère, quant à lui, que l'expérience, qui peut être de différents types, n'est pas suffisamment reconnue en mathématiques, même si les choses changent :

> Dans leurs articles les mathématiciens cachent le plus souvent leurs démarches expérimentales, comme s'il s'agissait de quelque chose d'inavouable. La tendance « bourbakisante » (du nom de cet auteur collectif de traités mathématiques quasi-définitifs) consiste, lors de la rédaction d'un article de recherche pour une revue spécialisée, à taire les pistes qui n'ont pas abouti, les hésitations ou les expérimentations fécondes ou cruciales. La ``bonne'' manière de rédiger consiste à enchaîner linéairement les lemmes, propositions, théorèmes et corollaires. Même les intuitions sont le plus souvent tues, voire soigneusement dissimulées. Au mieux donnera-t-on un exemple pour ses qualités pédagogiques supposées, avec la peur d'écrire ainsi des choses trop « faciles ».

Les ressources pour les classes de 6^{e}, 5^{e}, 4^{e}, 3^{e} du collège « raisonnement et démonstration » (MEN 2009) adoptent d'ailleurs un point de vue moins étriqué (ou plus ambitieux ?). Il y est effet question d'expérimentation dans le cadre de la DI, et, dans les exemples donnés, les expérimentations sont de différents types.

Prenons maintenant le point de vue des sciences de la nature. Dans leur tentative d'expliquer le monde et de se démarquer des mythes, elles accordent, selon Jacob, une large place à l'imagination tout en la mettant sous le contrôle de la critique et de l'empirie (observation, expérimentation). Voici ce qu'il écrit (Jacob 1981, p. 30).

> Pour la pensée scientifique, au contraire[5], l'imagination n'est qu'un élément du jeu. A chaque étape, il lui faut s'exposer à la critique et à l'expérience pour limiter la part du rêve dans l'image du monde qu'elle élabore.

Cette façon de penser le contrôle par l'expérience du fonctionnement des sciences de la nature prête cependant à discussion dès lors que nous considérons les sciences de la vie et de la Terre. Ces sciences, en effet, conjuguent une dimension fonctionnaliste et une dimension historique (Mayr 1989 ; Gould 1991/1989) La biologie étudie le fonctionnement des êtres

[5] Au contraire du mythe.

vivants et reconstitue leur histoire évolutive ; la géologie se préoccupe d'expliquer le fonctionnement actuel de la Terre et elle tente de reconstituer son passé. Au regard de la dimension historique de ces sciences, la mise en jeu de l'expérimentation, vue comme un processus dans lequel prennent place des expériences, trouve ses limites. Gould (1991, p. 308) est formel :

> Dans de nombreux domaines – la cosmologie, la géologie, et l'évolution, entre autres -, les phénomènes naturels ne peuvent être élucidés qu'avec les outils de l'histoire. Les méthodes appropriées relèvent dans ce cas de la narration, et non pas de l'expérimentation.

Nous devons ajouter que même au regard de la dimension fonctionnaliste des sciences de la vie et de la Terre, il est difficile d'ancrer systématiquement et uniquement l'investigation sur des expériences, en écologie par exemple. Cela tient à leur objets d'étude (l'expérimentation sur l'homme pose des problèmes éthiques) et aux temporalités de certains phénomènes biologiques (certaines expériences auraient une durée très importante).

C'est dire au terme de cette brève étude épistémologique que l'expérimentation ne peut pas constituer une façon de caractériser les sciences de la vie et de la Terre. Elle ne peut pas non plus asseoir une distinction entre les mathématiques et ces sciences.

2. *Les modalités de validation comme démarcation entre les mathématiques et les sciences ?*

Dans la présentation de la démarche d'investigation dans les programmes du collège (MEN 2008), il est une deuxième démarcation entre les mathématiques et les sciences qui est pointée. Elle porte sur le mode de validation des hypothèses, qui serait sous le joug de la démonstration pour les premières, et sous celui de l'expérimentation pour les secondes.

> La démarche d'investigation présente des analogies entre son application au domaine des sciences expérimentales et à celui des mathématiques. La spécificité de chacun de ces domaines, liée à leurs objets d'étude respectifs et à leurs méthodes de preuve, conduit cependant à quelques différences dans la réalisation. Une éducation scientifique complète se doit de faire prendre conscience aux élèves à la fois de la proximité de ces démarches (résolution de problèmes, formulation respectivement d'hypothèses explicatives et de conjectures) et des particularités de chacune d'entre elles, notamment en ce qui concerne la **validation**[6], par l'expérimentation d'un côté, par la démonstration de l'autre. [...]

Cet extrait appelle deux remarques. D'abord, il serait abusif de dire qu'en sciences l'expérimentation valide, au sens qu'elle rendrait vraie telle hypothèse. Comme l'indique Popper (1973), tout au plus, elle réfute. Une hypothèse ne peut être vérifiée par une expérience ou un test. Si l'hypothèse passe avec succès l'expérience cela ne signifie pas qu'elle est vraie mais, simplement qu'elle est corroborée par l'expérience. Rien n'indique qu'un jour une autre expérience ne l'invalidera pas.

Ensuite, curieusement, en mathématiques, dans certains cas, l'expérience valide la conjecture. Supposons en effet que l'on cherche à placer le plus de points possibles sur les nœuds d'une grille de 5 lignes et 5 colonnes sans en aligner trois (problème « Pas trois points alignés », voir Hersant 2010) et qu'au bout d'un certain temps on est convaincue qu'on peux en placer 10. La conjecture est validée dès lors que, avec les essais, on réussit à placer 10 points. Exhiber un tel exemple constitue bien une démonstration mais elle est fondamentalement empirique et ne correspond pas au sens le plus souvent attribué à la démonstration au collège, le raisonnement hyopthético-déductif mobilisant un théorème. Bien entendu, en mathématiques, pour montrer une proposition universelle, la corroboration par l'expérience ne suffit pas, il faut une preuve d'un autre type, comme l'indique Poincaré à propos de la preuve par récurrence :

---

[6] Surligné par nous.

> […] ce que l'expérience pourrait nous apprendre, c'est que la règle est vraie pour les dix, pour les cent premiers nombres par exemple, elle ne peut atteindre la suite indéfinie des nombres, mais seulement une proportion plus ou moins longue mais toujours limitée de cette suite. (Pointcarré 1968, p. 41)

Ainsi, l'opposition entre une validation par l'empirie expérimentale du côté des sciences et une validation par la démonstration du côté des mathématiques n'est pas satisfaisante. Elle donne à voir une approche étroite et discutable du fonctionnement des sciences. Elle ne constitue pas une démarcation étanche entre les mathématiques et les sciences. Devant de tels constats et de telles difficultés d'appréhender les spécificités des démarches d'investigation dans ces disciplines, nous faisons le choix d'étudier cette question en considérant le travail des problèmes mathématiques et scientifiques scolaires comme des problématisations.

III. L'INVESTIGATION COMME UNE PROBLEMATISATION : UNE MANIERE DE REUNIR LES MATHEMATIQUES ET LES SCIENCES

1. *La problématisation et les espaces des contraintes en mathématiques et en sciences*

Le cadre théorique de la problématisation (Fabre et Orange 1997), développé à l'origine dans le champ de la SVT et fortement bachelardien, met au cœur de la construction des savoirs scientifiques la co-construction et l'articulation d'un registre empirique et d'un registre des nécessités. Dans le prolongement des remarques critiques que nous avons formulées précédemment, nous proposons ici, à partir de l'étude de deux cas, de montrer en quoi ce processus de problématisation, c'est-à-dire le processus à l'œuvre entre le problème perçu et la construction de nécessités contraignant les solutions de ce problème, peut constituer un point commun à une démarche de « recherche » de problèmes en mathématiques et en SVT.

Pour cela nous utiliserons des schémas synoptiques de type espaces de contraintes proposés par Orange (2001). Ces schémas représentent ce qui se joue dans le travail d'un problème en termes de construction et de mise en tension dynamique de contraintes empiriques et théoriques. Cela débouche sur la mise au jour de nécessités auxquelles les solutions du problème doivent se conformer. Dans un tel processus, où des explications possibles sont explorées, des impossibilités et/ou des nécessités fonctionnelles établies, les débats avec toute leur charge argumentative sont de grande importance. Pour Orange en effet, la construction d'un espace des contraintes :

> c'est une mise en ordre des différents éléments problématisants qui sont apparus au cours de ce débat, d'une manière très implicite et même souvent inconsciente pour les élèves. Mais si ces éléments correspondent bien à des idées et des arguments produits par les élèves, il est clair qu'ils ont subi un filtre épistémologique, d'une part par la conduite du débat par le maître et, d'autre part, par l'interprétation que nous avons faite des propositions. Mais nous faisons l'hypothèse que cet espace a une valeur qui dépasse le cas étudié. D'une part car il gomme l'aspect chronologique de ce débat particulier au profit des relations logiques. D'autre part parce que, selon le principe de toute étude qualitative, nous pensons que ce cas fait sens. Et enfin parce que tout ou partie de cet espace se retrouve dans d'autres débats sur ce sujet, avec des élèves d'âge comparable. (Orange 2001, pp. 72-73)

Voyons sur deux exemples, le premier en mathématiques (cycle 3 de l'école), le second en sciences de la Terre (classe de quatrième du collège), comment se déploie ce processus de problématisation.

2. *L'exemple de la recherche d'un problème d'optimisation au cycle 3 (mathématiques, élèves de 9 à 11 ans)*

Dans le cadre d'une ingénierie didactique sur les problèmes pour chercher (MEN 2002) au cycle 3 de l'école élémentaire, nous avons proposé aux élèves de chercher, et si possible résoudre, des problèmes d'optimisation discrète (Hersant et Thomas 2009 ; Hersant 2010).

Notre objectif avec ces problèmes était de leur permettre de construire des savoirs sur la façon dont interviennent le registre empirique et le registre des nécessités dans la preuve du possible et de l'impossible en mathématiques. Une étude préalable concernant la résolution de problèmes d'impossible ayant montré la prégnance de l'empirisme à ce niveau de scolarité, nous avons en particulier travaillé sur cet aspect (Hersant 2010).

Au cours de cette recherche, nous avons montré que les problèmes d'optimisation discrète remplissent des conditions importantes pour construire ces savoirs en préservant une part d'adidacticité. Nous avons donc développé des situations didactiques dans ce champ. Le problème « Pas trois points alignés » énoncé précédemment (§ II 2) est l'un de ceux utilisés dans l'ingénierie. Dans le cas d'une grille de 5 lignes et 5 colonnes, le nombre maximum de points que l'on peut placer est 10. Pour le montrer, il faut utiliser des éléments qui relèvent du registre empirique et des éléments qui relèvent du registre des nécessités. Il faut en effet, d'une part, trouver une disposition de 10 points sur une grille 5x5 (il y en a plusieurs possibles) pour montrer qu'on peut placer 10 points sans en aligner 3 et, d'autre part, utiliser un raisonnement pour monter qu'il est impossible de placer 11 points (ou plus) sans en aligner trois.

Nous avons proposé ce problème à plusieurs reprises à des classes de cycle 3 avec le déroulement suivant. D'abord, une feuille avec plusieurs grilles de 5 lignes et 5 colonnes est donnée à chaque élève, la consigne est la suivante : « place le plus possible de points sur les nœuds de la grille sans en avoir trois alignés ». Cette première phase, dite d'énumération, vise à permettre une recherche empirique individuelle. Puis, lorsque la recherche empirique s'épuise et que les élèves n'arrivent pas à faire mieux, l'enseignant demande aux groupes d'élèves de faire une affiche avec une des meilleures solutions du groupe. Une vérification collective permet de dégager les « meilleures » productions au niveau de la classe. Il s'agit alors de faire basculer les élèves vers la recherche d'arguments qui permettent d'être sûr qu‘il s'agit effectivement du mieux qu'on puisse faire (avec l'idée qu'on est sûr que jamais personne ne fera plus) ou de savoir qu'une valeur (par exemple 26 ou 11 pour une grille 5 x 5) est impossible. Dans ce dernier cas, on cherche, bien entendu, à réduire autant que possible l'intervalle d'indétermination.

La représentation sous la forme d'espace de contraintes des raisonnements des élèves au cours de la recherche/résolution de ce problème (figure 1) met bien en évidence que, dans ces problèmes, la preuve et les nécessités mathématiques se dégagent d'une tension entre le registre empirique et le registre des raisons.

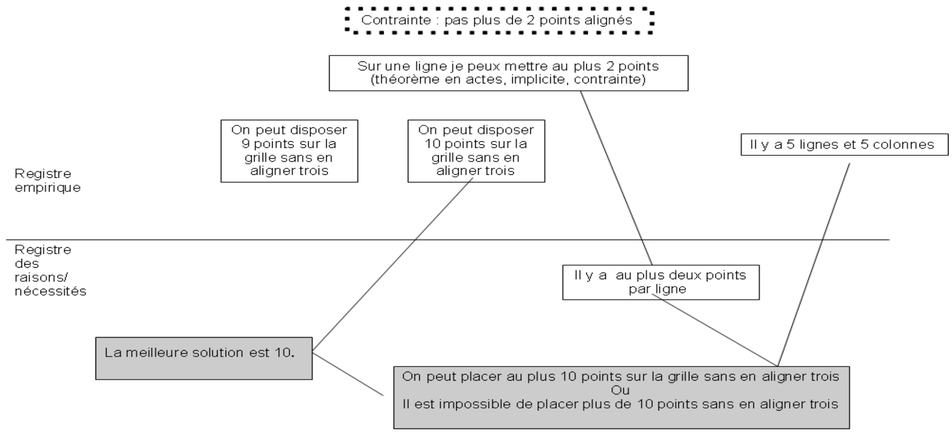


***Figure 1** – Espace de contraintes pour le problème « Pas trois points alignés » au cycle 3*

3. *L'exemple de la formation d'une chaîne de montagnes en 4ème (sciences de la Terre, élèves de 13-14 ans)*

Le problème historique de la formation d'une chaîne de montagne de collision (la chaîne alpine, la chaîne himalayenne) est travaillé en classe de quatrième (élèves de 13-14 ans) et en classe de terminale scientifique. C'est au niveau quatrième que nous le prenons ici en compte, avec 25 élèves ayant en charge d'expliquer comment s'est formée une chaîne de montagnes telle que l'Himalaya, devant fournir, individuellement puis en groupe, une réponse sous la forme d'un texte et de schémas qu'ils confronteront ensuite à celles des autres de la classe.

Les programmes de SVT de ce niveau (2008, p. 25) demandent que les élèves s'inscrivent dans le cadre de la théorie de la tectonique des plaques et apprennent que « la collision des continents engendre des déformations et aboutit à la formation de chaînes de montagnes ». Les ressources pour la mise en œuvre des programmes font référence aux méthodes du géologue, dont l'usage de l'actualisme réduit à ses aspects analogiques, c'est-à-dire à son niveau peu élaboré (Orange-Ravachol 2003).

En référence aux travaux des géologues, aux intentions de l'enseignant et aux documents qu'il prévoit d'utiliser, l'espace des contraintes dont les élèves pourraient s'emparer devrait s'apparenter à celui que nous présentons dans la figure 2 (Orange-Ravachol 2010). Il s'agit de construire la nécessité de plusieurs phénomènes (la formation de roches magmatiques dans un contexte océanique de divergence de plaques, la compression de formations rocheuses et la surrection de reliefs dans un contexte de convergence de plaques) et celle d'un changement de régime des mouvements des plaques.

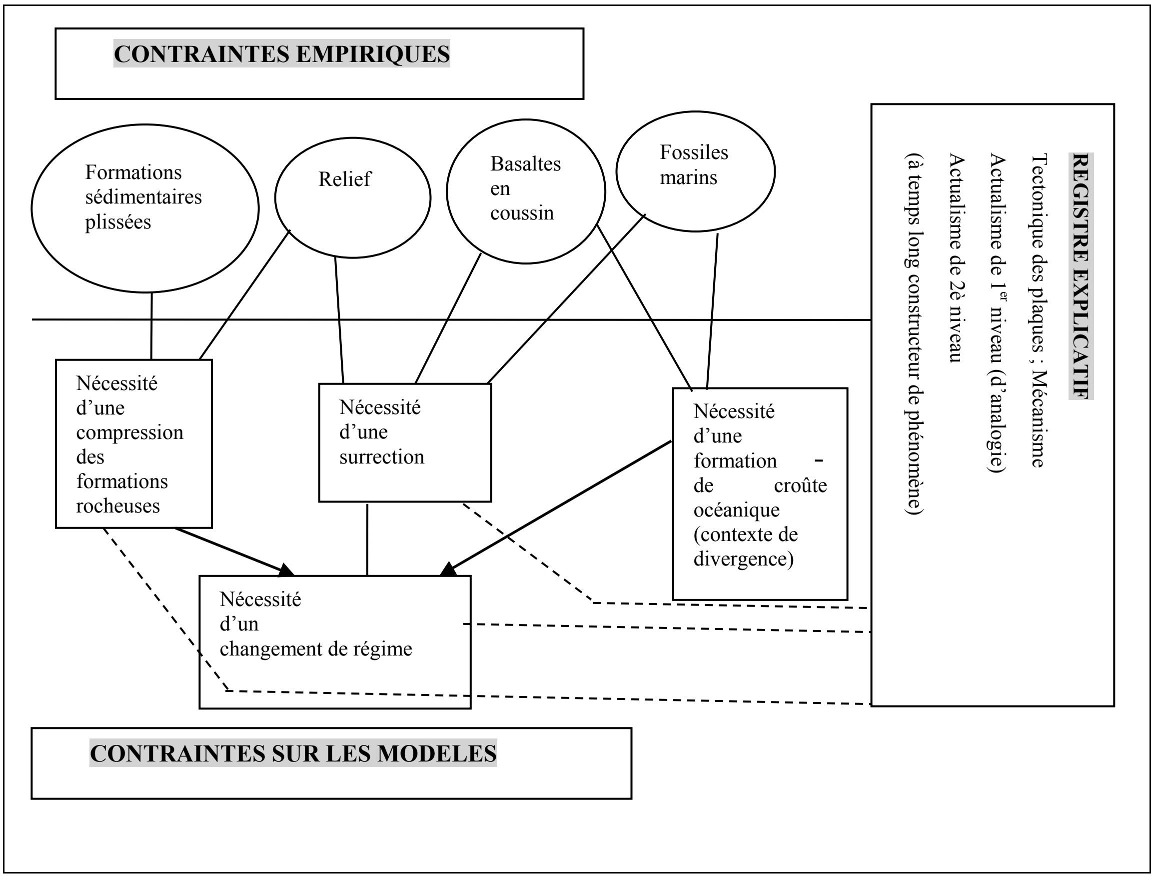


Figure 2 *– Espace des contraintes envisageable au niveau quatrième (13-14 ans) pour le problème de la formation d'une chaîne de montagnes intracontinentale*

Cette problématisation est complexe parce qu'elle construit la nécessité de phénomènes dont les temporalités dépassent largement le temps humain et qu'il paraît difficile de l'adosser à de l'expérimentation. Le risque est alors grand chez les élèves (et chez les enseignants) de cantonner l'explication à une petite histoire faites d'épisodes contingents (ils pourraient être autres) et s'enchaînant dans un syncrétisme de temps et de causalité. La mobilisation du principe de l'actualisme est déterminante pour le contrer. Ce principe repose sur l'idée *« que les causes qui ont agi au long de l'histoire de la Terre ne diffère point essentiellement des causes géologiques actuelles*[7] *(érosion, transport, sédimentation, métamorphisme, volcanisme, plissement et soulèvement des montagnes) »* (Gohau 1997, p. 140). Il assure un rôle structurant (Orange Ravachol et Beorchia 2007, 2011) dans la co-construction des contraintes et permet ainsi la construction d'un savoir scientifique raisonné.

Il paraît donc possible de réunir les mathématiques, ou tout au moins une partie des mathématiques[8], et les sciences de la Terre en assimilant leurs démarches à des problématisations lors desquelles se co-construisent des contraintes et des nécessités contraignant la ou les solutions des problèmes. L'investigation contribue non seulement à la production d'une réponse, elle permet de dégager ce qui fait que cette réponse est telle et pas autre. Le savoir mathématique comme le savoir scientifique gagnent en apodicticité.

[7] « actuelle » est ici pris dans sa signification française.
[8] Par exemple, un des aspects de l'enseignement des mathématiques concerne l'apprentissage de conventions et apparaît plus éloigné des questions de problématisation.

4. *Un autre point de convergence, masqué : la relativité de la vérité*

Revenons sur les deux exemples proposés pour tenter d'aller plus avant dans notre réflexion. Concevoir les démarches d'investigation comme des problématisations positionne sur le possible, l'impossible et le nécessaire. Qu'en est-il alors de ce qui relève de la validité du résultat obtenu ?

Dans le cas du problème de mathématiques, deux propriétés sont indispensables pour conclure : trois points appartenant à une même droite sont alignés, deux points sont toujours alignés. La première est une forme de tautologie, la seconde renvoie à l'axiome des « deux points » de la géométrie euclidienne (par deux points distincts il passe une et une seule droite). Ces éléments restent, le plus souvent, implicites dans la conclusion du problème dans les classes : il y a un accord tacite sur des conventions partagées au sein de la classe. La plupart des élèves considèrent ces conventions comme des vérités inébranlables dans la mesure où elles sont cohérentes avec leur expérience, même si, vraisemblablement, certains élèves questionnent ces aspects. C'est le cas, par exemple, de cet élève de CM2 qui s'étonne à voix haute à la fin de la séquence : « alors, ça veut dire que deux points sont toujours alignés, même s'il y a en un sur la Terre et un sur la Lune ! ». Pourtant, comme l'indique Bourbaki (1969, p. 27) à propos des géométries non euclidienne, il s'agit (seulement) de « vérités mathématiques »[9] et en ce sens elles ont une sorte de relativité et dépendent de la théorie dans laquelle on se place.

En SVT, nous étudions depuis déjà quelques temps les relations qu'entretient la problématisation, qu'elle soit fonctionnaliste ou historique, avec le faux et le vrai (Orange Ravachol 2008). A première vue, pour le problème de la formation d'une chaîne de montagnes par exemple, le vrai et le rendre vrai (la vérification) n'y prennent pas de sens, le fonctionnement du monde naturel reposant avant tout sur un monde explicatif possible situé théoriquement (dans l'exemple étudié, il s'agit de la tectonique des plaques). Mais à y regarder de plus près, ils reviennent d'une autre manière. Le vrai porterait fondamentalement sur les principes qui structurent la construction de nécessités auxquelles sont assujetties les solutions (les modèles explicatifs) recherchées, ce que nous appelons des principes structurants (Orange Ravachol et Beorchia 2007, 2011). Une fois les nécessités construites, elles sont, elles aussi, tenues pour vraies. Les solutions sont donc doublement soumises : elles sont sous le joug des nécessités mais aussi sous celui de l'empirie. Si elles n'y répondent pas, elles sont réfutées. A ce jour, le modèle de la collision continentale expliquant l'édification d'une chaîne montagneuse tient encore.

A travers ces deux exemples, nous avons cherché à mettre en évidence que le terme « vérité » ne prend pas tout à fait la même signification en mathématiques et en SVT. Cependant, dans les deux disciplines, une certaine relativité est associée à la vérité. La démarche d'investigation telle qu'elle est présentée dans les différents documents institutionnels ne tient nullement compte de cet aspect.

IV. CONCLUSION

Les textes institutionnels actuellement en vigueur en France pour l'enseignement à l'école primaire et au collège pointent des démarcations entre la démarche d'investigation (DI) en mathématiques et en sciences. Dans cette contribution, nous avons engagé une étude critique de ces démarcations. L'expérience et les modalités de validation ne peuvent constituer, à nos

[9] « aucun des auteurs précédents ne semble mettre en doute que, même si une « géométrie » ne correspond pas à la réalité expérimentale, ses théorèmes n'en continuent pas moins à être des « vérités mathématiques » ».

yeux, des points d'appui pour distinguer la DI en mathématiques et en sciences de la vie et de la Terre (SVT) dans la mesure où il existe des similitudes à ce niveau entre ces disciplines. En revanche, une étude en termes de problématisation (avec exploration des possibles, construction de nécessités dans une tension entre des registres empirique et théorique, rapport au « vrai ») apparaît plus fructueuse pour établir des distinctions (fondement du vrai et critères de validité). Reste, bien entendu, à étudier de manière plus approfondie ces possibilités, notamment dans les différents champs des mathématiques et des SVT, à l'école élémentaire comme dans le secondaire.

REFERENCES

Allouche J.-P. (2007) *La recherche expérimentale en mathématiques.* http://www.lri.fr/~allouche/experimental.html, consulté le 13 mai 2011.

Bourbaki N. (1969) *Eléments d'histoire des mathématiques*. Paris : Hermann.

Brousseau G. (1998) *La théorie des situations didactiques.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chouchan N. (1999) *Les mathématiques.* Paris : Corpus Flammarion.

Coquidé M., Fortin C., Rumelhard G. (2009). L'investigation : fondements et déémarches, intérêts et limites. *ASTER* 49, 51-78.

Gould S. J. (1991/1989). *La vie est belle. Les surprises de l'évolution*. Paris : Seuil.

Fabre M., Orange C. (1997). Construction des problèmes et franchissements d'obstacles. *ASTER* 24, 37-57. http://documents.irevues.inist.fr/handle/2042/8550, consulté le 13 mai 2011.

Gohau G. (1997) Naissance de la méthode « actualiste » en géologie. In Gohau G. (Ed.) (pp. 139-149) *De la géologie à son histoire*. CTHS.

Hersant M. (2010) *Empirisme et rationalité au cycle 3 : vers la preuve en mathématiques*. Mémoire d'Habilitation à diriger des recherches, Université de Nantes. https://sites.google.com/site/magalihersant/publications/habilitation-a-diriger-des-recherches, consulté le 13 mai 2011.

Hersant M., Thomas Y. (2009) Quels savoirs. mathématiques dans les problèmes pour chercher à l'école élémentaire ? Le cas des problèmes d'optimisation au cycle 3. In *Actes du 35è colloque de la Copirelem.* Bordeaux : IREM de Bordeaux

Jacob F. (1981) *Le jeu des possibles*. Paris: Librairie Fayard.

Mayr E. (1989) *Histoire de la biologie*. Paris : Editions Fayard.

Orange C. (2000) *Idées et raisons.* Mémoire d'Habilitation à diriger des recherches, Université de Nantes.

Orange-Ravachol D. (2010) Efforts de problématisation et choix en situation : cas d'enseignants expérimentés et moins expérimentés. In Fabre M., Dias de Carvalho A., Lhoste Y. (Eds.) (pp. 135–155) *Expérience et problématisation en éducation*. Porto : Ediçoes Afrontamento.

Orange-Ravachol D. (2008) La problématisation et le vrai en classe de sciences. *Actes du 5è Colloque international du Réseau Problema*. Rhodes (Grèce), 12-14 juin 2008.

Orange-Ravachol D. (2003) *Utilisations du temps et explications en Sciences de la Terre par les élèves de lycée : étude dans quelques problèmes géologiques*. Thèse de doctorat. Université de Nantes. http://tel.archivesouvertes.fr/index.php?halsid=1ufqci48pj022jvrqfq2jj6nd1&view_this_doc=tel-00480254&version=1, consulté le 13 mai 2011.

Orange-Ravachol D., Beorchia F. (2011, à paraître) Principes structurants et construction de savoirs en sciences de la vie et de la Terre. *Education et Didactique*.

Orange-Ravachol D., Beorchia F. (2007) Principes structurants et savoirs en sciences de la vie et de la Terre. Actes du Congrès de l'AREF, Strasbourg, 29 août- 1er septembre 2007. disponible sur : http://www.congresintaref.org/actes_pdf/AREF2007_Denise_ORANGE_RAVACHOL_385.pdf, consulté le 13 mai 2011

Poincaré H. (1968) *La science et l'hypothèse.* Paris : Champs, Flammarion.

Popper K. R. (1973) *La logique de la découverte scientifique.* Payot : Paris.

Rocard M., Csermely P., Jorde D., Lenzen D., Walberg-Henriksson H., Hemmo V. (2007) *L'enseignement scientifique aujourd'hui : une pédagogie renouvelée pour l'avenir de l'Europe.* http://ec.europa.eu/research/science-society/document_library/pdf_06/report-rocard-on-science-education_fr.pdf, consulté le 13 mai 2011.

Vandebrouck F., de Hosson C., Robert, A. (2010) Experimental devices in mathematics and physics standard in lower and upper secondary school, and their consequences on teacher's practices. In *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Lyon. 2009. http://www.inrp.fr/publications/edition-electronique/cerme6/cerme6.pdf, consulté le 13 mai 2011.

MEN (2002) Documents d'accompagnement des programmes de mathématiques de l'école primaire.

MEN (2004) Programmes des collèges, Sciences de la vie et de la Terre. BOEN, Hors série N°5, 9 sept. 2004.

MEN (2009) Ressources pour les classes de 6e, 5e, 4e, et 3e du collège : raisonnement et démonstration. http://media.education.gouv.fr/file/Programmes/17/7/doc_acc_clg_raisonnement&demonstration_109177.pdf, consulté le 13 mai 2011.

MEN (2008) Programmes des enseignements de mathématiques, de physique-chimie, de sciences de la vie et de la Terre, de technologie pour les classes de sixième, de cinquième, de quatrième et de troisième du collège. Bulletin officiel spécial n° 6 du 28 août 2008. http://www.education.gouv.fr/cid22120/mene0817023a.html, consulté le 13 mai 2011.

MENESR (2006) Le socle commun de connaissances et de compétences. http://www.education.gouv.fr/cid2770/le-socle-commun-de-connaissances-et-de-competences.html, consulté le 13 mai 2010.

DÉMARCHE EXPÉRIMENTALE EN RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Catherine HOUDEMENT*

Résumé – Deux questions sont soulevées dans cette contribution. (1) Est-il possible de tirer des fils conducteurs communs et en contrepartie de dégager des spécificités entre démarches d'enseignement des sciences, notamment entre mathématiques et autres sciences ? Ces fils seraient en particulier bienvenus pour une culture didactique scientifique des professeurs polyvalents. (2) Les démarches personnelles des élèves dans la résolution des questions mathématiques peuvent-elles ressembler à ce qu'ils font dans les sciences autres que les mathématiques ? Ce serait un pas vers la définition d'éléments minimaux d'intégration d'une culture scientifique chez des élèves de primaire.

Mots-clefs : Démarche d'investigation, Démarche expérimentale, Résolution de problèmes, Contrôles, Raisonnement

Abstract – This paper addresses two questions. (1) Is it possible to find common and specific characteristics when comparing mathematics teaching and other science (physic, biology) teaching? This would contribute to organise the scientific culture of primary teachers. (2) Is it possible to describe specific mathematical problem solving as experimental investigation, an usual scientific methodology? This would help to define primary school students' scientific literacy.

Keywords: Inquiry-Based Science Education, Experimental Investigation, Problem Solving, Control, Reasoning

En quoi et pourquoi le concept de démarche d'investigation se décline-t-il différemment, ou non, en mathématiques et dans d'autres disciplines dites scientifiques (physique, chimie, biologie, géologie, technologie, etc.) ? Comment se distingue-t-il de celui de résolution de problème ? Comment les questions de validations sont-elles réglées selon les disciplines en jeu ? (EMF 2012, texte introductif à GT10)

Ces questions initiatrices du groupe de travail GT10 sont stimulantes : elles cherchent à établir des rapprochements entre les démarches pédagogiques liées aux disciplines scientifiques. Ce questionnement a été l'occasion à l'IUFM de Haute Normandie d'un travail collaboratif de formateurs[1] d'enseignants du premier degré sur deux thématiques (preuve, mesure). La finalité du travail de ce groupe était d'aider les étudiants et élèves professeurs à concevoir les enseignements scientifiques comme des variantes d'un enseignement à la compréhension du réel. La démarche d'investigation a traversé nos échanges, je m'appuierai ici sur le travail du groupe autour de l'élucidation des ressemblances et différences entre les enseignements des sciences, les mathématiques étant considérées comme une science[2].

I. DEMARCHE D'INVESTIGATION ET DEMARCHE EXPERIMENTALE DANS LES PROGRAMMES DE L'ECOLE

D'après Laugier (2006), la démarche d'investigation est insufflée dans les programmes de primaire de sciences (2002) sous l'impulsion du PRESTE[3] et de la Main à La Pâte. Il s'agit de conseiller aux enseignants l'utilisation d'une démarche pédagogique appuyée sur un changement de paradigme de l'acquisition des connaissances : non plus par simples observations du réel, mais par questionnement sur les objets et les phénomènes et élaboration de réponses à ces questions.

---

* LDAR, Universités Paris Denis Diderot et Rouen (IUFM) – France – catherine.houdement@univ-rouen.fr

1 Groupe de recherche-formation dont j'étais responsable, associant sur trois ans des formateurs enseignants de physique, de sciences de la vie et de la terre, de technologie et professeurs des écoles : Pierre Emery, Joël Gaudrain, C.Houdement, Catherine Lecoq, Nicolas LoRé, Arlette L'Haridon, Isabelle Martinet, Éric Minot.

2 Comme le titre de Kahane J.-P. (2002, dir) *L'enseignement des sciences mathématiques*. Éditions Odile Jacob.

3 PRESTE : Plan de rénovation des Sciences et de la Technologie à l'école (BO n°23, juin 2000)

© Houdement C.(2012) Démarche expérimentale en résolution de problèmes. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT10, pp. 1389-1399). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

Drouard (2008) précise les différentes phases :

- Transformation par l'enseignant d'une situation de départ ou fonctionnelle (Coquidé et Giordan (2002) parlent de situations déclenchantes et de questions introductrices) qui intéresse les élèves, en un problème à résoudre. L'auteur insiste bien sur la responsabilité de l'enseignant dans la formulation du problème, ses liens avec les conceptions et les questions des élèves et les connaissances visées.
- Passage du problème à résoudre en hypothèses à tester ou problème reformulé : il s'agit là de séparer ce qui relève de connaissances anciennes et ce qui reste en question sous forme d'hypothèses.
- Elaboration et réalisation d'une organisation4 qui teste les hypothèses et conduit à des résultats exploitables. Plusieurs organisations sont possibles pour construire des réponses, décrites globalement par trois méthodologies : expérimentation, observation et recherche documentaire. L'expérimentation (aussi connue sous le nom de démarche expérimentale) est un exemple d'organisation, qui se déroule selon des conditions et un déroulement bien précis (voir annexe 1). La démarche expérimentale reste l'organisation emblématique de la démarche d'investigation, qui se trouve souvent réduite à la seule démarche expérimentale. Mais l'expérimentation n'est pas toujours possible, d'autres organisations peuvent être utilisées. Par exemple une modélisation où on matérialise en laboratoire l'idée qu'on se fait du fonctionnement de quelque chose, ce qui permet de tester cette idée : Drouard cite la construction, après observation guidée de la réalité (palpation des membres, exercices de contraction, observation de radiographies…) d'un modèle de fonctionnement des articulations bras/avant-bras avec des planchettes pour les os et des ficelles pour les muscles ; ou une observation : là encore la réalité peut ne pas être directement observable, le travail a lieu sur des documents (films, photos, données recueillies par des scientifiques) ; ou encore une recherche documentaire.
- Confrontation des résultats obtenus (suite à l'organisation retenue) aux hypothèses.
- Synthèse de l'ensemble du travail : structuration des connaissances en jeu.
- Confrontation au savoir savant.

Cette présentation de Drouard (2008) met en avant une des visées de cette méthodologie d'enseignement qu'est la démarche d'investigation, l'acquisition de connaissances nouvelles, confirmées par un savoir savant de référence, écrit. Mais un autre objectif d'apprentissage relève de l'apprentissage de *la démarche scientifique* : maints enseignants ont cherché à s'emparer de cet objectif dès les années 2000, mais son enseignement en primaire reste toujours complexe et questionné (par exemple Blanchon 2005).

Notons qu'on retrouve bien les deux objectifs d'acquisition mentionnés dans l'introduction du GT10 : connaissances conceptuelles et démarche ordinaire (au sens de Kuhn 1962) de l'exploration des paradigmes scientifiques.

La prescription institutionnelle de la démarche d'investigation dans l'enseignement des sciences au primaire et au secondaire qui perdure en 2011 amène à questionner sa présence ou la possibilité de sa présence en mathématiques. Il est à noter que les programmes 2008 de collège se limitent à une injonction (MEN 2008 p. 4).

Dans les programmes mathématiques 2002 de l'école, on pourrait d'abord interpréter comme l'indication d'une démarche d'investigation en mathématiques, la présence des « problèmes de recherche » avec leurs deux objectifs : apprendre des connaissances

[4] A l'instar de Drouard (2008) je préfère cette expression à celle, pédagogiquement usitée, de protocole, parce qu'elle évoque davantage l'idée de planification, terme que propose aussi Drouard. Je conserverai le terme de protocole pour la démarche expérimentale.

mathématiques et faire preuve d'initiative et d'imagination face à des problèmes nouveaux. On lit par exemple (cf. annexe 2) :

> (…) des problèmes de recherche, c'est-à-dire des problèmes pour lesquels l'élève ne dispose pas de démarche préalablement explorée : certains de ces problèmes sont utilisés pour permettre la construction de connaissances nouvelles, d'autres sont davantage destinés à placer l'élève en situation de chercher, d'élaborer une solution originale (MJER-DESCO 2002 cycle 3 p. 13)

Ce qui m'intéresse dans cette étude c'est d'abord le second objectif. J'entends par là non pas, à l'instar des enseignements de la Théorie des Situations Didactiques (TSD) mettre les élèves en « situation didactique » (Brousseau 1998) de façon à ce que l'expérience les amène à produire des connaissances qui participent du savoir visé, mais les rendre pleinement conscients de l'intérêt d'une démarche de résolution de problèmes qui consiste à émettre des hypothèses, les confronter au réel (qui est la nature usuelle du milieu matériel à l'école primaire) et en déduire des possibilités de réponses, dit autrement, à émettre des propositions de l'ordre du réfutable. Cette conscience serait elle-même une connaissance instrumentale (au sens de Drouhard 2011). Compte tenu de ce qui a été développé sur la démarche d'investigation, il semble que ce soit là une entrée des élèves plutôt dans la démarche expérimentale, qui n'est qu'une des organisations de la démarche d'investigation.

II. SPECIFICITES DE LA DEMARCHE EXPERIMENTALE EN MATHEMATIQUES RELATIVEMENT AUX AUTRES SCIENCES

Pour engager les élèves en mathématiques dans une démarche expérimentale, il s'agirait d'abord de les confronter à des problèmes qui portent cette potentialité. Bien sûr la situation du puzzle de Brousseau, qui amène les élèves de CM1-CM2-6ème (grades 4-5, 9 à 12 ans) à réfuter des protocoles d'agrandissement (séparé) des morceaux d'un puzzle par la réalisation effective du puzzle, est un exemple célèbre de mise en œuvre de démarche expérimentale (Robert et Houdement 2005). Mais dans la TSD, elle n'est pas construite avec l'intention d'enseigner une démarche expérimentale, mais plutôt de pousser les élèves à mettre en défaut leurs idées premières pour enrichir leurs connaissances sur le modèle numérique de la similitude, *in fine* à enrichir leurs connaissances sur les nombres. Il me semble que la situation didactique aménage la possibilité de cette démarche expérimentale, mais que l'élève n'en est pas responsable.

La caractéristique des situations didactiques est de posséder une part d'adidacticité : il me semble que cette adidacticité résulte d'un évitement *a priori* des protocoles qui ne sollicitent pas les connaissances visant le savoir fixé. En mathématiques l'aménagement du milieu par le professeur vise certes à rendre inopérants les « mauvais » protocoles, mais aussi à ne rendre possibles, parfois par un simple effet de contrat, que les protocoles réfutables par rétroaction du milieu et connaissances de la classe. Dans l'exemple du puzzle, l'élève peut mettre en œuvre plusieurs stratégies, et quand le coefficient d'agrandissement est de 7/4 (donné sous la forme « passer de 4 cm à 7 cm »), ajouter 3 cm à toutes les mesures, mais il est rare qu'il propose de réaliser une projection sur un plan parallèle[5] ou d'utiliser un pantographe. De toute façon l'acceptation dans le milieu d'un dispositif matériel introduirait une bifurcation didactique (Margolinas 2004, p. 90) et donc changerait la situation. Le milieu en mathématiques prend la place de la réalité en physique, mais il reste un milieu très contraint, voire épuré, avec l'avantage d'une anticipation par l'enseignant d'un jeu sur les contraintes « pour canaliser les protocoles ». De plus la situation didactique intègre au moins la reprise du problème avec un jeu sur les variables, voire une nouvelle rencontre possible de la même stratégie dans un autre contexte, toutes choses difficiles à installer, me semble-t-il, dans les

[5] Même s'il a travaillé sur les ombres en physique.

domaines scientifiques autres que mathématiques, parce qu'ils s'appuient sur un réel non épuré.

Prenons l'exemple d'une séance de sciences en CM2 (grade 5, 10-11 ans) où la question retenue était de mesurer l'air contenu dans les poumons d'un élève. Quand il s'est agi de proposer de mesurer cet air, après avoir assimilé l'air contenu dans les poumons à l'air expiré, avoir retenu un moyen de récupérer cet air expiré, les propositions des élèves ont fusé dans toutes les directions que permettent les expériences singulières[6] : mesurer la circonférence d'un ballon de baudruche gonflé par l'air expiré ; tracer un segment sur un ballon vide et le mesurer après remplissage ; déplacer par vidage du ballon gonflé par l'air expiré une goutte d'eau sur une plaque de verre et mesurer la longueur du déplacement, mesurer la différence entre masse du ballon vide et masse du ballon rempli par l'air expiré , etc. Entre parenthèses, ces idées de protocoles révèlent la complexité pour les élèves du concept de mesure, la prégnance des longueurs comme grandeurs mesurables et montrent l'utilité d'un enseignement d'une dialectique (qui me semble relever des mathématiques) entre construction du concept d'une grandeur physique et passage à sa mesure, en particulier pour outiller les élèves dans l'apprentissage des sciences. Mais ce qui nous intéresse ici, c'est la difficulté des élèves à trancher, même après échanges, sur les protocoles les plus pertinents, du moins à refuser les plus « impertinents ». En effet certaines qualités physiques de l'air (son apparente immatérialité, sa légèreté), la limitation de la précision des instruments de mesure (ici de masse) rendent le choix de la grandeur d'étude complexe. Dans les séances observées ce sera l'enseignant qui guidera les élèves vers un mesurage de volume, plutôt que de masse (rejetée par inadaptation des instruments disponibles, ce que les élèves comprennent) ou longueur (inappropriée à la qualité gaz de l'air, plus complexe à entendre). Remarquons aussi que le choix du volume permet de numériser la capacité pulmonaire (par une estimation) : les autres protocoles auraient permis, peut-être, en faisant abstraction des difficultés d'expérimentation (mais c'est une « posture de matheux ») seulement de comparer des capacités pulmonaires.

Il me semble remarquable dans cette séance (et me semble-t-il dans l'enseignement des sciences en primaire) que l'élève n'ait que peu de responsabilité dans le choix du protocole ou des protocoles retenus pour le montage : justement parce qu'il ne possède ni les connaissances conceptuelles, ni les connaissances technologiques (sur l'utilisation des instruments), ni le savoir expérimental qui veille à la séparation des variables qui orientent a priori le choix et l'élaboration d'un protocole. C'est en général l'enseignant qui sélectionne les protocoles d'expérience « dignes » d'être montés, sans pouvoir justifier ces choix auprès des élèves. A la fin d'une telle séance, une confrontation à l'estimation de la capacité pulmonaire moyenne d'un enfant (dans un livre ou sur un site de référence) joue le rôle, pour l'élève, de contrôle de l'ensemble du processus : choix du protocole et fiabilité de l'expérience. L'enseignant peut difficilement reprendre le même problème en jouant sur des variables (qui resteraient à définir), ce serait (entre autres) trop coûteux en temps.

Ainsi c'est le professeur « de sciences » qui valide dans un premier temps les protocoles d'expérimentation susceptibles d'être montés, contrairement aux mathématiques qui construisent une fiction du réel adaptée aux connaissances visées, contrôlée par les connaissances visées. En physique par exemple, un aménagement si fin de la réalité paraît plus irréalisable, il semble plus difficile de canaliser les protocoles, au moins d'anticiper leur variété. Enfin c'est la confrontation des réponses obtenues, suite au déroulement des protocoles, avec les savoirs savants qui valide l'ensemble de la démarche. Cette confrontation

[6] Un déroulement dans deux classes différentes a produit deux ensembles de propositions ayant une faible intersection.

n'existe pas stricto sensu[7] dans l'enseignement usuel des mathématiques, c'est le professeur qui se porte garant à travers l'institutionnalisation.

III. ENSEIGNER LA DEMARCHE EXPERIMENTALE EN MATHEMATIQUES

Il me semble qu'on pourrait chercher à affecter les « problèmes pour chercher » de cette potentialité de démarche expérimentale, même si l'interprétation de l'expression « problèmes pour chercher » a donné lieu à des malentendus. Perrin (2007 p.b3) souligne qu'il souscrit à cette vision de l'activité de recherche donnée par les « problèmes pour chercher ». Il décrit une méthode d'investigation systématique qu'il désigne comme méthode expérimentale. Elle comprend plusieurs étapes, à répéter éventuellement :

- expérience,
- observation de l'expérience,
- formulation de conjectures,
- tentative de preuves,
- contre-expérience, production éventuelle de contre-exemples,
- formulation de nouvelles conjectures,
- nouvelle tentative de preuve, etc. (Perrin 2007, p. 7)

On retrouve le fait que la démarche expérimentale, même si sa planification globale reste fixe, possède cette nécessité d'une invention permanente d'un protocole d'expérimentation ; la conjecture est ce qui n'est pas réfutée par l'expérience ; par contre le résultat est ce qui s'obtient par déduction logique des résultats déjà avérés. C'est la pertinence du protocole qui entraîne la qualité des conjectures et celle de la preuve la vérité des résultats.

De nombreux travaux didactiques portent sur la recherche et/ou l'expérience en mathématiques (par exemple Thomas 2007 et Hersant 2008, Diaz 2009, *Maths à modeler* Grenoble avec Godot 2006 et Gravier, Payan et Colliard 2008, etc.). Je n'examinerai pas ces études qui examinent l'impact de l'introduction en classe de problèmes de recherche : elles se caractérisent par des degrés d'ouverture des problèmes très différents : cette ouverture se manifeste notamment par la responsabilité des élèves à construire des questions sur des dispositifs, questions qui deviennent les problèmes de recherche. Ce n'est pas le sujet ici, mais il faudrait aussi interroger la possibilité de leur insertion dans l'enseignement ordinaire, qui pourrait être liée avec le degré d'ouverture.

Je choisirai donc un problème presque classique (G.Élem Besançon 2005, Hersant 2008) : trouver trois nombres consécutifs dont la somme est N, un nombre entier fixé. L'entrée dans ce problème chez des élèves de cycle 3 les déstabilise en général (brièvement). Pourquoi ? La résolution ne se résume plus à une combinaison (fût-t-elle appropriée) des nombres de l'énoncé, il est nécessaire de construire, ce que je désignerais, par extension, comme un protocole d'expérimentation sur les nombres : choisir (éventuellement suite au calcul du tiers de N) des nombres sous contrainte de l'énoncé (trois et consécutifs) et calculer leur somme, les accepter ou les réfuter, passer aux « trois nombres consécutifs suivants », arrêter la recherche. La construction du protocole est sous la responsabilité des élèves, la situation comporte une rétroaction du milieu matériel : le calcul de la somme des nombres candidats à être solutions. Dit autrement, le protocole est validé par la possibilité de réfutation du résultat de l'expérience (simple calcul de somme).

Examinons la version retournée (Bloch 2005) de ce problème : trouver tous les nombres N qui sont sommes de trois entiers consécutifs. La recherche est plus complexe, le problème est

[7] Sauf peut-être dans les situations de validation de la TSD (par exemple Gibel 2008)

plus ouvert, il y a de nombreux protocoles d'expérimentation possibles sur les nombres : tester les nombres entiers un à un dans l'ordre croissant, faire des hypothèses sur la « forme » de N… : les rétroactions du milieu permettent uniquement d'accéder à la plausibilité de la forme « multiple de trois » ; le modèle de N multiple de trois (ce à quoi parviennent généralement les élèves) n'est pas réfutable, un tableur peut emporter la conviction sur ce modèle. Mais seule une preuve pré-algébrique peut assurer l'irréfutabilité infinie grâce à la puissance de la notation symbolique littérale, c'est-à-dire assurer la nécessité épistémique.

Les élèves mettent en œuvre pour ce problème retourné une démarche expérimentale, avec un consensus possible sur des protocoles expérimentaux. On voit aussi les limites en termes de relation à la vérité, puisque la preuve mathématique utilise des connaissances hors du champ usuel de l'école primaire.

La démarche expérimentale mathématique pourrait être ainsi étalonnée, en termes de relation à la vérité : en effet du cycle 3 au collège, l'accumulation progressive des connaissances des élèves générée par les programmes permet une dialectique entre preuves par plausibilité et preuves par nécessité. Le problème qui précède est un exemple qui permet l'évolution de la preuve par plausibilité à la preuve par nécessité. Mais d'autres étalonnages seraient aussi possibles (Houdement 2009). Il me semble là qu'une des questions cruciales serait de construire une liste et des « organisations » de tels problèmes pour une année, voire un cycle.

IV. LA DEMARCHE EXPERIMENTALE, UNE CONNAISSANCE CACHEE EN RESOLUTION DE PROBLEMES ORDINAIRES

Je ne m'intéresse pas dans cette partie aux problèmes dont l'enseignant sait qu'a priori l'élève pour le résoudre devra construire une stratégie originale, je parle de problèmes numériques ordinaires dans la classe, à faire individuellement, donnés sous forme de textes par l'enseignant pour évaluer le réinvestissement de connaissances supposées apprises (par exemple les quatre opérations). Lors d'une recherche exploratoire visant à débusquer des connaissances ignorées (des didacticiens et/ou des institutions, Castela 2008) en résolution de problèmes mathématiques ordinaires en cycle 3[8] (Houdement 2006, 2011), dont la méthodologie repose sur des entretiens individuels différés par rapport à une résolution individuelle en classe, j'ai remarqué la façon avec laquelle, dans le cadre de la résolution, les élèves étaient amenés à jouer avec des hypothèses (notamment sur le type d'opérations à utiliser) qu'ils contrôlaient par ou malgré leur évocation de la réalité, par ou malgré leurs connaissances mathématiques. J'ai ainsi repéré trois natures d'inférences et/ou de contrôle que j'ai qualifiées (Houdement 2006, 2011) de *sémantique*, *pragmatique* et *syntaxique*. Le choix des qualificatifs de *sémantique, syntaxique et pragmatique* résulte sans doute de résonances avec des lectures de psychologie cognitive et de didactique, mais je ne connais pas de référence les utilisant conjointement et dans ce sens. Par contre l'expression inférences et/ou contrôles cherche à expliciter l'idée d'un véritable processus de contrôle pour anticiper la validation, au sens de Margolinas (1993 p. 213), développé par Coppé (1995, p. 30) et étudié par Burgermeister et Coray (2008).

Les inférences et contrôles peuvent donc être de :

- nature sémantique : c'est l'interprétation liée à la représentation que l'élève se fait du problème (au sens de Julo 1995) qui déclenche des associations de type « partager

[8] les trois dernières années (CE2, CM1, CM2) d'école primaire, accueillant des élèves de 8 à 12 ans

c'est diviser » ; « fois c'est multiplier ». Ce type d'interprétation se place souvent en amont du choix d'un calcul, mais pas seulement.

Les autres raisonnements se situent davantage après qu'un calcul ait été mené à terme ; en ce sens ils aident à accepter ou réfuter l'inférence première.

- nature pragmatique : c'est la connaissance de la réalité évoquée par le texte du problème (notamment l'ordre de grandeur des résultats) qui conforte ou entre en conflit avec le résultat calculé et pousse l'élève à commencer un autre calcul. Ce type de raisonnement joue le rôle de contrôle du calcul.
- nature syntaxique : le contrôle s'exerce alors sur les nombres et les écritures mathématiques, indépendamment de la signification que ces écritures ont par rapport au texte du problème ou des grandeurs en jeu ; ces contrôles résultent de théorèmes-en- acte sur les mathématiques.

Prenons l'exemple texte suivant pour illustrer ces natures d'inférences et de contrôles : « Un commerçant dans l'habillement passe une commande de 2350 euros pour un lot de 130 chemisiers pour 1600 euros et 25 pulls. Il souhaite un bénéfice de 30% minimum à la vente. Quels seront les prix minimum de vente d'un chemisier, d'un pull ? »

Un élève qui calcule 1600 divisé par 130 fait une inférence sémantique. S'il trouve 12 et se donne la peine de vérifier la pertinence de 12 comme quotient de 1 600 par 130, nous parlerons d'un contrôle syntaxique. S'il réfléchit au fait que 12 euros est un prix « raisonnable » pour un chemisier, il effectue un contrôle pragmatique. Remarquons qu'un contrôle n'assure pas toujours la bonne réponse (ou la réponse optimale, dans ce cas précis 12,31 euros).

Voici trois exemples où ces inférences/contrôles s'exercent.

Ludivine CM2 (10-11ans), à l'occasion d'un problème où il s'agit de trouver un nombre d'œufs pour 8000 brioches :

CH : on a besoin de 3 œufs pour une brioche et on fait 8000 brioches.
Ludivine : c'est un partage.
CH : c'est un partage ? tu fais un dessin si tu veux.
Ludivine : oui il faut que je fasse 3 œufs pour une brioche etc.
CH : bon ça va faire combien d'œufs, 3 œufs pour une brioche, combien pour 8000.
Ludivine : je sais pas // c'est une multiplication ?
CH : c'est un partage ou une multiplication ?
Ludivine : (*silence, puis lentement*) si on fait une division on va peut-être trouver moins / que si on fait une multiplication on va trouver plus.
CH : alors ?
Ludivine : bah une multiplication.

Ludivine a repéré que le problème relève des structures multiplicatives, mais elle n'infère pas l'opération à partir du contexte (pas d'inférence sémantique fine) ; elle montre qu'elle teste chaque opération par des connaissances liées à la multiplication et à la division des entiers pour finalement décider de l'opération, donc par un contrôle syntaxique.

Nicolas CE2 (8-9ans) à l'occasion d'un problème :

CH : d'accord / je vais te poser une autre question / quand tu décides de faire un problème/ tu vas directement vers 414-78 / ou tu fais quelque chose avant.
Nicolas : je fais quelque chose avant quand même / j'essaie de faire des plus / des multiplications.
CH : d'accord ; et comment tu sais que tu dois choisir plus / ou multiplié ?

Nicolas : j'essaie comme ça.
CH : t'essaie comme ça / et comment tu sais si ça va ou si ça va pas ?
Nicolas : Bah quand je vois que le nombre est trop grand ou trop petit ou que ça me paraît un peu trop.

Nicolas déclare tester des opérations et contrôler par l'ordre de grandeur du résultat : c'est plutôt un contrôle pragmatique qui lui permet de trancher.

Deborah CM2 (10-11ans) cherche le poids d'une table après avoir relevé la masse de 25 tables, 300 kg :

CH : Est-ce qu'avec ces deux phrases là : 25 tables et 300 kg on peut trouver le poids d'une table ?
Deborah [*hésitante*] : Oui / Enfin…
CH : Si tu as besoin d'un papier…
Deborah [*en regardant CH*] : Je vais faire 300 divisé par 25.
CH : Tu fais ce que tu penses / Je sais pas moi / Le papier c'est ton brouillon.
Deborah [*elle pose la division 300 par 25*] : On trouve 12.
CH : Alors qu'est-ce que c'est 12 ?
Deborah : Le poids d'une table.
CH : Es-tu sûre de ça ?
Deborah : Non, ça m'étonnerait.
CH : Pourquoi ça t'étonnerait ?
Deborah : Bah, c'est beaucoup / C'est pas assez je veux dire. (…)
CH : Avec ce renseignement-là, 25 tables 300 kg, t'as fait quelque chose, est-ce que tu as confiance dans ce que tu as fait ou tu doutes un petit peu ?
Deborah : Bah, je doute un petit peu.
CH : Tu doutes un peu parce que tu trouves que c'est pas assez 12 pour une table ? Est-ce que tu doutes de l'opération que tu as faite ?
Deborah : Bah, no…non.
CH : Tu penses que c'est l'opération qui va te permettre de trouver le résultat ?
Deborah : Oui je pense.
CH : Pourquoi tu penses que c'est l'opération qui va te permettre de trouver le résultat ?
Deborah : Bah, parce qu'on peut faire une multiplication / 300 multiplié par 25, c'est pas possible / C'est beaucoup trop / Ni une soustraction / Donc je pense faire une division / Et aussi parce qu'il faut partager / Il faut / Oui, faut partager.

Deborah reconnaît que le problème relève d'une division (inférence sémantique), mais elle reste sceptique sur l'ordre de grandeur du résultat obtenu (le résultat trouvé pour le poids d'une table) : la confrontation à ce qu'elle sait du réel (ses connaissances pragmatiques) lui font douter du choix de l'opération. Le choix de l'opération devient alors une hypothèse réfutable par des arguments de l'ordre du réel. C'est en se détachant de la réalité, par un contrôle sémantique qu'elle conclut correctement.

Les élèves face aux problèmes numériques ordinaires de réinvestissement se comportent comme s'ils étaient confrontés à une question de modélisation, les opérations étant les modèles. Certes leurs connaissances des problèmes (leur mémoire des problèmes, dirait Julo 1995) leur permet d'inférer rapidement une opération, mais c'est un jeu de contrôles qui leur permet de conclure, contrôles desquels la réalité n'est pas exclue. J'interprète ces stratégies comme des intégrations de démarches expérimentales en mathématiques : plutôt que de recourir à des stratégies analogiques en cherchant par exemple à dessiner la situation, ces élèves testent un modèle qu'ils savent globalement opérationnel dans les problèmes numériques. Mon étude montre que ce n'est que lorsque la réfutation des opérations ne va pas de soi que les élèves (re)passent à des stratégies analogiques.

Ces remarques n'appellent pas de généralisation hâtive, elles montrent juste l'existence de tels raisonnements chez les élèves. S'agit-il d'un effet enseignant puisque les élèves qui ont mis cela en œuvre relevaient du même enseignant, responsable de trois niveaux (CE2, CM1, CM2) ? Cependant, après entretien avec l'enseignant, celui-ci n'a pas de souvenir d'avoir explicitement mentionné cette démarche pour les mathématiques (par contre il avait l'habitude de confronter ses élèves à des problèmes de recherche). S'agit-il d'une connaissance auto-construite par les élèves, par adaptation aux mathématiques de démarches utilisées dans d'autres disciplines ? Je ne peux pas répondre. J'ajoute que des collègues didacticiens des mathématiques m'ont confirmé se souvenir avoir employé cette stratégie de test d'opérations dans les problèmes scolaires.

V. CONCLUSION

Les programmes affirment, le temps d'une réforme (par exemple Programmes de collège pages 4-5, MEN 2008) l'existence d'une démarche, la démarche d'investigation, qui pourrait recouvrir à la fois l'entrée dans les mathématiques et les autres sciences et sans doute aussi l'enseignement de ces disciplines. Cette déclaration institutionnelle, d'ordre sur-didactique, pour le moment non scientifique, est à questionner.

Peut-on trouver des relations entre les démarches de résolution des questions de mathématiques et de sciences, notamment à l'école primaire et au collège ? Ce texte vise à montrer que la ressemblance actuellement accessible entre mathématiques et sciences se situerait plutôt du côté de la démarche expérimentale, dont il semble que l'utilisation autonome par les élèves soit possible, pour peu qu'ils aient compris les différents rapports à la réalité qui se jouent dans les diverses sciences. Cette démarche expérimentale pourrait être apprise et mise à l'œuvre par les élèves à l'occasion de la résolution de certains problèmes mathématiques « pour chercher ». Il semblerait que cette démarche soit aussi investie, au moins par certains élèves, et à bon escient, dans les problèmes ordinaires. L'étude du rapport à la réalité qu'entretiennent les enseignements des différentes disciplines scientifiques pourrait devenir un autre objet transactionnel de comparaison entre disciplines. Mais un gros travail reste à faire pour que les enseignants eux-mêmes soient conscients de ces ressemblances et différences.

Je voudrais terminer cette modeste contribution au GT10 en revenant sur la nécessité de penser l'accompagnement, en particulier des professeurs des écoles, par des recherches d'invariants (et de spécificités) dans les démarches d'enseignement des différentes disciplines, notamment scientifiques. Cet article est une contribution à cette réflexion, en amont des questions de formation.

RÉFÉRENCES

Blanchon D. (2005) L'apprentissage de la démarche scientifique, est-ce bien raisonnable ? *Grand N* 75, 59-76.

Bloch I. (2005) Dimension adidactique et connaissance nécessaire. Un exemple de « retournement » d'une situation. In *Actes du colloque Guy Brousseau. Sur la théorie de situations didactiques* (pp. 143-152) Grenoble : La Pensée Sauvage.

Brousseau G. (1970-1990, édition 1998) *Théorie de situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Burgermeister P.-F., Coray M. (2008), Processus de contrôle en résolution de problèmes dans le cadre de la proportionnalité des grandeurs : une analyse descriptive. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 28/1, 63-106.

Castela C. (2008 dir., Contribution à une approche didactique des implicites scolaires : la problématique des enjeux ignorés d'apprentissage. *Les Cahiers de l'IUFM 7.* Université de Rouen.

Coppé S. (1995) Types de connaissances mises en œuvre par les élèves dans la détermination de la composante publique du travail. In *Différents types de savoirs et leur articulation* (pp. 129-144) Grenoble : La Pensée Sauvage.

Coquidé M., Giordan A. (2002) *L'enseignement scientifique et technique à l'éco*le. Paris : Éditions Delagrave.

Diaz T. (2009) La dimension expérimentale en mathématiques. Un exemple avec la situation des polyèdres. *Grand N* 83, 63-83.

Drouard F. (2008) La démarche d'investigation dans l'enseignement des sciences. *Grand N* 82, 31-52.

Drouhard J.-P. (2011) L'épistémographie, mise au point d'un outil au service de la didactique. *Séminaire National de Didactique des mathématiques*. Paris 14 mai 2011-

Gibel P. (2008) Analyse en théorie des situations d'une séquence destinée à développer les pratiques de raisonnement en classe de mathématiques à l'école primaire. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 13, 5-40.

Godot K. (2006) La roue aux couleurs : une situation recherche au cycle 3. *Grand N* 78, 31-52.

Gravier S., Payan C., Colliard M.N. (2008) Maths à modeler. Pavages par des dominos. *Grand N* 82, 53-68.

Groupe élém IREM Besançon (2005) La conduite en classe d'une situation de recherche : un exercice périlleux. *Grand N* 76, 65-74.

Julo J. (1995) *Représentation de problèmes et réussite en mathém*atiques. Rennes : Presses Universitaires de Rennes.

Hersant M. (2008) Problèmes pour chercher, des conduites de classe spécifiques. *Grand N* 81, 57-76.

Houdement C. (2006) Trouver ou ne pas trouver : ce qui peut faire la différence entre élèves dans la résolution de problèmes arithmétiques ordinaires. *Cahier DIDIREM* 54. IREM de Paris 7.

Houdement C. (2009) Une place pour les problèmes pour chercher. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 14, 31-60.

Houdement C. (2011) Connaissances cachées en résolution de problèmes arithmétiques ordinaires à l'école. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 16, 67-96.

Kuhn T.S. (1962) *The structure of scientific revolutions*. Traduction La structure des révolutions scientifiques 1983. Paris : Flammarion.

Laugier A. (2006) Mettre en œuvre la démarche d'investigation : la matérialité de l'air au cycle 3. *Grand N « Á l'école des sciences »* Tome 1, 45-64.

Margolinas, C. (1993) *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Margolinas C. (2004) *Points de vue de l'élève et du professeur. Essais de développement de la théorie des situations didactiques*. Note de synthèse HDR. Université de Provence.

MJER-DESCO (2002) Documents d'application des programmes. Mathématiques 2002. Cycle 2.

MEN (2008) *Programmes du collège: mathématiques*. Bulletin Officiel Spécial n°6 du 28 août 2008.

Perrin D. (2007) L'expérimentation en mathématiques. *Actes du Colloque COPIRELEM* (Dourdan). IREM de Paris Diderot. Voir aussi *petit x* 73, 6-34.
Robert C. et Houdement C. (2005) *La spécificité de la démarche d'investigation en mathématiques.* Conférence Rencontres Nationales La Main à la Pâte (St Etienne).
Thomas Y. (2007) Gommettes et étiquettes, des problèmes pour chercher. *Grand N* 80, 29-42.

ANNEXE 1

Extrait de Drouard F. (2008) La démarche d'investigation dans l'enseignement des sciences. *Grand N* 82, 31-52. P. 38

Le protocole propre à l'expérimentation comporte des points de passage obligés :

- Définir les objectifA de l'expérience, donc savoir ce qu'on cherche.
- Se représenter ce qui va se passer, quel est l'état de départ, quel sera l'état de départ, sur quoi on va agir et comment (un seul paramètre à la fois), ce qui pourra se passer et comment on va s'en rendre compte (existence d'un témoin de l'état de départ).
- Prévoir le dispositif expérimental et dresser la liste du matériel nécessaire.
- Préciser la succession des étapes de l'expérience.
- Prévoir les conditions de l'observation des résultats (et des mesures s'il y en a).

C'est généralement dans des situations de défis que les élèves vont peu à peu sentir la nécessité d'établir des protocoles précis qui, seuls, permettent de comparer les résultats obtenu. (…)

ANNEXE 2

Extrait de Mjer-Desco (2002) Documents d'application des programmes. Mathématiques 2002. Cycle 2 P. 13

La résolution de problèmes correspond à différents enjeux. Les problèmes de recherche, c'est-à-dire ceux pour lesquels aucune démarche préalablement explorée n'est disponible, placent les élèves en situation d'élaborer des procédures de résolution personnelles dont l'explicitation et la confrontation constituent des moments essentiels du travail mathématique. Certains de ces problèmes sont aménagés par l'enseignant pour permettre la construction de connaissances nouvelles ou favoriser une évolution dans la connaissance de notions déjà rencontrées. D'autres problèmes sont destinés à permettre l'utilisation des acquis antérieurs dans des situations d'application et de réinvestissement.

Extrait de Mjer-Desco (2002) Documents d'application des programmes. Mathématiques 2002. Cycle 3. P. 13

Les activités relatives à la résolution de problèmes portent sur :

- des problèmes de recherche, c'est-à-dire des problèmes pour lesquels l'élève ne dispose pas de démarche préalablement explorée : certains de ces problèmes sont utilisés pour permettre la construction de connaissances nouvelles, d'autres sont davantage destinés à placer l'élève en situation de chercher, d'élaborer une solution originale ;
- des problèmes destinés à permettre l'utilisation des acquis antérieurs dans des situations d'application et de réinvestissement ;
- des problèmes destinés à permettre l'utilisation conjointe de plusieurs connaissances dans des situations plus complexes.

DEMARCHES D'INVESTIGATION ET COLLECTIFS DANS LA FORMATION DES ENSEIGNANTS

Marie-Pierre LEBAUD* – Ghislaine GUEUDET**

Résumé – De nombreuses formations d'enseignants, visant les démarches d'investigation en mathématiques, ont recours au travail collectif des professeurs. Nous présentons ici une étude des recherches concernant de telles formations dans l'objectif d'approfondir le lien entre démarches d'investigation en classe et collectifs dans la formation des enseignants. Nous interrogeons les types de démarches et les types de collectifs qui interviennent dans les dispositifs étudiés. Nous montrons que des parallèles sont faits entre la formation et la classe, souvent implicitement. Les travaux qui se réfèrent à la notion de communauté d'investigation modélisent et identifient les transferts possibles, de la formation à la classe.

Mots-clefs : Collectifs de professeurs, Communautés d'investigation, Enquête, Etude collective d'une leçon, Formation des enseignants

Abstract – Many teacher education programs, aiming at the development of teaching practices oriented toward inquiry in mathematics, use teachers' collectives. We present here a study of the research literature about this topic; we try to deepen the understanding of the link between inquiry and teachers' collectives. We investigate the types of inquiry, and the types of collectives, present in the teacher education programs studied by these research works. We show that many programs seem to draw a parallel between training and classroom. The works about inquiry communities, propose and assess a theoretical model of transfer from training to classroom.

Keywords: Collaborative research, Inquiry, Inquiry community, Lesson study, Teachers' collectives, Teacher education

I. QUESTIONNER LE LIEN ENTRE DEMARCHES D'INVESTIGATION ET COLLECTIFS DANS LA FORMATION DES ENSEIGNANTS

Comme le rappelle la présentation du GT10, dans les systèmes éducatifs de nombreux pays, ont été formulées (en particulier depuis les années 2000) des recommandations, pour l'enseignement des sciences et notamment des mathématiques, allant dans le sens de mises en œuvre de « démarches d'investigations » (nous utilisons, dans la suite, l'abréviation DI). Quel que soit le vocabulaire utilisé, et les caractéristiques de ces démarches, il est largement reconnu qu'elles ne correspondent pas aux pratiques d'enseignement les plus courantes, et qu'elles nécessitent donc des formations spécifiques. Ainsi des formations, initiales ou continues, poursuivant ce type d'objectif ont été mises en place dans de nombreux pays.

Les dispositifs retenus pour ces formations font souvent appel au travail de collectifs impliquant des enseignants ou futurs enseignants. Dans ces collectifs, peuvent également intervenir des formateurs de différents statuts, et des chercheurs. On observe, à travers les contextes nationaux et institutionnels, une grande variété de collectifs et de types de travaux réalisés par ceux-ci.

Notre travail se situe dans le cadre du projet européen S-TEAM (Science Teacher Education Advanced Methods, Grangeat 2011) centré sur l'étude des formations d'enseignants visant le développement de DI. Nous sommes plus particulièrement impliquées dans une partie de ce projet consacrée au travail collectif enseignant dans de telles formations. C'est dans ce contexte que nous avons entrepris une revue de travaux de recherche sur ce thème, à

* Université de Rennes 1, Centre de Recherche sur l'Education, les Apprentissages et la Didactique (CREAD) – France – Marie-Pierre.Lebaud@univ-rennes1.fr
** IUFM-Université de Bretagne Occidentale, CREAD – France – ghislaine.gueudet@bretagne.iufm.fr

© Lebaud M.-P., Gueudet G. (2012) Démarches d'investigation et collectifs dans la formation des enseignants. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT10, pp. 1400–1412). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

une échelle internationale. Il nous a semblé essentiel de chercher à identifier les principales dimensions organisatrices de ces travaux, pour contribuer à démêler la complexité de l'articulation entre travail collectif enseignant (dans le cadre de formations), et évolutions de pratiques vers la mise en place de DI dans les classes.

Quels types de démarches sont précisément visés par ces formations ? Le type de démarche visé influence-t-il le choix du dispositif de formation ? Quels types de collectifs interviennent dans les formations ? Quel rôle jouent, dans ces formations, des chercheurs en didactique des mathématiques, quelle place pour les résultats de recherche ? Des liens sont-ils faits entre travail collectif enseignant et formation aux DI, et lesquels ? Ces questions, parmi d'autres, se posent au départ de notre travail.

Pour engager ce travail, il est nécessaire de retenir une première caractérisation des DI. Nous avons choisi de considérer que toute pratique d'enseignement laissant aux élèves une responsabilité importante vis-à-vis du savoir mathématique en jeu, et s'appuyant sur les productions des élèves pour faire avancer le savoir dans la classe, peut être vue comme relevant des DI. Nous avons donc retenu, pour notre corpus de travaux, tous ceux qui étudient des dispositifs comportant des collectifs, et dont l'un au moins des objectifs est la formation à de telles pratiques d'enseignement. Dans cette contribution, nous faisons tout d'abord le point sur les principaux types de DI apparaissant dans ces travaux, en lien avec les contextes curriculaires nationaux ; nous examinons ensuite les dispositifs de formation. Nous nous intéressons finalement à l'articulation entre type de démarches et place des collectifs dans les dispositifs de formation.

II. DÉMARCHES D’INVESTIGATION : VERS UNE TYPOLOGIE

Les DI ont donné lieu à de nombreux travaux. Matheron (2010) présente une mise en perspective à laquelle nous nous référons ici. John Dewey est l'initiateur du « *hands-on learning* » (« *apprendre par l'action* ») : il prône un apprentissage à partir d'un questionnement du réel qui doit faire éprouver à l'élève la nécessité de mener une enquête, cette enquête permettant l'acquisition de nouvelles connaissances (Westbrook, 1993). On retrouve ses idées dans les réformes des années 1990 aux États-Unis connues sous le nom d'*Inquiry-based Science Education.* Cette dénomination (IBSE) est reprise dans le rapport « *une pédagogie renouvelée pour l'avenir de l'Europe* » (Rocard et al. 2007), rédigé à la demande de la commission européenne en 2007. Ce rapport oppose la « *transmission descendante* », où le professeur présente les concepts, à la « *transmission ascendante* » où l'enfant construit ses connaissances sous la conduite du professeur par une démarche d'investigation définie comme étant :

> un processus intentionnel de diagnostic des problèmes, de critique des expériences réalisées, de distinction entre les alternatives possibles, de planification des recherches, de recherche d’hypothèses, de recherche d’informations, de construction de modèles, de débat avec des pairs et de formulation d’arguments cohérents. (Rocard et al. 2007, p. 9)

Les travaux qui s'intéressent aux collectifs dans la formation des enseignants aux DI adoptent d'emblée différentes perspectives sur celles-ci. Il nous a donc semblé nécessaire, dans un premier temps, de clarifier ces perspectives. Celles-ci sont souvent liées à des contextes curriculaires ; elles peuvent cependant relever d'un positionnement épistémologique général, ou correspondre à des formes très pratiques de mise en œuvre.

1. *Des arrière-plans théoriques de la DI*

Dans les travaux étudiés, deux dimensions principales des DI en mathématiques apparaissent : d'une part, questionner le réel et faire le lien entre le réel et les concepts scientifiques et, d'autre part, « *mener une enquête* » (inquiry), celle-ci pouvant se faire par l'expérimentation, par une recherche documentaire…, mais aussi par la confrontation des différents points de vue des élèves.

Ces deux dimensions sont présentes dans les « *normes pour l'Enseignement des Mathématiques* » (Principes and Standards for School Mathematics) du NCTM (National Council of Teachers of Mathematics, 2000) auxquels se réfèrent l'ensemble des travaux nord-américains (par exemple, Smith 2007, Suurtamm, et Vezina 2010). Ces normes portent sur les savoirs à enseigner, mais aussi sur les capacités à développer chez les élèves, parmi lesquelles on trouve la résolution de problèmes, l'argumentation et la preuve, ainsi que la construction de modèles mathématiques. Il s'agit de résoudre des problèmes issus du réel en appliquant ou en adaptant des stratégies variées et de mener une réflexion sur les processus de résolution mis en place. La technologie (calculatrices et ordinateurs) est également présentée comme essentielle à l'enseignement et à l'apprentissage des mathématiques, et susceptible de soutenir l'investigation. La question d'un choix de thèmes pour travailler la modélisation a été peu étudiée. Certains travaux soulignent l'importance des textes proposés aux élèves, comme Lavy et Shriki (2010) qui étudient un travail collaboratif sur la modification de textes de problèmes (the « *what if not?* » strategy).

L'aspect argumentation est au centre du projet LCM (Learning Communities in Mathematics, Jaworski et al. 2007), porté par l'université d'Agder en Norvège entre 2004 et 2007. Il visait l'amélioration de l'enseignement des sciences en développant la pratique de l'investigation, au sens du NCTM, par les élèves dans la classe, mais aussi par les professeurs dans la formation et la recherche sur l'enseignement. Le point qui nous intéresse dans ce paragraphe porte sur ce que signifie l'investigation au niveau des élèves, nous reviendrons sur les professeurs dans la partie suivante. Le principe retenu pour le travail des élèves est le « *dialogic inquiry* » (Wells 2001) : à partir d'un problème ouvert, les élèves doivent mener une « *enquête* », reconnaître les questions pertinentes et trouver les moyens d'y répondre. Le dialogue entre pairs et avec l'enseignant est privilégié pour développer un langage commun et intégrer le langage mathématique : celui-ci est reconnu comme fondamental pour aider l'élève à conceptualiser (Ryve 2007). Le projet TBM (Teaching Better Mathematics) prolonge les travaux de LCM. Mené de 2007 à 2010 en partenariat avec des écoles ayant participé au projet précédent et de nouvelles écoles, il montre l'apport du travail fait par LCM en termes d'évolution des pratiques professionnelles (Berg 2010).

Dans le contexte français, la dimension d'enquête est présente sous la forme de « résolution de problèmes ». Ainsi, depuis les années 1990, les programmes scolaires français de l'enseignement en primaire en mathématiques privilégient une approche « expérimentale » des mathématiques à travers la « résolution de problèmes » : les élèves doivent être confrontés à des questions ouvertes, issues du réel de la classe, pour lesquelles ils n'ont pas de démarches de travail préalablement explorées et qui peuvent être étudiées de diverses façons. Cette approche est encore relativement peu exploitée dans les pratiques des enseignants (Peix et Tisseron 2003, Georget 2007). Notons que certains travaux sur ce thème considèrent l'apport de plates-formes numériques, permettant aux enseignants de disposer de ressources et d'échanger autour de la résolution de problèmes (Georget 2009, Aldon et Durand-Guerrier 2011).

Nous allons maintenant nous intéresser aux dispositifs de mise en œuvre dans la classe de DI et aux liens qui peuvent être faits avec les dimensions de la DI identifiées précédemment.

2. *Des dispositifs de mise en œuvre des DI*

Nous avons retenu, parmi les dispositifs de mise en œuvre, les travaux qui se réfèrent aux « *lesson studies* » japonaises (Fernandez 2008, Lewis, Perry et Hurd 2009, Inoue 2010). Les résultats obtenus par les élèves japonais aux évaluations internationales ont mis l'accent sur les méthodes d'enseignement de ce pays qui contrastent avec l'enseignement dans les pays occidentaux (Miyakawa et Winsløw 2009). Une « leçon » japonaise se déroule en cinq phases : d'abord l'enseignant propose une question ouverte (*hatsumon*), généralement issue de la « vie de tous les jours ». Les élèves travaillent alors sur ce problème (*kikan-shido*) soit seuls, soit en groupe. La phase suivante consiste en une présentation des résultats obtenus (*takuto*) par certains des élèves, choisis par l'enseignant, celui-ci ayant pour objectif que différentes approches soient proposées. Ces présentations sont ensuite discutées par tous les élèves (*neriage*) et l'enseignant conclut cette leçon en résumant le travail accompli par les élèves (*matome*). Il propose très rarement d'autres méthodes de résolution ou d'autres techniques que celles trouvées par les élèves.

On retrouve dans cette organisation du travail certaines dimensions d'une DI que nous avons mentionnées auparavant : un problème avec un enjeu sur le questionnement du réel dans le *hatsumon* et les observations, formulations d'hypothèses et éléments de preuve par les élèves dans le *kikan-shido* puis le débat et l'argumentation dans le *neriage*. La situation de départ est fondamentale pour démarrer le travail des élèves et il est donc important de bien cibler les connaissances acquises des élèves pour voir apparaître des procédures de résolution. Le principe d'enquête est peu présent, mais la confrontation de ses idées avec celles de ses pairs est au centre de l'apprentissage. Miyakawa et Winsløw (2009) proposent un rapprochement des *lesson studies* japonaises et de l'ingénierie didactique : dans les deux cas, il s'agit en effet de collectifs travaillant à la conception de situations. Toutefois dans le cadre de notre travail, un tel rapprochement ne paraît pas pertinent, l'ingénierie didactique ne pouvant être considérée comme visant des évolutions de pratiques allant dans le sens de l'investigation.

Dans ce dispositif, les rôles de l'enseignant et des élèves sont parfaitement définis : c'est par exemple l'enseignant qui pose le problème en fonction des savoirs acquis et des savoirs à acquérir, qui choisit les réponses proposées à la discussion et résume le travail accompli. Cette organisation praxéologique est ancienne au Japon et ne concerne d'ailleurs pas que l'enseignement des mathématiques. Il s'agit ici d'une pratique institutionnelle et culturelle. Des expériences de transposition de cette pratique à d'autres systèmes éducatifs sont menées, par exemple aux États-Unis, où elles donnent lieu à des formations spécifiques (Lewis 2002). Ce type d'enseignement, éloigné des pratiques courantes dans les pays occidentaux, modifie le travail de l'enseignant en classe et nécessite une adaptation de son rapport aux mathématiques.

En France, des dispositifs de mise en œuvre de DI sont apparus dans les programmes mis en place au collège (Bulletin officiel 2007) : dans l'introduction commune aux disciplines scientifiques, les DI sont mises en avant comme une des méthodes d'enseignement possibles, en fonction du sujet traité. Elles sont ainsi décrites dans le « *canevas d'une séquence d'investigation* » :

> …choix d'une situation-problème, appropriation du problème par l'élève, formulation de conjectures, d'hypothèses, investigation ou résolution de problèmes conduite par les élèves, échange argumenté autour des propositions élaborées, acquisition et structuration des connaissances, opérationnalisation des connaissances… (Bulletin Officiel 2007, annexe 1, p. 6)

La place et le rôle des savoirs anciens et nouveaux sont explicités dans le détail de ce canevas et les situations choisies peuvent permettre soit d'introduire des connaissances nouvelles, soit de donner du sens et d'assurer la maîtrise de notions déjà travaillées. Il s'agit d'une pratique d'enseignement basée sur le questionnement de l'apprenant, mais, contrairement à la « leçon » japonaise, la répartition des rôles de l'enseignant et des élèves n'est pas clairement définie. Cette présentation de la DI comme méthode d'enseignement, assez récente, n'a pas encore donné lieu à de nombreux travaux en mathématiques, contrairement aux sciences expérimentales où cette méthode était plus couramment utilisée (par exemple, Calmettes 2009, de Hosson, Mathé et Méheut 2010).

Remarquons que ce canevas de séquence fait lui-même partie des compétences du socle commun (2006) à acquérir par l'élève :

> pratiquer une démarche d'investigation : savoir observer, questionner ; manipuler et expérimenter, formuler une hypothèse et la tester, argumenter. (palier 2, compétence 3 du livret personnel de compétences)

Curieusement, aucun article de recherche sur ce thème de la DI comme compétence ne semble exister en mathématiques, alors que là-encore il est pris en compte dans les autres sciences.

Dans l'apprentissage par DI, les élèves exercent une responsabilité importante vis-à-vis du savoir en jeu et l'enseignant s'appuie sur leurs productions pour faire avancer les connaissances en classe. Les DI et les méthodes traditionnelles de transmission du savoir constituent deux approches différentes qui entraînent deux rôles différents de l'enseignant dans la classe et probablement des rapports différents aux mathématiques. Quels dispositifs de formation ont été mis en place pour aider les enseignants à passer aux approches « innovantes » (Carpenter et al. 2004) ?

III. DISPOSITIFS DE FORMATION ET COLLECTIFS

La question des collectifs de professeurs, dans la formation initiale ou continue, a donné lieu à des nombreux travaux de recherche. L'ouvrage de Krainer et Wood (2008) en présente une synthèse ; l'étude ICMI 15 (Even et Ball 2009) et le Journal of Mathematics Teacher Education en font également état. Certains de ces travaux concernent des formations visant le développement de DI dans les classes, en lien notamment avec les réformes curriculaires évoquées ci-dessus ; ce sont ces travaux que nous avons retenus.

Nous partons d'une distinction entre dispositifs dans lesquels les collectifs sont des groupes de professeurs, encadrés par un ou plusieurs formateurs et dispositifs impliquant des collectifs hybrides (Sensevy 2010) de professeurs, formateurs et chercheurs. Il ne s'agit pas d'une simple distinction d'organisation ; ces types de collectifs correspondent généralement à des intentions différentes, entre un objectif centré sur la formation des enseignants dans le premier cas, et un objectif plus large, qui peut notamment englober la production de ressources pour la classe dans le second cas.

1. Collectifs de professeurs, encadrement par des formateurs

Nous considérons ici des dispositifs qui peuvent correspondre à de la formation initiale ou continue (il arrive que le même dispositif soit testé d'une part en formation initiale, d'autre part en formation continue). Parfois ces formations alternent le travail avec un groupe complet de stagiaires, dont l'effectif peut être relativement important, et les travaux dans des petits groupes (c'est presque toujours le cas, pour la formation initiale) ; parfois l'intégralité de la formation se déroule en petits groupes. Nous avons évoqué ci-dessus les « leçons » japonaises. Celles-ci sont associées à un type de dispositif de formation qui a donné lieu à de nombreux travaux, au niveau international : les *lesson studies* (que nous nommons ici *études collectives de leçons,* figure 1). Celles-ci ont inspiré de nombreuses formations, dans le monde entier (Fernandez 2008 ; Lewis *et al*. 2009 ; Miyakawa et Winsløw 2009 ; Inoué 2010, Leavy 2010).

Inoué (2010) étudie une formation impliquant 6 professeurs des écoles, aux États-Unis, encadrés par 2 professeurs japonais. La formation suit le principe des études collectives de leçons : les enseignants préparent avec le soutien des formateurs une leçon, qui sera faite par l'un d'eux. Une variante est toutefois introduite, par rapport à ce qui se pratique au Japon : la leçon est filmée, car les stagiaires n'ont pas la possibilité d'aller observer. La vidéo est ensuite visionnée lors des réunions du groupe ; elle est discutée, et la leçon est révisée.

L'auteur relève des évolutions, dans les mises en œuvre des professeurs américains, et dans leurs échanges lors de la formation. Alors qu'ils étaient au départ centrés sur le fait de faire exprimer aux élèves une diversité de procédures personnelles, ils développent progressivement une attention plus grande au savoir en jeu. Ils consacrent ainsi plus de temps à une analyse préalable des situations, déclarant qu'il faut anticiper les procédures des élèves pour gérer le débat et faire avancer le savoir.

Figure 1 *– Étude collective de leçons aux États-Unis (Inoué 2010)*

Dans ces dispositifs, le collectif doit permettre une analyse réflexive de la pratique de classe. Il s'agit ainsi pour les petits groupes d'élaborer une leçon et de la tester, puis d'étudier ce qui s'est passé en classe. Une simple élaboration collective de séance, sans mise en œuvre, ne peut avoir le même impact (Peix et Tisseron 2003). Au-delà de cet aspect réflexif, l'objectif lié aux DI amène une attention particulière à l'utilisation faite par le professeur des productions des élèves. Au début d'une telle formation, les professeurs peuvent avoir un regard simplement critique sur ce que proposent les élèves ; progressivement, ils identifient dans ces productions ce qu'ils peuvent exploiter, pour l'avancée du savoir. Cette évolution est attribuée en particulier au travail collectif, et à la possibilité de discuter avec ses collègues l'interprétation des productions d'élèves.

Une autre cause identifiée pour ces évolutions est aussi une attention plus grande portée au savoir en jeu ; parfois un travail en mathématiques est proposé au sein de la formation (par exemple dans le cas des statistiques, Leavy 2010 ; Visnovska, Cobb et Dean 2012).

Les formations organisées en Italie dans les « laboratoires de mathématiques » (Maschietto 2010) suivent une structure semblable, avec la particularité de viser, en même temps que les DI, l'emploi de certaines technologies (machines mathématiques). C'est également le cas, en France, des formations au sein du programme Pairform@nce, dont certaines sont consacrées aux DI en mathématiques utilisant des logiciels, comme les tableurs ou les logiciels de géométrie dynamique (Gueudet et Trouche 2011). Dans les travaux correspondants, les auteurs relèvent essentiellement des évolutions de pratique liées aux usages des machines, ou des logiciels. Pour le cas de la géométrie dynamique par exemple, le passage d'un emploi du logiciel par le professeur au vidéo-projecteur à un travail proposé en salle informatique, dans lequel les élèves utilisent directement le logiciel va dans le sens du développement des DI. Cependant une seule formation (étalée sur 3 mois) ne semble pas suffisante pour passer à un travail dans lequel les élèves exercent des responsabilités importantes, du point de vue mathématique comme vis-à-vis du logiciel. Notons par ailleurs que, dans ces travaux, une partie du travail collectif des équipes de professeurs se fait en utilisant une plate-forme distante ; c'était également le cas dans les travaux du SFoDEM[1] (Sauter *et al.* 2008). Cette possibilité technique permet un étalement de la formation dans le temps, alternant présence et

[1] Suivi de Formation à Distance des Enseignants de Mathématiques

distance. Nous ne développons pas ici cet aspect, qui ne nous semble pas être directement en lien avec les DI.

Dans certaines des formations évoquées ci-dessus, les formateurs sont également des chercheurs. Cependant l'objectif reste, de manière explicite, la formation des enseignants membres des collectifs, contrairement aux recherches que nous allons évoquer maintenant.

2. *Collectifs impliquant des chercheurs*

Du point de vue français, le cas typique de collectifs impliquant des enseignants et des chercheurs est le groupe IREM[2]. Dans ces groupes, des professeurs travaillent avec des chercheurs à l'étude de questions professionnelles (travail qui peut lui aussi exploiter une plate-forme pour une communication distante, Georget 2007). L'objectif relève à la fois de la formation et de la production de ressources qui pourront être diffusées ; le ou les chercheurs membres de ces groupes ne sont pas directement en position de formateurs.

Les thématiques retenues par certains de ces groupes sont proches des DI : c'est le cas, par exemple, des groupes travaillant sur les Parcours d'Étude et de Recherche (Matheron et Noirfalise 2010). Cependant le travail même de ces groupes, leurs dynamiques collectives, n'ont été que rarement étudiés. Nous retenons le travail récent de Artigue (2011), à propos du groupe « modélisation » de l'IREM de Paris 7. Ce groupe rassemble des professeurs de mathématiques, de sciences physiques, de SVT[3], et des chercheurs en didactique des mathématiques et didactique des sciences. Dans le cas de ce travail pluridisciplinaire, les DI sont associées à la nécessité de modélisation mathématique de situations de sciences physiques ou de SVT, et donc de compréhension commune par les professeurs des démarches de chaque discipline. Le même type d'apports du travail collectif de professeurs de différentes disciplines et de chercheurs est relevé par Prieur, Sanchez et Aldon (2011), à propos d'un groupe de professeurs de lycée en mathématiques, sciences physiques et SVT menant un travail expérimental sur un enseignement scientifique en seconde avec une équipe de chercheurs de l'INRP[4].

En ce qui concerne des groupes impliquant chercheurs et professeurs de mathématiques, nous avons évoqué (§ II) le projet LCM (Jaworski et al. 2007). Nous en donnons ici (figure 2) un aperçu plus détaillé.

Les groupes LCM sont constitués de professeurs du secondaire et de chercheurs en didactique. En tout une dizaine de chercheurs ont participé au projet, et une quarantaine de professeurs, chaque groupe travaillant pendant 3 ans. Ces groupes sont, de manière explicite, dédiés à une formation visant le développement de DI dans les classes des professeurs qui en sont membres.

Ces groupes ont principalement travaillé à la préparation de séquences de classe. Les chercheurs proposent des ressources (brochures, articles etc.) ; ce sont les professeurs, ensuite, qui élaborent un scénario de classe. Le scénario donne lieu à une ou plusieurs mises en œuvre, qui sont filmées puis discutées dans le groupe.

Les chercheurs notent que les séances élaborées au fil du travail des groupes témoignent d'une plus grande sensibilité des professeurs aux DI, en particulier en ce qui concerne la présentation de l'activité, et l'emploi du langage mathématique.

Figure 2 *– Le projet LCM (Jaworski et al. 2007)*

[2] Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques.
[3] Sciences de la Vie et de la Terre.
[4] Institut National de Recherche Pédagogique, désormais Institut Français de l'Éducation.

Le projet LCM a donné lieu à l'introduction du concept de *inquiry community* (Jaworski *et al.* 2007), que nous traduisons par « communauté d'investigation ». Ce concept est fondé sur celui de communauté de pratique (Wenger 1998). L'hypothèse faite ici est que le faible développement des DI est une conséquence de l'identité professionnelle même des enseignants, qu'il s'agit donc de faire évoluer. Or, l'identité d'un sujet dépend des communautés auxquelles il appartient ; donc cette évolution peut avoir lieu si le professeur appartient à une communauté dans laquelle l'investigation est une attitude partagée. Ici, le lien entre collectifs et DI est clairement établi, fondé sur une perspective théorique spécifique.

La notion de communauté d'investigation a été ensuite largement reprise (notamment dans le projet PriSSM[5] aux États-Unis, Slavit et Nelson 2010). Dans la plupart des dispositifs se référant à cette notion, on retrouve une organisation proche de celle des *études collectives de leçons* évoquées ci-dessus. La différence tient essentiellement à la composition et au positionnement des membres du groupe. Professeurs et chercheurs collaborent, la formation est une conséquence de cette collaboration, et les résultats de recherche constituent une ressource importante pour le travail du groupe. Certains traits, concernant les évolutions de pratiques des professeurs, rejoignent ceux que nous avons évoqués ci-dessus : développement de l'attention aux procédures des élèves ; à la présentation de la tâche ; au langage etc. D'autres résultats semblent spécifiques à ce type de collectif, comme le fait que ces professeurs, avec leurs élèves, tendent à former également une « communauté d'investigation » : le travail dans le collectif professeurs-chercheurs semble avoir un impact direct sur le travail en classe (Hunter 2010).

IV. COLLECTIFS ENSEIGNANTS, FORMATION AUX DI, QUELLE ARTICULATION ?

Nous avons, au fil de cette contribution, répondu à la plupart des questions que nous avions posées, au départ de ce travail. Nous revenons dans cette partie à la dernière de ces questions :

Des liens sont-ils faits entre travail collectif enseignant et formation aux DI, et lesquels ?

Des liens apparaissent effectivement, dans les travaux que nous avons examinés. Nous allons distinguer les constats, ou les hypothèses sur le lien DI-collectifs, qui interviennent dans le choix même de dispositifs de formation, et les liens DI-collectifs qui apparaissent dans les analyses portant sur l'impact des formations.

1. *De la formation à la classe : du parallèle au transfert ?*

Lorsque l'aspect DI s'inscrit dans un objectif plus large de pluridisciplinarité, dans le cadre de formations continues d'enseignants du second degré en France, le recours aux collectifs dans la formation s'impose comme conséquence de la mono-disciplinarité de ces enseignants.

En dehors de ce cas très spécifique où le collectif est incontournable, nous avons souligné que, quels que soient les dispositifs de formation étudiés, les collectifs impliqués élaborent eux-mêmes une séance ou séquence, la testent en classe, puis la discutent dans la formation. Qu'il s'agisse d'équipes de professeurs stagiaires, encadrés par des formateurs, ou de collectifs hybrides d'enseignants et de chercheurs, ces dispositifs mettent en avant une implication active, et une incitation à la réflexivité des enseignants. Dans certains travaux, un parallèle est explicitement fait entre ce travail des collectifs en formation et la DI en classe :

[5] Partnership for Reform in Secondary Science and Mathematics.

> We saw classes and teacher communities adopt the stance that knowledge generation was a function of the community and that they did not have to depend on the teacher or professional development leader as the provider and arbitrator of what counted as knowledge[6] (Carpenter et al. 2004, p. 5)

La formation des enseignants étant elle-même un enseignement, elle peut se dérouler « selon une DI » ; ce qui amène le recours au collectif, comme élément caractéristique d'une mise en œuvre de type DI. Ce parallèle repose sur un élargissement du sens de la DI au-delà de l'enseignement des sciences, à tout type de contenu : un principe général de DI peut donner lieu à des « DI-classe » ou à des « DI-formation ». Les « DI-formation » pourraient être adoptées quel que soit l'objectif de la formation : apprentissage des fonctionnalités d'un nouveau logiciel, par exemple.

Dans certains travaux, il ne s'agit toutefois pas simplement d'un élargissement, mais de l'hypothèse d'un transfert, spécifique aux formations visant les DI : la « DI-formation », par un effet de transfert, donnerait lieu à de la « DI-classe ». C'est le cas des travaux se référant à la notion de communauté d'investigation ; ainsi l'investigation collective en formation serait, selon ces auteurs, une modalité spécifique des dispositifs visant les DI.

Dans ces travaux, le choix du collectif résulte d'une perspective théorique, ancrée en théorie de l'activité (Engeström 1987). C'est cette perspective qui amène l'hypothèse du transfert : l'attitude d'investigation, forgée dans le groupe de recherche, deviendrait une partie constitutive de l'identité des professeurs ; elle serait donc transférée par ces professeurs à leur classe (dans ce cas, la « DI-formation » inclut donc forcément un travail collectif). Rappelons que dans le projet LCM, les DI sont vues sous leur forme « enquête », du côté donc d'un positionnement épistémologique, plus que d'une mise en œuvre particulière. Ceci est donc cohérent avec l'idée que les DI dépendent de l'identité professionnelle des professeurs, et seront développées si cette identité intègre le positionnement épistémologique d'enquête. La description que nous donnons ici est volontairement simplificatrice : en effet, le concept même de communauté d'investigation a été progressivement forgé au fil du travail dans le projet LCM. Le lien entre perspective théorique et travail de terrain est, comme toujours, dialectique. Ce que nous voulons souligner ici est que ces travaux font explicitement l'hypothèse du transfert à la classe des attitudes adoptées en formation ; certaines recherches confirment ensuite la validité de cette hypothèse, au fil du suivi des professeurs (projet TBM, Berg 2010).

Nous allons maintenant nous pencher plus précisément sur ce que les recherches donnent à voir, concernant l'impact des formations, et le rôle des collectifs dans cet impact.

2. *Étude de l'impact des dispositifs et lien collectif-DI*

Les travaux que nous avons considérés ne se penchent pas tous sur les évolutions de pratique des enseignants impliqués ; certains se limitent à la présentation d'un dispositif. Deux principaux types d'évolutions sont identifiés par les recherches qui proposent de telles analyses (tous deux peuvent concerner le travail hors classe et en classe des professeurs) :

- des évolutions allant dans le sens d'une plus grande responsabilité laissée aux élèves. Les professeurs développent une attention aux procédures des élèves, à leurs erreurs et à l'exploitation qui peut en être faite en classe ; pour l'emploi d'un logiciel, la manipulation de celui-ci est confiée aux élèves ;

[6] « Nous avons vu des classes, et des communautés d'enseignants, se mettre à considérer que la production de connaissances était du ressort de la communauté et qu'elles ne devaient pas dépendre du professeur ou du formateur pour fournir ou arbitrer ce qui pouvait être reconnu comme connaissance ».

- des évolutions relatives à l'attention au savoir en jeu. Celles-ci peuvent concerner le choix de la situation de départ, ou la mise en œuvre en classe, en particulier ce qui touche à la gestion des débats, puis à l'institutionnalisation.

Le collectif est toujours indiqué comme un facteur important, pour ces évolutions de pratique.

À propos des responsabilités laissées aux élèves, le collectif semble intervenir d'au moins deux manières différentes. D'une part, le travail au sein d'une équipe peut donner aux professeurs la confiance nécessaire, pour se lancer dans l'élaboration d'une séance qui sort de leur fonctionnement habituel, laissant plus de responsabilités aux élèves. Parfois cette confiance prend une forme très concrète : le fait que la formation prévoie que la séance d'investigation va être observée permet une mise en œuvre dans laquelle deux professeurs, au moins, vont pouvoir intervenir en cas de difficultés ! D'autre part, le collectif permet de confronter des points de vue différents. Par exemple le fait de discuter avec des collègues, sur la base de productions d'élèves, montre aux professeurs que des interprétations différentes peuvent être faites.

En ce qui concerne l'attention portée au savoir en jeu, les travaux qui mentionnent cette dimension soulignent l'importance du rôle des formateurs et/ou chercheurs, pour soutenir des évolutions en ce sens. La gestion de l'avancée du savoir, dans un enseignement recourant aux DI, est spécifiquement difficile. Les recherches semblent montrer que les enseignants portent leur attention en priorité sur des modalités de mise en œuvre pédagogique des DI, et que l'intervention de formateurs ou chercheurs est nécessaire pour mettre en avant les questions liées au savoir.

Nous notons aussi que plusieurs auteurs (Ostermeier, Prenzel et Duit 2010) soulignent que la dimension collective, en particulier lorsqu'il s'agit de professeurs du même établissement, est un facteur de durabilité pour les évolutions de pratiques.

Dans cette contribution, nous n'avons, bien entendu, pas été exhaustives, par rapport aux travaux existants, ni même par rapport aux articles que nous avons étudiés. Nous n'avons ainsi pas développé les nouvelles perspectives sur les collectifs qu'ouvre l'emploi de plates-formes distantes ; nous ne nous sommes pas arrêtées sur des modalités de formation innovantes, associant en équipe des stagiaires en formation initiale et des professeurs chevronnés. Notre travail va être poursuivi ; nous pensons toutefois qu'il permet déjà d'identifier des dimensions importantes des recherches sur les collectifs enseignants et les DI.

REFERENCES

Aldon G., Durand-Guerrier V. (2011) Ressources pour la mise en place de problèmes de recherche dans la classe. In Kuzniak A., Sangaré M. *Actes du colloque EMF 2009, Dakar, avril 2009*, 784-791.

Artigue M. (2011) *Enseignement des mathématiques : le défi de la pluridisciplinarité*. Conférence invitée à la journée d'étude de l'IREM de Rennes, Mars 2011, Rennes.

Berg C. V. (2010) *Investigating the impact of a developmental research project on teachers' teaching practice: Listening to mathematics teachers' reflections*. Informal Proceeding 30-3 (BSRLM)

Bulletin officiel, hors série n°6, vol 2 du 19 avril 2007. http://www.education.gouv.fr/bo/2007/hs6/default.htm

Carpenter T. P., Blanton M. L., Cobb P., Franke M., Kaput J. J., McClain K. (2004). *Scaling up innovative practices in mathematics and science*. http://ncisla.wceruw.org/publications/reports/NCISLAReport1.pdf

Calmettes B. (2009) Démarches d'investigation en physique. Des textes officiels aux pratiques en classe. *Spirales*, 43, 139-148.

De Hosson C., Mathé S., Méheut M. (2010) La « démarche d'investigation dans les collèges français ». Démarches d'investigation et formation. *Actes des journées scientifiques DIES , 24-25 novembre 2010*. Lyon : INRP.

Engeström Y. (1987). *Learning by Expanding. An Activity-Theoretical Approach to Developmental Research*. Helsinki: Orienta-Konsultit.

Even R., Ball D. L. (Eds.) (2009) *The professional education and development of teachers of mathematics.* The 15th ICMI study. New ICMI study series. New York: Springer.

Fernandez M. B. (2008) Developing knowledge of teaching mathematics through cooperation and inquiry. *Mathematics teacher* 101(7), 534-538.

Georget J.-P. (2007) Facilitate research activities at the primary level: intentional communities of practice, teaching practices, exchanges about these practices. *Proceedings of the fifth congress of the European Society for Research in Mathematics Education, CERME 5,* Larnaca, Cyprus 22-26 February 2007.

Georget J.-P. (2009) Outils de la théorie des communautés de pratique et conception de ressources à destination de professeurs des écoles expérimentés pour la mise en œuvre de « problèmes pour chercher ». In Bloch I., Conne F. (Eds.) *Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques* (CD-rom). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Grangeat M. (Ed.) (2011) *Les démarches d'investigation dans l'enseignement scientifique. Pratiques de classe, travail collectif enseignant, acquisitions des élèves.* Lyon : École Normale Supérieure de Lyon, Institut National de Recherche Pédagogique.

Gueudet G., Trouche L. (2011) Mathematics teacher education advanced methods: an example in dynamic geometry. *ZDM, the International Journal on Mathematics Education* 43(3), 399-411.

Hunter R. (2010) Changing roles and identities in the construction of a community of mathematical inquiry. *Journal of Mathematics Teacher Education* 13, 397-409.

Inoue N. (2010) Zen and the art of neriage: facilitating consensus building in mathematics inquiry lessons through lesson study. *Journal of Mathematics Teacher Education*, online.

Jaworski B., Fuglestad A.B., Bjuland R., Breiteig T., Goodchild S., Grevholm B. (Eds) (2007) *Learning communities in mathematics*. Bergen : Caspar.

Krainer K., Wood T. (Eds.) (2008) *Participants in Mathematics Teachers Education: Individuals, Teams, Communities and Networks* (Vol. 3). Rotterdam/Taipei: Sense Publishers.

Lavy I., Shriki A. (2010) Engaging in problem posing activities in a dynamic geometry setting and the development of prospective teachers' mathematical knowledge. *The Journal of Mathematical Behavior* 29, 11-24.

Leavy A. M. (2010) The challenge of preparing preservice teachers to teach informal inferential reasoning. *Statistics education research journal* 9(1), 46-67.

Lewis C. C. (2002) Does lesson study have a future in the United States ? *Nagoya Journal of Education and Human Development* (1), 1-23

Lewis C. C., Perry R. R., Hurd J. (2009) Improving mathematics instruction through lesson study : a theorical model and North American case. *Journal of Mathematics Teacher Education* 12(4), 285-304.

Maschietto M. (2010) Enseignants et élèves dans le laboratoire de mathématiques. In Gueudet G., Aldon G., Douaire J. et Trgalova J. (Eds.) *Apprendre, enseigner, se former en mathématiques : quels effets des ressources ? Actes des journées mathématiques de l'INRP 2010*. Lyon: INRP.

Matheron Y (2010) *« Démarches d'investigation » et Parcours d'Étude et de Recherche en mathématiques : entre injonctions institutionnelles et étude raisonnée des conditions et contraintes de viabilité au sein du système*. Conférence invitée au colloque de la CORFEM, Juin 2010, Caen.

Matheron Y., Noirfalise R. (2010) Une recherche de la Commission inter-IREM (CII) didactique soutenue par l'INRP : Dynamiser l'étude des mathématiques dans l'enseignement secondaire (collège et lycée) par la mise en place d'AER et de PER. In Bronner A., Larguier M., Artaud M., Bosch M., Chevallard Y., Cirade G., Ladage C. (Eds.) (pp. 633-654) *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action*. IUFM de l'académie de Montpellier.

Miyakawa T., Winsløw C. (2009) Un dispositif japonais pour le travail en équipe d'enseignants : étude collective d'une leçon. *Education et didactique* 3(1), 77-90.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000) *Principles and standards for school mathematics*, Reston, VA : Author

Ostermeier C., Prenzel M., Duit, R. (2010) Improving Science and Mathematics Instruction: The SINUS Project as an Example for Reform as Teacher Professional Development. *International Journal of Science Education* 32 (3), 303–-27.

Peix A., Tisseron C. (2003) Concepts didactiques pour analyser et réorganiser une formation à la conduite de problèmes de recherche à l'école élémentaire. In Durand-Guerrier V., Tisseron C. (Eds) *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2002*, ARDM et IREM Paris 7.

Prieur M., Sanchez E., Aldon G. (2011) Enseignement scientifique co-disciplinaire en classe de Seconde : des éléments à prendre en compte pour sa mise en œuvre. In Grangeat M. (Ed.), *Les démarches d'investigation dans l'enseignement des sciences. Pratiques de classe, travail collectif enseignant, acquisitions des élèves*. Lyon. INRP-ENSL.

Rocard M., Csermely P., Jorde D., Lenzen D., Walberg-Henriksson,H., Hemmo V. (2007). *L'enseignement scientifique aujourd'hui : une pédagogie renouvelée pour l'avenir de l'Europe*. Bruxelles: rapport à la commission européenne. [Retrieved september 08, from http://ec.europa.eu/research/science-society/document_library/pdf_06/report-rocard-on-science-education_fr.pdf]

Ryve A. (2007) What is actually discussed in problem-solving courses for prospective teachers? *Journal of Mathematics Teacher Education.*

Sauter M., Combes M.-C., De Crozals A., Droniou J., Lacage M., Saumade H., Théret D. (2008) Une communauté d'enseignants pour une recherche collaborative de problèmes *Repères-IREM* 72, 25-45.

Sensevy G. (2010) Formes de l'intention didactique, collectifs, et travail documentaire. In Gueudet G., Trouche L. (Eds) *Ressources vives, le travail documentaire des professeurs en mathématiques.* Rennes / Lyon: Presses Universitaires de Rennes / INRP.

Slavit D., Nelson T. (2010) Collaborative teacher inquiry as a tool for building theory on the development and use of rich mathematical tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education* 13, 201-221.

Smith B. (2007) Promoting inquiry-based instruction and collaboration in a teacher preparation program. *Mathematics teacher* 100(8), 559-564.

Socle commun de connaissances et de compétences (2006). http://www.eduscol.education.fr/cid45625/socle-commun.html

Suurtamm C., Vezina N. (2010) Transforming pedagogical practice in mathematics : moving from telling to listening. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, (online).

Visnovska J., Cobb P., Dean C. (2012) Mathematics teachers as instructional designers: What does it take? In Gueudet G., Pepin B., Trouche L. (Eds) (pp. 323-341) *From text to 'lived resources': curriculum material and mathematics teacher development*. New York: Springer.

Wells G. (2001) The development of a community of inquirers. In Wells G. (Ed.) *Action, talk and text: learning and teaching through inquiry.* New York : Teachers College Press.

Wenger E. (1998) *Communities of practice. Learning, meaning, identity*. New York: Cambridge University Press.

Westbrook R. (1993) John Dewey. *Perspectives : revue trimestrielle d'éducation comparée* 22(1/2), 277-293.

LA DEMARCHE D'INVESTIGATION DANS LES MOYENS D'ENSEIGNEMENT SUISSES ROMANDS POUR LES MATHEMATIQUES ? MODELISER LES CONDITIONS DIDACTIQUES DE L'ENQUETE

Florence LIGOZAT*

Résumé – Cette contribution se propose de montrer en quoi certaines activités proposées dans les Moyens d'Enseignement suisse-romands pour les mathématiques à l'école primaire peuvent relever d'une démarche d'investigation dans le cadre de cette discipline. Dans un premier temps nous explicitons notre cadre conceptuel pour penser l'enquête comme moyen de construction de connaissance en général, puis nous formulons les spécificités de la démarche d'enquête sous conditions didactiques. Sur la base d'une activité de modélisation sélectionnée dans les Moyens d'enseignement romands pour les mathématiques (mesure, grade 4), nous analysons les contraintes et les possibles liées à la mise en place qu'une démarche d'investigation à partir des ressources fournies à l'enseignant.

Mots-clefs : résolution de problème; démarche d'investigation; modélisation, mesure, action conjointe, projet d'enseignement

Abstract – This contribution explores the potentialities of the official teaching materials for mathematics in Western Switzerland Cantons for developing inquiry-based learning. Starting from a pragmatist framework for conceptualizing inquiry in the learning process, some didactic conditions for developing such an inquiry in the classrooms are highlighted. Since the content of teaching resources plays a prominent role in the teaching designs set up by the teacher, we suggest analyzing the epistemic practices embedded in a sample activity proposed in the textbook (measurement, grade 4) to unveil the possible stakes of the inquiry. More generally, it is argued that these stakes are not obvious in the teaching resources and this impedes the development of inquiry-based learning in the classrooms.

Keywords: problem solving, inquiry based process, modeling, measurement, joint action, teaching design

I. L'INVESTIGATION ET LA CONSTRUCTION DE CONNAISSANCES : UN POINT DE VUE PRAGMATISTE

D'une façon générale, nous soutenons *qu'une logique d'investigation s'ouvre du point de vue de l'apprenant*, dès lors qu'une forme d'incertitude émerge dans le cours de son action (une question est alors identifiée par ce dernier) et que cette incertitude peut être réduite en établissant de nouveaux rapports aux objets en jeu dans la situation (c'est-à-dire à partir de rapports à ces objets déjà disponibles dans la culture sous forme de pratiques et/ou de discours). Cette définition assez large s'inspire des travaux princeps sur le fonctionnement des institutions didactiques (Chevallard 1992) et plus récemment de l'analyse des épistémologies pratiques (« practical epistemology analysis ») développée par Wickman afin de comprendre les processus d'apprentissage des élèves en travaux pratiques de science (Wickman et Östman 2002 ; Wickman 2004). L'approche pragmatiste de la construction de connaissance développée par ces derniers auteurs porte le double sceau d'une théorie non représentationnelle du langage (la signification du langage n'est pas dans la nature des choses mais dans les rapports entre les choses tels qu'organisés par l'activité humaine et médiatisés dans les discours ; Wittgenstein, 1958) et du principe de la continuité de l'expérience (Dewey 1938/1997). Pour ces auteurs, apprendre n'est pas comprendre la réalité « correctement » (ou appliquer le « bon » modèle pour expliquer un phénomène ou résoudre un problème), mais *transformer ses habitudes d'action* pour faire face à la diversité des situations qui se présentent aux sujets dans le cours de leur vie. Certaines manières d'agir restent au-delà du

* Université de Genève – Suisse – florence.ligozat@unige.ch

© Ligozat F. (2012) La démarche d'investigation dans les moyens d'enseignement suisse-romands pour les mathématiques ? Modéliser les conditions didactiques de l'enquête. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT10, pp. 1413–1422). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

questionnement ou du doute (elles vont de soi) lorsqu'elles n'ont pas de conséquences spécifiques dans ce que nous faisons ici et maintenant. Ainsi, ces manières d'agir peuvent être tenues pour « fixées » (stand fast) permettant à l'action de se faire, tandis que d'autres devront être transformées lorsque l'action devient incertaine, et le sujet est amené à s'interroger sur ce qu'il doit faire (gap).

Dans le point de vue didactique qui est le nôtre, la dimension située de la logique d'enquête du sujet et ses conditions d'apprentissage ne peut exister que sous couvert d'enjeux collectifs, historiquement marquées dans lesquels le sujet identifie le sens de ses actions. Ces enjeux collectifs en sont non seulement le point de départ mais également l'horizon qui permet de définir la fin de cette même enquête. Le rapport à l'expérience empirique se modifie au cours du temps par une forme de réflexivité guidée par les finalités institutionnelles de l'activité à laquelle le sujet participe. Si l'analyse des épistémologies pratiques (au sens de Wickman) n'est pas spécifique d'une situation didactique, nous soutenons quelle peut nous permettre de saisir le sens de l'action conjointe qui se mène dans une classe entre un professeur et ses élèves, à propos d'un enjeu de savoir (Ligozat, Wickman et Hamza 2011). Selon nous, l'analyse des épistémologies situées permet de revisiter la notion de « rapport au savoir » (rapport personnel / rapport institutionnel). Cette approche peut prendre en charge l'économie des rapports aux objets établis par les sujets *stricto sensu* (mesogenèse) dans une situation délimitée ici et maintenant par un cadre institutionnel (milieu, contrat didactique), mais aussi l'évolution de ces rapports dans le temps et la collocation d'autres situations, générant un rapport *lato sensu* à ces mêmes objets, qui est propre aux reconstructions dans l'expérience de la personne (Schubauer-Leoni, Leutenegger, Ligozat et Fluckiger 2007).

II. L'INVESTIGATION ET L'ACTION DIDACTIQUE : LE POINT DE VUE SOCIO-HISTORIQUE DE LA SÉDIMENTATION DES PRATIQUES DES TEXTES

Pour revenir à l'investigation comme moyen de construction des connaissances, si notre première définition est centrée sur le sujet, notre posture didactique nous amène à considérer le développent de l'enquête dans le cadre d'un *projet d'enseignement*, soit l'organisation intentionnelle d'une succession de dispositifs visant à faire apprendre *quelque chose* à l'élève. Le point de vue se déplace alors sur *le contenu de ce qui peut être appris* au travers les mises en forme discursives des rapports institutionnels au savoir que l'élève est censé établir *une forme d'action menée conjointement avec le professeur* (Sensevy et Mercier 2007). L'action didactique étant fondamentalement dialogique, la focale se déplace également sur le travail du professeur à partir des textes institutionnels qui préfigurent l'agir observé en classe. Selon nous, le concept de « texte », en tant que mode de sémiotisation de pratiques sociales, permet de penser la genèse des formes de l'action didactique selon différentes strates. Qu'il soit écrit ou oral, le texte émane toujours d'un processus interprétatif de la part de personnes dotées de capacités, au sens d'un pouvoir d'agir dans le monde qu'elles s'attribuent par internalisation des évaluations sociales externes (Bronckart et al. 2004, à la suite de Habermas), de buts et d'intentions. Cela pose donc la nécessité de considérer les formes d'agentivité du professeur dans le processus global de transposition didactique. D'un point de vue méthodologique, le cadre d'analyse utilisé relève d'une démarche générale d'analyse ascendante de la transposition didactique (Mercier 2008), depuis la nature des tâches proposées aux élèves dans le cadre de séance d'enseignement ordinaire.

Suivant le point de vue où l'on se place, les buts que les acteurs se donnent ne sont pas les mêmes. Un concepteur rédige des documents qui comportent un texte possible pour organiser l'action conjointe du professeur et de l'élève. Le professeur sélectionne un de ces documents pour construire un dispositif didactique, soit un texte projeté qui doit se déployer dans le temps (chronogenèse) et qui doit ménager « des choses à faire » du côté de l'élève et du côté du professeur respectivement (topogenèse). A son tour, l'élève confronté à tout ou partie du document (ce peut être une seule consigne donnée oralement ou écrite au tableau) se donne des buts en fonction des règles du contrat didactique qu'il identifie. Le texte du savoir au sens de Chevallard (1985/91), en tant que forme apprêtée d'éléments de culture sélectionnés, hiérarchisés et séquencés, vient donc à exister plusieurs fois : dans une forme figée au niveau des documents-supports d'une part, et dans une forme dynamique propre à la mise en œuvre d'un projet d'enseignement dans la classe d'autre part. Nous soutenons que ces espaces ne peuvent générer des situations d'apprentissage que sous le couvert d'un projet porté par le professeur, mais que les conditions de développent d'une investigation opérante du point de vue de l'élève ne sont pas nécessairement rendues visibles dans les documents-supports de l'activité didactique (Ligozat 2010).

III. UNE ÉTUDE DE CAS DANS LES MOYENS D'ENSEIGNEMENT SUISSES ROMANDS POUR LES MATHÉMATIQUES À L'ÉCOLE PRIMAIRE

1. Des « démarches d'investigation » dans les Moyens d'enseignement romands pour les mathématiques ?

Au moment où cette collection des Moyens d'Enseignement de mathématiques a été conçue (1997-1999) dans les cantons suisses romands, le terme de « démarche d'investigation » n'est pas encore d'actualité dans les discours institutionnels et dans les recherches en didactique. En revanche, la notion de « situation-problème » est alors très prisée, tirant une certaine légitimité des travaux ERMEL en France et dans une certaine mesure, aussi, de ceux sur la théorie des situations didactiques (Brousseau 1998). Les auteurs des Moyens d'enseignement suisse-romands revendiquent cet ancrage à travers la distinction entre « situation-problème » et « problème-ouvert » en référence aux travaux d'Arsac, Germain et Mante (1991) mais aussi, d'une façon plus générale, à travers l'importance de la résolution de problème dans le développement de la pensée mathématique de l'élève.

> L'option choisie actuellement est de confier un plus grand rôle à l'élève dans la construction de ses connaissances, de le faire agir pour abstraire, de lui demander de créer un langage pour rendre compte et communiquer, de lui faire adopter une démarche scientifique, d'élaborer ses instruments. Pour qu'il soit actif, on va lui propose de « faire » des mathématiques, et en particulier de résoudre des problèmes. La finalité ? Lui permettre de se préparer à affronter les nombreuses situations problématiques qu'il rencontrera dans sa vie sociale et professionnelle. (Gagnebin, Guignard et Jacquet 1998, p. 9 – c'est nous qui soulignons)

> Dans cette conception, le maître n'est plus celui qui transmet le savoir qu'il détient, qui guide ou conduit l'apprenant pas à pas, qui donne des modèles à copier, mais celui qui met en scène les situations les plus favorables pour que l'élève mobilise ses savoirs antérieurs et acquière de nouvelles connaissances. (ibid, p. 9).

Si le terme de « démarche scientifique » (qui est actuellement largement repris dans les objectifs du Plan d'Etude Romand 2010 pour les modules de sciences de la nature) apparait presque incidemment, on peut constater que les activités de résolution de problèmes s'accompagnent d'une option pédagogique socioconstructiviste assumée (ibid, p. 39).

2. Le « problème » contenu dans la fiche Encadrement (LM p297, 4ème année)

Sur la base de ces déclarations, il reste à explorer quelles sont les caractéristiques réelles des activités qui proposées dans les Moyens d'Enseignement romand pour les mathématiques. A l'appui de deux observations réalisées dans une classe vaudoise et une classe genevoise à propos d'une même fiche d'activité intitulée « Encadrement » (LM, p. 297 – cf. annexe 1), nous avons montré dans une contribution antérieure comment les enseignantes s'emparent du « problème ». Et de conclure que dès lors que la reconstruction des enjeux d'enseignement / apprentissage est laissée à la charge du professeur, en l'absence de ressources institutionnelles comme moyen de contrôle du projet d'enseignement, l'homogénéité, la densité voire la légitimité sociale des objets enseignés devient problématique (Ligozat 2010).

Afin d'approfondir cette réflexion, nous allons procéder ici à une analyse des pratiques sociales sédimentées dans le texte et les éléments iconiques que comporte ce support. Le principe est le suivant : sur la base du « texte » fourni au professeur et à l'élève, nous faisons un inventaire des actions épistémiques et didactiques possibles en référence à diverses sphères d'activités balisées dans la culture. En somme, nous procédons à une *archéologie des éléments de savoirs* cristallisés dans les composantes de la tâche, mais aussi des actions didactiques pré-figurées (ou non) dans le texte. Le but est d'examiner à quelles conditions, une « activité » peut générer une démarche d'investigation, et en quoi cela se démarque d'une « résolution de problème ».

Le document « Encadrement » se compose de deux parties : un encadré au centre présente le matériel ou document destiné à l'élève tandis que le texte qui figure autour est destiné au professeur. En quoi ces deux niveaux de texte diffèrent-ils dans ce document ?

- du côté de l'élève : la consigne est de fabriquer un cadre d'1 cm d'épaisseur pour un tableau représenté sur la fiche. Certains principes techniques sont précisés tels que « *toucher exactement le bord du tableau* » et « *ne pas superposer* ». D'autres contraintes sont posées telles que commander par écrit la longueur totale de bande nécessaire. La commande doit être exacte de manière à ce qu'après découpage et collage, il n'y ait aucun reste. Aucune mesure n'est donnée, ce qui sous-entend que des actions de mesurage sont à la charge de l'élève (les mesures des deux côtés du rectangle sont respectivement de 15,5 cm et 11 cm) ;
- du côté du professeur : l'enjeu de la consigne est décrit en termes de « tâche ». Selon les auteurs, il s'agit de « *mesurer quatre segments et additionner leurs longueurs* ». Des contraintes apparaissent aussi dans la gestion de l'activité par le professeur, telles que montrer la bande mais ne pas permettre des essais (attente d'anticipation de la part de l'élève), ne pas commenter la longueur de bande commandée (laisser l'élève se tromper éventuellement). Des possibilités sont évoquées telles qu'organiser une confrontation des erreurs, proposer un prolongement avec une bande plus épaisse (2 cm). L'une des trois sources d'erreurs possibles (non prise en compte de la largeur de la bande) dévoile un implicite majeur dans la définition de la tâche : *la réalisation du cadre du tableau doit se faire selon les normes sociales en vigueur dans la vie quotidienne, c'est-à-dire que minimalement, le cadre est une forme continue tout autour du tableau.* Les nécessités mathématiques qui en découlent sont subordonnées à la reconnaissance de cette convention, comme pertinente dans le contrat didactique. En effet, le cadre est doté d'un périmètre intérieur (Pi) et d'un périmètre extérieur (Pe) qui délimitent tous deux une aire. La seule mesure du périmètre intérieur, égale au périmètre du tableau (PT), ne permet pas de fabriquer un cadre continu, contrairement à ce que peut laisser penser la description de la tâche dans le texte du professeur (mesurer quatre segments et additionner leurs longueurs). La mesure de la longueur de bande (Lb) du cadre est dépendante de la largeur choisie (lb). Cette dépendance peut être modélisée par une fonction affine qui peut se résumer par la formule suivante : $Lb = 4.lb + PT$.

En même temps que les rôles du professeur et de l'élève sont définis par rapport aux variables d'une situation, cette définition se fait selon un format qui préfigure l'organisation dans la relation didactique. Le professeur pourvoit un environnement essentiellement matériel (la fiche élève avec l'image et la consigne, les bandes de papier) et social (organisation de classe, en groupe de deux élèves, puis mise en commun) dans lequel l'élève est censé être l'acteur principal des essais (l'enseignant coupe les bandes…sans faire de commentaires) et de l'identification de ses erreurs, et plus implicitement, de leur régulation (rien n'est dit à ce sujet dans le texte du professeur au niveau de la mise en commun) à partir de certaines rétroactions provenant des objets (en l'occurrence, si l'élève commande une longueur de bande égale au périmètre du rectangle, le cadre obtenu n'est pas continu - voir figures 1 et 2). Toutefois, un certain nombre d'implicites subsistent par rapport aux savoirs en jeu qui doivent faire l'objet d'un enseignement. Quel est le rôle de la prolongation proposée (« reprenez le problème avec des bandes de 1 cm ») ? S'agit-il de reprendre exactement le problème en tâtonnant pour chercher la longueur de bande nécessaire, ou bien peut-on faire l'économie du « faire » en utilisant une technique plus rapide ?

3. *Les pratiques sociales sous-jacentes constituent l'horizon d'une démarche d'investigation*

Cette première analyse de texte révèle deux types de pratiques sociales qui sont véhiculées par ce texte, et qui sont donc susceptibles d'entrer dans le champ d'expérience des acteurs du système didactique.

(i) les pratiques sociales en référence aux normes de la vie quotidienne et/ou professionnelle (artisanale).

Dans cette perspective, photos, tableaux ou autre représentation iconique, destinés à être portés au regard d'un public, apparaissent généralement dans un cadre. Le principe consiste à border, entourer, l'objet iconique d'un matériau plus ou moins épais, coloré et structuré (passe-partout, filets, patines…etc.) pour le mettre en valeur esthétiquement, c'est-à-dire attirer le regard sur l'objet en centre, en veillant à ce que l'encadrement ne détourne pas l'attention de l'observateur. Pour cela un certain nombre de critères doivent être respectés. Citons-en au moins trois : la continuité (le matériau d'encadrement doit faire le tour de l'objet sans ruptures), une proportion adéquate entre la taille de l'objet et l'épaisseur du cadre et le maintien d'un point fuite central (le matériau est structuré par des lignes concentriques et des coupes en biseaux dans les angles). Ces critères appellent des techniques qui relèvent de la sphère des pratiques courantes (mesurer une longueur de baguette au mètre ruban) mais aussi plus spécifiques, de l'ordre de l'artisanat. Dans le cas d'un encadrement comportant des angles par exemple, les coupes biseautées des segments de cadre se font généralement à l'aide d'une boîte à onglets qui fournit les gabarits d'angles droits et 45 degrés. Si le cadre est obtenu par un moulage (métal, plâtre…etc.), il aura minimalement fallu déterminer les dimensions du moule, selon un patron. Dans tous les cas, l'artisan veillera à limiter les pertes de matériaux bruts (les « chutes ») pour des raisons économiques.

(ii) les pratiques sociales en référence aux normes d'un corps de savoirs disciplinaires, celui des mathématiques, comportant des systèmes de représentation codifiés par une communauté savante.

La détermination de la longueur des segments de matériaux bruts nécessaires (baguette en bois, tige métallique, bande de carton…etc.), de même que la fabrication d'une boîte à onglet font appel à des savoirs mathématiques géométriques et numériques. D'une part, il s'agit donc de reconnaitre des objets géométriques dans les objets concrets et de faire travailler les propriétés conceptuelles des objets géométriques pour agir efficacement dans l'environnement concret. Le tableau de la Joconde est à reconnaître comme un rectangle dont on sait que les angles formés par les côtés adjacents sont droits et les côtés opposés ont même longueurs. La longueur totale des côtés mis bout à bout est représentée par un segment dont la mesure est égale à la somme des mesures de chaque côté. Cette longueur est nommée périmètre du rectangle (tableau). D'autre part, il s'agit d'examiner les dépendances entre les grandeurs en présence, afin de pouvoir anticiper des résultats sans passer par des manipulations. On entre dans une activité de modélisation, c'est-à-dire d'identification de relations (ou de non-relations) entre des variables. Ce processus réclame de faire varier les grandeurs en présence (périmètre du tableau, largeur et longueur de bande de matériau brut) tout en fixant les critères esthétiques et économiques retenus pour effectuer l'encadrement. En effet, le modèle à construire ne sera pas le même, selon que l'on veut un cadre continu ou pas, des coupes en biseau ou pas, que l'on est vigilant ou pas sur la quantité de chutes de matériau brut.

Si l'on n'a pas d'exigence sur la continuité, un cadre du type 1 ou 2 obtenu avec une longueur de bande à commander égale au périmètre du tableau (53 cm), peut être recevable.


***Figure 1** – cadre type 1* *Figure 2 – cadre type 2*

Si l'on a une exigence sur la continuité mais pas nécessairement sur la structuration, un cadre de type 3 est acceptable.

3a ***3b*** ***3c*** ***3d***

***Figure 3** – cadre de type 3a, 3b, 3c, 3d*

La longueur de bande à commander est modélisée par la relation Lb = 4.lb + PT. Cette option consomme plus de matériau brut que dans le premier cas, mais il n'y pas de chute.

Avec lb = 1cm, Lb = 4.lb + PT = (4*1) + 53 = 57 cm

Les modalités des découpes sont les suivantes :

3a) 13cm+13cm+15,5cm+15,5cm
3b) 11cm+11cm+17,5cm+17,5cm
3c) 11cm+11cm+15,5cm+15,5cm+1cm+1cm+1cm+1cm+1cm
3d) 12cm+12cm+16,5cm+16,5cm

Si l'on a une exigence d'avoir des angles biseautés, c'est un cadre de type 4, qui est alors visé.

***Figure 4** – cadre de type 4*

Deux modèles de calcul de la longueur de bande à commander sont à distinguer selon <u>le mode découpe géométrique des segments</u> du cadre (voir la figure 5 ci-dessous).

***Figure 5** – modélisation des longueurs totales de bandes à commander selon le mode de découpe géométrique choisi*

- Si la découpe se fait suivant la plus grande longueur des bandes trapézoïdales (L_T max), le modèle de la longueur totale de bande à commander sera Lb_T = 8.lb + PT. Pour chaque segment de cadre, on aura 1 lb de chute et donc 4 lb au total. La longueur de bande effectivement utilisée Lb' = (Lb – 4lb)

  Avec lb = 1cm, Lb = 8.lb + PT = (8*1cm) + 53cm = 61 cm

  et Lb' = 61 – (4*1cm) = 57cm

- Si la découpe se fait en alternant les petites et grandes longueurs de trapèze (L_T min), le modèle de la longueur totale de bande à commander sera Lb_T = 5.lb + PT. On aura1 1.lb de chute pour toute la bande. La longueur de bande effectivement utilisée est (Lb – 1lb) mais la perte de matériau est moindre.

  Avec lb = 1cm, Lb = 5.lb + PT = (5*1cm) + 53cm = 58 cm

  et Lb' = 58 – (1*1cm) = 57cm

Cette deuxième façon de découper optimise la quantité de matériau consommée (aspect économique et environnemental) pour un effet esthétique en adéquation avec les valeurs esthétiques courantes.

A travers cette analyse, on peut se rendre compte que les pratiques mathématiques qui sont cristallisées dans les composantes de la tâche, sont adossées à des critères d'acceptabilité sociale concernant l'esthétique du cadre visé et la quantité de matériau consommés (prix de revient). La définition de ces critères conditionne le modèle de calcul de la longueur de bande de matériau à commander. Ces critères peuvent être traduits en règles d'action qui sont constitutives de la pratique de l'encadrement ; cette constitution est socio-culturelle, issue d'une sédimentation de techniques qui répondent à des valeurs pratiques, esthétiques, et économiques. L'assemblage des règles d'action en un système de contraintes qui va façonner un projet d'action, varie en fonction des buts qui sont assignés à l'encadreur (ou qu'il s'assigne).

Si l'on peut raisonnablement considérer que l'objet « cadre » fait partie du champ d'expérience d'un enfant de 9 ans, pour l'avoir rencontré dans son environnement quotidien, il faut nécessairement se poser le problème de l'accès de l'élève à ces critères, qui doivent former l'horizon de son projet d'action. C'est la première contrainte de l'entrée dans une démarche d'investigation. Dans le texte de l'élève (cf. annexe 1), un certain nombre de règles d'action apparaissent au-delà de la consigne générale qui est de « placer des bandes de 1cm de large pour encadrer ». (a) les bandes doivent toucher exactement le bord du tableau ; (b) les bandes ne doivent pas se superposer, et (c) la commande de la longueur de bande doit être écrite ; (d) toute la bande reçue doit être utilisée. Les règles (a), (b) et (c) peuvent correspondre à la fabrication des cadre de type 1, 2 ou 3. La règle (d) exclut la fabrication du cadre de type 4, car cette structure implique des chutes, alors que ce type de cadre est le plus couramment rencontré dans la vie quotidienne. En revanche, aucune règle d'action n'incorpore l'exigence de continuité. Cette indétermination au niveau du texte de l'activité va devoir être gérée soit au niveau de la construction du dispositif par l'enseignant, soit directement dans cours de l'action conjointe Professeur-Elèves. C'est une deuxième contrainte de la démarche d'investigation. Certaines composantes indéterminées de la tâche vont devoir être déterminées dans le cours même de l'action conjointe, par examen des possibilités et convention sur la conduite à tenir en référence à des normes sociales d'acceptabilité.

4. *La référence aux normes et valeurs éducatives d'un contexte institutionnel défini et structuré par une sphère sociopolitique*

Le choix de ce type de problème est une tentative d'enraciner l'enseignement de la mesure (techniques de mesurage, somme de mesures et modélisation de rapports entre des grandeurs) dans des situations pratiques qui relèveraient de l'expérience disponible de l'élève (au sens de Boero 2011) ; dans lesquelles il pourrait voir un intérêt proche de ses préoccupations de la vie quotidienne (fabriquer un cadre photo pour la fête des mères, par exemple). Cette catégorie de supports didactiques dans les Moyens d'Enseignement romands pour les mathématiques est courante. Elle peut être vue comme une réponse curriculaire à un certain idéal progressiste, celui du « learning by doing » hérité des formes de pédagogies actives qui rejettent les modes de transmission scholastique des savoirs, sous forme propositionnelle. A ceci, s'ajoute une forte influence piagétienne dans le contexte suisse-romand, qui fait de l'action, une pierre angulaire de l'adaptation d'un sujet à un environnement physique résistant, engageant des opérations de ré-équilibration cognitive. Enfin, une certaine interprétation des principes de la théorie des situations en terme de « situations-problèmes » selon un modèle socioconstructiviste de l'apprentissage n'est pas négligeable non plus.

Ces différentes racines épistémologiques peuvent être reconnues dans l'analyse des différents niveaux de texte à l'usage des enseignants suisses-romands. Selon Schubauer-Leoni et Leutenegger (2009), ils contribuent à ériger un élève constructeur autonome de son savoir, par réflexivité sur les effets de son action dans un environnement physique et/ou social qui possèderait des composantes rétroactives. Dans cette perspective, l'apprentissage est d'abord une affaire individuelle, qui peut être utilement soutenue par les interactions entre pairs et avec l'enseignant, bien que ce dernier doive observer un devoir de réserve important durant les phases de recherche, verbalisation et validation de l'élève. Les actions principales du maître consistent à permettre l'appropriation de la tâche et à institutionnaliser des savoirs, validés par les élèves. Entre ces deux moments, le maître organise les conditions matérielles et sociales, qui favorisent la recherche des élèves (essais, verbalisations, représentations, confrontations entre pairs) mais il essaie d'intervenir le moins possible (cf. Gagnebin, Guignard et Jacquet 1998 à propos de la résolution de problèmes). On peut constater que ce modèle de pensée trouve ses prolongements concrets dans le cas de la fiche « Encadrement ». Les éléments organisateurs de l'activité de l'enseignant sont peu nombreux, et de nature essentiellement pratique. Ce sont les élèves qui ont à charge de communiquer entre eux pour identifier leurs erreurs. Hors, notre analyse épistémique montre que pour pouvoir décider d'une ligne d'action individuelle dans le traitement du cadre du tableau, il est nécessaire que certains critères de l'ordre de l'acceptabilité sociale de l'objet à construire soient explicités collectivement négociées. Nous faisons l'hypothèse que ces enjeux de négociation collective, qui contribuent à délimiter la référence sociale des pratiques mathématiques attendues sont une des conditions de l'entrée des élèves dans un processus d'enquête.

Dans le vaste processus de mise en forme textuelle des formats de l'activité didactique, le travail institutionnel de sélection et recomposition des pratiques sociales normées ne s'arrête pas aux contenus, aux objets et pratiques à enseigner. Il incorpore aussi des manières de faire en référence à des théories philosophiques, cognitives et didactiques, qui font (ou ont fait) force dans l'évolution des sciences éducatives. La concaténation de ces préconstruits idéologiques dans les textes de l'activité mathématique scolaire appelle à une vigilance épistémologique qui s'exerce par une analyse ascendante du processus de transposition, afin de déterminer les conditions de possibilités de l'apprentissage et leur gestion didactique.

REFERENCES

Arsac G., Germain G., Mante M. (1991) *Problème Ouvert Et Situation-Problème*. Villeurbanne : IREM Université Claude Bernard Lyon I.

Boero P. (2011) Les domaines d'expérience dans l'enseignement-apprentissage des mathématiques : lier le travail scolaire à l'expérience des élèves. In Margolinas C. et al. (Eds.) *En amont et en aval des ingénieries didactiques. Actes de la XV^{eme} Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques* (Vol.1, pp. 109-148). Grenoble La ens ée Sauvage.

Bronckart J.-P., Bulea E., Filliettaz L., Fristalon I., Plazaloa Giger I., Revaz F. (2004) Agir et discours en situation de travail. *Cahiers de la Section des Sciences de l'Education 103*. Genève : FPSE.

Brousseau G. (1998) *Théorie de situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chevallard Y. (1985/1991) *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chevallard Y. (1992) Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 12(1), 73-112.

Dewey J. (1938) *Experience and Education* (1997 Eds.). N. Y.: Touchstone.

Gagnebin A., Guignard N., Jacquet F. / COROME (1998). *Apprentissage et enseignement des mathématiques. Commentaires didactiques sur les Moyens d'Enseignement pour les degrés 1 à 4 de l'école primaire*. Neuchâtel : COROME.

Ligozat F. (2010) Les textes de l'activité mathématique scolaire. Pre-construits et ressource dans la genèse des formes de l'action didactique. In Gueudet G., Trouche L. (Eds) (pp. 30-320) *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs*. Rennes: PUR; Lyon :INRP.

Ligozat F., Wickman P. O., Hamza K. M. (2011) Using Practical Epistemology Analysis to Study the Teahcer and Students' Joint Actions in the Mathematics Classroom. In Pytlak M., Swoboda E., Rowland T. (Eds.) (pp. 2472-2481) *Proceedings of the 7th Conference of European Research in Mathematics Education (CERME 7, 9-13 Feb.2010)*. Rzeszow: University of Rzeszow.

Mercier A. (2008) Pour une lecture anthropologique du programme didactique. *Education & Didactique 2*(1), 7-40.

Schubauer-Leoni M.-L., Leutenegger F., Ligozat F., Fluckiger A. (2007) Un modèle de l'action conjointe professeur-élèves : les phénomènes qu'il peut / doit traiter. In Sensevy G., Mercier A. (Eds) (pp. 51-91) *Agir ensemble. L'action didactique conjointe du professeur et des élèves*. Coll. Paideia, Rennes : PUR.

Schubauer-Leoni M.-L., Leutenegger F. (2009) Implicites dans l'étude des processus transpositifs. Comparaison des textes officiels pour l'enseignement des mathématiques et du français dans les premières années de la scolarité. In Cohen-Azria C., Sayac N. (Eds) (pp. 243-259) *Questionner l'implicite. Les méthodes de recherche en didactique.* Tome 3. Lille :Septentrion.
Sensevy G., Mercier A. (Eds.) (2007) *Agir ensemble. L'action didactique conjointe du professeur et des élèves.* Coll. Paideia, Rennes : PUR.
Wickman P.-O., (2004). The practical epistemologies of the classroom: a study of laboratory work. *Science Education* 88, 325-344.
Wickman P.-O., Östman L. (2002) Learning as discourse change: a socio-cultural mechanism. *Science Education* 86, 601-623.
Wittgenstein L. (1967) *Philosophical investigations*. Oxfor: Blackwell.

ANNEXE

Extrait du Fichier du Maître, Mathématiques 4ème année primaire (Danalet C., Dumas J-.P., Studer C., Villars-Kneubühler F. / COROME 1999)

Encadrement

Tâche
- Mesurer quatre segments et additionner leurs longueurs.

Encadrement

Consigne pour 2 élèves
Matériel: bande de papier de 1 cm de large

Il faut placer des bandes de papier de 1 cm de large pour encadrer ce tableau. Les bandes doivent toucher exactement le bord du tableau et ne pas se superposer:
- Commander par écrit la longueur totale de bande nécessaire.
- Découper la bande reçue et la placer. Toute la bande reçue doit être utilisée.

65

Nombre d'élèves
- 2

Matériel
- FE p. 65
- Bandes de papier de 1 cm de large.

Mise en œuvre
- Pour favoriser l'appropriation de la tâche, l'enseignant montre une bande aux élèves, mais ne la met pas à leur disposition pour des "essais".

Déroulement
Dispositif
- L'enseignant coupe les bandes aux dimensions demandées par les différents groupes, sans faire de commentaire.

Mise en commun
- Si nécessaire, les élèves repèrent les éventuelles sources d'erreurs (non-prise en compte de la largeur de la bande, erreur de mesurage, erreur de calcul, ...).

Prolongement
- L'enseignant propose la consigne suivante: *"Reprenez le problème avec des bandes de 2 cm."*

297

7 - B

SUIVRE UNE DEMARCHE D'INVESTIGATION POUR ENSEIGNER LES RELATIFS, AU COLLÈGE : UNE PROPOSITION PRAGMATIQUE ET UNE EXPÉRIMENTATION, EN FRANCE

Alain MERCIER[*]

Résumé – Aucun travail à ce jour n'a pu montrer de métaphore fondamentale pour les relatifs, parce que tous modélisent les nombres comme opérateurs additifs, *sur les relatifs*. Toute construction des relatifs engage donc à noter (provisoirement) une nouvelle addition pour de nouveaux nombres, puis à y renoncer parce que ces nouveaux nombres comprennent les anciens. Rien à y faire, sauf à considérer que les extensions praxémiques devenues routinières peuvent conduire à l'invention d'algorithmes de calcul qui conduiront à une extension théorique dans un mouvement ultérieur. Un mouvement à l'envers donc, de ce que propose la TSD, mais le résultat d'une démarche d'investigation effective.

Mots-clefs : nombres relatifs, extension praxémique, opérateurs additifs, algorithmes de calcul, routinisation d'un praxeme

1. Trois constats à l'origine de ce travail, réalisé dans le cadre institutionnel de AMPERES, en collaboration avec les professeurs de Collège associés[1], sur Marseille (Karine Bernad-Drousset ; Nadine Castellani ; Guilhem Delofeu ; Marie-Christine de Redon ; Nacer Khadraoui ; Karine Millon-Faure ; Christiane Motta ; Anne-Marie Russac ; Nicole Sorrentini) et repris avec Yves Matheron à l'occasion de la visite de Maggy Schneider comme professeur invité par l'INRP, en 2010.
2. Le fait que personne n'a pu trouver de *métaphore fondamentale*[2] pour les relatifs, parce que les relatifs modélisent les nombres comme opérateurs additifs sur l'ensemble des relatifs eux-mêmes.
3. Le fait que toute construction des relatifs engage à noter (provisoirement) une nouvelle addition pour de nouveaux nombres, puis à y renoncer parce que ces nouveaux nombres comprennent les anciens et que la nouvelle addition est, pour ces anciens nombres, l'ancienne opération et parce que, finalement, cette addition permet de réinterpréter les anciennes soustractions en utilisant les nouveaux nombres.
4. Le fait que dans ces conditions, il est impossible d'explorer « le réel » pour en former un modèle mathématique qui soit justement l'objet d'enseignement visé, « les relatifs ».

Rien à y faire, sauf à ne pas passer par la production d'une théorie pour mettre en place des algorithmes comme conséquences de théorèmes établis, mais par le travail alternatif d'explicitation et de généralisation des routines (Mercier 2008). Cet auteur propose en effet de considérer que les trois types de situations didactiques proposées par Brousseau décrivent les conditions d'un mouvement de théorisation, mais pas les conditions des apprentissages quotidiens. Ceux-ci commencent en effet par des tentatives de mobiliser des pratiques connues dans le monde nouveau, inconnu: des *extensions praxémiques* (Matheron 2009). Mercier considère alors que des extensions praxémiques devenues d'usage routinier peuvent

[*] ENSL-IFE – France – alain.mercier@ens-lyon.fr

[1] L'INRP associe des professeurs aux travaux de ses chercheurs, pour conduire des « recherches collaboratives » sur le terrain même de l'enseignement, dont ce travail est un exemple.

[2] Une situation fondamentale porterait bien sûr une métaphore fondamentale, dans le cadre théorique de la TSD proposé par Guy Brousseau, mais notre enquête sur l'introduction des relatifs est bien plus modeste. Dans les autres champs théoriques on recherche plutôt « un monde dont les pratiques puissent faire sens, pour initier puis interpréter le travail formel mathématique » : c'est ce que nous appelons, par analogie avec le concept broussaldien, une *métaphore fondamentale*.

© Mercier A. (2012) Suivre une démarche d'investigation pour enseigner les relatifs, au collège : une proposition pragmatique et une expérimentation, en France. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT10, pp. 1423–1431). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

conduire à l'invention d'algorithmes de calcul. La nécessité de rendre compte de ces algorithmes conduira peut-être à une extension théorique dans un mouvement ultérieur, et l'ensemble de ce mouvement relève de types de situations didactiques non identifiés à ce jour. Nous espérons montrer que c'est pourtant un chemin viable et nous affirmons que ce chemin est bien celui d'une investigation ou enquête, sans être pourtant ni un travail de recherche sur des questions non résolues ni un travail d'étude de réponses connues.

Nous proposons une construction à l'envers donc, de ce que propose la Théorie des Situations Didactiques. Mais elle permet d'imaginer plusieurs propositions consistant à *interpréter des suites d'opérations* comme composition d'un programme de calcul (l'écriture d'un opérateur) et d'un nombre initial arbitraire (un opérande) suffisamment grand pour rendre possibles tous les calculs qui seront engagés, localement. La notion de *programmes de calcul* est alors la métaphore fondamentale du travail conduit et elle permet de juger *a priori* des propositions d'enseignement que l'on peut alors imaginer :

1. Pour la manière dont elles assurent ce mouvement innovant.
2. Pour la manière dont un professeur formé accepte de suivre ce chemin et arrive à y conduire ses élèves.

Alors, *les notations du programme de calcul sous forme de nombres sont l'extension praxémique*[3] *nécessaire à cette interprétation* et, dans ce mouvement, plusieurs exigences notationnelles peuvent se dessiner. Deux choix sont proposés, ils consistent à noter ou pas l'opération nouvelle. La réponse dépend de la disponibilité d'un ensemble de *manières de dire* pour les *manières de faire* associée : son analyse et l'observation de classes sont l'objet précis de la contribution.

I. ETAT DES LIEUX

Parmi les nombreuses recherches portant sur les nombres relatifs, plusieurs s'inscrivent dans un cadre théorique plus global (Sfard 1991). Rappelons brièvement ce dont il s'agit. Sfard montre que, dans l'histoire, les diverses sortes de nombres sont apparues d'abord au travers de manipulations et de processus (de mesure par exemple) avant d'être acceptées comme nouveaux objets indépendants de ces mêmes processus. Cette dialectique, de l'opérationnel à l'objet ou du procédural au structural lui inspire une interprétation des erreurs concernant les relatifs : faute d'avoir été impliqués dans cette dialectique lors de l'enseignement, les nombres négatifs seraient l'objet, pour les élèves, d'une conception pseudo-structurale, en ce sens que les ces derniers prendraient le signifiant pour le signifié. S'inscrivant dans ce cadre théorique, (Gallardo et Rojano 1989), (Gallardo et Rojano 1990), (Gallardo et Rojan 1993), avaient déduit de leurs analyses de textes historiques une relation entre le langage, les méthodes de résolution de problèmes utilisées et la conceptualisation des nombres négatifs. Et Gallardo définit quatre niveaux d'acception des négatifs : 1) nombre qui *soustrait*, 2) nombre relatif lié à l'idée de *quantité opposée* dans le domaine discret et à celle de *symétrique* dans le domaine continu, 3) nombre isolé, *résultat* d'une opération ou solution d'un problème ou d'une équation et 4) *concept formel de nombre négatif*, fruit d'une extension du domaine numérique

[3] Un concept s'avère particulièrement utile en matière d'extensions des ensembles de nombres : il s'agit du concept *d'extension praxémique* (Chevallard 1991 ; Matheron 2010). Le terme de « praxème » est formé à l'image du terme linguistique de lexème. Il désigne une unité minimale de signification de la pratique, au sein d'une institution donnée. Par exemple, l'écriture de deux nombres l'un sous l'autre, de telle manière que les chiffres des divers ordres soient exactement superposés, est un praxème, unité d'une pratique algorithmisée : poser une opération en colonnes. Une extension praxémique se produit lors de l'utilisation d'un praxème dans le cadre d'une pratique propre à une autre organisation mathématique que celle dont il est originairement issu, et sans que l'on se soit nécessairement enquis par avance de la validité de cette extension d'usage.

des naturels aux négatifs (Gallardo 1995), (Gallardo 2002). Gallardo et Rojano avaient d'ailleurs distingué trois principales fonctions du signe moins : unaire (renvoyant au signifiant structural de nombre relatif, de nombre-solution, de nombre- résultat et de nombre négatif formel), binaire (concernant des signifiants opérationnels tels que soustraire en arithmétique ou en algèbre, retirer, compléter, calculer la différence entre deux nombres) et symétrique par référence au signifiant opérationnel qu'est prendre l'opposé d'un nombre (Gallardo et Rojano 1994).

1. Les erreurs des élèves

Plusieurs erreurs classiques observées chez les élèves peuvent alors être interprétées par un manque de compliance du signe aux situations rencontrées (Sfard et Linchevski 1994). Plusieurs surviennent dans la résolution d'équations lorsque celle-ci se base sur des méthodes qui impliquent des principes formels comme : « tout terme qui change de membre, change de signe ». Des interviews d'élèves de 12-13 ans montrent que ceux-ci éprouvent des difficultés à accepter des solutions négatives aux équations que ce soit dans un contexte de résolution de problèmes ou même de résolution d'équations arithmétiques (Gallardo 2002 ; Gallardo et Rojano 1993). Difficultés qui peuvent être rapprochées sans doute de deux autres observations : les opérations sont perçues, par des élèves de l'école élémentaire, comme des actions à accomplir : un « do something signal » (Kieran 1981) tandis que l'étape « x = » est vue comme un signal d'arrêt de la procédure en cours et non comme une solution à rapporter soit à l'équation, soit à un problème (Sfard et Linchevski 1994). (Filloy et Rojano 1989) soulignent le côté délicat du passage des équations arithmétiques aux équations algébriques, passage dont ils relèvent la trace dans des textes historiques. D'autres erreurs se manifestent dans la réduction de termes semblables (R. Herscovics et Linchevsky 1991) (N. Herscovics et Linchevski, 1994) ; (Vlassis 2004). A cela s'ajoutent des difficultés pour percevoir ce qui peut être négatif ou positif dans des expressions littérales. Quant à la règle des signes portant sur les opérations d'addition et de soustraction, plusieurs difficultés bien repérées lui sont associées.

2. Une fausse piste : l'usage d'un modèle pour « faire sens »

Parmi les modèles, celui qui a fait couler le plus d'encre est la droite des nombres sur laquelle nous nous attardons quelque peu. Pour Freudenthal, la droite des nombres est un excellent moyen de visualisation des principales opérations arithmétiques. Elle devrait être utilisée dès les premiers apprentissages arithmétiques et on y représenterait au fur et à mesure les différentes sortes de nombres enseignées : « The real numbers are pre- existent by their intuitive images, and so are the operations, the addition as a shift, the multiplication as dilatation, and the algebraic laws, as obvious or easily vizualized phenomena » (Freudenthal 1973). Cependant, ce chercheur estime qu'il ne faut pas surexploiter ce modèle, en particulier pour des cas tels que $3 - (-7)$ et $-3 - (-7)$ qui nécessitent une méthode « inductive - exploratoire ». Cette méthode consiste à analyser les régularités observées dans les opérations avec les naturels et à en « déduire » des règles dans les négatifs. Par exemple, la suite de calculs : $3–2=1$, $3–1=2$, $3–0=3$, $3 - (-1) = 4$, $3 - (-2) = 5$ se justifie en raison d'une régularité : « A chaque fois que le 2e nombre diminue de 1, la réponse augmente de 1 ». D'autres auteurs estiment, quant à eux, que la droite des nombres est un modèle mental spontané pour les négatifs, en raison du fait que ce modèle est proche de « la vie de tous les jours » (Peled, Mukhopadhyay et Resnick 1989). Cependant, pour ces auteurs, les élèves peuvent avoir de la droite des nombres soit une conception correcte de « continuous number line », soit une conception erronée de « divided number line », zéro étant plus souvent associé à l'idée de barrière qu'à celle de nombre. Goldin insiste, lui, sur le caractère complexe de certains modèles, en particulier la droite des nombres qui requiert la capacité de regarder un nombre soit comme une position sur la droite (un point), soit comme un déplacement (flèche) (Goldin et Shteingold 2001) et une difficulté inhérente à la droite graduée en tant que modèle des nombres relatifs est de mélanger des nombres qui ont des statuts différents : soit états, soit transformations.

3. *Vers une position didactique*

Selon nous, l'approche didactique développée par la TSD, la Théorie des Situations Didactiques (Brousseau, Balacheff, Cooper, Sutherland et Warfield 1997) et par la TAD, la Théorie Anthropologique du Didactique (Chevallard 2006), puis par la TACD, la Théorie de l'Action Conjointe en Didactique (Sensevy et Mercier 2007) permet de dépasser les oppositions entre les approches précitées, en répondant aux questions qu'elles posent. Nous schématiserons les usages que nous faisons de ces approches en quelques points, utiles pour notre propos :

- L'activité de mathématisation y est modélisée par la description des conditions d'invention et d'usage innovant d'objets sémiotiques et de notions, usages qui sont donc toujours situés (TSD). Décrire cette activité suppose en effet de rendre compte d'une dialectique entre, d'un côté, un répertoire et des formes discursives (des notions) et, de l'autre, les signes graphiques, scripturaux, gestuels, etc. (des notations) (TSD et TAD). Ainsi, pour nous, les notations permettent à la fois d'évoquer les notions et de réaliser le travail mathématique par une manipulation réglée qui est source d'une économie de pensée et d'action.
- La construction des pratiques mathématiques, qui n'est qu'une petite partie du processus de mathématisation d'un type de questions, correspond à un double processus : de stabilisation des systèmes de notations et de leurs règles de fonctionnement ; de normalisation de ces systèmes de notations et de réduction de leur coût d'usage. Il suppose cependant la production d'interprétations stables de ces pratiques, que donnent les notions mathématiques et les discours qu'elles permettent de tenir (TSD et TAD).
- La mémoire et l'usage des savoirs sont pour nous des processus collectifs, et en quelque sorte contractuels. Les savoirs et leurs usages sont en effet médiatisés par la mise en place d'un répertoire d'objets sémiotiques, de termes langagiers et de formes discursives du professeur et des élèves, permettant pour ce qui nous intéresse ici un mouvement entre « notions » et « notations » que le professeur doit gérer en proposant des situations adaptées (TACD).

Nous allons donc présenter la manière dont nous envisageons ce que peut être une extension praxémique des pratiques relatives aux décimaux, en direction des décimaux relatifs, et les manières de stabiliser les pratiques ainsi développées pour obtenir les algorithmes de calcul efficaces que l'on attend aujourd'hui comme signe de l'acquisition de compétences, par les élèves. Nous allons proposer en parallèle une alternative, qui a contre elle de demander une bien plus vaste culture mathématique et des pratiques de plus haut niveau scolaire (elle suppose d'être entré dans le processus d'algébrisation de la géométrie, reporté aujourd'hui en France après la Troisième) mais permet en revanche une introduction aisée de la multiplication. Nous discuterons enfin des effets observables de notre proposition.

II. UN USAGE DIDACTIQUE DES EXTENSIONS PRAXÉMIQUES

4. Une première approche du cas des relatifs, comme quasi opérateurs

En dépit d'analogies, le cas des nombres relatifs se différencie de celui des complexes en raison de leur usage dans la culture : codage de températures, de profondeurs sous-marines, niveaux d'ascenseur, échelles de temps, gestion de comptes, etc. En revanche, il n'est pas évident de donner par ces moyens un « sens » acceptable aux opérations et en particulier à la multiplication ainsi qu'en témoignent plusieurs réactions d'adultes : « Là où j'ai commencé à décrocher en math, c'est quand on m'a dit que moins par moins donne plus. Je n'ai jamais compris que, par exemple, –2 fois –3 cela donne +6. J'en ai conclu que les maths, c'était pas mon truc ».

Mais déjà, certains calculs tels que 7 + (–2) ou 7 – (–2) font problème, comme le montrent les précautions prises par J. Tannery (1911) dans ses *Leçons d'arithmétique*. Tout comme les bilans de gains ou pertes ou ceux de déplacements, ils ne se prêtent à une interprétation première qu'en termes de transformations ou d'instructions opératoires. De plus, l'interprétation de la soustraction suppose de remplacer la deuxième instruction par l'instruction opposée pour considérer un déplacement de gauche à droite dans des cas tels que + 4 et – (– 4) et de droite à gauche dans des cas tels que + (– 4) et – (+ 4).

Cependant, ces *instructions de calcul* devraient en toute rigueur être notées d'une manière particulière : un signe « plus » ou « moins » suivi du nombre en question, le tout encapsulé dans un rond ou, tout simplement, des crochets : par exemple, [+ 3] signifie « ajouter 3 » et de même [– 2] signifie « retrancher 2 ». Une opération serait ensuite définie sur ces objets : il s'agit de les « composer », de « faire l'un puis l'autre » et cette opération unaire ne serait désignée par aucun autre signe que l'apposition. comme l'action de surcompter 8 après 3. Cela donnerait par exemple, que [+ 1] [+ 2] = [+ 3] et s'interprèterait « ajouter 1, puis ajouter 2 à un nombre revient à lui ajouter 3 », ce qui peut encore s'écrire : a+1 + 2 = a + 3, dans une interprétation alternative de cette écriture en termes de transformations de a (proche de la notation polonaise inverse), où la composition est codée par l'apposition. De même, [+ 5] [– 3] = [+ 2] et [– 3] [– 7] = [[– 10], s'interprètent par a + 5 – 3 = a + 2 et a – 3 – 7 = a – 10. On introduirait à ce stade les problèmes venus de [– 5] [+ 2] = [– 3] et de son interprétation en a – 5 + 2 = a – 3.

Le système de manipulations d'instructions est en effet modélisé de manière à engager les élèves dans une extension praxémique : « calculer avec des nombres pour rendre compte du comportement des instructions de calcul ». Dans certains cas, c'est facile d'aller plus loin en omettant le « a » et en exploitant les nombres connus jusque-là (nombres naturels ou rationnels positifs) : par exemple, [+1] [+2] = [+3] peut s'écrire a+1+2=a+3, ou par réduction sémiotique +1+2=+3 qui est modélisé en nombres par 1 + 2 = 3, puisque les deux calculs sont semblables. Alors, [+ 5] [– 3]= [+ 2] devient +5–3=+2 qui est modélisé en nombres par 5–3=2 mais [+3] [–5]=[–2] devient +3–5=–2 qui est modélisé en nombres par *3–5=–2, ce qui est un symbole sans interprétation*. Pour coder des compositions d'instructions « retrancher » par des écritures en forme de soustractions considérées jusqu'ici impossibles, l'extension praxémique conduit donc à *rencontrer* puis *accepter une forme nouvelle*, dont l'interprétation demande la notion de *nombre négatif,* qui nomme l'objet inouï « moins deux » pour l'étudier. On sait, depuis Michel Serfati qu'il fallut le génie de Leibniz pour oser ce type d'audace (Serfati 2005).

Un projet peut ainsi être proposé à l'étude: *explorer ces nouveaux objets qui permettent de coder les instructions de calculs soustractifs, afin de décider si il est possible de les considérer comme des nombres*. On devra pour cela conduire l'extension praxémique jusqu'à la mise en place d'une multiplication, ce qui suppose une audace certaine appuyée sur une propriété algébrique, la conservation nécessaire de la distributivité des calculs. Il s'agit donc d'un projet délicat à conduire, et, par exemple, on remarquera que, pour ne pas engager les élèves et les professeurs dans la manipulation d'expressions impraticables, *on ne définit pas les compositions d'instructions de calcul*, puisque l'opération inverse n'est pas pensée en dehors du modèle numérique.

5. *Une proposition alternative, par l'algébrisation de la géométrie*

Sans devoir chercher très loin, un avenir possible des relatifs se situe à la fois dans le cadre de la géométrie analytique et dans celui de l'analyse, en particulier dans l'étude des fonctions de R dans R. En effet, démontrer des propriétés de figures géométriques avec du calcul sur des coordonnées et des équations dans un repère donné suppose de choisir ce dernier de manière à simplifier les calculs, ce qui revient souvent à situer les figures en question à cheval sur plusieurs quadrants formés par ce repère. C'est une conquête, si l'on en juge par l'habitude qu'avait Descartes, de travailler dans un repère où il n'y avait que des coordonnées positives. Les fonctions, elles, avant d'être objets de l'analyse réelle où sont mobilisés tant les nombres négatifs que les nombres positifs, se doivent d'être modèles de phénomènes divers (intra ou extra-mathématiques) dont certains, tels les mouvements, mobilisent des échelles, de temps et d'espace entre autres, sur lesquelles il est commode de repérer une origine et, de part et d'autre, des nombres négatifs et des nombres positifs. Cependant, cette analyse ne peut se cantonner au calcul sur des coordonnées et doit s'étendre aux paramètres. Prenons un exemple au carrefour de la géométrie analytique et de l'analyse. Si l'ensemble des paraboles, sous-ensemble des coniques, peut être représenté par un ostensif unique : une équation du type $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$ sur les coefficients de laquelle porte une contrainte, c'est parce qu'on considère que les paramètres a, b ... f peuvent dénoter des valeurs numériques tant négatives que positives.

La formule de Chasles exprime pour sa part que la distance algébrique de A à C vaut la somme des distances algébriques respectives de A à B et de B à C, quelles que soient les positions des points A, B et C sur un axe orienté, c'est-à-dire quels que soient les signes de ces distances : le concept de nombre relatif permet ici de réduire quatre cas distincts en une seule écriture. On peut imaginer que la première rencontre des élèves avec cette démarche de réduction soit le travail de la classe des fonctions $y = ax + b$, qui rassemble toutes les droites (sauf celles parallèles à l'axe Oy), dont certaines caractéristiques : croissance et position par rapport à l'origine sont distinguées en fonction des signes respectifs des paramètres a et b, soit la pente et l'ordonnée à l'origine. Cette piste mérite d'être explorée explicitement, ce que nous ne ferons pas ici parce qu'elle est impraticable en France, où les relatifs arrivent bien avant la représentation graphique des fonctions affines.

6. *Une proposition pragmatique prudente, où une extension praxémique produit des routines*

Le programme de 5^e du 28 août 2008, niveau auquel se déroule l'expérimentation relatée ici, prévoit d'enseigner les relatifs mais pas les relations et applications. Au-delà d'une métaphysique qui chercherait à discriminer entre les objets proprement mathématiques des autres, nous devons convenir que l'objet « instruction de calcul » est à ranger, comme les « programmes de construction » en géométrie, parmi les objets protomathématiques que les élèves peuvent rencontreront ici ou là. C'est ainsi qu'il a figuré en 2007 dans un problème du Brevet des Collèges, examen qui se passe en 3^e, dernière année du Collège. Le programme précise que la compétence qui consiste à « Sur des exemples numériques, écrire en utilisant correctement des parenthèses, un programme de calcul portant sur des sommes ou des différences de nombres relatifs » n'est pas exigible au niveau du socle commun. De ce fait, un grand nombre de professeurs ne recourent pas souvent à l'idée de *programmes de calcul*, bien que ces programmes ne conduisent à calculer que la valeur d'expressions de degré inférieur à 2 et des fractions rationnelles simples. Nous avons donc mobilisé le nom d'un objet sans autre usage, ce qui risque de poser à terme un problème de survie à notre ingénierie : il faudra le faire vivre au delà, comme un précurseur de la notion de fonction.

Nous exposons donc la forme qui a été expérimentée, au terme du travail collaboratif avec des professeurs de Collège, en France, dans le cadre d'une recherche sur les « parcours d'étude et de recherche » (AMPERES), comme nous l'avons annoncé en introduction. Le problème à résoudre est donc le suivant : *à toute extension praxémique, on doit associer des formes langagières, qui jouent la fonction de théorie.* Il s'agit de réguler l'inventivité demandée aux élèves en leur proposant des outils de contrôle de leurs pratiques. L'idée de « programmes de calcul » sert alors de *métaphore fondamentale3*[4] pour interpréter le calcul sur les relatifs. Nous voulons dire par ce terme que les discours sur ce que les élèves sont engagés à écrire doivent être pensés a priori par le professeur aussi soigneusement que les systèmes de notations et leur manipulation, et par exemple que l'égalité « 659–62+61 = 659–1 »doit pouvoir se dire « le programme 'soustraire 62 puis ajouter 61' équivaut au programme 'soustraire 1' » ou mieux « soustraire 62 puis ajouter 61 c'est soustraire 1 », pour que le calcul 659 – 1 = 658 prenne pour les élèves un sens fondé non plus sur la soustraction mais sur l'expérience des programmes de calcul, et pour que le symbole composé « – 1 » puisse être isolé du nombre 659, parce que ce symbole représente « un programme de calcul », objet qui a acquis une certaine existence par les pratiques qui l'ont mobilisé.

Penser « programmes de calcul » permet donc de définir métaphoriquement l'équivalence des programmes « soustraire 62 puis ajouter 61 » et « soustraire 1 ». Ce faisant, le symbole binaire – (trait) ou + (croix) devient prédicat portant sur 62, 61, ou 1, et il se trouve détaché du diminuande 659. L'extension praxémique associée à la métaphore informatique conduit donc à une double interprétation de ce que l'écriture 659 – 1 dénote. Soit le calcul de la différence de deux nombres, soit une soustraction opérée sur un diminuande. L'intervention du symbole « – 1 » dote la notation 659 – 1 d'une dénotation qui peut être partagée par les élèves d'une classe de Collège. Du point de vue des élèves, un opérateur tel que – 2 est en effet codé d'une manière qui se rapproche fortement du souvenir de l'écriture d'un nombre, en vigueur depuis leur entrée à l'École : même si ce nombre possède la particularité nouvelle d'être affecté d'un signe représentant ailleurs une opération, dans ce cas une soustraction » explique Matheron (mémoire pour l'HDR, non publié). Car, poursuit l'auteur « Les ostensifs conduisent, par un phénomène de proximité engendré par la perception, à une extension de leur usage, au-delà de celui pour lequel ils ont été créés ». L'extension se trouve légitimée par le moyen de la nommer que donne le professeur, et le mouvement d'*enquête* sur les objets ainsi proposés aux élèves peut donc commencer. C'est en ce sens que nous pensons l'enseignement proposé comme relevant d'une « démarche d'investigation », puisque nous avons dorénavant mis en place un monde d'objets nouveaux que les élèves peuvent explorer soit, à partir des usages qu'ils vont imaginer soit, à partir des usages sociaux sur lesquels ils vont enquêter soit, à partir des questions qui leur sont posées par le professeur, mais dans tous les cas, sous sa direction. Dans l'ingénierie proposée, l'investigation, pour utiliser cet

[4] On notera que cette métaphore est informatique, elle utilise la connaissance sociale partagée de ce que les ordinateurs – qui seraient mieux nommée calculateurs – exécutent des « programmes » et que toute écriture d'une succession de calculs – toute expression algébrique – peut être considérée comme un programme et « exécutée ».

anglicisme, a porté d'abord sur les pratiques formelles que permet le nouveau type de symboles et sur les divers cas de figure qu'ils peuvent rencontrer. Elle se déroule donc « sous contrat », c'est-à-dire sur les questions que le professeur pose à leur tour, avec la double garantie de ne rencontrer qu'une difficulté à la fois et que celle)ci soit surmontable.

Quels sont les problèmes posés aux élèves et qui déclinent la question originelle : « Peut-on donner un sens numérique au fait que soustraire 62 puis ajouter 61 à un nombre suffisamment grand revient à soustraire 1 à ce nombre ? » Ils font d'abord varier les cas conduisant à écrire « –1 » ou « –2 », puis ils conduisent à explorer +1 et +2, à comprendre qu'un tel symbole a plusieeturs équivalents, à travailler de manière à obtenir le symbole minimal, à traiter de ces questions en oubliant de nommer le nombre à fonction d'opérande, qui est conservé dans le cours du travail, à composer des symboles par des opérations binaires, à explorer les cas possibles en tentant de savoir si l'étude a été exhaustive, etc. L'ensemble de ces sous questions décline la question initiale, relative à ce que nous avons pensé comme « enquête sur l'attribution possible d'un sens à une extension praxémique ».

III. DISCUSSION ET CONCLUSION

Tous les types de travail mathématique ne sont pas représentés dans cet exemple particulier, mais nous tenions à faire voir comment l'idée d'investigation, déclinée ici dans les deux dimensions d'enquête sur des pratiques et d'étude de savoirs, permet de traiter efficacement des problèmes d'enseignement que l'idée trop simple de recherche d'un sens concret pour une forme symbolique ne permettait pas de régler.

Ainsi la *démarche d'investigation* ne vaut pas seulement pour produire une théorie pour un phénomène, selon un processus relevant d'une description empiriste. Elle peut aussi permettre de mettre en place une technique efficace pour traiter de manière commode une question pratique. L'enquête produite par l'un des groupes AMPERES, conduite très fermement sous la direction du professeur, relève d'une des interprétations de ce que Chevallard appelle un « parcours d'étude et de recherche » relatif à une question prise en charge par un collectif d'élèves qui enquête sur un type bien identifié de pratiques sociales sans se soucier vraiment ni d'en étudier les attendus théoriques ni de rechercher à identifier la classe de problèmes correspondant à la réponse pratique obtenue dans ce cas de figure : au point que les élèves des trois classes observées ne poseront ni la question de « la multiplication de ces nombres » ni même la question de l'identification de ces symboles comme « des nombres d'un type nouveau ».

REFERENCES

Brousseau G., Balacheff N., Cooper M., Sutherland R., Warfield V. (1997) *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques, 1970-1990*. Dordrecht : Kluwer academic publishers.

Chevallard Y. (2006) Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. In *Actes du premier congrès international sur la théorie anthropologique du didactique* (pp. 705-746).

Filloy E., Rojano T. (1989) Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the learning of mathematics* 9(2), 19-25.

Freudenthal H. (1973) Soviet research on teaching algebra at the lower grades of the elementary school. *Educational Studies in Mathematics* 5(1), 391-412.

Gallardo A. (1995) Negative Numbers in the Teaching of Arithmetic. Repercussions in Elementary Algebra. In Owens D. et al. (Eds.) (vol.1, pp. 158-163) *Proceedings of PME17, North American Chapter* Columbus (OH-USA).

Gallardo A. (2002) The extension of the natural-number domain to the integers in the transition from arithmetic to algebra. *Educational Studies in Mathematics* 49(2), 171-192.

Gallardo A., Rojano T. (1989) Areas de difficultades en la adquisicion del lenguaje aritmetico-algebraico. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 9(2), 155-188.

Gallardo A., Rojano T. (1990) Avoidance and acknowledgement of negative numbers in the context of linear equations. In *Proceedings of PME14, North American Chapter* (Vol. 2, pp. 43-48). Mexico.

Gallardo A., Rojano T. (1993) Negative solutions in the context of algebraic word problems. In *Proceedings of PME15. North American Chapter* (pp. 121-127). Pacific Grove (CA, USA).

Goldin G., Shteingold N. (2001) Systems of representations and the development of mathematical concepts. *The roles of representation in school mathematics 2001*, 1-23.

Herscovics N., Linchevski L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics* 27(1), 59-78.

Herscovics R., Linchevsky L. (1991) Crossing the didactic cut in algebra: grouping like terms in an equation. In *Proceedings of PME13, North American Chapter* (Vol.1, pp.196-202).

Kieran C. (1981) Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics* 12(3), 317-326.

Matheron Y. (2009) *Mémoire et étude des mathématiques: une approche didactique à caractère anthropologique*. Presses universitaires de Rennes.

Mercier A. (2008). Pour une lecture anthropologique du programme didactique. *Education & Didactique* 2(1), 7-40.

Peled I., Mukhopadhyay S., Resnick L. B. (1989) Formal and informal sources of mental models for negative numbers. In *Proceedings of the 13th international conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.3, pp. 106-110).

Sensevy G., Mercier A. (2007) *Agir ensemble : L'action didactique conjointe du professeur et des élèves*. Presses universitaires de Rennes

Serfati M. (2005) *La révolution symbolique : la constitution de l'écriture symbolique mathématique*. Paris : Transphilosophiques (Petra.).

Sfard A. (1991) On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics* 22(1), 1-36.

Sfard A., Linchevski L. (1994) The gains and the pitfalls of reification—the case of algebra. *Educational Studies in Mathematics* 26(2), 191-228.

Vlassis J. (2004) Making sense of the minus sign or becoming flexible in « negativity ». *Learning and instruction* 14(5), 469-484.

DÉMARCHE D'INVESTIGATION ET MODÉLISATION EN MATHÉMATIQUES EN MATERNELLE L'EXEMPLE DU « JEU DES TRÉSORS »

Grace MORALES IBARRA* – Laetitia BUENO-RAVEL*

Résumé – L'article vise à identifier des éléments rendant compte d'une démarche d'investigation mise en œuvre par des élèves de maternelle au cours de jeux de création et d'utilisation d'un langage iconique. Les élèves sont amenés, par un processus de modélisation, à représenter une situation en fabricant des outils sémiotiques (listes et désignations) afin d'anticiper des réponses aux questions posées et d'assurer leur réussite. Nous prenons appui sur des données issues d'un historique de l'ingénierie bordelaise le « Jeu des trésors » (Brousseau 2004) et d'une récente mise en œuvre conduit à Rennes.

Mots-clefs : représentation, modélisation, codes, logique-mathématiques, maternelle

Abstract – The paper aims to identify elements reflecting a investigate work carried out by students in kindergarten. The "didactics games" lead to the creation and use of designations of objects. Students develop, produce and validate codes to solve problems related to the process of making and reading a "list" of objects hidden in a box. Our analysis is based on a historical study of COREM's work and a data collection from a recent implementation of the research the "game of treasures" (Brousseau 2004) which is carried out in Rennes.

Keywords: representation, modeling, codes, logical-mathematical, preschool

I. PROBLEMATIQUE

Si vous avez une image ou un tableau utilisez le menu insertion et mettez toujours une légende en numérotant vos figures et tableaux dans le style *Legende* comme ci-dessous.

Notre contribution explore l'engagement de jeunes élèves d'école primaire française dans des démarches d'investigation en mathématiques.

Si, en France, la démarche d'investigation (notée DI par la suite) est explicitement au programme des enseignements scientifiques et technologiques du collège, cela n'est pas encore le cas dans à l'école primaire (élèves âgés de 3 à 10 ans). Cependant, certains éléments des textes officiels vont dans le sens de l'introduction de cette démarche dès l'école primaire.

En effet, le préambule du bulletin officiel – n°3 du 19 juin 2008 – souhaite que les élèves puissent mobiliser « leurs connaissances et compétences dans des situations progressivement complexes pour questionner, rechercher et raisonner par eux-mêmes ». Le texte souligne, pour le CP et CE1, la nécessité de la construction d'une « culture commune faisant appel à une « première pratique scientifique » ». Dans le domaine des mathématiques et de la culture scientifique et technologique, il est souhaité que les élèves développent la compétence d'« observer et (de) décrire pour mener des investigations » ainsi que leur « goût du raisonnement ». Pour les niveaux allant du CE2 au CM2, le but est de « développer le goût de la recherche et du raisonnement ». Il est attendu que les élèves soient capables de « poser des questions, d'exprimer son point de vue », de « décrire, expliciter un raisonnement, présenter des arguments », d'« expliquer une démarche ».

Dans les programmes de maternelle (élèves de 3 à 5 ans), des éléments de DI sont présents mais ne sont pas inscrits dans le domaine des mathématiques[1]. Les programmes précisent que

* Université de Brest, UEB, EA 3875 CREAD, IUFM de Bretagne – France – grace_m_i@hotmail.com, laetitia.bueno-ravel@bretagne.iufm.fr

© Morales Ibarra G., Bueno-Ravel L. (2012) Démarche d'investigation et modélisation en mathématiques en maternelle : l'exemple du « Jeu des trésors ». In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT10, pp.1432–1443). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

l'école maternelle permet aux élèves « de vivre des situations de jeux, de recherches ». Elle laisse à chaque élève le temps « d'observer, d'imiter, d'exécuter, de chercher, d'essayer », « de poser de questions », « d'émettre des hypothèses », de « décrire, (d') expliquer après avoir terminé une activité ou un jeu », de « justifier un acte », de « faire des liens avec les questions qui se posaient ou/et avec ce qui a été découvert en classe ». Ces éléments nous semblent pertinents et susceptibles pour fonder la construction des DI dans des situations « de jeux et de recherches ».

Dans cet article, nous souhaitons montrer qu'il est possible, lors de la mise en œuvre de situations adidactiques (Brousseau 1998, 2004), d'identifier des éléments rendant compte d'une démarche d'investigation mise en œuvre par des élèves de grande section de maternelle (âgés de 5 ans).

L'étude que nous présentons prend appui sur l'ingénierie didactique appelée : « Jeu des trésors »[2] (notamment Pérès, 1984 ; Brousseau, 2004). Au cours de ce « Jeu des trésors », les élèves sont amenés à construire « des codes pour représenter des objets, des collections, des propriétés, des relations, etc. » (Brousseau 2004 p. 255). Les codes sont des désignations graphiques contenant des données sélectionnées « décrivant » les propriétés des objets ou leurs relations, etc. Brousseau (2004) les appelle « modèles ». Ils sont organisés en une liste qui est également à fabriquer et qui fournit une représentation d'une situation donnée au cours de la suite des jeux. La fabrication et l'usage de ces outils sémiotiques (liste et désignations) ne vont pas de soi. Cela nécessite la construction de connaissances nouvelles : notion de collection, structuration de groupes et de classes, correspondance terme à terme, dénombrement des collections, élaboration des techniques d'énumération, sélection d'information afin d'élaborer de désignations graphiques, etc.

Le « Jeu des trésors » est constitué de quatre phases et dure d'environ six mois. L'enjeu pour les élèves est de <u>trouver un moyen</u> pour <u>anticiper</u> une réponse à la question suivante, posée par l'enseignant : « qu'est-ce qu'il y a dans ma boîte ? ». Pour gagner, les élèves doivent se rendre capables d'énumérer le contenu exact de la boîte opaque, <u>à coup sûr</u>, afin de les faire sortir de la boîte par l'enseignant (les objets sont cachés la veille dans la boîte par l'enseignant, en présence des élèves). Ces objets appartiennent à un référentiel ou collection finie d'une trentaine d'objets choisis par catégories. Ils sont désignés oralement par les élèves durant la phase 1 (phase de familiarisation avec le jeu). La phase 2, en individuel, amène un changement de stratégie : la création d'une liste. Alors que la mémoire permet de se souvenir de relativement peu d'objets, la liste permet de se souvenir d'un grand nombre (dix) d'objets cachés. Ces désignations graphiques, personnelles, sont mises en conflit pendant la phase 3, jeu en binôme. En effet, le besoin de communiquer le contenu exact de la boîte à autrui, au seul moyen de la liste, amène les élèves à éprouver la nécessité de se concerter pour la création d'un code commun. C'est pourquoi l'enseignant organise parallèlement des débats (phase 4). Le but est de fournir un temps collectif d'étude et d'analyse des désignations ou « modèles » créés, afin de choisir et d'afficher un code iconique commun.

Du point de vue de la recherche, il s'agit d'une suite de jeux d'initiation à la création et à l'usage d'un langage iconique et/ou code commun institué par un collectif. L'ingénierie favorise le développement d'une culture sémiologique en vue de préparer les élèves à son usage à de fins mathématiques dans leur scolarité comme le souligne Brousseau (2004) :

---

[1] Certains de ces éléments sont issus de la progression concernant le langage et considérés comme des « activités interdisciplinaires et transversales ». L'une des caractéristiques commune des progressions, allant de la grande section au CM2, est l'usage de la langue française dans toutes les disciplines.

[2] Cette situation a été élaborée fin des années 70 et reproduite par des instituteurs de l'école maternelle Jules Michelet à Talence jusqu'en 1990. Elle a été étudiée par des membres de l'équipe du COREM et de l'IREM de Bordeaux sous la direction de Guy Brousseau (Brousseau 2004).

> « La nécessité d'effectuer ces représentations met en évidence les objets (éléments, propriétés et relations) et prépare leur reconnaissance, leur emploi dans d'autres situations, leur connaissance explicite » (Brousseau 2004 p. 263).

Il s'agit dans cet article, d'apporter des éléments de réponse aux questions suivantes : Peut-on établir un lien entre DI et la suite de situations proposées aux jeunes élèves par cette ingénierie ? Cette ingénierie favorise-t-elle le développement d'une démarche scientifique chez les élèves ? Dans quelle mesure peut-on considérer qu'il y a un processus de modélisation au cours du « Jeu des trésors » ?

Nous allons maintenant présenter brièvement le cadre théorique et de la méthodologie adoptés pour aborder ces questions. Nous analyserons ensuite certains « moments » des ingénieries mises en œuvre à Bordeaux ou à Rennes afin d'exemplifier notre propos. Nous terminerons ensuite en mettant en évidence des éléments des contraintes pratiques, matérielles ou théoriques, inhérentes au travail d'investigation du « réel » en classe de grande section de maternelle.

II. CADRE THEORIQUE ET METHODOLOGIE

1. *La démarche d'investigation, ses étapes et la théorie des situations didactiques (TSD)*

Comme cela est souligné dans la présentation du groupe de travail 10 « La démarche d'investigation dans la classe de mathématiques : fondements et pratiques. », « l'explicitation des diverses étapes par lesquelles on souhaite faire passer les élèves au cours d'une démarche d'investigation rencontre bien des points mis antérieurement en valeur (…) par les ingénieries didactiques qui ont été proposées (...) au sein de divers cadres théoriques (...) ».

Le « Jeu des trésors » a été construit à Bordeaux parallèlement au développement des concepts de situations adidactiques (notées SA par la suite) d'action, de formulation et de validation dans le cadre de la TSD (Brousseau 1998).

Ainsi, les phases 2, 3 et 4 de l'ingénierie sont fondées respectivement sur les caractéristiques des SA d'action, de formulation et de validation (Brousseau, 2004 ; Digneau, 1980 ; Pérès, 1984). Au cours de chaque SA les élèves sont amenés à construire des connaissances pour résoudre des problèmes posés dans le cadre de « jeux mathématiques » (Brousseau, 2004). Lorsque nous examinons de près ces caractéristiques des SA, nous trouvons différentes étapes constitutive d'une DI.

Durant une SA d'action, l'élève, confronté à une situation qui lui pose problème, se rend capable « d'anticiper sur les résultats ». Pour ce faire :

> Il construit une représentation de la situation qui lui sert de *modèle* et de guide pour prendre des décisions. Ce *modèle* est un exemple de relation entre certains objets qu'il a perçus comme pertinents dans la situation. (Brousseau 1998, p. 33)

La mise à l'épreuve de ces modèles peut aboutir dans une « réussite locale, imparfaite, fragile », à la création de concepts transitoires (Pérès, 1984), et à la construction « de modèles d'action souvent inconscients ou implicites » (Brousseau 1998 p. 128). Probablement, la création de ces modèles est fondée sur des hypothèses implicites afin de donner réponse aux questions posées au cours des jeux. Les modèles seront modifiés en fonction des rétroactions du milieu.

Les SA de formulation favorisent la conceptualisation et la prise de conscience des moyens utilisés grâce à une explication ou une description des modèles implicites. Cela se produit au cours d'échanges d'informations fondés sur un langage partagé entre utilisateurs, leur permettant d'agir ensemble dans un même but.

> L'émetteur veut obtenir un résultat, (donc) il utilise un langage qui doit permettre au récepteur de maîtriser la situation (des symboles, une écriture formalisée ou non, le langage naturel etc.). (Pérès 1984, p. 15)

La création et la construction conjointe de ce langage nécessite, selon nous, de tester son efficacité, de se poser des questions sur l'origine des erreurs (ou des réussites), de le modifier selon de nouvelles hypothèses, de le mettre à l'épreuve afin de l'affiner.

> [Ce] langage construit serait éprouvé du point de vue de l'intelligibilité, de la facilité de construction »), donc il devient objet d'analyse. [Il s'agit de] mettre au point progressivement un langage que tout le monde comprend et qui prend en compte les objets et les relations pertinentes de la situation de façon adéquate ». (Brousseau 1998, p. 36)

Dans les « SA de validation », l'élève utilise les mathématiques « en tant que raisons d'accepter ou de rejeter une proposition (un théorème), une stratégie, un modèle, ce qui exige une attitude de preuve » (Brousseau 1998, p. 39).

L'élève se rend capable de prouver et de justifier l'efficacité de son modèle vis-à-vis des camarades au sein de débats. Le débat ne prend pas d'emblée un caractère « scientifique » car prouver, argumenter, rejeter, accepter des modèles ne sont pas des attitudes spontanées. Les stratégies du maître sont donc déterminantes (introduire des contraintes, exiger que l'on prouve, renvoyer au problème posé) pour amener le débat entre élèves vers un débat scientifique. Dans la SA de validation du « Jeu des trésors », les élèves suggèrent des désignations dessinés sur des étiquettes, les comparent et identifient les incohérences. Il se peut qu'ils arrivent à la formulation de l'hypothèse : « prendre un signe le plus simple possible sur le plan graphique pour qu'il soit facile à reconnaître et à reproduire » (Comiti 1974, p. 31) créant ainsi un critère pour choisir un modèle commun. L'efficacité de la désignation choisie serait à tester au cours des jeux suivants.

2. *La modélisation, les modèles et la représentation*

Nous présentons maintenant les concepts de « modélisation » et « modèle » sur lesquels nous prenons appui pour fournir des éléments de réponse à notre question : Dans quelle mesure peut-on considérer qu'il y a un processus de modélisation au cours du « Jeu des trésors » ?

Différents chercheurs en mathématiques associent ces concepts à l'activité de « décrire » ou de « représenter » le « réel ». Certains considèrent que « l'homme a inventé les mathématiques pour s'en servir utilement quand il doit décrire des phénomènes qui se produisent autour de lui » (Barrow 2003, p. 13).

> D'un côté, nous avons une image du monde réel constitué de choses concrètes, de l'autre, celle du monde des idées mathématiques. Il existe des liens entre les deux mondes, au sens où des phénomènes et des objets du monde *réel* peuvent être représentés par une abstraction mathématique. A l'inverse, le monde mathématique regroupe des notions abstraites de quantité et d'espace qui trouvent une matérialisation dans le monde *réel*. (Ibid p. 20)

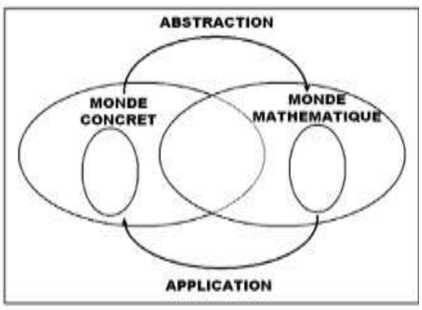


Figure 1 – Barrow 2004

Cette description ou représentation du monde réel dans le monde mathématique peut être appelée modélisation. Modéliser c'est : « *représenter* une situation d'une certaine réalité dans un modèle (mathématique pour nous), *re-présenter* étant pris au sens de présenter cette situation avec une nouvelle description liée au modèle choisi » (Duperret 2007, p. 19). « L'une des finalités des mathématiques est de modéliser le monde qui nous entoure, et pour cela d'en donner des représentations ». (Ibid p. 25-26). Duperret (2007, p. 19) attache au processus de représentation trois spécificités :

> 1 Représentation « fonctionnelle » des objets d'une certaine « réalité » par des objets « abstraits » ou « schématisés » dans un modèle où peut s'exercer un traitement théorique.
>
> 2 Représentation « analogique » ou « métaphorique » : les processus naturels sont imités dans des conditions qui favorisent l'observation et l'étude.
>
> 3 Représentation « sélective » : un travail de modélisation nécessite de retenir certaines caractéristiques de la situation et d'en ignorer d'autres.

Par ailleurs, il distingue deux types de modèles, descriptifs et prédictifs, comme le montre la citation ci-dessous :

> Du réel vers le modèle : modèles descriptifs (« transformer » et « interpréter » des « informations ») ; ce sens correspond à une fonction heuristique.
>
> Du modèle vers le réel : modèles prédictifs (« anticiper » une « action ») ; ce sens correspond à une fonction justificative. (Ibid p. 19)

Henry (1997) décrit le processus de modélisation en deux étapes. Premièrement, au niveau de la situation concrète : l'observation d'une situation réelle et sa description en termes courants.

> Cette description est déjà une sorte d'abstraction et de simplification de la réalité, dans la mesure où certains choix sont faits, pour ce qui semble pertinent de cette situation vis-à-vis du problème étudié. (Ibid. p. 20)

Deuxièmement, l'étape de mathématisation ou formalisation du modèle. Les élèves doivent se rendre capable de :

> représenter le modèle dans la symbolique propre aux mathématiques, d'interpréter la question posée en un problème purement mathématique (…) et (d') savoir faire appel aux outils mathématiques adaptés pour résoudre le problème abstrait. (Ibid p. 21)

Quant au modèle, il contient dans sa structure une part de connaissances théoriques, permettant d'évaluer, d'interpréter et de généraliser la réalité.

> Un modèle est une interprétation abstraite, simplifiée et idéalisée d'un objet du monde réel, ou d'un système de relations, ou d'un processus évolutif issu d'une description de la réalité. (Ibid p. 19)

Différents systèmes de signes peuvent représenter le modèle (images, schémas, langage ou symbolismes). Un modèle par analogie peut être exprimé dans un vocabulaire courant et ses objets sont dotés de propriétés caractéristiques idéales. Henry l'appelle « modèle pseudo-concret ». Coulange (1997, p. 6) définit le modèle « pseudo-concret » comme étant :

> une interprétation du système étudié en termes de langage naturel mais où la structure mathématique qui va être utilisée dans le modèle mathématique associé est plus au moins sous-jacente. Le passage du modèle pseudo-concret obtenu au modèle purement mathématique devient alors une traduction dans la *symbolisation propre aux mathématiques*.

Les travaux de ces différents auteurs nous interrogent sur la question d'une « description » ou « interprétation » reliant deux mondes, l'un représentant, l'autre le représenté, et sur l'utilisation de la représentation pour « anticiper » la solution d'un problème étudié. Nous mettons ces travaux en parallèle avec la définition de « représentation » donnée par Brousseau (2004, p. 243) :

> En fait, une représentation met en présence deux univers : l'un contient la chose représentée, l'autre contient la chose représentante. Représentant et représenté ont des relations avec leur univers respectifs. (...) f(R(a,b)) = fR ((f(a), f(b)) qui signifie que l'on peut indifféremment considérer d'abord dans l'univers représenté, puis les traduire dans l'univers représentant ou commencer par traduire les objets et les relations et considérer les relations images dans le représentant. Cette condition ignorée du sens général, joue pourtant un rôle fondamental dans toutes les études de représentations. C'est elle qui permet de réimporter une signification ou un résultat obtenu de l'univers représentant dans l'univers du représenté, donc d'utiliser la représentation.

Nous essaierons de montrer dans la suite de ce texte, comment, lors du « Jeu des trésors », des élèves de grande section de maternelle sont amenés vers un travail de modélisation en essayant de résoudre les problèmes de désignation qui se posent à eux lorsqu'ils doivent élaborer des codes communs pour se remémorer les objets du trésor.

3. *Méthodologie*

Notre étude prend appui sur deux types de données. D'une part, des données tirées d'une étude historique[3] de l'ingénierie bordelaise du « Jeu des trésors » (Digneau 1980 ; Jousson, Pérès, Remy 1980 ; Pérès 1984 ; Jousson, Loubet, Naura, Pérès, Remy 1985 ; Pérès 1988 ; Loubet et Salin 2000 ; Brousseau 2004 ; Briand, Loubet et Salin 2004). L'étude historique a permis l'élaboration d'une description détaillée de l'ingénierie : sa construction, ses fondements théoriques ancrés dans la TSD (Brousseau 1998), les contenus d'apprentissage développés par les élèves, la description de chaque phase et la construction des tableaux décrivant l'essentiel de la mise en œuvre du « Jeu des trésors » prenant appui sur des éléments théoriques du modèle proposé par la Théorie d'action conjointe en didactique (notamment Sensevy et Mercier 2007 ; Schubauer-Leoni, Leutenegger et Forget 2007 ; Ligozat 2008 ; Amade-Escot et Venturini 2009).

D'autre part, des données tirées de l'une des nouvelles mises en œuvre[4] de l'ingénierie au sein de l'un des Groupe de Recherche de l'IUFM de Bretagne. Ce groupe est constitué de et maîtres-formateurs et d'enseignants-chercheurs, d'étudiants de master et de doctorat du laboratoire CREAD. Les données (transcriptions, photogrammes, productions des élèves) s'inscrivent dans un corpus de 52 séances enregistrées entre novembre 2008 et juin 2009.

III. ÉLEMENTS D'ANALYSE

L'analyse des données tirées du travail historique et de la mise en œuvre rennaise, nous permet d'apporter des premiers éléments de réponse à nos questions : Dans quelle mesure on peut considérer qu'il y a un processus de modélisation au cours du « Jeu des trésors » ? Dans quelle mesure le modèle proposé par Henry peut nous aider à comprendre les travaux des élèves au cours du « Jeu des trésors » ? Dans quelle mesure la construction des DI sont favorisées au cours du jeu ?

1. *Différents types de traits...*

Lors du « Jeu des trésors », les élèves sont confrontés à la problématique de différenciation des modèles pour pouvoir représenter des objets partageant des caractéristiques physiques proches (des objets ronds, longs, carrés, possédant des lettres, des images, etc.). Pour réussir, ils doivent prendre conscience des relations que ces objets entretiennent au sein d'un référentiel, ainsi que les relations qu'entretiennent leurs représentations. Ensuite, ils devront

[3] L'étude historique a été menée dans le cadre d'une thèse en cours d'élaboration.
[4] Cette ingénierie a été reprise également à Marseille, Genève et Tessin.

sélectionner des informations pertinentes sur les objets à représenter, des « ressemblances ou non-ressemblances » ou des « non-ressemblances sélectives » (dans le sens de Van Fraassen, 2010). Différents types des traits que permettent la création des modèles ont étaient repérés par l'équipe de Brousseau (Digneau 1980 ; Pérès 1984 ; Jousson, Loubet, Naura, Pérès et Remy 1985 ; Loubet et Salin 2000 ; Brousseau 2004), voici des exemples :

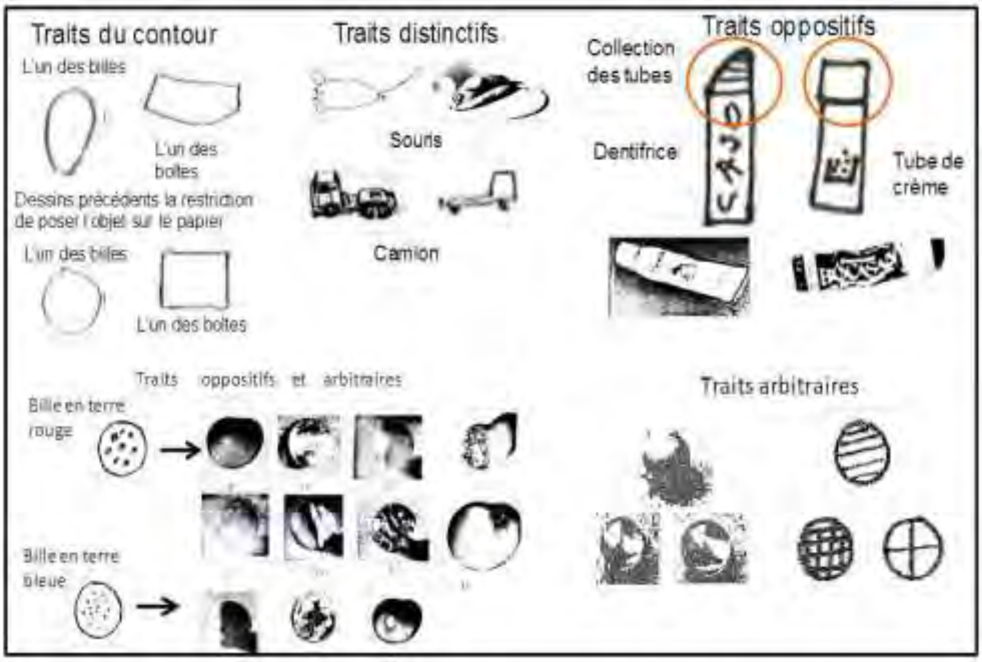


***Figure 2** – Des traits (Pérès 1984)*

Les traits de contour fournissent très peu d'information lorsque l'objet partage des caractéristiques communes avec plusieurs objets. Si l'objet est unique et très dissemblable d'autres objets (comme la souris ou le camion), quelques traits supplémentaires peuvent aider pour le décoder. Parfois, il faut tout simplement distinguer les modèles d'objets en les opposant (les bouchons du dentifrice et du tube de crème) ou il faut choisir et utiliser un signe arbitraire qui ne renvoie pas aux caractéristiques analogiques de l'objet (les billes). Ce cadre nous fournit des éléments génériques pour nos analyses.

2. *La liste et le processus de modélisation*

A la lumière des éléments théoriques, notamment Brousseau (2004), nous pensons que la liste et les désignations graphiques permettent à l'élève de représenter la situation (certains objets cachés dans une boîte opaque) en codant des informations choisies sélectivement à partir des objets (description qui permet retrouver un objet précis du référentiel), d'anticiper la solution et de la réimporter en décodant l'information (énumération des objets cachés à l'aide de la liste et du code oral associé à chaque objet), afin produire l'action souhaitée : faire sortir les objets de la boîte le lendemain ou surlendemain. La figure ci-dessous illustre notre propos. Nous remarquons le double mouvement permettant de traduire l'information d'un univers représenté à l'autre représentant (Brousseau 2004). Selon Duperret (2007) il s'agirait de *modèles, descriptif* et *prédictif.* Notons également que la liste montre des représentations que l'on peut considérer comme fonctionnelles (désignations que schématisent des informations), analogiques (le porte-monnaie, le bonhomme), et quelques-unes montrent des informations sélectives (les rues de deux camions, les lettres sur la boîte de cachous).

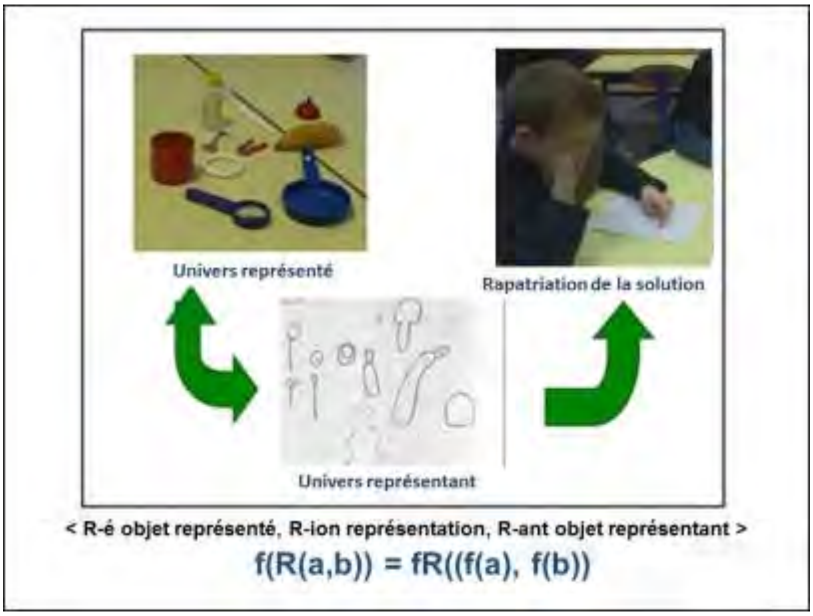


Figure 3 *– Jeu de listes, phase 2 (Rennes 2008)*

La problématique qui est au cœur des travaux de représentation est : la différenciation des modèles afin qu’un modèle (ou plusieurs) évoque un seul objet du référentiel. Ainsi, dans la liste (voir figure ci-dessus), le double rond évoque l’objet anneau blanc, le rond avec le point évoque le bout de tomate mais le troisième rond ne pourra pas renvoyer au verre parce que le référentiel est composé par plusieurs objets ronds. L’élève sera donc confronté à la question : que faut-il pour différencier et spécifier le modèle ?

Il semble donc que les activités développées durant cette ingénierie sont au cœur du processus de modélisation. Cela est évoqué par Brousseau:

> Dans la mesure où on admet que toutes les connaissances sont des représentations, au sens d’images d’une réalité, alors ces représentations sont les « objets même de l’enseignement ». A ce titre, elles sont aussi des « moyens de connaissances pour les élève », elles doivent donc être enseignées comme telles. Cette dualité est particulièrement évidente en mathématique, c’est-à-dire des triplets <représentant, représentation, représenté>. On y enseigne des modèles et aussi la modélisation, en tant que processus scientifique, avec parfois des justifications qui font de cet enseignement une véritable formation épistémologique. La représentation apparaît aussi comme un moyen de provoquer l’apprentissage et, par-là, elle peut être un moyen d’enseignement. Enfin, elle apparaît comme un moyen d’analyse et de connaissance de l’enseignement lui-même. (Brousseau 2004, p. 244)

3. Fabrication et usage de codes et démarche d'investigation

Les travaux de fabrication, d’usage, de codage, et de décodage supposent, selon nous, le développement d’une DI. Il faudra en effet formuler des hypothèses, implicites ou explicites sur la façon de faire la liste et les désignations, mettre à l’épreuve l’efficacité de l’outil créé, tester la gestion des données dans la liste, faire la correspondance objet-désignation, dénombrer, développer des techniques d’énumération, etc. afin d’affiner et disposer d’un outil performant (exemples ci-dessous).

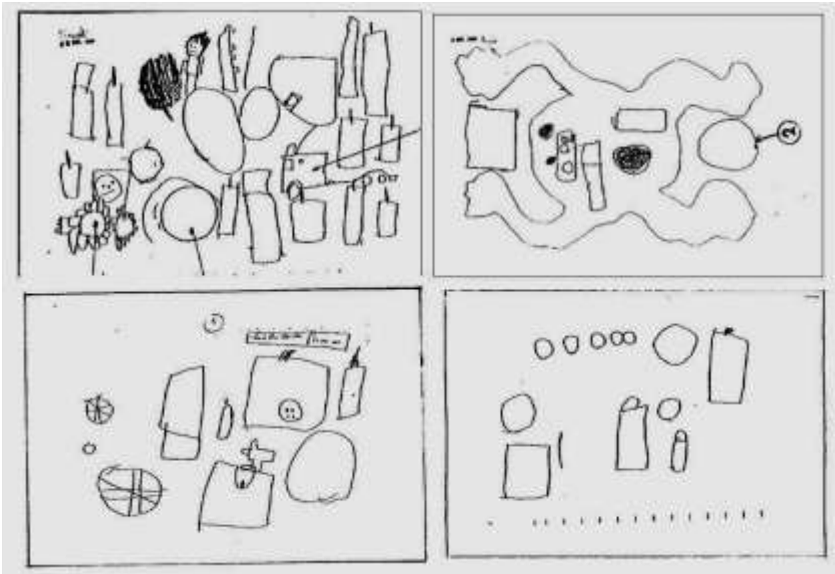


Figure 4 *– Listes, phase 2 (Pérès 1984)*

Ci-dessous, la figure 5 montre IM qui utilise le comptage (en 1 et 12) et une technique d'énumération sur la liste (« en ligne ») afin de vérifier si sa liste contient le même nombre éléments (dix) que la collection d'objets posés sur la table. Pour la recherche des objets encore non dessinés (désignations entourées sur les photos 10 et 14), nous constatons plusieurs allers-retours du regard d'IM (2 à 13). En effet, elle devra construire un moyen pour assurer la correspondance objet-dessin.

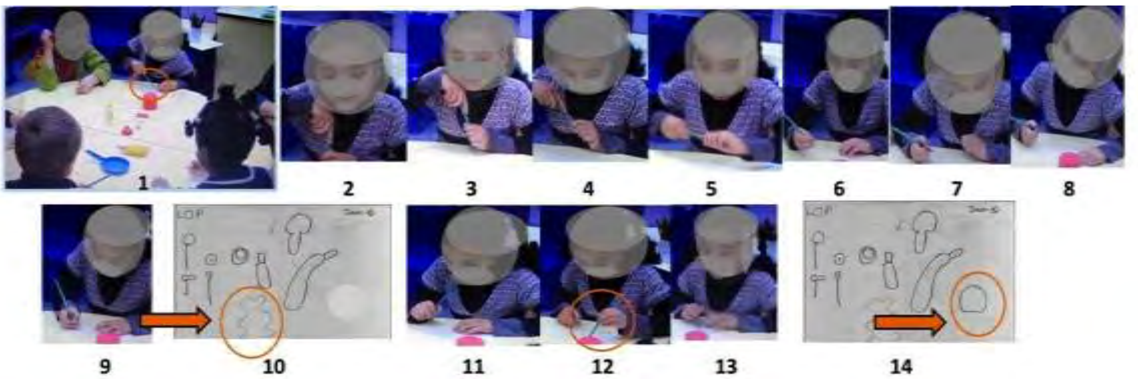


Figure 5 *– Fabrication d'une liste. (Rennes 2008)*

Nos analyses en cours semblent montrer que lors de la suite de jeux, les élèves paraissent mener une enquête sur le milieu. Ils feraient des allers-retours entre les objets cachés et leurs modèles prenant conscience de relations qu'ils entretiennent au sein du référentiel (phases 2 et 3), ou exclusivement entre les modèles et leurs relations (phase 4), permettant la création, le test et les modifications des modèles. Ces travaux seraient exécutés, d'abord, de manière non-consciente et implicite ; la prise de conscience se réalisant probablement au même temps que les élèves découvrent le jeu. C'est pourquoi nous ne jugeons pas d'emblée qu'il y a une DI, car il n'y a pas, par exemple, de protocole préétabli.

L'exemple ci-dessous est tiré de l'historique de l'ingénierie bordelaise. MATH, un élève, rencontre le rouge à lèvres au cours de six séances (phases 3 et 4). Il le représente mais il ne réussit pas à le faire décoder correctement jusqu'à la dernière partie. L'objet appartient à la classe des *objets longs.* Il doit soit l'opposer à d'autres sept objets par des traits oppositifs et/ou construire des traits arbitraires. La transcription (figure 6) montre l'évolution du modèle : en 1) il retient le contour et la pastille centrale, en 2) il prend en compte les suggestions des camarades et choisit faire le bouchon, en 3) il modifie le modèle et dessine l'étui, probablement avec l'hypothèse que son modèle sera reconnu cette fois-ci, en 4 et 5) il remet à l'épreuve son deuxième modèle. Finalement, les échecs l'amènent à évoquer ses problèmes au cours du débat ce qui débouche dans la proposition de noircir la pastille centrale, trait arbitraire, le code accepté par le groupe et affiché. En 6), il choisit le code qu'il avait suggéré et gagne.

***Figure 6**– Modèle du rouge à lèvres (Pérès 1984)*

4. Gestion du débat par l'enseignante : quelles caractéristiques des modèles mises en avant et démarche d'investigation

L'exemple suivant, tiré de la mise rennaise, nous permet de repérer quelques éléments de DI. La figure 7 montre la liste de Roman qui a codé quatre objets dont deux crayons bleus. Ces pairs ont interprété ces deux dessins incorrectement en les prenant pour des représentations d'autres objets longs : deux des trois règles du trésor.

Ce qui a posé problème est que Roman a retenu l'information largueur et longueur des objets. En effet, au cours des échanges, il explique : « J'ai dessiné le plus gros et puis l'autre plus fin ». L'enseignante demande les élèves : « qu'est-ce que vous a posé un problème au début ? ». Un élève répond : « On voyait pas qu'est-ce que c'était ». Elle demande de préciser : « Vous avez cru que c'était quoi ? », et la réponse : « les règles » (plus tard, au sein du débat, elle demande de verbaliser ce qui s'est passé, en favorisant l'explicitation de ce qu'était à l'origine de l'erreur d'interprétation). L'enseignante demande à Roman et aux quatre autres élèves du même groupe de faire des propositions (numérotés de 1 à 5) puis d'expliquer pourquoi ils ont dessiné de cette manière. Roman (1) refait les mêmes modèles. Ces camarades choisissent de faire la mine (en triangle), l'un (4) rajoute l'effaceur du crayon (mais il n'y a pas d'effaceur dans le crayon), l'autre choisit les lignes du stylo (5). L'on peut constater également que l'idée de gros et de mince est retenu (2, 3, 4), mais cette idée pourrait être remise en question car elle ne peut fonctionner que lorsque les représentations des différents objets « gros » et « minces » sont présentes au même temps. Durant le débat, l'enseignant ajoute : « on s'est demandé comment les dessiner autrement », un élève demande s'ils ont fait le bouchon. Elle montre les propositions et les commente. Le jeu s'arrête lorsque l'enseignant demande quel était le problème de la veille (les verres) et celui de la journée (les crayons). Dans les deux cas, l'idée de représenter le gros et le mince est présente, mais ces problèmes ne seront pas repris.

Figure 7 *– Modèles du « crayon bleu » et du « crayon bic » (Rennes 2008.*

IV. ELEMENTS DE DEBATS

Nous venons de montrer que l'ingénierie du « Jeu des trésors » peut être vue comme une activité de modélisation et de création de modèles au travers d'une DI. En effet, le « Jeu des trésors » offre une « genèse didactique et même scolaire des premières représentations » (Brousseau 2004, p. 263). Brousseau précise par ailleurs que « l'organisation des situations et du processus présente un intérêt pour la présente étude [la sienne], car elles réalisent le paradigme de toutes les situations de représentations » (Ibid, p. 258). En ce sens, conclut Brousseau, le « Jeu des trésors » « est une situation fondamentale pour la représentation » (Ibid, p. 263).

Cependant, les analyses que nous sommes en train de mener sur la mise en œuvre rennaise de l'ingénierie semblent montrer que pour que les élèves puissent entrer dans une DI et une activité de modélisation grâce à cette ingénierie, il paraît absolument nécessaire que l'enseignant ait une compréhension fine de celle-ci afin d'en exploiter la richesse avec ces élèves.

REFERENCES

Amade-Escot C. (2009) *Analyse de situations didactiques : perspectives comparatistes.* Dossiers des Sciences de l'Education. Numéro Spécial 20.

Barrow J. (2003) *Pourquoi le monde est-il mathématique ?* Paris : Odile Jacob.

Briand J., Loubet M., Salin M-H (2004) *Apprentissages mathématiques en maternelle*. CD-Rom. Paris : Hatier.

Brousseau G. (1998) *Théorie des situations didactiques.* Grenoble : la Pensée Sauvage.

Brousseau G. (2004) Les représentations : étude en théorie des situations didactiques. *Revue des sciences de l'éducation* 30(2), 241-277.

Comiti C. (1974) Désignation, égalité, au cours préparatoire. *Grand N* 4, 27-57.

Coulange L. (1997) *Une étude sur la modélisation dans la classe de mathématiques en Seconde – Un double point de vue à partir de l'écologie et du contrat didactique*. Mémoire de DEA de l'université Joseph Fourier. Grenoble.

Digneau J.-M. (1980) *Création d'un code à l'école maternelle étude d'un saut informationnel*. Mémoire de DEA de l'Université Bordeaux I.

Duperret J.-C. (2007) De la modélisation du monde au monde des modèles. Quels enjeux pour l'enseignement des mathématiques. In *Actes du XXXIVème Colloque COPIRELEM « Expérimentation et modélisation dans l'enseignement scientifique : quelles mathématiques à l'école ? »*.

Henry M. (1997) Les premiers apprentissages en géométrie et en probabilités : des processus de modélisation comparables. In *Actes du Séminaire n°178, Didactique et technologies cognitives en mathématiques* (pp. 5-36). DidaTech.

Jousson G., Pérès J, Remy A. (1980) *Compte-rendu des recherches à l'école maternelle J. Michelet*. Etudes en didactique des mathématiques, IREM de Bordeaux

Jousson G., Loubet M., Naura M.-H., Pérès J, Remy A. (1985) *Construction et utilisation d'un code de désignation d'objets à l'école maternelle. Document pour les enseignants.* IREM de Bordeaux.

Loubet M., Salin M.-H. (2000) Elaboration et lecture de listes. *Grand N spécial maternelle Approche du nombre tome 1 IREM de Grenoble.* 71-92.

Pérès J. (1984) *Utilisation d'une théorie des situations en vue de l'identification des phénomènes didactiques au cours d'une activité d'apprentissage construction d'un code de désignation d'objets à l'école maternelle*. Thèse Université de Bordeaux-II

Pérès J. (1988) *Les activités logiques à l'école maternelle*. In *Actes de l'Université d'été « Didactique des mathématiques et formation des maîtres »* (pp. 164-179). IREM de Bordeaux.

Schubauer-Leoni M. L., Leutenegger F., Ligozat F., Flückiger A. (2007) Un modèle de l'action conjointe professeur-élèves : les phénomènes qu'il peut/doit traiter. In Sensevy G., Mercier A. (Eds.) (pp. 52-91) *Agir Ensemble. L'action didactique conjointe du professeur et des élèves dans la classe.* Rennes : PUR.

Sensevy G., Mercier A. (2007) *Agir ensemble.* L'action didactique conjointe du professeur et des élèves. Rennes : PUR.

Ligozat F. (2008) *Un point de vue de didactique comparée sur la classe de mathématiques. Etude de l'action conjointe du professeur et des élèves à propos de l'enseignement/apprentissage de la mesure des grandeurs dans des classes françaises et suisses romandes.* Thèse des universités de Genève et d'Aix Marseille.

Van Fraassen B. (2008) *Scientific representation*. Oxford University Press.

OBSTACLES A L'USAGE DU NOMBRE ET A L'ENQUETE SUR SES PROPRIETES DANS L'IMPLANTATION D'UNE INGENIERIE SUR LA SOUSTRACTION

Serge Quilio* – Mireille Morellato** – Anne Crumière***

Résumé – L'objectif de cette communication est de montrer quelques obstacles à la reprise et à l'implémentation d'une ingénierie didactique conçu par Brousseau. Pour cela, nous montrerons dans un premier temps les grandes étapes de l'ingénierie didactique sur la soustraction dans une classe de CE1 (élèves de 7 ans, seconde année du primaire), et ensuite nous analyserons une des leçons pour mettre en évidence quelques obstacles à cette implémentation.

Mots-clefs : ingénierie didactique ; théorie des situations didactiques ; soustraction ; obstacles

Abstract – The aim of this communication is to show some obstacles to resumption and in the realization of a didactic engineering conceived by Brousseau. For it, we shall show at first big stage of didactic engineering on subtraction in a class of CE1 (7-year-old pupils, second year of the primary), and then we shall analyze one of the lessons to put in an obvious place three obstacles in this realization.

Keywords: didactic engineering; theory of didactic situations; subtraction; obstacles

I. INTRODUCTION

Dans cette communication, nous présentons d'abord les grandes étapes d'une ingénierie didactique sur la soustraction à l'école primaire conçue par Guy Brousseau et mise en œuvre pendant quelques années dans l'école expérimentale du COREM (centre d'observation et de recherche sur l'enseignement des mathématiques) à Bordeaux. Cette ingénierie est connue, parce qu'elle fonde le travail de remédiation engagé par Brousseau auprès de Gaël (Brousseau 1982). Nous présentons ensuite le contexte et les enjeux de notre expérimentation concernant cette ingénierie. Il s'agit de reprendre une ingénierie didactique existante et de s'intéresser aux conditions de diffusion et d'implémentation dans des classes ordinaires de l'enseignement actuel de telle ingénierie. Nous en observerons la mise en œuvre dans une classe de CE1 (élèves de 7 ans) et de montrerons quelques obstacles à la prise en main d'une phase de cette ingénierie didactique. Enfin, nous indiquerons quelques éléments de discussion et de débat, relatifs aux conditions sociales qui contraignent les décisions des professeurs.

II. PRESENTATION DE L'INGENIERIE DIDACTIQUE SUR LA SOUSTRACTION

L'ingénierie dont nous présentons des éléments de l'analyse en cours est un processus organisé en 16 leçons conçu et réalisé originellement au Centre pour l'Observation et la Recherche de l'Enseignement des mathématiques (COREM) de Talence par l'équipe de Brousseau (Bola 1992). Des éléments de cette ingénierie sont connus parce qu'elle fonde le travail de remédiation engagé par Brousseau auprès de Gaël (Brousseau 1998). La réplication actuelle de cet enseignement s'est déroulée sur 26 leçons menées durant l'année scolaire 2009-2010 dans une classe de CE1.

Au cœur de l'apprentissage envisagé se trouve l'usage d'*une boîte* dans laquelle on place un nombre connu de pièces en plastique venues d'un jeu de construction (des *briques*, que les élèves peuvent compter mais aussi assembler en barres de plusieurs briques) et l'étude

* ENS_Lyon/ IFÉ – France – serge.quilio@ens-lyon.fr
** Université de Provence – France
*** IUFM Aix-Marseille – France – a.crumiere@aix-mrs.iufm.fr

© Quilio S., Morelato M., Crumière A. (2012) Obstacles à l'usage du nombre et à l'enquête sur ses propriétés dans l'implantation d'une ingénierie sur la soustraction. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT10, pp. 1444–1452). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

conduite par les élèves sous la direction du professeur consistera d'abord à résoudre l'ensemble des problèmes qui leur seront posés au moyen d'actions que cette boîte permet d'organiser. Par exemple, si on place dans la boîte un nombre connu de briques il est possible alors d'en sortir un certain nombre, de les compter, et de chercher combien sont restées cachées. On peut aussi chercher à connaître le nombre de briques qu'il faut ajouter à celles de la boîte afin d'atteindre un nombre donné. Dans les deux cas, la vérification se fera par comptage des briques contenues dans la boîte après la manipulation. Ces situations fondent l'ensemble des problèmes rencontrés.

Le processus d'enseignement comprend trois phases distinctes. Dans la première phase qui comprend trois leçons, la boîte est utilisée individuellement par les élèves, pour *simuler les situations proposées* (changement d'état, partitionnement). Les élèves procèdent par comptage ou surcomptage des briques sorties ou rentrées pour à résoudre les problèmes que le professeur pose. La boîte joue ainsi le rôle d'un *substitut matériel de la situation* évoquée.

Nous observerons ici le passage à la deuxième phase de l'enseignement (à partir de la quatrième leçon) dans laquelle le professeur va proposer de parier (au sens de s'engager pour gagner), sur la réponse avant d'effectuer la manipulation des briques (matériel substitutif) et leur comptage effectif dans la boîte. Dans cette phase c'est le nombre qui est sollicité comme moyen intellectuel pour produire une réponse et ce sera progressivement l'addition qu'ils mobilisent pour vérifier leurs résultats. Durant ces leçons, les élèvent doivent progressivement passer de la manipulation matérielle à l'usage du nombre et de l'addition pour vérifier.

A partir de la huitième leçon les élèves aborderont des situations où seront mêlés des problèmes d'addition et de soustraction. Le signe « – » est introduit comme signe de l'opération. Dans cette phase les calculs sont faciles et reposent sur les techniques de calcul mental et l'usage du répertoire additif.

Nous cherchons à connaître les conditions nécessaires au professeur afin qu'il dévolue le problème aux élèves pour qu'ils s'engagent dans l'identification du problème que soulève *le pari*, dont ils ont une référence culturelle leur permettant d'entrer dans la situation ? Comment s'y prend-il pour placer les élèves sur la question du *pari* que permet l'usage du nombre et de l'addition pour vérifier et que devient alors le statut de la boîte ?

III. LE CADRE THEORIQUE

Nous convoquons dans le travail d'analyse la notion de jeu telle qu'elle est envisagée dans le cadre théorique de l'Action Conjointe en Didactique (TACD) et mise en œuvre dans l'étude de l'action effective en mathématiques (Quilio 2008). Sous cette description, le jeu est un modèle sous lequel est vu l'action effective du professeur et des élèves permettant de produire, au moyen de l'analyse des interactions langagières, une description de l'action conjointe permettant d'analyser ensemble le contrat didactique (en tant que systèmes de normes ou d'habitudes ou attentes du professeur et des élèves) et le milieu (en tant que ressources matérielles ou cognitives de la situation) qui caractérise une situation d 'enseignement / apprentissage. Le réseau des descripteurs fourni par la notion de jeu en Théorie de l'action conjointe (Sensevy et Mercier 2007), la mésogenèse (comment quoi), la topogenèse (comment qui) et la chronogenèse (comment quand) décrit la forme de vie (Wittgenstein 2005), le milieu et le contrat didactique de la situation, construite par le professeur pour le jeu de langage du pari.

IV. CONTEXTE DE NOTRE EXPERIMENTATION

La leçon observée introduit donc la deuxième phase de l'ingénierie. Cette leçon a été réalisée en 2009-2010 dans une classe de CE1 de l'école primaire Saint Charles de Marseille (en ZEP). La mise en œuvre de cette ingénierie est conduite dans le cadre d'une recherche conduite par l'IFE. Nous présentons tout d'abord le déroulement de la leçon 4 tel qu'il est proposé dans le texte édité de l'ingénierie ainsi que des éléments de son analyse a priori (en italique).

L'objectif de la séquence est de faire passer les enfants de la vérification anticipée collective par action sur les cubes sortis, à une vérification individuelle sans les cubes à l'aide du nombre. Chaque élève va devoir éprouver sa réponse depuis sa place, sans toucher les cube et en explicitant les moyens qu'il a trouvés.

Plusieurs moyens personnels peuvent apparaître et sans doute l'addition, moyen plus élaboré que le surcomptage.

Exemples :

<u>Moyens proches de l'action de surcomptage</u> :

- *dessiner des briques comptés un à un ou par barres de 10 à partir de la réponse ;*
- *utilisation des doigts (autant que de briques sorties ;*
- *suite des nombres écrits avec autant de nombres que de briques sorties : 21, 22, 23.*

<u>Moyens proches de l'addition</u> :

Exemple : il faut faire 51 – 2 (le signe - n'est pas encore vu).

On teste 28 *28 et 10 font 38, 38 et 10 font 48 et 3 font 49, 50 et 51 c'est juste.*

On teste 30 *Non car 30 et 23 cela fait 53.*

Le matériel prévu pour la leçon est le suivant :

- un Premier problème sur une feuille polycopiée (d'autres problèmes seront joués ensuite par le professeur) ;
- des briques organisées en paquets de 10 et unités ;
- des grandes feuilles de papier blanc, des feutres pour écrire ou dessiner.

La leçon est organisée en trois étapes :

Etape 1 : Cette étape est un rappel de la situation précédente. Il s'agit de remettre en scène collectivement le surcomptage pour vérifier un résultat sans ouvrir la boîte.

Cette phase est une révision de la leçon précédente pour assurer l'homogénéité de pratiques de la classe. Tout le monde doit écrire une réponse, tout le monde doit savoir vérifier au bureau devant les autres sans ouvrir la boîte.

L'enseignant distribue le texte du premier problème - Lecture individuelle des élèves :

Dans la boîte il y a 70 cubes. J'en prends 23. Combien y a-t-il maintenant de cubes dans la boîte ?

Quand tous ont écrit leur réponse, le professeur fait rappeler combien il y avait de cubes dans la boîte : 70, combien sont sortis ? Il les sort puis il écrit les deux nombres au tableau dans des colonnes et il collecte les réponses.

70 cubes dans la boîte	23 cubes enlevés	réponse :
		solution : ……

Il fait passer un premier élève ayant une réponse fausse qui vérifie par surcomptage. Pari ? Non

Il fait passer un deuxième élève ayant une réponse juste qui vérifie de même. Pari ? Oui ! On ouvre la boîte pour s’en assurer. On écrit solution encadrée au tableau

47

Etape 2 : Sans ouvrir la boîte, vérification individuelle et orale pour quelques-uns.

L‘enseignant propose le texte du deuxième problème en le jouant :

J’ai 42 cubes dans la boîte, j’en sors 17, Combien y en a - t - il dans la boîte ?

Le professeur rappelle en écrivant les nombres au tableau : il y en avait 42 au départ et il y en a 17 sur le plateau. Tous les enfants doivent proposer une réponse. Qui veut parier avec moi ?

Le professeur fait venir un élève avec une réponse fausse. Au moment où l’élève s’approche de la boîte le professeur l’arrête : « Tu dis combien dans la boîte : 22, et dans le plateau combien y en a t- il ? 17 Bon je voudrais que tu vérifies ta réponse sans toucher les briques, c’est à dire mettre les 22 avec les 17 en parlant seulement ». L’élève essaie. « Quelqu’un d’autre peut vérifier de sa place toujours la réponse 22 ? Pari ? Non. »

L’enseignant propose à un autre élève de vérifier sa réponse (fausse) de sa place oralement. Un autre peut essayer aussi la vérification de cette réponse.

L’enseignant propose à un troisième élève qui a une réponse juste. Pari ? Oui

Vérification en ouvrant la boîte. C’est gagné et l’enseignant écrit la solution

27

Etape 3 : Vérification individuelle écrite

Le professeur distribue les grandes feuilles et les feutres en disant : « vous allez vous en servir pour vérifier ». Voici le problème (mimé)

J’ai 41 cubes dans la boîte. J’en prends 23 que je pose sur le plateau. Combien y a-t-il de cubes maintenant dans la boîte ?

Préparer la feuille :

Nom : Date :

51 cubes dans la boîte	23 cubes enlevés	réponse
		solution .....

Vous écrivez votre réponse et vous avez toute la place dans la partie vide de la feuille pour vérifier comme vous voulez si votre réponse est juste ou non.

Après un moment de recherche l'enseignant demandera s'il y a des élèves qui n'ont pas pu vérifier.

L'enseignant interroge les volontaires qui pensent avoir une méthode pour vérifier et affiche leurs feuilles si leur méthode s'y voit clairement :

- soustraction par raturage des cubes sur un dessin ;
- dessin des cubes de la réponse et à côté des cubes sortis et comptage ;
- suite de nombres à partir de la réponse ;
- addition.

Étape 4 :

L'enseignant résume les stratégies : sans se servir de la boîte, les moyens les plus rapides consistent à mettre ensemble le nombre de cubes qu'on pense être dans la boîte et le nombre de cubes sortis pour savoir si on retrouve ou non le nombre de cubes qu'on avait au départ.

« Maintenant on vérifiera toujours sa réponse. On n'a plus besoin d'ouvrir la boîte. »

L'analyse de cette réalisation effective

Dans cette partie, nous allons analyser la mise en œuvre de cette séance en montrant certains obstacles à une implémentation idoine dans une classe ordinaire.

L'énoncé de chaque problème est affiché au tableau. Il y a un pupitre disposé devant le tableau de la classe où une boîte est déposée. Les problèmes joués avec la boîte peuvent ainsi être collectivement observés et commentés par le professeur et les élèves.

Photogramme du déroulement de la classe

Le synopsis de la leçon est le suivant :

Temps	Problème	Commentaires
7min	« Dans la boîte, il y a 70 briques. J’en prends 23. Combien y a-t-il maintenant de briques dans la boîte ? »	Jusqu’à la 7ème minute les élèves copient l’énoncé du problème sur leur cahier. Les élèves doivent écrire une hypothèse sur leur ardoise ; ensuite l’enseignant agit avec la boîte (en mettant 70 briques et en enlevant 23) ; l’enseignant invalide l’hypothèse 49 et valide ensuite l’hypothèse 47, en ajoutant 23 ; puis il vérifie en comptant les briques restant dans la boîte ; fin de cette partie avec la conclusion de l’enseignant : « ceux qui en ont besoin/ de jouer avec la boîte maintenant sur le problème suivant ils vont aller au fond et ils vont jouer avec la boîte ».
33min	« J’ai quarante-deux cubes dans la boîte. J’en sors dix-sept. Combien y en a-t-il dans la boîte ? »	La classe est divisée en deux groupes : ceux qui doivent résoudre le problème sans manipulation, et ceux qui manipulent la boîte.
58min	Recréation	
59 min	Reprise de ce qui a été fait avant	
1h 05min	« Dans la boîte je mets quarante-et-une briques et j’en sors vingt-trois. Combien de briques restera-t-il dans la boîte ? »	La classe est divisée à nouveau en deux groupes : ceux qui manipulent la boîte et ceux qui ne manipulent pas.
1h 35min(?)	Fin de la leçon	

Cette leçon dure 1 h 35 min avec une pause pour la recréation à la 58ème minute. Les élèves résolvent trois problèmes du même type.

L’obstacle de l’appréhension du statut de la « boîte » :

Comme nous l’avons indiqué dans la présentation de l’ingénierie, la boîte a d’abord un statut du réel qui est celui indiqué par l’énoncé du problème. Le modèle mathématique – représenté par le nombre de briques restant dans la boîte – peut être confronté au réel. Ainsi, dans une première phase, la manipulation de la boîte est un moyen pour rentrer dans la compréhension du problème et un moyen pour valider le modèle mathématique indiqué par l’élève. Dans la deuxième phase, le statut de la boîte est celui d’un simulateur. Il s’agit en effet de simuler la vérification de l’hypothèse du problème comme si on manipulait la boîte. Ce statut de la boîte met l’accent sur la vérification et permet de faire évoluer les élèves d’une preuve empirique à une preuve intellectuelle (comptage ou calcul additif). Dans la troisième phase, la boîte n’est plus le réel mais elle est le modèle d’un type de problème. Par exemple, pour le problème « j’ai 45 voitures rouges et bleues. J’enlève les 17 voitures rouges. Combien restent-ils de voitures bleues dans la boîte ? », la boîte n’est plus le réel mais devient un modèle du type de problème.

L’appréhension des différents statuts de la boîte (réel, simulateur et modèle) suppose un travail mésogénétique (à quel moment l’introduire dans le milieu) lié à l’avancée du temps didactique provoquée par la nécessité d’annoncer une valeur dans pouvoir manipuler boîte et briques. Ce qui n’est visiblement pas fait ici. Cette appréhension est surtout associée à la manipulation (pour comprendre le problème ou pour vérifier la solution en manipulant). Le professeur l'indique plusieurs fois :

> La boîte avec laquelle on joue en classe c'est celle-ci [prends la caisse de briques et revient avec le tout] elle nous permet de faire certaines choses.

Et il précise plus loin :

> Cette solution on va essayer de l'écrire / de l'écrire sur nos ardoises / bien/ mais ensuite/on va pouvoir la jouer aussi / on va vraiment la jouer / ce qui se passe ici on va vraiment le jouer avec la boîte.

Et encore :

> On va parier /on va voir qui a gagné / qui a perdu / on vérifie avec la boîte.

Cette idée que la boîte c'est ce qui permet uniquement de « jouer vraiment » peut fonctionner comme un obstacle si l'enseignant ne repère aussi les autres statuts de la boîte comme simulateur comme nous allons le voir dans ce qui suit.

L'obstacle du milieu matériel et des « barres cassées »

Dans le travail sur le premier problème, la mésogenèse consiste en une manipulation des briques et de la boîte par le professeur selon les données du problème posé :

> P : On va manipuler avec la boîte / prêts [ouvre la boîte] combien on en met dans la boîte déjà ?
>
> EE : soixante-dix.

Le professeur met ainsi des barres de dix briques et les élèves comptent au même temps jusqu'à soixante-dix. Et le jeu continue :

> P. ensuite /on en enlève.
> E : vingt-trois.
> P : d'accord.

Le problème étant ici d'enlever les 23 briques. Il s'agit d'enlever deux barres de dix et trois unités. Or comme il n'a que des barres de dix, l'enseignant demande :

> P : attendez, attendez / est-ce que d'après vous j'ai des unités là [désigne la boîte] là qu(e) je peux prendre pour…
> EE : non.
> Lilian [lève le doigt : non il faut…
> P : alors je fais comment/je fais comment Walid ?
> Walid : tu prends un paquet un dix et tu fais attention [inaudible] donc tu en enlèves/tu enlèves des paquets et tu comptes si y en a bien vingt-trois.
> P : d'accord/bon alors je prends un paquet là/je casse un/je suis obligé de casser un paquet donc.
> EE : oui.

L'enseignant « casse un paquet » en enlevant trois briques d'une barre de 10 et laisse ainsi une barre de 7 briques à l'intérieur de la boîte. Cette manipulation n'est pas du même type que de « casser un paquet » en défaisant toutes les 10 briques sans laisser de barres incomplètes. Ce travail mésogénétique constitue un milieu matériel composé des barres de 10, de briques isolées et de « barres incomplètes » (le terme incomplet est relatif ici à la dizaine comme unité qu'on appelle « barre » ou « paquet »). Cette composition du milieu matériel n'est pas sans conséquence sur le travail de certains élèves comme nous allons le voir par la suite. Lorsque l'enseignant utilise la boîte pour vérifier le nombre de briques qui restent dans la boîte c'est encore lui qui manipule et c'est encore lui qui contrôle les barres incomplètes (topogenèse) :

> P : si on s'est pas trompé en complant /on vérifiant/on a fait semblant d(e) les remettre on doit être sûr de sa réponse / on peut être sûr de sa réponse/maint(e)nant on peut les vérifier / vraiment on peut les vérifier avec la boîte/bon d'être sûr de sa réponse [ouvre la boîte et en sort une barre de dix].

EE : dix.
P : regarde Walid/on est en train d(e) vé/on est en train d(e) compter c(e) qu'il y a vraiment à l'intérieur maint(e)nant ça va /dix [pose la barre sur le couvercle, sort une autre barre].
EE : vingt.
P : attendez.
Inès : non, on a cassé un p(e)tit /on a cassé celui-là.
P : eh oui.
E : voilà c'est c(e) que j'allais dire.
P : alors j(e) vais compter ceux qu(e) j'ai pas cassé [sort une barre et la pose à côté].

Le professeur rentre dans la logique du comptage de 10 en 10 sans faire attention au départ de la barre incomplète, et c'est en sortant cette barre incomplète qu'il se rend compte et dis « attendez », et Inès, en regardant cette manipulation, se rend compte que cette barre n'est pas une « vraie barre » mais un « petit paquet » : « non, a cassé un petit/on a cassé celui-là ». La maître reprend toutes les barres de 10 et à la fin la barre incomplète ou cassée :

EE: dix [sort une barre] vingt [pose la barre et en montre une autre] trente [pose la barre à côté]
P: trente [montre une barre] quarante [la pose à côté] j'ai pas d'autres paquets de dix/il me reste le paquet d(e) dix que j'avais cassé au début/à l'intérieur j'en avais dix et on en a enl(e)vé trois un deux trois quatre cinq six sept [compte les unités restant sur la barre cassée].

Il utilise encore l'expression « le paquet de dix que j'avais cassé au début » même si cette expression induit une ambiguïté à ce que représente la « barre »ou le « paquet » par rapport à la numération positionnelle. La barre est ici un modèle matériel d'un système d'écriture, et la « barre cassée » est une rupture de la conformité du modèle matériel au système d'écriture. Cette rupture nous semble induire un obstacle pour certains élèves comme nous pouvons l'observer lors de la résolution du deuxième et du troisième problème où un groupe d'élèves manipule la boîte. L'extrait suivant correspond au début de la manipulation correspondant au deuxième problème :

P : [Le professeur circule entre les tables, puis se dirige vers le groupe du fond] alors pour l'instant vous a / qui a réussi à en mettre quarante-deux déjà dans sa boîte [un élève lève le doigt.] / quarante-deux / y en a pas quarante-deux là !
E : non.
P : non c'est pas bon / y en a pas quarante-deux / qui a mis quarante-deux dans sa boîte ?
Rayan : moi ?
P : montre / hop stop. tout l(e) monde vient voir ici s'il vous plait / tout l(e) monde vient voir / regardez/ arrête arrête / là y a des moments où il faut réfléchir / venez voir [les élèves du groupe du fond se rassemblent autour du professeur] le problème dit au départ il y a / quarante-deux / c'est la boîte de Rayan / ça va/euh lui il a choisi de faire des paquets de dix / il faudrait vérifier si tes paquets des dix ils sont bons/tu vois celui-ci je sais pas un deux trois quatre cinq six sept / y en a que sept [montre le paquet, sorti de la boîte de Rayan] / donc t'as pas fait quarante-deux d'accord/tu as essayé d(e) faire quatre paquets de dix / c'est ça / il faut vraiment vérifier si y en a bien quatre paquets de dix.

La manipulation des barres cassées ne pose pas problème dans le topos de l'enseignant car il contrôle le nombre de briques par barre mais ce contrôle n'est pas forcément dans le topos de l'élève pour lequel une barre c'est une barre complète de 10 briques. C'est une règle du contrat didactique.

V. CONCLUSION

L'analyse de l'implantation de cette ingénierie est actuellement en cours mais nous pouvons cependant envisager d'ores et déjà un certain nombre d'obstacles (qui ne sont pas forcément inhérents à cet enseignant). L'un de ces obstacles est celui de l'identification des différents statuts de la boîte. Le passage de l'un à l'autre de ces statuts indique des changements nécessaires dans le travail de l'élève et il apparaît comme fondamental ce repérage par l'enseignant pour qu'il puisse gérer la classe en fonction de tel ou tel statut.

Un deuxième obstacle est celui du choix du milieu matériel et des liens entre ce milieu et certaines règles du contrat didactique et des systèmes sémiotiques utilisés comme nous avons pu le voir dans le cas des « barres cassées ».

Un troisième obstacle nous apparaît alors et il nous semble décisif dans la mathématisation de la situation par les élèves. Il s'agit de l'enfermement dans la manipulation et du rapport au « concret ». L'enfermement à ce moment de l'ingénierie dans la manipulation de la boîte comme moyen de compréhension du problème semble être la conception principal du professeur car il insiste à plusieurs reprises et surtout avec les élèves qui sont en difficulté, sur le retour plusieurs fois à la manipulation, comme si le problème était là. Or il nous semble que le problème n'est pas tant l'incompréhension de la situation par les élèves que le passage de la preuve empirique à la preuve intellectuelle, que permettrait l'usage du nombre et des connaissances que les élèves possèdent pour expérimentalement envisager des solutions par tâtonnement. L'insistance sur la manipulation que nous observons dans le troisième problème va sans doute inhiber ce passage.

L'identification de ces différents obstacles est une étape importante que nous avons encore à approfondir car elle nous permettra de décrire et comprendre les contraintes de la diffusion de cette ingénierie dans les classes *ordinaires*.

RÉFÉRENCES

Bola A. (1992) *Le sens dans le contrat didactique ; institutionnalisation d'un algorithme : application à la soustraction*. Bordeaux 1.

Brousseau G. (1982) Les objets de la didactique des mathématiques – Ingénierie didactique.

In *Actes de la deuxième école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 10-60). Orléans : IREM d'Orléans.

Brousseau G. (1998) *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Dewey J. (1967) *Logique : la théorie de l'enquête*. Paris : Presses universitaires de France.

Fleck L. (2005) *Genèse et développement d'un fait scientifique*. Paris : Les Belles Lettres.

Fabre M. (2009) *Philosophie et pédagogie du problème*. Paris : Librairie philosophique J. Vrin.

Mercier A. (2002) Note de synthèse. La transposition didactique des objets d'enseignement et la définition de l'espace didactique, en mathématiques. *Revue Française de Pédagogie* 141, 135-171.

Sensevy G. (2007) Des catégories pour décrire et comprendre l'action didactique. In Sensevy G., Mercier A. (Eds.) *Agir ensemble. L'action didactique conjointe du professeur et des élèves*. Presses Universitaires de Rennes,13-49.

Quilio S. (2008) *Contribution à la pragmatique didactique. Une étude de cas dans l'enseignement des nombres rationnels et décimaux à l'école élémentaire*. Thèse de l'Université de Provence

Wittgenstein L. (2005) *Recherches philosophiques*. Paris : Editions Gallimard.

RECHERCHE COLLABORATIVE ET DÉMARCHE D'INVESTIGATION : DES MATHÉMATIQUES POUR APPRÉHENDER LE RÉEL

Benoît RAY* – Saïd AZZIZ* – Geneviève COUDERC* – Viviane DURAND-GUERRIER*

Henri SAUMADE* – Mireille SAUTER* – Sébastien VIRDUC*I – Sonia YVAIN*

Résumé – Les programmes officiels français du primaire et du secondaire mettent en avant l'importance de la démarche d'investigation, qui a cependant du mal à trouver sa place dans les pratiques ordinaires. Au sein du groupe ResCo de l'IREM de Montpellier, nous avons choisi d'intégrer ces démarches dans un travail collaboratif, autour de problèmes mathématiques appliqués au réel. Nous présentons tout d'abord rapidement la place de la démarche d'investigation dans les programmes français de l'école primaire, du collège et du lycée. Dans un deuxième temps, nous décrivons le dispositif de résolution collaborative de problèmes que nous avons développé.

Mots-clefs : démarche d'investigation en mathématiques; résolution collaborative de problème ; problèmes de recherche ; communication mathématique ; débat scientifique

Abstract – French primary and secondary syllabus enlighten the importance of investigation in mathematics. However, it is difficult for teachers to engage their students in such a way of teaching mathematics. The research team ResCo from the IREM of Montpellier has made the choice of integrating such perspective with problem in relationship with "real world" problems, in collaborative learning. We first present the French syllabus on this topic. Then, we describe our design of "collaborative problem solving".

Keywords: investigation in mathematics, collaborative problem solving, research problems, mathematical communication, scientific debate

I. INTRODUCTION

Les programmes officiels français de l'école primaire, du collège et du lycée mettent en avant l'importance de la démarche d'investigation, qui a cependant du mal à trouver sa place dans les pratiques ordinaires. Au sein du groupe ResCo (Résolution Collaborative de problèmes) de l'IREM de Montpellier, nous avons choisi d'intégrer ces démarches ainsi que des démarches expérimentales dans un travail collaboratif, autour de problèmes mathématiques ancrés dans le réel, ceci afin de permettre un questionnement sur les rapports qu'entretiennent les mathématiques avec les autres champs de l'activité humaine. Nos recherches portent sur des problématiques diverses, comme le choix des problèmes mathématiques et des situations associées, les conditions de la recherche et l'organisation des échanges. Nous nous intéressons également aux changements de postures des élèves et des enseignants induits par ce dispositif, ainsi qu'aux apports potentiels de cette démarche collective pour les différents acteurs impliqués.

Nous présentons tout d'abord rapidement la place de la démarche d'investigation dans les programmes français de l'école primaire, du collège et du lycée. Dans un deuxième temps, nous décrivons le travail collaboratif que nous avons développé au sein du groupe ResCo de l'IREM de Montpellier.

* IREM de Montpellier – France – benoitray@yahoo.fr, said.azziz@neuf.fr, genevieve.couderc@ac-montpellier.fr, viviane.durand-guerrier@univ-montp2.fr, math.saumade@wanadoo.fr, mireille.sauter@orange.fr, s.virduci@free.fr, y_sonia@club-internet.fr

© Ray B., Azziz S., Couderc G., Durand-Guerrier V., Saumade H., Sauter M., Virduci S., Yvain S. (2012) Recherche collaborative et démarche d'investigation : des mathématiques pour appréhender le réel. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT10, pp. 1453–1463). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

II. DEMARCHE D'INVESTIGATION ET TEXTES OFFICIELS

1. Les programmes de collège et de l'école primaire et le socle commun de connaissances

En France, le terme de démarche d'investigation apparaît pour la première fois dans les programmes de collège (élèves de 11 à 15 ans) en 2005[1] à travers des textes portant sur une introduction commune à l'ensemble des disciplines scientifiques au collège. La démarche d'investigation y est présentée comme une méthode pour développer chez les élèves une culture scientifique ; démarche commune aux mathématiques, aux sciences de la vie et de la terre et aux sciences physiques, il est cependant noté que :

> la spécificité de chaque discipline conduit à penser différemment, dans une démarche d'investigation le rôle de l'expérience et le choix du problème à résoudre. (B.O. hors série n° 5 du 25 août 2005)

Dans ces programmes un canevas est proposé, décrivant des étapes à adapter aux situations choisies, simples repères, qui jalonnent une démarche d'investigation. On y mentionne 7 étapes (p. 4) :

- le choix d'une situation problème ;
- l'appropriation du problème par les élèves ;
- la formulation de conjectures, d'hypothèses explicatives, de protocoles possibles ;
- l'investigation ou la résolution du problème conduit par les élèves ;
- l'échange argumenté autour des propositions élaborées ;
- l'acquisition et la structuration des connaissances ;
- la mobilisation des connaissances.

La spécificité des mathématiques et des autres disciplines est pointée en ce qui concerne la validation, par la démonstration d'un côté et par l'expérimentation de l'autre.

Si la description d'une démarche d'investigation est bien détaillée dans ces programmes, elle apparaît également dans les programmes de l'école primaire, et il est demandé qu'elle soit évaluée dans le cahier de compétences en fin de cycle 3 sous la forme suivante :

> pratiquer une démarche d'investigation (savoir observer, questionner), manipuler et expérimenter, formuler une hypothèse et la tester, argumenter, mettre à l'essai plusieurs pistes de solutions. ([1] B.O. hors série n° 3 du 19 juin 2008)

Il faut noter que, pour les mathématiques, la démarche d'investigation est assez proche de ce que certains auteurs appellent la démarche expérimentale (voir à ce sujet le dossier de veille scientifique de l'INRP (Kuntz 2007)). Les textes officiels eux-mêmes utilisent les deux expressions, comme on le voit dans le texte de loi voté en 2006 définissant « le socle commun de connaissances et de compétences à acquérir pour tous les élèves à la fin de la scolarité obligatoire »[2].

Ce socle se veut être l'ensemble des savoirs indispensables « *que la nation fixe comme mission première à l'école de faire partager aux élèves* ». Il est divisé en sept domaines et l'enseignement des mathématiques en concerne plusieurs, en particulier, le domaine 3 : « *Les principaux éléments de mathématiques et la culture scientifique et technologique* », le domaine 7 : « *L'autonomie et l'initiative* ». Dans le domaine 3 (ibid. p. 11), l'élève doit être capable de pratiquer une démarche scientifique : raisonner, argumenter, pratiquer une démarche expérimentale (émettre une hypothèse, formuler un problème, proposer une méthode, un outil adapté, faire des essais, modéliser de façon élémentaire …). Dans le domaine 7 (ibid. pp. 18-19), l'élève doit être capable de : s'impliquer dans un projet

[1] B.O. hors série n° 5 du 25 août 2005
[2] J.O n° 160 du 12 juillet 2006

individuel ou collectif, savoir travailler en équipe, manifester curiosité, créativité, savoir prendre des initiatives et des décisions. Ces compétences font partie de celles qui sont travaillées dans le cadre de la recherche collaborative de problème que nous présentons au paragraphe suivant.

2. La démarche d'investigation dans les programmes de lycée

Dans les programmes de seconde générale, l'objectif principal reste de :

> former les élèves à la démarche scientifique sous toutes ses formes pour les rendre capables de modéliser et s'engager dans une activité de recherche, (…) pratiquer une activité expérimentale ou algorithmique. Les problèmes posés doivent pouvoir s'exprimer de façon simple et concise et laisser dans leur résolution une place à l'autonomie et à l'initiative des élèves. La diversité des activités proposées (…) doit permettre aux élèves de prendre conscience de la richesse et de la variété de la démarche mathématique et de la situer au sein de l'activité scientifique. (B.O. n° 30 du 23 juillet 2009)

La volonté d'intégrer la résolution de problèmes se retrouve dans les programmes des classes du cycle terminal de l'enseignement général :

> les activités proposées en classe et hors du temps scolaire prennent appui sur la résolution de problèmes purement mathématiques ou issus d'autres disciplines. De nature diverse, elles doivent entraîner les élèves à chercher, expérimenter, modéliser, en particulier à l'aide d'outils logiciels, choisir et appliquer des techniques de calcul, mettre en œuvre des algorithmes, raisonner, démontrer, trouver des résultats partiels et les mettre en perspective, expliquer oralement une démarche, communiquer un résultat par oral ou par écrit. (B.O. spécial n°9 du 30 septembre 2010)

Ces objectifs sont présents également dans les programmes de lycée professionnel :

> La formation a pour objectifs de former les élèves à l'activité mathématique et scientifique par la mise en œuvre des démarches d'investigation et l'expérimentation initiées au collège (…). (B.O. spécial n° 2 du 19 février 2009)

3. À propos des conditions de mise en œuvre de la démarche d'investigation en mathématiques

Il est assez clair que ces recommandations des programmes sont peu suivies d'effet, pour diverses raisons. Tout d'abord pour des questions de temps : il n'est pas toujours facile pour les professeurs d'accepter de passer du temps sur des activités qui ne sont pas directement liées aux notions du programme. Mais il y a également des raisons liées à la nécessité de mettre en place avec les élèves un contrat didactique différent du contrat habituel de la classe ; la prise d'autonomie des élèves et l'invitation à la créativité génèrent dans la classe de l'incertitude, qui rend plus complexe la gestion de la classe. Autrement dit, pour atteindre ces objectifs, il faut que se produisent des changements de postures chez les enseignants et les élèves.

Il paraît donc essentiel de proposer un accompagnement pour permettre aux enseignants de s'engager avec leurs élèves dans ce type d'activité, qui nécessite la mise en œuvre de tâches inhabituelles et de nouveaux dispositifs. C'est dans cette perspective que le groupe ResCo mène, depuis plusieurs années, des travaux de recherche qui lient travail collaboratif et démarches d'investigation, en lien étroit avec la formation continue au sein de l'IREM de Montpellier.

III. LE TRAVAIL COLLABORATIF : OBJECTIFS, ACTEURS ET COMMUNAUTE

1. Objectifs du travail collaboratif

Faire des mathématiques c'est résoudre des problèmes, c'est ce que disent les programmes officiels de l'enseignement des mathématiques depuis le milieu des années 80 et les travaux de recherche en Didactique comme ceux de Brousseau (1998) ou Douady (1994). L'organisation du travail peut être individuelle (problèmes donnés en classe ou en temps libre) ou plus rarement collective (dans le cadre de travaux de groupes). Le développement des outils de communication informatiques, favorisant le travail à distance, a permis l'émergence de nouvelles pratiques pédagogiques dans l'enseignement des mathématiques. C'est dans cette dynamique que nous nous inscrivons en proposant la résolution de problèmes de façon collective, en faisant intervenir plusieurs classes, et collaborative par les échanges d'idées et de procédures entre ces classes, en utilisant une plateforme informatique (Sauter 2008). L'aspect technologique n'est pas le véritable centre d'intérêt ; l'objectif est de mettre en évidence les potentialités pédagogiques d'une activité collaborative ainsi que les variables cognitives qu'elle fait intervenir : se représenter le problème (l'énoncé est *a priori* non mathématique), communiquer (échanges, naissance d'une communauté de recherche), modéliser (création d'un cadre théorique riche par divers apports). Sur l'aspect « technologique » et le développement d'outils informatiques dans les recherches collaboratives de problèmes, on peut se référer aux travaux sur le système OCAF (Object-oriented Collaboration Analysis Framework), qui fournit à la fois des mesures qualitatives et quantitatives d'un travail en collaboration (Komis 2003).

La résolution collaborative de problèmes est un dispositif particulier de recherche de problèmes ouverts. Cette pratique pédagogique a pour objectif de placer l'élève dans une activité mathématique où il se retrouvera dans une position semblable à celle d'un chercheur en mathématiques. Dans cette perspective, le but de la recherche n'est pas seulement d'aboutir à la solution, le plaisir et la curiosité sont des aspects importants, le cheminement et l'obtention de résultats partiels sont valorisés. Au cours de cette résolution collaborative, l'élève pourra être amené à poser et à formuler lui-même d'autres problèmes. Ce dispositif se distingue par trois spécificités majeures : les acteurs (enseignants, tuteurs et élèves) qui constituent une communauté de pratique au sens de Wenger (1998), les problèmes posés en dehors du cadre mathématique, l'organisation des échanges entre les classes avec un calendrier de recherche commun.

Ce dispositif de travail repose sur l'hypothèse que la richesse, due à la mixité d'idées et de niveaux, favorise les changements de postures des enseignants et des élèves. En particulier, en changeant leur perception des mathématiques, il permet de rendre confiance à des élèves démotivés et de valoriser des compétences habituellement peu exploitées.

2. Les acteurs du travail collaboratif

Pour décrire ce dispositif, nous faisons référence aux communautés de pratique au sens de Wenger car nous pouvons parler d'un « groupe dont les membres s'engagent régulièrement dans des activités de partage de connaissances et d'apprentissage à partir d'intérêts communs ». On peut identifier trois dimensions de ce concept, à savoir : l'engagement mutuel des individus, l'entreprise commune et le répertoire partagé. Une communication sur ce sujet a été faite à EMF 2006 (Combes et Sauter 2007).

Dans cette communauté, les individus vont mettre en commun leurs compétences souvent complémentaires, prendre des décisions collectives, et communiquer afin d'élaborer de nouvelles connaissances par mutualisation des productions. On distingue trois groupes de personnes qui interagissent : les tuteurs, les enseignants et les élèves.

Les tuteurs sont des professeurs de collège ou de lycée et un universitaire. Leur rôle pédagogique est de choisir le problème et de faire des recherches documentaires. L'universitaire est le coordonnateur, l'auteur de la relance, du bilan et de la clôture du problème. Ils ont aussi la mission de réguler et modérer le groupe de recherche ainsi que de créer et d'entretenir un climat de confiance pour encourager les enseignants dans leur travail collaboratif et éviter ainsi les risques d'abandon. Il est à préciser que la double fonction de tuteur-enseignant des responsables facilite la cohésion du groupe et la communication entre les membres. Les tuteurs décident du calendrier de recherche, constituent les groupes, et sont les personnes ressources pour l'utilisation du forum et de la plateforme.

Les enseignants sont souvent des stagiaires inscrits volontairement à une formation continue qui demande une implication et un engagement plus importants que dans les stages classiques. Ils doivent engager une ou plusieurs de leurs classes en collaboration avec d'autres classes en échangeant régulièrement leurs travaux de recherche via la plateforme. Ceci nécessite de leur part une responsabilisation importante, afin de respecter le calendrier, les périodes de recherches et d'échanges, et une certaine réactivité sur la lecture et le traitement des informations qui parviennent sur le forum. La résolution collaborative engage également des enseignants non stagiaires, soit d'autres académies, voire d'autres pays (Canada), soit ayant déjà suivi la formation par le passé.

Les élèves engagés par leur professeur ont un niveau allant de la sixième à la terminale, et sont issus des collèges, des lycées généraux et techniques ou professionnels. Les groupes de recherches sont composés de 3 ou 4 classes de niveaux différents mais proches.

IV. LE CHOIX DES PROBLEMES ET LEUR CONTEXTUALISATION

1. *Les caractéristiques générales des problèmes*

Depuis plusieurs années, les problèmes proposés sont issus de situations concrètes hors cadre mathématique et sont très ouverts au sens où, *a priori*, plusieurs choix de mathématisation sont envisageables. Le contenu étant intuitif et volontairement « flou », les élèves doivent entrer dans une démarche d'investigation, explorer le problème posé, envisager des pistes de résolution, envisager des choix permettant un traitement mathématique du problème, mettre au point des procédures de résolution et de validation, vérifier la vraisemblance et la cohérence des solutions.

Le problème n'a pas forcément de solution unique, les réponses que l'on peut y apporter dépendent des choix initiaux, des hypothèses et du modèle choisi ; le problème est donc évolutif, et nécessite des échanges pour faire avancer les recherches dans le même sens. Dans ce type de situation, moins balisée que les activités classiques, les élèves sont amenés à mettre en relation des objets concrets ou des objets mathématiques familiers avec des outils mathématiques qu'ils élaborent eux-mêmes au cours du processus de recherche collaborative.

Des références communes aux problèmes ouverts dans le sens d'Arsac et Mante (2007) peuvent être relevées :

> l'énoncé n'induit ni la méthode, ni la solution ; le problème se trouve dans un domaine conceptuel avec lequel les élèves ont assez de familiarité ; ainsi peuvent-ils prendre facilement possession de la situation et s'engager dans des essais, des conjectures, des projets de résolution, des contre-exemples.

D'autres contraintes plus spécifiques à la résolution collaborative sont à considérer :

- le problème est suffisamment riche pour être abordé à tous les niveaux de l'enseignement secondaire ;
- les solutions trouvées peuvent n'être que partielles, comme c'est le cas dans la recherche en mathématiques ;
- la dimension expérimentale des mathématiques est partie prenante dans la recherche de la solution ;
- le problème est posé dans un contexte non mathématique, le début du travail collaboratif étant centré sur le travail de mathématisation du problème.

2. L'exemple du problème de l'artiste

Ce problème, posé en 2009-2010 dans le cadre de la résolution collaborative, a été cherché dans 35 classes sous la forme suivante :

Un artiste contemporain veut réaliser une œuvre sur un support rond, en plantant des clous sur le pourtour et en tendant des fils entre les clous. Il se propose de peindre chaque zone d'une couleur différente.
De combien de couleurs aura-t-il besoin ?

Il s'agit d'une « contextualisation » du problème classique des cordes, paru entre autres sur le site de l'IREM de Lyon dans *La feuille à problèmes*[3] :

On place n points sur un cercle. Combien de régions détermine-t-on à l'intérieur de ce cercle en joignant les points deux à deux ?

Ce problème de dénombrement, posé dans un cadre géométrique, vérifie un grand nombre des contraintes évoquées auparavant. En particulier, il peut être abordé à tous les niveaux de l'enseignement, le domaine conceptuel est familier aux élèves, tous les élèves peuvent s'engager dans la recherche, la démarche expérimentale est nécessaire à la recherche d'une solution générale, aucune méthode n'est induite par l'énoncé, plusieurs procédures de résolutions sont envisageables et les solutions trouvées sont souvent partielles.

Plus généralement, nous appelons « contextualisation » d'un problème mathématique un énoncé posé dans le cadre d'une situation fictive mais réaliste et dont la mathématisation renvoie (ou peut renvoyer) au problème mathématique de départ ; un même problème peut donc avoir plusieurs contextualisations.

Par ailleurs, nous faisons l'hypothèse qu'un problème posé en-dehors du champ des mathématiques favorise sa dévolution. Cela participe également à un changement de perception des mathématiques qui ne sont pas ici vues comme un objet d'étude mais comme un outil de réflexion et de modélisation du réel.

Une autre raison, plus conjoncturelle, réside dans la confidentialité de la solution (ou des solutions) du problème : de nombreux éléments de réponse au problème des cordes sont disponibles sur Internet. Or les élèves travaillent sur le même problème pendant cinq semaines et nous souhaitons qu'ils ne trouvent pas d'emblée une solution en ligne.

Dans le cas du problème de l'artiste, le choix du contexte a permis un riche travail autour de la représentation du réel par les mathématiques et des choix subordonnés (modélisation des clous par des points, des fils par des segments, des zones par des surfaces…) et une réflexion sur cette représentation (la taille des objets, qui n'intervient pas dans le problème mathématisé, pourrait se révéler cruciale dans la réalité).

---

[3] http://irem-fpb.univ-lyon1.fr/feuillesprobleme/

V. L'ORGANISATION DE LA RECHERCHE

1. *Les échanges*

Les classes d'un même groupe communiquent entre elles. Les échanges sont assumés par le professeur qui, via une plateforme, envoie des documents écrits : questions (mathématiques et non-mathématiques), réponses, procédures, projets de résolution, résultats partiels (corrects ou non), éventuellement illustrés de dessins, schémas…

Ce mode de communication est moins aisé que les échanges oraux qui peuvent se faire en d'autres circonstances à l'intérieur d'une même classe, et rend plus difficile la possibilité pour certains de convaincre le groupe d'adopter leur « solution ». Cependant, les échanges à distance rendent indispensable le passage à l'écrit. Rédiger une synthèse des travaux avant chaque envoi permet d'éclaircir et d'affiner des idées qui, exprimées oralement, resteraient parfois à l'état d'ébauches. Ces interactions dans la classe et entre classes requièrent les qualités du débat oral associées à la rigueur exigée par l'écrit argumentatif.

2. *L'organisation de la recherche*

Les travaux se déroulent sur cinq semaines, à raison d'une séance par semaine. Les élèves alternent les recherches en groupes, les travaux individuels et les phases de mise en commun. L'organisation de la recherche décrite ici est une proposition, soumise aux choix de chaque professeur, qui s'engage néanmoins à respecter certaines contraintes du calendrier commun.

Lors de la première semaine, chaque classe prend connaissance de l'énoncé du problème. Les élèves sont souvent décontenancés par l'absence *a priori* de mathématiques. En groupes, les élèves rédigent des questions, mathématiques ou non, pour s'approprier la situation. Les discussions sur les questions qui pourraient paraître secondaires sont essentielles, permettant aux élèves de faire des choix argumentés. En fin de séance, une mise en commun est effectuée puis envoyée aux autres classes du groupe. Voici un exemple recueilli en 2009-2010 :

- *Quel est le diamètre du support rond ?*
- *De combien de clous aura-t-il besoin ?*
- *Combien de clous peut-il utiliser au maximum ?*
- *Quelles sont les longueurs maximale et minimale des fils ?*
- *Comment sont disposés les clous ?*
- *Les fils sont-ils de la même longueur ?*
- *Peut-on croiser les fils ?*
- *A-t-on le droit de faire partir plusieurs fils du même clou ?*
- *Quel est l'espacement entre les clous ?*
- *Est-ce que le rond peut être une sphère ?*
- *Peut-on accrocher des fils aux fils déjà placés ?*

Encart 1 *– Questions des élèves de la classe de Seconde 12 du Lycée Maillol de Perpignan*

A la séance suivante, les élèves, en groupes, répondent aux questions des autres classes. Les groupes les plus avancés se lancent dans la recherche, émettent et formulent les premières conjectures. En fin de séance, une mise en commun est effectuée, puis les réponses et réflexions sont envoyées aux autres classes du groupe.

- *Réponse 1 : C'est une variable ; on souhaite étudier son influence sur le problème.*
- *Réponse 2 : Il n'est pas nécessaire de connaître les dimensions du support. En effet, nous cherchons à connaître le nombre de zones et non la superficie de chaque zone. En augmentant la superficie du support, on augmente la superficie des zones mais le nombre de zones reste inchangé. Dans ce problème, les dimensions du support n'ont pas d'influence sur la donnée recherchée.*
- *Réponse 3 : La taille du support n'a aucune influence sur le nombre de zones ou de couleurs que l'on trouve au final.*

Encart 2 – *Réponses de la TS1 (Montréal) à une question de la 3ème D (Jacou) : Quelle est la taille du support ?*

A la fin de cette seconde semaine, après les premières phases d'exploration du problème par un questionnement sur la situation et les objets mathématiques, un texte de relance est envoyé à toutes les classes. Ce document prend en compte les échanges des premières semaines, et s'appuie sur l'analyse a priori du problème mathématique, lequel sera l'objet de la recherche dans les trois semaines suivantes. Sans induire aucune procédure, il permet de fixer des choix communs à toutes les classes et de recentrer les recherches autour d'une même problématique. Ce texte, élaboré par les tuteurs-enseignants et signé par l'universitaire du groupe, est le seul apport extérieur à la communauté des élèves.

Dans toutes les classes, vous avez déjà bien travaillé sur le problème de l'Artiste que nous vous avons proposé et plusieurs pistes possibles ont été envisagées.

On voudrait pouvoir donner une réponse précise à l'Artiste afin de l'aider à faire ses choix pour réaliser son œuvre. Pour cela, on se propose de traiter mathématiquement le Problème de l'Artiste.

Dans ce but, je vous propose de considérer que :

- *Le nombre de couleurs est le nombre de zones.*
- *On cherche une solution générale, c'est-à-dire qu'on cherche le nombre maximum de zones en fonction du nombre de clous.*
- *Le support de l'œuvre est un disque et les clous sont répartis sur sa circonférence.*
- *La taille du support est suffisante pour que l'on puisse négliger la taille des clous et l'épaisseur des fils. Par conséquent, on assimile les clous à des points, et les fils tendus à des segments de droite.*

Je vous souhaite à tous et à toutes une très bonne poursuite de la recherche.

Encart 3 – *Relance du problème de l'artiste*

La réception de ce texte recentre les recherches sur le problème mathématique. Ici, le choix dans la relance est de faire émerger la recherche de la relation fonctionnelle entre le nombre de points sur le cercle et le nombre maximum de zones. Sans cette précision, le nombre de zones dépend de deux paramètres : nombre de points sur le cercle et nombre de points de concours entre les cordes. La relance permet également d'expliciter les choix de mathématisation, en relation avec les questions posées par les élèves. Deux séances sont alors consacrées exclusivement à la recherche d'une solution : le problème cherché est ardu et demande beaucoup de temps pour obtenir des solutions même partielles. Pour privilégier le temps de recherche par rapport à celui de mise en commun, aucun échange entre les classes n'est prévu mais les professeurs sont invités à partager leurs impressions.

La troisième semaine, les élèves découvrent les réponses des autres classes ainsi que la relance, puis ils poursuivent leurs recherches.

La quatrième semaine se termine par la rédaction d'un bilan dans chaque groupe. Le professeur rassemble ces travaux et envoie une synthèse aux autres classes.

- *Plusieurs ont fait la remarque que l'aire du disque n'influait pas.*
- *La plupart ont cherché une relation entre le nombre de clous n et le nombre de zones un que l'on peut peindre, en faisant varier le nombre de clous : 2, 3, 4, 5, 6. Ils ont essayé souvent avec $u_n = 2^{n-1}$ et fait le constat que la relation était juste pour $n \in [0\ ;\ 5]$ mais que pour $n = 6$ elle ne fonctionnait plus.*
- *D'autres ont commencé par chercher une relation entre le nombre de clous n et le nombre de fils en regardant ce qui se passait quand on ajoutait un clou supplémentaire. Ils remarquent que lorsque l'on ajoute un clou, on ajoute un fil par clou. Ils arrivent à*

  $$u_n = (n-1) + (n-2) + (n-3) + \ldots\ldots\ldots\ldots (n-(n-1))$$

  et cherchent une expression plus simple.
- *Un groupe a essayé d'établir une relation entre le périmètre du support et le nombre maximal de clous en faisant intervenir le diamètre du clou.*

Encart 4 – *Conjectures de la TS1 (Montréal)*

A la suite de ces quatre séances, chaque élève doit réaliser, en dehors de la classe, une synthèse individuelle sous forme de narration de recherche. Ce travail permet à chacun de mettre ses idées au clair, de se préparer au débat en classe et de faire émerger des procédures qui n'auraient pas été retenues par le groupe.

La cinquième semaine, le professeur organise un débat scientifique, alimenté par les travaux des classes, renforcé par les synthèses individuelles et les éventuelles nouvelles procédures qui y figurent.

La recherche s'achève : il est alors essentiel de clôturer le problème. L'universitaire, qui a un regard extérieur sur les travaux des élèves, envoie une clôture du problème à tous les enseignants où sont exposées les mathématiques travaillées ainsi que les solutions trouvées. Il peut donner des éléments de solutions à destination des enseignants et, le cas échéant, proposer des prolongements au problème.

La clôture du problème de l'artiste met en évidence les différents domaines mathématiques rencontrés au cours de la recherche : les fonctions (identification de variables, recherche de dépendances fonctionnelles, études graphiques), les suites (phénomènes récurrents, formule de récurrence ou explicite, découverte de la formule de la somme des *n* premiers entiers), la géométrie plane (polygones, utilisation de symétries, influence de la taille du dessin et de sa précision, éléments topologiques concernant la nature des points d'intersection), les dénombrements (stratégies de comptage, recherche de validation de ces stratégies).

Elle permet également d'insister sur différents aspects de la démarche scientifique : utilisation de modèles mathématiques pour représenter des objets réels, démarche par essais successifs organisés, allers-retours fréquents entre les champs numérique, algébrique et géométrique, travail sur les conjectures (formulation, confrontation, argumentation, validation ou invalidation).

En faisant le point sur ce qui a été démontré, sur les nouvelles connaissances rencontrées et sur les questions qui restent encore en suspens, la clôture participe à une modification du regard porté sur les mathématiques : chercher en mathématiques n'est pas nécessairement aboutir à une solution définitive. Les enseignants et les élèves doivent percevoir les connaissances et savoir-faire qu'ils pourront réinvestir ; il faut noter à cet égard que les élèves sous-évaluent nettement la richesse des mathématiques mises en jeu.

C'est aussi le moment pour l'enseignant d'institutionnaliser certaines connaissances et de valider ou invalider résultats et procédures : l'analyse *a priori* et les études *a posteriori* du problème des cordes révèlent des invariants dans la recherche. Par exemple, quel que soit le niveau d'étude, le théorème en acte « le nombre de régions double lorsqu'on ajoute un point » est émis.

3. *Travail collaboratif et recherche scientifique*

L'organisation de la recherche (travaux individuels, travaux de groupes, mises en commun, échanges avec d'autres classes) est à rapprocher du monde de la recherche scientifique : le chercheur travaille tantôt seul, tantôt avec les collègues de son laboratoire et échange avec des laboratoires extérieurs. Le dispositif de résolution collaborative génère donc une communauté scientifique d'élèves, dans laquelle chaque individu peut apporter une pierre à l'édifice commun. On retrouve certains des aspects de la recherche d'un mathématicien professionnel évoqués par W. Thurston (1995) :

- la réponse et les outils sont inconnus a priori ;
- le temps est nécessaire pour approfondir la question ;
- les connaissances du chercheur sont en perpétuelle évolution ;
- les échanges avec les pairs sont indispensables ;
- la validation de la recherche est prise en charge par la communauté scientifique ;
- la recherche est source de plaisir et de jubilation.

VI. CONCLUSION

Depuis quelques années, les instructions officielles donnent une place prépondérante à la démarche d'investigation dans les disciplines scientifiques. Faire entrer les élèves dans une telle activité exige des changements de posture de la part de tous les acteurs, qu'ils soient professeurs ou élèves.

Le groupe ResCo propose une ingénierie didactique permettant d'accompagner cette évolution : la résolution collaborative de problèmes. Plus que les connaissances techniques, nous visons l'acquisition de compétences de recherche permettant de mettre les mathématiques au service de situations ancrées dans le monde réel.

En créant une communauté d'élèves, en leur donnant la possibilité de communiquer et le temps de chercher à résoudre des problèmes denses, nous reproduisons certaines des conditions de la recherche en mathématiques. Les problèmes proposés sont de nature à favoriser l'intervention de la dimension expérimentale des mathématiques. En cherchant à résoudre collectivement ces problèmes, les élèves sont amenés à s'interroger sur les objets mathématiques qu'ils manipulent et sur la représentation du réel que permettent ces objets.

Les travaux menés dans les classes depuis plusieurs années montrent que ce dispositif, qui encourage les élèves à se poser eux-mêmes des problèmes, met en jeu des compétences complexes de recherche et de communication, change leur perception des mathématiques et modifie leurs rapports avec cette discipline.

Des questions restent à approfondir, sur les caractéristiques des problèmes et sur l'organisation de la recherche. Quelles spécificités des situations favorisent chez les élèves un changement de perception des mathématiques et assurent une bonne dévolution ? Est-il possible que des enseignants puissent organiser en autonomie une recherche collaborative et quelles ressources mettre alors à leur disposition ?

REFERENCES

Arsac G., Mante M. (2007) *Les pratiques du problème ouvert*. Lyon : Scéren CRDP de Lyon.

Brousseau G. (1998) *La théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Combes M.-C., Sauter M. (2006) Une communauté de pratique d'enseignants, dans l'académie de Montpellier, autour de la résolution de problèmes. In *Actes de EMF2006. Sherbrooke.* http://emf2006.educ.usherbrooke.ca/emf_theme_01_comm.htm

Dias T., Durand-Guerrier V. (2005) Expérimenter pour apprendre en mathématiques. *Repères IREM* 60, 61-78.

Douady R. (1994) Ingénierie didactique et évolution du rapport au savoir. *Repères IREM* 15, 37-61.

Komis V., Avouris N., Dimitracopoulou A., Margaritis M. (2003) *Aspects de la conception d'un environnement collaboratif de modélisation à distance, Environnements Informatiques pour l'apprentissage humain*. Strasbourg.

Kuntz G. (2007) (coord.) *Démarche expérimentale et apprentissages mathématique*. Dossier de la Veille Scientifique et Technologique de l'INRP. http://educmath.inrp.fr/Educmath/ressources/etudes/experimentation-math

Sauter M. (2008) Une communauté d'enseignants pour une recherche collaborative de problèmes. *Repères IREM* 72, 25-45.

Thurston P.W (1995) Preuve et progrès en mathématiques. *Repères IREM* 21, 7-26.

Wenger E (1998) *Communities of Practice: Leaning, Meaning and Identity*. Cambridge: Cambridge University Press.

MODÉLISATION ET DÉMARCHE D'INVESTIGATION

Floriane WOZNIAK*

Résumé – Le texte aborde la question des conditions de la mise en œuvre d'une démarche d'investigation à partir de l'observation de la façon dont un professeur étudie avec des élèves de 10-11 ans un problème de grandeur inaccessible à l'école primaire. Notre cadre d'analyse, la Théorie Anthropologique du Didactique, nous conduit à interpréter l'(in)existence d'une *dialectique des médias et des milieux* comme un critère de (non) mise en œuvre effective d'une démarche d'investigation. L'observation réalisée met à jour les praxéologies muettes de la modélisation comme indice d'un besoin d'infrastructures didactiques et mathématiques.

Mots-clefs : Théorie Anthropologique du Didactique, Parcours d'Étude et de Recherche, Dialectique des médias et des milieux, Praxéologie muette.

Abstract –This text deals with the question of the conditions to realize an inquiry-based learning. We observe how a teacher studies a problem about an inaccessible magnitude with 10/11-year-old pupils in a primary school. The analysis is performed in the framework of the Anthropological Theory of the Didactic, thus we interpret the (non) existence of a *dialectic of media and milieus* like a (non) realization of an inquiry-based learning. This observation reveals the mute praxeologies of the process of modelling like a need for didactic and mathematics facilities.

Keywords: Anthropological Theory of the Didactic, Dialectic of media and milieus, Mute praxeology.

I. LA DÉMARCHE D'INVESTIGATION À L'ÉCOLE PRIMAIRE EN FRANCE

En France, la démarche d'investigation concerne en premier lieu l'enseignement des sciences. Tout commence en 1996 par le projet *la main à la pâte* impulsé par Georges Charpak, Pierre Lena et Yves Quéré[1]. Il s'agit de mettre en œuvre une nouvelle méthode d'enseignement à l'école primaire dont les deux premiers principes stipulent[2] :

1. Les enfants observent un objet ou un phénomène du monde réel, proche et sensible, et expérimentent sur lui.
2. Au cours de leurs investigations, les enfants argumentent et raisonnent, mettent en commun et discutent leurs idées et leurs résultats, construisent leurs connaissances, une activité purement manuelle ne suffisant pas.

Ces expérimentations vont nourrir *le Plan de rénovation de l'enseignement des sciences et de la technologie à l'école*[3] publié au Bulletin Officiel de l'Éducation Nationale n°23 du 15 juin 2000 dont le principal objectif est d'impulser une « approche pédagogique […] fondée sur le questionnement et sur l'investigation, constitutifs des disciplines scientifiques ». C'est donc bien un *nouveau rapport aux savoirs* (scientifiques) que les promoteurs de ce plan souhaitent instaurer dans les classes. Il est à présent attendu que :

Les élèves construisent leurs apprentissages en étant acteurs des activités scientifiques.
- Ils observent un phénomène du monde réel et proche, au sujet duquel ils formulent leurs interrogations.
- Ils conduisent des investigations réfléchies en mettant en œuvre des démarches concrètes d'expérimentation, complétées le cas échéant par une recherche documentaire. Il est important que les élèves pratiquent l'une et l'autre de ces deux voies complémentaires.
- Ils échangent et argumentent au cours de l'activité, ils partagent leurs idées, confrontent leurs points de vue et formulent leurs résultats provisoires ou définitifs, oralement et par écrit. Ce faisant, ils sont conduits à s'écouter mutuellement, à considérer l'autre, à le respecter et à prendre en compte son avis.

* IUFM d'Alsace, EA 3424 IRIST, Université de Strasbourg – France – floriane.wozniak@iufm.unistra.fr

[1] Membres de l'Académie des Sciences, Georges Charpak est prix Nobel de physique 1992, Pierre Léna astrophysicien et Yves Quéré physicien.

[2] Le texte énonçant les dix principes du projet est disponible sur l'Internet : http://www.lamap.fr/?Page_Id=59.

[3] Disponible sur l'Internet : http://www.education.gouv.fr/bo/2000/23/ensel.htm.

© Wozniak F. (2012) Modélisation et démarche d'investigation. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT10, pp. 1464–1475). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

Ce mouvement se poursuit au collège[4] par l'expérimentation – sur la base d'un appel d'offre du ministère de l'éducation nationale et sous l'égide de l'académie des sciences et l'académie des technologies – d'un « enseignement intégré de science et technologie » à partir de 2006. Comme pour le projet la main à la pâte, il se fonde sur dix principes dont les deux premiers explicitent la méthode d'enseignement qu'il s'agit de mettre en place dans les classes[5] :

> Les jeunes collégiens font des investigations sur des objets, des phénomènes, des situations du monde naturel ou technologique à la fois accessibles, susceptibles de stimuler leur curiosité et de susciter leur intérêt.
> Au cours de leurs investigations, les élèves raisonnent, argumentent, mettent en commun leurs idées, expérimentent, confrontent leurs résultats, débattent, exercent leur esprit critique ; ils construisent peu à peu leurs connaissances qu'ils formalisent avec l'enseignant dans un souci de rigueur intellectuelle.

Comme on le voit à la lecture de ces textes fondateurs, le mot *investigation* est utilisé dans son sens étymologique, dérivé du latin *investigatio* qui signifie « recherche attentive » ; le verbe *investigo* signifiant « chercher (suivre) à la piste, à la trace. Rechercher avec soin, scruter » (Gaffiot 2001). C'est dans le programme du cycle 3 de l'école primaire[6] publié dans le BOEN hors série n°1 du 14 février 2002 qu'apparait l'expression *démarche d'investigation* à propos de l'enseignement des sciences expérimentales et technologiques :

> L'enseignant sélectionne une situation de départ qui focalise la curiosité des élèves, déclenche leurs questions et leur permet d'exprimer leurs idées préalables. Il incite à une formulation précise. Il amène à sélectionner les questions qui se prêtent à une démarche constructive d'investigation débouchant sur la construction des savoir-faire, des connaissances et des repères culturels prévus par les programmes.
> Les compétences et les connaissances sont construites dans le cadre d'une méthode qui permet d'articuler questionnement sur le monde et démarche d'investigation. Cette démarche peut recourir à diverses formes de travail.
>
> - expérimentation directe (à privilégier chaque fois qu'elle est possible) conçue et réalisée par les élèves ;
> - réalisation matérielle (recherche d'une solution technique) ;
> - observation directe ou assistée par un instrument, avec ou sans mesure ;
> - recherche sur des documents ;
> - enquête et visite.
>
> La confrontation à des ouvrages de référence consolide les connaissances acquises et contribue à l'apprentissage de stratégies de lecture adaptées à la spécificité de ces textes.
> La séquence didactique comporte le plus souvent un travail en petits groupes qui donne l'occasion de développer des attitudes d'écoute, de respect, de coopération. L'activité des élèves est la règle et les expériences magistrales sont rares. Des moments de synthèse opérés par le maître n'en sont pas moins indispensables pour donner tout leur sens aux pratiques expérimentales et en dégager les enseignements.

Dans la continuité de ces programmes qui entreront en vigueur à l'école primaire en septembre 2002, paraissent ceux du collège au BOEN n°5 hors série du 25 août 2005. Le volume 2 concerne les mathématiques, les sciences de la vie et de la terre, la physique-chimie et débute par une introduction commune à l'ensemble de ces disciplines scientifiques. Son troisième paragraphe – *les méthodes* – consacre une section à *la démarche d'investigation* dont les auteurs considèrent qu'elle « présente des analogies entre son application au domaine des sciences expérimentales et celui des mathématiques » (Op. cit. p. 6). Tout en considérant que :

> la spécificité de chacun de ces domaines, liée à leurs objets d'étude respectifs et à leurs méthodes de preuve, conduit cependant à quelques différences dans la réalisation. (Ibid. p. 6)

---

[4] Au collège en France les élèves ont de 11 à 15 ans répartis en quatre classes (6e, 5e, 4e, 3e).

[5] Le texte énonçant les dix principes du projet est disponible sur l'Internet : http://science-techno-college.net/?page=67

[6] Le cycle 3 concerne les classes de CE2, CM1, CM2 où les élèves ont 8-9 ans, 9-10 ans et 10-11 ans respectivement.

En particulier parce que, pour ces auteurs,

> cette démarche s'appuie sur le questionnement sur le monde réel (en sciences expérimentale) et sur la résolution de problèmes (en mathématiques). (Ibid., p. 6)

On voit bien ce que l'ambiguïté de la formulation peut contenir de mortifère : au moment où les fenêtres de la classe de sciences s'ouvrent sur le monde, il serait possible – voire légitime – de laisser fermée la porte de la classe de mathématiques, abandonnée à son confinement autarcique. Les auteurs identifient ensuite « sept moments essentiels » dans « une séquence d'investigation » : le choix d'une situation-problème par le professeur ; l'appropriation du problème par les élèves ; la formulation de conjectures, d'hypothèses explicatives, de protocoles possibles ; l'investigation ou la résolution conduite par les élèves ; l'échange argumenté autour des propositions élaborées ; l'acquisition et la structure des connaissances ; l'opérationnalisation des connaissances.

La même année, parait le rapport Rocard et al. (2007) dont l'objet est de faire des propositions à la Commission Européenne sur l'enseignement scientifique car

> de nombreuses études ont mis en évidence une alarmante perte d'intérêt des jeunes pour les études scientifiques et mathématiques. (Op. cit. p. 5)

Pour les rapporteurs,

> renverser la pédagogie utilisée pour enseigner les sciences à l'école, en la faisant passer de méthodes essentiellement déductives à des méthodes basées sur l'investigation permet d'augmenter l'intérêt des jeunes pour les sciences. (Ibid., p. 2)

Afin d'expliciter le type d'enseignement qu'ils préconisent, les auteurs définissent alors ce que les Anglo-Saxons nomment *Inquiry-based science education* (IBSE) et *Problem-based learning* (PBL) :

> À l'heure actuelle, l'approche inductive est le plus souvent désignée en tant qu'enseignement des sciences basé sur la démarche d'investigation (IBSE) et porte essentiellement sur l'enseignement des sciences de la nature et de la technologie. Par définition, une investigation est un processus intentionnel de diagnostic des problèmes, de critique des expériences réalisées, de distinction entre les alternatives possibles, de planification des recherches, de recherche d'hypothèses, de recherche d'informations, de construction de modèles, de débat avec des pairs et de formulation d'arguments cohérents (Linn, Davis et Bell 2004). En ce qui concerne l'enseignement des mathématiques, la communauté éducative préfère parler « d'apprentissage basé sur les problèmes » (PBL) plutôt que d'IBSE. En réalité, l'enseignement des mathématiques peut facilement utiliser une approche basée sur les problèmes alors que, dans de nombreux cas, l'approche expérimentale s'avère plus difficile. L'enseignement basé sur les problèmes désigne un environnement d'apprentissage dans lequel les problèmes guident l'apprentissage. Autrement dit, l'apprentissage commence par un problème à résoudre et le dit problème est posé de façon à obliger les enfants à acquérir de nouvelles connaissances avant même l'étape de résolution proprement dite. Plutôt que de rechercher une réponse correcte unique, les enfants interprètent le problème, recueillent les informations nécessaires, identifient les solutions possibles, évaluent les différentes options disponibles et formulent des conclusions. L'enseignement des sciences basé sur l'investigation constitue une approche basée sur les problèmes, mais avec une dimension supplémentaire étant donné l'importance accordée à l'approche expérimentale. Dans ce rapport, l'IBSE désignera l'enseignement des sciences basé sur l'investigation et la résolution de problème. (Rocard et al., pp 10-11)

Toute ambiguïté est à présent levée : il s'agit bien de réaliser le même changement de paradigme dans l'enseignement des mathématiques comme dans celui des sciences.

Nous venons de décrire, à grands traits, les principaux ingrédients qui fondent le rapport institutionnel à la démarche d'investigation dans l'école française. Ainsi, il ne s'agit plus d'enseigner les mathématiques seulement *pour* résoudre des problèmes mais bien d'enseigner les mathématiques aussi *par* la résolution de problèmes ou, pour le dire avec les mots de la Théorie Anthropologique du Didactique, aborder les savoirs (mathématiques) enseignés de manière fonctionnelle comme réponses à des questions. Notons enfin que ces changements curriculaires n'affectent évidemment pas seulement la France comme en attestent, par exemple, le *Plan d'Études Romand* en Suisse et le projet européen PRIMAS (Dorier 2010).

II. LE SCHEMA HERBARTIEN COMME MODELE DE LA DEMARCHE D'INVESTIGATION

Notre cadre d'analyse est celui de la Théorie Anthropologique du Didactique. Pour Chevallard (1999), étudier un problème c'est construire une organisation praxéologique $[T/\tau/\theta/\Theta]$ comme réponse à cette question : identifier le type de tâches à réaliser (T), construire une technique (τ) qui permette de l'accomplir, produire un discours (technologique, θ) qui puisse rendre compte de cette construction tout en l'inscrivant dans une problématique plus large, une théorie (Θ). Le savoir se modélise ainsi en termes de praxéologies avec une composante *praxis* qui décrit les techniques permettant d'accomplir certains types de tâches et une composante *logos* dans laquelle les technologies visent à décrire, expliciter, légitimer les techniques mises en œuvre tout en les inscrivant dans des théories qui les englobent. Précisons encore que :

> les notions de technologie et de théorie doivent être entendues en un sens *propre à l'institution ou à la personne* considérée. Est technologie ce qui, dans une institution ou pour une personne, remplit la *fonction* technologique – justifier, éclairer la technique τ relative au type de tâches T, voire permettre de l'engendrer (ou de la reconstruire, quand elle est « donnée »). De même, est théorie ce qui assume, en cette institution ou pour cette personne, une fonction théorique. (Chevallard 2007, p. 714)

Ainsi, par exemple, une technique efficace pour déterminer le prix de six stylos quand on connait le prix de deux, revient à multiplier ce prix par trois. Cette technique se justifie par le recours à la propriété de linéarité multiplicative[7] de la fonction linéaire qui associe le prix à la quantité de stylos ; discours qui s'intègre dans une théorie selon laquelle le modèle de proportionnalité est adapté à cette situation, modèle représenté mathématiquement par une fonction linéaire. Comme le propose, par exemple, le programme d'enseignement de la classe de troisième du collège – élèves de 14 -15 ans – qui stipule : « la notion de fonction linéaire offre un modèle mathématique pour le traitement des situations qui relèvent de la proportionnalité et contribue à cette synthèse ». (Ministère de l'Éducation Nationale 2007, p. 57).

Chevallard (2002) explicite le schéma de l'étude d'une question selon cinq étapes. Dans un premier temps il s'agit de regarder et *observer* les réponses déjà présentes dans la culture. Après ce temps d'observation, se met en œuvre un processus d'*analyse* expérimentale et théorique des réponses déjà construites par d'autres, permettant ainsi leur *évaluation*, condition *sine qua non* au *développement* d'une réponse qui lui soit propre. Ce processus de l'étude d'une question se concluant par la production d'un discours – au moins pour lui-même – d'explicitation, de *défense et illustration* de la réponse produite. Ainsi, la construction d'une réponse à une question, nécessite de convoquer un certain milieu fait de différentes ressources. Parmi ces ressources, nous venons de l'évoquer, certaines sont en quelque sorte des réponses « toutes faites » qui ont été validées par telle institution qui lui confère son « estampille » ($R_i^{\lozenge}$). D'autres ressources sont des outils (O_j) d'analyse qui permettent d'interroger et évaluer ces réponses partielles à la question génératrice de l'étude. Ce système de ressources ainsi convoquées au sein de cette dynamique didactique qui met à l'épreuve les unes par confrontation avec les autres, fournit les matériaux à partir desquels la réponse de la classe est produite. Chevallard (2008) appelle ce processus *la dialectique des médias et des milieux* :

[7] Qui pourrait s'énoncer ainsi : « si on triple le nombre de stylos, leur prix est triplé ».

> L'existence d'une dialectique vigoureuse (et rigoureuse) entre médias et milieux est une condition cruciale pour qu'un processus d'étude et de recherche ne se réduise pas au rcopiage acritique d'éléments de réponse épars dans les institutions de la société. Une telle exigence est en vérité consubstantielle à l'esprit galiléen caractéristique des sciences modernes de la nature et de la société, dans lequel la soumission à l'autorité cède la place à une culture partagée du questionnement, de la mise à l'épreuve par la construction de milieux idoines, déterministes ou statistiques, combinant dispositifs matériels et immatériels (enquête, expérimentation, raisonnement, déduction). (Op. cité pp. 344-345)

Or dans une démarche d'investigation les élèves sont appelés à défendre leurs résultats après avoir fait recherches, expérimentations, observations, c'est-à-dire après une mise à l'épreuve serrée des médias à leur disposition par la construction d'un milieu adidactique adapté, au sens de la théorie des situations (Brousseau 1998, 2010) apparait ainsi que le processus de production d'une réponse né de la mise en œuvre d'une dialectique des médias et des milieux est consubstantielle d'une démarche d'investigation. Le travail d'un système didactique S(X ; Y ; Q) formé autour d'une question Q par une classe X et le professeur $Y = \{y\}$ qui en dirige l'étude peut alors être résumé par le schéma herbatien :

$$[S(X\,;Y\,;Q) \curvearrowright \{R_1^{\Diamond}, R_2^{\Diamond}, \ldots, R_n^{\Diamond}, O_{n+1}, \ldots, O_m\}] \hookrightarrow R^{\heartsuit}$$

dans lequel le milieu M = $\{R_1^{\Diamond}, R_2^{\Diamond}, \ldots, R_n^{\Diamond}, O_{n+1}, O_m\}$ fait de réponses institutionnellement estampiléées $R_i^{\Diamond}$, et d'œuvres de la culture O_j doit permettre la construction par la classe de sa réponse $R^{\heartsuit}$. Le schéma herbartien donne ainsi à voir la production de la réponse de la classe comme le bilan de la dynamique didactique née de la mise en œuvre de la dialectique des médias et des milieux à la fin d'un *parcours* d'étude et de recherche. C'est en ce sens que nous considérons le schéma herbartien comme un modèle de la démarche d'investigation. Mais la mise en œuvre d'une telle démarche d'investigation nécessite un changement de paradigme dans la conduite de l'étude qui doit trancher avec le cas où le professeur enseigne à ses élèves sa réponse, ce que le schéma herbartien permet de décrire en ces termes :

> Dans un état très fruste du développement didactique, dans une classe que nous noterons ici [X, y] (on a évidemment $Y = \{ y \}$), lorsqu'une question Q est étudiée, le professeur y apporte *sa* réponse, R_y, censée devenir *la* réponse $R^{\heartsuit}$ de la classe, en sorte qu'on aura le bilan herbartien $[S(X\,; Y\,; Q) \curvearrowright \{ R_1^{\Diamond}, O_2 \}] \hookrightarrow R^{\heartsuit}$ où $R_1^{\Diamond} = R_y$, $O_2 = \wp$ et $R^{\heartsuit} = R_y$, la praxéologie $\wp$ apparaissant comme ce qui permet à y d'élaborer la réponse R_y, que X devra *in fine* faire sienne. (Chevallard 2011, p. 93)

Il s'agit en effet de remplacer ce professeur *lector* qui enseigne à ses élèves la réponse qu'il aura lui-même tirée des œuvres qu'il aura consultées, par un véritable collectif d'étude qui devient *auctor* de la réponse collectivement produite. C'est alors que prend naissance la notion de *parcours d'étude et de recherche* (PER). Or,

> pour qu'il y ait PER en un sens raisonnable, il faut en effet que l'organisation didactique conçue ou observée apparaissent viser (dans le premier cas) ou manifester (dans le second cas) un certain nombre de conditions touchant tout à la fois la mésogenèse, la topogenèse et la chronogenèse. (Op. cité, p. 94)

La condition mésogenétique[8] repérée par Chevallard stipule que le milieu n'est pas tout fait, déjà là et immuable « il est constitué par la classe à partir de productions diverses, externes à la classe comme internes à celles-ci. » (Ibid., p. 94) La condition topogénétique[9] tranche plus radicalement avec les habitus du fonctionnement didactique d'une classe en France car dans le cadre d'un PER « la constitution du milieu M est le fait de la classe [X, y], non de y seul ». Cela signifie que le *topos* de l'élève s'agrandit individuellement et collectivement tandis que le professeur doit assumer une position de directeur de l'étude, qui « décidera en dernier

[8] La mésogenèse est le procédé par lequel le milieu d'une situation se fabrique, se développe et s'enrichit.

[9] La topogenèse est le procédé par lequel la place et les attributions des sujets d'une institution (professeur et élèves au sein d'une situation didactique en classe) sont fixées.

ressort, non sans en expliciter les attendus, si la classe verra ou non son milieu d'étude être augmenté de telle ou telle œuvre » (Ibid., p. 94). La troisième condition est relative à la chronogenèse[10] car « la constitution et le " travail" du milieu M sont en effet à l'origine d'une dilatation du temps didactique et donc, corrélativement, d'une extension du temps d'horloge requis » (Ibid., p. 94). Cette condition est, semble-t-il, difficilement tenable par les professeurs français qui jugent le programme d'enseignement qu'il s'agit de faire vivre dans les classes toujours trop lourd au regard du temps imparti. Cette contrainte temporelle conduit le professeur, parfois à son insu, à réduire le *topos* de l'élève pour que « le cours avance ».

Les conditions relatives au milieu que nous venons d'énumérer, consubstantielles à la réalisation authentique d'un parcours d'étude et de recherche, appellent donc la mise en place d'un nouveau type de contrat didactique. De tels changements transparaissent dans certains textes officiels décrivant les nouvelles pratiques d'enseignement qui intègrent une démarche d'investigation. Ainsi, l'introduction du document d'accompagnement des programmes 2002 *Enseigner les sciences à l'école* expose « divers aspects d'une démarche expérimentale d'investigation » et le « canevas d'une séquence ». Il y est rappelé que c'est bien l'élève qui conduit l'investigation à partir de diverses méthodes dont la recherche de documents. Un paragraphe spécifique est d'ailleurs consacré à la recherche de documents « en bibliothèque, en BCD, dans un dictionnaire, une encyclopédie ou sur Internet, pour répondre aux questions "productives" de la classe et pour résoudre des problèmes scientifiques qui n'ont pu l'être totalement par la confrontation expérimentale au réel » dont l'objet est de :

> préciser comment la recherche documentaire peut et doit intervenir en complément d'une démarche qui conduit du questionnement à la connaissance en passant par l'expérience. (Blanchard et Denis 2002, p. 9)

III. UN PROBLEME DE GRANDEUR INACCESSIBLE

1. *La taille du géant*

Nous avons proposé[11] en mai 2010 à un professeur des écoles de faire étudier à ses élèves de CM2 un problème de grandeur inaccessible : « Cette photo a été prise dans un parc d'attraction en Angleterre. On y aperçoit une partie de la jambe d'un géant. Quelle est à peu près la taille de ce géant ? ».

Figure 1 *– Photo accompagnant l'énoncé du problème*

Le problème était proposé sur une feuille A4 où la photo[12] (voir figure 1) mesurait 16,1 cm horizontalement et 12 cm verticalement. La place nous manque pour faire une analyse

[10] La chronogenèse est le procédé par lequel la temporalité de la diffusion et de l'acquisition des savoirs est modifiée.

[11] L'observation a été réalisée dans le cadre du projet ACODIS de l'IUFM d'Alsace dont les participants en 2009-2010 étaient : R. Adjiage, T. Beliaeva, N. Gavens, A. Jarlegan, J.-C. Rauscher, M.-J. Remigy, M. Weisser, F. Wozniak

[12] Copyright Richard Phillips (2001-2009) :www.problempictures.co.uk

didactique substantielle de ce problème (voir Wozniak, *à paraître*). Néanmoins, il apparait clairement que sa résolution repose sur une activité de modélisation, en particulier, sur le recours au modèle de proportionnalité. Or à ce niveau d'enseignement, « la proportionnalité est abordée à partir des situations faisant intervenir les notions de pourcentage, d'échelle, de conversion, d'agrandissement ou de réduction de figures. Pour cela, plusieurs procédures (en particulier celle dite de la « règle de trois ») sont utilisées. » (Ministère de l'Éducation Nationale 2008, p. 23).

La réalité représentée par la photo étant inconnue des élèves et de leur professeur, elle ne peut « vivre » dans la classe, au sens où aucune information ne peut en être tirée. Trois domaines de réalité peuvent néanmoins être convoqués : la photo, une réalité supposée ou imaginée, la réalité vécue par l'élève dans ou hors la classe. Ainsi par exemple, pour déterminer la longueur de la semelle d'une chaussure un élève peut mesurer cette longueur sur la photo en considérant un des deux hommes, supposer sa mesure, l'extrapoler (à partir de la mesure de sa propre semelle) ou encore mesurer la longueur de la semelle du professeur. Plusieurs modèles de proportionnalité pourront être mis en œuvre comme la proportionnalité des dimensions sur la photo par rapport aux dimensions réelles ou la proportionnalité des dimensions du géant par rapport aux dimensions d'un homme. Si le premier modèle repose sur des pratiques sociales (habituellement une photo fournit une réduction homothétique de la réalité), le second modèle repose sur une hypothèse d'essence anthropocentrique. Mais un troisième modèle – dont nous savons qu'il est erroné – peut être utilisé, la proportionnalité des dimensions entre deux hommes (ou deux enfants) entre eux. La mobilisation de ces modèles repose sur différentes hypothèses – dont nous ne discuterons pas le bien fondé ici –, par exemple :

H0 : la photo est une reproduction réduite et fidèle de la réalité représentée, c'est-à-dire sans déformation.

H1 : les proportions d'un être humain à un autre sont conservées.

H1.1 : les proportions d'un homme adulte à un autre sont conservées.

H1.2 : les proportions d'un enfant à un autre sont conservées.

H1.3 : les proportions d'un enfant et d'un homme sont les mêmes.

H2 : les proportions du géant sont les mêmes que celles d'un être humain.

H2.1 : les proportions du géant sont les mêmes que celles d'un homme sur la photo.

H2.2 : les proportions du géant sont les mêmes que celles d'un homme adulte.

H2.3 : les proportions du géant sont les mêmes que celles d'un enfant.

Sous l'hypothèse (H0), trois types de techniques sont envisageables à ce niveau-là de la scolarité. Le premier type de technique consiste à choisir un élément commun au corps du géant et à celui d'un des hommes de la photo comme étalon, puis à déterminer le nombre de reports de cet étalon dans le corps d'un homme adulte sur la photo. En supposant que le géant est un agrandissement homothétique d'un des hommes de la photo (H2.1), la taille du géant s'obtient en multipliant ce rapport par la dimension réelle supposée de l'étalon. Par exemple, sous l'hypothèse (H1.3), un élève peut estimer que la hauteur *base du pied-base du mollet* peut être reportée 7 fois. En considérant, d'après la photo, que cette hauteur pour le géant est égale à la taille d'un homme sur la photo, alors la taille du géant est égale à 7 fois la taille d'un homme[13] soit à peu près 12,25 m (7 × 1,75 m).

Un deuxième type de technique sous l'hypothèse (H2.1) consiste à appliquer le coefficient d'agrandissement entre un homme sur la photo et le géant. En mesurant la longueur des semelles des chaussures d'un homme et du géant sur la photo, par exemple, on obtient respectivement 1,2 cm et 9 cm, ce qui donne un coefficient d'agrandissement de 7,5. Si on choisit (arbitrairement) de prendre 1,80 m comme taille d'un homme sur la photo, celle du géant est alors 7,5 fois plus grande soit une taille proche de 13,5 m.

Enfin, le troisième type de technique est la composée des deux techniques précédentes. Il s'agit de multiplier la mesure d'un corps en référence à un étalon par la mesure supposée réelle de cet étalon obtenue en appliquant un rapport d'agrandissement entre les dimensions d'un homme sur la photo et celle du géant. Si on estime que la longueur du pied d'un homme de 1,80 m mesure 30 cm, alors la taille du géant est égale à 6 fois (180 : 30 = 6) la longueur de sa chaussure qui est elle-même 7,5 fois (9 :1,2 = 7,5) plus grande que celle d'un homme sur la photo. Ce qui donnerait une taille de géant de 13,50 m (6 × 7,5 × 30 cm).

Au-delà du côté dérisoire de la précision au centimètre prés, notons que le géant porte des bottes avec un talon, il y a donc une différence entre la taille du géant (nus pieds) et sa hauteur (comme édifice) …

2. *Praxéologies de modélisation*

Chevallard (1989) propose une description en trois étapes du processus de modélisation articulant un système – mathématique ou non – et un modèle (mathématique) de celui-ci. En premier lieu, il s'agit de définir le système à étudier en identifiant les variables qui permettent de rendre compte du domaine de réalité considéré. La mise en relation des différentes variables contribue à la construction du modèle qui n'est autre que l'ensemble de ces relations. Le travail sur le modèle permet alors de

> produire des connaissances relatives au système étudié, connaissances qui prennent la forme de nouvelles relations entre les variables du système. (Op. cit., p. 53)

Notons que si le travail sur le modèle est une phase proprement mathématique, les deux autres étapes relèvent du domaine de réalité dont est issu le système lui-même. En dépit d'une présentation linéaire il y a bien une circularité ; le travail sur le modèle pouvant conduire à redéfinir le système étudié et par conséquent le modèle lui-même. L'analyse des praxéologies de modélisation revient donc à mettre à jour les praxéologies relatives à la définition du système, la construction et le travail sur le modèle.

La taille du géant étant réellement inconnue du professeur (et de ses élèves) il n'y a pas de validation possible de la solution élaborée par la classe. Cette validation passe nécessairement par celle de son processus de production. Comme le souligne Orange (2007, p. 46), lorsqu'

> il n'y a pas possibilité de validation par l'élève de ses modèles et de ses argumentations grâce à un milieu objectif antagoniste. Se développe ainsi un espace problématique qui permet l'exploration et la délimitation du champ des possibles, par établissement de conditions de possibilité des solutions (nécessités). Ce champ sera secondairement peuplé par des solutions validées par saturation du registre empirique ou du registre des modèles[14]. Si le premier mode correspond bien à un apprentissage par

[13] D'après le site de l'INSEE. La taille moyenne d'un homme en France entre 18 et 65 ans est de 1,75 m : http://www.insee.fr/fr/themes/document.asp?ref_id=ip1123&reg_id=0.

[14] Nous parlons de saturation du registre empirique lorsque le maître ou les élèves introduisent de nouvelles observations, expériences ou documents relatifs à des observations ou expériences. Lorsque ce sont des documents sur des modèles (documentaires par exemple) qui sont introduits, c'est le registre des modèles qui est saturé.

> adaptation (au moins dans ses premières phases), le second fonctionne par pratique théorique, c'est-à-dire par construction de solutions possibles et examen critique de ces solutions.

Ainsi, le simple recours impensé au modèle de la proportionnalité comme technique permettant de résoudre le problème du géant empêche toute validation du processus de modélisation et donc de la solution produite. La part du discours technologique des praxéologies de construction du modèle est en effet essentielle dans le processus de validation du modèle ainsi construit et passe par la mise en œuvre d'une dialectique et des médias. Si les hypothèses qui fondent le modèle ne sont pas explicitement énoncées, interrogées, légitimées, si leur domaine de validité n'est pas exploré, alors l'étape de construction du modèle ne sera que partiellement réalisée. En ce sens, le problème posé est un problème qui appelle une démarche d'investigation, démarche essentielle pour produire les ingrédients qui nourrissent le discours technologique et servent de milieu pour la validation de $R^{\blacktriangledown}$. Mais une telle démarche ne peut être mise en œuvre que si la modélisation du problème est reconnue comme enjeu de la situation d'enseignement.

IV. MODELISATION & DEMARCHE D'INVESTIGATION

L'observation dont nous rendons compte ici a été réalisée dans la classe d'un professeur[15] ayant moins de 5 ans d'ancienneté, initialement formé dans un Institut Universitaire de Formation des Maîtres. Habituellement, il propose[16] « des problèmes figurant dans le manuel de mathématiques (pour comprendre les maths, CM2, éd. Hachette éducation). Ces derniers sont toujours en lien avec la notion (la compétence) abordée durant la séance d'apprentissage ». Aussi, il considère que « cette situation de recherche est inédite » car « les élèves n'ont pas l'habitude d'être face à une telle situation de recherche (résolution du problème en plusieurs étapes, stratégies de résolution variées et non induites par la séance d'apprentissage menée précédemment en classe, importance de confronter son point de vue à celui des camarades,…) (+ justifier) ». Le professeur observé ici attribue par ailleurs deux particularités à ce problème, d'une part que « tous les indices, sur lesquels les élèves devront s'appuyer pour résoudre le problème, se trouvent dans la photo et non pas dans l'énoncé. Il s'agit d'indices implicites » et d'autre part, le fait « qu'il est impossible de trouver une réponse exacte à ce problème ». Mais il manque des mots à ce professeur pour rendre compte de la spécificité du problème et ce qui est derrière l'évocation de la variété des stratégies ou l'existence d'indices implicites, est en réalité le processus de modélisation mathématique et la démarche d'investigation.

L'étude a été organisée au cours d'une seule séance de près de 1h25 min organisée en deux temps de recherche (en binôme puis individuelle) entrecoupés d'une mise en commun et conclue par une correction collective. Évènement inattendu, il pleut ce jour-là et le professeur porte des bottes ! Les conditions d'autarcie dans lesquelles la classe est plongée conduisent alors un élève fin observateur à faire un raisonnement qui, niant la variabilité, fonctionne par rapprochements successifs : il est nécessaire de connaître la hauteur de la botte du géant, le professeur porte des bottes, il est donc nécessaire de connaître la hauteur des bottes du professeur. Raisonnement aussitôt accepté par le professeur, donc la classe. Cependant, le statut de l'information – mesure de la botte du géant *vs* du professeur – n'étant pas interrogé, ce qui devrait être construit comme une hypothèse (« ne connaissant pas la hauteur de la botte du géant, nous faisons l'hypothèse qu'elle est identique à celles du professeur ») devient *ipso facto* un fait : « en sachant qu'une botte mesure 20 cm ». Il apparait alors que l'identification des variables définissant le système se conduit sans expliciter leur statut : faits observés et

[15] Ce professeur est une femme, nous employons néanmoins le masculin pour dépersonnaliser l'observation.
[16] Réponses du professeur observé à un questionnaire écrit avant l'observation.

hypothèses se confondent. Ainsi, la conservation des proportions du corps d'un homme sur la photo avec celles du géant est posée comme un fait par le professeur au point de servir d'argument pour invalider une proposition d'élève[17]. Le principe, non questionné, du recours à l'empirie est d'ailleurs encouragé par le professeur : « vous pouvez utiliser euh…vos jambes ou la hauteur de votre corps pour voir… vous pouvez le faire, vous pouvez mesurer ». Or la morphologie d'un humain est évolutive et ses proportions ne sont pas conservées dans le temps. Cette question n'ayant pas même été évoquée, l'enjeu de la séance sera la détermination du nombre de reports d'une botte dans un corps quelconque. Triomphe de l'empirie et inculture statistique s'incarnent alors dans la conclusion du professeur au moment de la correction : « On ne sait pas si les bottes du géant, ils ont… c'est la même proportion que les miennes sur moi, mais c'est à peu près 7 … Mais on peut les mettre 10 fois, c'est juste aussi, vu qu'on ne sait pas exactement quelle est la taille de ses bottes ».

Le professeur n'ayant pas identifié la modélisation comme un enjeu d'enseignement, l'étude du problème n'est qu'un prétexte à l'application de la proportionnalité. L'étude réalisée passe alors directement de la définition du système au travail dans un modèle préconstruit. Un modèle est utilisé et fonctionne sans que sa légitimité ou son domaine de validité ne soit discuté. L'observation montre que le professeur a enseigné une réponse comme application du modèle de proportionnalité sans engager les élèves à « penser » le problème – ce que Orange (2005) appelle *la problématisation* – comme un problème de modélisation.

Pour produire une réponse la classe a bien eu une activité de modélisation, même si la part de construction du modèle s'est réduite à l'évocation du modèle de la proportionnalité. Cependant, faute d'avoir posé des mots sur ce qui était fait, inscrivant la démarche de résolution dans une perspective élargie, les élèves n'ont pas rencontré leur ignorance par rapport à la construction du modèle mais seulement par rapport à la production des données. L'absence de mise en œuvre d'une dialectique des médias et des milieux, et conséquemment, d'un discours technologique relatif au processus de modélisation était inéluctable dès lors que le professeur n'avait pas identifié la modélisation comme enjeu de la situation didactique. Ceci nous conduit à qualifier les praxéologies de modélisation installées par le professeur de *praxéologies muettes*. En référence à Assude, Mercier et Sensevy (2007) nous appelons praxéologies muettes[18] les praxéologies qui ne se donnent à voir qu'au travers de leur composante praxis. Or, au cours de notre observation, seule la technique du processus de modélisation mise en œuvre dans un rapport d'action est visible, le discours qui rend compte et légitime ce processus est inexistant.

C'est ainsi qu'aucune démarche d'investigation n'a été mobilisée, ni même encouragée, car au-delà de l'absence de dialectique des médias et des milieux, les conditions topogénétique, mésogénétique et chronogénétique ne sont évidemment pas remplies. Enfermés dans l'univers clos de la classe, les élèves sont contraints à une production de savoirs endogènes dans le temps limité d'une (longue) séance d'enseignement sous la direction rondement menée de leur professeur. L'existence d'une praxéologie muette de modélisation apparait alors comme révélatrice d'un besoin d'infrastructures didactiques et mathématiques.

[17] Une élève proposait une hauteur de 3 m 60 pour le géant alors que celle de sa botte avait été validée à 2 m par la classe.

[18] Nous utilisons le qualificatif « muet » car le fait que seule la technique soit perceptible n'est pas antinomique avec l'existence d'un logos mais qui serait alors tu.

V. CONCLUSION

Dans ce texte, nous avons montré comment la démarche d'investigation pouvait se modéliser par le schéma herbartien qui décrit la pédagogie de l'enquête propre aux parcours d'étude et de recherche. Ce modèle permet d'envisager les conditions sur le milieu relatives à la topogenèse, mésogenèse et chronogenèse et le recours à la dialectique des médias et des milieux comme conditions du recours *effectif* à une démarche d'investigation. Nous avons par ailleurs illustré comment la non reconnaissance des besoins praxéologiques de modélisation pour résoudre un problème empêche une telle démarche. La mise en œuvre de praxéologie muette apparait alors comme un indice d'un manque d'infrastructures didactique et mathématiques qui rendent viables la modélisation. Nous faisons l'hypothèse que ce manque d'infrastructures empêche la mise en œuvre d'une démarche d'investigation, au sens où nous l'avons définie dans ce texte.

REFERENCES

Blanchard J.-M., Denis J. (Eds.) (2002) *Enseigner les sciences à l'école. Outil pour la mise en œuvre des programmes 2002. Cycle 3.* Paris : CNDP. http://www2.cndp.fr/archivage/valid/38797/38797-7342-7241.pdf.

Brousseau G. (1998) *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La pensée Sauvage.

Brousseau G. (2010) *Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques* (1998).
http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/09/Glossaire_V5.pdf.

Chevallard Y (1989) Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x*, 19, 43-72.

Chevallard Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221—266.

Chevallard Y. (2002) Les TPE comme problème didactique. In Assude,T., Grugeon Allys B. (Eds.) (pp. 177-188) *Actes du Séminaire national de didactique des mathématiques 2001*. Paris : IREM de Paris 7 et ARDM.

Chevallard Y. (2008) Un concept en émergence : la dialectique des médias et des milieux. In Gueudet G., Matheron Y. (Eds.) (pp. 344-366) *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2007*. Paris : IREM Paris 7 et ARDM.

Chevallard Y. (2007) Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. In Ruiz-Higueras L., Estepa A., Garcia F.J. (Eds.) (pp. 705-746) *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la Teoría Anthropológica de lo Didáctico (TAD)*. Jaen : Universidad de Jaen.

Chevallard Y. (2011) La notion d'ingénierie didactique, un concept à réfonder. Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD. In Margolinas C., Abboud-Blanchard M., Bueno-Ravel L., Douek N., Fluckiger A., Gibel P., Vandebrouck F., Wozniak F. (Eds.) (pp.81-108) *En amont et en aval des ingénieries didactiques.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Dorier J.-L. (2010) La démarche d'investigation en classe de mathématique – une première approche prospective. *Actes du congrès de l'Actualité de la recherche en éducation et en formation (AREF). Université de Genève, septembre 2010.* https://plone2.unige.ch/aref2010.

Dorier J.-L. (2012). La démarche d'investigation en classe de mathématiques : quel renouveau pour le questionnement didactique ? In Calmettes B. (Ed.) (pp. 35-56)

Démarches d'investigation. Références, représentations, pratiques et formation. Paris : L'Harmattan.

Gaffiot F. (2001) *Dictionnaire Latin Français*. Paris : Hachette.

Ministère de l'Éducation Nationale (2008) *Horaires et programmes d'enseignement de l'école primaire.* BOEN n°3, 19 juin 2008, n° spécial.

Ministère de l'Éducation Nationale (2007). *Programmes de l'enseignement des mathématiques, des SVT, de physique-chimie du collège.* BOEN n°6, 19 avril 2007, hors série.

Orange C. (2005) Problématisation et conceptualisation en sciences et dans les apprentissages scientifiques. *Les Sciences de l'éducation, Pour l'ère nouvelle* 38. 3, 69-93.

Orange C. (2007) Quel Milieu pour l'apprentissage par problématisation en sciences de la vie et de la terre ? *Éducation & didactique* vol 1 - n°2, 37-56.

Rocard M. (prés.), Csermely P., Jorde D., Lenzen D, Walberf-Henrikson H., HemmoV. (2007) *L'enseignement scientifique aujourd'hui : Une pédagogie renouvelée pour l'avenir de l'Europe*. Commissions Européennes : Belgique.

http://ec.europa.eu/research/science-society/document_library/pdf_06/report-rocard-on-science-education_fr.pdf.

Wozniak F. (2012) Des professeurs des écoles face à un problème de modélisation : une question d'équipement praxéologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 32(1), 7-55.

LA PAROLE AUX JEUNES ENSEIGNANTS FRANCOPHONES FORMATION ET ENTRÉE DANS LE MÉTIER

Compte-rendu du projet spécial n°1 – EMF2012

Sylvie COPPE[*] – Jean-Luc DORIER[**]

Ce projet spécial trouve son origine dans le premier colloque de Grenoble en 2000, où une délégation de jeunes enseignants québécois, outre sa participation active au colloque, était venue suivre diverses activités avant celui-ci.

Si à EMF2003, rien n'a pu officiellement être mis en place, à EMF2006, à Sherbrooke, une quinzaine de jeunes enseignants stagiaires français (en deuxième année d'IUFM[1]) ont rencontré un groupe similaire de jeunes enseignants québécois. Tous ont suivi une formation de deux jours à l'UQAM[2] à Montréal puis à l'Université de Sherbrooke, ils ont aussi rencontré des enseignants locaux. Durant le colloque, français et québécois ont présenté leurs travaux de fin d'études pendant la plage des projets spéciaux et ont participé aux travaux des groupes. Cette expérience a été enrichissante et a engendré une certaine dynamique pendant et après le colloque. Aussi l'expérience a été renouvelée à Dakar en 2009 où, cette fois-ci, ce sont de jeunes enseignants de plusieurs pays (Tunisie, Québec, France et Suisse) qui ont rejoint leurs collègues Sénégalais quelques jours avant le colloque pour échanger sur leur vécu de formation et d'entrée dans le métier. Durant le colloque, ils ont disposé de temps pour présenter leurs travaux de fin d'études dans le cadre d'un des trois projets spéciaux et ils ont suivi les travaux des autres groupes.

Pour EMF2012, nous avons renouvelé et amplifié l'expérience avec l'objectif de toucher le plus grand nombre de pays de la francophonie et de s'ouvrir aux enseignants du primaire. Nous avons ainsi réuni 26 jeunes enseignants venant d'Algérie, de Belgique, du Burkina Faso, de France, du Mali, du Maroc, du Québec, du Sénégal, et de 4 cantons de Suisse romande. Ces jeunes professeurs ont suivi un pré-colloque dans un lieu convivial de la campagne fribourgeoise, du lundi 30 janvier au jeudi 2 février 2012, grâce à l'organisation de Jacques-André Calame de la HEP[3] Bejune[4] et de Nicolas Dreyer de la HEP Fribourg. Outre les deux auteurs de ce compte-rendu et les deux organisateurs locaux, Jérôme Proulx du Québec et El Hadji Malick Dia du Sénégal ont aidé à l'encadrement du projet. Par pays, les jeunes enseignants ont animé une séance de une à deux heures autour d'un thème en lien avec l'enseignement des mathématiques dans le contexte de leur pays (présentation des systèmes scolaires ou de formation, de films de classes, etc.).

Une journée suisse comportant deux temps a été organisée : le premier animé par Hedwige Aymon (HEP Valais), Christian Bazzoni (HEP Bejune), Stéphane Clivaz (HEP Vaud), Nicolas Dreyer, Jacques-André Calame et Jean-Luc Dorier a permis de présenter certains aspects de l'enseignement des mathématiques en Suisse romande : présentation de la diversité des systèmes éducatifs et de formation des enseignants au sein de la Romandie, ateliers sur

[*] IUFM – Université Lyon 1 – France – sylvie.coppe@univ-lyon2.fr
[**] Université de Genève – Suisse – jean-luc.dorier@unige.ch

[1] Institut Universitaire de Formation des Maîtres, lieu où sont formés tous les enseignants en France.
[2] Université du Québec à Montréal.
[3] Haute Ecole Pédagogique, lieu de formation des enseignants du primaire et du secondaire dans la plupart des cantons de Suisse romande (sauf Genève).
[4] Contraction de Bern, Jura, Neuchâtel trois cantons suisses totalement ou en partie francophones, pour lesquels la formation des enseignants a été regroupée dans une même HEP sur plusieurs sites.

© Coppé S., Dorier J.-L. (2012) La parole aux jeunes enseignants francophones – formation et entrée dans le métier – *Compte-rendu du projet spécial n°1*. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21[e] siècle – Actes du colloque EMF2012* (SPE1, pp. 1476–1478). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

des activités typiques des moyens d'enseignement romands, présentation du nouveau Plan d'Etudes Romand. Puis, l'après midi a été consacrée à des visites de classes à Fribourg et à des échanges avec les enseignants. Ainsi de façon formelle mais aussi plus informelle, ces jeunes ont eu l'occasion d'échanger sur leur formation et leur entrée dans le métier, sur les différentes cultures mais aussi de profiter des charmes locaux, des spécialités gastronomiques et culturelles locales et de l'accueil amical des autochtones !

Au-delà de l'expérience personnelle que représente une telle participation, ce projet vise à donner aux colloques EMF une bouffée d'air neuf et à capitaliser sur l'avenir quant à l'investissement de ces jeunes pour essaimer autour d'eux l'attrait pour la collaboration au sein de la francophonie et pour développer une meilleure connaissance des différents systèmes éducatifs et des questions d'enseignement. On peut penser que grâce aux moyens de communication, les contacts seront maintenus notamment en leur permettant d'échanger des documents d'enseignement.

Comme pour les deux précédentes rencontres EMF, durant le colloque, dans le temps imparti aux projets spéciaux, ces jeunes enseignants ont également présenté leurs travaux de fin d'études. Nous avons eu ainsi 21 exposés sur des sujets variés tant par les niveaux scolaires en jeu que par les types de problématiques et les degrés de préparation des mémoires de fin d'études dans les différents pays. Dans certains cas, en l'absence de tels travaux dans le cursus de formation local, les participants ont même été amenés à faire un travail ad hoc en préparation du colloque.

Les 21 textes que regroupent ces actes sont donc très divers. Si certains trahissent une belle naïveté que la jeunesse des participants et le peu d'expérience professionnelle permet, d'autres sont d'un bon niveau scientifique et présentent des études bien documentées avec des références théoriques en didactique des mathématiques et en lien avec des expérimentations de terrain. Il n'en reste pas moins que tous ces textes attestent du dynamisme et du professionnalisme de ces jeunes qui se sont investis avec un grand enthousiasme dans ce projet.

Pour les présentations pendant le colloque, nous avons dû organiser deux sessions en parallèle. Nous avons découpé celles-ci selon 6 thématiques : enseignement primaire (Denervaud-Ruchet S., Sinotte S., Passaplan L. et Toninato S., Schwab C.) ; enseignement supérieur (Bouzina E., Diallo M., Balhan K., Bezia A., Gueye K., Ait Benayad M., Renkens C.) ; utilisation des calculatrices ou de l'ordinateur (Maadan H., Dissa S., Goupil J.-F.) ; histoire des mathématiques et enseignement (Diop P. M., Perrault M.) ; enseignement et apprentissage de la géométrie (Serment J., Chanudet M.) ; enseignement et apprentissage de l'algèbre (Bartholdi N., Marget B. et Rampp A., Goislard A.).

CONTRIBUTIONS AU SPE1

AIT BENAYAD M. – Analyse des besoins en formation des enseignants de mathématiques du secondaire.

BALHAN K. – Un milieu cinématique pour l'élaboration d'une praxéologie « modélisation » du théorème fondamental du calcul différentiel et intégral.

BARTHOLDI N. – Enseignement des fonctions et équations du second degré dans une école secondaire professionnelle.

BEZIA A. – Structures algébriques en première année universitaire.

BOUZINA E. – Difficultés des étudiants de première année universitaire avec la notion de limite.

CHANUDET M. – Les grilles de critères de réussite ou comment développer les compétences disciplinaires chez les élèves.

DENERVAUD RUCHET S. – Construction du nombre et activités musicales.

DIALLO M. – Une démarche expérimentale en mathématiques : puissance d'un point par rapport à un cercle.

DIOP P. M. – Enseigner les mathématiques en utilisant leur histoire : le cas de la dérivée.

DISSA S. – Une séquence d'enseignement/apprentissage dans l'environnement Geogebra.

GOISLARD A. – Introduction des opérations sur les nombres relatifs en classe de cinquième : une nouvelle signification pour les signes « + » et « - ».

GOUPIL J.-F. – L'utilisation de la calculatrice dans l'apprentissage des mathématiques au secondaire.

GUEYE K. – Difficultés de l'enseignement et de l'apprentissage des probabilités dans le secondaire.

MAADAN H. – L'utilisation des logiciels informatiques dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques.

MARGET B., RAMPP A. – Les vérifications dans le calcul littéral en classes de quatrième et de seconde.

PASSAPLAN L., TONINATO S. – L'escalier – une activité sur les multiples et diviseurs en fin de primaire en Suisse romande.

PERRAULT M. – Ancrer l'enseignement des mathématiques dans une perspective historique.

RENKENS C. – Langages mathématique et physique et différences.

SCHWAB C. – Résolution de problèmes mathématiques et registres de langage.

SERMENT J. – Les constructions géométriques dans l'espace pour un apprentissage de la géométrie.

SINOTTE S. – Conception et mise à l'épreuve d'un enseignement intégrant la calculatrice dans une situation visant une meilleure compréhension des propriétés des opérations chez les élèves du troisième cycle du primaire.

ANALYSE DES BESOINS EN FORMATION DES ENSEIGNANTS DE MATHEMATIQUES DU SECONDAIRE

Marouane AIT BENAYAD*

Résumé – Ce travail est effectué dans le cadre d'un mémoire de fin d'étude de formation pédagogique à l'Ecole Normale Supérieure de Rabat (ENS) qui est une école de formation initiale pour enseignants du secondaire. On peut constater que certains professeurs des mathématiques, sortis de l'ENS, rencontrent des difficultés dans l'exercice de leur profession. Ceci nous amène à poser les questions suivantes : Est ce que la formation proposée à l'ENS est satisfaisante pour les enseignants des mathématiques du secondaire ? De quelle manière pourrait-on l'améliorer ? Notre travail a pour but de voir si la formation reçue correspond à ce qui attendu du futur enseignant au lycée mais aussi à l'identification des besoins des enseignants en exercice en formation continue.

Mots clefs : besoin, formation, initiale, continue, enseignants des mathématiques

Abstract: This work is done as part of a dissertation study of teacher training at the Ecole Normale Supérieure of Rabat (ENS) is a school of training for secondary teachers. We can see that some teachers of mathematics, out of the ENS, encounter difficulties in exercising their profession. This leads us to ask the following questions: Is the training offered at the ENS is satisfactory for teachers of secondary mathematics? How could it be improved? Our job is to see if the training is expected that the future teacher in high school but also in identifying the needs of practicing teachers in continuing education.

Key words: needs, training, continuing education, teachers of mathematics

La Charte Nationale d'Education et de Formation considère la valorisation des ressources humaines dans le secteur de l'éducation comme l'un des principaux piliers de la réforme du système éducatif. Il s'agit des enseignants, des apprenants et des autres acteurs pédagogiques et administratifs. Concernant les enseignants, la Charte fournit en quelque sorte un cahier de charges contenant les principales exigences nécessaires à l'accomplissement des missions d'enseignement et à l'amélioration de leur qualité concernant notamment, les droits et devoirs, les conditions de travail et les relations avec l'environnement de l'école.

Dans la première de ce travail partie nous avons essayé de donner un contexte général de notre étude et au problème auquel s'intéresse le sujet en question, la deuxième partie concerne la méthodologie de recherche choisie pour la cueillette de données, dans la troisième partie nous avons élaboré les analyses des résultats obtenus et leurs interprétations, plus conclusion générale qui résume les résultats obtenus.

I. PRESENTATION DE LA FORMATION DES PROFESSEURS AU MAROC

L'enseignant est l'acteur central du système éducatif, mais le métier est de plus en plus complexe. Cette complexité trouve son origine dans le rapport que l'enseignant entretient avec ses activités professionnelles, d'une part ; et d'autre part, dans ses interactions avec les divers éléments de son univers professionnel (élèves, collègues, autorités scolaires, partenaires sociaux, famille et société de façon générale). Exercer le métier d'un enseignant, n'est pas facile, cela demande un arsenal de connaissances autant théoriques que pratiques. Pour cela, il faut une formation pertinente et adéquate.

* Ecole Normale Supérieure TAKKADDOUM Rabat – Maroc – maroine_01@hotmail.com

© Ait Benayad M. (2012) Analyse des besoins en formation des enseignants de mathématiques du secondaire. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (SPE1, pp. 1479–1487). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

1. Métier d'enseignant

Enseigner, c'est faire apprendre par la communication et la mise en situation. L'enseignant est un professionnel de l'apprentissage, de la gestion des conditions d'apprentissage et de la régulation interactive en classe.

Les mathématiques présentent la particularité d'être enseignées à tous les niveaux scolaires ; en fait la mathématique est la reine mais en même temps la servante de toutes les disciplines. Pour cette raison, l'enseignement des mathématiques est toujours sujet de réajustements en vue de chercher une formation adéquate.

2. Missions et rôle de l'enseignant

Les missions de l'enseignant consistent à assurer les conditions de l'appropriation par un maximum d'élèves, de savoirs, de savoir-faire, de méthodes d'apprentissage, des valeurs nationales et universelles et des aptitudes personnelles évolutives. Le travail de l'enseignant ne se limite pas à la classe. L'enseignant, en effet, est aussi un acteur focal du système éducatif dans son ensemble et son engagement et son implication, aussi bien à l'intérieur qu'à l'extérieur de l'école, sont des conditions essentielles pour réussir la réforme du système éducatif. La qualité de l'accomplissement de ces missions dépend d'exigences relatives à l'engagement initial dans le métier, à la formation initiale, aux conditions d'exercice du métier, à l'évaluation et à la motivation des enseignants.

3. La formation initiale dans l'école normale supérieure (ENS)

Après le concours d'entrée à l'Ecole Normale Supérieure (ENS), ouvert aux licenciés, les élèves professeurs qui ont réussi le concours, doivent passer une année de formation qui a pour objectif de donner une formation pédagogique de base à des personnes déjà engagées dans le domaine de développement et de l'éducation. Cette formation doit permettre de mieux appréhender les relations interactives entre la Formation et le Développement. Cette formation pédagogique est constituée d'une partie théorique, une partie pratique et d'un mémoire de fin de formation.

La partie théorique consiste à donner aux élèves professeurs des connaissances en psychopédagogie sur deux phases importantes de l'âge de l'individu : l'enfance et l'adolescence. De plus, l'élève professeur acquiert des grandes notions sur les modèles d'enseignement ainsi que sur les méthodes d'apprentissage et les techniques élaborées par les nouvelles approches pédagogiques.

Les élèves professeurs suivent une formation en didactique des mathématiques qui leur permet d'apprendre à planifier et mener à bien son enseignement (préciser les objectifs des leçons, choisir la méthode d'enseignement adéquate, évaluer l'apprentissage des élèves…) et apprendre à analyser le programme des mathématiques de secondaire, notamment en ce qui a un rapport avec le continu et leur évaluation.

Enfin l'élève professeur suit une formation complémentaire, sur des notions dont il a besoin pour enseigner au secondaire (la géométrie dans l'espace, l'arithmétique dans Z, le dénombrement, la probabilité). Le programme de cette partie de formation contient des champs mathématiques que le futur enseignant a déjà étudiés, lors de ses études supérieures, et d'autres qu'il n'a pas étudiés : les probabilités, la géométrie, l'algèbre et l'analyse numérique.

Parallèlement, l'élève-professeur suit des cours de Méthodologie de la recherche qui ont pour but de fournir un certain nombre de connaissances concernant les démarches et les méthodes qu'utilisent les chercheurs en éducation, de fournir à chaque élève professeur quelques éléments indispensables pour pouvoir accéder à la littérature spécialisée (lecture d'articles, d'ouvrages, de rapports de recherche, etc.) et pour réaliser de manière tant soit peu autonome leur mémoire de fin de formation.

Enfin, divers cours plus généraux :

- un cours de législation scolaire sur les droits et les devoirs dans l’institution d’enseignement ;
- un cours d’audiovisuel qui vise à l’initier aux matériels, techniques et méthodes d'information, de communication ou d'enseignement associant le son et l'image ;
- un cours d’informatique qui a pour objectif de donner à chaque élève-professeur des connaissances sur le traitement de textes et un cours de langues (français et arabe) afin de permettre de développer la communication.

L’élève-professeur doit élaborer un Mémoire de fin de formation : celui-ci est élaboré en groupe de deux élèves professeurs qui sont amenés à réfléchir sur un terme proposé par leur encadrant ayant rapport avec l’éducation des mathématiques ou leur histoire. Dans cette phase l’élève professeur doit appliquer ce qu’il a acquis en méthodologie de recherche.

Pour la partie pratique, l’élève-professeur est amené à faire des observations de classe dans des lycées. Ensuite, avant la prise de responsabilité de la classe au lycée, l’élève professeur fait des séances de micro-enseignement, dans lesquelles, il fait une leçon filmée devant ces collègues, qui est discutée après la rediffusion de la séquence. Enfin le stage pratique, où l’élève professeur prend la responsabilité de la classe dans un lycée, pendant la durée de six semaines orientées par son encadrant et son professeur d’application.

4. Didactique des mathématiques

La didactique des mathématiques est un champ scientifique qui s’est beaucoup développé au cours des dernières années. Les concepts didactiques sont des outils permettant de comprendre les phénomènes d’enseignement et d’apprentissage des mathématiques et d’agir sur eux.

Dans les dictionnaires et les encyclopédies, la didactique désigne « l’art d’enseigner », « les travaux sur l’enseignement » et par extension tout ce qui tente de contribuer à l’amélioration volontaire de l’enseignement. Bouvier (1986) définit la didactique comme suit : « la didactique est la théorie des situations didactiques ». Une situation didactique consiste en l’interaction de trois éléments principaux : l’élève, l’enseignant et le savoir. Pour la didactique des mathématiques on peut trouver la définition suivante : « la didactique des mathématiques est la science du développement de cours praticable pour l’apprentissage des mathématiques, ceci inclut l’application pratique et l’évolution empirique de ces contenus de ces cours et leurs buts ».

Le schéma de base d'une situation d'enseignement est ce qu'on appelle le triangle didactique. Il vise à mettre en évidence les nécessaires interactions entre trois sous-systèmes didactiques ; le savoir enseigné, le système enseignant et le système élève qu’on peut représenter par ce schéma :

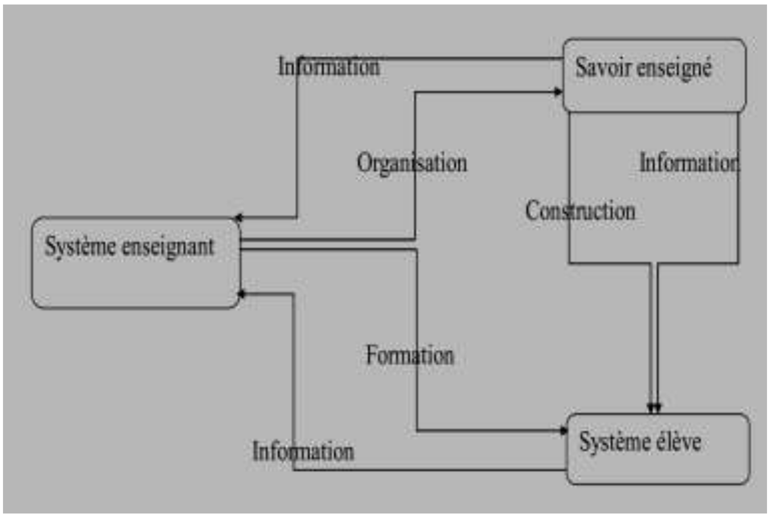


Figure 1 – *Triangle didactique*

II. ANALYSE DES BESOINS ET METHODOLOGIE DE TRAVAIL

On peut distinguer deux types de besoins : acquis ou innés. Les besoins innés sont les besoins qui ont une relation avec la nature de l'organisme et deviennent très importants lorsqu'ils ne sont pas satisfaits. Les besoins acquis sont ceux qui naissent d'interactions entre les êtres humains, comme par exemple : le besoin de lire et écrire,….

L'analyse des besoins consiste en un effort systématique de réflexion, d'observation et de collecte de données (faits, opinions, attitudes) provenant de sources multiples visant à identifier et documenter les écarts (besoins) entre un résultat actuel et un résultat désiré. Un besoin représente l'écart ou la différence entre un résultat désiré et un résultat actuel. Il ne peut se concevoir sans une énonciation du résultat désiré et actuel ;

Essentiellement, l'analyse de besoins permet de décrire et documenter le problème, le besoin, la situation à améliorer, d'établir les liens avec les enjeux de l'organisation, définir les objectifs de formation, les indicateurs de mesure et d'envisager les conditions optimales de transfert en milieu de travail.

1. Méthodologie

Pour atteindre notre objectif et apporter des éléments de réponses à notre questionnement initial à savoir : Est ce que la formation proposée à l'ENS est satisfaisante pour les enseignants des mathématiques du secondaire ? De quelle manière pourrait-on l'améliorer ? Est-ce que la formation proposée à l'ENS satisfait les futurs enseignants et les enseignants en exercice ? Quels sont les besoins en formation continue des enseignants en exercice, nous avons choisi le questionnaire comme moyen de collecte de données pour plusieurs raisons dont nous explicitons les principales ci dessous.

Le questionnaire est en effet un moyen de recueillir des données. D'une part il peut être adressé à un nombre important de professeurs ; ces derniers auront, pour répondre aux questions, soit à faire des choix parmi des propositions de réponses, soit à donner leur propre opinion. Dans les deux types de réponses, le chercheur pourra valider ses hypothèses et dégager la réaction des enquêtés vis-à-vis de certains sujets de sa recherche. D'autre part cette technique ne prend pas beaucoup de temps. Donc le questionnaire permet de trouver le maximum d'informations en un temps minime.

Nous avons élaboré deux questionnaires (voir annexe 1) dont un vise essentiellement les professeurs de mathématiques en exercice dans des lycées à Rabat, et l'autre les élèves professeurs section mathématiques de l'ENS Takaddoum, Rabat qui est une école de formation initiale pour enseignants du secondaire.

Les deux questionnaires comportent une lettre indiquant aux participants le but de notre recherche, une partie porte sur des détails personnels, puis une autre sur la formation initiale, et enfin une dernière partie s'intéresse à la formation continue.

III. PRESENTATION ET ANALYSE DES DONNEES – CONCLUSION

A partir de l'analyse des données recueillies sur la formation initiale à l'ENS on peut faire les remarques suivantes. La majorité des futurs enseignants et des enseignants en exercice pensent que la formation à l'ENS est intéressante et obligatoire pour la formation de bons enseignants mais qu'elle reste loin des attentes et des besoins des futurs professeurs. De plus elle est jugée insuffisante car très théorique et incomplète car elle ne permet aux élèves-professeurs de devenir des enseignants compétents.

Pour cela, ils demandent une formation intégrant l'acquisition des méthodes pédagogiques et didactiques, des connaissances en mathématiques, en pédagogie, en psychologie de l'adolescent, en didactique leur permettant de savoir gérer une classe, savoir gérer les élèves et savoir communiquer avec eux.

Il ressort clairement des données recueillies que le stage requiert une très grande importance et que sa durée devrait être prolongée, proposition faite aussi bien par les enseignants de mathématiques en exercice que par les futurs professeurs. Ils proposent en général une durée de quatre mois (la durée actuelle est de 6 semaines de prise en charge totale de la classe) pour que le futur enseignant puisse acquérir plus d'expérience et de savoir faire avec l'assistance de son professeur d'application et de l'encadrant de l'ENS.

En ce qui concerne la formation continue, la majorité des enseignants déclare qu'ils ont bénéficié d'une formation continue de moins de deux semaines. Parmi les matières qui ont fait l'objet de la formation, on trouve principalement l'informatique et les applications pédagogiques de l'ordinateur. 78,6% des enseignants ayant bénéficie d'une telle formation-ont déclaré qu'ils étaient influencés positivement par cette formation.

Par ailleurs, les enseignants en exercice interrogés pensent que la programmation d'une session de formation continue est nécessaire pour le maintien des connaissances professionnelles, certains ont proposé la durée d'un mois comme durée idéale d'une telle formation, celle-ci devrait s'articuler autour des points suivants :

- la remise à niveau des connaissances pédagogiques et fondamentales.
- l'intégration des nouvelles technologies de l'information et de la communication pour servir l'enseignement des mathématiques.

Ici on doit signaler que de nombreuses recherches montrent la nécessité de la formation continue des enseignants à la fois pour que ces derniers puissent prendre connaissance des travaux universitaires susceptibles d'aider l'enseignant dans leur quotidien professionnel, mais aussi pour échanger entre collègues, confronter les expériences pédagogiques de chacun.

REFERENCES

Baina A. (1981) *Le Système De l'enseignement au Maroc* (Tome 2). Rabat : Les éditions Maghrébines.

Benchekron M. (1992) *Introduction et Evolution de L'enseignement Moderne au Maroc*. Rabat : Imprimerie Arrissala.

Bouvier A. (1986) *Didactique des Mathématiques : Le dire et le faire*. Paris : CEDIC.

Develay M. (1995) *Savoirs scolaires et didactiques.* Paris : ESF éditeur.

El Mesbahi M., Louahidi A. (1997) *Analyse des besoins en formation des enseignants de Mathématiques Du secondaire*. Mémoire de fin de formation – ENS de Rabat.

Jebbah H. (2005) *Analyse des besoins en formation pédagogique et didactique des enseignants universitaire Marocains a l'heure de la mise en œuvre de la nouvelle reforme de l'enseignement supérieur*. Mémoire pour l'obtention de DESA en Science de l'éducation, Faculté des sciences de l'éducation – Rabat.

ANNEXE – QUESTIONNAIRE

Cher collègue

Ce questionnaire entre dans le cadre de la préparation d'un mémoire de fin de formation à l'école Normale Supérieure (E.N.S) Takaddoum Rabat sur le thème : « Analyse des besoins des enseignants en formation ».

Ce travail consiste à élaborer un instrument d'analyse des besoins chez les enseignants de mathématiques au secondaire.

Nous sollicitons votre collaboration pour faire cette recherche. Il est simple à remplir. Nous assurons l'anonymat et nous espérons que vos réponses aident à une amélioration de la formation pour les enseignants de cette discipline.

Nous vous remercions de votre collaboration.

Merci beaucoup.

Questionnaire pour les enseignants en exercice

Q.1- Sexe : Masculin ☐ Féminin ☐

Q.2- Age………………….

Q.3- Vous avez commencé à enseigner depuis……………….

Q.4- Diplôme obtenu :

- Licence en maths appliquées ☐
- Licence en maths pures ☐
- Autre ☐

Veuillez préciser……………………………………………………

Q.5- Avez-vous reçu une formation pédagogique ?

Oui ☐ Non ☐

Si oui dans quel établissement ?

Veuillez préciser…………………………………………….…

Q.6- Que pensez-vous de la formation initiale dans l'école normale supérieure (ENS) ?

Q.7- Pensez-vous que la psychopédagogie est obligatoire pour la formation d'un enseignant ?

Oui ☐ Non ☐

Si oui, La psychopédagogie permet au futur enseignant de :

Apprendre à connaitre le monde scolaire ☐
Connaitre le développement de l'enfant et de l'adolescent ☐
Connaitre les interactions des élèves dans la classe ☐
Savoir analyser ces interactions ☐
Apprendre les techniques d'animation du groupe classe ☐
Autres, ☐

Préciser :……………………………………………………………………………..

Q.8- Pensez-vous que la didactique des mathématiques est obligatoire pour la formation d'un enseignant ?

Oui ☐ Non ☐

Si oui ; dans le cours de didactique, le futur enseignant a besoin de :

Apprendre à planifier son enseignement : ☐
Apprendre à analyser les programmes de mathématiques ☐
Connaitre les applications pédagogiques de l'Ordinateur ☐

Quelles autres parties du cours de didactique jugez-vous importantes dans la formation des enseignants ?

Q.9- Pensez-vous que le cours appelé complément de formation est obligatoire pour la formation d'un enseignant ?

Oui ☐ Non ☐

Si oui ; dans ce cours, le futur enseignant a besoins de recevoir des cours :

Dénombrement. ☐
Logique. ☐
Géométrie dans l'espace. ☐
Arithmétique. ☐
Probabilité. ☐
Statistique. ☐

Q.10- Pensez-vous que la durée de stage (six semaines) est suffisante pour les futurs enseignant ?

Oui ☐ Non ☐

Sinon, quelle durée proposez-vous ?

Q.11- Est-ce que vous avez bénéficié d'une formation continue ?

Oui ☐ Non ☐

Si oui,

Combien a duré cette formation ?

Quelles sont les matières qui ont fait l'objet de cette formation continue?

Est-ce qu'elle a été utile ?

Oui ☐ Non ☐

Q.12-Pensez-vous que la formation continue est nécessaire pour les enseignants en exercice ?

Oui ☐ Non ☐

Si oui, sur quelle matière doit insister cette formation continue ?

Quelle est la durée idéale d'une session de formation continue ?

Questionnaire pour les élèves professeurs.

Q.1-Sexe : Masculin ☐ Féminin ☐

Q.2- Age………………….

Q.3- Vous avez commencé à enseigner depuis………………..

Q.4- Diplôme obtenu :

-Licence en maths appliquées ☐

-Licence en maths pures ☐

-Autre ☐

Veuillez préciser……………………………………………………

Q.5- Avez-vous reçu une formation pédagogique ?

Oui ☐ Non ☐

Si oui dans quel établissement ?

Veuillez préciser……………………………………………….…

Q.6- Que pensez-vous de la formation initiale dans l'école normale supérieure (ENS) ?

Q.7- Pensez-vous que la psychopédagogie est obligatoire pour la formation d'un enseignant ?

Oui ☐ Non ☐

Si oui, La psychopédagogie permet au futur enseignant de :

Apprendre à connaitre le monde scolaire ☐

Connaitre le développement de l'enfant et de l'adolescent ☐

Connaitre les interactions des élèves dans la classe ☐

Savoir analyser ces interactions ☐

Apprendre les techniques d'animation du groupe classe ☐

Autres ; ☐

Préciser :

Q.8- Pensez-vous que la didactique des mathématiques est obligatoire pour la formation d'un enseignant ?

Oui ☐ Non ☐

Si oui, dans le cours de didactique, le futur enseignant a besoin de :

Apprendre à planifier son enseignement : ☐

Apprendre à analyser les programmes de mathématiques ☐

Connaitre les applications pédagogiques de l'Ordinateur ☐

Quelles autres parties du cours de didactique jugez-vous importantes dans la formation des enseignants ?

Q.9- Pensez-vous que le cours appelé complément de formation est obligatoire pour la formation d'un enseignant ?

Oui ☐ Non ☐

Si oui, dans ce cours, le futur enseignant a besoins de recevoir des cours :

Dénombrement. ☐

Logique. ☐

Géométrie dans l'espace. ☐

Arithmétique. ☐

Probabilité. ☐

Statistique. ☐

Q.10- Pensez-vous que la durée de stage (six semaines) est suffisante pour les futurs enseignant ?

Oui ☐ Non ☐

Sinon, quelle durée proposez-vous ?

Merci beaucoup de votre collaboration.

UN MILIEU CINÉMATIQUE POUR L'ÉLABORATION D'UNE PRAXÉOLOGIE « MODÉLISATION » DU THÉORÈME FONDAMENTAL DU CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL

Kevin BALHAN*

Résumé – Le présent texte concerne l'apprentissage du théorème fondamental du calcul différentiel et intégral tel qu'étudié chez des élèves en dernière année de l'enseignement secondaire belge. Nous faisons une analyse épistémologique du théorème qui nous a inspiré la conception d'un milieu, composé de quatre situations, mobilisant mouvements rectilignes de vitesses variables ou non, lois de vitesses et de déplacements, aires, volumes et débits. Les stratégies proposées par les élèves pour répondre aux questions posées dans ces situations et les réactions qu'elles ont suscitées feront l'objet d'une analyse ultérieure.

Mots-clefs : modélisation, épistémologie, dévolution, cinématique, intégration

Abstract – The text is related to the calculus's main theorem learning as it is studied by students in the last year of Belgium secondary school. We make an epistemological analysis of the theorem that inspired us the set up of a situation composed of four mathematics statements and for which we need rectilinear movements with or without variable speeds, speeding and moving laws, areas, volumes and flows. The suggested strategies for these statements and the reactions will be analysed later.

Keywords: modeling, epistemology, devolvement, kinematics, integration

I. INTRODUCTION

Lorsqu'à la fin de leurs études, les nouveaux diplômés en sciences mathématiques en Belgique se lancent dans la profession d'enseignant, ils pensent bien souvent que l'essentiel est dans le rétroviseur et que ce qui reste à venir sera un long fleuve tranquille. Ce n'est pas si simple, il faut réapprendre à faire des mathématiques. Tout professeur qui prépare un cours se doit de se poser certaines questions et d'y répondre, à la fois pour lui-même et pour ses élèves. Des questions telles que : Quels sont les problèmes ou les tâches que l'on cherche à résoudre ou à effectuer ? Comment s'y prendre et pourquoi ? Comment le justifier ? Au-delà, des questions purement mathématiques se posent également des questions sur la manière de gérer les séquences d'enseignement. Dois-je me contenter de donner mon cours ex-cathedra ? Auquel cas, je risque de passer à côté du ressenti des élèves et je ne me donne pas l'opportunité de constater ainsi que de traiter certaines lacunes chez eux qui resurgiront plus tard sous forme d'erreurs. Au contraire, devrais-je plutôt leur donner à chacun une voix au risque de m'écarter de la question de départ dans les méandres de leurs réflexions ? N'y a-t-il pas un juste milieu à trouver entre ces deux pratiques ? Après deux ans d'enseignement, qui m'ont prodigué des grandes joies mais aussi certains malaises, le modeste professeur que je suis souhaite approfondir ces réflexions.

Le travail de recherche qui brièvement présenté ici est l'embryon d'une thèse dont l'idée émerge suite à la lecture d'un traité de didactique écrit Schneider (2008) et plus précisément d'une phrase de Brousseau s'y trouvant :

> Il y a un équilibre à trouver entre un enseignement « historique » qui restaurerait une forêt de distinctions et de points de vue périmés dans laquelle se perdrait l'enfant, et un enseignement direct de ce que l'on sait aujourd'hui être une structure unique et générale, sans se soucier d'unifier les conceptions de l'enfant, nécessairement et naturellement différentes. La recherche des conditions d'un tel équilibre est un des grands problèmes qui se pose actuellement à la didactique [...] Il ne s'agit pas de reproduire le processus historique mais de produire des effets similaires par d'autres moyens. (Schneider 2008, p. 78)

* Athénée Royal d'Esneux – Belgique – kevin.balhan@hotmail.com

© Balhan K. (2012) Un milieu cinématique pour l'élaboration d'une praxéologie « modélisation » du théorème fondamental du calcul différentiel et intégral. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (SPE1, pp. 1488–1496). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

Dans cette optique, nous avons imaginé une ingénierie didactique composée de quatre situations fondamentales relatives au théorème fondamental du calcul différentiel et intégral visant à modéliser celui-ci et s'appuyant sur une vision épistémologique des sciences et des mathématiques. Après une investigation plus poussée, nous espérons que notre ingénierie pourra faire partie d'une praxéologie de modélisation du calcul intégral destinée à être utilisée dans les classes par des enseignants.

Dans une première section, nous proposons une vision épistémologique et panoramique des idées qui ont mené au théorème fondamental ainsi qu'une liste des différents problèmes ayant motivé le calcul infinitésimal.

Nous verrons ensuite que le théorème fondamental a été entrevu par plusieurs prédécesseurs de Isaac Newton (1642-1727) et Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), bien que la paternité du théorème leur échoît. Les raisons pour lesquelles leurs prédécesseurs sont passés à côté de celui-ci peut nous renseigner sur la façon d'organiser les situations fondamentales à dévoluer aux élèves ou encore à détecter certains obstacles épistémologiques qu'ils pourraient rencontrer. De plus, bien que Leibniz et Newton soient tous deux arrivés aux mêmes paradigmes, les historiens s'accordent à distinguer leurs démarches. Ces deux visions différentes du théorème pourraient être rencontrées dans les classes chez nos élèves et s'apparentent chacune à des problèmes distincts.

Enfin, nous présenterons à la section 3, les situations imaginées et soumises aux élèves sans discuter des propos recueillis mais simplement en explicitant les raisons de nos choix. Nous ne pourrons ici malheureusement présenter les contributions des élèves faute de place.

II. ANALYSE EPISTEMOLOGIQUE DU CALCUL INFINITESIMAL ET DU THEOREME FONDAMENTAL

1. Raisons d'être du calcul infinitésimal

La paternité du calcul infinitésimal dont fait partie plus localement le théorème fondamental revient à Newton et Leibniz. Cependant, ils n'ont pas été les seuls à s'y intéresser. Nous verrons à la section suivante que d'autres scientifiques tels que Galilée, Torricelli, Fermat ou encore Barrow ont chacun apporté leur contribution. La plupart des historiens, tels que Kline (1972), relèvent quatre principales catégories de problèmes ayant constitués une source de motivation du calcul infinitésimal :

> 1. Déterminer la vitesse et l'accélération d'un mobile quand on connaît l'espace qu'il parcourt. Inversement, trouver la vitesse d'un mobile et la distance parcourue par celui-ci, à partir de son accélération ;
> 2. Trouver la tangente à une courbe en un point. Ce problème, déjà envisagé dès l'Antiquité à propos des coniques, réapparaît au XVII^{e} siècle, à propos d'autres courbes, dans différents contextes: celui de l'optique où l'on cherche, pour appliquer la loi de réfraction d'un rayon lumineux à travers une lentille, l'angle formé par ce rayon et la normale à la courbe qui délimite la lentille ; également dans l'étude des mouvements non rectilignes où la direction du mouvement d'un mobile en chaque point de sa trajectoire est donnée par celle de la tangente à celle-ci ;
> 3. Optimiser: maximiser la portée d'un canon, déterminer les meilleurs proportions d'un tonneau, les distances extrêmes d'une planète au soleil... ;
> 4. Calculer la longueur d'une courbe, les aires délimitées par des courbes, les volumes délimités par des surfaces courbes, déterminer le centre de gravité de solides curvilignes. Ces problèmes, déjà abordés par les Grecs, sont remis au goût du jour, par le biais de l'astronomie où l'on souhaite calculer la distance parcourue par une planète en un temps donné, l'attraction exercée par un corps non ponctuel sur un autre. (Cité par Schneider-Gillot 1988, p. 153)

Raymond (1976) signale encore deux domaines où l'infini semble engagé :

1. L'arithmétique et la combinatoire: De Roberval à Pascal et Leibniz, les savants prennent l'habitude d'utiliser le triangle arithmétique pour opérer des calculs d'aires par sommations d'infinitésimaux ;
2. La géométrie: La liste des domaines où apparaît le thème infinitiste au XVII siècle ne serait pas complète si l'on n'y faisait pas mention des réflexions de Desargues sur l'infini en géométrie projective. (Cité par Schneider-Gillot 1988, p. 154)

Afin de construire notre ingénierie didactique, nous avons cherché des sources d'inspiration dans les quatre premières catégories. Le savoir que l'on vise à enseigner aux élèves étant le théorème fondamental, lui-même faisant partie du cours d'analyse, mais loin de nous l'idée que les deux derniers domaines ne soient pas digne d'intérêt.

2. *Raisons d'être du théorème fondamental*

Bien que la découverte du théorème fondamental de l'Analyse soit généralement attribuée à Newton et Leibniz. Celui-ci avait pourtant été entrevu par certains de leurs prédécesseurs. En effet, il apparaît déjà sous forme embryonnaire, dans les recherches cinématiques de Galilée. Ce dernier avait pris l'habitude de représenter le mouvement rectiligne d'un point animé d'une vitesse variable au moyen du graphe vitesse/temps. Il interprétait l'aire située sous ce graphe comme la distance totale parcourue par le point. Sachant cela, Torricelli réalise qu'un problème de taux de variation est l'inverse d'un calcul d'aire: calculer d'une part la vitesse connaissant l'espace et d'autre part l'espace au départ de la vitesse sont des problèmes en quelques sorte inverses. Or la vitesse est le taux de l'espace parcouru et l'espace est l'aire sous le graphe de la vitesse. Néanmoins, Torricelli n'en a tiré aucune idée sur un moyen de calculer une aire en général.

Fermat a, quant à lui, développé une technique consistant à rectifier les courbes en jouant conjointement sur le tableau des quadratures et sur celui des tangentes. Voici comment Boyer (1949) décrit sa procédure.

Prenons un point P quelconque sur une parabole semi-cubique ($y=kx^{3/2}$) d'abscisse $OQ=a$ et d'ordonnée $PQ=b$. Fermat détermine tout d'abord la sous-tangente: $TQ=2a/3$. Si l'on élève une ordonnée $P'Q'$ jusqu'à la tangente, à une distance $QQ'=E$ de l'ordonnée PQ, la longueur du segment PP' s'exprime, en fonction de a et de E, comme

$$PP' = E(9k^2\frac{a}{4}+1)^{\frac{1}{2}}$$

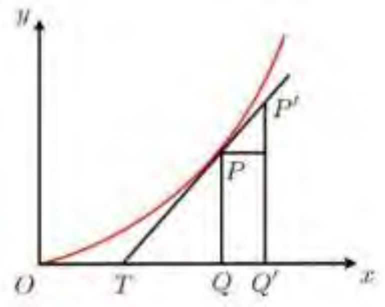


Figure 1 *– Représentation de la rectification des courbes chez Fermat*

Mais, si l'on prend des valeurs de E assez petites, le point P' peut être considéré comme appartenant autant à la courbe qu'à la tangente: la longueur de la courbe sera donc donnée par une somme de segments tels que PP'. Par ailleurs, la somme de ces segments peut être regardée comme l'aire sous la courbe

$$y^2 = 9k^2\frac{x}{4}+1$$

L'emploi des tangentes montre donc que la quadrature de cette dernière fournit la rectification de la première. (Cité par Schneider-Gillot 1988, p. 189)

> Fermat perçoit la liaison entre les deux questions de la quadrature et de la tangence, mais sans la thématiser pour elle-même ni la traiter sur le seul plan algébrique" (Raymond cité par Schneider-Gillot 1988, p. 190)

Barrow, quant à lui, obtient un résultat géométrique qui contient le germe du théorème fondamental. Il s'énonce comme suit: soit $y=f(x)$ une fonction croissante et positive et $z=A(x)$ l'aire sous $y=f(x)$ entre les bornes 0 et x. Soit encore les points $D(x_0, 0)$;E$(x_0,f(x_0))$;

$F(x_0, A(x_0))$ et T le point de O_x tel que $DT=DF/DE=A(x_0)/f(x_0)$.

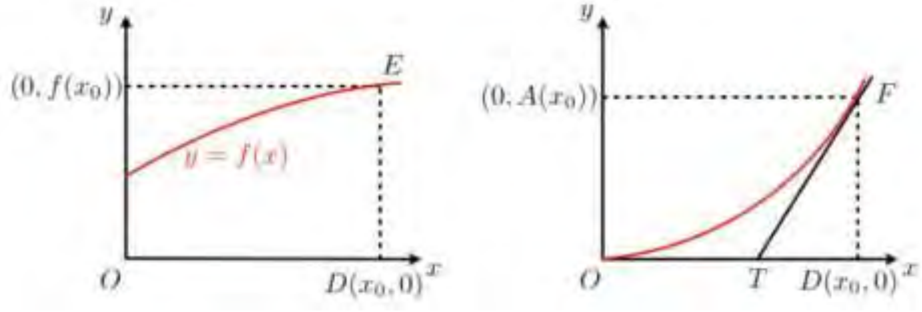


Figure 2 *– Germe du théorème fondamental*

Barrow affirme et démontre que la droite *TF* rencontre la courbe $z=A(x)$ au seul point *F*. Ce résultat signifie que la pente $A'(x_0)$ de la tangente *TF* égale $f(x_0)$. Barrow considère la tangente comme une droite qui touche la courbe en seul point, et non comme une droite dont la pente est donnée par la limite d'un taux de variation.

> Torricelli, Fermat et Barrow sont passés bien près du théorème fondamental de l'analyse. Mais ils n'ont pas su en dégager le sens profond. […] Tous trois n'entrevoient dans leurs découvertes respectives qu'un fait de nature tantôt cinématique, tantôt géométrique et non des exemples de ce qui pourrait devenir un nouvel algorithme de calcul. […] En ce sens, Newton et Leibniz sont bien les fondateurs du calcul infinitésimal. […] Il a fallu attendre Newton et Leibniz pour que soit mis en évidence le lien de réciprocité des processus d'intégration et de dérivation. (Schneider-Gillot 1988, p. 190)

Percevoir intuitivement une parenté entre les différents problèmes mobilisant le processus de différentiation est une chose, mais voir dans cette parenté la présence d'un calcul nouveau en est une autre.

3. Deux approches distinctes du théorème fondamental du calcul différentiel et intégral

Distinguons deux formulations de ce théorème qui, d'un point de vue épistémologique, sont fort éloignés l'un de l'autre.

Théorème 1 : Si *f* est continue sur [*a,b*], alors elle admet des primitives sur cette intervalle, et, pour toute primitive *F* de *f* sur [*a,b*], on a

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Théorème 2 : Si *f* est de classe C_1, alors

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

Considérons la représentation graphique de la fonction *f* sur laquelle porte l'hypothèse du théorème dans chacun des deux cas.

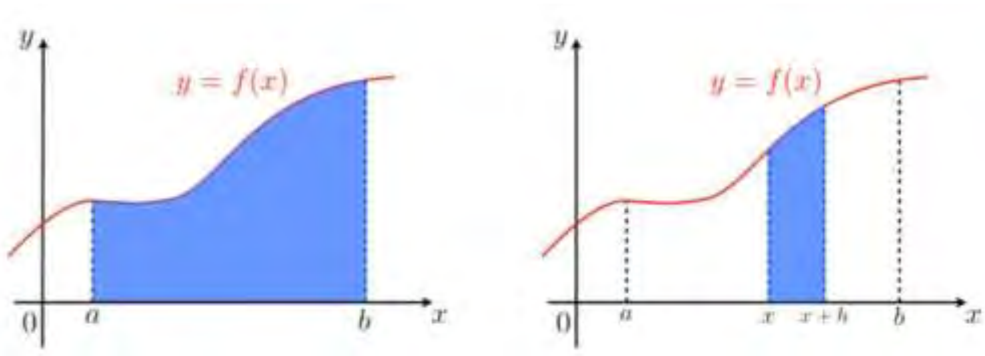


Figure 3 *– Représentation graphique du théorème fondamental chez Newton*

Dans le premier énoncé, l'intégrale en question représente l'aire sous la courbe représentative de *f* entre les bornes *a* et *b*. Pour prouver que le calcul de cette aire s'obtient en soustrayant l'image en *a* d'une primitive *F* de *f* de son image en *b*, on démontre que le taux d'accroissement de la fonction intégrale possède une limite égale à *f(x)* :

$$\lim_{Dx \to 0} \left[\frac{\int_{x}^{x+Dx} f(u)\,du}{Dx} \right] = f(x)$$

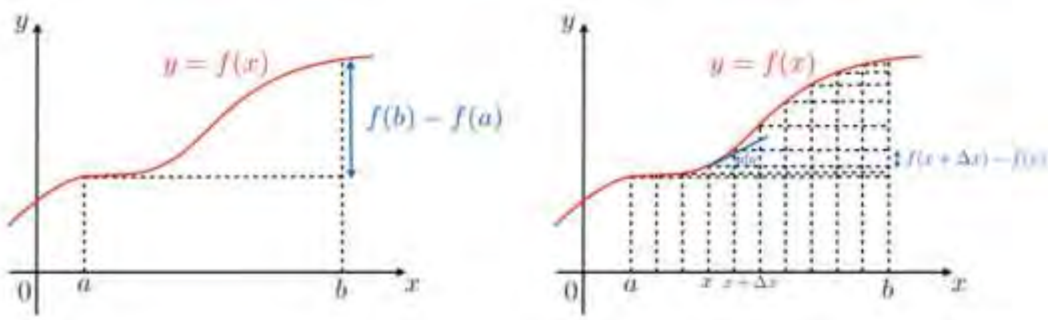


Figure 4 *– Représentation graphique du théorème fondamental chez Leibniz*

Dans le second énoncé, l'intégrale en question mesure la « dénivellation » de la courbe représentative de *f*, entre les bornes *a* et *b*, soit *f(b)-f(a)*. Chaque dénivellation partielle de la fonction, correspond à un « petit incrément » *dx* et est approximée par *dy = f'(x) dx* que nous appelons « différentielle ». La dénivellation totale de la fonction, entre les bornes *a* et *b*, qui est la somme de ses dénivellations partielles, vaut donc la limite, pour *dx* tendant vers 0, de la fonction définie par la somme de ces différentielles depuis *a* jusque *b*. Nous désignerons cette limite par « intégration des différentielles » et nous la noterons

$$\lim_{dx \to 0} \left(\sum dy \right)$$

Dans cette première vision, on dérive la fonction intégrale ; autrement dit, l'opérateur de dérivation succède à l'opérateur d'intégration. L'opérateur de dérivation porte sur la fonction définie par la « somme ». Dans la seconde vision, on intègre des différentielles c'est donc l'opérateur de dérivation qui intervient en premier et celui d'intégration en second. L'opérateur de dérivation intervient sur les termes de la somme. Ce qui fait que l'idée de somme passe à l'arrière-plan dans le premier cas et reste à l'avant-plan dans le second.

III. UNE INGENIERIE DIDACTIQUE QUI S'INSPIRE DE L'HISTOIRE

Nous avons proposé une suite de problèmes à des élèves de dernière année du Secondaire en Belgique (17-18 ans) ayant choisi une option forte en mathématiques (8h par semaine) et en sciences (7h par semaine). On peut donc supposer qu'ils ont acquis les compétences relatives aux concepts de fonction, de limite et de dérivée mobilisés dans le théorème fondamental. Dans un premier temps, le professeur s'abstenait de tout commentaire à propos des problèmes proposés. Il s'est contenté de leur demander de former des groupes de trois ou quatre élèves afin de favoriser les débats et leur a expliqué qu'il n'interviendrait que pour les relancer « sans leur vendre la mèche » au cas où ils seraient bloqués dans leurs démarches. Il demandait également aux élèves de répondre individuellement et par écrit à chacun de ces problèmes.

Nous n'analyserons pas ici, faute de place, les propos et les travaux recueillis chez les élèves interrogés. Nous nous contenterons d'expliquer ce qui a motivé le choix des problèmes que nous leur avons soumis. Voici les quatre questions qui ont été dévolues aux élèves :

1. Le graphe ci-dessous exprime, à chaque instant, la vitesse d'un mobile qui se meut sur un axe horizontal. Quel est l'espace parcouru par ce mobile entre les instants $t = 0$ et $t = 4$?

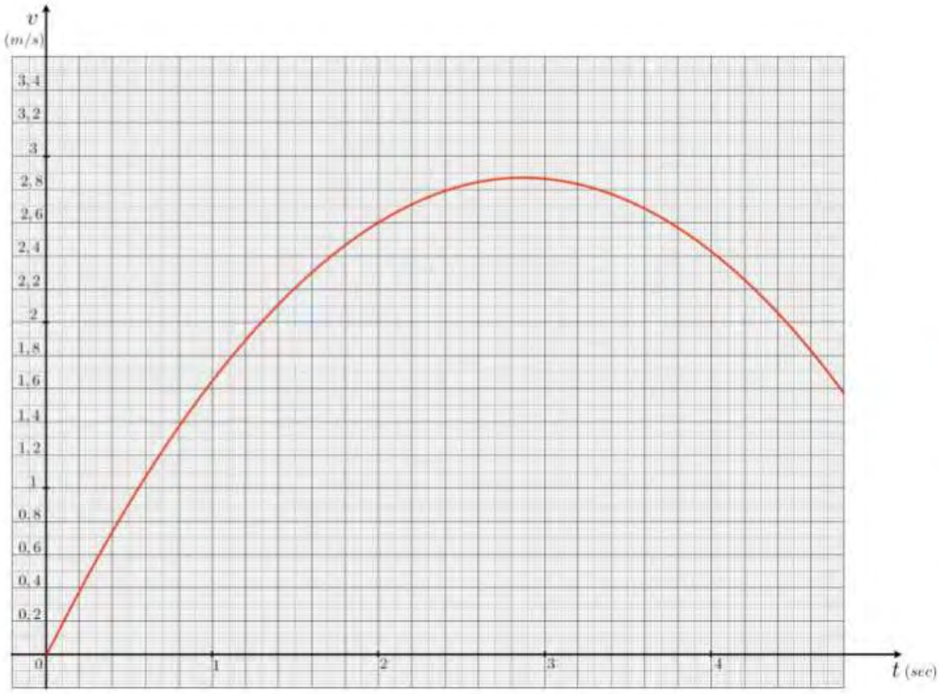


Figure 5 *– Graphe vitesse/temps d'un mobile se mouvant sur un axe horizontal*

2 . Considérons un mobile en mouvement sur un axe horizontal dont la vitesse à chaque instant est décrite par la loi $v(t) = -t^2/3 + 2t$. Nous savons que l'espace parcouru par ce mobile est de 9m à l'instant $t = 0$. Comment déterminer l'espace parcouru par le mobile à chaque instant ?

3. Trouver une méthode qui permettrait de déterminer l'aire d'une région S délimitée par le graphe d'une fonction continue f (où $f(x)$ est positif ou nul), les droites $x = a$, $x = b$ et l'axe O_x.

4. Considérons une citerne en forme de cylindre droit de section parabolique. Une pompe alimente cette cuve ; elle est réglée de telle sorte que le niveau y monte régulièrement de 1 cm/min. A quel moment le débit de la pompe sera-t-il de 100 cm^3/min ?

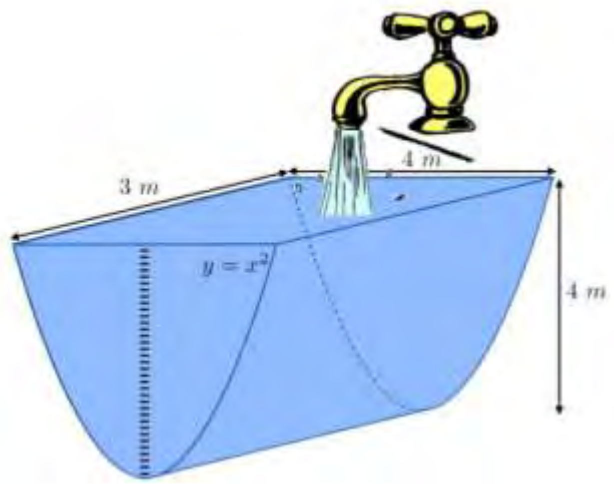


Figure 6 *– Cuve*

Ces quatre problèmes se résolvent au moyen d'un calcul de primitive mais il faut prendre conscience du théorème fondamental, soit en dérivant la fonction intégrale, soit en intégrant des différentielles. C'est là le but de ces quatre situations. Chacune d'entre elles étant destinée à jouer un rôle bien précis dans le cheminement vers celui-ci.

Le but du premier problème est d'interpréter, à l'instar de Galilée, l'espace total parcouru par le mobile pendant les quatre premières secondes comme étant l'aire sous la courbe représentative de la vitesse sur cet intervalle de temps.

Pour ce qui est de la seconde activité, souvenons nous que Torricelli, Fermat et Barrow n'entrevoient dans leurs découvertes respectives qu'un fait de nature tantôt cinématique, tantôt géométrique et non des exemples de ce qui pourrait devenir un nouvel algorithme de calcul. N'ayant à notre disposition que l'expression algébrique de la vitesse du mobile il faut, pour répondre à la question, imaginer un processus d'« anti-dérivation » qui est un passage obligé si l'on veut appréhender le théorème fondamental. Or, il est bien connu pour des élèves de dernière année qu'on obtient l'expression algébrique de la vitesse après avoir dérivé l'expression algébrique de l'espace parcouru.

Torricelli a eu beau associer espace parcouru à aire, il n'en a tiré aucune idée sur un moyen de calculer une aire en général. Ce qui montre bien que ce n'est pas parce qu'on interprète l'espace parcouru par un mobile comme étant l'aire sous la courbe que l'on peut en dégager nécessairement une méthode générale de calcul d'aire. Le but de la troisième situation est celui-là.

Enfin à travers le dernier problème qui se ramène à la dérivée d'une fonction-aire, nous souhaitions introduire une idée de variation dans le contexte des aires et faire percevoir aux élèves la réciprocité entre les problèmes de dérivation et d'intégration. Du point de vue historique, il a fallu attendre Newton pour que l'aire et le volume soient pensés comme des « quantités variables » (fonction d'une abscisse). En effet, une imagerie cinématique est sous-jacente à la conception des courbes et des surfaces chez Newton :

> Je vais considérer dans cet ouvrage les grandeurs mathématiques non pas comme étant formées de parties constantes même infiniment petites mais comme étant engendrées par un mouvement continu. Les lignes sont décrites et par là générées non par addition de parties mais par un mouvement de lignes, les solides par un mouvement de surfaces. Ces générations se réalisent vraiment dans la nature et on peut les observer tous les jours dans le mouvement des corps. De cette manière, nos ancêtres ont indiqué la génération du rectangle comme s'il était décrit par un segment mobile perpendiculaire à un segment fixe. (Newton cité par Schneider-Gillot 1988, pp. 363-364)

C'est pourquoi nous avons imaginé le remplissage d'une cuve particulière de forme parabolique sur toute sa profondeur. Notre objectif dans le choix des variables du problème est de faire émerger l'idée de variation puisque, dans ce contexte, l'idée de balayage de solide par une surface est « naturelle » et pour passer à l'idée de balayage sous une courbe il faut ramener le calcul du volume d'eau dans la cuve à un calcul d'aire sous la courbe racine carrée. L'aire sous cette courbe est alors pensée comme une aire dépendant de l'abscisse *h* qui représente le niveau d'eau atteint par l'eau dans la cuve. Pour injecter cette idée de balayage sous la courbe, nous avons assimilé le niveau *h* au temps en faisant évoluer ces deux mesures de la même manière. Nous nous sommes pour cela, référés à l'initiative d'ultima ratio prise par Newton.

> Avant d'être pensée comme quantité dépendant de l'abscisse *x*, l'aire sous une courbe est pensée par Newton en terme de quantité variant en fonction du temps. Toute autre quantité « variable » est également considérée de la sorte, du moins au début de son oeuvre. Effectivement, le concept de base choisi par Newton au début de son oeuvre n'est pas celui d'ultima ration: il construit d'abord sa théorie à partir des concepts de fluente et de fluxion. Une fluente *x* est précisément une quantité qui évolue en fonction du temps, tandis que sa fluxion *x'* représente sa vitesse ou, comme le dit Newton lui-même, son « taux d'écoulement dans le temps ». C'est par le biais des fluentes et des fluxions que Newton définit, dans un premier temps, l'objet du calcul infinitésimal: étant donné une relation entre deux fluxions, trouver la relation entre leurs fluxions et inversement. Le balayage de l'aire sous une courbe par le segment de hauteur *f(x)* est donc à l'origine un balayage temporel. Newton imagine un point qui se meut dans le temps sur l'axe des *x* ; à hauteur de ce point, il se représente un segment qui balaye l'aire dans le même temps. Il envisage d'abord les variations temporelles concomitantes de l'abscisse et de l'aire et exclut ensuite le facteur temps pour ne plus tenir compte que de la seule dépendance entre l'aire et l'abscisse. Pour éliminer le paramètre temps dans la suite de son oeuvre, Newton choisit une variable: soit *x* dont il suppose la vitesse uniforme: par exemple, $x' = 1$; il accorde alors la priorité non plus au concept de fluxion lui-même mais au rapport de deux fluxions. C'est-à-dire l'ultima ratio :
>
> $$\frac{y'}{x'} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dx}$$
>
> (Schneider-Gillot 1988, p. 366)

Dans le problème qui nous occupe l'ultima ratio en jeu est :

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt} = \frac{dV}{dh}$$

Bien que l'on puisse remettre en cause l'existence d'une pompe réglée de la sorte (dont le débit croît continuellement), nous avons choisi de donner une vitesse uniforme de montée au niveau d'eau dans la cuve. Ce choix permet de ne plus tenir compte que de la dépendance entre l'aire sous la courbe racine carrée et l'abscisse considérée, à savoir le niveau *h* d'eau dans la cuve.

REFERENCES

Boyer C. (1949) *The History of the calculus and its Conceptual Developpement.* New-York : Dover Publications.

Castelnuovo E. (1965) *L'objet et l'action dans l'enseignement de la géométrie intuitive,* dans *L'enseignement des mathématiques, TOME II, Etude du matériel.* Paris : Delachaux et Niestlé.

Kline M. (1972) *Mathematical thought from ancient to modern times,* Oxford : Univ. Press.

Raymond P. (1976) *La philosophie dans tous ses états : De Platon à Hegel, dans Philosophie et calcul de l'infini.* Paris. F. Maspero.

Schneider M. (2008) *Traité de didactique des mathématiques.* Liège : Les Editions de l'Université de Liège.

Schneider-Gillot M. (1988) *Des objets mentaux « aire » et « volume » au calcul des primitives.* Louvain-la-Neuve : Université Catholique de Louvain.

ENSEIGNEMENT DES FONCTIONS ET ÉQUATIONS DU SECOND DEGRE DANS UNE ECOLE SECONDAIRE PROFESSIONNELLE

Nicolas BARTHOLDI*

Résumé – Pour enseigner les fonctions du second degré et les équations du second degré, j'ai choisi de traiter ces deux sujets en parallèle, afin d'exploiter le mieux possible leurs nombreux liens, mais aussi de montrer ces liens aux élèves. Après une analyse épistémologique des deux sujets et de leurs connexions, j'étudie quelques types de tâches liés aux sujets et je montre les interactions entre étude de fonction, représentation graphique et résolution d'équation. Je présente ensuite brièvement ma séquence d'enseignement, avant d'en faire l'analyse a posteriori.

Mots-clefs : fonction du second degré, équation du second degré, représentation graphique, parabole

Abstract – In my teaching of quadratic functions and equations, I have chosen to teach these two subjects in parallel in order to put forward their numerous links and make them visible to students. After an epistemological analysis of the two subjects and their connections, I study some types of task on each of them and show how they interact in the study of the function, the drawing of the graph and the solving of the equation. Then I briefly present my teaching sequence and give an analysis of what happened

Keywords: quadratic function, quadratic equation, graphic representation, parabola

INTRODUCTION

1. Contexte

J'enseigne les mathématiques au niveau secondaire supérieur (élèves de 15 à 19 ans), dans une école professionnelle d'arts appliqués, à des élèves qui suivent une formation notamment en bijouterie, en création de vêtements, en dessin d'intérieur ou en création multimédia. Mon travail concerne la 2ème année, durant laquelle les élèves n'ont que 2 périodes de 45 minutes de mathématiques par semaine. Par ailleurs ils passent l'examen de maturité professionnelle à la fin de cette 2ème année, et ils n'ont plus de mathématiques dès l'année suivante.

Dans un tel contexte, il n'est pas facile de faire en classe une étude très approfondie du sujet, d'autant plus que les contraintes de calendrier limitent le temps qui peut lui être consacré. Ainsi, le plan d'étude suggère ceci :

> En MP artistique, on insistera beaucoup moins sur les démonstrations et on mettra l'accent sur les applications concrètes ; on évoquera aussi le plus souvent possible l'aspect historique des notions enseignées. (Plan d'études 2006, p. 46)

Suggestion que je n'ai malheureusement pas pu suivre complètement, surtout en ce qui concerne l'aspecthistorique…

Un autre trait caractéristique de l'école est la très grande hétérogénéité des niveaux des élèves, en particulier en mathématiques. Ainsi, certains élèves arrivent directement de l'école obligatoire (et n'étaient pas nécessairement bons en mathématiques), tandis que d'autres ont pu faire une ou deux années de lycée auparavant.

2. Expérience antérieure

J'ai déjà enseigné les fonctions et les équations du 2ème degré l'an dernier, dans une classe similaire. J'avais alors choisi de l'étudier en me basant entièrement sur la forme canonique des fonctions du 2ème degré. Le succès fut mitigé, mais surtout, le temps nécessaire pour arriver à

* DIP Genève – Suisse – nicolas.bartholdi@edu.ge.ch

© Bartholdi N. (2012) Enseignement des fonctions et des équations du second degré dans une école secondaire professionnelle. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (SPE1, pp. 1497–1506). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

un résultat acceptable était beaucoup trop long et m'avait contraint à quasi sacrifier plusieurs autres sujets en fin d'année. Je me devais donc, cette année, de trouver un nouveau moyen de l'enseigner plus rapidement, sans pour autant sacrifier certains objectifs. En revanche, j'ai gardé l'idée de traiter conjointement les deux sujets « fonctions du $2^{ème}$ degré » et « équations du $2^{ème}$ degré ».

II. ANALYSE EPISTEMOLOGIQUE

Pour ma séquence, j'ai fait le choix de réunir deux sujets bien distincts (même si cette distinction n'est pas toujours claire aux yeux des élèves) : les fonctions du $2^{ème}$ degré et les équations du $2^{ème}$ degré ; mon choix se justifie par le fait qu'il y a des connexions et des interactions très profondes entre ces deux sujets. Je vais donc commencer par traiter séparément chacun de ces sujets, avant d'étudier leurs liens.

1. Fonctions du $2^{ème}$ degré

Les fonctions du $2^{ème}$ degré s'insèrent dans le thème plus général des fonctions réelles. Ce dernier inclut les fonctions constantes, linéaires ou affines, les fonctions polynomiales, mais aussi les fonctions rationnelles, trigonométriques, exponentielles ou logarithmiques, ou encore des fonctions bien plus exotiques, continues ou non. Ce thème est justement un des fils conducteurs du programme de l'année, ce dernier incluant également les fonctions trigonométriques, exponentielles et logarithmiques en plus des fonctions du $2^{ème}$ degré.

De façon générale, les fonctions sont un outil essentiel en mathématiques, en tant qu'opérations agissant sur des nombres. Ainsi, les fonctions les plus élémentaires (comme $f: x \to x^2$, $f: x \to \sqrt{}(x)$, $f: x \to \sin(x)$, etc.) ont fait l'objet par le passé (et parfois encore aujourd'hui) d'apprentissage d'algorithmes par les élèves et d'élaboration d'algorithmes par les mathématiciens, et sont aujourd'hui directement accessibles par les touches des calculatrices. D'autre part, les fonctions sont un outil important dans la vie courante, afin de comprendre l'évolution de telle grandeur en fonction du temps (par exemple la température, la démographie, les indicateurs économiques, l'heure de lever ou de coucher du soleil), ou encore le lien entre plusieurs grandeurs (par exemple le temps de parcours, la consommation d'essence et la distance de freinage en fonction de la vitesse, ou la pression atmosphérique et la température d'ébullition de l'eau en fonction de l'altitude).

Du point de vue mathématique, les fonctions polynomiales sont les plus simples, puisque ce sont celles que l'on peut obtenir en utilisant uniquement les opérations « + », « - » et « · » (appliquées aux nombres et à la variable), autrement dit celles qui ne requièrent qu'une structure d'anneau commutatif. Et parmi celles-ci, après les fonctions constantes (de degré 0 et dépendant de 1 paramètre), linéaires (de degré 1 et dépendant de 1 paramètre) et affines (de degré 1 et dépendant de 2 paramètres), les fonctions du 2ème degré (qui dépendent de 3 paramètres) sont les plus simples.

Notons encore que l'ensemble des fonctions de degré $d \leq 2$ forme un espace vectoriel de base canonique $\{ f_1 : x \to 1 , f_2 : x \to x , f_3 : x \to x^2 \}$, ce qui donne un statut très particulier à la fonction élémentaire $f: x \to x^2$, la plus simple de toutes les fonctions du $2^{ème}$ degré, à partir de laquelle on peut obtenir toutes les autres.

Tout cela confère un statut didactique très intéressant aux fonctions du $2^{ème}$ degré : en effet, les fonctions constantes, linéaires et affines sont simples à étudier, tandis que celles du $3^{ème}$ degré sont déjà beaucoup plus complexes et sont rarement étudiées pour elles-mêmes (en général, après l'étude du $2^{ème}$ degré, on passe directement à l'étude des fonctions polynomiales en général). Du coup, les fonctions du $2^{ème}$ degré présentent un niveau de complexité idéalement adapté à mes élèves, à la fois accessibles mais nécessitant un effort soutenu et des apprentissages importants ; et plus généralement, elles représentent une étape intermédiaire quasi-obligatoire entre les fonctions affines et les fonctions polynomiales en général. En bref, les fonctions du 2$^{\text{ème}}$ degré représentent une occasion idéale de « faire de vraies mathématiques » avec ces élèves.

De plus, l'étude des seules fonctions affines nous retreint beaucoup (au niveau technologique aussi bien qu'au niveau conceptuel), tandis que les fonctions du 2$^{\text{ème}}$ degré représentent un saut conceptuel essentiel qui ouvre la porte à toutes les fonctions continues. En effet, pour la première fois, une fonction n'est pas représentée graphiquement par une droite, ne peut être tracée à la règle mais nécessite une interpolation, et permet de décrire des processus dont l'évolution n'est pas régulière (dérivée non-constante). Cette complexité met aussi en évidence la nécessité d'avoir des connaissances théoriques beaucoup plus poussées afin de bien représenter graphiquement la fonction, nécessité qui ne saute pas aux yeux lorsqu'on se restreint aux fonctions du 1$^{\text{er}}$ degré (les points calculés étant alignés, il est « évident » que le graphe est une droite)...

S'ajoute à cela la grande utilité des fonctions du 2$^{\text{ème}}$ degré – et des paraboles, qui sont leurs représentations graphiques – pour modéliser ou décrire des situations concrètes. D'une part, à petite échelle, toute fonction lisse peut être très bien approximée par une fonction du 2$^{\text{ème}}$ degré ; ainsi, par exemple, la forme d'un câble suspendu peut être approximée par une parabole (même si c'est en réalité quasi une chaînette, c'est-à-dire le graphe d'un cosinus hyperbolique). D'autre part, de nombreuses situations font apparaître, de façon exacte ou presque, des fonctions du 2$^{\text{ème}}$ degré ou des paraboles : ainsi, une aire en fonction de la longueur d'un côté, mais aussi la hauteur ou la trajectoire d'un objet lâché ou lancé, la distance parcourue par une voiture freinant avec une décélération constante, etc. Les fonctions du 2$^{\text{ème}}$ degré apparaissent aussi souvent dans des problèmes d'optimisation (typiquement, l'aire d'un rectangle de périmètre donné en fonction d'un de ses côtés). Notons toutefois que, dans les situations concrètes, la question du domaine de définition se pose, ce dernier devant parfois être restreint par des contraintes liées à la situation.

Quant aux paraboles, qui sont donc les représentations graphiques des fonctions du 2$^{\text{ème}}$ degré, elles font désormais partie du langage courant grâce aux antennes paraboliques, plus connues que les miroirs paraboliques des télescopes (ce sont en fait des paraboloïdes de révolution, obtenus par la rotation dans l'espace d'une parabole autour de son axe).

Enfin, du point de vue purement géométrique, les paraboles constituent un sujet à part entière, intégré dans le thème plus large des coniques. Ces dernières étant les intersections d'un cône de révolution avec un plan, la parabole est le cas particulier obtenu lorsque le plan est parallèle à un plan tangent au cône. On peut alors définir le foyer et la droite directrice de la parabole, cette dernière étant alors le lieu géométrique (dans le plan) des point à égale distance du foyer et de la directrice. Notons encore que les paraboles ont un axe de symétrie, et que les représentations graphiques des fonctions du 2$^{\text{ème}}$ degré sont toujours des paraboles à axe de symétrie vertical.

2. *Équations du 2$^{\text{ème}}$ degré*

L'étude des équations du 2$^{\text{ème}}$ degré est beaucoup plus ancienne que celle des fonctions du 2$^{\text{ème}}$ degré, et remonte même à l'antiquité. Là aussi, elles s'insèrent dans le thème beaucoup plus large des équations, à un niveau de difficulté intermédiaire entre celles du 1$^{\text{er}}$ degré (faciles à résoudre), celles de degré 3 ou 4 (très difficiles à résoudre de façon exacte) et celles de degré supérieur ou non-polynomiales (le plus souvent impossible à résoudre de façon exacte, sauf cas particuliers). Comme pour les fonctions, les équations du 2$^{\text{ème}}$ degré présentent donc l'intérêt didactique majeur d'être accessibles aux élèves, tout en les mettant en difficulté et en les forçant à développer de nouvelles connaissances et compétences.

Les équations du 2ème degré les plus élémentaires sont de la forme $x^2 = a$; de même que pour les fonctions du 2ème degré, il y a la fonction élémentaire $f : x \rightarrow x^2$. Ainsi, ces équations élémentaires servent par exemple à déterminer la longueur du côté d'un carré d'aire a, ou le rayon d'un cercle d'aire $\pi \cdot a$, voire la tension à appliquer aux bornes d'une ampoule pour obtenir une puissance donnée, etc. De plus, grâce au théorème de Pythagore, elles servent aussi à calculer la longueur de la diagonale d'un rectangle (voire d'un parallélépipède rectangle) et la longueur du 3ème côté d'un triangle rectangle dont on connaît la longueur des deux autres côtés.

Les équations de ce type, si elles ont l'air très simple à première vue, cachent déjà une première grande difficulté, liée à l'ensemble de nombres dans lequel on travaille : tant que nous travaillons avec les nombres réels positifs, ces équations ont pour unique solution $x = \sqrt{}(a)$; toutefois, dès lors que nous prenons en considération les nombres négatifs, cette équation peut avoir deux solutions si $a > 0$, et aucune si $a < 0$; point peu intuitif qui pose régulièrement de grosses difficultés aux élèves. De plus, si nous nous restreignons aux nombres rationnels, l'existence ou non de solutions fait appel à des notions théoriques beaucoup plus avancées et relevant d'autres domaines des mathématiques (la théorie des nombres).

Mais en général, les équations du 2ème degré sont beaucoup plus difficiles à résoudre que l'équation élémentaire, et requièrent soit la connaissance de techniques appropriées, soit une grande ingéniosité. Ces équations apparaissent notamment dans de nombreux problèmes d'optimisation ou de physique (par exemple, pour déterminer le temps de chute et la vitesse lors de l'impact au sol, lorsqu'on lâche un objet d'une certaine hauteur), et en fait dans toutes les situations où des fonctions du 2ème degré peuvent apparaître.

Notons encore qu'historiquement, avant l'invention du zéro et des nombres négatifs, les équations du 2ème degré ne pouvaient pas être réunies sous une même forme générale comme aujourd'hui (par exemple $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$), mais devaient être classifiées en plusieurs types bien distincts (par exemple $A \cdot x^2 + B \cdot x = C$, $A \cdot x^2 + C = B \cdot x$, $A \cdot x^2 = B \cdot x + C$, etc.), chaque type requérant une technique de résolution particulière.

3. Liens entre fonctions et équations

Comme nous l'avons déjà dit, la notion d'équation est beaucoup plus ancienne que la notion de fonction. Pourtant, l'étude des fonctions est extrêmement utile pour résoudre les équations – de manière approximative, il est vrai. En effet, en l'absence de technique de résolution exacte de type algébrique, on est ramené à trouver une valeur approchée la plus proche possible de la solution, et donc à faire varier la valeur de x, qui du coup n'est plus l'inconnue mais devient une variable ! Ce changement fondamental de point de vue, en passant de l'équation à la fonction, permet d'utiliser tous les outils élaborés pour analyser les fonctions : dérivée, interpolation, recherche des sommets, de la croissance et de la courbure, etc. Et il est aussi possible d'utiliser la représentation graphique de la fonction pour localiser, dénombrer et approcher les valeurs des solutions de l'équation.

D'autre part, dans de nombreux cas, des fonctions peuvent conduire à des équations (qui n'auraient peut-être pas été posées autrement). Cela peut bien entendu se faire pour des raisons purement mathématiques (recherche des antécédents ou pré-images), mais cela peut aussi s'appliquer à des situations concrètes : ainsi par exemple, si l'on sait que la hauteur d'un objet lâché à l'instant $t = 0$ d'une hauteur de 10m est approximativement donnée par la formule $h(t) = 10 - 5{\cdot}t^2$, alors on peut en déduire que, pour connaître la durée de la chute, il faut résoudre l'équation $h(t) = 10 - 5{\cdot}t^2 = 0$.

4. *Prérequis*

Pour pouvoir étudier les fonctions et équations du $2^{\text{ème}}$ degré, il convient de maîtriser au préalable les compétences suivantes :

- être capable de calculer avec les nombres réels (notamment les racines carrées) ;
- être capable de calculer sur les polynômes (à une variable) ;
- être capable de tracer approximativement la représentation graphique d'une fonction (en plaçant des points et en interpolant) ;
- être capable de lire sur un graphique les coordonnées d'un point ;
- être capable de repérer un axe de symétrie sur une figure géométrique ;

De plus, les compétences suivantes sont également fort utiles :

- être capable de mettre en évidence un monôme dans une expression algébrique ;
- connaître et être capable d'utiliser le produit remarquable $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

III. ANALYSE PRAXEOLOGIQUE

Nous faisons ici usage de la notion de praxéologie mathématique au sens de Chevallard (2002). Une praxéologie est un moyen de décrire toute activité humaine, donc en particulier les activités mathématiques ; elles est constituée d'un quadruplet comprenant un type de tâche T, une technique τ pour résoudre cette tâche, une technologie θ permettant de justifier la technique et une théorie Θ expliquant la technologie. Cet outil est un moyen d'analyser le découpage du travail mathématique.

Dans notre cas, il est intéressant d'analyser comment les fonctions, les équations et les représentations graphiques, ainsi que les différentes façons d'écrire une fonction du $2^{\text{ème}}$ degré, entretiennent des liens à travers les différentes praxéologies qui les concernent.

1. *Fonctions, équations et représentations graphiques*

Comme nous l'avons déjà dit, il y a des liens très forts entre ces trois sujets (au point d'entretenir une certaine confusion chez les élèves). Nous allons brièvement mentionner ci-dessous quelques-uns de ces liens, d'un point de vue praxéologique : Nous ne reprenons pas ici l'analyse de toutes les praxéologies en jeu, mais signalons comment un savoir d'un des domaines peut servir de technique, voire d'élément technologico-théorique, pour permettre de résoudre un type de tâche, ou justifier une technique, qui appartient à un autre des domaines.

La représentation graphique permet :

- de faire une étude approximative de la fonction (allure, sommet, symétrie) ;
- de comprendre et prévoir le nombre de solutions d'une équation ;
- d'approximer les solutions d'une équation.

L'étude de fonction permet :

- de justifier certaines propriétés de la représentation graphique (convexité, symétrie, dérivabilité au sommet) ;

- de tracer une bonne représentation graphique (allure, sommet, symétrie) ;
- d'étudier le nombre de zéros d'une fonction ;
- de mettre en évidence la symétrie (d'axe vertical passant par le sommet), bien visible dans la Formule de Viète (ou formule du discriminant).

La résolution d'équation permet :

- de trouver les zéros de la fonction ;
- ...d'où son axe de symétrie, son sommet et sa représentation graphique !

Du coup, il est extrêmement profitable d'utiliser ces trois cadres et de jouer sur leurs liens pour aborder le sujet. De plus, cela permet aux élèves d'avoir une approche plus riche des mathématiques ; en effet :

> une part importante du travail des mathématiciens est consacrée à interpréter les problèmes qu'ils se proposent de résoudre, à changer de point de vue [...], à les formuler autrement, à les transporter d'un cadre dans un autre... (Douady 1986, p. 10)

2. *Différentes façons d'écrire une fonction du $2^{ème}$ degré*

Une fonction du $2^{ème}$ degré peut s'écrire sous au moins quatre formes principales :

- $f(x) = a{\cdot}x^2 + b{\cdot}x + c$ (forme développée)
- $f(x) = a \cdot (x^2 + B{\cdot}x + C)$
- $f(x) = a \cdot (x-s)^2 + m$ (forme canonique)
- $f(x) = a \cdot (x-\alpha) \cdot (x-\beta)$ (forme factorisée)

Les méthodes utilisées pour étudier les fonctions – notamment pour déterminer leurs zéros – et du coup pour résoudre les équations du $2^{ème}$ degré, dépendent fortement de la forme choisie ! Ainsi, la forme canonique est particulièrement adaptée à la recherche du sommet de la parabole, autrement dit de l'extremum de la fonction, tandis que la forme factorisée permet d'en trouver facilement les zéros. Un des enjeux, dans l'étude de ce sujet, consiste donc à être capable de passer d'une des formes à une autre.

Notons encore que la forme factorisée n'existe pas toujours si l'on travaille avec les nombres réels, et n'existe même que rarement si l'on travaille avec les nombres rationnels (car elle fait souvent apparaître des racines carrées qui ne sont pas toujours des nombres rationnels ou même réels) ; en revanche, elle existe toujours si l'on travaille avec les nombres complexes.

IV. SEQUENCE D'ENSEIGNEMENT

Au vu de l'analyse qui précède, un de mes objectifs essentiels était de bien articuler et combiner les deux sujets « fonctions du $2^{ème}$ degré » et « équations du $2^{ème}$ degré », et ce pour deux raisons. D'une part à cause de tous les liens entre ces deux sujets, l'étude de l'un permettant de mieux comprendre l'autre et de lui apporter de nouveaux outils d'analyse. Mais aussi car établir des liens entre différents sujets des mathématiques est un but en soi, qui donne sens et unité à la discipline. Ceci fait d'ailleurs écho au plan d'étude : en effet, dans la liste des objectifs fondamentaux, on trouve l'objectif suivant : « Établir des liens entre des situations qui font intervenir diverses notions mathématiques » (Plan d'études 2006, p. 46).

D'autre part, malgré le peu de temps disponible pour traiter le sujet, il me paraissait essentiel d'aller plus loin qu'une simple maîtrise des techniques, et d'essayer de donner une certaine compréhension du sujet aux élèves – ce que les changements de cadre et l'explicitation des liens entre sujets connexes peuvent permettre. Ceci fait aussi écho à une certaine philosophie des mathématiques, que je partage et qu'il me semble important de transmettre aux élèves, sur le fait que les mathématiques ne se réduisent pas un une série de formules, mais qu'elles font sens et apportent du sens. Enfin, cet objectif est important dans la mesure où, dans quelques années (peut-être moins...), les élèves auront sans doute oublié toutes les formules, mais garderont peut-être quelques souvenirs des liens et de la logique sous-tendant le tout. Le fait que les élèves dont il est question ici fassent leur dernière année de mathématique doit nous inciter d'autant plus à réfléchir à plus long terme.

De ce point de vue, le sujet « fonctions et équations du $2^{\text{ème}}$ degré » me paraissait le sujet idéal pour viser cet objectif, d'une part en raison de ces nombreux liens et jeux de cadres, mais aussi en raison de son niveau de difficulté qui me paraissait idéalement adapté au niveau de mes élèves : comme je l'ai déjà dit, les fonctions du $2^{\text{ème}}$ degré représentent une occasion idéale de « faire de vraies mathématiques » avec ces élèves. Ceci justifiait, à mes yeux, de passer un peu plus de temps sur ce sujet, quitte à rogner un peu sur d'autres sujets de l'année.

Néanmoins – en lien avec le plan d'étude – il me paraissait important d'aborder quelques situations concrètes où des fonctions ou équations du $2^{\text{ème}}$ degré peuvent apparaître, afin de motiver les élèves. J'ai décidé en particulier de baser la première rencontre des élèves avec le sujet sur des problèmes concrets, suivant en cela les recommandations de Matheron et Noirfalise (2009) :

> ... Il va falloir exhiber, montrer, faire rencontrer par les élèves l'une au moins des raisons d'être de ce type de tâches ; sinon l'enseignement est purement gratuit, et un savoir immotivé ne résiste guère plus que le temps que les élèves veulent bien consacrer à son étude... (Op. cité, p. 19)

1. *Choix didactiques*

Comme il me paraissait essentiel, malgré tout, de leur donner des outils leur permettant de déterminer le sommet d'une parabole et de résoudre des équations du $2^{\text{ème}}$ degré, et vu l'expérience mitigée de l'an passé (j'avais tenté l'approche par complétion du carré, mais celle-ci avait posé trop de problèmes techniques aux élèves), je me suis résolu à leur apprendre les formules de Viète.

Cependant, de crainte que les formules de Viète court-circuitent tout l'intérêt mathématique de la séquence, j'ai décidé de les laisser « pour la fin », et de faire l'essentiel de la séquence avec les outils les plus élémentaires possibles : représentation graphique, développement d'expressions algébriques, résolution d'équations déjà factorisées, recherche de sommet de paraboles dont l'équation est déjà mise sous forme canonique. Ceci dans le but de rendre tout cela accessible aux élèves, sans qu'ils soient bloqués par les difficultés techniques, ou par l'hermétisme de formules efficaces mais peu compréhensibles.

Du coup, j'ai fait le pari de jongler entre les formes développée, canonique et factorisée des fonctions du $2^{\text{ème}}$ degré, en utilisant dans chaque situation celle qui était la plus simple. Je n'exigeais pas des élèves qu'ils soient eux-mêmes capables de passer d'une forme à l'autre, mais qu'ils comprennent que la même fonction pouvait s'écrire sous différentes formes, que chacune avait son utilité propre, et qu'ils soient capables, en développant, de vérifier s'il s'agissait bien de la même fonction.

Je les ai également fait travailler le lien entre étude de fonction et représentation graphique, d'abord en partant des représentations graphiques (construites point par point) pour leur faire découvrir certaines propriétés des paraboles (sommet, symétrie), puis en partant de l'étude de fonction pour tracer rapidement un croquis détaillé ; mais aussi le lien entre résolution d'équations et recherche des zéros de fonctions.

Enfin, j'ai introduit le sujet par des exemples concrets, afin de motiver les élèves ; et j'ai clos le sujet en analysant ces exemples à l'aide des outils étudiés entre deux. J'aurais souhaité faire plus d'exemples concrets ; mais mes choix didactiques et le peu de temps à disposition m'ont empêché d'en faire plus. De plus, j'ai hélas dû totalement renoncer à l'approche historique, pour la même raison.

2. Plan de la séquence

- Dans les leçons précédant la séquence : représentation graphique de fonctions, résolution graphique d'équations, quelques rappels de calcul littéral.
- Pour introduire la séquence, deux exemples concrets : la hauteur d'un objet lâché par la fenêtre et la distance parcourue par une voiture qui freine. Ces deux exemples conduisent à des fonctions du 2ème degré, dont on est amené à chercher les zéros (pour étudier l'impact de l'objet par terre), respectivement le maximum (pour déterminer l'instant où la voiture s'arrête). Ainsi, dès le départ, fonctions, paraboles et équations, sommets et zéros sont associés.
- Tracer, puis décrire et comparer la représentation graphique de la fonction $f : x \rightarrow x^2$, puis d'autres fonctions du 2ème degré. Effet du paramètre a sur la forme et l'orientation de la parabole.
- Mise en évidence (graphiquement, puis algébriquement) du fait que $(x-3)^2 - 4 = x^2 - 6x + 5 = (x-1) \cdot (x-5)$. Description des différentes façons d'écrire une fonction du 2ème degré (formes développée, canonique et factorisée), et discussion des avantages de chacune.
- Détermination du sommet et de l'axe de symétrie, à partir de la forme canonique.
- Détermination des zéros, à partir de la forme factorisée.
- Croquis détaillé d'une fonction donnée simultanément sous les trois formes.
- Résolution graphique, puis algébrique, d'équations du type $x^2 = a$.
- Formules de Viète : extremum d'une fonction, solutions d'une équation (données sous la forme développée).
- Retour aux exemples d'introduction, et nouvel exemple concret (optimisation).

V. ANALYSE A POSTERIORI

Mon objectif d'apporter une certaine compréhension du sujet, des liens et des jeux de cadre aux élèves, était très ambitieux. Le danger était de perdre les élèves entre ces différents cadres (représentations graphiques, fonctions, et équations), ces différentes façons d'écrire une fonction et les différentes techniques associées. J'ai voulu montrer aux élèves un large panorama sur la richesse et la complexité du sujet, en courant le risque que certains élèves s'y noient...

Mon principal objectif (faire travailler des mathématiques plus riches aux élèves) étant à la fois difficile à évaluer, et basé sur le long terme, il m'est actuellement très difficile de dire dans quelle mesure je l'ai atteint. Toutefois, je peux déjà me baser sur quelques indices.

Tout d'abord, globalement, j'ai l'impression que les élèves ont pu mieux entrer dans le sujet que l'an dernier. J'attribue cela au fait que j'ai écarté autant que possible les difficultés techniques qui constituaient le principal obstacle l'an dernier (en particulier la maîtrise de la formule $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ et la transformation d'une fonction de la forme développée vers la forme canonique). Ainsi, quelques élèves plutôt en difficulté jusque-là ont assez bien réussi à suivre. Toutefois, dans une des deux classes dans lesquelles j'ai passé la séquence, quelques élèves qui étaient relativement bons jusque-là ont petit à petit décroché, et leurs résultats ont chuté. Peut-être se sont-ils perdus entre ces différents cadres, peut-être n'ai je pas été suffisamment clair dans ma présentation ? Peut-être ont-ils été décontenancés par mon approche, peu habituelle en cours de mathématiques ? Heureusement, d'autres élèves de la même classe ont bien réussi à suivre jusqu'au bout.

Ensuite, j'ai été intrigué et frappé par des remarques que m'ont faites deux très bonnes élèves de l'autre classe. L'une trouvait bizarre ma façon de présenter le sujet, alors qu'on pouvait tout simplement donner les formules... Je suis d'accord avec elle, c'est un choix qui paraît bizarre et qui est très peu « scolaire » ; mais c'est un choix que j'assume. L'autre m'a fait la remarque que mon cours était difficile, car il fallait tout le temps passer d'une façon de voir les choses à une autre, et faire le lien (je pense que cette élève y arrivait très bien, mais devait constater les difficultés de ses camarades.) J'ai abondé dans son sens, et j'étais même très heureux de sa remarque, car elle montre que je touchais à mon principal objectif – au moins pour cette élève, et pour quelques autres ! En bref, j'avais réussi à mettre partiellement de côté les difficultés techniques, afin d'attaquer de front les difficultés conceptuelles !

D'autre part, quelques élèves (ayant eu des cursus divers) avaient déjà vu les équations du $2^{\text{ème}}$ degré. De ce point de vue, mon approche différente avait l'avantage de leur montrer les choses d'une façon différente, plutôt que de refaire exactement ce qu'elles savaient déjà. Néanmoins, j'ai eu la grande surprise de constater qu'une de ces élèves, lors de l'épreuve, pour résoudre l'équation $-2 \cdot (x+12) \cdot (x-7{,}8) = 0$, a tout développé et résolu par la formule de Viète (sans faute !)... alors que nous n'avions étudié que la résolution à partir de la forme factorisée !!! Cela montre que cette élève a préféré utiliser la méthode qu'elle connaissait précédemment, même dans un cas où la méthode que j'avais présentée en cours était nettement plus efficace !

VI. CONCLUSION

En définitive, vu les contraintes liées à l'horaire, au calendrier et au niveau des élèves, et en comparaison avec mon expérience de l'an dernier, je suis plutôt satisfait des choix didactiques que j'ai faits. En effet, en y passant beaucoup moins de temps que l'an dernier, j'ai pu respecter le plan d'étude de mon école – en particulier apprendre aux élèves les savoir-faire indispensables, comme résoudre une équation du $2^{\text{ème}}$ degré, déterminer le sommet de la parabole et étudier graphiquement une fonction du $2^{\text{ème}}$ degré – tout en leur donnant un aperçu des concepts et méthodes mathématiques sous-jacents à ce sujet, et sans être trop bloqué par les difficultés techniques des élèves. Certes, par manque de temps, j'ai dû renoncer à l'approche historique du sujet, et j'ai dû limiter le nombre d'exemples concrets ; mais mon choix de mettre ces derniers en introduction et en conclusion du chapitre me paraît bon, car ils ont pu éveiller l'intérêt des élèves pour le sujet et leur servir de motivation. Le fait de revenir à ces exemples tout à la fin permet aussi de constater les apprentissages effectués, et en quelque sorte de « boucler la boucle ». Peut-être toutefois qu'un plus grand nombre d'exemples concrets aurait plus motivé certains élèves qui ont un peu décroché.

Cependant, je suis conscient que mes objectifs ont été atteints de façon extrêmement variable selon les élèves, et que si certains en ont probablement beaucoup profité, d'autres ont eu beaucoup de mal à entrer dans la démarche, somme toute très exigeante. Si j'ai pu limiter les difficultés liées aux techniques, j'ai en revanche attaqué de front les difficultés conceptuelles, liées notamment au jeu de cadres et aux différentes façons d'écrire une fonction. Cela a posé des problèmes aux élèves, mais c'est sans doute inévitable (dans une certaine mesure) dès lors qu'on s'attaque aux difficultés. J'ai également pu constater que quelques élèves, peu à l'aise techniquement, ont relativement bien réussi, tandis que quelques autres, quoique très à l'aise techniquement, ont eu de la peine à établir les liens et à jongler entre les différents cadres.

Ceci dit, il m'est très difficile de juger déjà maintenant de l'efficacité de mes choix didactiques, car j'ai du mal à juger de ce que les élèves en retiendront à long terme.

En définitive, je pense poursuivre dans cette direction l'année prochaine. Et si le calendrier le permet, j'espère pouvoir y ajouter un petit aperçu historique, ainsi que quelques problèmes concrets supplémentaires.

REFERENCES

Chevallard Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19(2), 221-266.

Douady R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 7(2), 5-31.

Matheron Y., Noirfalise A. (2009) *Enseigner les mathématiques à l'école primaire - Les 4 opérations sur les nombres entiers. Formation initiale et continue des professeurs des écoles.* Paris : Vuibert.

Plan d'études cantonal de Maturité Professionnelle (2006). Département de l'instruction publique de la République et Canton de Genève.

STRUCTURES ALGÉBRIQUES EN PREMIÈRE ANNÉE UNIVERSITAIRE

Abdelhamid BEZIA*

Résumé – Le changement de programme de mathématiques au lycée (en Algérie) qui a eu lieu ces dernières années et la suppression de plusieurs chapitres du cours d'algèbre, logique et arithmétique rendent l'enseignent des structures algébriques et particulièrement des groupes en première année universitaire plus ou moins difficile par rapport aux dernières années. De fait, ce cours commence à présenter plus de problèmes qu'avant. Dans cet exposé, nous analysons quelques difficultés et obstacles que rencontrent les étudiants durant ce cours et tentons d'en chercher les origines

Mots-clefs: enseignement supérieur, structure algébrique, groupes, formalisme, raisonnement mathématique

Abstract – The changes in the mathematics program in secondary school (in Algeria), which occurred in the last few years and the deletion of some chapters of the course of algebra, logic and arithmetic lead to more difficulties in the teaching of algebraic structures, and especially of groups in the first year of university. As a result, this course begins to cause more problems than before. In this work we analyze some of these difficulties and obstacles faced by students and try to track their origins.

Keywords: university teaching, algebraic structure, groups, formalism, mathematical reasoning

I. INTRODUCTION

Un groupe est la donnée d'un ensemble G et d'une opération (on dit aussi loi de composition interne) sur cet ensemble « $*$ » qui, à deux éléments a et b de G, associe un autre élément notée $a * b$ de G appelé le composé de a et b. Le symbole «$*$» est un signe général qui désigne une opération donnée. On exige que la loi vérifie les trois axiomes suivants :

- L'associativité : Pour tous éléments a, b et c de G, on a l'égalité $(a * b) * c = a * (b * c)$.
- $a * e = e * a = a$.
- L'existence du symétrique : Pour tout élément a de G il existe a' dans G tel que : $a * a' = a' * a = e$ où e est l'élément neutre de G.

Les homomorphismes de groupes sont les applications qui préservent la structure de groupe. Une application $\varphi : G \to H$ entre deux groupes munis respectivement de deux lois $*$ et $\circ$ est un homomorphisme si pour tout éléments a et b de G. On a l'égalité

$$\varphi(a * b) = \varphi(a) * \varphi(b)$$

A partir de cette condition on vérifie que l'image du symétrique de tout élément a est le symétrique de l'image de a En notant a^{-1} le symétrique d'un élément a cela donne : $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$, et que l'image de l'élément neutre du groupe $(G,*)$ est l'élément neutre de $(H,\circ)$.

Les structures algébriques, en particulier les groupes présentent un modèle universel pour des ensembles qui ont certaines propriétés algébriques communes, ces propriétés y sont traitées de manière unifiée, ce qui évite de recommencer leur étude à chaque nouveau type rencontré. On peut remarquer par exemple une similitude entre les règles des calculs dans $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}[X]\ et\ C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

* USTHB de Babezzouar et Université de Médéa – Algérie – abdelhamid.bezia@gmail.com

© Bezia A. (2012) Structures algébriques en première année universitaire. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (SPE1, pp. 1507–1515). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

Il est donc utile de chercher une liste des propriétés communes entre les ensembles usuelles et les opérations sur ces ensembles et de les étudier.

II. PRESENTATION DU COURS EN PREMIERE ANNEE UNIVERSITAIRE

L'analyse de quelques livres de première année universitaire et de classes préparatoires, m'a conduit à une catégorisation du cours sur les groupes selon trois façons :

1) Ce cours suit un chapitre d'arithmétique élémentaire[1]où sont étudiées les propriétés des entiers relatifs comme la divisibilité, la congruence, etc. Dans ce cas les théorèmes sont démontrés« à la main », et donc le cours sur les groupes devient une généralisation des modèles de $\mathbb{Z}$ et de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

2) Certains auteurs introduisent la notion de groupe dans le cours d'arithmétique. L'étude des groupes sert alors pour démontrer les résultats d'arithmétique (On peut citer par exemple la caractérisation du plus petit multiple commun ou le plus grand diviseur commun de deux nombres à l'aide des sous-groupes de $\mathbb{Z}$ ou la démonstration du théorème des restes chinois à l'aide des idéaux de $\mathbb{Z}$). En suivant cette méthode certains étudiants peuvent penser que les résultats d'arithmétique ne se démontrent qu'à l'aide de la théorie des groupes,

> D'ailleurs l'arithmétique élémentaire peut être entièrement développée à la main et on perd même certaines intuitions, à ne pas le faire (Damphousse 2000, p. 54).

Inversement, d'autres étudiants peuvent penser que la théorie des groupes ne sert qu'à démontrer les résultats d'arithmétique.

Les promoteurs de cette approche pensent qu'elle offre l'avantage de permettre l'investigation de la théorie des groupes dans un domaine plus simple comme celui de l'arithmétique, mais elle peut aussi générer quelques problèmes dans l'esprit des étudiants et leur manière de voir les groupes, nous détaillerons ce point plus loin.

3) D'autres auteurs[2] commencent directement par le chapitre des groupes, juste après le chapitre sur la logique mathématique et la théorie des ensembles. Cette présentation souvent très abstraite risque de faire croire aux étudiants que la théorie des groupes est stérile et sans aucun lien avec les mathématiques qu'ils connaissent.

1. Les exemples présentés dans le cours sur les groupes

Dans ce paragraphe on cite quelques exemples parmi les plus fréquents dans les cours sur les groupes :

- Les groupes des nombres sont les exemples les plus fréquents, ces groupes sont les ensembles des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ réels $\mathbb{R}$ et les complexes $\mathbb{C}$ munis de l'addition. On admet dans les cours de première année universitaire (en Algérie) que $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}\, et\, \mathbb{R}$ sont des groupes, c'est-à-dire qu'on ne donne pas la construction de ces ensembles comme la construction de $\mathbb{Z}$ à partir de $\mathbb{N}$ par les relations d'équivalence et on ne dit pas pourquoi par exemple l'addition ou la

[1]Voir par exemple Arnaudies J.M. etFraysse H. (1992) et Damphousse P. (2000).
[2] Parmi les auteurs qui ont choisi cette approche on peut citer Lang S (2002) et Godement R. (1966).

multiplication sont associatives dans $\mathbb{Z}$, par contre on donne la construction de $\mathbb{C}$ à partir de $\mathbb{R}$. On trouve aussi dans les livres les exemples suivants :

- Groupes des classes de congruence de $\mathbb{Z}$ modulo *n,* que l'on note de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
- Si E est un ensemble, on définit sur l'ensemble $P(E)$ des parties de E la différence symétrique par : pour tous $A, B \in P(E), A\Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$. Alors $P(E)$ muni de l'opération Δ est un groupe.
- Groupes symétriques : l'ensemble des bijections d'un ensemble E, dans lui même muni de la composition des applications.
- Groupes produit : Si $(G,*)$ et $(H,\circ)$ sont deux groupes, l'ensemble $G \times H$ est muni d'une structure de groupe définie par : $(g,h) \times (g',h') = (g * g', h \circ h')$.

Ces exemples sont parmi les plus fréquents dans les livres des premières années mais ne représentent pas une liste exhaustive, on peut en trouver certains dans un livre et pas dans un autre, on peut aussi les trouver présentés sous forme d'exercice dans d'autres ouvrages.

2. *Type d'exercices*

Après avoir vu quelques séries d'exercices distribuées aux étudiants de première année et consulté quelque livres, j'ai constaté qu'une grande partie des exercices tournent autour de quelques axes :

- Donner des sous-ensembles des groupe de nombres $(\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\ ou\ \mathbb{C})$ avec une certaine loi particulière et demander de vérifier qu'ils forment des groupes, (ici les propriétés découlent de l'ensemble père), comme on peut le voir dans l'exercice suivant :

Exercice : *Pour* $x,y \in \mathbb{R}$ *on pose* $x * y = x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}$

- *Montrer que* $(\mathbb{R},*)$ *est un groupe.*
- On donne des ensembles et des lois quelconques qui vérifient certaines propriétés et on demande de vérifier s'ils définissent des groupes ou des sous-groupes, par exemple :

Exercice : *Soit* G *est un ensemble non vide muni d'une opération interne* $*$ *associative telle que*

$$\forall a, b \in G, \exists x, y \in G \text{ tels que } a = x * b = b * y$$

- *Montrer que* $(G,*)$ *est un groupe.*
- On donne aussi des applications et on demande de vérifier que ce sont des morphismes ou des isomorphismes de groupes, ou inversement on donne des groups et on demande de chercher des isomorphismes entre eux, avec évidement d'autre questions comme calculer l'ordre d'un élément, chercher les générateurs d'un sous-groupe, etc.

Il apparaît ainsi que la plupart des exercices de la première année se concentrent sur des problèmes de vérification des axiomes de groupe, et des définitions de morphisme, d'isomorphisme, etc. De fait, l'étudiant peut se poser la question: est ce qu'on définit les groupes juste pour vérifier si des ensembles donnés vérifient les axiomes ou non. Quand j'étais en troisième année de licence, j'ai assisté à un cours de première année sur les structures algébriques et quand l'enseignant a donné la définition d'un anneau, un étudiant lui a posé la question : à quoi servent les anneaux ? L'enseignant a rependu : il faut des années pour répondre à cette question, il voulait dire qu'il faut des années pour citer tous les applications de la théorie des anneaux. Ici on pose la question : Est-ce que on ne peut pas motiver le sujet des anneaux dans un quart d'heure ou vingt minute ou bien on consacre une séance s'il est nécessaire pour que les étudiants comprennent l'utilité de cette notion.

On ne trouve pas à ce niveau de problèmes pour les quels on applique les théorèmes et les résultats sur les groupes, ce qui permettrait aux étudiants de voir les applications et l'utilité de cette théorie. On voit par exemple dans le cours d'analyse beaucoup d'applications de la notion de dérivabilité : étude des variations, recherche des extremums, les approximations affines, etc. On peut voir aussi les applications des intégrales dans le calcul des surfaces, ce qui n'est pas le cas pour les groupes. Si on prend le cas des fonctions numériques, les étudiants pensent à travers ces fonctions aux expériences physiques ou de la chimie, où on étudie la variation d'un paramètre en fonction d'un autre comme la variation de la vitesse en fonction du temps ou la variation de la quantité d'un produit chimique en fonction de la température, et on pense que ceci explique bien l'intérêt de la fonction et donne une motivation supplémentaire aux étudiants.

III. LES ERREURS REPETEES

Dans cette section, je liste les erreurs les plus fréquentes liées seulement à la définition de groupe, évidement il en existe d'autre qu'on rencontre à propos de la notion de morphisme, mais je pense qu'elles sont plus liées à la notion d'application qu'à la notion de groupe.

- Très souvent les étudiants oublient de vérifier si la loi de composition est bien interne.

Exemple : On considère sur l'ensemble $E = [-1,1]$ la loi de composition suivante : $x * y = x + y$, on remarque que le composé de x et y n'est pas toujours dans E parce que la somme peut dépasser 1 ou -1, l'étudiant commence directement par vérifier l'associativité, l'existence de l'élément neutre, etc.

On peut prendre aussi sur $E = \mathbb{R}$ la loi suivante :$x * y = \sqrt{x + y}$ le composé n'est pas toujours un réel, ce n'est même pas une application.

- La vérification de l'associativité peut poser un problème pour certains étudiants, j'ai remarqué que certains se trompent dans le calcul de $(a * b) * c$, et l'exemple suivant donne une bonne illustration de ce genre d'erreur :

Exercice : *On considère sur* $\mathbb{N}$ *la loi de composition interne* $*$ *définie par :*$x * y = x^2 + y^2$.

La réponse de certains étudiants est $(x * y) * z = (x^2 + y^2) + z^2$et non $(x * y) * z = (x^2 + y^2)^2 + z^2$.

On peut aussi donner l'exemple suivant :

Exercice : *Montrer que l'ensemble*$G =]-1,1[$ *muni de la loi* $*$ *définie par :* $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$ *est un groupe.*

Pour l'associativité, une des réponses est la suivante : $x * y = \frac{x+y+z}{1+xyz}$

Ici les étudiants ajoutent un à où ils trouvent un *x* et un *y*. Ce problème ne se présente pas seulement au niveau de l'associativité, mais on peut le trouver ailleurs. J'ai donné aux étudiants de première année de mathématiques et informatique la formule du maximum de deux nombre réels : $\max(x, y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}$ et après avoir démontré que la formule donne bien le maximum de deux nombres je leur ai demandé de trouver la formule du maximum de trois nombres, parmi les réponses, j'ai trouvé la suivante : $\max(x, y, z) = \frac{x+y+z+|x-y-z|}{2}$, ce qui est évidement faux, car $\max(x, y, z) = \max(\max(x, y), z)$.

IV. PROBLEME DE FORMALISME

L'étude de la logique formelle a disparu avec les réformes dans le secondaire de ces dernières années. Les symboles utilisant les deux quantificateurs (∀ et ∃) sont remplacés par les expressions écrites correspondantes. On remarque que les démonstrations des étudiants manquent beaucoup de rigueur en matière de raisonnement, de quantification et de logique.

Les écritures formelles avec les quantificateurs et les opérateurs logiques (implication, équivalence, négation...) présentent une grande ambigüité. Elles peuvent être source d'incompréhension ou d'erreurs pour les étudiants. Ils ne sont pas familiarisés avec les quantificateurs et leurs règles d'utilisation. Par exemple ils ne savent pas qu'on ne peut pas permuter deux quantificateurs différents. L'ordre des quantificateurs universels et existentiels est très important et la permutation des quantificateurs a de lourdes conséquences sur le sens d'un énoncé.

Ce problème apparaît dans la définition de groupe :

L'existence de l'élément neutre est formulé par :

$$\exists e \in G \ \forall x \in G \ (e * x = x = x * e)$$

Cette écriture est différente de $\forall e \in G \ \exists x \in G \ (e * x = x = x * e)$. Les étudiants ne comprennent pas que les deux assertions précédentes sont différentes. Quand on met $\forall x \in G$ après $\exists e \in G$ l'existence de *e* dépendra de x. Dans l'expression qui caractérise l'existence du symétrique, on commence par le symbole ∀, cette caractérisation est donnée par :

$$\forall x \in G \ \exists x' \in G \ (x * x' = e = x' * x)$$

L'existence de l'élément neutre qui est unique dans G diffère de l'existence du symétrique qui se varie d'un élément à un autre, c'est à dire que chaque élément à son symétrique.

On a constaté que les étudiants ne savent pas traduire un énoncé de la langue naturelle vers la langue formelle. J'ai demandé aux étudiants de première année universitaire de donner la différence entre les deux assertions suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N}\ tels\ que\ n^2 = m$$

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N}\ tels\ que\ m^2 = n$$

Ils rependent qu'elles sont identiques. Pourtant la première assertion signifie que le carré d'un nombre naturel est toujours un entier naturel donc elle est vrai, tandis que la deuxième signifie que tout entier naturel est le carré d'un entier naturel ce qui est évidement faux.

Le problème de formalisme ne se limite pas seulement au chapitre sur les groupes, mais on le trouve toujours là où il y a des quantificateurs comme la caractérisation de la borne supérieure d'une partie bornée de $\mathbb{R}$ ou dans la définition de la limite d'une fonction qui provoque la stupeur chez les étudiants.

- Pour chercher l'élément neutre on peut utiliser la définition, c'est-à-dire chercher un élément e vérifiant $x * e = x$, pour tout $x \in G$. Lors de la résolution de l'équation on peut tomber sur plusieurs solutions et les étudiants ne savent pas choisir. Evidement certaines solutions dépendent de x et donc on doit les éliminer, car ceci contredit le fait que l'élément neutre est unique dans le groupe et ne varie pas en fonction de x.

Exercice : *On considère sur* $\mathbb{N}$ *la loi de composition interne* $*$ *définie par :*$x * y = 3x + 2y$. *Cette loi admet-elle un élément neutre ?*

On trouve parfois sur des solutions comme celle-ci :

$$x * e = x \Rightarrow 3x + 2e = x$$
$$\Rightarrow e = -x$$

L'élément neutre est le seul élément idempotent dans un groupe, c'est à dire qui vérifie $e * e = e$, et donc chercher e revient à chercher un élément vérifiant $e * e = e$, ce qui facilite la tâche, car ici on manipule seulement une seule variable au lieu de deux. J'ai remarqué que les étudiants ignorent cette astuce, si on revient au cas de la loi définie par $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$, on trouve que $e * e = e$, est équivalent à $\frac{2e}{1+e^2} = e$ et donc $e = 0$.

Il est toutefois important de savoir qu'un élément vérifiant cette propriété n'est pas forcément l'élément neutre, si on ne sait pas au préalable que l'ensemble dans le quel on travaille est un groupe ou non, par exemple pour la loi $x * y = 3x + 2y$ définie ci-dessus $e * e = e$, entraine $e = 0$, mais 0 n'est pas l'élément neutre, car si on revient à la définition $0 = 3x \neq x$. Donc il est nécessaire quand on trouve un élément vérifiant $e * e = e$, de voir s'il vérifie la définition ou non.

V. PROBLEME DE NOTATIONS

Souvent on utilise les symboles des opérations usuelles, $+$ ou $\times$ pour désigner la loi de groupe. Quand on utilise le symbole $+$ on dit que la loi est additive, et pour $\times$ on dit qu'elle est multiplicative. Dans le premier cas, l'élément neutre est noté 0, le symétrique d'un élément $x$de G est noté $-x$, et si on prend deux éléments x, y de G le composé de $x$et du symétrique de y est noté $x - y$ au lieu de $x + (-y)$.

Si la loi est multiplicative, l'élément neutre est noté 1 et le symétrique d'un élément $x$est noté x^{-1}. Aussi dans ce cas on omet le symbole de l'opération et donc le composé de x et y est noté xy.

On dit qu'un sous ensemble H est un sous-groupe d'un groupe G, si H et non vide et si à chaque fois qu'on prend deux éléments x , y de H, le composé de x et du symétrique de y est dans H. Si la loi du groupe est noté additivement, ceci s'écrit formellement $\forall x \in H\ \forall y \in H\ x - y \in H$, et si la loi est multiplicative on écrit $\forall x \in H\ \forall y \in H\ xy^{-1} \in H$.

Les notations additive et multiplicative sont adoptées pour simplifier les écritures, mais malheureusement elles peuvent aussi créer des problèmes de compréhension chez les étudiants. Les enseignants adoptent dans leur cours une notation unique et donc l'étudiant est censé être capable de traduire toutes les propriétés d'une notation à l'autre. Quand l'enseignant adopte une notation additive dans son cours, les étudiants continuent d'utiliser la notation additive même lorsqu'il s'agit d'une notation multiplicative.

Si Gest un groupe multiplicatif, on appelle le centre de G, l'ensemble donné par :

$$C(G) = \{x \in G\ \ tel\ que\ \forall a \in G, on\ a\ xa = ax\}$$

Quand on vient de démontrer que le centre est un sous-groupe de G, on montre que $\forall x, y \in G\ \forall a \in G\ (xy^{-1})a = a(xy^{-1})$. Il se trouve que parmi les étudiants il y en a qui cherchent à vérifier que $(x - y)a = a(x - y)$.

VI. PROBLEMES ET ORIGINES

Une majorité des étudiants ne voient pas l'utilité des structures algébriques et en particulier des groupes, ce qui à notre avis vient du fait de ne pas bien introduire le chapitre sur les groupes. En effet, leur présentation est abstraite et ne montre pas les applications de cette théorie. Les étudiants posent la question : pourquoi donner des ensembles avec des lois et demander de vérifier qu'ils forment des groupes et ou donner des applications et vérifier que ce sont des morphismes ? Quel est l'intérêt ?

Pour eux, la théorie des groupes représente les mathématiques scolastiques, séparées de la réalité, et sans aucune application éventuelle à d'autres sciences, ce problème on ne le rencontre pas avec le cours d'analyse, dont on a parlé précédemment ou le cours de probabilité qui est pourtant bien liée à la vie réelle.

Après les réformes de ces dernières années le cours sur les structures algébriques a été supprimé du programme du lycée, les étudiants rencontrent donc ce cours à l'université pour la première fois, ce qui n'était pas le cas auparavant. Dans l'ancien programme, les élèves du lycée connaissent déjà la définition de groupe, anneau et corps en première année et les morphismes en terminales.

Je pense que comme c'est la première fois qu'ils étudient des structures abstraites, il vaut mieux ne pas commencer par la méthode : définition-théorème-démonstration. Et qu'il faut bien motiver le cours par des petits problèmes ou en parlant des applications de cette théorie et que l'arithmétique ou la géométrie offrent très naturellement dans des modèles bien concrets. Parfois il est difficile de voir comment utiliser une notion avant de la comprendre, mais on peut au moins parler des applications, comme les équations algébriques et dire aux étudiants que les équations algébriques de degré inferieur ou égal 4 ont une méthode générale de résolution, c'est-à-dire qu'on dispose de formules donnant les solutions des équations algébriques de degré inférieur ou égal à 4 en fonction de leurs coefficients, mais à l'aide de la théories des groupes, on a pu montrer qu'une équation de degré supérieur ou égal 5 ne peut pas se résoudre par radicaux, c'est à dire qu'on ne peut pas exprimer les solutions en n'utilisant que les opérations élémentaires et les radicaux. Ce résultat nous a permis de comprendre qu'il faut raisonner autrement et ne pas chercher encore à résoudre un problème qui ne peut pas être résolu avec l'ancien procédé.

Malgré qu'au début les étudiants ne savent pas bien faire le lien entre la théorie des groupes et les équations algébriques, mais ceci sera une motivation très importante qui peut expliquer l'utilité de cette théorie.

« On ne peut pas comprendre une définition non-motivée » (Arnold 1998, p. 25)

Un autre exemple qu'on peut citer ici est la résolution des vieilles conjectures de la quadrature du cercle, la trisection de l'angle et la duplication du cube à l'aide de la théorie des groupes.

Les étudiants ne sont pas habitués à ce niveau d'abstraction et c'est la première fois qu'ils étudient des ensembles quelconques différents des ensembles numériques usuels.

- Donner un cours d'arithmétique et étudier le cas de $\mathbb{Z}$ ou travailler beaucoup sur les ensembles des nombres peut donner de bons exemples concrets sur les groupes mais peut aussi générer quelques problèmes, ainsi dans l'esprit de certain étudiants un élément $x \in G$ et forcément pour eux un nombre, et donc $x^{-1} = \frac{1}{x}$, d'où on trouve l'erreur rencontrée en algèbre linéaire : l'inverse d'une matrice $M\,M$ est $\frac{1}{M}$.

On peut aussi regretter de ne pas avoir un module de géométrie en première année universitaire, où on trouve des exemples de groupes finis comme les transformations ponctuelles. Les élèves de lycée ont un cours sur les transformations ponctuelles mais dans ce cours on étudie les transformations d'une manière séparée et on ne donne aucun résultat général sur la structure de cet ensemble en tant que groupe. Les étudiants ignorent aussi que l'ensemble des fonctions continues ou dérivables non nuls munis de l'addition ou la multiplication des applications représentent un groupe. Il n'est pas étonnant de voir qu'une grande partie des étudiants ne connaissent qu'un seul exemple de groupe fini, qui est $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

> Les zélotes de la mathématique superabstraite, privés par les Dieux de l'imagination géométrique, ont éliminé toute la géométrie de l'éducation, alors que c'est à travers elle que passent le plus souvent les relations avec la physique et le réel (Ibid, p. 20).

REFERENCES

Arnold V. (1998) Sur l'éducation mathématique. *Gazette de la SMF* 78, 19-29.

Chellougui F. (2003) Approche didactique de la quantification dans la classe de mathématiques dans l'enseignement tunisien. *Petit x* 61, 11-34.

Godement R. (1966) *Cours d'algèbre.* Paris : Hermann.

Lang S. (1993) *Algebra.* New York : Springer-Verlag. Rééd. (2002) New York : Springer-Verlag.

Damphousse P. (2000) *Découvrir l'arithmétique*. Paris : Ellipses.

Arnaudies J.-M., Fraysse H. (1992) *Cours de mathématiques – Algèbre-1.* Paris : Dunod.

MANUELS SCOLAIRES ALGERIENS

Manuel Algérien. (2007), Mathématiques, 3ème année de l'Enseignement Secondaire, Section: Maths-Sciences expérimentale et Maths-Technique, République Algérienne, Office national des publications scolaires.

Manuel Algérien. (2008), Mathématiques, 2ème année de l'Enseignement Secondaire, Section: Maths-Sciences expérimentale et Maths-Technique, République Algérienne, Office national des publications scolaires.

Manuel Algérien. (2005), Mathématiques, 1ème année de l'Enseignement Secondaire, Section: Maths-Sciences expérimentale et Maths-Technique, République Algérienne, Office national des publications scolaires.

DIFFICULTES DES ETUDIANTS DE PREMIERE ANNEE UNIVERSITAIRE AVEC LA NOTION DE LIMITE

Ilyesse BOUZINA*

Résumé – Nous examinons dans ce texte quelques difficultés que rencontrent les étudiants universitaires de première année de la filière mathématiques-informatique avec la notion de limite. Nous présentons d'abord comment la notion de limite est enseignée au niveau de l'enseignement secondaire en analysant le manuel scolaire de Terminale et en examinant les difficultés des élèves sur un exercice. Nous examinons ensuite comment la notion de limite est abordée en première année universitaire. On constate que les problèmes persistent encore avec la définition. Nous analysons de plus près ces difficultés à travers deux exercices proposés aux étudiants. En conclusion, nous proposons quelques recommandations pour atténuer les difficultés vis à vis de cette notion à la fois au lycée et en première année universitaire.

Mots-clefs : limites, fonctions, suites, enseignement supérieur

Abstract – In this text, we analyse some difficulties encountered by students in their first year of science university in Algeria about the notion of limit. We first analyse how this concept is presented in the end of secondary school, in the official textbook and through students' solving of one exercise. We then present what is at stake about the notion of limit in first year of university and we show that difficulties with the definition still remain. We analyse in more detail students' difficulties through the solving of two exercises. Finally in conclusion we suggest some recommendations for the teaching of the limit in order to overcome the difficulties analysed.

Keywords: limits, functions, sequences, higher education

I. INTRODUCTION

Le cours d'analyse au lycée contient, entre autres, des notions de base pour les mathématiques mais surtout pour les mathématiques universitaires. La maîtrise de ces notions par les élèves s'avère indispensable, non seulement, pour le bon déroulement du cours au lycée en niveau de la Terminale car il est formé par plusieurs parties qui s'enchainent et qui sont dépendantes les unes des autres. Mais aussi pour pouvoir suivre, plus tard à l'université, ce même cours qui se refait mais en travaillant les notions en profondeur. Nous examinons dans cette étude quelques difficultés que rencontrent les étudiants universitaires de première année de la filière mathématiques-informatique avec la notion de limite. Nous nous sommes intéressés à cette notion vue son importance dans les programmes des mathématiques depuis le lycée et surtout au cours d'analyse à l'université. Ce dernier cours qui contient en grande partie l'étude d'une fonction réelle à variable réelle commence au début par les suites numériques avec lesquelles on aborde pour la première fois la notion de limite avec la définition ε-δ. Nous avons remarqué que cette définition cause beaucoup de problèmes aux étudiants ce qui parfois les empêche à poursuivre l'étude du reste de ce cours puisque plus tard, cette même définition se répète avec les limites d'une fonction et avec la continuité des fonctions.

II. LA NOTION DE LIMITE AU LYCEE

Le lycée représente le troisième niveau dans le système éducatif algérien (secondaire supérieur), les élèves y restent trois années et ont une moyenne d'âge entre 16 et 19 ans. A la fin de la troisième année (Terminale), les élèves passent un examen national, le *Baccalauréat* qui présente l'examen d'entrée aux universités.

* Université de Médéa – Algérie – bilyes.87@gmail.com

© Bouzina I. (2012) Difficultés des étudiants de première année universitaire avec la notion de limite. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (SPE1, pp. 1516–1521). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

Selon le manuel scolaire de Terminale (*Bac maths et science*) qui est seul et unique pour tout le territoire algérien, la grande partie du cours sur la notion de « limite » est basée sur les calculs directs de limites où l'élève n'a qu'à appliquer quelques transformations algébriques. La plupart des formes indéterminées sont rencontrées avec quelques techniques pour les traiter. Cependant, la définition de la limite avec ε - δ et donnée dans le manuel sous forme de phrase non formelle, juste quelques exercices sont proposés pour appliquer cette définition. Néanmoins, nous avons pu constater, en posant des questions aux étudiants de première année universitaire sur leurs cours précédents de Terminale, que ces exercices sont souvent omis par les enseignants qui estiment que ces types d'exercices n'ont pas d'intérêt en Terminale puisque tout est basé sur le calcul direct au niveau des mathématiques du lycée. Nous croyons que ceci est la cause principale du fait que les élèves ne comprennent pas vraiment la définition de la limite au niveau du lycée et donc arrivent démunis sur ce thème à l'université.

Plusieurs difficultés apparaissent chez les élèves en Terminale, pour en identifier la nature, nous avons mis en place le dispositif suivant. Nous donnons la définition telle qu'elle a été donnée dans le manuel scolaire, puis nous demandons une application directe avec un exemple simple d'une fonction.

1. Limite d'une fonction à l'infini (selon le manuel de Terminale)

Définition : Soit *f* est une fonction définie sur l'intervalle $]x_0,+\infty[$ et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que *f*(*x*) tend vers ℓ quand x tend vers $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient aussi les valeurs de *f*(*x*) pour *x* suffisamment grand. On écrit : $\lim_{x\to\infty} f(x) = \ell$.

A travers l'exercice suivant, nous voulions voir à quel point cette définition est assimilée, et à quel niveau les difficultés se présentent pour des étudiants entrant à l'université.

Exercice : Soit *f* la fonction définie sur $]3,+\infty[$ par : $f(x) = \frac{2}{x-3}$. En utilisant la définition, montrer que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Tous les étudiants interpellent l'enseignant dès le début, en disant : « Monsieur, je vous demande le point de départ ! ». Ainsi, la majorité des élèves sont bloqués au début et n'arrivent pas à démarrer, ils ne voient pas non plus ce qu'ils doivent faire, car ils ne comprennent pas comment traduire la définition formellement c'est-à-dire en symboles mathématiques. Moi-même, j'ai trouvé cette difficulté, je n'arrivais pas à expliquer l'exercice sans introduire le formalisme.

Nous avons soulevé l'obstacle du formalisme chez les élèves. D'une part, le livre évite le formalisme en donnant des définitions sous forme de phrases non formelles mais d'autre part, les élèves ne les comprennent pas et il nous semble que seul le formalisme pourrait atténuer cette difficulté.

Nous avons soulevé les mêmes problèmes avec la définition de : $\lim_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty$.

2. Limite d'une fonction en un point

Nous voulions étudier de près comment les élèves considèrent la limite à gauche et la limite à droite au lycée. Selon programme du manuel et les cours donnés par les enseignants, il apparaît que l'on insiste sur les calculs des limites à gauche et à droite sans aller au-delà pour faire sortir le sens de ces calculs. Nous voulions alors découvrir les méthodes que les élèves utilisent pour effectuer leurs calculs.

Exercice : Soit f la fonction définie sur $]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x-2}$. Calculer $\lim_{\substack{< \\ x\to 2}} f(x)$ et $\lim_{\substack{> \\ x\to 2}} f(x)$.

Les réponses des étudiants sont divisées en deux catégories :

1. Certains disent directement que $\lim_{\substack{< \\ x\to 2}} f(x) = -\infty$ (resp. $\lim_{\substack{> \\ x\to 2}} f(x) = +\infty$) car la limite à gauche, pour eux, est toujours associée au signe moins (–) (resp. la limite à droite au signe plus (+)) et donc en remplaçant x par 2, ils obtiennent la forme indéterminée $\frac{1}{0}$ qu'ils identifient à ∞ puis ils ajoutent directement le signe (–).

2. D'autres remplacent x par une valeur très proche de 2 et inférieure à 2 (par exemple : 1,99) pour la limite à gauche, et supérieure à 2 (par exemple : 2,01) pour limite à droite.

Nous avons relevé, entre autres, que les étudiants ne font aucune remarque et n'ont aucune réaction quand les deux limites (à gauche et à droite) sont différentes ou égales.

3. *Les formes indéterminées*

Les élèves au niveau du lycée savent que $(\frac{\infty}{\infty}, +\infty - \infty, \frac{0}{0})$ sont des formes indéterminées, mais est-ce qu'ils savent en exprimer le sens ?

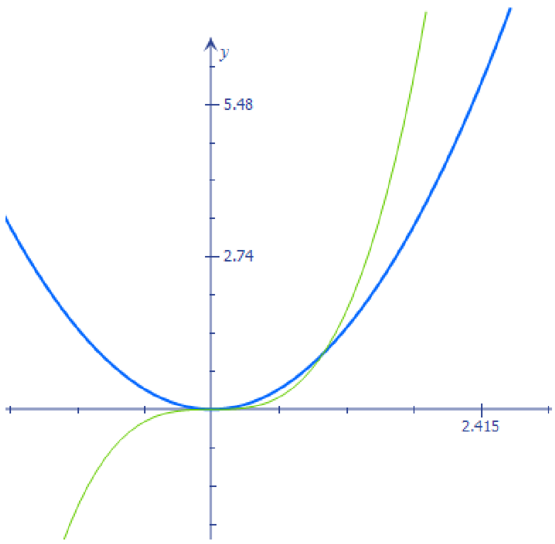
Exemple : Si on donne deux fonctions f et g d'une variable réelle x avec : $g(x) \neq 0$ et $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$

Les étudiants n'ont aucun problème à voir que l'on obtient un cas indéterminé. Mais à la question : comment traiter ce cas ? Ils ne savent pas répondre et ne comprennent même pas cette question. Nous les avons testés pour savoir s'ils pouvaient entrevoir parmi ces deux fonctions la quelle tend vers l'infini plus rapidement.

On prend par exemple les fonctions $f(x) = x^3$ et $f(x) = x^2$.

On construit alors le tableau et les graphes suivants :

x	1	10	100	1000	10000	…	10^{10}
$f(x)$	1	10^3	10^6	10^9	10^{12}	…	10^{30}
$g(x)$	1	10^2	10^4	10^6	10^8	…	10^{20}



De ce tableau découle que pour chaque valeur de x assez grande, $f(x)$ dépasse de plus en plus $g(x)$, et donc $f(x)$ tend vers l'infini plus rapidement que $g(x)$. C'est pour cela que $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.

Nos investigations montrent que les formes indéterminées restent ambiguës pour les élèves et que la manière de les traiter n'est pas une tâche abordée au lycée. Ceci nous indique comment les élèves travaillent les mathématiques au niveau du secondaire. On remarque beaucoup plus un travail procédural qui consiste à faire des calculs et appliquer des astuces, sans réellement travailler le sens et le concept ou le pourquoi et le comment. Même si ces concepts se présentent d'une manière très simple comme dans le cas des deux fonctions données en exemple.

III. LA NOTION DE LIMITE EN PREMIERE ANNEE UNIVERSITAIRE

Nous nous sommes intéressé aux étudiants de première année universitaire de la filière mathématiques-informatique dans laquelle les étudiants se spécialiseront en deuxième année soit en mathématiques, soit en informatique. Parmi les étudiants de la filière mathématiques, se formeront les futurs enseignants de mathématiques de tous les niveaux (moyen, secondaire et universitaire).

Après quelques discutions avec les étudiants de première année universitaire, on a constaté que plusieurs d'entre eux ne comprennent pas le sens de la définition formelle de la limite et donc sont incapables de la retenir. Cette définition est la suivante :

$$(\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell\,) \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in D_f : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon).$$

On a demandé aux étudiants de faire le lien entre cette définition et la première donnée au lycée.

Voici quelques réponses des étudiants :

- Cette proposition contient deux membres équivalents, le premier est simple, par contre, le deuxième est très compliqué, il contient les symboles de logique mathématique $(\Rightarrow, \Leftrightarrow)$ et les quantificateurs logiques $(\forall, \exists)$.
- Les nombres réels (ε, δ) sont des valeurs exactes ou variantes, petites ou grandes ?
- Pourquoi on met la valeur absolue ?
- On commence la démonstration par le deuxième membre de l'implication logique ou par son premier membre ?
- Qu'est-ce qu'on cherche exactement ?

Plusieurs constats émergent de ces réponses :

1- Certains étudiants ne comprennent pas le passage du premier membre vers le deuxième membre de l'équivalence, car ils ne comprennent pas la définition de la limite écrite formellement et sans interprétation géométrique. Cette nouvelle définition génère plusieurs problèmes et soulève pas mal de questions chez les étudiants : pourquoi mettre une valeur absolue ? Quel est le but voulu par cette définition exactement ? Comment faire pour s'en servir ?, quelles sont les variables et les constantes ? Quel est le lien entre toutes ces données ? Comment procéder dans la solution ?

2- Certains étudiant ne comprennent pas que ε est donné et que c'est δ qui est l'inconnue, ils ne voient pas alors que le principe de cette définition est un problème d'existence de δ, en plus certains croient que la valeur de δ est unique.

3- Certains étudiants ne comprennent pas ce qu'est une variable infiniment grande ou infiniment petite et comment utiliser ceci dans ces définitions. Ainsi ($|f(x)-\ell|<\varepsilon$) reste dépourvu de sens.

4- Certains étudiants ne voient pas la relation avec le premier membre de l'implication surtout que pendant la démonstration, on cherche une condition seulement suffisante car ce n'est pas une équivalence. Ceci est tellement compliqué pour les étudiants qu'ils ne s'en sortent jamais même après plusieurs exemples et beaucoup de temps.

L'utilisation par les étudiants de la définition de la limite

Examinons deux exercices pour expliquer comment les étudiants utilisent cette définition.

Exemple 1 : Soit (u_n) est une suite numérique définie par $u_n=\frac{1}{n}$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Solution : ($\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$) $\Leftrightarrow$ ($\forall\varepsilon>0, \exists N>0 : n>N \Rightarrow \left|\frac{1}{n}\right|<\varepsilon$).

On a $\frac{1}{n}<\varepsilon \Rightarrow n>\frac{1}{\varepsilon}$, donc il suffit de prendre $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$,

Alors, si $n\geq\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1, \frac{1}{n}<\varepsilon$, ce qui montre que $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Exemple 2 : Montrer que $\lim_{x\to 0}(x+1)=1$

Dans cet exemple, on donne la solution en détail en expliquant toutes les étapes :

($\lim_{x\to 0}(x+1)=1$) $\Leftrightarrow$ ($\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \forall x\in\mathbb{R} : |x-0|<\delta \Rightarrow |(x+1)-1|<\varepsilon$).

Or $|(x+1)-1|<\varepsilon \Leftrightarrow |x|<\varepsilon$

Donc il suffit de prendre $\delta=\varepsilon$, en effet alors : $|x-0|<\varepsilon \Rightarrow |(x+1)-1|<\varepsilon$, ce qui achève la démonstration.

Après cet exemple l'étudiant comprend comment utiliser la définition pour trouver et démontrer la limite d'une fonction quand x tend vers x_0,

On passe à un autre exercice que les étudiants devaient faire tous seuls pour comprendre comment manipuler la définition

Exemple 3 : Montrer que $\lim_{x\to 1} x^2 = 1$

Plusieurs étudiants ont donné la solution suivante :

($\lim_{x\to 1} x^2 = 1$) $\Leftrightarrow$ ($\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \forall x\in\mathbb{R} : |x-1|<\delta \Rightarrow |x^2-1|<\varepsilon$).

On a : $|x^2-1|<\varepsilon \Rightarrow |(x-1)(x+1)|<\varepsilon \Rightarrow |x-1||x+1|<\varepsilon \Rightarrow |x-1|<\frac{\varepsilon}{|x+1|}$

A ce niveau, ces étudiants sont bloqués. En effet, bien que tous les étudiants sachent commencer et développer quelques étapes, ils n'arrivent pas à dépasser la difficulté de la majoration de $\frac{1}{x+1}$.

Finalement la question que se posent les étudiants revient à savoir s'il existe une méthode générale pour majorer la distance $|f(x)-\ell|$ par la distance $|x-x_0|$. La réponse est malheureusement non. Ceci n'arrange pas les étudiants qui se demandent sans cesse comment faire. tant ils restent attachés à des mathématiques procédurales comme au lycée.

La solution de l'exercice par l'enseignant

($\lim_{x\to 1} x^2 = 1$) $\Leftrightarrow$ ($\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \forall x\in\mathbb{R} : |x-1|<\delta \Rightarrow |x^2-1|<\varepsilon$).

On a : $|x^2 - 1| = |(x-1)^2 + 2(x-1)|$ donc $|x^2 - 1| \leq |(x-1)^2| + 2|x-1|$

Or $|x^2 - 1| < \delta \Rightarrow |(x-1)^2| + 2|x-1| < \delta^2 + 2\delta$

Si $\delta < 1$ alors $\delta^2 + 2\delta < 3\delta$, ainsi il suffit de prendre $\delta = \inf\left(1, \frac{\varepsilon}{3}\right)$.

Cette résolution fait apparaître que la technique consiste à majorer la distance $|x^2 - 1|$ en fonction de la distance $|x - 1|$ pour faire une majoration de la première qui marche en fonction d'une majoration de la deuxième.

IV. CONCLUSION

Nous avons dans ce texte mis à jour plusieurs difficultés à la fois au niveau secondaire et universitaire concernant la notion de la limite, ceci nous amène à constater que cette notion reste délicate à enseigner et à apprendre par les étudiants. Le fait qu'elle se présente à la fois au lycée et à l'université n'aide pas puisque la notion n'est pas travaillée au lycée de façon à bien l'introduire à l'université. Au niveau universitaire, les outils nécessaires pour réellement comprendre les limites ne sont pas toujours donnés, ce qui rend la tâche difficile à la fois aux enseignants et aux étudiants.

Dans l'état de nos réflexions nous pouvons avancer les recommandations suivantes, qu'il conviendra de mettre à l'épreuve :

- Donner un cours ou des exercices sur les inégalités et les encadrements avant d'entamer les cours sur les notions de la limite.
- Au niveau du lycée placer le cours sur les suites numériques avant le cours sur les limites des fonctions, parce que dans le cas des suites il n'y a qu'un seul cas de calcul de limite ($\lim_{n\to\infty} u_n$), et la définition est plus simple que pour les fonctions.
- Utiliser les graphes pour interpréter les limites.
- Expliquer la différence entre l'implication et l'équivalence et l'ordre d'apparition des quantificateurs logiques.

REFERENCES

Allab K. (2008) *Eléments d'analyse, tome 1*.Alger : Offices des publications universitaires.
Piskounov N. (1980) *Calcul différentiel et intégral, tome 2, 9*[e]. Moscou : édition MIR.

MANUELS SCOLAIRES

Manuel Algérien. (2010) Mathématiques, 3ème année de l'Enseignement Secondaire, Section : Maths-Sciences expérimentale et Maths-Technique, République Algérienne, Office national des publications scolaires.

LES GRILLES DE CRITERES DE REUSSITE
OU COMMENT DEVELOPPER LES COMPETENCES DISCIPLINAIRES CHEZ LES ELEVES

Maud CHANUDET*

Résumé – Nous avons cherché à approfondir la notion de compétence et nous sommes intéressées aux moyens de développer les compétences disciplinaires chez les élèves. Pour cela, en nous appuyant sur les différentes théories élaborées en didactique, notamment la théorie des situations didactiques, nous avons élaboré en collaboration avec les élèves, des critères de réussite relatifs à la compétence « établir un programme de construction d'une figure complexe ». La finalité de notre expérimentation a été de savoir si ce dispositif permettait aux élèves de développer la compétence étudiée.

Mots-clefs : compétence, situation didactique, critères de réussite, grille d'évaluation, programme de construction

Abstract – During our research, we tried to deepen our understanding of the notion of competence and were interested in the means of improving mathematics competences of pupils. On the base of different theories developed in didactics of mathematics, we set up, in collaboration with, standards for evaluating success in reference to the competence: "setting up a construction program for a complex figure". Our goal was to find out whether this didactical device would help students in improving this competence.

Keywords: competence, didactical situation, standards of success, evaluation grid, construction program

I. LES COMPETENCES DANS L'ENSEIGNEMENT FRANÇAIS

L'éducation en France a connu dans les années 1970 le profond bouleversement de la création du collège unique, mis en place suite à la réforme Haby datant du 11 juillet 1975, qui unifie les structures pédagogiques en mettant fin à l'organisation de la scolarité en filières. En même temps que ces bouleversements institutionnels, il a fallu réfléchir aux contenus des programmes d'enseignement afin de proposer un programme désormais commun à tous les élèves du collège, et notamment ce qui allait être considéré comme exigible de la part de chaque élève quittant le collège. Plus récemment, l'idée de mettre en place un socle commun de connaissances que chaque élève doit acquérir avant la fin de sa scolarité obligatoire est apparue. L'idée de mettre en place un tel socle a été initiée par une commission présidée par M. Bouchez, inspecteur de l'Education Nationale qui, en novembre 1993, a présenté quarante propositions, dont celle de la mise en place d'un socle commun de connaissances à tous les élèves. Ce n'est qu'en 2005 que le projet est entériné et apparaît dans les textes. Cependant, le projet a subi quelques modifications car il est désormais question d'un socle commun de connaissances mais aussi de compétences. Ainsi, durant quatre ans, les modalités de mise en place dans les programmes ont été à l'étude et enfin, à la rentrée 2009, un socle commun de connaissances et de compétences apparaît dans les programmes officiels du collège (BO[1] spécial n°6 du 28 août 2008). Il présente ce que tout élève doit savoir et maîtriser à la fin de la scolarité obligatoire. Ce socle prend la forme d'une liste de sept grandes compétences à partir desquelles sont explicitées des connaissances qui s'y rattachent. Depuis 2011, la maîtrise des sept grandes compétences du socle est nécessaire pour obtenir le diplôme national du brevet (fin de la scolarité obligatoire - secondaire 1). Le terme compétence était déjà présent dans le monde scolaire bien avant la mise en œuvre effective du socle commun,

* Collège Pierre Valdo Vaulx en Velin – France – maud.chanudet@wanadoo.fr
Mémoire réalisé avec Anne Sophie CHERPIN.

[1] BO veut dire Bulletin Officiel. C'est la publication officielle des lois et décrets du gouvernement français (voir lien internet en bibliographie).

© Chanudet M. (2012) Les grilles de critères de réussite ou comment développer les compétences disciplinaires chez les élèves. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (SPE1, pp. 1522–1533). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

sans qu'il soit clairement explicité. Lors d'un examen par exemple, les élèves doivent avoir non seulement des connaissances, mais des connaissances mobilisables au bon moment, à bon escient et doivent aussi être capables d'identifier et de résoudre le problème posé. Sorti de ces moments d'évaluation, le système scolaire développe et exige plutôt des capacités qui peuvent être transversales, comme par exemple comprendre une consigne ; ou disciplinaires, comme savoir résoudre une équation du premier degré à une inconnue. Ces capacités peuvent être décontextualisées et ne prennent pas en charge l'ensemble d'une situation. Or, afin de développer les compétences des élèves, on peut chercher à développer les dispositions qui permettent de gérer globalement une situation complexe. Pour que les élèves développent ces compétences, il peut être judicieux de leur faire prendre conscience des critères qui interviennent dans la réussite de la résolution d'un problème et qu'ils puissent juger des points à travailler pour s'améliorer.

II. CONTEXTE DE NOTRE TRAVAIL

La notion de compétence a été largement étudiée (Roegiers 2004, Scallon 2004 Perrenoud 1997) et fortement discutée. Nous retenons la définition suivante :

> Une capacité d'action efficace face à une famille de situations, qu'on arrive à maitriser parce qu'on dispose à la fois des connaissances nécessaires et de la capacité de les mobiliser à bon escient, en temps opportun, pour identifier et résoudre de vrais problèmes.
> (http://www.unige.ch/fapse/SSE/teachers/perrenoud/php_main/php_2000/2000_22.html)

Dans ce travail, nous avons voulu aborder les questions suivantes : comment aider un élève à se situer quant à son degré d'acquisition d'une compétence ? Est-ce que l'établissement de critères de réussite relatif à une catégorie de problèmes, peut permettre aux élèves de développer leurs compétences ? Plus précisément, est-ce que la mise en œuvre de grille de critères de réussite, en collaboration avec les élèves, peut favoriser chez ces derniers le développement de la compétence disciplinaire « savoir rédiger un programme de construction en classe de 6ème » ?

Afin de développer les compétences disciplinaires chez les élèves, il faut tout d'abord définir précisément les familles de situations se rapportant à la compétence visée et les critères d'appartenance à ces familles de situations. Pour l'étude d'une telle famille, on s'intéresse au « champ de problèmes qui peut être engendré à partir d'une situation par la modification des valeurs de certaines variables qui, à leur tour, font changer les caractéristiques des stratégies de solution » (Brousseau 1982 a)

Cependant, les choix opérés ne peuvent pas être totalement objectifs. En définissant la famille de situations en relation avec une compétence, l'enseignant doit veiller à ce qu'elle soit à la fois assez vaste pour permettre d'étayer le panel d'exercices s'y rapportant, mais aussi assez restreinte pour permettre de cibler les exercices appropriés, et d'en fixer les limites. Au moment de l'évaluation de la compétence, il semble essentiel de concevoir que sa maîtrise n'est pas figée, mais que c'est plutôt un processus. Il semble alors plus judicieux de s'intéresser à l'évolution de l'acquisition de la compétence et non au niveau de l'élève à un moment donné. Vergnaud (2001) donne en ce sens plusieurs définitions du terme compétence qu'il considère comme complémentaires. La première est que : « A est plus compétent que B s'il sait faire quelque chose que B ne sait pas faire. Ou encore A est plus compétent au temps t' qu'au temps t parce qu'il sait faire quelque chose qu'il ne savait pas faire. » (Op. cité, p. 2)

Le professeur doit ainsi pouvoir mesurer cette évolution. Pour cela, il peut construire en collaboration avec les élèves une grille lui permettant de suivre au fur et à mesure des situations proposées, l'évolution de l'élève quant à la maîtrise des critères déterminants pour la réussite de l'exercice proposé.

Dans notre travail, nous avons choisi la tâche « établir un programme de construction d'une figure complexe » en classe de 6ème (élèves de 10-11 ans). Nous avons cherché à savoir, à travers notre expérimentation, si la mise en place d'une grille de critères de réussite permet aux élèves de progresser dans la maîtrise de cette compétence à la fois langagière et mathématique. Nous avons décidé de travailler en sixième sur le chapitre traitant des triangles et cercles, et plus particulièrement sur la partie relative à la construction de figures et à l'élaboration de programme de construction. Nous avons pu travailler avec deux classes de sixième, l'une en France, l'autre en Syrie, à l'occasion d'un stage à l'étranger à l'école française d'Alep.

III. LES PROGRAMMES DE CONSTRUCTION

En arrivant en classe de sixième[2], les élèves utilisent déjà un panel de figures géométriques, comme les cercles, triangles, losanges, carrés, rectangles. Cependant, ils n'ont pas encore appris à construire une figure suivant un programme de construction, ni à établir un tel programme à partir d'une figure donnée. D'ailleurs, nulle part n'apparaît l'expression de « programme de construction » dans le programme officiel, nous emploierons toutefois cette dénomination pour désigner une compétence que nous jugeons importante : « savoir élaborer un programme de construction relatif à une figure ». Par « programme de construction », nous définissons un ensemble de problèmes tels que leurs résolutions nécessitent l'explicitation détaillée des étapes permettant de construire une figure complexe. Le terme de figure complexe nécessite de connaître au préalable, le sens du terme « figure simple ». Par figure simple, nous entendons une figure élémentaire, déjà étudiée par les élèves et avec lesquelles ils sont familiers. En classe de sixième, les figures simples auxquelles nous nous intéressons sont le carré, le rectangle, le losange, le cercle, le triangle. A cela vient s'ajouter les relations de parallélisme et d'orthogonalité entre droites. Nous considérerons qu'une figure complexe est une figure constituée d'au moins deux figures simples, liées entre elles. . Les travaux de Duval (1994) montrent que la lecture ou la reconnaisance d'une figure comporte de réelles difficultés pour les élèves. Pour élaborer un programme de construction pour une figure complexe il faut en effet analyser la figure présentée en repérant les figures élémentaires constituant la figure complexe, mettre en relation les figures simples entre elles en définissant en particulier les relations d'incidence et les points remarquables et enfin de hiérarchiser, à partir de ces relations, les étapes de construction de la figure. La difficulté de l'élaboration d'un programme de construction provient du fait qu'elle nécessite la coordination de nombreuses tâches (analyser, identifier, relier, hiérarchiser, nommer,...) qui mobilisent l'ensemble des savoirs géométriques des élèves sur les figures (connaissance des figures, propriétés, ...). La validité d'une solution proposée par un élève tient au fait que la figure de départ doit être reconstituable à partir du programme de construction qu'il a établi, à l'identique dans le cas où les mesures de la figure sont données, de manière à obtenir une figure ayant les mêmes propriétés que la figure proposée dans le cas où les mesures ne sont pas données.

Différents éléments interviennent comme la nature et le nombre des figures simples composant les figures complexes, mais aussi la chronologie au sens où une figure complexe peut être reconstituée à partir de différents programmes de construction ou à l'inverse à partir d'un seul programme de construction. Pour certaines figures complexes, l'ordre de

[2] Première année du Collège en France (secondaire 1, grade 6, âge 11-12 ans)

construction des figures élémentaires n'importe pas, alors que pour d'autres, seule la construction dans un ordre précis des figures simples peut permettre de reconstituer la figure. Nous considérerons pour notre étude que deux programmes de construction sont distincts dès que deux étapes ne sont pas données dans le même ordre.

Afin de développer chez les élèves la compétence de savoir établir un programme de construction d'une figure complexe, il est nécessaire de proposer des problèmes de complexité croissante. Ainsi, lors des premiers exercices, la notion d'ordre dans la construction des figures simples n'intervient pas, et le nombre de figures simples, de sous-figures simples composant la figure complexe est limité à deux, voire trois maximum, alors que dans les exercices finaux, les figures complexes sont composées de plusieurs sous-figures simples, et les programmes de construction ne peuvent être énoncés que dans un ordre précis.

IV. DESCRIPTION DE L'ENSEMBLE DES SEANCES

Lors de la première séance de travail sur le thème des programmes de construction, nous avons proposé aux élèves de travailler sur un premier problème. Pour cela, nous avons formé des groupes de quatre élèves de niveau hétérogène. Le choix de mettre les élèves par groupe, devait permettre, au travers des interactions, l'extériorisation verbale de connaissances, questions et prises de décisions et ainsi l'entrée dans un processus de preuves et de réfutations pour convaincre le partenaire. La figure complexe étudiée est formée à partir de trois figures simples qui sont le carré, le triangle isocèle et le segment.

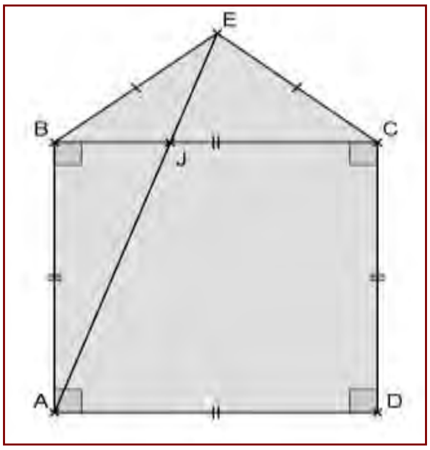


***Figure 1** – Exercice 1*

L'ordre de rédaction du programme de construction intervient seulement pour la construction d'une des figures simples : le segment [AE]. A la fin de la séance, nous avons ramassé les productions des différents groupes qui ont produit une réponse commune au problème. A l'issue de cette première séance, nous avons étudié ces productions afin d'en sélectionner certaines que nous avons réutilisées à la séance suivante. Ainsi, nous avons choisi celles qui présentent des erreurs que nous avons trouvées dans plusieurs copies, ou bien des erreurs qui ne permettent pas de reconstruire correctement la figure initiale. Ce choix est fonction des productions des élèves et il nous avait semblé difficile d'établir avant l'expérimentation, des critères précis de choix.

La deuxième séance a été consacrée à l'étude de ces réponses d'élèves. Nous avons demandé à la classe de déterminer des critères qui permettent de rédiger un programme de construction valide. Les élèves devaient donc détailler ce qui convenait ou non dans les productions proposées. La phase de synthèse nous a permis de justifier l'intérêt de la liste ainsi établie, sous forme d'une grille, que les élèves pourraient exploiter lors des séances suivantes, afin de rédiger de nouveaux programmes de construction et de s'auto-positionner. La grille élaborée énumère scrupuleusement les critères que les élèves ont énoncés, discutés et choisis en commun lors de la phase de communication.

La troisième séance nous a permis de vérifier que les élèves parvenaient à utiliser la grille commune de critères pour améliorer leur programme de construction. Nous leur avons donc distribué un nouveau problème plus complexe que le précédent.

Faustine a déjà tracé le triangle ABC.

Rédige un programme de tracé lui permettant de réaliser la figure.

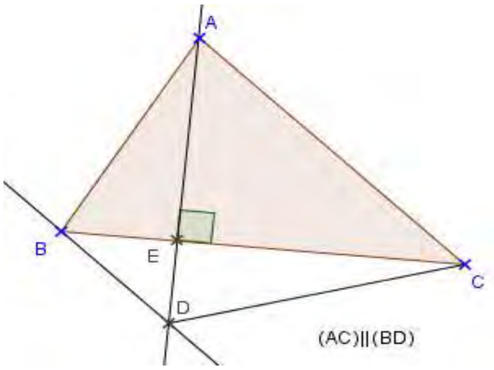


Figure 2 *– Exercice 2*

Lors de cette séance, les élèves travaillaient individuellement. A cet instant de l'expérimentation, nous voulions commencer à voir si les élèves avaient compris le principe d'un programme de construction. Pour pouvoir le vérifier, il fallait que nous puissions avoir des productions personnelles d'élèves. De plus, la grille étant propre à chaque élève, son utilisation est d'autant plus significative qu'elle avait été remplie de façon individuelle. Une fois le problème résolu, nous avons demandé aux élèves de se positionner quant au respect des critères permettant de valider un programme de construction. L'aspect réflexif de ce travail qui demande à l'élève de savoir où il se situe dans l'apprentissage en jeu apporte un intérêt supplémentaire à l'utilisation de la grille. A l'issue de la séance, nous avons ramassé les productions des élèves, que nous avons corrigées ainsi que leurs grilles pour en déterminer leur exploitation. La quatrième séance a permis une validation par les élèves eux-mêmes. Pour cela, nous avons séparé la classe en deux afin de faire travailler les élèves sur des sujets différents. Nous avons distribué à chaque élève un problème faisant intervenir une figure complexe.

Ecris un texte permettant de tracer la figure.

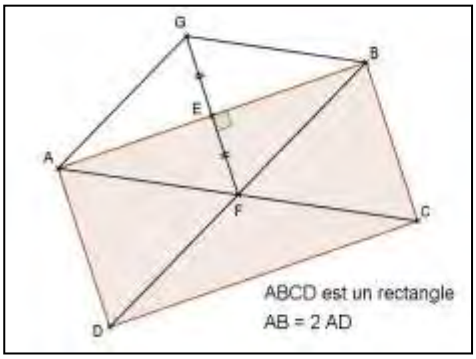


Figure distribuée au groupe A

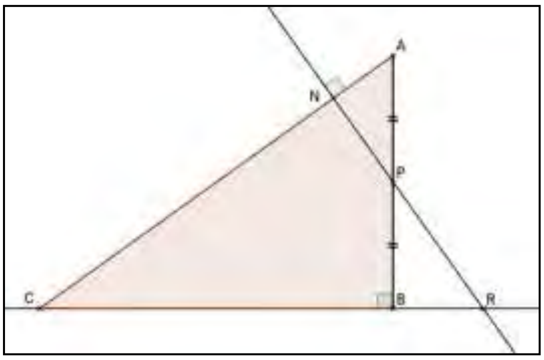


Figure distribuée au groupe B

Figure 3 – *Exercice 3*

Les élèves ont établi leur programme de construction et rempli leur grille. Ensuite, chaque élève s'est vu attribuer le rôle de correcteur de la production d'un élève de l'autre groupe. L'intérêt de cette permutation était de permettre aux élèves de valider la production d'un de leurs pairs. Un des objectifs était de permettre aux élèves de prendre conscience des ambiguïtés de leur langage et de la nécessité d'un langage commun. Les deux séances suivantes ont permis de proposer aux élèves des problèmes de plus en plus complexes au sein de la famille de situations étudiées. Le choix des figures proposées était ainsi sous-tendu par la volonté de complexifier les problèmes au fur et à mesure (figure complexe composée d'au moins quatre figures simples à construire dans un ordre unique, lien entre les figures simples sera de plus en plus difficile à établir, et pourtant essentiel pour la construction). Nous avons corrigé les productions des élèves afin de mesurer leur avancement.

V. REALISATION DANS LES CLASSES

Comme nous l'avons dit, nous avons tout d'abord réalisé une première expérimentation en Syrie, puis nous en avons tiré les premières conclusions qui nous ont permis de modifier un peu l'expérimentation que nous avons ensuite faite en France.

1. Une pré expérimentation

Dans le cadre de notre formation à l'IUFM[3] nous avons eu l'opportunité d'effectuer un stage à l'étranger, en Syrie, au Lycée Français d'Alep. Cet établissement est géré par la Mission Laïque Française et applique les textes officiels de l'Education Nationale française. Le public que constituent les élèves de cet établissement, regroupant les niveaux du primaire du collège et du lycée, suit les cours en français bien que n'étant pas pour la plupart francophones de naissance. Nous sommes intervenues dans une classe de sixième, et avons pu tester en partie notre expérimentation. Cette pré-expérimentation n'a pas pu être menée à son terme mais nous a permis tout de même d'établir de premières conclusions sur notre étude et d'apporter ainsi des modifications au scénario original.

Suite à cette pré-expérimentation nous avons voulu la confronter à notre hypothèse de départ, à savoir que l'explicitation des critères de réussite pour une compétence donnée et son utilisation au sein de grilles peuvent permettre de développer cette compétence chez les élèves. Pour cela, nous avons analysé l'évolution de la maîtrise de la compétence « établir un programme de construction d'une figure complexe » chez trois élèves du groupe 1, nommés α, β et γ. Nous avons donc étudié la production du groupe relatif au premier exercice proposé, puis les productions de chacun de ces élèves lors de la dernière séance. Pour attester de la progression ou non de chacun de ces élèves, nous avons utilisé la grille afin de savoir si les critères de réussite établis avec eux avaient été pris en compte[4]. Il ressort que les trois élèves étudiés ont progressé de façon significative quant à l'utilisation des critères de réussite même si un nombre important de critères ont été moins bien utilisés à la quatrième séance qu'à la première. Cela vient sans doute du fait que les exercices proposés en début d'expérimentation étaient de difficulté moindre que ceux proposés à la fin, et que les critères mis en jeu lors des dernières séances devaient être utilisés de façon plus rigoureuse. Bien que ne s'étant pas déroulée dans les mêmes conditions que celles prévues pour l'expérimentation en France, cette pré-expérimentation a fait ressortir les fragilités de l'expérimentation que nous avions

[3] *Institut Universitaire de Formation des Maîtres*, où sont formés les enseignants du primaire et du secondaire en France.
[4] Cf. Annexe 2.

prévu de mener et nous a amenées à effectuer quelques modifications portant davantage sur la forme que sur le fond.

Une des premières conclusions que nous avons tirée de cette expérience a été la nécessité d'avoir une idée très précise des éléments à observer lors des séances de travail avec les élèves. Notamment lors des échanges entre élèves, nous avons manqué cruellement de moyens de recueil d'informations. Nous avons donc décidé lors de notre expérimentation, de restreindre le public que nous allions observer, et de définir clairement les éléments que nous souhaitions observer. Afin de synthétiser ces deux éléments, nous avons défini deux grilles d'observation des séances, une pour les travaux individuels, une pour les travaux de groupe.

La deuxième conclusion que nous avons pu tirer suite à cette pré-expérimentation tient à la manière de présenter les activités aux élèves. Les élèves de l'école française d'Alep n'étant pas aussi familiers avec la langue française que ne le sont les élèves du collège où nous avons mené l'expérimentation, un des points délicats qui nous est apparu en Syrie a été la présentation des consignes aux élèves. Supposant que cela pouvait être dû au caractère concis des énoncés, nous avons pris le parti d'en proposer des plus complets mais aussi plus longs pour chaque exercice. La dernière modification apportée à la grille renvoie au problème de dualité entre le positionnement de l'élève et l'évaluation de l'enseignant. Nous avons ainsi pris le parti lors de l'expérimentation de travailler avec deux grilles, une propre à l'élève et lui permettant de s'auto-positionner sans jugement de l'enseignant, et une seconde propre à l'enseignant et permettant à ce dernier de juger de l'amélioration de la maîtrise des critères. Un des objectifs de cette dissociation est de permettre à l'élève de s'approprier sa grille sans craindre que ses positionnements ne soient critiqués par le professeur.

2. *Expérimentation finale*

Pour la mise en œuvre de notre expérimentation dans la classe de sixième du collège en France, nous nous sommes d'abord penchées sur le choix des élèves que nous allions observer en cherchant des élèves aux profils divers. Nous avons donc choisi ces élèves en nous servant de leurs résultats depuis le début de l'année en mathématiques, et en faisant appel aux conclusions subjectives que nous avons pu tirer lors des moments d'observation en classe. Nous avons retenu les quatre élèves aux profils suivants :

- l'élève *a* qui n'a pas de problème de compréhension des concepts mathématiques mais qui manque d'organisation et de clarté dans ses rédactions ;
- l'élève *b* qui présente des difficultés de compréhension et qui ne s'investit pas dans le travail ;
- l'élève *c* qui montre de bonnes capacités dans la mise en œuvre des techniques mais qui peine à réussir lors de problèmes plus ouverts, moins guidés ;
- l'élève *d* qui a des difficultés notamment en géométrie mais qui s'investit dans son travail et qui a à cœur sa réussite.

Nous avons présenté aux élèves les quatre séances détaillées précédemment. Les critères qui ont été retenus à la suite de cette phase ont été les suivants :

Faire attention à :

- *Ecrire un texte clair et précis ;*
- *Ne pas oublier d'information pour les objets mathématiques (triangle isocèle en…) ;*
- *Utiliser le bon vocabulaire mathématique (une droite n'est pas un segment) ;*

- *Ne pas rajouter de précisions inutiles ;*
- *Utiliser du vocabulaire mathématique ;*
- *Ne pas faire de fautes d'orthographe dans les mots mathématiques ;*
- *Ne pas parler de points que l'on n'a pas encore définis ;*
- *Ne pas oublier la ponctuation ;*
- *Aux notations et écritures mathématiques (le carré ABCD) ;*
- *Ne pas utiliser de termes géographiques (en haut, à l'ouest,…) ;*
- *Refaire la figure.*

Tout au long de cette expérimentation, nous avons noté, séance par séance, la bonne utilisation ou non de chacun des critères retenus à l'issue de la deuxième séance, pour chacun des élèves observés en étudiant chacune de leur réponse, à chacun des exercices proposés. A titre d'exemple, l'élève *a* est resté constant par rapport à l'utilisation des différents critères lors des différentes séances. Les exercices proposés étant de plus en plus complexes, ses productions se sont avérées de moins en moins claires. Certains critères que cet élève a moins bien utilisés lors de la cinquième séance, que lors de la troisième séance sont l'utilisation de termes non mathématiques, l'oubli d'informations permettant de parler des objets mathématiques. Ceux-ci sont liés à l'aspect rédactionnel du programme de construction et non à l'identification des figures simples, des relations d'incidence entre autres. Or, c'est justement parce que l'élève *a* présentait des difficultés de rédaction que nous avions choisi de l'observer. Mais celui-ci ne s'étant pas amélioré sur l'utilisation des critères relatifs à cet aspect, nous ne pouvons pas affirmer que la mise en place d'une grille de critères de réussite, a permis de développer cette compétence chez lui.

De façon plus générale, quant à l'évolution de la maîtrise de la compétence étudiée chez les différents élèves auxquels nous nous sommes intéressées, les conclusions que l'on peut en tirer sont relatives à chacun de ces quatre élèves. Chez trois de ces derniers, à savoir *a*, *c* et *d*, nous pouvons affirmer qu'ils sont devenus plus compétents (au sens de Vergnaud 2001) en fin d'expérimentation qu'en début car ils savaient mieux répondre au problème qui leur était posé, alors qu'ils étaient confrontés à des problèmes de plus en plus complexes et savaient donc répondre à des exercices qu'ils ne savaient pas résoudre auparavant.

> On n'est pas expert seulement parce qu'on a répété un grand nombre de fois le même geste ou le même raisonnement, mais aussi, parce qu'on est en mesure d'aborder et de traiter des situations nouvelles, jamais rencontrées auparavant. (Vergnaud 2001, p .4)

L'élève *c* a même atteint un niveau expert en proposant des programmes de construction valides en fin d'expérimentation. L'élève *b* qui rencontrait des difficultés face à certains critères en début d'expérimentation, en a rencontré d'autres lors des dernières séances mais il a maintenu un niveau de maîtrise de la compétence sensiblement constant.

Quant à l'apport de la grille dans l'évolution de la maîtrise de la compétence, il semble difficile de tirer des conclusions claires. Pour trois des élèves, bien que deux d'entre eux aient atteint un niveau plus expert, il semble que le bénéfice tiré de la grille ait été assez modeste. Aucun de ces trois élèves, lors d'aucune des séances, n'a effectué de modification de son écrit suite au remplissage de sa grille. On peut penser que cette phase a été vécue par ces élèves comme un moyen de satisfaire les attentes du professeur, et non comme un outil leur permettant de parfaire leur travail. Seul le dernier élève s'est approprié la grille et a vu en cette dernière un moyen de s'assurer de la bonne utilisation des critères essentiels à l'établissement d'un programme de construction. Des re-médiations ont été apportées aux textes suite à l'utilisation de la grille. Notamment, la multiplicité du recours aux dessins à main levée qui, comme le précisent Celi et Bessot (2008, p. 37) « attestent d'une recherche qui rattache le raisonnement des élèves non aux dessins mais à la figure géométrique qu'ils représentent ».

Cependant, un des aspects positifs qui doit être souligné est que la co-construction de la grille de critères par l'enseignant et les élèves a permis à chacun d'en comprendre les intitulés. Ce qui atteste de cette bonne compréhension est que la majorité des élèves a rempli sa grille de façon cohérente avec son écrit en fin d'expérimentation.

VI. CONCLUSIONS

La notion de compétence que nous avons tenté d'approcher à travers cette exéprimentation est très complexe. La notion de programme de construction était un objet intéressant pour étudier le développement d'une compétence par le biais d'une grille de critères de réussite et il serait cependant intéressant de réemployer ce travail, à d'autres niveaux, sur d'autres notions. Si nous étions amenées à mettre en place de nouveau notre expérimentation, nous apporterions quelques modifications dans son fonctionnement.

Tout d'abord, nous avons pu constater que lors des séances de travail en groupe, les élèves bien que débattant entre eux de façon très constructive ont éprouvé des difficultés à retranscrire leur raisonnement à l'écrit, notamment lors de la détermination des critères de réussite. Il serait donc peut-être judicieux de proposer des premières séances privilégiant les débats, les échanges verbaux, afin de permettre aux élèves de ne pas se focaliser sur la phase de rédaction mais de se concentrer sur la phase d'observation de la figure. Ces débats peuvent avoir lieu au sein des groupes d'élèves, mais aussi entre l'enseignant et le groupe classe. L'une des difficultés majeures rencontrée par les élèves a été de reconnaître les figures simples et les relations d'incidence composant la figure complexe proposée. Pour pallier cette difficulté, l'enseignant pourrait proposer un travail préliminaire d'identification des relations entre les figures. Ce travail pourra être présenté soit sous la forme d'activités de début de séance pouvant être proposées bien avant le début de l'expérimentation, soit sous la forme de séances précédant immédiatement celle-ci. L'avantage de ce travail préliminaire est aussi de permettre de proposer, dès la première séance de l'expérimentation, un problème plus complexe permettant aux élèves d'identifier un panel plus large et plus complet de critères de référence.

Un autre aspect qui pourrait être travaillé avec les élèves est celui de la reconnaissance perceptive des propriétés géométriques. De nombreux élèves ont fait référence, dans leur programme de construction, à des propriétés géométriques paraissant vérifiées à l'œil nu, mais non vérifiées. Or, comme le précise Duval, 1994, « une figure est regardée par rapport à une dénomination, une légende ou une hypothèse qui en fixe explicitement certaines propriétés ».

Une autre idée est de rendre l'objet grille plus évolutif et le présenter aux élèves comme un outil en construction présentant une liste de critères non exhaustive et à compléter au fil des séances.

Néanmoins, nous ne pouvons déterminer si le développement de la compétence observée chez trois des quatre élèves tient à la mise en œuvre et à l'exploitation d'une grille de critères de réussite ou bien au travail sur la compétence, travail effectué à travers la confrontation des élèves à des exercices de plus en plus complexes, s'appuyant sur des situations de plus en plus larges au sein de la famille considérée.

A la suite de notre étude, il nous semble ambitieux d'attendre de nos élèves un auto-positionnement quant à l'acquisition de la compétence mais il peut être intéressant de les amener à juger par eux-mêmes de la bonne utilisation ou non des critères de référence établis. C'est ce que souligne Meirieu, cité par Pillonel et Rouiller (2001) : « l'essor de l'autonomie de l'apprenant est indissociablement lié à l'auto-évaluation ».

Enfin, cette étude nous a amené à nous poser d'autres questions, nous a conduits à envisager d'autres axes d'étude. Le développement d'une compétence ne peut-il pas passer par une confrontation des élèves, tout au long de l'année, à des problèmes s'y référant ? Quels autres outils peut-on utiliser pour développer les compétences disciplinaires chez les élèves ? Une grille de critères de réussite peut-elle être mise en place pour chacune des compétences visant à être développée chez les élèves ? Pourra-t-on un jour n'évaluer les élèves que par compétences ?

REFERENCES

Brousseau G. (1982 a) Les objets de la didactique des mathématiques. *Actes de la Deuxième école d'été de didactique des mathématiques*, France.

Celi V., Bessot A. (2008) Statut et rôle du dessin dans la formulation d'un programme de construction au collège, *Petit x* 77, 1-12.

Duval R. (1994) Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. *Repères IREM* 17, 120-138.

Pillonel M., Rouiller J. (2001) Cahiers pédagogiques n°393 - dossier « Accompagner : une idée neuve en éducation ».
http://www.cahiers-pedagogiques.com/article.php3?id_article=987

Perrenoud P. (1997) *Construire des compétences dès l'école*. Paris : ESF

Roegiers X. (2004). *L'école et l'évaluation*. Bruxelles : De Boeck.

Scallon G. (2004) *L'évaluation des apprentissages et l'approche par compétences*. Bruxelles : De Boeck

Vergnaud G. (2001) Forme opératoire et forme prédicative de la connaissance. In Portugais J. (Ed.) *Actes du Colloque GDM - La notion de compétence en enseignement des mathématiques, analyse didactique des effets de son introduction sur les pratiques et sur la formation* (pp. 6-27). http://smf4.emath.fr/Enseignement/TribuneLibre/EnseignementPrimaire/ConfMontrealmai2001.pdf

BO spécial n°6 du 28 août 2008, Programmes de mathématiques du collège.
http://media.education.gouv.fr/file/special_6/52/5/Programme_math_33525.pdf

La documentation française, le collège unique
http://www.ladocumentationfrancaise.fr/dossiers/college-unique/reformes.shtml#renovation-college-unique

Socle commun de connaissances et de compétences, 3 Avril 2009.
http://eduscol.education.fr/pid23228-cid47733/socle-commun-et-enseignements.html

ANNEXE 1

Critères : Ai-je pensé à…	1ère évaluation		2ème évaluation		3ème évaluation		Evaluation finale		
	oui	non	oui	non	oui	non	acquis	en cours	non acquis
Faire attention aux fautes d'orthographe									
Mettre la ponctuation									
Utiliser des verbes mathématiques (tracer)									
Utiliser du vocabulaire mathématique (droites, parallèles, point d'intersection)									
Mettre toutes les informations nécessaires pour utiliser le vocabulaire mathématique (parallèle à, isocèle en)									
Utiliser correctement les écritures mathématiques (un carré ABCD, un segment [AF]…)									
Faire attention à l'ordre des étapes, à la chronologie									
Ne pas oublier d'étapes dans la construction									
Ne pas rajouter d'informations inutiles pour construire la figure									
Ne pas utiliser de termes géographiques (en bas,…)									
Essayer de refaire la figure en utilisant le texte									

Tableau 1. – *Grille de critères de réussite, Syrie*

ANNEXE 2

Critères : Ai-je pensé à…	Groupe 1		Elève α		Elève β		Elève γ	
	oui	non	oui	non	oui	non	oui	non
Faire attention aux fautes d'orthographe		X		X		X	X	
Mettre la ponctuation		X	X		X			X
Utiliser des verbes mathématiques	X			X		X	X	
Utiliser du vocabulaire mathématique	X		X					X
Mettre toutes les informations nécessaires pour utiliser le vocabulaire mathématique		X		X		X		X
Utiliser correctement les écritures mathématiques		X	X		X		X	
Faire attention à l'ordre des étapes, à la chronologie	X		X		X			X
Ne pas oublier d'étapes dans la construction	X		X			X		X
Ne pas rajouter d'informations inutiles pour construire la figure		X	X		X		X	
Ne pas utiliser de termes géographiques		X	X		X		X	
Essayer de refaire la figure en utilisant le texte			X		X		X	

Tableau 2 – *Grille de critères de réussite remplie à partir des productions des élèves du groupe 1 et des élèves α, β, γ*

CONSTRUCTION DU NOMBRE ET ACTIVITÉS MUSICALES

Stéphanie DENERVAUD RUCHET*

Résumé – Construction du concept de nombre en s'appuyant sur des éléments rythmiques, mélodiques, par l'écoute et le mouvement. La transposition d'un registre sémiotique à un autre favorise-t-elle l'abstraction des principes du nombre et leur manipulation ?

Mots-clés : nombre, musique, mouvement, registres, transposition

Abstract – Construction of the concept of number by leaning on rhythmic, melodic elements, by the listening and the movement. Does the transposition of a semiotic register in the other one favor the abstraction of the principles of numbers and their manipulation?

Keywords : number, music, movement, registers, transposition

I. INTRODUCTION

1. Contexte

Je travaille dans une école spécialisée qui accueille des enfants présentant des troubles envahissants du développement. Ma classe est constituée de huit enfants qui ont sept à huit ans, sous la responsabilité de trois enseignantes, de sorte que deux enseignantes sont présentes simultanément la plupart du temps. Ce dispositif a permis de former deux groupes d'élèves pris en charge alternativement.

Outre des difficultés d'ordre relationnel, les enfants sont confrontés à des troubles de l'apprentissage en raison de leur peu de disponibilité à la réflexion, en lien avec leurs angoisses de multiples origines. J'ai pu constater chez plusieurs d'entre eux des difficultés à comprendre et à raisonner avec les notions mathématiques en général, à accéder à un certain degré d'abstraction nécessaire à la construction du concept de nombre, base indispensable de l'arithmétique.

2. Motivation personnelle

Durant la formation, les concepts piagétiens de construction logico-mathématique me sont apparus comme un ancrage fondamental pour comprendre et améliorer l'enseignement des mathématiques. Dans le cadre de mon mémoire professionnel de master en pédagogie spécialisée, j'ai donc voulu aller plus loin dans cette découverte.

D'autre part, un cours sur la créativité m'a sensibilisée aux aspects non seulement créatifs voire récréatifs de la musique, mais également au potentiel interdisciplinaire qui permettrait d'étayer des apprentissages pré-numériques ou numériques.

Dans sa présentation générale, le nouveau plan d'études romand (PER)[1] incite à la reconnaissance et à la formation de capacités transversales comme la collaboration, la communication, les stratégies d'apprentissage, la pensée créatrice et la démarche réflexive, qui d'ailleurs ne se limite pas au domaine mathématiques et sciences de la nature, (environnement, physique, chimie et biologie). Avec des élèves en difficulté de penser, pourquoi ne pas tenter une approche différente ?

* HEP Lausanne – Suisse – stephanie.denervaud-ruchet@etu.hepl.ch

[1] www.plandetudes.ch, volet Présentation générale puis Compétences transversales

© Denervaud-Ruchet S. (2012) Construction du nombre et activités musicales. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (SPE1, pp. 1534–1544). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

3. *Ancrage didactique et épistémologique*

J'ai pu me rendre compte de l'abondance des liens admis de longue date entre mathématiques et musique. De Pythagore à Descartes, de Bach à Rousseau, les références ne manquent pas, ni les généralités. Je me suis alors demandé, dans l'hypothèse où le lien se justifierait, ce que l'on pouvait en faire concrètement. L'apprentissage de la numération peut-il s'appuyer sur des rythmes (et donc des mouvements) et des mélodies pour faire ressentir, pour faire vivre, puis pour conceptualiser l'usage du nombre et ses diverses représentations ?

Par cette recherche, je souhaite d'une part établir des moyens diversifiés pour amener les élèves à progresser dans leur construction du nombre et d'autre part comprendre des mécanismes de transposition de ces notions vers un degré d'abstraction plus élevé.

Il s'agira par exemple de proposer de dénombrer une collection en pointant du doigt, en dessinant successivement des éléments, en frappant dans les mains, en avançant de *x* pas… De ces différentes situations, l'enfant est amené à identifier des phénomènes récurrents car, selon Duval (1995) :

> La compréhension conceptuelle apparaît liée à la découverte d'une invariance entre des représentations sémiotiquement hétérogènes. (Op. cité, p. 61)

4. *Question et hypothèses de recherche*

La question principale de mon travail est la suivante : à partir d'activités d'écoute (rythmes, sons) et de mouvement, comment l'enfant transpose-t-il des connaissances relatives à la construction du nombre dans des registres sémiotiques de plus en plus abstraits ?

Afin de répondre à cette question, j'envisage les hypothèses suivantes :

- L'enfant s'appuie sur la connaissance acquise au travers de l'activité musicale pour résoudre une tâche dans un autre registre sémiotique.
- Les notions mathématiques s'acquièrent en donnant l'occasion à l'enfant d'appréhender par différents moyens un même concept.

II. ASPECTS THÉORIQUES

1. *Les composantes de la musique en lien avec le nombre*

Selon le dictionnaire Larousse (1996), si la musique est l'« art de combiner les sons » dans son acception la plus large, elle est aussi la « science des sons considérés sous le rapport de la mélodie, et du rythme » (2011).

La mélodie est définie comme une « ligne de sons successifs en hauteur et durée » (Costère 1990), tandis que le rythme relève de :

> L'ordonnance des sons dans le temps selon des proportions accessibles à la perception, fondées sur la succession de leurs durées et l'alternance de leurs points d'appui.

Par ailleurs, Dufourcq (1988) relève au sujet de ses origines que

> La musique, qui est aussi vieille que l'homme, paraît synonyme de mouvement dès les âges les plus reculés. Or qui dit mouvement dit rythme. Ainsi, la musique, la danse semblent avoir une commune origine. Qu'est-ce que le rythme ? C'est une répétition de bruits scandés. Les premiers instruments de musique ont été les mains de l'homme dont les battements furent la source primitive du rythme. (Op. Cité, p. 9)

Voici donc les trois ancrages fondamentaux que sont la mélodie, le rythme et le mouvement, à partir desquels je vais imaginer des activités destinées à favoriser la conceptualisation du nombre.

Les compositions mélodiques sont fondées sur la gamme diatonique majeure ascendante mise en lien avec la numération dans l'ordre croissant, la gamme est descendante si l'on vise une numération décroissante. Ainsi l'on peut former par addition successive des mélodies numériques, le passage d'un ton au suivant représentant la relation +1. D'autre part, la mélodie ne saurait se passer du rapport entre ses différentes hauteurs. L'identification de deux notes identiques, la comparaison entre une note aigüe et une note grave, voire la sériation de plusieurs notes pourraient soutenir les bases de la numération dès lors qu'on leur associe une valeur numérique ou quantitative. Notons au passage qu'en Chine la musique à l'école est notée en chiffres (Dauphin 2011, p. 50).

Une pulsation régulière qui peut être donnée par le tambourin, le métronome, etc…, se révèle un indispensable soutien au rythme. Il convient dès lors de permettre aux enfants d'intégrer cette pulsation par le mouvement (marche, sauts, balancements…) afin de l'inscrire dans un espace physique et corporel concret. Un rythme peut se greffer sur cette pulsation en une série identifiable, imitable, décomposable, dénombrable, comparable.

Une étude de Rauscher et al. (1997) a démontré que l'apprentissage du piano développe le raisonnement spatio-temporel (pp. 2-8), si indispensable à la construction du nombre. L' « effet Mozart » serait-il l'apanage des pianistes ou peut-on imaginer que de manière plus globale, la musique tout comme le mouvement stimulent la construction d'un espace-temps au service d'apprentissages numériques ?

Le mouvement est présent à tout moment : lorsqu'il s'agit de marcher au tempo, de frapper un rythme, de mimer une comptine, de danser une ronde, d'avancer ou de reculer d'une case. Il permet la constitution du schéma corporel, la structuration spatiale ainsi que la structuration temporelle.

Aux origines, les nombres étaient exprimés par le corps : les doigts de la main, puis différentes parties du corps désignaient les quantités plus élevées, pouvant aller jusqu'à la trentaine. Le nom des parties du corps a ensuite relayé le geste, puis différentes formes de désignation, qu'elles soient verbales, iconiques ou symboliques ont suivi selon les besoins et les moyens rencontrés au cours de l'Histoire (Deheane 2010). Un schéma corporel bien établi est non seulement à l'origine de l'expression numérique, mais il permet la discrimination, donc la comparaison d'éléments perçus quel qu'en soit le canal sensoriel, tout autant que l'accès à la symbolisation (De Lièvre et Staes 2006, p. 106).

La structuration spatiale permet de disposer de repères, et donc d'orienter la ligne numérique de gauche à droite ou de bas en haut (Deheane 2010, pp. 92-93). Selon De Lièvre et Staes (2006), elle permet en outre l'ordination des nombres et des quantités, de même que leur lecture dans un ordre précis. 12 n'est pas identique à 21, 6 est différent de 9. Le dénombrement requiert l'organisation d'un trajet spatial pour passer sur chaque objet, ainsi que pour mémoriser les endroits déjà pointés afin de ne pas compter deux fois le même élément. Le rapport entre les nombres est envisageable dès lors qu'un rapport à l'espace est stabilisé : l'invariance des longueurs permet d'abstraire la quantité quelle que soit sa représentation, et donc de manipuler ces mêmes quantités en les comparant, en les assemblant, en les séparant. La réversibilité opératoire est alors possible.

La structuration temporelle permet de s'orienter dans le temps pris comme une succession linéaire irréversible. Elle permet de lire/écrire dans l'ordre conventionnel, de situer des nombres ou des quantités les unes par rapport aux autres (avant/après) et donc de les ordonner. Elle contribue à la notion de cardinalité en donnant une valeur stable aux intervalles, du moment qu'une régularité est assurée : il peut s'agir d'un tempo, comme d'une suite numérique (0, 10, 20, 30,…) (De Lièvre et Staes, p. 119-121).

Le chant combine ces trois aspects rythmiques, mélodiques et corporels, puisque pour chanter on utilise son corps. De plus, il requiert la parole, tremplin vers la construction des nombres non perceptifs, c'est-à-dire au-delà de trois. Selon l'hypothèse de Deheane (2010), c'est en nommant ces quantités qu'elles peuvent progressivement être conceptualisées aussi précisément que les nombres subitisés (p. 104). Les comptines numériques ont donc toute leur valeur en ce qu'elles prolongent la construction des quantités numériques en leur donnant un vocable.

2. Ancrages théoriques et démarche de travail

Le nombre ne peut être défini ou désigné de manière directe. Piaget (1991) a cherché à comprendre comment il se construit chez l'enfant en interaction avec l'objet, par un processus d'adaptation à l'environnement. Il conçoit la genèse du nombre comme étant la synthèse des classes et des relations, construites par étapes successives. Dans un premier temps, j'ai rassemblé les objectifs fondamentaux du PER en lien avec la construction du nombre, afin de les analyser en regard des étapes de construction du nombre selon les théories piagétiennes. Cela a permis de concevoir une évaluation qui a pu être utilisée partiellement en début d'année scolaire afin d'estimer le niveau de compétences numériques et arithmétiques de mes élèves et de situer l'enseignement dans leur zone proximale de développement.

Deheane (2010) s'est intéressé aux aspects neurologiques qui interviennent dans la quantification. Il relève l'existence d'une intuition numérique qui permet l'approximation des quantités, qu'elles soient présentées sous forme non-symbolique ou symbolique. Il émet l'hypothèse d'une représentation des nombres sous forme de ligne numérique qui fonctionne sur un modèle logarithmique de manière spontanée, mais qui passe à un modèle plus linéaire par l'association quantité/symbole, par le truchement de l'éducation. Le concept de nombre est donc étroitement lié aux notions spatiales, ce qui m'incite à concevoir des activités qui permettent de mouvoir son corps en proposant des repères qui correspondent le plus possible à l'orientation de la ligne numérique. J'ai imaginé plusieurs activités évolutives rythmiques et musicales à explorer avec les enfants, en allant également puiser dans quelques moyens d'enseignement déjà existants. Leur intérêt réside premièrement dans leur potentiel de diversification progressive, et deuxièmement dans les transpositions des propriétés numériques dans de nouvelles représentations (visuelles, auditives, kinesthésiques) en mettant à contribution plusieurs informations sensorielles de manière ludique.

Dans la mesure du possible, les compétences explorées dans cette séance hebdomadaire sont réinvesties lors d'autres leçons en lien avec les moyens officiels d'enseignement des mathématiques en Suisse romande.

Les activités sont proposées dans un ordre constant, tout en y apportant des éléments de différenciation afin de soutenir l'intérêt des élèves et leur progression. La ritualisation permet de donner un cadre sécurisant car connu, ce qui facilite également le démarrage du jeu puisque les enfants peuvent s'appuyer sur ce qu'ils ont déjà vécu précédemment.

Dans une perspective innéiste, Gelman et Gallistel (1978), décrivent cinq principes qui régissent le dénombrement, à savoir :

- La comptine numérique ne change pas, les nombres sont toujours récités dans le même ordre.

- Que l'on pointe, que l'on dessine, que l'on frappe ou que l'on avance d'un pas la démarche est toujours identique ; chaque élément est désigné une seule fois.
- L'ordre de « désignation » n'est pas important.
- Le dernier élément oral cité dans la comptine implique le tout (cardinal).
- La nature de l'objet n'a pas d'importance, celui-ci reste équivalent aux autres dans son statut d'unité. C'est le principe d'abstraction.

J'ai pu observer que ces principes ne sont pas forcément compris de mes élèves. Ils me serviront de critères d'observation des démarches de dénombrement.

Duval (1995) relève que les apprentissages mathématiques se distinguent d'autres domaines de connaissance par l'accessibilité indirecte aux notions visées. Ainsi, il n'est pas possible de désigner l'objet mathématique en le montrant. Y faire référence par le moyen de signes organisés rend saillantes certaines de ses caractéristiques. Varier les registres sémiotiques permet de mettre en jeu les mêmes propriétés conceptuelles dans des situations diverses. L'enjeu est de comparer les différents registres pour identifier ce qui est semblable et qui peut relever d'indices pertinents concernant la notion visée, transposables dans d'autres circonstances, et ce qui est différent donc propre au registre choisi et indépendant de l'objet mathématique.

III. EXEMPLE D'UNE SEANCE ET OBJECTIFS

1. Comptine numérique

Activités	*Objectifs*	*Savoir-faire*
Un élève est chargé de disposer en cercle autant de coussins que de personnes présentes. S'ensuit une discussion sur la validité : y en a-t-il assez ? Trop ? Insuffisamment ? Combien en manque-t-il ?	Expérimenter les premiers nombres et leur signification par des exemples proches de l'enfant. Dénombrer une petite collection et exprimer oralement sa quantité. Comparer deux collections par correspondance terme à terme.	Utiliser la correspondance terme à terme. Utiliser les nombres pour organiser une situation de vie.
Une fois installés, nous chantons une comptine parfois en frappant dans les mains ou en mimant.	Mémoriser la suite numérique.	Chanter.
Puis un « chef d'orchestre » dit un nombre compris entre 0 et 10. Les « musiciens » montrent avec leurs doigts ce nombre.	Passer du mot-nombre à une représentation digitale.	Associer un nombre à une quantité. Passer de l'énonciation orale du nombre à une représentation gestuelle.

Figure 1 *– Comptine numérique*

Quelques adaptations possibles :

- Diversifier les chansons
- Jeu du « beuzeu » pour favoriser la mobilité de la représentation du nombre. En frappant alternativement sur les genoux et dans les mains, on récite la comptine numérique à tour de rôle le plus loin possible, de manière ascendante, descendante, en disant « beuzeu » chaque fois qu'il y a un trois dans le nombre énoncé, en disant uniquement les nombres pairs/impairs, etc.
- Lancer les dés ou tirer une carte pour décider du nombre de doigts que les musiciens doivent lever.
- Le chef d'orchestre frappe *x* fois dans les mains, les autres doivent l'imiter (compter dans sa tête).

2. Jeu de dés

Deux gros dés en mousse sont à disposition. A chaque constellation correspond une mélodie ascendante : pour un point, on chante la note « do » en disant « un », pour deux points, on chante « do-ré » en disant « un-deux », pour trois points on chante « do-ré-mi » en disant « un-deux-trois », etc…

Activités	*Objectifs*	*Savoir-faire*
Chaque joueur lance les deux dés, chante la constellation en recommençant sur la note « do » pour le deuxième dé. Cela donnera par exemple, pour le dé du quatre et du trois : « do-ré-mi-fa, do-ré-mi » chanté sur « un-deux-trois-quatre, un-deux-trois »	Dénombrer une petite collection et exprimer oralement sa quantité. Dénombrer deux quantités séparées.	Chanter en partant de la note « do ».
Pour se souvenir de la chanson, un camarade note la mélodie sur un panneau.	Traduire la situation additive en écriture non symbolique ou symbolique.	Mémoriser une mélodie. Inventer ou utiliser une représentation additive.
La semaine suivante, un enfant choisit une des représentations mélodiques et la chante.	Traduire une représentation additive en situation concrète.	Lire une représentation additive.
Ses camarades doivent deviner laquelle il a chanté.	Traduire la mélodie en représentation écrite.	Associer mélodie et écriture additive.
Valider la lecture/écriture de la mélodie	Traduire la mélodie en représentation écrite.	Juger de la pertinence d'une représentation Argumenter.

Figure 2 – *Jeux de dés*

Les enfants peuvent ainsi constater progressivement que le registre de représentation choisi permet un degré de précision variable : si l'on reste dans la représentation par points (iconique), il y a des risques que l'on déchiffre mal par omission ou adjonction de notes (difficultés lors du pointage). Par contre, avec une symbolisation chiffrée, le doute n'est plus possible, mais d'autres obstacles surgissent : comment ne pas confondre « 13 » et « 1 avec

3 » ? Il s'agira de trouver des systèmes de notation (conventionnels ou non) qui permettent de dissiper le doute.

Quelques adaptations possibles :

- Chanter à tour de rôle pour construire une chanson commune
- Lancer deux dés, chanter d'abord l'un puis l'autre, puis inverser
- Inventer d'autres paroles sur une mélodie décidée par les dés…

3. Transition : chaises musicales

Lorsqu'ils entendent la musique, les enfants dansent ou courent. Lorsqu'elle s'arrête, ils doivent trouver leur « maison » en s'asseyant sur un coussin.

Activités	*Objectifs*	*Savoir-faire*
Après chaque arrêt, on enlève une ou deux « maisons ».	Diminuer une collection.	Enlever des éléments.
Combien en restera-t-il ?	Anticiper le résultat d'un calcul.	Surcompter. Décompter.
Les élèves doivent retrouver parmi différentes écritures additives et soustractives l'étiquette avec l'écriture arithmétique correspondant à la situation.	Traduire la situation en écriture additive ou soustractive.	Choisir l'écriture pertinente.

Figure 3 *– Chaises musicales*

En procédant par élimination, les élèves sont amenés à choisir entre l'écriture additive et soustractive. Cette dernière étape peut être l'occasion d'institutionnaliser l'utilisation des signes + et -.

Quelques adaptations possibles :

- Faire varier le nombre de coussins qu'on enlève
- Mettre plus de coussins que nécessaire
- Demander aux enfants d'écrire le calcul correspondant

4. Les trains

Les enfants construisent un train avec des wagons de longueurs et de couleurs différentes. Ces wagons sont figurés par des feuilles de papier. Il s'agit d'abord de découvrir le matériel et son usage, à savoir marcher en rythme sur chaque wagon en disant le nom de ce dernier comme indiqué dans ce qui suit.

- D'abord uniquement avec les wagons blancs qui valent un.

« un »	« un »	« un »	« un »

- Puis on ajoute des wagons rouges qui valent deux.

« deux »	« -eux »	« un »	« un »	« un »	« un »	« deux »	« -eux »

Activités	*Objectifs*	*Savoir-faire*
Utiliser les mêmes wagons en les disposant différemment.	Expérimenter la commutativité et l'associativité de l'addition.	
Fabriquer des trains différents et de même longueur qui valent deux, puis quatre, puis six, puis huit.	Comparer, Egaliser. Utiliser la commutativité de l'addition. Trouver les différentes compositions d'une quantité.	
Comparer les trains.	Utiliser la correspondance terme à terme. Utiliser les nombres comme outil de comparaison. Associer rythme et composition additive.	Rapprocher ou superposer les trains.
Parcourir les deux trains simultanément et au tempo donné par le tambourin. Si chaque pas est réalisé conjointement, on doit arriver en même temps lorsque l'égalité est réalisée.	Comparer les trains. Correspondance terme à terme (marcher simultanément). Dénombrer.	Marcher au tempo. Scander les « noms de wagons ».
Egaliser deux trains.	Augmenter, diminuer ou égaliser deux collections.	Ajouter ; retrait ou double compensation.
Utiliser les signes =, < et > pour comparer les trains	Utiliser l'écriture symbolique pour comparer des quantités.	

Figure 4 *– Les trains*

Pour comparer deux trains, deux enfants les parcourent simultanément et au tempo donné par le tambourin. Si chaque pas est réalisé conjointement, on doit arriver tous en même temps lorsque l'égalité est réalisée. Si un enfant arrive avant l'autre, cela signifie que son train est plus court.

- Introduction du trois et du six en dernier et combinaison uniquement de ces deux types de wagons, car le rythme est ternaire.

« trois »	« -a »	« -a »	« si- »	« -i »	« -i »	« -i »	« -i »	« -ix »

- Le cinq et le dix sont des compositions de 1+4 ou de 2+3.

Quelques adaptations possibles :

- Verbaliser un nombre, frapper un rythme ou utiliser les dés chantés pour construire le train correspondant.
- Fabriquer le train (ou les trains) correspondant à une longueur de x pas.
- Est-ce que les trains s'arrêtent en même temps si j'ajoute un wagon ? si j'en enlève ?, tester simultanément des trains de longueur différent pour pouvoir les comparer.

- Disposition non linéaire du train : serpents, cercle à parcourir indéfiniment ou en s'arrêtant (se donner un repère).

IV. TRAITEMENT DES DONNEES

1. Récolte des données

Durant deux fois cinq séances, les élèves ont été filmés. Des séquences de ce corpus ont été choisies afin d'être analysées. Certaines productions ont été photographiées. De plus, après chacune de ces leçons depuis le début de l'année, j'ai tenu un journal de bord indiquant les activités réalisées et diverses observations ou interrogations relatives à la question de recherche, ce qui me permet non seulement de garder une trace, mais également de réajuster les propositions ou les interventions la fois suivante.

2. Outil d'analyse

Afin de vérifier mes hypothèses et de répondre à ma question de recherche, j'envisage une analyse à partir des registres sémiotiques tels que les a décrits Duval (1995). La première étape se base sur des extraits de séquences filmées dont les données sont classées dans deux grilles qui permettront de faire émerger les éléments suivants :

1) La classification des registres sémiotiques utilisés durant les séquences choisies.
2) Le repérage des invariants des différents registres qui permettent de faire ressortir des caractéristiques saillantes pour la construction du nombre et du raisonnement additif.
3) La reconnaissance des fonctions (méta-discursives ou non) de ces registres.
4) Les modalités de conversion d'un registre à l'autre.

La deuxième étape est tirée des notes prises après chaque leçon. L'étude de quelques situations mettra en évidence des fonctionnements qui n'émergent pas nécessairement lors des séquences filmées.

3. Premières observations

L'analyse des résultats étant toujours en cours au moment de l'écriture de cet article, elle ne peut donc faire l'objet d'une présentation définitive. C'est pourquoi je propose dans ce qui suit des éléments d'ordre qualitatif, sachant que des données plus quantitatives seront présentées dans le cadre de mon mémoire de master. Je puis néanmoins évoquer quelques observations :

Que ce soit pour un traitement ou une conversion, rares sont les situations dans lesquelles un registre tiers n'est pas utilisé. La fréquence d'apparition de ceux-ci semble soulever une hiérarchie dans leur utilisation, à savoir que le registre discursif apparaît de manière prédominante, essentiellement pour oraliser la comptine numérique. Le deuxième registre (non sémiotique) auquel les élèves ont recours relève de la gestuelle, que ce soit en utilisant le pointage, les doigts ou les pas. La mélodie apparaît également la plupart du temps en superposition au registre discursif et soutient la comptine oralisée. De manière plus anecdotique, les élèves peuvent avoir recours au registre iconique ou rythmique. Les aspects graphiques ou symboliques ne sont jamais apparus comme registres tiers. Je relève un degré de congruence plus élevé du registre tiers avec le registre initial, tandis que le degré de congruence entre le registre tiers et le registre final semble plus arbitraire. Ces aspects de congruence pourraient être mis en lien avec les fonctions que les registres tiers remplissent, à savoir une visée de l'ordre de la compréhension, de la mémorisation, du contrôle de l'action ou de la vérification. Les fonctions méta-discursives de communication et de traitement apparaissent essentiellement dans le registre final, mais peut-être cela dépend-il du dispositif mis en place.

L'étude de quelques situations pourrait mettre en évidence d'autres éléments. Par exemple le potentiel du registre mélodique comme soutien à des évocations mentales, de même que le matériel des « trains » utilisé comme support visuel et rythmique ont pu servir de support intériorisé au raisonnement additif. Le prétexte ludique des « chaises musicales » a permis d'introduire un premier aspect des soustractions ceci parallèlement à l'introduction des additions, contrairement à ce qui se pratique de manière habituelle, et contrairement au préjugé répandu que la soustraction est difficile à aborder avec des élèves pour qui le « manque » qu'elle évoque est potentiellement menaçant sur un plan psychologique.

V. CONCLUSION

Par ce travail, j'ai cherché des moyens qui permettent à mes élèves de construire quelques facettes du concept de nombre et des opérations, en partant de leur zone proximale de développement et en tenant compte de leurs besoins. Face à la prise de risque sur un plan d'intégrité psychique que constitue pour eux tout apprentissage nouveau, j'ai tenté de proposer une approche qui se voulait peu menaçante, tout en cherchant à construire avec eux un outil qui leur servira en parallèle ou ultérieurement à résoudre des situations-problèmes.

J'ai pu observer en début d'année que le « pour quoi » du nombre n'avait pas de sens et n'était pas accessible pour certains de mes élèves car pratiquement pas disponible. Alors que la découverte des principes du nombre est conçue comme innée par Gelman et Gallistel, j'ai pu constater que pour mes élèves (sauf exception) il n'est pas du tout évident que la suite numérique s'énonce toujours dans le même ordre, que le pointage doit concerner chaque élément mais une seule fois, que le dernier mot oralisé indique la quantité totale, que la façon de désigner (pointer, dessiner,…) ou la nature de l'objet dénombré n'a pas d'incidence sur la façon de dénombrer. Si les conversions congruentes (Duval) sont assimilables à l'isomorphisme des structures de Diénès, ne peut-on postuler qu'à défaut de donner un sens complet au concept de nombre naturel, il aura permis l'émergence de certains principes comme ceux du dénombrement (Gelman/Gallistel) sur lesquels pourront s'appuyer les élèves lorsqu'il s'agira d'utiliser le nombre comme outil ou moyen dans une situation-problème ? Je pense qu'une représentation minimale de ce que peut être un nombre est nécessaire avant de savoir à quel moment il devient un outil de résolution. C'est avant tout dans cette perspective que les activités ci-dessus ont été conçues. Cela dit, le concept de nombre serait bien incomplet si on se limitait à faire acquérir à l'enfant comment dénombrer. Je conçois ainsi qu'une approche idéale se voudrait « spiralaire » entre d'un côté la transposition de registres qui permet d'aborder le sens du nombre dans sa dimension du « quoi » et du « comment », et d'un autre côté des situations-problèmes qui permettent l'accès au sens du nombre dans sa dimension du « pour quoi » et du « quand ». Je considère que l'approche socioconstructiviste permet à cette dernière d'évoluer, bien qu'elle pose en soi d'autres questions face à des enfants que le conflit cognitif angoisse tout autant que la relation.

Les activités musicales ont pu servir de support à des évocations mentales ayant permis la résolution d'additions notamment. Même si les aspects rythmiques et mélodiques ne servent pas d'appui dominant au dénombrement, ils n'en restent pas moins des registres accessibles parmi d'autres, qui plus est en favorisant le mouvement qui, lui, contribue de manière importante à la constitution de repères spatiaux essentiels à la constitution de la ligne numérique. D'autre part, je relève que l'aspect motivationnel de la musique permet non seulement la mémorisation orale de la suite numérique dans la bonne humeur, mais encore des activités ludiques qui mettent suffisamment l’enfant en confiance pour qu’il puisse s’investir dans une élaboration de pensée.

REFERENCES

CIIP. (2010) *Plan d'études romand. Présentation générale/Compétences transversales.* Neuchâtel : Secrétariat général de la CIIP.

Dauphin C. (2011) *Pourquoi enseigner la musique ?* Montréal : Les Presses Universitaires.

De Lièvre B., Staès L. (2006) *La psychomotricité au service de l'enfant. Notions et applications pédagogiques.* Bruxelles : De Boeck et Belin.

Deheane S. (2010) *La bosse des maths.* Paris : Odile Jacob.

Dufourcq N. (1988) *Petite histoire de la musique.* Paris<. Larousse.

Duval R. (1995) *Semiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.* Bern :Peter Lang.

Costère E. (1990. *Dictionnaire de la musique.* Paris<. Larousse.

Gelman R., Gallistel C. R. (1978) *The child's understanding of number.* Cambrige, MA : Harvard University Press.

Larousse (1996) *Le petit Larousse illustré 1996.* Paris : Larousse.

Piaget J., Szeminska A. (1991) *La genèse du nombre chez l'enfant.* Lausanne : Delachaux et Niestlé.

Rauscher F. H., Shaw G. L., Levine L. J., Wright E. L., Dennis W. R., Newcom R. L. (1997) Music Training Causes Long-Term Enhancement of Preschool Children's Spatial-Temporal Reasoning. *Neurological Research* 19, 2-8.

UNE DEMARCHE EXPERIMENTALE EN MATHEMATIQUES PUISSANCE D'UN POINT PAR RAPPORT À UN CERCLE

Moumouni DIALLO*

Résumé – Dans notre contribution, nous avons essayé d'élaborer et de diriger une démarche expérimentale autour de la « puissance d'un point par rapport à un cercle ». Cette séquence d'enseignement/apprentissage a eu lieu pendant l'exécution du cours relatif au produit scalaire en 10ème Sciences (2nd C dans le système français). Elle se résume en trois phases : une stabilisation du milieu, une conjecture et une démonstration. Chacune de ces phases se compose de trois parties : la présentation de l'activité, l'analyse à priori et celle à postériori.

Mots clefs : démarche expérimentale, Mathématiques, essai, puissance d'un point par rapport à un cercle, produit scalaire

Abstract – In our contribution we tried to develop and lead an experimental approach around the "power of a point on a circle." This sequence of teaching / learning took place during the execution of the course on the scalar product in the 10th Science (2nd C). It can be summarized in three phases: a stabilization of the environment, a conjecture and a demonstration. Each phase consists of three parts: the presentation of the activity, the prior analysis and the post analysis.

Key-words: experimental approach, Mathematics, essay, power of a point on a circle, scalar product

I. INTRODUCTION

Dans nos établissements d'enseignement secondaire général (15 à 18 ans), la démarche expérimentale est seulement pratiquée dans l'enseignement/apprentissage de la biologie ou de la physique-chimie. Ceci nous a amené à nous poser la question suivante : Est-il possible de mener une démarche expérimentale en mathématiques dans notre classe ?

A partir des informations via Internet et revus, nous nous proposons d'explorer les possibilités offertes par ce type de situation d'enseignement/apprentissage des mathématiques au lycée en classe de 10ème S (équivalent de l'ancienne 2nde C en France, élève de 15 ans, début du secondaire 2, ayant été sélectionnés dans une orientation scientifique). Notre choix sur l'objet d'enseignement porte sur une notion de géométrie : la puissance d'un point par rapport à un cercle. Les connaissances nécessaires comme prérequis à l'étude de cette notion sont censées être disponibles chez les élèves de la 10ème S. Nous avons élaboré à cet effet une séquence expérimentale dans l'environnement papier/crayon qui a été conduite en classe.

II. CONTEXTE D'EXPERIMENTATION

1. *Situation du lycée d'expérimentation*

Cette expérimentation a eu lieu au lycée *Namankoro Sangaré* de Zégoua. Zégoua est à environ 13 km de Kadiolo (chef lieu de cercle) la ville où résident tous les professeurs de mathématiques du cercle. Elle est située le long de la route nationale n°7 (RN7) à moins de six kilomètres de la frontière ivoiro-malienne. Elle est à environ de 480 km de Bamako (capitale politique et économique du Mali).

L'établissement a environ 303 élèves parmi lesquels 18 sont en 10ème S. Ses élèves sont repartis entre 11 classes. En plus des heures au lycée public de Kadiolo (en moyenne 12 heures par semaine pour 134 élèves par professeur), nous sommes quatre professeurs de

* Professeur d'enseignement secondaire – Mali – moudiallo1@yahoo.fr

© Diallo M. (2012) Une démarche experimentale en mathématiques – Puissance d'un point par rapport à un cercle. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (SPE1, pp. 1545–1554). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

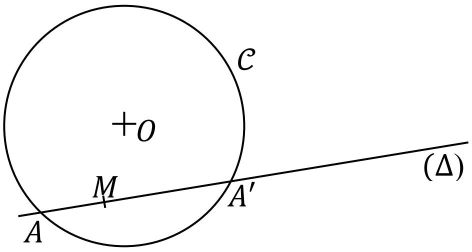
mathématiques évoluant dans ce lycée privé comme vacataires. Dans ce lycée, Il n'y a aucune bibliothèque, encore moins une connexion Internet. L'expérimentation a été faite dans l'environnement papier/crayon. Les matériels disponibles étaient : stylos, crayons, gommes, règles, compas, tableau et de la craie.

2. Objet d'étude

Soit un point M et un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon R du même plan. (Voir figure ci-contre)

Propriété : Pour toute droite (Δ) passant par M et sécante à $\mathcal{C}$ en A et A', le produit scalaire $\overrightarrow{MA'}.\overrightarrow{MA}$ reste invariant.

Définition : On a : $\overrightarrow{MA'}.\overrightarrow{MA} = \overline{MA'} \times \overline{MA} = OM^2 - R^2$. Cette constante est appelée puissance du point M par rapport au cercle $\mathcal{C}$.



M intérieur au cercle

3. Prérequis nécessaires

- Le théorème de Pythagore (rappelé dans le chapitre intitulé : « trigonométrie dans un triangle rectangle »).
- L'arrondi d'ordre 0 ; 1… et la notion de « mesure algébrique » (chapitre « activité dans »).
- Les notions de vecteur et de produit scalaire (chapitre dans lequel se fait l'expérimentation).
- Les positions relatives d'une droite ou d'un point par rapport à un cercle.
- La mesure d'un segment donnée à l'aide de la règle graduée.

4. Objectifs Généraux de l'expérimentation

- Permettre aux élèves de 10ème S de s'approprier un problème de découverte d'une propriété géométrique de façon expérimentale et de s'engager à l'établissement d'une preuve mathématique.
- Etudier les conditions effectives pour mener une démarche expérimentale en classe de mathématiques.

L'enjeu de cette séquence est le passage d'une conjecture obtenue de façon expérimentale à une démonstration mathématique de cette conjecture.

III. CONSTRUCTION ET ETUDE DE LA PREMIERE SITUATION

1. Présentation de l'activité

Objectifs

- Rappeler les différentes positions d'une droite ou d'un point par rapport à un cercle.
- Rappeler le caractère approché des mesures avec les instruments de géométrie.

Enoncé

– Quelles sont les différentes positions d'une droite par rapport à un cercle ?

- Quand dit-on qu'une droite est sécante ou tangente à un cercle de centre O?
- Construire un cercle de centre O. Placer un point A à l'intérieur, un point B à l'extérieur et un point C sur ce cercle.
- Avec quelle incertitude pouvez-vous faire vos mesures à l'aide de votre règle ? Justifier votre réponse.

Rôle du professeur

Il organise la classe. Il aide les élèves à surmonter les éventuelles difficultés. Et il veille au respect du temps donné.

Enjeu de l'activité

Cette activité permet de nous situer sur la disponibilité, chez les élèves, des pré-requis nécessaires à la réalisation des tâches liées aux activités postérieures.

2. *Comportements attendus des élèves*

Dans cette activité, la grande difficulté résulte de la quatrième question. En effet dans nos classes, la notion d'incertitude est beaucoup plus théorique. Elle est généralement donnée sinon calculée à partir de deux valeurs approchées (l'une par excès et l'autre par défaut). Il ne serait donc pas si facile pour les élèves de déterminer cette précision à partir de leurs règles.

Stratégie pour surmonter la difficulté

Pour les aider à surmonter cette difficulté, nous prévoyons les étapes suivantes :

Etape 1 : Faire comprendre à l'élève qu'une règle admet une incertitude.

Etape 2 : Aider l'élève à déterminer l'incertitude liée à la règle.

Exemple : Choisir un nombre α compris entre deux nombres successifs de la règle (voir Annexe, illustration). Puis nous lui demanderons de déterminer une valeur approchée de α et son incertitude.

3. *Analyse des résultats*

Dans cette activité, toutes les trois premières questions ont été répondues par chacun des élèves. Mais ces réponses ne sont toutes correctes.

Quant à la quatrième, nous avons adopté la stratégie prévue. Nous avons noté que les élèves sont unanimes que l'on peut construire avec exactitude un segment de mesure 4cm et 3,5cm. Cependant l'unanimité n'est pas faite autour de la construction exacte d'un segment de longueur 2,23cm (avec nos règles).

Nous avons relevé les erreurs suivantes :

E_1 : Une droite peut être la médiatrice de cercle.
E_2 : Une droite peut être l'équateur de ce cercle.
E_3 : Une tangente à un cercle est une droite qui passe et collée à l'extrémité du cercle.
E_4 : Une tangente est une droite qui frotte le cercle.
E_5 : On ne peut pas mesurer 2,23 parce que la graduation de la règle ne dépasse pas 2,10 et que 2,23 n'est pas sur la règle.
E_6 : … à l'aide d'une règle on peut tracer n'importe quel segment.

Ces erreurs peuvent être classées en deux types suivant leurs sources. Notre stratégie générale pour y remédier est : montrer à l'élève qu'il est en erreur et redresser les incorrections.

Type 1 il s'agit des erreurs E_1, E_2, E_3 et E_4

Les deux premières erreurs (E_1ou E_2) ont été relevées dans des réponses relatives à la position d'une droite par rapport à un cercle, alors que les deux dernières (E_3, E_4) sont relatives à la définition d'une tangente à un cercle.

Ce type d'erreur est lié à la confusion des objets mathématiques.

Ainsi avons-nous tenté d'établir les différences entre les objets : médiatrice, équateur et diamètre. Avec quelques échanges, les élèves semblent avoir compris que, contrairement aux deux premiers, le « diamètre » est propre au cercle.

Quant à E_3 et E_4, nous avons essayé de faire voir l'incompatibilité des mots « extrémité » et « cercle ». En fait, nous avons défini le premier comme une fin et le second comme une ligne fermée. Et qu'on peut parcourir un cercle, aussi longtemps qu'on veut, sans parvenir a sa fin. Donc un cercle n'admet pas d'extrémité.

Type 2 : il s'agit des erreurs E_5 et E_6

Ces deux erreurs ont été relevées pendant la stratégie faisant voir l'incertitude liée à une règle dans l'environnement papier/crayon.

Nous pensons que l'erreur E_5 est une lacune liée à la comparaison de deux nombres décimaux. Et des exemples de comparaison de nombres décimaux, nous ont semblés suffisants pour combler ces lacunes. Quant à l'erreur E_6, un exemple (voir Annexe, illustration) nous a permis de montrer une limite de la règle graduée.

IV. CONSTRUCTION ET ETUDE DE LA SECONDE SITUATION

1. *Présentation de l'activité*

Objectif : Amener les élèves à découvrir l'invariance des produits

Partie 1

1. Construire un cercle de centre *O*.
2. Placer un point *M* à l'intérieur du cercle et construire 5 sécantes au cercle passant par *M*.
3. a) Mesurer les distances *MX* et *MX'* où *X* et *X'* sont les points d'intersection des sécantes au cercle passant par *M*.
   b) Reproduire le tableau ci-dessous et mentionner les distances *MX* et *MX'* mesurées.

MX					
MX'					
MX×*MX'*					

Consigne : les mesures seront faites en centimètre et à l'arrondi d'ordre 1. Les produits seront donnés à l'arrondi à d'ordre 0. Les unités ne seront pas mentionnées dans le tableau.

Partie 2 : (question orale)

Quel résultat expérimental peux-tu énoncer à partir du tableau ?

Rôle du professeur

Il engage les élèves dans des débats et les dirige.

Analyse a priori

L'enjeu étant d'établir de façon expérimentale l'invariance de *MX*×*MX'*, la discussion entre élèves doit être orientée par le nombre de produits égaux. Pour engager le débat, nous nous appuierons sur les deux situations : ceux qui ont remarqué l'invariance et ceux ne l'ont pas remarquée.

Nous supposerons que l'objectif de cette partie est atteint que lorsqu'au moins un élève remarque l'invariant et que les élèves sentent la nécessité de s'engager dans la recherche d'une preuve mathématique. Dans le cas échéant, nous envisageons la même expérimentation au tableau. Ceci nous permettrait de decouvrir l'invariance et de passer à sa démonstration.

Analyse des résultats

Selon le plus grand nombre de produits égaux par production, nous résumons les résultats dans le tableau suivant.

Nombre de produits égaux	0	2	3	4	5	Total
Effectifs	0	4	6	3	5	18
Pourcentage	0	22%	33%	17%	28%	100

On remarque que tous les élèves ont obtenu au moins deux produits égaux. Cinq élèves, soit 28% des élèves, ont eu tous les produits égaux.

La discussion fut engagée et tournait autour de la réponse à la quatrième question de l'enseignant (« Quel résultat expérimental peux-tu énoncer à partir du tableau ? »). Après cette question orale du professeur, voici les premiers échanges :

Le premier élève à intervenir dit : « Monsieur on remarque que tous les produits sont les mêmes. »

Un autre intervenant : « Monsieur, moi je trouve que 3 sont égaux. »

Le premier intervenant dit subitement : « C'est faux, tu as mal mesuré ! »

Après ces interventions, nous avons assisté à un remue-ménage. Certains se déplaçaient par-ci par-là certainement pour convaincre et d'autres, sans rien dire, se mettaient à remesurer et/ou recalculer.

Pour réinstaller l'ordre, nous avons jugé bon de reprendre l'activité au tableau. Ensemble et avec plus attention, nous sommes arrivés à un compromis : accepter l'invariance des produits MX×MX' et s'engager dans la recherche d'une preuve mathématique.

En effet, ce compromis était perçu différemment. On pouvait sentir la joie, une certaine fierté ou une certaine grandeur chez certains. D'autres, se demandant d'où venait leurs différences, se réservaient de trop parler. Malgré cette différence, tous les élèves étaient pour la recherche d'une preuve.

Pour le facilitateur (l'enseignant), ce compromis marque la fin d'une partie expérimentale comblée et le début d'une recherche de preuve mathématique.

V. CONSTRUCTION ET ETUDE DE LA TROISIEME SITUATION

1. Présentation de l'activité

Objectifs

- Amener les élèves à démontrer l'invariance de $\overrightarrow{MX}.\overrightarrow{MX'}$.
- Faire découvrir par les élèves que le produit $\overrightarrow{MX}.\overrightarrow{MX'}$ ne dépend que du cercle et de la distance du point au centre de ce dernier.

Énoncé

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon R. M est un point du plan intérieur au cercle. Les points A et A' sont les points d'intersection d'une sécante au cercle passant par M. Le point H est le projeté orthogonal du point O sur la droite (AA').

a) Exprimer les distances MA et MA' en fonction de OM et de R. En déduire le produit $MA \times MA'$ en fonction de OM et de R.

b) Exprimer $\overline{MA} \times \overline{MA'}$ en fonction $MA \times MA'$. Déduire de ce qui précède que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'}$ ne dépend pas de la droite (AA').

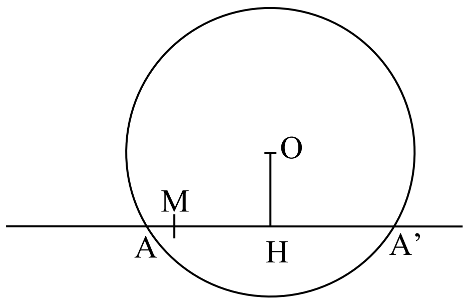
Consignes

Cette activité est à faire à domicile pour une semaine. Les copies seront ramassées et corrigées. Chaque copie doit appartenir à une et une seule personne. En effet, ce temps leur permettrait, non seulement d'assoir les nouvelles compétences relatives aux produits scalaires mais aussi de combler eux-mêmes les éventuelles lacunes.

Rôle du professeur

Il veille au respect du temps imparti. Il engage et dirige des débats dans le sens de la résolution de l'activité. Il fait voir aux élèves les éventuelles erreurs commises. En plus, il les engage à la recherche de piste de résolution.

2. Réponses aux questions



$\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon R. M est un point du plan intérieur au cercle. Les points A et A' sont les points d'intersection d'une sécante au cercle passant par M. Le point H est le projeté orthogonal du point O sur (AA'). (Voir figure ci-contre)

a) Expression MA et MA' en fonction OM et R.

$$AM = AH - MH \text{ et } A'M = A'H + MH$$

$$AM = \sqrt{AH^2} - \sqrt{MH^2} \text{ et } A'M = \sqrt{A'H^2} - \sqrt{MH^2}$$

En appliquant le théorème de Pythagore dans les triangles MHO , $A'HO$ et AHO rectangles en H, on a : $AH^2 = OA^2 + MH^2$ et $MH^2 = OM^2 - OH^2$; d'où :

$AM = \sqrt{OA^2 - OH^2} - \sqrt{OM^2 - OH^2}$ et $A'M = \sqrt{A'O^2 - OH^2} + \sqrt{OM^2 - OH^2}$ ou encore :

$AM = \sqrt{R^2 - OH^2} - \sqrt{OM^2 - OH^2}$ et $A'M = \sqrt{R^2 - OH^2} + \sqrt{OM^2 - OH^2}$

b) M étant pris à l'intérieur du cercle, les mesures algébriques $\overline{MA} \times \overline{MA'}$ ont des sens contraires, dans ce cas $\overline{MA} \times \overline{MA'} = -MA \times MA'$.

Les points A, A' et M étant alignés on a : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'} = \overline{MA} \times \overline{MA'}$.

Des réponses précédentes on déduit que : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'} = -MA \times MA'$.

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'} = \left(\sqrt{R^2 - OH^2} - \sqrt{OM^2 - OH^2}\right)\left(\sqrt{R^2 - OH^2} + \sqrt{OM^2 - OH^2}\right)$$

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'} = -(R^2 - OH^2) + (OM^2 - OH^2) = OM^2 - R^2$$

3. Connaissances mobilisables

La bonne exécution de cette activité nécessite la maitrise de certaines connaissances comme :

- Le théorème de Pythagore.
- La définition du produit scalaire en fonction des mesures algébriques.

4. Difficulté possible

La grande difficulté résulte dans l'établissement des expressions des distances *MA* et *MA'* en fonction de *OM* et *R*. En fait, la réponse relative fait intervenir la distance *OH* qui n'est pas signalée dans la question.

5. Comportements attendus des élèves

Par rapport à la question relative à l'expression de *MA* en fonction de *OM* et *R*, on peut s'attendre à des raisonnements suivants :

$OA^2 = MA^2 + MO^2 \Rightarrow MA^2 = OA^2 - MO^2 \Rightarrow MA = \sqrt{OA^2 - MO^2}$

Effet, sachant que *AOM* est un triangle et que le plus grand coté est apparemment *OA*. Le théorème de Pythagore étant la relation entre les cotés d'un triangle (rectangle), en négligeant la condition liée au triangle, l'élève serait tenté par le raisonnement ci-dessus.

Pour remédier à ces lacunes nous prévoyons suivre les deux étapes suivantes :

- Faire voir par l'élève que sa conception est erronée, en le mettant face à une situation particulière.
  Exemple : faire vérifier son raisonnement dans un triangle dont les longueurs des trois cotés sont connues.
- Rappeler le théorème de Pythagore en insistant sur l'expression « dans un triangle rectangle », donner un exemple ou un contre-exemple si nécessaire.

6. Analyse des résultats

Pendant la période de recherche, aucune difficulté n'a été signalée. Et au terme des 7 jours, nous avons collecté 18 copies, mais presque toutes identiques.

L'analyse des productions nous a permis de remarquer que toutes les questions ont été répondues ; c'est dire que les élèves n'ont pas rencontré de difficultés ou ont pu les surmonter (à leur manière). En outre, le théorème de Pythagore a été correctement appliqué.

Cependant, en plus des erreurs accidentelles, nous avons relevé deux autres erreurs.

Erreur 1 : La linéarité de la fonction racine carrée : la racine carrée d'une somme est la somme des racines carrées.
Exemple : $MA = \sqrt{OM^2 - R^2}$(voir annexe, *production 2*)

Erreur 2 : Application de la relation de Chasles aux mesures algébriques. (Voir annexe, *production 2*)

Pour remédier à ces lacunes nous avons adopté des stratégies, selon les différentes erreurs :

Erreur 1 : Pour corriger cette erreur, nous leur avons montré le caractère erroné de leurs conceptions à partir d'exemples simples comme $\sqrt{16+9} \neq \sqrt{16} + \sqrt{9}$ (le premier membre est 5 alors que le second est égal à 7).En fait, nous avons fait remarquer que de façon générale : $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a}+\sqrt{b}$ ou $\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a}-\sqrt{b}$

Erreur 2 : Nous leur avons fait savoir qu'à la différence de la relation de Chasles appliquée aux vecteurs, la relation $\overline{MA}=\overline{MO}+\overline{OA}$ n'est possible que si les trois points sont sur une même droite (points alignés).

En plus nous avons remarqué que le dessin a été particularisé. En effet *M* est placé de sorte qu'il coïncide avec le point *H*, le projeté orthogonal de *O* sur [*AA'*]. (Voir annexe, *production 1*). Nous pensons que cela n'est pas une erreur mais ne permet pas de conclure. Donc nous nous sommes engagés à montrer le caractère particulier de leur dessin par rapport aux données de l'activité. Aussi avons-nous mis en exergue quelques insuffisances que cette particularisation engendre.

VI. CONCLUSION

Cette séquence est composée de trois activités. Une des particularités de ces activités est les relations des unes aux autres. En effet, chacune d'elles a, non seulement, des objectifs bien précis, mais aussi la réalisation d'un objectif favorise celle de l'activité suivante.

Contrairement aux activités ordinaires, ces activités ne sont pas seulement des tests de compétence pour les élèves. Ce sont des situations où les apprenants se voient forgerons de leur savoir. En effet, après plusieurs essais, les élèves arrivent à une proposition provisoire. Et pour lever toute équivoque autour de celle-ci, ils décident d'apporter des preuves mathématiques.

Ce fut une première où le tâtonnement et les erreurs ne sont pas dramatisés. En un mot, à la différence de nos méthodes quotidiennes, dans la démarche expérimentale, les erreurs, les changements de pistes de recherche, les débats contradictoires, semblent être tolérés dans la recherche de solution au problème posé.

En outre, dans une expérimentation, le professeur change son rôle habituel : au lieu du savant ou de l'envahisseur il devient l'organisateur ou le facilitateur. Il élabore des situations et oriente la séance selon les moyens du bord, les compétences des apprenants et l'objectif visé.

La démarche expérimentale en mathématique dans cette classe de 10ème Sciences fut un travail de réinvestissement. Les élèves sont partis de compétences simples vers une autre relativement complexe. En fait, elle a permis aux élèves de combiner des objets mathématiques, d'observer les produits qui en résultent, de formuler une « loi » et de tenter de démontrer la conjecture.

Ce fut un moment d'échanges francs (oral et écrit) entre les élèves d'une part et avec le professeur d'autre part. Le professeur a saisi cette opportunité et mis en exergue la place d'une conjecture et celle d'une démonstration en mathématique.

Cette expérimentation s'est déroulée, certes avec un certain succès et bénéfice, mais a aussi été entachée d'insuffisance. Par exemple, le temps de l'activité 1 a été plus long que prévu du fait que plusieurs lacunes nous ont échappé dans l'analyse a priori. Aussi, dans l'activité 2, nous avons relevé une difficulté dans la gestion des marges d'erreur due à la diversité des cercles (de rayons différents). Cette difficulté serait surmontée en imposant le rayon du cercle.

Quant à l'activité 3, tous les élèves ont fait une construction particulière (voir annexe *production 1*). De ce fait nous pensons qu'il serait prudent de joindre une figure à l'énoncé. En outre, nous pensons qu'il faut rappeler qu'une « démarche expérimentale en

Mathématiques » est une pratique inhabituelle dans nos classes. Or tenter de rompre avec une habitude n'est chose facile ; elle tente toujours à rattraper son sujet.

Malgré les insuffisances, nous pensons que cette expérimentation peut contribuer à faire prendre conscience aux élèves qu'une expérimentation n'est pas seulement l'apanage de la physique-chimie et de la biologie. Aussi, aiguiserait-elle leur curiosité, avec en plus la persévérance, la patience, l'engagement dans la recherche, et celui du travail entre les élèves. En plus, elle pourrait constituer une source de motivation pour les mathématiques souvent jugées trop abstraites.

Les nombreux avantages de cette méthode d'enseignement/apprentissage nous incitent à nous interroger sur la possibilité d'insérer, à l'instar de la biologie et de la physiques-chimie, la démarche expérimentale dans le programme d'enseignement secondaire de mathématiques au Mali ? Il nous parait difficile d'appliquer cette méthode dans une classe pléthorique, mais est-ce impossible ? Il faudrait alors résoudre les questions de ressources pédagogiques ainsi que celle de la formation initiale et continue des professeurs de mathématiques.

REFERENCES

Bkouche R., Lehman D. (1988) *Initiation à la géométrie*. Paris : PUF.
Perrin D. (2007) L'expérimentation en mathématiques. *Petit x* 73, 6-34.

Textes Officiels

Le programme et le savoir- faire de la 10ième S.

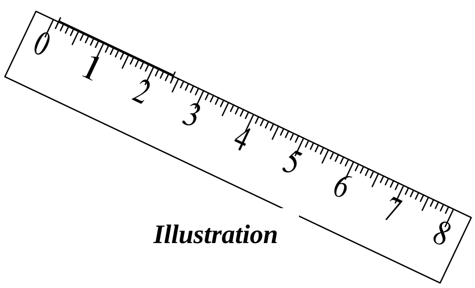
Livres scolaires

Géométrie 2nde CT. Collection IRMA, Tome 2
Mathématique 2nde. Collection CIAM.
Mathématiques analyse 1ère S et E, collection Terracher.

Sites Internet

Dias T. (2004) Le recours à l'expérience dans la construction des connaissances mathématiques. www.lyon.iufm.fr/pole_recherche/archives/premst_archives/texte_dias_2
Activités scientifiques et technologiques: Démarche expérimentale.
http://eduscol.education.fr/D0049/cahier_demarche_exp.pdf –
http://diophante.fr/pages/geometrie.htm#D226 : un site d'activité de géométrie.
http://villemin.gerard.free.fr/Wwwgvmm/Geometri/TroiCerc.htm#Pythagore : Cercle (c'est un site de théorème démontré relatif au cercle).
Euclid's elements book III – Proposition 35.
http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookIII/propIII35.html

ANNEXES



Illustration

B Pour le point M à l'intérieur.

1) D'après pythagore
calculons la distance MA et MA' en fonction de OM et R.
Considérons le triangle OMA rectangle en M.
$AO^2 = MA^2 + MO^2$
$MA^2 = MO^2 - R^2$
$MA = \sqrt{MO^2 - R^2}$
$MA = ||MO|| - ||R||$.
Dans le triangle OMA' rectangle en M.
$A'O^2 = A'M^2 + MO^2$
$MA'^2 = MO^2 - AO^2$
$MA' = \sqrt{MO^2 - AO^2}$
$MA' = ||MO|| - ||R||$.

Production 1

3) Exprimons MA x MA' en fonction MA x MA'
$\overline{MA} \times \overline{MA'} = (\overline{MO} + \overline{OA}) \times (\overline{MO} + \overline{OA'})$
$= MO^2 + 2\overline{MO}.\overline{OA}\cos(\widehat{OM,OA}) + OA^2$
$\overline{MA} \times \overline{MA'} = (MO + R)^2$
$\boxed{\overline{MA} \times \overline{MA'} = MA \times MA'}$

Production 2

ENSEIGNER LES MATHEMATIQUES EN UTILISANT LEUR HISTOIRE : LE CAS DE LA DERIVEE

Papa Mactar DIOP*

Résumé – Ce texte présente un projet de mémoire de fin d'année de formation des enseignants au Sénégal. L'objectif général est d'aborder les questions suivantes : quel est le niveau de prise en charge de l'histoire dans les manuels, les pratiques et les programmes ? Quel peut être l'apport de l'histoire dans un cours de mathématique ? Nous visons dans un deuxième temps la comparaison de deux cours sur la notion de dérivée, l'un en intégrant des éléments historiques, l'autre sans éléments historiques.

Mots-clefs : histoire des mathématiques, manuels, programmes, pratiques, dérivée

Abstract – This text presents a project for a final work in the context of teacher's training in Senegal. The main goal is to address the following issues: how is history of mathematics taken into account in textbooks, curriculum, practices? What can be the gain of introducing a historical dimension in a mathematical course? In a second stage we aim at comparing the differential effect on students of two courses about the notion of derivate: one with a historical approach and one without.

Keywords: history of mathematics, textbook, curriculum, practices, derivate

I. PROBLEMATIQUE

Au Sénégal, même si des injonctions timides commencent à apparaitre dans les programmes, les rares manuels de mathématiques plus ou moins adaptés au programme évoquent très peu l'histoire de cette discipline. Du côté des enseignants, on traine encore le pas dans la prise en change de ces directives ; la raison principale avancée est un défaut de formation. C'est pour aborder cette question de l'intégration d'éléments d'histoire dans nos cours de mathématiques que nous avons choisi de faire un mémoire de fin de formation pour l'obtention du Certificat d'Aptitude pour Enseignement Secondaire (CAES) sur ce sujet.

Par ailleurs, il semble que les compétences acquises en formation initiale seront plus prépondérantes dans nos pratiques enseignantes que celles acquises en formation continue.

Dans ce cadre, un travail assez remarquable a été fait par certains de mes prédécesseurs dans leurs mémoires de fin de formation pour obtention du Certificat d'Aptitude pour Enseignement Secondaire (CAES). Dans son mémoire intitulé : « L'utilisation de l'histoire dans l'enseignement /apprentissage des suites numériques dans nos manuels du supérieur » Mbaye Diouf a signifié que pour pallier le désintéressement des mathématiques chez les étudiants l'intégration de l'histoire dans nos cours semble être un remède pour rendre les mathématiques plus attractives.

Une analyse des manuels faisant usage de l'histoire pour l'enseignement des notions de suite et de certaines contributions à ce sujet montre que cela permet à l'étudiant d'éveiller sa curiosité, d'avoir une bonne chronologie de l'histoire des mathématiques.

Mais les aspects historiques dans l'enseignement au niveau des manuels a subi de profondes transformations depuis les petites classes jusqu'au supérieur. Ainsi dans les nouveaux manuels, on trouve souvent des textes historiques, des anecdotes, des graphiques d'activité qui sont sensés apporter une aide à la compréhension et la maitrise des notions enseignées.

Dans son mémoire intitulé : « L'histoire dans de le cadre des suites numériques vue dans les programmes sénégalais », Daouda Ndiaye signale que dans les programmes des séries C et

* Université Chiekh Anta Diop Dakar – Sénégal – mactadiop@yahoo.fr

© Diop P. M. (2012) Enseigner les mathématiques en utilisant leur histoire : le cas de la dérivée. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (SPE1, pp. 1555–1558). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

E devenues respectivement S1 et S3, aucune indication n'a été donnée sur les aspects historiques, de l'indépendance à nos jours. De même, pour les programmes du supérieur qui, d'ailleurs, ont peu évolué, et pourtant, ces élèves et étudiants deviennent, pour la plupart, des professeurs de Mathématiques.

Dans les séries A et D devenues respectivement L et S2, nous avons pour chaque niveau une seule instruction qui n'a pratiquement pas varié depuis 1987. Cependant, les consignes ne sont pas données de manière explicite, mais plutôt dans les généralités en filigrane et il n'y a pas de moyens dans le programme qui les mettent en œuvre. Notons que dans le curriculum du moyen secondaire, l'aspect historique doit être pris en compte pour permettre à l'élève de saisir le sens et l'intérêt de la notion étudié.

Cheikh Tidiane Seck, dans son mémoire intitulé : « L'histoire dans de le cadre des suites et séries numériques vue dans les pratiques des enseignants du supérieur » part du postulat qu'il est impossible de connaître une science sans en connaître son histoire. Connaître l'histoire des mathématiques, c'est entrer dans le monde merveilleux des mathématiques, comprendre leur évolution, assimiler les problèmes qui leur ont donné naissance et les difficultés conceptuelles qui ont accompagné son développement. Elle permet de s'intéresser d'avantage à la construction de nouveaux objets mathématiques, car les recherches faites pour résoudre des problèmes ont été si stimulantes qu'elles ont fait naître de nouvelles méthodes et théories mathématiques.

Il faut tenir compte de l'histoire des mathématiques pour pouvoir bien enseigner les mathématiques. Les mathématiques gagnent à être enseignées dans une perspective historique. L'intégration d'une dimension historique peut se faire selon différents modes : on peut faire une courte introduction avant le début d'un nouveau chapitre, donner au fur et à mesure de la progression du cours des indications chronologiques c'est-à-dire dater l'invention d'un concept, donner des indications biographiques sur les mathématiciens cités, donner des indications bibliographiques lorsque l'occasion s'en présente, d'expliquer la portée historique d'un concept, puis les problèmes qui lui ont donné naissance et les difficultés conceptuelles qui ont accompagnées son développement.

L'histoire des mathématiques peut être utile :

- Pour l'enseignant : elle lui permet de faire une approche pluridisciplinaire fructueuse et d'organiser des enseignements cohérents.
- Pour l'étudiant : elle lui permet de mieux maitriser les concepts enseignés.
- Pour l'enseignant dans sa relation au savoir : elle lui permet de montrer que les mathématiques sont une science vivante, d'humaniser sa discipline et de montrer que les mathématiques se sont construites parfois sur un temps très long.
- Pour l'enseignant dans sa relation à l'élève : elle lui permet d'obtenir une meilleure attention et une meilleure motivation des élèves.

Cependant, pour éviter de présenter une version trop simplifiée et réductrice de l'histoire, les enseignants devraient avoir suivi une formation en histoire des mathématiques. C'est la raison pour la quelle il faut mettre sur pied dans l'urgence, une unité de valeur d'histoire des mathématiques en licence ou en maitrise, un troisième cycle commun épistémologie et philosophie des sciences.

Les étudiants rencontrent beaucoup de difficultés en venant à l'université. Il faut les aider à s'intégrer au monde de l'université, car ils ne manquent ni de courage ni de volonté. Les étudiants ne viennent pas dépourvus de connaissances, les professeurs devraient utiliser des activités pertinentes pour introduire une nouvelle notion. Il faut plus prendre en compte les acquis antérieurs des étudiants.

Aujourd'hui les garçons et les filles fuient les études scientifiques. Il est impératif de fournir aux jeunes qui s'engagent sur le chemin des études scientifiques une information complète sur les objectifs et les exigences de formation. Il faut redonner de l'ambition aux filles et proposer des mesures appropriées : aides financières pour les filles se destinant aux filières scientifiques longues, prix d'encouragement pour des projets scientifiques développés par des filles, édition de revues scientifiques, académiques et professionnelles des filles au même titre que celle des garçons.

A la suite de cette revue de littérature, les questions centrales que nous nous sommes posées les suivantes :

- Quel est le niveau de prise en compte de l'histoire dans les programmes, manuels et pratiques de l'enseignement moyen et secondaire au Sénégal ?
- Quel peut être l'apport de l'histoire dans un cours de mathématiques ?

De manière évidente, nous pensons que la prise en compte de l'histoire des mathématiques reste au niveau des intentions dans les programmes.Au niveau des rares manuels adaptés au programme, l'histoire n'est évoquée qu'à travers des bulles historiques, et des anecdotes. Très peu d'activités de dimension historique sont proposées. En ce qui concerne les pratiques enseignantes, l'évocation de l'histoire est souvent jugée comme une perte de temps dans un cours de mathématiques et les rares enseignants qui trouvent l'histoire utile pose un problème de déficit de formation.

Par rapport à l'apport de l'histoire dans enseignement des mathématiques, nous pensons qu'il y a trois niveaux d'intervention :

1. Humanisation des mathématiques

Pour le commun des mortels, les mathématiques apparaissent comme une « science inhumaine ». Pire, une grande partie des élèves (et des enseignants !) confondent les mathématiques avec les mathématiques scolaires.

Or, nous ne voulons plus que les élèves conçoivent les mathématiques comme une discipline plate, consistant à résoudre de longues listes d'exercices, mais qu'ils voient les mathématiques comme utiles pour la vie, pour résoudre des problèmes, qu'ils voient les mathématiques comme une production sociale et culturelle qui évolue.

Alors, pour bien transmettre aux élèves ce que sont les mathématiques et qu'ils comprennent les contextes historiques et sociaux, les personnages et les besoins, il faut être capable d'expliquer aux élèves que les mathématiques ne tombent pas du ciel, qu'elles ont été faites par des humains comme nous et doivent continuer de se faire. Cela peut aider à développer une vision plus riche des mathématiques chez nos élèves et endiguer ainsi la désaffection pour les études scientifiques. La baisse des effectifs dans les séries et filières à dominante mathématique dans nos lycées et universités s'explique en effet en partie par la non-visibilité de cette dimension humaine des mathématiques dans nos enseignements

2. Culture mathématique

Un grand problème dans l'enseignement des mathématiques se pose aux élèves et étudiants qui ne font pas d'études scientifiques. C'est pourquoi, pour donner à celui qui ne fait pas d'études scientifiques une certaine culture mathématique, et non un ensemble instable de connaissances mal assurées, l'intégration de l'histoire des mathématiques dans nos cours devrait être un des modes prioritaires. Non seulement parce qu'elle favorise une compréhension meilleure des sciences elles-mêmes et de l'appréhension de leur rôle dans la société, mais aussi parce qu'elle constitue l'axe d'un tronc commun aux sciences et aux autres disciplines. Ainsi, elle facilite les échanges avec les autres disciplines. C'est dire l'importance à accorder à l'histoire des mathématiques dans la vulgarisation des mathématiques et des sciences de manière générale.

3. Culture de la pratique mathématique

A la différence de la culture mathématique, la culture de la pratique mathématique est la connaissance culturelle de la dynamique de production des savoirs, et non pas seulement des savoirs produits. En effet, Les contenus présentés dans les cours des mathématiques ont suivi le processus de transposition didactique. Ces contenus sont dépourvus des problématiques qui les ont fait apparaître, des difficultés que les mathématiciens ont eues avec eux, etc. Un cours d'histoire de mathématiques aide à re-contextualiser ces contenus dans le paysage mathématique, à comprendre les besoins qui ont demandé l'apparition de ces concepts et à comprendre comment s'est construit le réseau de concepts mathématiques.

Nous pensons que, proposer aux élèves et étudaints des activités mathématiques comportant une dimension historique pourrait leur permettre de redécouvrir les « reliefs cachés », et ainsi leur ouvrir la voie vers la construction de leur propre pratique mathématique.

L'objectif ici consiste à rendre plus attractives les mathématiques par le biais de ce cheval de Troie intellectuel qu'est l'histoire des mathématiques de sorte que des activités relevant plutôt des sciences humaines, on en vienne à des activités plus mathématiques, de contrer le dogmatisme apparent des mathématiques scolaire, de permettre aux élèves de voir les mathématiques comme le fruit d'une longue évolution dans le monde des mathématiciens de tous les continents.

II. METHODOLOGIE

Pour travailler la première question à savoir le niveau de prise en charge dans nos manuels et dans nos pratiques nous allons faire une analyse de manuels et de programme, organiser un entretien avec des professeurs des lycées de Dakar. Parmi ces professeurs, on distingue les titulaires du CAES et les vacataires c'est-à-dire ceux qui n'ont pas reçus de formation pour devenir enseignants.

Pour tenter de répondre à la deuxième question, nous allons mettre en place en classe deux cours sur la dérivée : l'un intégrant des éléments historiques, l'autre non. La comparaison de ces deux cours à travers le recueil d'élément touchant à l'impression et à la réaction des élèves de 1$^{\text{ière}}$ S qui sont destinés de faire des études en sciences en particulier en mathématiques

L'histoire semble peu présente dans le quotidien des enseignants de mathématiques, cela semble être dû à un manque de formation des professeurs ou à un manque d'intégration dans la formation initiale des enseignants de cours d'histoire des mathématiques et de son utilisation dans l'enseignement des mathématiques, mais aussi le manque de documents de référence ayant fait objet d'une évaluation jugés facilement utilisables en classe et respectant autant que possible la réalité historique.

De manière générale nos élèves suivent des cours sans intégration d'élément historiques, ainsi ils sont assez surpris de l'irruption de l'histoire dans le cours, mais par la suite, la plupart en comprennent l'intérêt et prennent goût à de telles activités.

UNE SEQUENCE D'ENSEIGNEMENT/APPRENTISSAGE DANS L'ENVIRONNEMENT GEOGEBRA

Sinaly DISSA*

Résumé – Comment pour le professeur acquérir des compétences liées à l'usage pédagogique des T.I.C.E (technologie de l'information et de la communication pour l'enseignement) dans l'enseignement des mathématiques au Mali et faire bénéficier de ces compétences à nos élèves dans leur apprentissage ? Dans cette communication, nous décrivons et étudions une séquence d'enseignement apprentissage sur la fonction trinôme du second degré avec des élèves de 1ère C (élèves de 16 -17 ans) à travers deux types de comparaison : d'une part entre les aspects algébriques et les aspects graphiques, d'autre part entre l'environnement papier/crayon et l'environnement du logiciel de géométrie dynamique GeoGebra.

Mots-clefs : géométrie dynamique, GeoGebra, séquence d'enseignement, équation quadratique, parabole

Abstract – How in the context of Mali, can teachers acquire skills related to pedagogical uses of ICT (information technology and communication for teaching) in mathematics education and benefit from these skills to improve students' learning? In this paper, we describe and study a teaching sequence about the quadratic equation for students in a sceintific orientation at grade 11 (16 -17 years old students) through two types of comparative study: one between the algebraic and graphical aspects, and one between paper/pencil environment and the dynamic geometry software GeoGebra.

Keywords: dynamic geometry, GeoGebra, teaching sequence, quadratic equation; parabola

I. INTRODUCTION

Durant notre formation à l'École Normale Supérieure (ENSup.) de Bamako, nous avons découvert l'environnement de géométrie dynamique à travers l'usage pédagogique des logiciels. Notre premier constat est que ces logiciels nous permettent de faire les constructions de figures courantes en géométrie avec facilité, rapidité. Mais ce qui nous a beaucoup davantage intéressés, c'est l'aspect dynamique des figures obtenues par rapport à celles du papier/crayon. En effet, en faisant varier l'emplacement des points libres et/ou les paramètres numériques, on peut mettre en évidence (ou non) les invariants géométriques (alignement, parallélisme, perpendicularité, isométries…). Ceci nous permet, dans nos pratiques de classe, de décrire et d'explorer avec/par les élèves une large partie de l'univers des représentations d'un objet géométrique. Cet environnement propose ainsi une source intéressante de conjectures et de questionnements.

La présence d'une salle d'ordinateurs dans notre lycée et l'intérêt que portent les élèves à ces appareils (en tant qu'environnement d'apprentissage) sont venus renforcer notre motivation à les utiliser dans notre enseignement. Cependant il faut remarquer que les textes officiels (programmes et savoir-faire) de mathématiques du Mali ne mentionnent pas l'utilisation de l'ordinateur dans l'enseignement.

Le projet que nous présentons ici vient d'un souci d'auto-formation professionnelle : il s'agit d'acquérir des compétences liées à l'usage pédagogique des T.I.C.E (Technologie de l'Information et de la Communication pour l'Enseignement) dans l'enseignement des mathématiques au Mali. Nous espérons ainsi faire bénéficier de ces compétences à nos élèves dans leur apprentissage des mathématiques.

Notre intérêt porte en particulier sur l'utilisation du logiciel de géométrie dynamique GeoGebra qui associe géométrie et algèbre comme des domaines des mathématiques d'égale importance qu'il va falloir faire interagir. Cette possibilité est offerte, car GeoGebra permet la

* Lycée Dioba Diarra de Koulikoro – Mali – dissasinaly@gmail.com

© Dissa S. (2012) Une séquence d'enseignement/apprentissage dans l'environnement GeoGebra. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (SPE1, pp. 1559–1568). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

double perception des objets : chaque fois qu'on construit un objet (point, droite, polygone, segment…) dans la « Fenêtre Géométrie », il est présent aussi dans la « Fenêtre Algèbre » avec sa « définition algébrique » (pour un point : ses coordonnées ; pour une droite : son équations ; pour un polygone : son aire ; pour un segment : sa longueur…). Il admet aussi un outil très intéressant : « Le champ de saisie » qui permet de faire tout ce qui est fait avec la souris (et bien plus) avec le clavier.

Ainsi, nous nous sommes posé la question suivante : quel(s) usage(s) faire de GeoGebra dans un projet d'enseignement-apprentissage des mathématiques en conformité avec les programmes et les savoir faire en vigueur au lycée ? En vue de chercher des réponses à cette question, nous avons construit une séquence d'enseignement/apprentissage que nous avons expérimentée et analysée.

Notre objet d'étude pour l'expérimentation est la fonction trinôme du second degré dans $\mathbb{R}$ à travers deux types d'interactions :

- entre les aspects algébriques et les aspects graphiques ;
- entre l'environnement papier/crayon et l'environnement d'un logiciel de géométrie dynamique.

Nous avons comme objectifs généraux de :

- faire apprendre aux élèves à utiliser au moins deux registres dans les problèmes liées à la fonction trinôme du second degré dans $\mathbb{R}$;
- faire apprendre aux élèves à utiliser de façon articulée deux environnements de représentation et de traitement des mathématiques.

II. CONTEXTE D'ETUDE

1. Situons notre établissement

Fondé en 1800, Koulikoro, qui signifie village au pied de la colline, s'étire sur environ 8 km le long du fleuve Niger. La population est de 25000 habitants aujourd'hui. Commune urbaine en plein exercice depuis 1966, la ville de Koulikoro est devenue en 1979 chef-lieu de la 2ème région administrative du Mali. Elle est aussi l'une des villes maliennes les mieux désenclavées :

- route bitumée jusqu'à Bamako (60 km à l'Est de Bamako) ;
- terminus de la voie ferrée Dakar-Niger ;
- début de la partie navigable du fleuve Niger jusqu'à Mopti puis par Gao en passant par Tombouctou.

Le lycée Dioba Diarra est l'établissement public d'enseignement secondaire général de la ville de Koulikoro. Il compte 1034 élèves (745 garçons, 279 filles) qui sont repartis dans 21 classes (moyenne 50 élèves par classe). Nous sommes 8 professeurs de mathématiques (Ratio Elève/Prof de math : 129,25). Chaque professeur effectue en moyenne 12 heures de cours par semaine.

2. Contexte pédagogique

L'établissement admet une salle d'informatique de 12 ordinateurs connectés à l'Internet. L'apprentissage de l'utilisation de l'ordinateur aux élèves n'est pas dans le programme. La salle d'informatique est fréquentée par des enseignants et par certains élèves initiés pour les saisies et la recherche sur Internet. Nos cours de mathématiques sont réalisés en papier/crayon (tableau, craie et instruments de géométrie) sans support informatique.

Notre étude a lieu avec les élèves de 11ème SE (1ère C, 16-17 ans), effectif 10 élèves compte tenu du nombre d'ordinateurs disponibles. Les mathématiques représentent la matière principale de cette classe. Les élèves suivent 8 heures de cours de mathématiques par semaine.

3. Equipement et environnement de travail

Dans la salle informatique du lycée, le système d'exploitation utilisé est Windows 2003. Sur les ordinateurs, il n'y a pas d'applications spécifiquement orientées vers l'enseignement des mathématiques. Nous avons installé la dernière version stable du logiciel GeoGebra (pour Windows). Les tables sont disposées en forme de « U ». Le professeur dispose d'une table de travail avec un ordinateur et d'un tableau. Nous n'avons pas de vidéo projecteur. Les élèves travaillent individuellement avec des « fiches élèves » (feuille sur laquelle figurent les tâches et les consignes des activités).

III. DESCRIPTION ET ETUDE DE LA SEQUENCE

Nous rappelons que cette expérimentation constitue un premier essai d'enseignement/apprentissage dans un environnement informatique. Le type d'organisation pédagogique que nous avons adoptée dans ce travail est le TP (Travaux pratiques) de mathématiques. Ce choix tient du fait que les TP fournissent suffisamment de temps aux élèves pour permettre une appropriation conséquente d'un problème de mathématiques et au professeur pour analyser plus finement les difficultés. L'élève peut s'apercevoir que dès qu'on s'intéresse à la mise en pratique d'une tâche autonome, les pistes de résolution, les méthodes, ne sont plus aussi évidentes que ce qu'ils auraient pu sembler à première vue.

Les activités proposées sont définies à partir de la tâche en papier/crayon de « La recherche des coordonnées du sommet d'une parabole à partir de son équation ».

Pour la mise en œuvre pratique, nous avons divisé la séquence en trois sous-séquences avec des objectifs pédagogiques fixés :

- Sous-séquences 0 (SS0) : stabilisation du milieu.

Les élèves doivent être capable de :

- Calculer les coordonnées du sommet d'une parabole ;
- Trouver la forme canonique du trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0, b, c \in \mathbb{R}$.

- Sous-séquence 1 (SS1) : recherche des coordonnées du sommet d'une parabole définie par trois points distincts.
- Sous-séquence 2 (SS2) : recherche des coordonnées du sommet d'une parabole en utilisant la forme non familière $ax^2 + bx + c = a(x - h)^2 + k \ avec \ h, k \in \mathbb{R}$.

Les trois sous-séquences ainsi définies sont composées de deux séances de deux heures chacune (1 séance pour les deux premières sous séquence, 1 séance pour la troisième sous-séquence).

Le savoir en jeu porte sur la fonction trinôme du second degré dans $\mathbb{R}$ dans le cadre des programmes et savoir-faire et des pratiques de classes de 11e SE.

La fonction trinôme du second degré dans ℝ est abordée dans le chapitre « Fonctions polynômes et fonctions rationnelles ». On peut souligner les savoir-faire suivants tirés du programme.

Les élèves doivent être capable de :

- manipuler des expressions littérales avec une certaine aisance ;
- calculer l'image d'un réel quelconque ;
- faire la représentation graphique point par point ;
- Factoriser si possible.

La fonction trinôme du second degré dans ℝ est aussi abordée dans le chapitre « Etude de fonction ». Ici, la détermination d'extremums éventuels d'une fonction polynôme fait partie des savoirs faire exigibles des élèves. L'étude formelle des paraboles n'est pas dans le programme. Dans les pratiques de classe, les trinômes du second degré dans ℝ sont souvent utilisés lors des résolutions d'équations et d'inéquations dans ℝ.

1. *L'enjeu pédagogique de la séquence*

Pour nous-mêmes, il s'agit d'apprendre à construire et à conduire en salle, des TP de mathématiques dans un environnement numérique (celui de GeoGebra).

Pour les élèves, il s'agit d'apprendre à construire des connaissances significatives du trinôme du second degré dans ℝ à travers d'une part, les interactions entre le registre algébrique de l'écriture mathématique et le registre graphique et d'autre part, à travers des tâches à réaliser alternativement dans les environnements papier/crayon et GeoGebra.

2. *Sous-Sequence 0 (SS0) : stabilisation du milieu*

Durant toute la sous-séquence, les élèves travaillent en papier/crayon. Deux objectifs sont particulièrement travaillés :

- Apprendre à calculer le calcul des coordonnées du sommet $S\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$d'une parabole définie par : $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0, b, c \in \mathbb{R}$.
- Apprendre à passer de la forme classique à la forme canonique pour $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0, b, c \in \mathbb{R}$.

Voici l'activité proposée aux élèves :

> On donne des fonctions suivantes : $f(x) = x^2 - 6x + 8$; $g(x) = 3x^2 + 9x + 1$; $P(x) = -x^2 + 4x - 4$.
>
> Pour chacune de ces paraboles :
>
> 1. Déterminer les coordonnées du sommet.
> 2. Déterminer la forme canonique.
>
> Rappel :
> - Le sommet d'une parabole $f(x) = ax^2 + bx + c$ est le point où elle atteint son extremum (maximum ou minimum) : c'est le point d'abscisse $-\frac{b}{2a}$.
> - La forme canonique d'un polynôme est :
>
> $$P(x) = ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{(2a)^2}\right], où\ \Delta = b^2 - 4ac.$$

Figure 1 *– Enoncé de l'activité 1 donné pendant la SS0*

Ce dernier rappel se justifie par le fait que les années scolaires sont tronquées depuis ces dernières années. En conséquence, les programmes sont rarement achevés.

L'analyse des résultats de la sous-séquence 0 (SS0) montre qu'avec le rappel que nous avons effectué, la plupart des élèves ont retrouvé, sans trop de difficultés, les solutions de l'activité. Quelques-uns ont mal utilisé la formule de la forme canonique au niveau de « $\frac{\Delta}{(2a)^2}$ ». En fait, sur la fiche d'activité, nous avions donné la formule avec « $\frac{\Delta}{4a^2}$ ». Ces élèves mettent les « 4 » aussi au carré. Ils ont des difficultés dans le calcul avec les exposants. Nous y avons remédié par des exemples en leur faisant remarquer que $ab^n \neq (ab)^n$. La sous séquence nous a permis de déceler et de remédier à certaines difficultés des élèves dans l'utilisation des trinômes du second degré et l'application de formules mathématiques (contenant des exposants et des fractions). Mais elle nous a pris plus de temps que prévu dans le scénario de notre analyse a priori.

3. *Sous-Séquence 1 (SS1) : recherche des coordonnées du sommet d'une parabole définie par trois points distincts*

Dans cette sous-séquence, les élèves travaillent alternativement avec GeoGebra et en papier/crayon. Les objectifs sont :

- construire une parabole passant par trois points quelconque avec GeoGebra ;
- retrouver dans l'environnement papier/crayon et par calcul algébrique la preuve mathématique à la solution proposée par GeoGebra : l'expression d'une parabole passant par trois points distincts dont les coordonnées sont données en papier/crayon.

Présentation de l'activité

Dans un repère orthonormal, on donne trois points $A(0;-1)$, $B(-3;5)$, $C(1;1)$ par lesquels passe la parabole (Γ).

Partie 1 : recherche avec GeoGebra
En utilisant le fichier « Parabole.ggb » (Qui se trouve dans le dossier « TP » du « Bureau ») :

1. Taper dans le « champ de saisie » : f(x)= polynôme [A, B, C]. Valider par la touche « Entrée ».
2. Choisir l'outil « déplacer ».

- « Déplace » la courbe de f. Que remarques-tu ?

3. Taper dans le « champ de saisie » : E=extremum[f]. Valider par la touche « Entrée »
- Que peux-tu conclure ?

Consigne : Ne pas activer la « Fenêtre Algèbre ».

En papier/crayon

4. Etablir l'expression, $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0, b, c \in \mathbb{R}$ associée à la parabole (Γ).
5. Déterminer les coordonnées de son sommet S.

Partie 2 : bilan avec GeoGebra

6. Construire le point S dans le fichier « Parabole.ggb ».
7. Taper dans le « champ de saisie » : relation[S, E]. Valider par la touche « Entrée ».
Qu'obtiens-tu ?

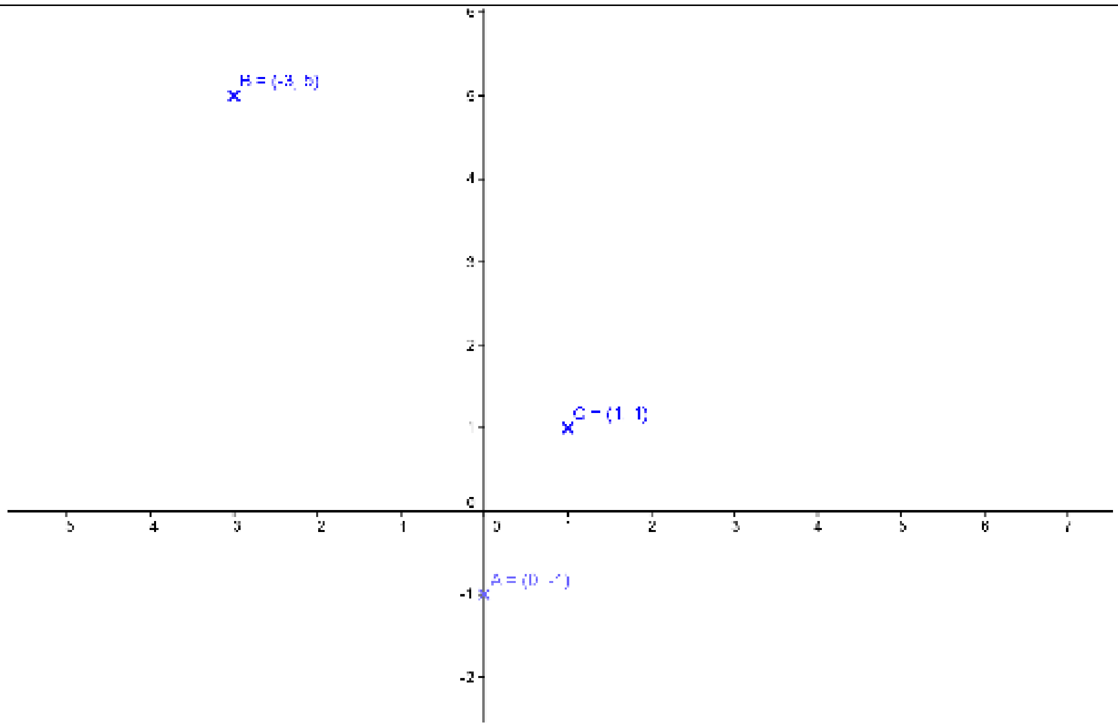


Figure 1

Feuille de travail du fichier "Parabole.ggb"

Figure 2 *– Enoncé de l'activité 2 de la SS1*

Solutions attendues

Avec GeoGebra

Le fichier « Parabole.ggb » est dans le dossier « TP » du « Bureau ». Nous y avons construit les points $A(0;-1)$, $B(-3;5)$, $C(1;1)$. Nous avons défini ces points comme « objet fixe » (Dans les propriétés) afin qu'ils ne soient pas modifiés par les élèves.

Utilisation des commandes :

- f(x)=polynôme [A, B, C] : construit la courbe passant par les trois points A, B, C.
- Extremum[Polynôme f] : construit tous les extremums locaux du polynôme f (en tant que points).
- relation[Objet a, Objet b] : affiche un message indiquant la relation entre l'objet a et l'objet b.

En papier/crayon

1. Détermination de $f(x) = ax^2 + bx + c$

D'après l'énoncé :

$$A(0;-1) \in (\Gamma) \Leftrightarrow f(0) = -1 \Leftrightarrow c = -1\ ;$$

$$B(-3;5) \in (\Gamma) \Leftrightarrow f(-3) = 5 \Leftrightarrow 9a - 3b + c = 5\ ;$$

$$C(1;1) \in (\Gamma) \Leftrightarrow f(1) = 1 \Leftrightarrow a + b + c = 1$$

On résout le système : $\begin{cases} \qquad\quad c = -1 \\ 9a - 3b + c = 5 \\ a + b + c = 1 \end{cases}$ on obtient : *a = 1, b = 1, c = -1*

En conclusion : $f(x) = x^2 + x - 1$

1. On utilise la formule $S\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$ en remplaçant a, b par leur valeur.

D'où : $S\left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}\right)$

Nous pensons que les élèves ne doivent pas avoir des difficultés dans la résolution du système de trois équations à trois inconnues (*a, b* et *c*). La détermination de la valeur de c n'est pas très difficile. Ils ne doivent pas avoir de difficulté non plus avec GeoGebra car nous rappelons que nous avons initié nos élèves à la manipulation de l'ordinateur et à la prise en main du logiciel GeoGebra (dont l'utilisation de la barre de saisie).

Le rôle du professeur est de faire respecter les consignes de travail (respect de ne pas activer « Fenêtre Algèbre », du travail individuel et de la durée). A la fin de l'activité, il doit récupérer les productions et faire l'évaluation.

L'analyse des résultats de la sous-séquence 1 montre que lors de la recherche de l'activité1, l'utilisation de GeoGebra a posé des difficultés à certains élèves, ce que nous n'avions pas prévu même si nos élèves n'ont pas l'habitude d'utiliser l'ordinateur. En effet certains avaient du mal à retrouver facilement sur le clavier les caractères des différentes commandes. D'autres obtenaient des messages d'erreurs après l'exécution de leur commande. Ces derniers ne respectaient pas les caractères en majuscule/minuscule pour les noms d'objet pourtant nous l'avions signalé lors de la prise en main de GeoGebra. Nous avions remédié à ces difficultés des élèves, puis relancer l'activité. A la fin un élève est passé au tableau pour la correction. Tout le monde a suivi.

Après l'exécution de la commande : E=extremum[*f*], seul un élève a répondu précisément que *E* est le sommet de la parabole *f*. Pour les autres c'était : le point minimum, l'extremum, le point le plus bas...

GeoGebra rend dépendant au « déplacement » deux objets géométriques construits qui sont liés par une propriété. Nous avions beaucoup insisté sur l'utilisation de cet outil du logiciel lors de l'initiation des élèves. Les élèves l'ont utilisé à la suite de la construction du polynôme, de son sommet comme un outil de « contrôle ».

Nous remarquons que GeoGebra a parmi aux élèves de mieux appréhender la notion du sommet d'une parabole.

En papier/crayon, quatre élèves ont répondu correctement. Les autres avaient des difficultés soit pour interpréter algébriquement les données de l'énoncé, soit dans la résolution du système. Nous trouvons que cette phase a été déterminante. Les élèves ont pu raisonner, argumenter, pour trouver la preuve mathématique du problème dont la solution a été préalablement visualisée avec GeoGebra.

A la fin de l'activité, chaque élève pouvait facilement savoir s'il a eu la bonne réponse à travers les messages affichés par GeoGebra. On pouvait entendre « Monsieur, j'ai eu » ou « Monsieur, j'ai raté ».

4. *Sous-séquence 2 (SS2) : Retrouver les coordonnées du sommet d'une parabole en utilisant une forme non familière du trinôme du second degré dans IR*

La forme factorisée qui est appelée « forme canonique du trinôme » $ax^2 + bx + c$ qui est utilisée dans les pratiques de classes au Mali est :

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{(2a)^2}\right], où\ \Delta = b^2 - 4ac.$$

L'enjeu de la sous-séquence 2 est de pouvoir retrouver les coordonnées du sommet à partir de la forme suivante (nouvelle pour les élèves) : $ax^2 + bx + c = a(x-h)^2 + k \ \ avec\ h, k \in \mathbb{R}$. Les élèves travaillent alternativement avec GeoGebra et en papier/crayon.

Les objectifs de cette nouvelle activité sont de mettre un trinôme du second degré sous la forme non familière : $ax^2 + bx + c = a(x-h)^2 + k \ \ avec\ h, k \in \mathbb{R}$, puis de déduire de cette écriture les coordonnées du sommet de la parabole et enfin d'utiliser GeoGebra comme outil de contrôle.

En utilisant les résultats de l'activité 1 :
Partie1 (recherche)
En papier/crayon

1. Ecrire la fonction f sous la forme : $f(x) = a(x-h)^2 + k \ \ avec\ h, k \in \mathbb{R}$.
2. Soit le point $S'(h, k)$. Comparer *S'* et *S* calculer en activité1.

Avec GeoGebra

3. On pose $g(x) = a(x-h)^2 + k \ \ avec\ h, k \in \mathbb{R}$.

Dans le fichier « Parabole.ggb » :

Construire la représentation graphique de g puis le point S'.
Que peux-tu conclure ?
Consigne : Ne pas activer la « Fenêtre Algèbre ».

Partie 2 (bilan)

4. Taper dans le « champ de saisie » : relation [f, g]. Valider par la touche « Entrée ». Qu'obtiens-tu ?

Figure 3 *– Enoncé de l'activité 3 de la SS2*

Solutions attendues

1. D'après l'activité 1 : $f(x) = x^2 + x - 1$.

Mettons le polynôme $x^2 + x - 1$ sous la forme non familière $f(x) = a(x-h)^2 + k \ \ avec\ h, k \in \mathbb{R}$, nous obtenons : $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$

2. On déduit de 1) : $S'\left(-\frac{1}{2}; -\frac{5}{4}\right)$ et *S* = *S'*.
3. On tape dans le « champ de saisie » : g(x)=(x+1/2)^2-5/4 pour construire g.

   Pour S', on tape : S'= (-1/2,-5/4).

Nous pensons que les élèves devront, pour la recherche de la forme canonique, retrouver que $x^2 + x$ est le début de la forme développée de l'expression $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$ et nous ne prévoyons pas de difficultés dans l'utilisation du logiciel.

Le rôle du professeur est de faire respecter les consignes de travail (respect de ne pas activer « Fenêtre Algèbre », du travail individuel et de la durée. A la fin de l'activité, il doit récupérer les productions et faire la correction.

L'analyse des résultats de la sous-séquence 2 montre que nous avons retrouvé dans les productions d'élèves deux méthodes de résolution pour mettre le polynôme sous la forme $f(x) = a(x-h)^2 + k$. En général, ils ont utilisé la forme canonique de f puis l'ont identifié à cette nouvelle forme d'écriture de f (non sans difficulté) pour avoir les valeurs de h et de k. Certains étaient perturbés par le signe « - » de la formule. En effet, la forme canonique donne $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$ et $h = -\frac{1}{2}$; $k = -\frac{5}{4}$.

Un élève a tenté de résoudre par la méthode des coefficients indéterminés (utilisée à d'autres occasions). Il a développé la forme $f(x) = a(x-h)^2 + k$ et l'identifié à $f(x) = x^2 + x - 1$. Il n'a pas pu retrouver les valeurs correctes.

Cette deuxième méthode de résolution n'est pas ressortie dans notre analyse a priori. Nous constatons que le rappel effectué sur la forme canonique (en Sous séquence 0) du trinôme du second degré a incité la majorité des élèves à l'utiliser dans cette activité.

Les élèves ont utilisé GeoGebra à la suite du travail en papier/crayon. Le logiciel les a permis de vérifier rapidement leurs résultats du papier/crayon.

L'utilisation de GeoGebra n'a pas posé de difficulté aux élèves comme prévu dans notre analyse a priori. De la même façon qu'en sous-séquence 1, à la fin de l'activité chaque élève pouvait savoir s'il a eu la bonne réponse à travers les messages affichés par GeoGebra : il n'avait pas besoin de l'avis du professeur.

IV. SYNTHESES DES RESULTATS DE LA SEQUENCE

A la suite de nos analyses, nous constatons d'abord que pendant les séances, les élèves ont été beaucoup plus concentrés et motivés dans la résolution des exercices. En ce qui concerne le logiciel GeoGebra, nous avons constaté qu'il facilite l'engagement actif des élèves dans les tâches à réaliser. Il les incite à être plus rigoureux dans l'exécution des tâches que lors des séances classiques en papier/crayon.

L'utilisation de GeoGebra nous a permis aussi d'associer facilement les points de vues numériques et graphiques sur une parabole (sommet, formes d'écritures).

Un autre point à souligner est le changement de notre rôle dans cet environnement de travail. En effet, au lieu de « mener le jeu » comme lors des séances « traditionnelles », nous faisons des suggestions et nous relançons les activités. De plus, l'appropriation des problèmes par les élèves est plus rapide. On pouvait entendre lors des phases bilan « Monsieur, c'est facile… ». Par ailleurs, l'expérimentation a induit chez les élèves la précaution liée au contrôle de résultat obtenu soit par GeoGebra soit en papier/crayon. En revanche, nous avions eu beaucoup de difficultés à avoir l'attention des élèves lorsqu'on donne des consignes ou lors des phases bilan. Nous pensons qu'il serait utile de mettre les machines en mode veille pendant de telle phase.

V. CONCLUSION

L'élaboration de cette séquence nous a permis d'entamer un travail de réflexion et d'auto-formation sur l'utilisation de l'ordinateur dans notre enseignement des mathématiques.

Nous avons fait des choix et nous nous sommes confrontés à des difficultés. Nos élèves ont pu apprendre des connaissances significatives sur le trinôme du second degré dans $\mathbb{R}$ à travers d'une part, les interactions entre le registre de l'écriture mathématique et le registre graphique et d'autre part, en utilisant alternativement les environnements papier/crayon et GeoGebra.

Dans nos activités, nous n'avons exploité dans l'ensemble que les fonctionnalités analytiques du logiciel GeoGebra à travers le « champ de saisie ».

Nous pensons qu'il est intéressant d'engager nos élèves dans des activités de recherche dans un environnement de logiciel de géométrie dynamique. Mais, avant tout, il faudrait que l'enseignant se demande à quel moment utiliser le logiciel ? Pour illustrer quelle notion ? De quelle manière ?

Les élèves ont beaucoup apprécié les séances sur ordinateur. Mais l'utilisation de l'ordinateur ne doit pas avoir pour objet de faire de l'élève un expert dans l'utilisation d'un logiciel. Il faudrait surtout qu'il sache reconnaître certaines questions susceptibles d'être illustrées ou résolues grâce à l'ordinateur et qu'il sache interpréter les réponses que l'ordinateur fournit.

Quant à l'intégration effective des outils informatiques dans notre enseignement, beaucoup d'efforts devront être fournis. En effet, Il n'est pas toujours aisé pour l'enseignant d'avoir du matériel (assez d'ordinateurs dans les salles) à sa disposition ou encore de bien connaître les logiciels (l'apprentissage des T.I.C.E n'est pas dans le programme de l'ENSup). De plus, il faudrait des manuels avec des activités utilisant les T.I.C.E à la disposition des enseignants ; intégrer l'enseignement de ces logiciels dans les programmes et dans les évaluations. Puis que les élèves peuvent voir les T.I.C. comme un divertissement et non comme une aide à l'acquisition des connaissances mathématiques. On pourra alors se demander s'il est possible d'intégrer les T.I.C.E dans l'enseignement des mathématiques au Mali. Il s'agit là d'une problématique pédagogique qui est loin d'être élucidée.

REFERENCES

Textes officiels

- Ministère de l'Education Nationale – Inspection Enseignement Secondaire, Programmes de mathématiques de l'enseignement secondaire général technique et professionnel classes 11ème toutes séries 2004
- Opération Mathématiques, Projet Rénovation de l'Enseignement Scientifique (COOPÉRATION FRANCE – MALI), Savoir-Faire 11ième, Juin 1992.

Sur Internet

Site officiel du logiciel GeoGebra : www.geogebra.org

INTRODUCTION DES OPERATIONS SUR LES NOMBRES RELATIFS EN CLASSE DE CINQUIÈME : UNE NOUVELLE SIGNIFICATION POUR LES SIGNES « + » ET « – »

Alexandra GOISLARD*

Résumé – Si les nombres négatifs ont été utilisés depuis longtemps en Chine ou en Inde, leur introduction en Europe a été relativement compliquée. Même si on en trouve des traces dès la fin du XV^e siècle, il a fallu attendre la moitié du XIX^e pour que leur existence soit acceptée par les plus grands scientifiques en tant que nombres et non en tant que quantités négatives. Comment peut-on alors imaginer que des collégiens puissent maîtriser aisément les opérations sur les nombres relatifs ? Après avoir analysé les différentes façons d'introduire les nombres relatifs, l'addition et la soustraction, dans les manuels de la classe de 5ème (élèves de 12-13 ans), nous avons expérimenté dans trois classes quelques-unes de ces activités pour introduire les opérations avec les nombres relatifs. J'ai particulièrement travaillé sur la distinction entre le signe du nombre et celui de l'opération.

Mots-clefs : Nombres relatifs, opérations, signe moins, signe du nombre, signe opératoire

Abstract – Though negative numbers have been used in China and India for a long time, it has been much more difficult to introduce them in Europe. The first references to this idea refer to the XVth century, but the existence of such quantities has not been approved before the middle of the XIXth century. Yet they were not accepted as numbers but only negative values. The most notable scientists at that time showed great difficulties to accept and understand negative numbers. Then, it is hard to believe that secondary school students can easily handle them and their operations. In a first part, we have analysed how the relative numbers and addition and subtraction are introduced in the textbooks of grade 7 (students of 12-13 years old). Then, we have chosen some activities we proposed in our classes in order to introduce relative numbers. We have particularly focused on the different meaning of sign "+" or "-".

Keywords: Relative numbers, operations, minus sign, number sign, operation sign

Dans le cadre de mon année de stage, j'avais en responsabilité des classes de cinquième (élèves de 12-13 ans). En étudiant les programmes officiels, j'ai remarqué que l'introduction des nombres relatifs prenait une place importante au cours de cette année scolaire et ces nombres seraient utilisés ensuite sans cesse dans la suite de la scolarité. Il m'a donc paru important de me questionner sur leur introduction et sur l'apprentissage des opérations avec ces nombres. En effet, cette introduction me paraît délicate car les élèves sont pour la première fois confrontés à des nombres qui ne représentent ni une quantité, ni une grandeur qu'ils ont l'habitude de manipuler. S'ils ont déjà effectué de nombreux calculs sur les grandeurs positives comme des prix, des masses ou des longueurs, ils ne l'ont pas encore fait avec des valeurs négatives.

Après discussion avec mes collègues expérimentés et des séances d'observations organisées dans leurs différentes classes de collège, j'ai pu déceler un certain nombre d'erreurs dues à une confusion entre les signes opératoires et les signes des nombres. Certains élèves ont une représentation erronée du symbole « − » dans des calculs du type 7 + (- 11). Ce signe représente pour eux une soustraction. Même si, dans ce cas, le résultat est juste, qu'en est-il pour le type de calcul 7 – (- 11) ? Lors d'une séance en troisième, nous avions proposé l'énoncé suivant : « Calculer la valeur de A = 7 x + 3 pour x = 2, puis pour x = - 5. ». Un élève a réussi le travail pour le nombre positif, mais il a répondu pour le nombre négatif : « Pour x = - 5 ; A = 7 – 5 + 3 = 5 ». Cette erreur semble provenir d'une confusion entre le nombre négatif et le signe de la soustraction.

* Collège la Plaine de l'Ain, Leyment – France – alexandragoislard@gmail.com
(Mémoire réalisé en collaboration avec Fabien Tulars)

© GOISLARD A. (2012) Introduction des opérations sur les nombres relatifs en classe de cinquième : une nouvelle signification pour les signes « + » et « - ». In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21^e siècle – Actes du colloque EMF2012* (SPE1, pp. 1569–1582). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

Une autre difficulté concerne l'utilisation de la calculatrice avec des opérations utilisant des nombres relatifs. Les élèves ont parfois besoin de l'utiliser pour valider ou non leurs résultats. Mais ils le font sans faire la différence entre les signes opératoires et les signes du nombre alors que la plupart des modèles des élèves de la classe ont des touches distinctes suivant la signification du symbole.

A partir de ces observations, je me suis interrogée sur la manière d'introduire, l'addition et la soustraction des nombres relatifs en classe de cinquième pour éviter la confusion entre les différentes significations des signes « + » et « − ». Est-il alors intéressant de donner un sens aux nombres relatifs ? Faut-il donner une signification à leurs opérations ? Comment introduire ces nouvelles notions pour éviter les confusions entre les différentes significations des symboles ?

Pour m'aider à comprendre les difficultés remarquées, j'ai étudié dans un premier temps l'histoire des nombres relatifs puis l'évolution de l'introduction de ces nombres en France depuis la deuxième moitié du XIX^{e} siècle. Ensuite, j'ai analysé différentes activités introduisant l'addition et la soustraction de nombres relatifs dans les manuels scolaires. Enfin, j'ai construit et testé dans plusieurs classes une série d'exercices s'inspirant d'activités analysées dans les manuels. Ce test m'a permis d'observer la capacité des élèves à s'adapter à des contextes différents et à réinvestir les notions travaillées dans le chapitre.

I. LES NOMBRES RELATIFS DANS L'HISTOIRE

Même si les nombres négatifs sont utilisés depuis longtemps en Chine ou en Inde, leur introduction en Europe a été relativement compliquée et controversée (Gaud et Guichard 1991). Les Chinois manipulaient les nombres relatifs depuis le premier siècle de notre ère, pour faire leurs calculs, résoudre des équations et des systèmes d'équations à plusieurs inconnues. Ils différenciaient les nombres positifs et négatifs à l'aide de représentation concrète, des bâtons de couleurs. L'addition se faisait alors par regroupement de ces différents bâtons. En Inde, les nombres relatifs servaient aussi à résoudre des équations. Depuis le VII^{e} siècle, ces nombres étaient maniés aisément à l'aide des notions de bien et de dette.

En Europe, à la fin du XV^{e} siècle, l'un des premiers à isoler une valeur négative est le français Nicolas Chuquet. Ce type de valeurs se retrouve également dans les travaux de Jérôme Cardan sur les équations du troisième degré. Cependant, les solutions négatives trouvées sont aussitôt écartées. Elles ne sont pas considérées, à cette époque, comme des nombres. De même, dans d'autres disciplines, cette réticence se fait ressentir. Au début du XVIII^{e} siècle, Daniel Gabriel Fahrenheit conçoit un thermomètre pourvu d'une graduation évitant les températures négatives. Il faudra attendre un siècle et demi pour que les températures négatives soient alors acceptées. Au XVIII^{e} siècle, D'Alembert retient une définition des quantités négatives comme étant le contraire des positives, ce qui signifie qu'en géométrie « les négatives se prennent toujours du côté opposé aux positives. ». L'obstacle du zéro rend aussi difficile l'introduction des quantités négatives (Glière 2007). Progressivement, les négatifs sont soumis à des règles de calcul en prolongeant celles existantes sur les nombres positifs. Mais la multiplication de deux nombres négatifs a longtemps posé problème et ce n'est qu'en 1867 que Hankel donne des arguments qui permettent de trancher la question.

Les signes « + » et « − » restent les indications de l'addition et de la soustraction, le nombre négatif est représenté par d'autres symboles, comme par exemple $\bar{a}$ au lieu de –a. Ce n'est que plus tard qu'une même quantité pourra être considérée de deux manières opposées : elle pourra soit augmenter une autre quantité (c'est alors un bien), soit la diminuer (c'est alors une dette). Les signes vont alors permettre de marquer cette différence. Le signe « − »

représentera les dettes, le fait de retrancher. Ces quantités négatives ont depuis une existence aussi réelle que les positives, on peut donc les retrouver ensemble dans un même calcul. Ces quantités deviennent des nombres.

J'ai pu constater que les scientifiques du XVIII^{e} siècle ont eu de grandes difficultés à comprendre, puis utiliser les nombres relatifs. On peut alors imaginer que les élèves ont aussi des difficultés avec ces notions, même si aujourd'hui, les nombres négatifs sont utilisés très tôt pour représenter par exemple des températures ou différentes altitudes en comparaison avec le niveau de la mer. Ces représentations désignent alors les nombres relatifs comme étant des positions. Même s'il est facile d'ordonner des positions, peut-on utiliser ce sens pour enseigner les opérations sur les nombres relatifs ? Est-il nécessaire de donner une signification à ces opérations ? Je me suis alors intéressée aux manières d'introduire les nombres relatifs et leurs opérations dans les programmes de mathématiques depuis le XIX^{e} siècle jusqu'à aujourd'hui.

II. LES RELATIFS DANS L'ENSEIGNEMENT

Au cours du XIX^{e}, les quantités négatives ont été introduites dans l'enseignement comme étant solution d'équation du premier degré. Quelques années plus tard, en 1890, ces quantités négatives sont introduites d'une manière différente, elles apparaissent comme étant des nombres négatifs. Ils servaient alors à quantifier des grandeurs susceptibles d'être portées dans un sens ou dans le sens opposé.

Puis, dans les années 1970, les mathématiques modernes se servent de bilans comptables pour définir des classes d'équivalence. Chaque bilan est alors un nombre décimal relatif. Les règles d'addition et de soustraction sont alors introduites facilement par la suite. La multiplication reste difficile à expliquer à partir de cette situation concrète. Depuis les années 1978 (contre réforme des mathématiques modernes), les mathématiques doivent être abordées de manière plus concrète. On utilise alors les températures, le numéro des étages dans un ascenseur ou d'autres exemples pour introduire les nombres relatifs. L'addition est étudiée en utilisant des situations de gain-perte, l'altitude,… La calculatrice commence à être introduite dans les classes.

Dans les années 1980, l'introduction des nombres relatifs et leurs opérations se passe en deux temps. Tout d'abord, les nombres relatifs et l'addition sont travaillés en classe de sixième à l'aide de la droite graduée ; puis en cinquième, la soustraction est définie, on dit alors que la différence de $b - a$ est le nombre qu'il faut ajouter à a pour obtenir b.

Dans les années 1990, ces idées sont reprises mais la définition de la soustraction est enlevée des programmes pour laisser place à une règle de calcul : « Pour soustraire un nombre relatif, on ajoute l'opposé de ce nombre ». Ceci est justifié par un travail avec des additions de plusieurs nombres relatifs et l'utilisation de la propriété : « la somme de nombres opposés est nulle ».

Aujourd'hui et depuis la rentrée scolaire de 2005, les élèves abordent l'introduction des nombres relatifs, de l'addition et de la soustraction avec ces nombres, en classe de cinquième. Avec ce nouveau programme, les élèves ont peu de temps pour faire fonctionner ces nouvelles notions même si en dehors de la discipline, ils ont certainement déjà pu observer des mesures négatives. De plus, pour la première fois dans leur cursus scolaire, les signes « + » et « − » ne sont plus à chaque fois associés à des opérations. Il va donc être nécessaire de clarifier les significations de ces symboles et distinguer le signe du nombre et le signe opératoire, pour ne pas induire des erreurs qui vont se reproduire tout au long du collège et qu'on va retrouver notamment en calcul littéral.

III. ETUDE DES MANUELS SCOLAIRES DE 5EME

Dans un premier temps, je me suis intéressée aux différentes manières d'introduire les nombres relatifs dans huit manuels français de cinquième. Cette étape d'analyse m'a paru importante pour comprendre les contextes utilisés lors des activités introduisant les opérations avec ces nombres.

La plupart des manuels choisissent de se baser sur les connaissances communes des élèves pour présenter l'existence des nombres relatifs. Ils utilisent, par exemple, le thermomètre pour lire des températures ou travailler avec des variations entre différents moments donnés. D'autres utilisent des schémas avec différentes altitudes en comparaison avec le niveau de la mer. Enfin, en référence au cours d'histoire, on trouve aussi des frises chronologiques.

D'autres présentent des variations, par exemple de poids, et identifient les nombres relatifs à des augmentations ou des diminutions. On trouve également quelques introductions à l'aide de graphiques cartésiens déjà travaillés en géographie. Dans ce cas, cela permet de coder des déplacements sur un axe (par un nombre positif si l'on se déplace dans le sens de l'axe et par un nombre négatif dans le cas contraire).

Enfin, dans quelques activités, les nombres relatifs sont présentés comme étant solution de soustractions « impossibles » du type 5 – 7. Pour trouver les résultats de ces opérations, les manuels proposent parfois aux élèves d'utiliser leur calculatrice.

Toutes ces représentations sont exploitables par la suite dans l'introduction des opérations avec les nombres relatifs. Il nous semble important que les élèves aient des représentations différentes de ces nouveaux nombres.

1. L'addition des relatifs

Pour l'introduction de l'addition, nous avons repéré trois types d'activités.

L'addition par gains/pertes

Tout d'abord, toujours dans la tendance des années 80, on trouve des situations concrètes avec des bilans de variation gains/pertes, recettes/dépenses, montées/descentes ou d'autres suivant les cas. Elles sont généralement présentées sous forme de tableau récapitulant différents résultats et une colonne bilan, où intervient alors la modélisation de la situation par une addition de deux nombres relatifs.

L'addition à la manière des Chinois

Le deuxième type d'activités repéré dans les manuels utilise des symboles qui seront ensuite modélisés par des nombres relatifs comme dans cet exemple.

3. « Histoires de trolls »

Il y a très longtemps, une étrange malédiction vint s'abattre sur une forêt où vivaient des trolls bleus et des trolls rouges : lorsqu'un troll bleu rencontrait un troll rouge les deux créatures disparaissaient par enchantement. Un archéologue a retrouvé deux vieux parchemins sur lesquels différentes rencontres sont représentées par des marques et leurs résultats :

1) Le second parchemin a été en partie effacé. Recopie les informations en utilisant deux couleurs, et trouve le résultat de chaque rencontre.

2) Que se passe-t-il lorsque deux groupes de trolls de la même couleur se rencontrent ? Et lorsque les deux groupes sont aussi nombreux, mais de couleur différente ?

3) Trouve un moyen pour décrire une rencontre entre 237 trolls bleus et 354 trolls rouges. Quel est le résultat de cette rencontre ?

Figure 1 *– Activité à la manière des Chinois*

L'objectif est de donner une image mentale de l'addition sur laquelle les élèves pourront s'appuyer lorsqu'ils seront en difficulté. On présente des parchemins où sont représentés des bâtons bleus et rouges représentant des « trolls ». On retrouve ici l'idée des Chinois qui utilisaient des baguettes de couleurs pour représenter les nombres relatifs. Un modèle, sur le premier parchemin, permet de présenter la manière d'additionner les bâtons de différentes couleurs suivant la règle suivante, deux bâtons de couleurs différentes s'annulent. Aucun nombre relatif n'est utilisé ici. Les élèves doivent alors utiliser cet exemple pour retrouver les résultats perdus du deuxième parchemin et extraire implicitement les propriétés d'addition. Puis, on leur demande de décrire les manières de trouver leurs résultats en omettant toujours l'utilisation de nombres. Le cas particulier de la somme de deux nombres opposés est travaillé ici. Toutefois, il peut être long et fastidieux d'utiliser la technique décrite ici. Il est alors nécessaire d'introduire les nombres relatifs, ce qui est précisément l'objectif de la fin de l'activité. La représentation utilisée a ses limites, un autre code doit être trouvé pour travailler avec des valeurs plus grandes. Il risque cependant d'être difficile aux élèves de penser aux nombres relatifs car ici les signes « − » et « + » n'ont pas une signification claire et à aucun moment la consigne n'indique ce qu'il faut utiliser.

Avec la droite graduée

Le dernier type d'activités utilise la droite graduée. L'addition de deux nombres relatifs est alors introduite comme étant deux déplacements successifs dans le même sens. L'exercice est à chaque fois traité dans un cadre particulier, comme par exemple, le déplacement d'une tortue le long d'un axe ou la montée et descente d'une grenouille sur une échelle. Cette façon d'interpréter l'addition fournit à certains élèves un support matériel à leur compréhension. Je n'ai pas exploité ce type d'activités qui se présente rarement dans les manuels scolaires.

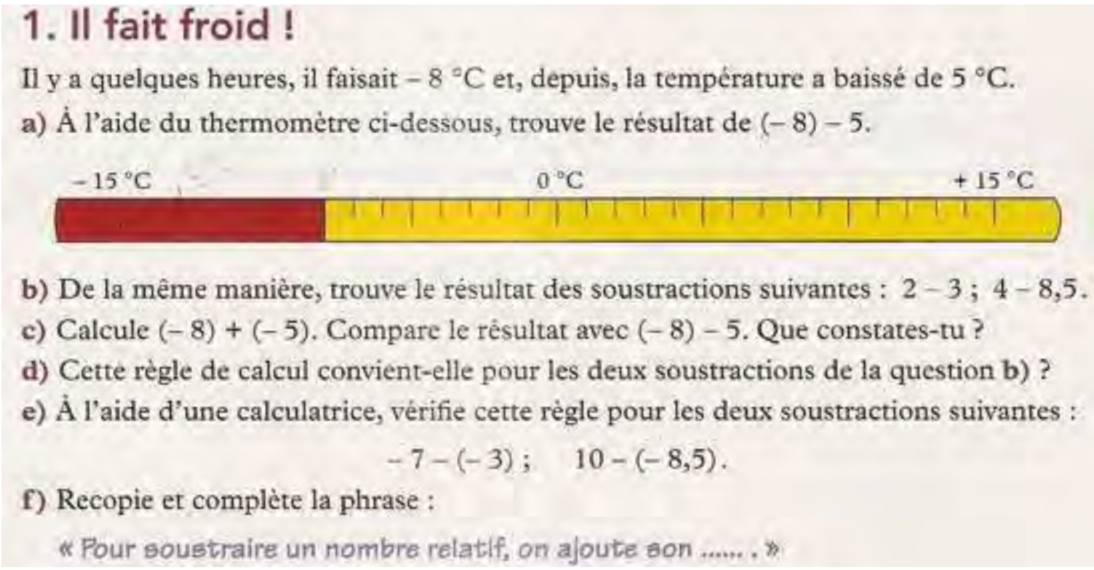
Toutes ces activités ont le même objectif, introduire l'addition de nombres relatifs. Dans les deux premières, les nombres relatifs à additionner n'ont pas été présentés comme des nombres mais comme des entités ou des variations pour permettre aux élèves d'avoir une meilleure interprétation de l'addition. On peut penser que ceux-ci garderont en tête ces conceptions, même s'ils doivent s'en détacher par la suite pour pouvoir réaliser des opérations simples. Ces deux activités pourraient alors se compléter par la dernière manière d'introduire l'addition par déplacement sur une droite graduée. Dans chaque cas, les signes des nombres « + » et « − » sont différenciés par des couleurs différentes ou des termes différents.

2. L'introduction de la soustraction

Concernant la soustraction dans les manuels, les propositions d'activités sont plus variées.

Droite graduée et utilisation de la calculatrice

Certains manuels scolaires utilisent des variations de température pour introduire la soustraction comme un déplacement vers la gauche sur une droite graduée. Les élèves doivent trouver une règle qui permet de calculer la différence entre deux nombres relatifs avec cette représentation, puis réaliser des vérifications à l'aide de leur calculatrice.



1. Il fait froid !

Il y a quelques heures, il faisait − 8 °C et, depuis, la température a baissé de 5 °C.

a) À l'aide du thermomètre ci-dessous, trouve le résultat de (− 8) − 5.

b) De la même manière, trouve le résultat des soustractions suivantes : 2 − 3 ; 4 − 8,5.

c) Calcule (− 8) + (− 5). Compare le résultat avec (− 8) − 5. Que constates-tu ?

d) Cette règle de calcul convient-elle pour les deux soustractions de la question **b)** ?

e) À l'aide d'une calculatrice, vérifie cette règle pour les deux soustractions suivantes :

− 7 − (− 3) ; 10 − (− 8,5).

f) Recopie et complète la phrase :

« Pour soustraire un nombre relatif, on ajoute son .... »

Figure 2 *– Introduction de la soustraction avec la droite graduée et la calculatrice*

Dès le début, les élèves doivent faire le lien entre une variation de température explicitée par une phrase et une deuxième sous forme de soustraction. Dans ces questions, des confusions peuvent être liées au manque de distinction entre le signe d'un nombre et d'une opération. Ensuite, l'activité propose d'utiliser la règle trouvée précédemment avec différents calculs et de valider ou non leurs résultats avec la calculatrice. Son utilisation peut provoquer quelques problèmes puisque certaines calculatrices ont deux touches différentes pour le signe moins, une de ce type « − » pour la soustraction et l'autre avec le même signe mais plus petit ou entre parenthèses. Les élèves doivent donc faire la différence entre les deux significations du signe « − » avant de composer les calculs sur leur calculatrice. Une fois cette expérimentation terminée, les élèves doivent construire une règle pour calculer les soustractions de nombres relatifs. Tout au long de cette activité, peu d'attention est portée sur la différence entre les signes d'opération et de nombre. De plus, dans l'ensemble du manuel, le signe « + » des nombres positifs apparaît très peu. Les deux significations du signe « − »ne sont pas mises en avant, seulement dans les opérations avec une soustraction suivie d'un nombre négatif où le nombre est mis entre parenthèses.

Les additions à trous

D'autres manuels ont choisi d'utiliser des additions à trous pour introduire la soustraction de deux nombres relatifs. Ils ont des présentations différentes, certains utilisent des pyramides, d'autres des calculs en ligne. Dans ce type d'activités, il y a deux temps : un premier pour établir une définition de la différence de deux nombres relatifs à l'aide d'additions à trous ; puis, dans un second temps est proposée une méthode pour calculer une différence, en utilisant la somme de deux nombres opposés.

« Soustraire un nombre relatif » c'est « ajouter son opposé »

Quelques livres commencent par proposer une soustraction avec des nombres relatifs dans l'objectif de montrer que soustraire un nombre relatif équivaut à ajouter son opposé. Ce type d'activité ne cherche pas à introduire la soustraction en essayant de lui donner une signification mais juste à illustrer une règle de calcul.

Dans un premier temps, on fait calculer aux élèves une somme E donnée. Puis, on ajoute à E un nombre opposé à un des termes de celle-ci. On répète ainsi l'opération pour chaque terme de la somme en utilisant le résultat trouvé pour E précédemment. Les différents résultats sont présentés dans un tableau pour pouvoir faire des comparaisons par la suite. On introduit alors la soustraction en « supprimant » un des termes de la somme E. Il reste alors une addition de plusieurs nombres relatifs, ces résultats sont aussi présentés sous forme de tableau. Le but est alors de comparer les résultats de ces calculs pour s'apercevoir qu'ils sont identiques et que donc pour soustraire un nombre relatif, il faut ajouter son opposé.

Cette activité introduit une méthode de calcul pour la soustraction qui ne met pas en évidence les différentes significations du signe « − », celui du nombre, de la soustraction mais aussi du nombre opposé.

Donner la règle

D'autres livres, n'ayant pas trouvé d'introduction de la soustraction des relatifs « satisfaisante » (au dire des guides d'activités), ont préféré donner directement la règle « Soustraire un nombre relatif, revient à ajouter son opposé » accompagnée de schémas et d'exemples, puis de calculs d'applications. D'autres encore se basent sur des séries de calculs vraies ou fausses pour lesquels les élèves doivent dégager eux-mêmes une règle permettant de calculer une soustraction de relatifs.

Cette étude de manuels nous a montré la diversité des approches sur l'addition et soustraction des relatifs : certaines étant basées sur des activités qui peuvent leur donner un sens, d'autres illustrant les règles, d'autres enfin confiant à la calculatrice la responsabilité de donner cette règle.

IV. EXPERIMENTATION EN CLASSE DE CINQUIEME

A la suite de cette analyse, j'ai élaboré deux chapitres qui ont été expérimentés avec trois classes de 5$^{\text{ème}}$. Le premier s'intitule « Les nombres relatifs » composé de trois parties, l'introduction des nombres relatifs, le repérage dans le plan et la comparaison des nombres relatifs. J'ai aussi choisi d'introduire les nombres relatifs à partir d'un exemple concret, la coupe verticale d'une région des grands lacs d'Amérique du Nord. Ce travail m'a permis de définir ces nombres et de fixer le vocabulaire associé. Puis, j'ai travaillé le chapitre « Opérations avec les nombres relatifs » (huit séances) dans lequel ont été introduites l'addition et la soustraction de nombres relatifs. La distance entre deux points sur une droite graduée a été introduite dans ce chapitre ainsi que l'utilisation des écritures simplifiées. Voici les principales activités que j'ai proposées dans mes classes.

1. Addition par gains/pertes

Dans cette activité (voir Annexe 1) qui nous a servi de référence, l'addition de nombres relatifs est introduite à l'aide d'un contexte connu et facilement exploitable par les élèves : un jeu vidéo où l'on étudie les gains et les pertes de points à la fin d'une journée. A la fin de cette activité un organigramme a été réalisé par les élèves pour clarifier les différentes méthodes permettant d'additionner deux nombres relatifs.

Dans la première partie, les résultats sont trouvés aisément par les élèves puisque le contexte les aide à imaginer la situation. Ils ont utilisé pour beaucoup d'entre eux des symboles pour représenter les différents cas. Lors de l'expérimentation, certains ont eu des difficultés à trouver le bilan de la journée où le joueur perdait dès la première partie ; cela montre déjà un problème d'interprétation des nombres négatifs même si pour le moment aucun symbole « - » n'est utilisé. Après avoir fait ces bilans, les élèves doivent modéliser ces résultats à l'aide de nombres relatifs et pour cela, traduire « gagne » et « perd » à l'aide des signes « + » et « − ». Le bilan de la journée est traduit par une addition. Il faut insister sur le passage du langage courant (« et » ou « puis ») au langage mathématique (« + » ou « ajouter »). Dans le cas où les deux parties de la journée sont interprétées par des nombres de même signe, les élèves n'ont eu aucune difficulté. Par contre, pour des résultats de signe différent, pour insister sur la variation, certains élèves ont ressenti le besoin de soustraire les deux nombres. On note ici une difficulté à comprendre la différence entre les signes opératoires et les signes des nombres.

Ensuite, les élèves doivent généraliser la modélisation pour les autres jours. Il faut faire une analogie entre les situations de gain/perte rencontrées dans le jeu vidéo et ces additions. Les élèves peuvent alors dégager des techniques de calcul utilisées pour ajouter deux nombres relatifs. Même si certains ont fait très rapidement le lien entre les deux parties, d'autres ont eu des difficultés à additionner des nombres de signes différents. Ils ont systématiquement ajouté les distances à zéro des deux nombres relatifs. Pour le signe, ils ont eu deux stratégies différentes : soit prendre le signe du premier nombre, soit celui du nombre qui avait la plus grande distance à zéro.

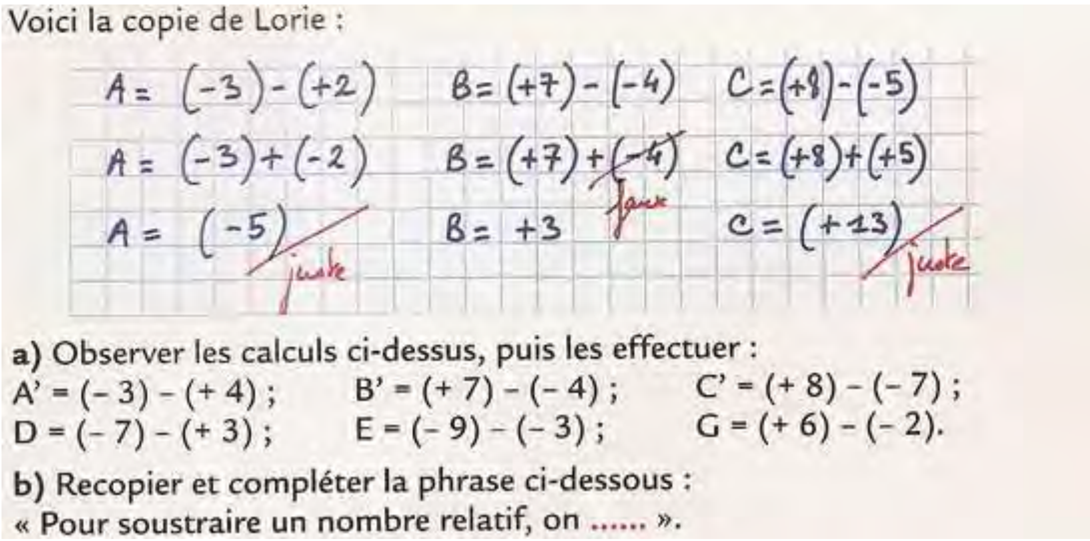
Cette activité a permis d'introduire des techniques de calcul mais également d'avoir une situation de référence pour les élèves. A la fin de cette activité, les élèves ont ainsi rencontré, pour la première fois, deux significations du signe « + », le signe de l'opération associée au terme « bilan » et le signe du nombre associé au terme « gagne ».

2. Soustraction à l'aide de la correction d'une copie d'élève

J'ai introduit la soustraction avec une activité s'appuyant sur une copie d'élève fictif. Comme la copie est corrigée, les élèves doivent, à partir de leurs observations, trouver la règle générale, « Soustraire un nombre, reviens à ajouter son opposé ».

Pour réaliser les soustractions, les élèves ont majoritairement basé leurs observations sur les symboles « + » et « − ». Plusieurs stratégies ont été utilisées, soit ils ont construit une règle des signes avec les différents cas, soit ils ont modifié tous les signes pour obtenir une addition et réinvestir leurs connaissances, soit ils ont transformé les nombres négatifs en leurs opposés et ont conservé les soustractions, puis ont utilisé les propriétés de l'addition. On observe donc une confusion entre les signes opératoires et les signes des nombres. Les élèves ont souvent évité l'utilisation de la soustraction en revenant à l'addition. Dans ces conditions, il a été difficile de mettre en place la propriété attendue. Il a donc fallu utiliser des codes de couleurs différents pour les signes des opérations et les signes des nombres relatifs.

On peut noter que le temps d'appropriation du contexte a été relativement important et les élèves ont eu des doutes quant à la transformation systématique de la soustraction en addition à cause du manque de justification dans cette activité. Les exercices d'applications réalisés à la suite de cette activité ont généré un certain nombre d'erreurs et d'incompréhensions dues au manque de signification donnée aux signes « + » et « − » par les élèves, notamment pour mener des calculs avec des additions et des soustractions.


Voici la copie de Lorie :

$A = (-3) - (+2)$ $B = (+7) - (-4)$ $C = (+8) - (-5)$

$A = (-3) + (-2)$ $B = (+7) + \cancel{(-4)}$ $C = (+8) + (+5)$

$A = (-5)$ juste $B = +3$ faux $C = (+13)$ juste

a) Observer les calculs ci-dessus, puis les effectuer :

A' = (− 3) − (+ 4) ; B' = (+ 7) − (− 4) ; C' = (+ 8) − (− 7) ;

D = (− 7) − (+ 3) ; E = (− 9) − (− 3) ; G = (+ 6) − (− 2).

b) Recopier et compléter la phrase ci-dessous :

« Pour soustraire un nombre relatif, on ...... ».

Figure 3 *– Introduction de la soustraction à l'aide d'une copie d'élève*

3. Test utilisant différentes activités analysées

Pour terminer, j'ai construit un test (voir Annexe 2) inspiré des activités analysées dans les différents manuels. Il est composé de cinq exercices : un questionnaire à choix multiple et quatre exercices d'application. Mon objectif était, d'une part, d'observer la capacité de mes élèves à se détacher des représentations travaillées dans les chapitres et, d'autre part, de vérifier si la différence entre les signes des nombres et les signes des opérations était comprise.

Pour le questionnaire à choix multiple, j'ai choisi de présenter différents calculs pour réinvestir les propriétés d'addition et de soustraction travaillées dans ce chapitre. Chaque réponse proposée met en avant la différence entre les signes du nombre et les signes opératoires et la confusion entre les différentes propriétés. L'exercice suivant présente deux pyramides à compléter à l'aide d'additions et de soustractions. Le choix du remplissage des cases est fait pour inciter les élèves à utiliser des soustractions. Puis, je propose une activité dans laquelle les élèves doivent corriger les calculs proposés par un élève.

Dans les exercices 4 et 5, les élèves doivent utiliser les opérations dans différents problèmes de niveaux de difficultés différents. Les questions utilisent des représentations de droite graduée, sous forme de thermomètre, d'échelle ou encore de frise chronologique.

Grâce à ce test, j'ai pu repérer les différents types d'erreurs commis par les élèves. Pour pouvoir les interpréter, il a fallu les classifier, regarder si les mêmes erreurs se reproduisaient sur l'ensemble d'une copie ou seulement dans un même type de tâche, observer les erreurs produites à cause de la présentation de l'exercice. Certaines sont dues au manque d'assimilation de la technique de l'addition, les élèves pensent encore que pour additionner, il faut ajouter les parties numériques. Certains élèves font des erreurs pour trouver le signe d’une somme, ils ont mis en place une règle de calcul erronée, utilisée pour la multiplication. Dans les soustractions, les élèves ont du mal à faire la distinction entre les signes d’opération et de nombre, ils transforment alors tous les signes « $-$ » en signe « $+$ ». On remarque aussi des difficultés face aux écritures simplifiées.

L’exercice sur les pyramides a généré plus de difficultés, certains élèves ont été complètement déstabilisés par ce type de représentations qu’ils n’avaient pas rencontré auparavant. Il a ainsi fallu leur donner un exemple de pyramide avec uniquement des nombres entiers positifs pour qu’ils comprennent le fonctionnement de la règle. Différentes stratégies ont alors été employées, soit effectuer la soustraction, soit utiliser des soustractions à trous. Il y a toutefois deux limites à cette technique : d’une part, les élèves sont plus concentrés sur la valeur absolue du nombre que sur son signe, ce qui peut amener dans le cas présent des erreurs de signes ; d’autre part, il faut alors plus de temps pour trouver le résultat de l’opération quand les nombres sont un peu plus compliqués (comme dans la deuxième pyramide).

Les deux premiers problèmes ont posé peu de difficultés si on regarde uniquement les résultats. Mais en nous intéressant plus particulièrement aux procédures mises en jeu ici, nous nous sommes aperçus que l’interprétation des problèmes a été source d’erreurs. Pour le troisième problème, les parties numériques des nombres relatifs étant plus grandes, il leur a été donc plus difficile de les représenter. Par contre, dans l’exercice où une frise chronologique leur était proposée, les élèves ont fait moins d’erreurs (certainement parce que nous avions déjà travaillé sur ce support). Certains élèves ont utilisé des opérations à trous pour obtenir le résultat des problèmes.

V. CONCLUSION

L’étude que j’ai faite m’a montré qu’il y a un grand nombre de façons d’introduire les nombres relatifs et les opérations qui leur sont associées. Il apparaît tout à fait essentiel d’introduire les nombres relatifs en s’appuyant sur des exemples plus ou moins concrets, tels que la température ou l’altitude. Mais ensuite, au cours de leur apprentissage, il sera nécessaire de sortir de ces contextes, par exemple, pour donner des solutions à des soustractions auparavant impossibles et ensuite pour faciliter l’apprentissage de la multiplication et la division en classe de quatrième.

L’introduction de l’addition se fait dans la majorité des manuels à l’aide de bilans. Les signes des nombres sont alors associés à des augmentations ou des diminutions et le signe opératoire représente l’accumulation de plusieurs évolutions. Les élèves ont facilement conceptualisé cette situation, cela leur a permis d’acquérir rapidement des automatismes pour réaliser des additions avec plusieurs nombres relatifs. En revanche, il est plus difficile d’introduire la soustraction de deux nombres relatifs de cette façon.

Dans les manuels, j’ai pu constater qu’il n’y avait aucune uniformité au niveau des types d’activités introduisant la soustraction. Celle-ci a pris plus de temps à être assimilée dans nos classes. Certains élèves n’arrivent pas à conceptualiser cette opération à cause justement de la difficulté de contextualisation par rapport à l’addition. La méthode énoncée pour réaliser une soustraction a entraîné des confusions au niveau des signes « $+$ » et « $-$ » qui se sont répercutées parfois sur les calculs d’addition auparavant acquis. Mais donner un sens à la soustraction semble difficile : toutes les situations ne peuvent pas être rassemblées sous un seul exemple ou contexte. Si on utilise des variations de température pour l’illustrer, on peut modéliser cette situation que par des soustractions par un nombre positif. Si on s'appuie sur les distances entre deux points d'une droite graduée, tous les résultats seront positifs.

Après un certain nombre d'exercices de réinvestissement, j'ai remarqué que certains élèves n'avaient toujours pas réussi à faire la différence entre les signes des nombres et les signes opératoires. Pour y remédier, j'ai choisi de différencier les signes des nombres et des opérations avec deux couleurs différentes pour que les élèves fassent la distinction entre les symboles. Après avoir classifié les signes en deux groupes de couleurs, j'ai travaillé avec les signes opératoires, en listant les additions et les soustractions. Le fait de coder la ligne de calcul avec des couleurs leur a permis de mieux visualiser les opérations à réaliser. Nous avons alors pu utiliser les propriétés des opérations, dans un premier temps celles de la soustraction, puis celles de l'addition. Grâce à ce mode de fonctionnement, les élèves en difficulté ont pu comprendre plus facilement les techniques de calculs à utiliser pour réaliser des suites d'addition et de soustraction de nombres relatifs. Il paraît donc nécessaire de présenter les signes « + » et « − » avec différents codages dès leur introduction dans les opérations, quitte à garder cette présentation pendant un certain temps. Le choix fait dans mes chapitres a été de différencier le signe opératoire « − » et le signe du nombre « - » et d'utiliser des couleurs pour visualiser les opérations et les nombres dans une ligne de calcul.

En conclusion, je peux dire qu'il est important de donner un aspect théorique aux nombres relatifs, en s'aidant d'une soustraction impossible par exemple. L'addition est assez simple à conceptualiser pour les élèves et ils peuvent ainsi maîtriser les règles de calculs rapidement. Avant d'introduire la soustraction, il est important de s'assurer que les élèves ont compris et savent réinvestir l'addition des nombres relatifs et la compréhension des différents sens des signes. Il semble nécessaire de bien séparer dans le temps l'apprentissage de ces deux opérations. Il est important que chaque élève ait compris la différence entre les signes des nombres et les signes des opérations et acquis les règles de calculs de l'addition et de la soustraction pour pouvoir aborder sereinement les simplifications d'écriture ainsi que la multiplication et la division de nombres relatifs.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Benard D. (2002) Nombre et calculs au collège : instituer une cohérence. *Repères IREM* 47, 5-16.

Gasser J.-L. (2003) Evolution de la notion de nombre au collège. *Repères IREM* 51, 59-103.

Gaud D., Guichard J.-P. (1991) Les nombres relatifs : histoire et enseignement. *Repères IREM* 2, 93-123.

Glière A. J. (2007) *Histoire et épistémologie des nombres négatifs de d'Alembert à nos jours Le passage des quantités aux nombres.* Thèse de l'EHESS, Paris.

Lamande P. (2004) La conception des nombres en France autour de 1800 : l'œuvre didactique de Sylvestre François Lacroix. *Revue d'histoire des mathématiques* 10(1), 45-106.

Groupe didactique de l'IREM de Bordeaux (2008). Enseigner les nombres relatifs au collège. *Repères IREM* 73, 59-72.

Manuels scolaires

Math 5ème (2006). Collection Nouveau Décimale. Paris : Belin.

Maths 5ème (2006). Paris : Bréal.

Maths 5ème (2006). Collection Babylone. Paris : Bordas.

Math 5ème (1997). Collection Cinq sur Cinq. Paris : Hachette.

Maths 5ème (2006). Collection Diabolo : Paris : Hachette.

Mathématiques 5ème (2006). Collection Phare. Paris : Hachette.

Mathématiques 5ème (2006). Collection Triangle. Paris : Hatier.

Maths 5ème (2001). Paris : Magnard.

ANNEXE 1 : ACTIVITÉ D'INTRODUCTION DE L'ADDITION PAR GAINS/PERTES

Activité d'introduction n°1 :

Julien joue à un jeu vidéo, dont le héros ramasse (ou perd !) des pièces d'or. Il a déjà beaucoup de pièces. Il fait deux parties par jour. Chaque soir, il remplit un tableau récapitulant ses gains et ses pertes :

1) Complète la colonne « Bilan de la journée » du tableau ci-dessous :

	1ère partie	***2ème partie***	**Bilan de la journée :**
1er jour	perd 8	perd 7	perd 15
2e jour	*gagne 10*	*gagne 5*	
3e jour	*gagne 10*	perd 3	
4e jour	perd 11	*gagne 7*	
5e jour	*gagne 10*	perd 15	
6e jour	*gagne 7*	perd 7	
7e jour	*gagne 0*	perd 7	

2) Pour aller plus vite, Julien cherche une écriture mathématique qui permet de remplacer les résultats du 1er jour : « perd 8 » et « perd 7 ».

a) Quelle notation peut-il utiliser ?

b) En utilisant la notation de la question a), quelle opération permet de retrouver le bilan du 1er jour et quel est le résultat ?

3) Complète le tableau ci-dessous avec la notation utilisée dans la question 2 :

	Bilan de la journée avec la nouvelle écriture :	***Résultat :***
1er jour		
2e jour		
3e jour		
4e jour		
5e jour		
6e jour		
7e jour		

4) Effectuer les calculs suivants :

(– 7) + (+ 3) = ……………; (– 11) + (– 3) = ……………; (+ 15) + (– 2) = ……………;

(+ 14) + (+ 3) = …………; (– 11) + (– 12) = ……………; (– 9) + (+ 12) =…………….

ANNEXE 2 : TEST FINAL INSPIRÉ DES ACTIVITÉS DE DIFFÉRENTS MANUELS SCOLAIRES

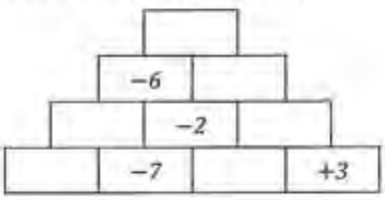
EXERCICE 1

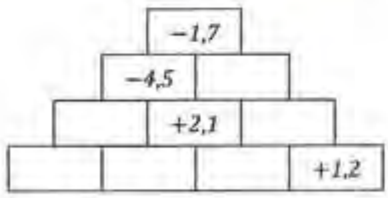
Pour chacune des questions suivantes, entourer la (ou les) bonne(s) réponse(s)

Enoncé	Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$(-5{,}1) + (-4{,}3)$ est égal à :	$(-0{,}8)$	$(-9{,}4)$	$(+0{,}8)$	$(+9{,}4)$
$(-56) - (+33)$ est égal à :	$(+89)$	(-20)	$(+20)$	(-89)
$(+56) + (-64)$ est égal à :	(-8)	(-120)	$(+120)$	$(+8)$
$(-1{,}7) - (-2{,}4)$ est égal à :	$(-0{,}7)$	$(-4{,}1)$	$(-5{,}1)$	$(+0{,}7)$
$(-8) - (-7)$ est égal à :	$-8+7$	$-8-7$	-1	-15
$(+20) - (+4{,}8)$ est égal à :	$(+24{,}8)$	$-4{,}8+20$	$(-24{,}8)$	$15{,}2$
$-14+9-12$ est égal à :	-11	-17	-35	-15
$37-11{,}7-(-3{,}2)$ est égal à :	$(+37)+(-11{,}7)+(+3{,}2)$	$22{,}1$	$28{,}5$	$-28{,}5$
L'égalité $7-x=9$ est vraie pour :	$x=2$	$x=-2$	$x=16$	$x=-16$
L'égalité $-y-8=12$ est vraie pour :	$y=20$	$y=-4$	$y=4$	$y=-20$

EXERCICE 2

Complète les pyramides suivantes sachant que le nombre contenu dans une case est la somme des deux nombres situés en-dessous de lui.





EXERCICE 3

Fred ne maîtrise pas encore les soustractions et certains calculs sont faux. Indique les erreurs commises et corrige-les.

$A=-6-(-15)$ $A=(+6)+(+15)$ $A=(+21)$	$B=6-11$ $B=(+6)+(-11)$ $B=(-17)$
$C=4{,}8-6{,}3$ $C=4{,}8+(-6{,}3)$ $C=-1{,}5$	$D=-5-(-9{,}3)$ $D=-5+(-9{,}3)$ $D=-14{,}3$

EXERCICE 4

Traduis chaque texte suivant par une opération avec des nombres relatifs puis réponds à la question.

a) Hier, à 22 heures, il faisait $+3$°C. La température a baissé de 8°C cette nuit. Quell e température fait-il ce matin ?

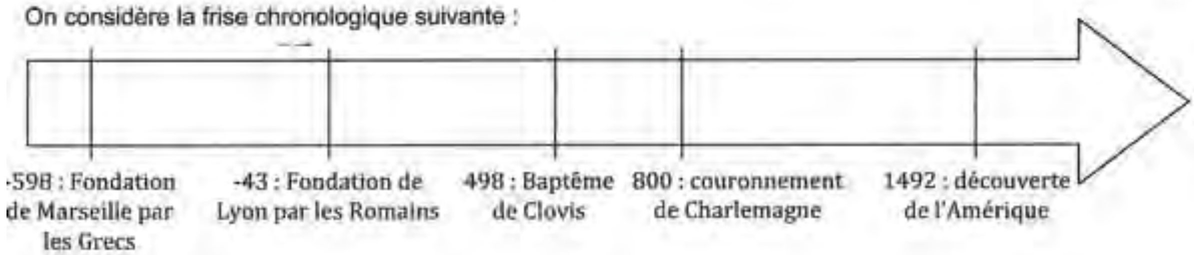
b) Le frère de Dimitri fait un stage de plongée, il descend à -14 mètres. Le lendemain, avec l'accord de son moniteur, il descend de 5 mètres supplémentaires. A quelle profondeur se trouve-t-il alors ?

c) Pythagore est né en Grèce en – 570. On lui attribue un théorème célèbre étudié en quatrième. Quel âge aurait Pythagore aujourd'hui ?

d) Un ascenseur se trouve au 2[ème] étage d'un immeuble de 8 étages. Il monte de 4 étages, puis descend de 3 étages et remonte de 5 étages. A quel étage se trouve-t-il alors ?

EXERCICE 5

On considère la frise chronologique suivante :



Pour chacune des questions suivantes, écrire l'opération nécessaire pour répondre et donner le résultat

a) Combien d'années se sont écoulées entre la fondation de Marseille et celle de Lyon ?

b) Combien d'années se sont écoulées entre la fondation de Lyon et la découverte de l'Amérique ?

c) Combien d'années se sont écoulées entre le baptême de Clovis et le couronnement de Charlemagne ?

L'UTILISATION DE LA CALCULATRICE DANS L'APPRENTISSAGE DES MATHÉMATIQUES AU SECONDAIRE

Jean-François GOUPIL*

Résumé – L'omniprésence des nouvelles technologies dans la vie de nos élèves et la faible exploitation de ces technologies dans les classes de mathématiques au Québec, nous mènent à nous poser des questions sur la place que doivent prendre ces technologies dans notre enseignement. Le prochain travail se concentrera surtout sur l'utilisation de la calculatrice en classe. Doit-on la bannir ? Certainement pas ! L'encourager alors ? Dans quel cas ? Un débat qui semble s'actualiser plus les années avancent…

Mots-clefs : calculatrice, enseignement secondaire, expérimentation

Abstract – Nowadays with the easy access to a full load of technologies for our students, and with the lack of politics concerning the use of these technologies in class we have to ask ourselves questions about the place that these technologies should take in our teaching. This work will concentrate on the use of calculators for high school math learning. Should we ban the calculator? Certainly not. Should we encourage the use of it? In which case? This is a debate that seems more actual as the time pass...

Keywords: calculator, secondary education, experiment

I. INTRODUCTION

L'année dernière, alors que j'enseignais en secondaire 1, L'équipe d'enseignants de mon école a décidé que dans certaines évaluations l'utilisation de la calculatrice serait interdite. Les élèves ont évidemment rappliqués et ont demandé des explications. Alors que je m'efforçais à convaincre les élèves des vertus du calcul mental plusieurs réponses des élèves m'ont fouettées. Je leur disais tout d'abord que nous n'avons pas tous accès à une calculatrice en tout temps et que d'avoir une bonne capacité de calcul mental était nécessaire. Un élève me répond alors : « Monsieur, je ne me sépare jamais de mon Ipod et j'ai une application calculatrice ! » Je lui réponds alors qu'il ne suffit pas d'avoir la calculatrice, mais de bien savoir l'utiliser. Sans malice, un élève me répond du tac au tac : « Mais monsieur, alors pourquoi vous ne nous montrer pas tout simplement à bien utiliser la calculatrice au lieu de l'interdire… ». Il avait marqué un point. Bien entendu, comprendre la calculatrice implique de bien savoir calculer, mais il venait tout de même de me montrer que les arguments que je m'étais fait servir autrefois ne tiennent plus tout à fait la route. Les technologies ayant grandement évolué (et oui j'ai 28 ans et je suis déjà dépassé…) il fallait revoir notre façon de gérer l'utilisation de la calculatrice en classe de mathématiques. Comment l'intégrer efficacement en classe pour quelle soit un soutien à l'apprentissage des élèves ?

Pour répondre à cette question, et contribuer à la résolution de ce problème professionnel, celui d'une intégration efficace de la calculatrice dans la pratique d'enseignement des mathématiques chez les enseignants de mon école, j'ai décidé d'entamer une recherche-action. Après une analyse du problème tel qu'il se pose dans son contexte, la revue de ce qu'en pensent les principaux acteurs concernés, de ce qu'on dit la recherche, j'explorerai quelques pistes de solutions possibles et en choisirai une pour expérimentation. Dans ce sens, j'élaborerai une intervention en classe, basée sur des situations d'apprentissage intégrant la calculatrice et visant à soutenir l'apprentissage des élèves. Je mettrai à l'épreuve ces situations en classe et collecterai des données pour vérifier l'effet qu'aura eu cette intervention sur les apprentissages de mes élèves. J'espère que ce projet de me convaincre et de convaincre mes collègues enseignants qu'il est possible d'intégrer efficacement la calculatrice dans nos

* Ecole secondaire DeRochebelle – Québec, Canada – jean-francois.goupil@csdecou.qc.ca

© Goupil J.-F. (2012) L'utilisation de la calculatrice dans l'apprentissage des mathématiques au secondaire. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (SPE1, pp. 1583–1603). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

pratiques d'enseignement au profit de l'apprentissage de nos élèves et contribuer ainsi à la résolution du problème professionnel soulevé plus tôt.

II. ELEMENTS DE PROBLEMATIQUE

1. Présentation du contexte dans lequel se pose le problème

Je travaille depuis 5 ans à la même école soit l'école secondaire DeRochebelle. Il s'agit d'une école à deux volets. Il y a d'abord le volet international qui comporte environ la moitié des élèves et ensuite il y a la formation générale qui comporte l'autre moitié des élèves. Par contre, la problématique sur la calculatrice concerne l'ensemble des enseignants de l'école, peu importe le volet concerné.

Depuis l'avènement de l'anecdote rapporté en introduction, la réflexion sur le statut de la calculatrice en classe de mathématique a fait beaucoup de chemin à l'école où je travaille. En effet, nous avons fait une réunion de tous les enseignants de mathématiques de la première secondaire jusqu'à la cinquième secondaire et nous avons également rencontré la direction afin que l'on se dote d'une certaine ligne de conduite face à l'utilisation de la calculatrice tout au long du cheminement de l'élève au secondaire. La principale problématique qui préoccupe mes collègues enseignant de notre école vient du fait que les élèves plus âgés perdent leur capacité de calcul (que ce soit mental ou même encore sur papier) et dépendent beaucoup trop de la calculatrice. S'ajoute à cela le fait que les élèves ne comprennent pas le sens profond des opérations qu'ils effectuent et ne peuvent donc pas juger de la pertinence des résultats donnés par la calculatrice. Cela a pour effet que nous devons prendre du précieux temps en secondaire 4 et 5 (là où le programme est très chargé) pour revenir sur les techniques de calculs de base perdues au fil du temps. Je ne crois pas que l'usage de la calculatrice en classe soit la cause principale du problème, mais elle le met en évidence pour plusieurs élèves. Aujourd'hui le problème reste entier à mon école, puisque nous avons fait plusieurs constats, mais peu d'actions ont concrètement été prises.

Voici quelques constats faits par les membres de mon équipe.

- Il y a peu de communication entre les niveaux d'enseignement en ce qui concerne les méthodes d'enseignement (entre autre l'utilisation de la calculatrice) ;
- nous n'avons pas de politique d'utilisation de la calculatrice, cela cause des problèmes avec les parents d'élèves en difficultés à qui nous avons interdit l'utilisation de la calculatrice lors de l'évaluation ; et finalement,
- la presque totalité des enseignants de l'école n'avait fait aucune activité quant à l'utilisation de la calculatrice. Bref, les élèves avaient un outil entre les mains sans vraiment savoir comment l'utiliser.

Nous voyons donc ici un problème d'intégration efficace de la calculatrice dans nos classes. Il y a bel et bien un vouloir de la part des différents intervenants. La preuve, la calculatrice fait partie du matériel scolaire obligatoire en début d'année. De plus, la grande majorité des enseignants vous dira que pour certains bouts de matière, c'est un outil très utile voire même nécessaire. D'un autre côté, peu de ces intervenants savent comment bien intégrer cet outil dans leur enseignement pour soutenir l'apprentissage des mathématiques et la grande majorité n'a pas modifié son enseignement afin de l'intégrer. La question qui se pose maintenant à l'enseignant de mathématique, n'est pas de savoir s'il faut bannir la calculatrice en classe ou minimiser son utilisation, mais comment l'intégrer efficacement dans l'enseignement pour soutenir l'apprentissage des élèves en mathématiques.

2. Les répercutions possibles

L'utilisation de la calculatrice uniquement comme outil de calcul a des répercutions négatives sur l'apprentissage des élèves. Il est clair que le développement cognitif est beaucoup moins important si nous demandons à un jeune de calculer à la calculatrice plutôt que d'utiliser une procédure ou encore mieux de lui demander de trouver une technique pour arriver à la solution. Prenons par exemple un élève à qui nous demanderions de faire une proportion. Si nous lui disons seulement de multiplier les extrêmes et les moyens, il ne comprendra pas le sens profond de la proportion. Par contre, si nous lui demandons de trouver une procédure personnelle pour y arriver le développement de son raisonnement proportionnel sera grandement favorisé. Seulement par la suite pourrons-nous lui montrer à le faire avec la calculatrice. Il faudra par contre s'assurer que la compréhension est bien profonde, car malheureusement, trop souvent, nous passons tout de suite à la technique à la calculatrice et l'humain étant ce qu'il est, l'élève perd l'idée directrice et ne se souvient que d'une bête méthode de calcul à la calculatrice. En bref, il me paraît que le problème décrié par mes collègues enseignants provient de la nature des tâches mathématiques intégrant la calculatrice demandées aux élèves ; si le but est de développer l'habileté à calculer, permettre l'utilisation de la calculatrice pour s'exercer à réaliser un algorithme de calcul est une aberration pédagogique. En revanche, l'usage de la calculatrice est tout à fait pertinent si elle est intégrée dans des tâches mathématiques permettant aux élèves des acquisitions conceptuelles. Quelles sont alors ces tâches ? Comment les gérer en classe ?

Il ne faut pas négliger non plus, que la plupart des élèves ayant de la difficulté avec les techniques de calculs sans la calculatrice prennent beaucoup plus de temps à réaliser un problème. Cela affecte grandement leur efficacité lors des évaluations. Dans un cas semblable, interdire la calculatrice devient un obstacle supplémentaire pour les élèves qui ont déjà de la difficulté. Évidemment, certains s'objecteront en protestant que c'est justement une preuve que les élèves sont dépendants de la calculatrice. En tant qu'enseignant, il est donc de notre devoir de modifier les évaluations de façon à ce que la tâche ne soit pas qu'une simple série de calculs, mais un problème de résolution qui demande une bonne réflexion de la part de l'élève. La calculatrice devient donc une aide pour l'élève en difficulté sans être au centre du problème.

Avec la venue des Ipods, Blackberry, téléphones intelligents et j'en passe, les jeunes sont encore plus dépendant de la technologie d'année en année. Je crois que si nous ne faisons rien, le problème ne fera qu'empirer. Il faut se doter de méthodes pour montrer aux jeunes à utiliser cette technologie à leur avantage, sans toutefois les hypothéquer pour le futur.

3. Ce que pensent les différents intervenants de ce problème

Dans mon milieu, les opinions sont très partagées sur le sujet. Certains parents nous encouragent à bannir la calculatrice, car eux dans leur temps ils n'avaient pas accès à cette technologie et ont bien réussis. D'autres nous traitent pratiquement d'imbéciles de ne pas laisser la chance aux élèves d'avoir accès à cet outil de calcul. En ce qui concerne la direction, elle se fie au bon jugement professionnel des enseignants qui eux sont presque unanimes pour dire qu'il faudrait utiliser beaucoup moins la calculatrice. Ce que je tente de faire par cette recherche-action est de trouver des pistes de solutions afin de mieux utiliser la calculatrice puisque comme mentionné plus haut, avec l'omniprésence des technologies, il sera très difficile de voir son utilisation diminuée.

Après la lecture des nombreux écrits que j'ai consultés sur le sujet, je me suis rendu compte que, compte tenu de la grande disponibilité de la calculatrice en dehors de la classe, il est doublement judicieux de former les élèves en classe à l'intégrer dans leurs activités mathématiques En effet, si le jeune n'apprend pas en classe à bien utiliser cet outil, il l'utilisera tout de même en dehors de la classe, mais sans formation. Vient alors tous les problèmes de mauvaises utilisations de la calculatrice.

Puisque je peux difficilement intervenir sur la fréquence d'utilisation (du moins en dehors de la classe) je devrai trouver d'autres aspects sur lesquels je pourrai intervenir. Je crois que cela passe d'abord par une prise de conscience des répercussions à long terme autant pour les élèves que pour les autres enseignants. Ensuite, il faut sensibiliser mes collègues aux bons et mauvais côtés de l'utilisation de la calculatrice pour enfin créer des activités qui permettront une intégration pédagogique de la calculatrice. Je crois que si je réussis à leur montrer que la calculatrice peut être utilisée, dépendamment du contexte, à des fins pédagogiques (à condition de modifier nos pratiques enseignantes), je pourrai les convaincre de ne pas bannir la calculatrice et de ce fait, nous pourrons bâtir encore plus d'activités et nous doter de nouvelles méthodes d'enseignement avec la calculatrice.

Bref, Je chercherai à répondre à la question : comment bien exploiter la calculatrice en classe de mathématiques, pour améliorer les apprentissages des élèves ?

4. Analyse de quelques écrits de la documentation scientifique et professionnelle

Petit historique

La situation de la calculatrice a beaucoup évolué les 50 dernières années. Dans les années 60, l'accessibilité à la calculatrice était restreinte dû à son coût. Rapidement, dans les années 70, le coût a chuté et de plus en plus d'élèves ont eu accès à cette technologie, si bien que dans les années 80, presque tous les élèves avaient une calculatrice à porté de main. Lors de mon passage au secondaire dans les années 90, la calculatrice graphique était même exigée ! Ce n'est plus le cas aujourd'hui… La place ayant été principalement prise par l'ordinateur qui est devenu le centre du débat dans plusieurs écoles. Pourtant, jusqu'à preuve du contraire, l'outil le plus disponible et le plus pertinent pour l'apprentissage des mathématiques (du moins au secondaire) reste la calculatrice. De ce fait, le débat est d'autant plus actuel que nécessaire.

Causes et solutions

Bruillard (1994) résume bien la situation dans son texte « Étude sur quelques obstacles d'usage de la calculette à l'école élémentaire » :

> Malgré leur usage quotidien hors de l'école, les calculettes s'intègrent encore difficilement dans les activités scolaires…L'un des obstacles majeurs semble être de nature sociale et concerne l'idée que se font les instituteurs du rapport entre ces outils et les techniques de calcul auxquelles ils se substituent partiellement. Une analyse de leurs opinions par entretiens et questionnaires montre leur méfiance vis-à-vis les calculettes et leur volonté d'en contrôler et d'en limiter l'usage. La prise en compte du statut social de l'usage des calculettes conduit à les intégrer comme auxiliaires de résolution et non en tant qu'outils pédagogiques. (Op. cité, p. 67)

On voit déjà ici qu'une des causes du problème n'est pas en soi l'utilisation, mais son intégration et son utilisation. De plus, cela peut s'expliquer en partie par l'opinion qu'ont les différents intervenants dans l'apprentissage des jeunes (enseignants, parents, direction d'école) de la calculatrice.

J'ai donc recensé à travers les différents écrits que j'ai consultées les principales craintes et aspects négatifs soulevés par ces intervenants à propos de la calculatrice : (Schaub 2009, Julien 2003)

- Avec la calculatrice, le niveau des élèves en mathématique baissent

- Elle devient (la calculatrice) un moyen de facilité face aux calculs et engendre une certaine dépendance.
- Elle (la calculatrice) empêche le développement du calcul mental et de la mémorisation
- Elle (la calculatrice) empêche l'élève d'apprendre les techniques opératoires qui sont à la base de son calcul
- Elle enlève l'intérêt de calculer par écrit.
- La calculatrice empêche une réflexion et une recherche venant de l'élève.
- Certains enseignants et parents donnent également comme argument contre la calculatrice qu'ils ont fait leur scolarité entière sans l'utiliser et qu'ils ont très bien réussis.

S'ajoutent à cela plusieurs problèmes soulevés quant à l'utilisation de la calculatrice (au niveau technique et non didactique). Notons entre autre les problèmes d'affichage pour les grands nombres, les problèmes liés aux priorités d'opérations et plusieurs touches qui font perdre le sens propre à l'opération (par exemple la touche = qui ne démontre pas le double sens d'une égalité ou encore la touche % qui permet de faire une addition d'un pourcentage,…). Finalement, Trouche (2004, cité dans Squalli 2007) soulève le fait que la calculatrice augmente le pouvoir d'actions des élèves ce qui peut amener une difficulté pour l'enseignant à anticiper ce que les élèves peuvent faire. La gestion du cours peut donc être plus compliquée.

Évidemment, ces craintes et aspects négatifs nuisent à l'intégration efficace de la calculatrice en classe. Une partie de la solution est de démontrer aux enseignants et aux parents que la majorité de ces craintes n'ont pas lieu si la calculatrice est utilisée dans le bon cadre. Vous verrez plus loin dans cette section que j'ai recensé plusieurs activités qui, loin de nuire à l'analyse et à l'apprentissage du calcul mental et de techniques opératoires, vont au contraire renforcir cette apprentissage. Sans compter que la plupart sont données sous forme de jeu, ce qui va aider grandement à la motivation des jeunes.

Une autre cause soulevée au problème de l'usage de la calculatrice en classe est le manque de formation des élèves et des enseignants (le manque de formation des élèves étant directement relié au manque de formation des enseignants). Voici un résultat très intéressant de la recherche de Bruillard (1994) qui montre un peu la position des enseignants :

> Les instituteurs ayant répondu semblent plutôt d'accord pour l'usage des calculettes à l'école élémentaire, bien qu'ils ne ressentent pas toujours la nécessité d'en faire assurer la maîtrise par les élèves, celle-ci semblant pouvoir s'acquérir sans grande difficulté. Ils pensent majoritairement qu'elle ne doit pas interférer avec l'apprentissage des techniques opératoires…C'est une aide précieuse à la résolution de problèmes, mais il semble important d'en limiter l'usage pour la vérification de résultats (fonction redondante) Enfin, pour la grande majorité des instituteurs, l'apport des calculettes ne modifie pas les pratiques d'enseignement. (Ibid., pp. 71-72)

Dans un contexte pareil, il n'est pas étonnant qu'il y ait un manque de formation, les intervenants n'en voyant même pas la nécessité ! Une partie de la solution devra donc passer par la prise de conscience des enseignants sur l'usage pédagogique de la calculatrice plutôt que seulement un outil de calcul. De plus, comme le souligne Pochon (1995) et Schaub (2009), le débat est maintenant porté sur autre chose avec l'arrivée de nouvelles technologies telles que les ordinateurs et l'Internet. Bref, les formations offertes sont maintenant sur ces sujets plutôt que sur l'utilisation de la calculatrice. Personnellement, je crois que les enseignants croient, à tord, que l'intégration de la calculatrice dans l'apprentissage des mathématiques est déjà bien faite. Les résultats de Bruillard abondant dans le même sens. Cela s'explique probablement par le fait que la calculatrice n'est pas « nouvelle ». Paradoxalement, ces mêmes enseignants clament haut et fort les problèmes d'intégration et optent pour limiter l'accès à cet instrument. Je crois donc que la formation de l'enseignant est une partie essentielle à la résolution du problème d'intégration de la calculatrice. Encore faut-il les convaincre de la nécessité…

La difficulté du suivi à la maison a aussi été soulevée comme cause du problème (Julien 2003). D'une part parce que même si nous voulons limiter l'usage de la calculatrice il n'est possible de le faire qu'en classe. Il en revient donc à la décision de l'élève de suivre nos bons conseils…ou non. D'autre part, on parle de parents qui ne sont pas présents ou encore qui sont complètement dépassés par le niveau de mathématique de leurs enfants. Ces parents préfèrent donc laisser la calculatrice « aider » leurs enfants à faire leurs devoirs. On voit encore ici que la calculatrice est vue comme auxiliaire à la résolution et non pas comme outil pédagogique. De plus, selon moi, une vision de ce genre de la part des parents renforce l'idée de dépendance que les élèves ont envers la calculatrice. Les parents étant un allié important dans l'apprentissage de nos élèves, devront, selon moi, faire partie de la solution… Reste à voir comment nous pourrons les intégrer à la solution.

Pour bien intégrer la calculatrice dans l'apprentissage des mathématiques, il faudra également miser sur les forces de la calculatrice. Voici les différents aspects positifs que j'ai recensés dans mes recherches. Il faut noter ici que je ne prends en compte que les principaux et que plusieurs écrits donnaient les mêmes aspects positifs, mais expliqués selon différentes théories et sous différents angles. Je ne veux pas faire ici toute la définition de ces écrits, mais juste prendre l'essentiel de la théorie afin de me donner des points de repères sur lesquels miser pour trouver des pistes de solution.

- Possibilité d'autocorrection (Assude et Loisy 2008)
- Facilite la visualisation (donc la compréhension) (Squalli 2007)
- Augmente l'autonomie et par le fait même la confiance en soi (pas toujours besoin de l'enseignant pour vérifier les calculs) (Schaub 2009)
- La rapidité des calculs et aussi permet de faire plus d'essais dans le cas de résolution de problème (Schaub 2009)
- Permet de travailler avec de grands nombres et de faire de longues opérations et des problèmes difficiles, afin que l'opération en elle-même ne soit pas un obstacle

J'ajoute à cela que la calculatrice peut s'avérer être un outil didactique formidable comme nous pourrons le voir un peu plus loin dans les activités permettant de mettre à profit la calculatrice. Cet aspect positif n'ayant été mentionné que dans peu de documents et n'étant pas très reconnu par les enseignants. Pourtant, une partie de la solution se trouve là, car comme le mentionnent Loisy et Assude (2008)

> Pour que les TICE s'intègrent, il faut convaincre l'enseignant de leur utilité « Si on arrive à lui prouver que, à travers les TICE, on peut faire des choses qu'on ne pouvait pas faire avant et qui amènent un réel gain d'apprentissage pour les élèves, on va gagner…les profs réticents ». (Op. cité, p. 5)

Avec tout ce débat sur la calculatrice qu'advient –il du calcul mental et du calcul papier ?

Comme le souligne Pochon (1995) dans son texte *La calculatrice entre les mains des élèves*, « quelques indices laissent penser que la corrélation est grande entre le niveau de réussite à des calculs réalisés avec la calculatrice et les résultats obtenus avec les algorithmes classiques. Ce sont les élèves qui ont une meilleure conception du nombre qui réussissent le mieux dans les deux cas » (p. 50). Il en va de même pour les élèves ayant de la facilité avec le calcul mental, puisque ceux-ci réussissent mieux à estimer les résultats que donnera la calculatrice. Bref, on voit ici que l'exercice du calcul mental a toujours sa place, même au secondaire. De plus, je constate que l'on perçoit souvent le calcul mental comme l'opposé du calcul à la calculatrice, mais on voit ici que c'est plutôt un complémentaire. Donc l'exercice du calcul mental peut être une solution à l'intégration de la calculatrice en classe.

A l'inverse, mes recherches m'ont permis de voir que la calculatrice pouvait aider à l'apprentissage du calcul mental et des algorithmes classiques. En effet, la calculatrice peut être un outil didactique très intéressant si elle est bien utilisée. Le problème, selon moi, est que peu d'enseignant connaissent ces activités (de toutes façons, peu en reconnaissent la nécessité comme mentionné plus haut). Voici une recension de quelques activités que j'ai découvertes lors de mes recherches.

Ces activités sont de bons exemples pour convaincre mes collègues des valeurs didactiques de la calculatrice. De plus, elles donnent de bonnes idées de départ pour créer de nouvelles activités permettant de supporter l'apprentissage des mathématiques.

5. *Exemples de tâches mathématiques intégrant la calculatrice comme support à l'apprentissage*

Première activité : La calculatrice défectueuse

Cette activité a été pensée par Lemoyne (2005) (cité dans Squalli 2007) et a été utilisée dans le cadre d'une étude canadienne. Il s'agit d'effectuer une série de calculs à l'aide d'une calculatrice dont certaines touches (soigneusement choisies selon la visée pédagogique) sont défectueuses. Par exemple, nous pourrions demander à l'élève d'effectuer le calcul suivant : 0,9 x 0,5 en bloquant par exemple la touche '9', la touche ',' et la touche '5'. L'élève devra donc effectuer des opérations afin d'obtenir 0,9 et 0,5 (par exemple 9/10 et ½). Cette activité est géniale, puisque les possibilités de calculs à effectuer et de touches bloquées sont infinies. L'élève pourra donc pratiquer son sens du nombre, ses capacités de calcul, les priorités des opérations… On voit ici que la calculatrice sert bel et bien comme outil pédagogique et non pas seulement comme un outil de calcul.

Deuxième activité : 5 pas à 0

L'activité est la suivante, il s'agit de prendre n'importe quel entier entre 1 et 999 et d'essayer de ramener ce nombre à zéro en cinq « pas » ou moins, en utilisant seulement les nombres de 1 à 9 et les quatre opérations de base +, -, x , /. Le même nombre peut être utilisé plusieurs fois (Squalli). L'activité peut-être modifiée de différentes façons. Par exemple, on peut exiger que l'élève minimise le nombre de « pas », ou encore nous pouvons fixer le nombre de pas nécessaires pour ramener certains nombres à 0. Il est également possible de demander aux élèves de se créer des stratégies afin de minimiser le nombre de pas ou pour être certain qu'un certain nombre peut être ramené à 0. Dépendamment du degré des élèves, il pourrait même être intéressant d'extrapoler les résultats aux nombres supérieurs à 999 ou encore de diminuer le nombre de pas (par exemple en 4 pas) et de vérifier quels types de nombre sont impossibles à ramener à 0. Cette activité permet entre autre de développer le sens de la conjecture, le sens du nombre et des opérations et demande à l'élève d'effectuer plusieurs calculs mentaux. L'étude de Guzman, Kieran et Squalli (2003) (cité dans Squalli 2007) a également permis découvrir que l'activité « 5 pas à 0 » a permis aux élèves de développer plusieurs techniques. Les élèves pendant l'étude n'avaient pas encore vu la théorie sur les critères de divisibilités et ont créé de leur propre chef des critères à l'aide de cette activité.

Les nouveaux programmes de l'école primaire mathématique (république française) m'ont également fournis de bonnes idées d'activités. Plusieurs ressemblent aux deux activités mentionnées plus haut, mais j'en retiens tout de même quelques une. Les voici :

Numération : passer d'un nombre à l'autre

Il s'agit simplement de partir d'un nombre et de passer à un autre nombre avec le moins de touches possibles. Par exemple, on pourrait partir de 32 et vouloir passer à 4. Plusieurs chemins sont possibles (32 – 28, 32/8 etc), mais une seule solution minimise le nombre de touches soit 32/8.

Calcul : affichage sous contraintes

Un nombre doit être obtenu en respectant certaines contraintes pour provoquer son affichage. Par exemple :

- Faire afficher 16 en tapant aussi sur + et x
- Faire afficher 16 sans taper 1 ou 6 (ressemble beaucoup à la calculatrice défectueuse)

Concours de calcul

Cette activité permet de faire réaliser aux élèves que le plus rapide n'est pas toujours le calcul à la calculatrice. On laisse donc le choix à l'élève entre le calcul mental et la calculatrice et le premier élève qui termine les calculs gagne la compétition. Le but est donc d'être le plus rapide possible. Voici quelques exemples de calculs proposés :

- Calculer vite mentalement, à la main ou à la calculatrice 25+ 10 ou 136 + 10 ou 145 + 200…
- Calculer à la calculatrice le plus rapidement possible 13 + 13 + 13 + 13 + 13 (donc ici taper 13 x5 sera plus rapide)
- 0,24 ×10

On suggère également de faire faire des calculs dépassant la capacité d'affichage de la calculatrice. De cette manière, l'élève comprend que même la calculatrice a ses limites et peut donc se convaincre de la pertinence des méthodes de calculs traditionnels.

Finalement une dernière activité

Multiplication sans le « × »

Il s'agit, sans utiliser la touche « x » et en utilisant un minimum d'opérations (ou non selon le but pédagogique) sur la calculatrice de calculer certains produits. Par exemple 387 × 204 pourrait être calculé de la façon suivante : 38 700 + 38700 + 387 + 387 + 387 + 387 (donc revient à 100 × 387 + 100 × 387 + 4 × 387). Cette activité est géniale pour faire comprendre le sens de la multiplication.

Ces activités sont de bons exemples pour convaincre mes collègues des valeurs didactiques de la calculatrice. De plus, elles donnent de bonnes idées de départ pour créer de nouvelles activités permettant de supporter l'apprentissage des mathématiques. J'ai eu la chance de consulter encore plusieurs autres idées d'activités permettant d'utiliser la calculatrice comme support à un problème et non pas seulement comme un outil de calcul. J'ai choisi les plus pertinents pour ma recherche-action, mais j'ai compris que les possibilités sont infinies. Il suffit de mieux comprendre la calculatrice, d'avoir un peu d'imagination et surtout d'être convaincu de ses propriétés didactiques.

Bref, sans dire que par mes écrits j'ai réussi à tout comprendre le problème, j'ai au moins réussi à le cerner. J'en suis venu à la conclusion que la solution passe par une collaboration des parents, une conscientisation et une formation des élèves et des enseignants sur les propriétés pédagogiques de la calculatrice. Comme le dit le dicton : Un problème avoué est à moitié résolu !

III. PROBLEME ET OBJECTIF SPECIFIQUE DE LA RECHERCHE-ACTION

Le problème général de ma recherche tel qu’il se dégage est : comment intégrer efficacement la calculatrice dans l’enseignement des mathématiques pour qu’elle soit un support à l’enseignement et à l’apprentissage ? Un des principaux obstacles à cette intégration est la réticence des enseignants à intégrer la calculatrice de manière significative dans leur enseignement. Entre autre, les enseignants croient que la calculatrice peut être une entrave au développement du calcul mental chez les élèves. Ma recherche –action portera donc sur ce problème particulier et visera à atteindre l’objectif suivant : concevoir et mettre à l’épreuve une situation d’apprentissage intégrant la calculatrice et permettant de développer chez les élèves le sens des opérations ou de faire du calcul réfléchi. Le but étant par le fait même d’avoir un impact positif sur le calcul mental.

1. Méthodologie relative aux interventions auprès des élèves

Caractéristiques des groupes cibles et des élèves participants

Premièrement, bien qu’il soit mentionné plus haut dans mes recherches que la solution passe à la fois par les parents, les enseignants et les élèves, j’ai décidé de me concentré sur ce que j’ai le plus de contrôle soit les élèves. Afin de convaincre mes collègues, j’utiliserai par la suite les résultats de la recherche-action et leur ferai une présentation sous forme de conférence.

Donc les élèves choisis pour réaliser la recherche-action sont des élèves de secondaire 2 (13-14 ans) et des élèves de secondaire 4 (15-16 ans) issus d’un programme de formation générale. La décision de travailler sur 2 niveaux est pour tenter d’observer s’il y a des différences notoires dépendamment de l’âge et du niveau d’utilisation de la calculatrice (les élèves de secondaire 4 ayant utilisé la calculatrice les deux dernières années, alors que les élèves de secondaire 2 ce sont vu refuser la calculatrice pendant la majeure partie de l’année précédente). J’émets déjà l’hypothèse que l’approche face à la calculatrice ne sera pas la même pour les 2 groupes d’élèves. Cela pourrait se refléter dans les techniques qu’ils développeront. Je comprends que le niveau de mathématique n’est pas le même dans les deux groupes. J’en prendrai donc compte dans l’analyse des données. De plus, les calculs à effectuer seront du niveau de l’élève.

J’ai décidé d’exploiter les activités trouvées pendant ma recherche. Plus spécifiquement, j’utiliserai le test d’Amore (Julien 2003), l’activité 5 pas à 0 et l’activité calcul : affichage sous contraintes.

Le test d’Amore (voir annexe) est essentiellement pour faire un portrait des compétences en calcul traditionnel (mental et papier) des élèves. Le test a été passé en début d’année, avant que nous fassions la révision de l’année précédente. C’est un élément de motivation pour l’élève tout en étant très utile pour dresser un portrait de l’élève.

J’utiliserai ensuite l’activité de 5 pas à 0. Dans le cas des secondaires 2, ils n’auront pas vu encore les critères de divisibilité (dépendamment des élèves, car selon l’enseignant on peut en parler en secondaire 1). Dans le cas des secondaires 4, je n’aurai pas révisé ces critères (pour ne pas influencer les résultats) et n’auront pas été vu par les élèves depuis plus d’un an. J’utiliserai cette activité à plusieurs fins. Entre autre, c’est un excellent exercice de calcul mental et c’est une activité idéale pour faire développer le sens de la conjecture et pour leur permettre de développer des techniques. J’irai probablement plus loin avec mes élèves de secondaire 4 dans l’idée de conjecture. Il s’agit en même temps de montrer à l’élève qu’il est capable d’utiliser la calculatrice pour se développer des trucs pour résoudre des problèmes.

J'utiliserai ensuite l'activité calcul : affichage sous contraintes afin de voir comment les élèves réagiront face à une calculatrice « limitée » dans ses opérations (j'aurais tout aussi bien pu prendre la calculatrice défectueuse, les deux étant très similaires). Cette activité permettra de développer le sens des opérations et le sens du nombre chez les élèves tout en étant un très bon exercice de calcul mental. J'émet l'hypothèse que les élèves de secondaire 2 auront plus de facilité dans cet exercice étant moins habitués à utiliser la calculatrice. Ils se sentiront selon moi moins limités et auront plus d'imagination pour palier aux contraintes. Je crois que cette activité sera intéressante afin de discerner les différences entre les deux groupes.

Je prétends que cette séquence me permettra d'intégrer efficacement la calculatrice tout en développant chez les élèves le sens des opérations et en leur permettant de faire du calcul réfléchi. Cette situation d'apprentissage aura certainement un impact positif sur les capacités de calcul mental chez l'élève. Le but principal de ma recherche-action sera donc atteint.

La situation d'apprentissage visant l'intégration de la calculatrice est parfaitement cohérente avec la réforme scolaire au Québec. En effet, le but étant de viser la compétence de l'élève plutôt que la transmission unique de connaissances. Ici, en aucun cas nous dictons l'utilisation de la calculatrice à l'élève. Par contre, il apprend à l'utiliser et développe lui-même ses techniques d'utilisation. Nous lui permettons même de réfléchir sur l'utilité de la calculatrice selon le calcul ! En développant le sens du nombre et des opérations et sa compréhension profonde des mathématiques, cela me permet de croire au développement de ses compétences mathématiques.

Ma recherche n'a rien de novateur quant aux activités choisies, puisqu'elles ont toutes été créées par quelqu'un d'autre que moi. Par contre, la séquence utilisée est en soi innovatrice. De plus, dans le cas de l'activité, affichage sous contraintes, j'ai moi-même monté le document distribué à chaque élève et j'ai élaboré la séquence des tâches à effectuer. Finalement, l'angle d'approche de chaque activité sera différent. Par exemple, dans le cas de l'activité 5 pas à 0, j'ai l'intention de mettre beaucoup l'emphase sur l'apprentissage de la notion de conjecture en secondaire 4. Cette notion étant devenue un élément obligatoire avec la réforme scolaire

Je termine en mentionnant que l'ensemble des résultats seront analysés à partir des productions d'élèves et à partir des observations que j'aurai faites sur le terrain pendant les activités. Il y aura une feuille de consignation des résultats pour chaque activité.

2. Conclusions aux trois activités : ce que j'ai pu observer

Je désire noter avant de donner mes conclusions que chaque activité a été supervisée pas moi-même. Le test d'Amore a duré environ une vingtaine de minutes incluant les explications. Les deux autres activités ont chacune duré environ 2 heures et se sont étalées sur 2 cours.

Test d'Amore

Suite à l'activité sur le test d'Amore, voici ce que l'on peut remarquer. Premièrement, selon les études 27% des élèves obtenait une note parfaite (10/10) (Julien 2003). Par contre dans notre cas, ,23% (12/52) des élèves du secondaire 2 et 7% (9/121) de secondaire 4 ont obtenu une note parfaite. De plus, 44/52 (84,6%) en secondaire 2 avaient 8/10 ou plus alors que 57/121 (47%) avaient 8/10 ou plus en secondaire 4. Évidemment, l'échantillon de secondaire 2 est plus petit. Mais les résultats se rapprochent de la moyenne. Par contre, l'échantillon de secondaire 4 est beaucoup plus gros et est nettement en dessous de la moyenne. Fait encore plus surprenant, les élèves de secondaire 4 sont plus faibles que les élèves de secondaire 2 à ce test. La question 2, qui demandait à l'élève de faire une multiplication de deux nombres (92 x 34) a été la plus manquée autant en secondaire 2 qu'en secondaire 4. Étant donné ces résultats, j'ai modifié mon approche avec les secondaires 4 pour les 2 autres activités. Je n'ai pas modifié les calculs et je leur ai donné exactement les mêmes activités que les secondaires 2. De plus, je n'ai pas mis l'accent sur l'aspect de la conjecture pour l'activité de 5 pas à 0 comme je l'avais prévu. J'ai avant tout concentré mon énergie sur le développement du sens du nombre et du sens des opérations et j'ai pris en compte les difficultés de mes élèves.

De 5 pas à 0

L'activité de 5 pas à 0 m'a permis de réaliser toute la créativité de mes élèves. Plusieurs ont développé des techniques ingénieuses et surtout j'ai eu plusieurs commentaires qui m'ont démontrés que plusieurs ont une bonne compréhension du sens du nombre et des opérations. Discutons d'abord des techniques utilisées par les élèves et ensuite parlons du développement pédagogique lié à cette activité.

Essentiellement, l'activité demandait aux élèves 3 choses. Les élèves devaient tout d'abord trouver une façon de ramener les nombres donnés (entre 1 et 999) à 0 en 5 pas ou moins. Deuxièmement, les élèves devaient trouver des trucs qui permettaient de diminuer le nombre de pas et tenter de généraliser ces trucs. Finalement, on demandait à l'élève de créer un problème avec le nombre à trois chiffres qu'il jugeait le plus difficile possible et il devait expliquer pourquoi il avait choisit ce nombre plutôt qu'un autre.

Dans la première partie, plusieurs ont utilisé l'essai et erreur comme méthode ce qui est tout à fait légitime pour se familiariser avec la tâche. Dans la deuxième partie où l'on demandait d'optimiser le nombre de pas, les élèves étaient beaucoup plus structurés.

Les raisonnements de base

Plusieurs ont pensé à travailler avec les nombres pairs ou encore avec des multiples de 5. Ces nombres semblent être « rassurants » pour les élèves. Entre autre, Kelly (élève de secondaire 2) a mentionné qu'elle commençait toujours par mettre son nombre en nombre pair pour être certaine que le nombre se divisait. On voit déjà ici que l'idée qu'il faut éviter les nombres premiers est instinctive chez Kelly (et plusieurs autres ont répondu de façon similaire). De plus, du fait qu'elle veut être certaine que le nombre se divise montre qu'elle comprend que la façon la plus rentable pour revenir à 0 sera de diviser. D'ailleurs plusieurs réponses d'élèves se sont limitées à dire qu'il fallait simplement diviser le plus possible. D'ailleurs, j'ai pu observer pendant l'activité, que plusieurs élèves débutaient systématiquement en prenant la calculatrice et en essayant de diviser le nombre par 3, ensuite par 4, par 5… Souvent ces élèves s'arrêtaient aussitôt qu'ils avaient trouvé un diviseur et reprenait la même stratégie pour l'étape suivante.

Les raisonnements deviennent un peu plus élaborés…

À la suite du numéro 5, plusieurs ont raffinés leur méthode. C'est le cas de Cléo (secondaire 4) qui voit juste en disant qu'elle résume les divisions successives par 2 par une unique division par 8. Elle est encore juste lorsqu'elle affirme que ce truc ne fonctionne pas toujours car 2 divisions successives par 5 donnent 25…

Certains vont plus loin en disant qu'il faut diviser par le plus gros nombre possible. Ces élèves essayent de diviser par 9, ensuite par 8… Emmanuelle (élève de secondaire 4) est l'élève qui m'a donné la réponse la plus complète. Elle a écrit qu'elle devait diviser par 9 et que si c'était impossible, qu'elle devait soustraire ou additionner afin que le nombre qu'elle obtiendra au pas suivant soit divisible par 9. Certains avaient donné des explications similaires, mais n'avaient pas pris en considération l'addition. En effet, étant donné que le but est de s'approcher de 0, il est très contre-intuitif de penser à additionner. En ce sens, un nombre comme 727 est très intéressant à utiliser, car l'élève a intérêt à ramener à 729 (9x9x9) plutôt qu'à 720 bien que 729 et 720 soient tous les deux divisibles par 9. Emmanuelle n'est pas la seule à avoir trouvé la bonne réponse au numéro 3, mais elle est la seule à l'avoir verbalisée.

Lors de la dernière partie, on demandait aux élèves de trouver le nombre le plus difficile possible entre 1 et 999 à ramener à 0 en 5 pas ou moins.

Les raisonnements de base

Premièrement, l'idée qu'un gros nombre est plus difficile est revenue à maintes reprises. Faudrait regarder avec eux 3×7×7 vs 9×9×9. Par contre, l'idée de départ est bonne. Étrangement, 998 a été le nombre le plus populaire. Je comprends que pour le nombre 999 il est facile de voir qu'il est divisible par 9. Par contre, 997 me semblait un choix plus logique. J'ai de la difficulté à expliquer pourquoi les élèves ont opté pour 998 à la place. D'ailleurs, plusieurs élèves comme Geneviève (secondaire 4), ont dit qu'un nombre difficile était un nombre gros et impair. Cela est cohérent avec l'idée soulevée par les élèves dans la première et la deuxième partie qu'il est toujours plus facile de revenir à un nombre pair pour commencer. Il serait bien de les confronter avec des nombres impairs et gros qui se divisent très bien par exemple 7×7×9.

D'autres élèves ont été un peu plus loin en disant qu'un nombre difficile est un nombre qui ne se divise pas par un nombre de 2 à 9. La formulation était toujours différente, mais l'idée principale était la même.

Les raisonnements deviennent un peu plus élaborés… la route vers les nombres premiers

Finalement, les raisonnements se sont raffinés avec d'autres élèves. Au lieu de dire que le nombre n'a pas de diviseur, Mourad (secondaire 2) dit que ça donne toujours des virgules lorsqu'il divise. Pour Kristel (secondaire 2) c'est un nombre qui ne se divise pas sauf par lui-même. Dans le cas de Daniela (secondaire 4), un nombre difficile est un nombre impair qui oblige à faire des soustractions. Tous ces élèves s'approchent de l'idée d'un nombre premier … sans le nommer ainsi. Finalement Camille (secondaire 2) a décidé de prendre 871 parce que c'est un nombre premier et c'est un gros nombre (je sais il n'est pas premier! Mais pour elle semblerait que oui). Amélie pousse un peu plus loin en s'organisant pour que son nombre après sa première division soit premier (458 / 2 = 229). Elle m'a expliqué que, du coup, elle est certaine qu'il y aura au moins 4 étapes étant donné que la deuxième sera nécessairement une soustraction ou une addition et que la troisième sera une division. Puisque nous devons terminer absolument par une soustraction… C'est l'élève qui a donné le raisonnement le plus complet.

Au-delà des procédures… le développement du sens du nombre…

Il est facile de voir par leur raisonnement plus haut que cette activité leur a permis de développer le sens du nombre et le sens des opérations. Ne serait-ce que par l'idée de diviser par un gros nombre me rapproche de 0 plus rapidement ou encore que la division est plus efficace que la soustraction… D'autres m'ont également fait remarquer que nous ne multiplierons jamais! Bref, il y a eu une belle réflexion sur la place de chaque opération mathématique dans ce problème. J'ai également eu la chance d'observer les élèves et de recueillir leurs commentaires. Voici 2 remarques d'élèves que j'ai trouvées pertinentes et qui démontrent à quel point cette activité est efficace pour le développement mathématique de l'élève.

Premièrement, quelques élèves dont Gilles (élève de secondaire 2) ont essayé de « tricher » en multipliant par 0. Cela démontre que Gilles a compris l'élément absorbant de la multiplication par 0. Évidemment Gilles a compris qu'il ne pouvait utiliser que des nombres de 1 à 9, mais sa remarque est intéressante… D'ailleurs Benjamin dans le même groupe m'a demandé s'il pouvait utiliser des parenthèses! Il m'a alors suggéré que si c'était le cas, il n'avait qu'à multiplier par une parenthèse dans laquelle le résultat donnerait 0. Par exemple, pour le nombre 512 il utiliserait la méthode suivante : 512 x (5 -5) = 0. Benjamin est un élève de secondaire 2 et a vu la priorité des opérations l'année dernière. Il a donc voulu trouver une faille à mon jeu… en utilisant les connaissances qu'il avait !

3. Calcul : affichage sous contraintes

Avant d'entamer la conclusion pour cette activité, je vous invite à consulter l'annexe. J'ai inclus l'activité avec le détail de tout ce que je voulais travailler avec les élèves à travers cette activité et les réponses à auxquelles je m'attendais. L'activité est en trois parties. Dans la première partie je demande aux élèves de faire afficher un nombre sous certaines contraintes. Dans la deuxième, je demande de faire un calcul sous certaines contraintes et je termine l'activité en invitant les élèves à eux même bâtir un problème de calcul sous contraintes. Je dois cependant parler du contexte un peu particulier dans lequel a été donnée l'activité. En effet, nous étions en fin de session et le temps étant compté, nous n'avons pas eu le temps de faire la dernière partie où les élèves doivent eux même bâtir un problème.

Les « failles » de l'activité

La première conclusion que je peux émettre est : on ne peut pas tout prévoir ! Comme mentionné plus haut, un des risques de faire une activité à l'aide de la calculatrice est l'imprévisibilité des résultats fournis par les élèves. Il y a des questions qui ont été contournées, d'autres ont été plus loin que prévu… Voici quelques problèmes survenus lors de l'activité.

Tout d'abord certains élèves comme Hugo (secondaire 2) ont compris que faire afficher 0 sur la calculatrice veut dire voir 0 sur l'écran peu importe si il fait partie d'un nombre ou non. Donc, en affichant 10 il croyait être correct.

L'activité a également mené certains élèves plus aventureux à essayer des touches inconnues pour les mener par hasard à la bonne réponse. Par exemple, dans le cas de Hugo, il a fait 2nd fct et cos-1 pour faire afficher 1. Il n'avait aucune idée qu'il faisait le cos-1 de 0 et ne connaissait même pas les fonctions trigonométriques.

De plus, pour les questions ou il faut effectuer les calculs (4 dernières), les élèves calculaient d'abord le résultat et me donnait tout simplement une autre façon de calculer. Par exemple lorsque je leur demandais d'effectuer 28/2 sans utiliser la touche division, Gabriel-Ann (élève de secondaire 4) m'a répondu 7 + 7 et lorsque je lui ai demandé le raisonnement elle m'a répondu tout simplement que ça devait donner 14. La majorité de ceux qui ont répondu (car plusieurs n'ont pas répondu à ces 4 questions qui semblent plus complexes pour les élèves) ont fait ce type de raisonnement. Peut-être la question portait à confusion. Je n'ai pas fait de démonstration ne voulant pas influencer leurs réponses.

Finalement, la première question a été détournée par plusieurs.je demandais de faire afficher 0 sur la calculatrice sans utiliser la touche « 0 » et plusieurs m'ont tout simplement répondu d'appuyer sur la touche « on ».

Malgré tout, je crois que ces petits imprévus ont porté leurs fruits. Certaines touches ont piqué la curiosité des élèves et la majorité ont vu l'activité comme un jeu d'où leur idée à essayer de contourner les questions. Après tout, leur faire aimer les mathématiques c'est tout aussi important que de leur montrer les notions et je crois que cette activité a été très appréciée.

Les réussites : ce que nous avons travaillé

Premièrement, voici la liste de tout ce que je voulais travailler avec les élèves dans cette activité :

- élément absorbant dans la multiplication ;
- l'idée qu'un nombre devant une parenthèse multiplie la parenthèse ;
- division d'un nombre par lui-même (a/a) ;
- l'exponentiation (et un cas spécial : l'exponentiation par 0) ;
- les nombres décimaux et la division par 10,100… ;
- la priorité des opérations ;
- élément neutre des 4 opérations de base ;
- les facteurs d'un nombre ou l'idée que la multiplication est une addition itérée ;
- les opérations inverses des quatre opérations de base (pas vraiment travaillé pour les raisons mentionnées plus haut (problème survenu pour la partie où les élèves doivent effectuer un calcul sous contraintes).

La division d'un nombre par lui-même et la division par 10 sont certainement les deux notions les plus maîtrisées. Dans presque tous les cas, les élèves ont utilisé ces deux notions pour faire afficher les nombres demandés. Le 0 comme élément absorbant dans la multiplication est aussi très bien intégré. Difficile à dire si c'est parce qu'ils ont préférés d'autres méthodes ou si c'est simplement parce que cette notion n'est pas intégrée.

En général, j'ai remarqué que l'utilisation de la racine carrée est beaucoup plus fréquente chez les secondaires 4. De plus, à la question où je demande de faire afficher 4 sans utiliser les touches des quatre opérations de base, les secondaires 4 ont été plus nombreux à utiliser l'exponentiation. Signe que cette notion, bien qu'enseignée aux deux niveaux, est beaucoup plus intégrée chez les plus vieux. Par contre, les élèves de secondaire 2 ont été plus nombreux à utiliser les parenthèses afin de réussir le problème (2(2)=4). Les élèves de secondaire deux ont donc eu plus de facilité à répondre aux questions où je ne permettais pas d'appuyer sur la touche « x » puisqu'ils ont tout simplement contourné en utilisant des parenthèses ! Ils ont du même coup pratiqué leur priorité des opérations. Pour le cas plus spécifique de l'exponentiation par 0, je n'ai qu'une dizaine d'élèves qui ont utilisé cette technique, les autres préférant utiliser la racine carré ou ne réussissant tout simplement pas à répondre.

En ce qui concerne l'idée que multiplier c'est additionner plusieurs fois, il est arrivé quelque chose de très drôle. Lorsque je demandais d'effectuer 2 x 14 sans utiliser la touche « x », la grande majorité des élèves ont répondu 14 + 14. Par contre, lorsque je demandais de faire 25 x 20 sans utiliser la touche « x », alors là plusieurs élèves m'ont dit qu'ils ne pouvaient tout de même pas faire 20 + 20 + 20… Suite à cette remarque, je modifierais un peu la question pour voir ce qu'il ferait avec 25 x 8. Je suis curieux de voir s'ils comprennent la commutativité de la multiplication dans les réels. Ici les élèves ne travaillaient pas vraiment cette notion car faire 25 fois le nombre 20 ou 20 fois le nombre 25 semblait être beaucoup trop long pour eux. Mais avec 25 x 8, j'aurais pu travailler cette notion avec eux et j'aurais pu voir si le transfert de l'idée que multiplier c'est additionner plusieurs fois se faisait d'un numéro à l'autre, car là je n'ai pas pu vérifier puisque je ne sais pas si les élèves qui n'ont pas répondu ont tout simplement trouvé trop long d'écrire 20+20+20… 25 fois !

Finalement, bien que je ne désirais pas travailler la trigonométrie dans cette activité, certains de mes élèves doubleurs (ils devraient être en secondaire 5 mais sont en secondaire 4 présentement) ont utilisé des notions vues l'an dernier. Par exemple : *tan*45 pour faire afficher 1, *cos*0, etc. Voyons-le comme un bonus !

Au-delà de l'activité, le retour sur l'activité a été tout aussi bénéfique. C'est là que nous avons pu échanger nos différentes solutions et que nous avons pu revoir l'ensemble de toutes les notions. De cette façon l'enseignant peut diriger les élèves là où il le désirait à prime à bord ce qui vient en quelques sortes corriger les lacunes de l'activité. Il est à noter que j'ai d'abord analysé les réponses avant de faire le retour afin que les élèves n'écrivent pas la même réponse que le voisin. Je termine les conclusions de cette activité en notant qu'il est possible de travailler plusieurs autres notions à l'aide de cette activité. Il serait possible d'aller vers des notions postsecondaires. Il suffit d'avoir un peu d'imagination et nous pouvons mener les élèves où nous voulons (avec quelques petits égarements parfois…). J'ai eu un plaisir fou à monter cette activité et une fois imprégné de l'essence de l'activité, le problème n'est plus de trouver de nouveaux problèmes, mais bien de s'arrêter d'en construire ! L'activité pourrait être retravaillé c'est certain, mais une chose est claire, la calculatrice a bel et bien un rôle didactique dans cette activité et peut aider à développer une bonne partie des notions mathématiques vues au secondaire.

IV. CONCLUSION DE LA RECHERCHE ACTION

Le problème général de ma recherche était : comment intégrer efficacement la calculatrice dans l'enseignement des mathématiques pour qu'elle soit un support à l'enseignement et à l'apprentissage ? L'objectif premier était de concevoir et mettre à l'épreuve une situation d'apprentissage intégrant la calculatrice et permettant de développer chez les élèves le sens des opérations ou de faire du calcul réfléchi. Je crois avoir fait la démonstration que les deux activités présentées répondent à mon but et à mes objectifs. Je suis convaincu que les autres activités présentées dans ma section 2.5 ont tous le potentiel d'intégrer efficacement la calculatrice tout en permettant à l'élève d'apprendre. Resterait à les développer et à les tester.

À court et à moyen terme, cette recherche me permettra d'aller faire une conférence à l'espace mathématique francophone 2012 à Genève au mois de février 2012. De plus, ma commission scolaire m'a demandé de présenter mes activités et le fruit de mes recherches lors d'une journée pédagogique à tous mes collègues en mathématique de la commission scolaire. J'espère convaincre mes collègues de l'utilité pédagogique de la calculatrice et leur ouvrir l'esprit sur la façon (et surtout la nécessité!) d'intégrer efficacement la calculatrice dans l'enseignement des mathématique au secondaire. À plusieurs, je suis certain que nous pourrons développer quelque chose de très intéressant et bientôt, je l'espère, le débat sur la calculatrice ne sera qu'une histoire du passé…

REFERENCES

Assude T., Loisy C. (2008) Valeur et efficacité de l'intégration des TICE dans l'enseignement. Colloque international *« Efficacité et Équité en éducation »*. http://ent.bretagne.iufm.fr/efficacite_et_equite_en_education/programme/symposium_ravestein.pdf , consulté le 28 septembre 2011

Bruillard E. (1994) Quelques obstacles à l'usage des calculettes à l'école : une analyse. *Grand N* 53, 67-78.

Julien C. (2003) *Il faut bannir la calculette*. Sélection reader's digest. http://www.accreteil.fr/id/94/c4/mathematiques/Il%20faut%20bannir%20la%20calculette.htm – consulté le 28 septembre 2011.

Les nouveaux programmes de l'école primaire mathématiques document d'accompagnement, Utiliser les calculatrices en classe. Ministère de l'éducation nationale, République Française. http://revue.sesamath.net/IMG/calculatrice.pdf, consulté le 28 septembre 2011.

Mercier A. (2008) Efficacité de l'usage des TIC en enseignement et formation : Quelques résultats…beaucoup de questions. *Colloque international «Efficacité et Équité en éducation»*. http://ent.bretagne.iufm.fr/efficacite_et_equite_en_education/programme/symposium_ravestein.pdf, consulté le 28 septembre 2011.

Pochon L.-O. (1995) Les réactions des élèves face à la calculatrice, *CNDP-DIE* Mars 1995 45–50

Schaub B. (2009) *Utilisation de la calculatrice dans l'enseignement des mathématiques du primaire*. Travail de maturité. Lycée Blaise-Cendrars de la Chaux-de-Fonds. http://www.sens-neuchatel.ch/bulletin/no38/art2-38-schaub.pdf, consulté le 28 septembre 2011.

Squalli H. (2007) *L'éducation mathématique au Canada : perspectives concernant les applications de nouvelles technologies dans l'enseignement de l'algèbre*. Université de Sherbrooke.

ANNEXE 1

Calcul : affichage sous contraintes

Feuille 0

NOM : ____

DATE : ____________________

COURS : ________

GROUPE : ________

Calcul : affichage sous contraintes

Respectez les contraintes pour provoquer l'affichage des nombres demandés ou pour calculer l'expression mathématique demandée. Écrire vos démarches complètes

Feuille de travail 1

1- Tente de faire afficher le nombre 0 sur ta calculatrice sans utiliser la touche « 0 »

Ici je m'attends à une multitude de réponses, mais a – a sera probablement la plus populaire

2- Tente de faire afficher le chiffre 0 sur ta calculatrice sans utiliser la touche « - » (les deux touches – sont interdites) et en effectuant au moins une opération

Ici la réponse sera probablement 0 × a

Élément travaillé : élément absorbant dans la multiplication

3- Tente de faire afficher le chiffre 0 sur ta calculatrice sans utiliser les touches « – » et « × » et en effectuant au moins une opération

Ici je m'attends à 0/a, et je trouverais beau quelque chose comme log1, ou encore sin 0 mais mes élèves n'ont pas abordés les logs ou la trigonométrie

Pour tous les problèmes avec l'interdiction d'utiliser le signe de multiplication, il serait beau de voir un élève utiliser les parenthèses tout simplement! Dans ce cas, cela contournerait un peu ce que je veux montrer aux élèves, mais cela fait partie des possibilités

Ex : 0(a+b)

Élément travaillé : élément absorbant dans la division ou l'idée qu'un chiffre devant une parenthèse multiplie la parenthèse (nous travaillons donc plus l'écriture mathématique ici)

4- Tente de faire afficher le chiffre1 sur ta calculatrice sans utiliser les touches « 1 », « – », « + »

Ici je m'attends à quelque chose comme a/a ou encore a^0 pour les élèves de secondaire 4, autres belles solutions : sin 90,log 10

Élément travaillé : division d'un chiffre par lui-même ou l'exponentiation par 0

5- Tente de faire afficher le nombre 54 sur ta calculatrice sans utiliser les touches « 4 », « 5 »,

Ici beaucoup de solutions possibles, mais je m'attends à une soustraction ou une addition

6- Tente de faire afficher le nombre 4 sur ta calculatrice sans utiliser les touches « 4 », « + », « - », « x », « / »

Je m'attends à 2^2, ou encore 2(2)=

Élément travaillé : exponentiation

7- Tente de faire afficher le chiffre1 sur ta calculatrice sans utiliser les touches « 1 », « - », « + », « x », « / »,

Je m'attends à a^0, autres belles solutions : sin 90,log 10

Élément travaillé : exponentiation

8- Tente de faire afficher le nombre 6,8 sur ta calculatrice sans utiliser la touche « , »

Je m'attends à 68/10; 680/100, 34/5, etc.

Élément travaillé : les nombres décimaux et la division par 10,100…

9- Tente de faire afficher le nombre 2,5 sur ta calculatrice sans utiliser les touches « 2 », « 5 », « , »

Je m'attends à 10/4 ou quelque chose avec des parenthèses ex (19/10)+(6/10)

Élément travaillé : la division ou encore la priorité des opérations

10- Tente de faire afficher le nombre 1,7 sur ta calculatrice sans utiliser les touches « 1 », « 7 », « + » , « - » « , »

Celui-ci est un peu plus complexe pour les élèves, ils doivent penser aux multiples de 1,7 qui arrivent à un entier.

34/20 est une possibilité

Élément travaillé : les multiples d'un chiffre à virgule

Pour les 2 prochains problèmes, je voudrais que les élèves pensent aux éléments neutres pour chaque opération

Ex : (24-0+0)×1/1 et (1,33-0+0)×1/1 pour éventuellement y déduire que (a-0+0)×1/1 = a

11- Tente de faire afficher le nombre 24 en effectuant obligatoirement 1 seule fois chaque opération (+, - , × , /)

12- Tente de faire afficher le nombre 1,33 en effectuant obligatoirement 1 seule fois chaque opération (+, - , × , /)

Élément travaillé : élément neutre des 4 opérations de base

13- Effectue le calcul 18 x 305 sans utiliser les touches « 1 », « 8 » ;

Ici je voudrais que les élèves pensent aux facteurs de 18 et fassent 2x9x305 ou encore 3x6x305 ou à la limite 305+305+305…+305 (18 fois)

L'idée de 20x305 – 2x305 est possible également

Élément travaillé : les facteurs d'un nombre ou l'idée que multiplier c'est additionner plusieurs fois.

14- Effectue le calcul de 2 x 14 sans utiliser la touche « x »

Ici clairement l'idée est de faire 14+14

Élément travaillé : multiplier c'est additionner plusieurs fois

Dans les deux problèmes suivants, l'idée d'effectuer l'opération inverse est le but des problèmes

15- Effectue le calcul de 25 x 20 sans utiliser la touche « x »

Ici l'idée d'addition est moins bonne…L'idée de diviser par l'inverse est très bonne

25/1/20 ou encore une fois si on joue avec les mots 25(20) je n'ai pas utilisé la touche ×

16- Effectue le calcul 28/2 sans utiliser la touche « / »

Tout simplement, on multiplie par ½

28×1/2

Élément travaillé : les opérations inverses

Notes sur l'activité : Évidemment, comme nous pouvons le constater, l'activité permet de faire réfléchir les élèves sur plusieurs règles, conventions, raisonnements mathématiques… malheureusement ou heureusement, les solutions ne sont pas uniques…Par conséquent, le résultat attendu et le résultat de l'élève peuvent différer…Alors le but pédagogique premier ne sera pas nécessairement atteint du premier coup. Je prétends, par contre, qu'un échange de solutions avec les élèves après l'activité permettra de parler de chaque élément désiré…

ANNEXE 2

Le test D’Amore

1. Soustrayez ces nombres : 9864 – 5947

2. Multipliez : 92 × 34

3. Additionnez les nombres suivants : 126,30 $+265,12 $+196,40 $

4. Une voiture parcourt 360 kilomètres en trois heures. Quelle distance fera-t-elle en une heure ?

5. Si une tarte est coupée en sixièmes, combien de morceaux y aura-t-il ?

6. Mathieu a acheté six oranges à 5 cents chacune. Il lui reste 15 cents après l’achat. Combien d’argent avait-il au début ?

7. François a 2,75 $. Marie-Eve a 95 cents de plus que François. Combien François et Marie-Eve ont-ils ensemble ?

8. Pierre achète une bicyclette pour 21,50 $. Il la vend pour 23,75 $. A-t-il perdu ou gagné de l’argent, et combien ?

9. La mère d’Isabelle achète un chapeau pour 2,85 $. Combien lui remet la caissière sur son billet de 5 $?

10. Il y a 36 enfants dans une classe et 33 dans une autre. Combien en coûterait-il pour acheter un crayon à 7 cents pour chaque enfant ?

ANNEXE 3

5 pas à 0

Feuille 0

NOM ____

DATE : ________________________________

COURS : ___________

GROUPE : ___________

Prendre un nombre entier entre 1 et 999 et essayer de le ramener à zéro en cinq pas ou moins, utilisant seulement les nombres de 1 à 9 et les opérations de base +, -, × et ÷. Le même nombre peut être utilisé plusieurs fois.

Feuille de travail 1

Prend le nombre 144. Écris toutes les manières possibles que tu peux trouver-en utilisant la calculatrice- pour ramener 144 à zéro en cinq pas ou moins.

Feuille de travail 2

Prend le nombre 151. Écris toutes les manières possibles que tu peux trouver -en utilisant la calculatrice- pour ramener 151 à zéro en cinq pas ou moins.

Feuille de travail 3

Prend le nombre 732. Écris toutes les manières possibles que tu peux trouver -en utilisant la calculatrice- pour ramener 732 à zéro en cinq pas ou moins.

Feuille de travail 4

Décris tes stratégies pour diminuer le nombre de pas.

Feuille de travail 5

Voici la stratégie proposée par un élève pour ramener le nombre 432 à zéro :

$432 \div 2 = 216$

$216 \div 2 = 108$

$108 \div 2 = 54$

$54 \div 3 = 18$

$18 \div 3 = 6$

$6 - 6 = 0$

Peux-tu trouver une façon de ramener 432 à zéro en moins de pas ?

D'abord explique ta stratégie. Penses-tu qu'elle marche toujours ? Pourquoi ?

Feuille de travail 6

Voici la stratégie proposée par un élève pour ramener le nombre 499 à zéro :

$499 + 1 = 500$

$500 \div 5 = 100$

$100 \div 5 = 20$

$20 \div 5 = 4$

$4 - 4 = 0$

Peux-tu trouver une façon de ramener 499 à zéro en moins de pas ?

D'abord explique ta stratégie. Penses-tu qu'elle marche toujours ? Pourquoi ?

Feuille de travail 7

Le nombre 266 a comme diviseurs 2, 7 et 19; c'est-à-dire que $266 = 2 \times 7 \times 19$

Quelle serait la meilleure stratégie pour ramener 266 à zéro ?

Explique pourquoi la stratégie que tu as choisie est la meilleure.

Feuille de travail 8

Voici la stratégie proposée par un élève pour ramener le nombre 731 à zéro :

$731 + 7 = 738$

$738 \div 9 = 82$

$82 - 1 = 81$

$81 \div 9 = 9$

$9 - 9 = 0$

Peux-tu trouver une façon de ramener 731 à zéro en moins de pas ?

D'abord explique ta stratégie. Penses-tu qu'elle marche toujours ? Pourquoi ?

Feuille de travail 9

1. Donne un nombre (plus petit que 999) que la classe trouvera difficile de ramener à zéro en cinq pas ou moins.___________________________________

2. Écris une façon pour ramener à zéro le nombre dur que tu as choisi.

3. Explique pourquoi tu penses que ce nombre soit dur pour la classe.

DIFFICULTÉS DE L'ENSEIGNEMENT ET DE L'APPRENTISSAGE DES PROBABILITÉS DANS LE SECONDAIRE

Khadidiatou GUEYE*

Résumé – Au Sénégal, l'enseignement des probabilités pose problème à beaucoup de professeurs et les élèves se confrontent à de nombreuses difficultés dans l'apprentissage de cette partie des programmes. Pour déterminer ces difficultés et mieux comprendre leurs origines, nous avons mené une investigation auprès des professeurs de mathématiques ayant en charge des classes de Terminale S. Ce texte présente les résultats obtenus suite à notre investigation et les solutions proposées pour surmonter ces difficultés.

Mots-clefs : enseignement et apprentissage des probabilités, formation des enseignants, difficultés d'apprentissage, problème d'enseignement

Abstract – In Senegal, the teaching of the probability raises problem to many professors and the pupils confront with numerous difficulties in the learning of this part of the programs. To determine these difficulties and better understand their origins, we made an investigation with the professors of final year of high school. This text presents the results obtained as a result of our investigation and the solutions proposed to overcome these difficulties.

Keywords: teaching and learning of probabilities, teachers' training, learning difficulties, teaching problem

I. INTRODUCTION

Le mot probabilité peut être défini de plusieurs manières. En effet, dans le dictionnaire *Le nouveau Petit Robert de la langue française 2008*, il est donné trois définitions de ce mot : d'abord, c'est le caractère de ce qui est probable ; ensuite, c'est une grandeur par laquelle on mesure le caractère aléatoire (possible et non certain) d'un événement, d'un phénomène par l'évaluation du nombre de chances d'en obtenir la réalisation ; enfin, c'est une apparence, un indice qui laisse à penser qu'une chose est probable. Toutefois, en mathématiques, la notion de probabilité correspond à la quantification des « chances » qu'un événement a de se réaliser lors d'une expérience aléatoire. Une expérience étant une action qui produit un résultat, les noms « expérience aléatoire » et « événement » désignent respectivement une expérience dont l'issue ne peut être prédite avec certitude et le résultat d'une expérience aléatoire. Dans la dernière définition de la notion de probabilité (en mathématiques), interviennent deux mots qui font souvent penser au hasard à savoir : chance et aléatoire. Par conséquent, nous pouvons dire que les probabilités sont l'application des mathématiques aux phénomènes caractérisés par le hasard et l'incertitude.

Elles (les probabilités) sont aujourd'hui considérées comme l'un des domaines les plus importants des mathématiques et sont en général très utilisées pour résoudre certains problèmes de la vie courante. Elles sont également utilisées dans la théorie des jeux et dans des domaines scientifiques tels que l'astronomie, la météorologie, la médecine, la biologie, la biométrie, l'hérédité, l'économie, les mathématiques financières, la mécanique statistique, la cinétique des matières, la mécanique quantique… Par exemple, dans la théorie des jeux, c'est grâce au calcul des probabilités qu'un joueur peut déterminer ses chances de gagner ou de perdre une partie (de jeu). En météorologie, en économie ou en astronomie, les ingénieurs effectuent souvent des calculs de probabilité pour prévoir l'éventualité qu'un fait précis puisse se produire…

* Faculté des Sciences et Technologies de l'Education et de la Formation. UCAD. Dakar – Sénégal – khady84@hotmail.com

© Gueye K. (2012) Difficultés de l'enseignement et de l'apprentissage des probabilités dans le secondaire. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (– SPE1, pp. 1604–1615). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

Ainsi, l'enseignement des probabilités semble essentiel pour la formation de l'élève dans la mesure où il lui permet d'avoir des outils nécessaires pour décrire certaines expériences aléatoires, mais aussi d'avoir un regard critique et de pouvoir prendre des décisions face à des situations sociales qui se présenteront à lui. Cependant, cet enseignement introduit récemment au Sénégal en classe de Terminale (dernière classe du secondaire : élèves de 18 ans) pose d'énormes problèmes aux professeurs et les élèves aussi, rencontrent généralement des difficultés dans l'apprentissage des probabilités et dans la résolution d'exercices de probabilité.

C'est dans ce cadre que j'ai réalisé, pour mon dossier pédagogique de fin de formation comme élève-professeur à la FASTEF[1], une étude portant sur un sujet particulier touchant l'enseignement et l'apprentissage des probabilités. Il s'agit de faire un état des lieux des difficultés de l'enseignement et de l'apprentissage des probabilités dans le secondaire. J'ai été motivée à travailler sur ce sujet suite à deux constats que j'ai faits dans les lycées sénégalais. En premier lieu, les professeurs rencontrent d'énormes difficultés dans l'enseignement des Probabilités. En deuxième lieu, les élèves sont également déroutés par cette partie des programmes. De plus, étant élève, je me suis moi-même toujours interrogée sur l'origine de ces difficultés.

Le travail commence par une présentation de la problématique du sujet : il s'agira de poser le problème que nous allons étudier, de décrire le contexte du problème et de le justifier, de faire une revue de littérature, de poser les questions de la recherche et de faire des hypothèses.

Ensuite nous allons élaborer notre méthodologie de recherche en deux parties :

- Une étude expérimentale : il s'agira de définir une population de professeurs sur laquelle un échantillon sera minutieusement choisi. Sur cet échantillon, des éléments d'investigation (questionnaires) seront administrés pour avoir des éléments de réponses en rapport avec les hypothèses émises au niveau de la problématique.
- Une présentation et une analyse des résultats obtenus suite à nos investigations sur les difficultés que rencontrent les professeurs dans l'enseignement des probabilités, et les problèmes auxquels les élèves sont confrontés dans l'apprentissage de cette discipline.

À la suite de l'exploitation de nos résultats, nous ferons une synthèse de notre travail en guise de conclusion avant de présenter des propositions de solutions en rapport avec les difficultés décelées par cette recherche.

II. PROBLÉMATIQUE

1. Position du problème, contexte et justification

Les probabilités sont présentes dans les programmes de l'enseignement secondaire au Sénégal spécifiquement dans les classes de terminales S et L (sections scientifique et littéraire). Elles occupent une place assez importante dans les sujets d'examen au baccalauréat (examen de la fin des études secondaires), surtout pour les Terminales S2 (classe scientifique avec un programme renforcé de mathématiques). Cependant leur enseignement pose beaucoup de difficultés aux professeurs et leur apprentissage est source de plusieurs obstacles au niveau des élèves.

[1] Faculté des Sciences et Technologies de l'Education et de la Formation.

Au Sénégal, depuis le départ des professeurs français qui enseignaient dans les lycées et collèges, en appui au corps professoral local, l'enseignement des mathématiques est devenu une préoccupation majeure au niveau de l'Éducation Nationale.

En outre, il y a un fort déficit de professeurs de mathématiques dans l'enseignement secondaire. De 2000 à 2010, environ 173 lycées ont été créés et seuls 73 professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire ont été formés. Dans le but de résorber ce déficit, l'État sénégalais recrute chaque année (s'il en trouve) des professeurs (appelés vacataires), titulaires d'une licence ou d'une maîtrise de mathématiques mais n'ayant pas bénéficié d'une formation professionnelle pour enseigner dans les lycées. Mais les titulaires de licence et de maîtrise de mathématiques se détournent souvent de l'enseignement et s'orientent la plupart du temps vers d'autres secteurs plus attractifs tels que les banques et les Organisations Non Gouvernementales (ONG).

D'ailleurs dans certaines régions du pays, faute de trouver des professeurs vacataires, ce sont des professeurs de collège qui sont appelés pour enseigner dans le secondaire, sans y être préparés.

A cela, s'ajoute le fait que même les professeurs titulaires, c'est-à-dire ayant subi une formation professionnelle, sont souvent « déconcertés par cette partie du programme dans laquelle ils ne sont pas bien à l'aise ». Certains vont jusqu'à la rejeter en fin de programme ou lui consacrer moins de temps, voire la bâcler ou ne pas la traiter tout simplement.

Par ailleurs, les élèves, de leur côté, sont déroutés par les types de raisonnement qu'ils rencontrent en probabilité, qui leur apparaissent très différents de ceux utilisés en algèbre, en analyse ou en géométrie. D'ailleurs le fait de ne pas pouvoir classer les probabilités dans l'un de ces trois domaines pose de réelles difficultés aux élèves.

De plus, le passage de la réalité à la modélisation, constituant l'essentiel des stratégies pour résoudre un exercice de probabilité, embrouille souvent les élèves car ces derniers, avant de connaître les outils mathématiques qui doivent intervenir, ont déjà des problèmes de maîtrise de la langue pour bien comprendre les énoncés. La présence de termes, tels que « au plus », « au moins », « ou », « ou bien », en est une parfaite illustration.

Il faut ajouter à cela le lien fort que les élèves font souvent entre le dénombrement et les probabilités, en cherchant à tout prix le rapport de cardinaux d'ensembles pour calculer la probabilité d'un événement donné et le fait que les élèves n'ont pas souvent le temps de bien assimiler cette partie du programme qui est faite parfois en fin d'année au moment où ils se préparent pour un examen capital pour la suite de leurs études c'est-à-dire le baccalauréat.

2. Revue de littérature

Les difficultés de l'enseignement et de l'apprentissage des probabilités ne sont pas un problème spécifique au Sénégal. En effet, ce sujet a fait l'objet de quelques études didactiques dans certains pays (nous en avons trouvé en France, au Canada et en Tunisie), où plusieurs difficultés sont relevées aussi bien du côté de l'enseignement que de l'apprentissage des probabilités.

Les enseignants semblent souvent faire la confusion entre la définition « mathématique » et celle « courante » de la notion de probabilité. Ainsi, selon Henry (1994), l'introduction de cette notion se heurte à des conceptions erronées, contradictoires ou préconstruites. Ces difficultés conceptuelles sont également soulevées par Dheib (2009) ou Girard (2001).

Le hasard existe-t-il ? Si on suppose qu'il existe, peut-on lui appliquer les méthodes mathématiques? Ces questions liées à la complexité de la définition du hasard et à la dualité de la notion de probabilité engendrent des difficultés épistémologiques mises en exergue dans les travaux de Coutinho (2001), Girard (2001), Dheib (2009), Larose (2011), etc. Il existe également des difficultés d'ordre didactiques soulevées par Girard (2001), Coutinho (2001) et Dheib (2009). Ces difficultés sont en partie liées à l'introduction de la notion de probabilité par l'approche fréquentiste. En effet, Henry(1999) pense que les enseignants ont beaucoup de difficultés à intégrer cette approche dans les situations didactiques qu'ils proposent à leurs élèves.

Du côté de l'apprentissage des probabilités, les difficultés sont liées, en partie, aux conceptions erronées que les élèves ont par rapport aux probabilités (Martin et Theis 2011, Girard 2001). En effet, avant même d'entamer l'étude de ce chapitre, les élèves se font déjà une idée sur les notions de probabilité, de chance, de rapport à l'aléatoire et ces idées entrent en conflit avec la notion de probabilité enseignée en classe (Martin et Theis, 2011). Ce qui peut constituer un obstacle à leur compréhension de la notion de probabilité (en mathématiques).

Certains travaux montrent que les élèves rencontrent également des obstacles dans la résolution d'exercices de probabilités. Ces obstacles sont liés, d'une part, au fait que les élèves ne maitrisent pas le vocabulaire ensembliste (Girard 2001, Henry 1999), la logique et le langage mathématiques (Dheib 2009, Henry 1999, Girard 2001), et d'autre part, à la difficulté de construire un modèle adéquat à partir de données réelles et de distinguer la réalité du modèle choisi pour la représenter (Girard 2001, Henry 1999, Coutinho 2001). Ces difficultés liées à la modélisation concernent autant les élèves que les professeurs. En plus des difficultés que nous venons d'évoquer, Coutinho (2001) et Girard (2001) soutiennent qu'il existe aussi des difficultés d'ordre psychologique et Henry (1999) précise que la prégnance des situations de dénombrement est une source d'échecs dans l'apprentissage des probabilités.

Plusieurs anciens élèves-professeurs à la FASTEF, dans le cadre de la présentation d'un dossier pédagogique pour l'obtention du CAES (Certificat d'Aptitude à l'Enseignement Secondaire), ont aussi travaillé sur ce sujet. Cependant, ces travaux plutôt que d'étudier les difficultés de l'enseignement et de l'apprentissage des probabilités, se sont plutôt attachés à présenter une fiche pédagogique portant sur les probabilités.

Ainsi Diouf(1991), dans son dossier pédagogique intitulé « Dénombrement et Probabilités : difficultés et stratégies », a eu à présenter un cours sur le dénombrement et la théorie des probabilités et à faire des commentaires sur les parties qui sont susceptibles d'engendrer des difficultés dans l'apprentissage et la résolution d'exercices de probabilités. Il estime que la compréhension de l'analyse combinatoire (le dénombrement) est nécessaire pour aborder les probabilités avec aisance, or, les élèves ne maitrisent pas cette partie du programme. Il précise également que ces difficultés sont dues au fait que les élèves ne maitrisent pas, non plus, la théorie des ensembles et qu'ils ont des problèmes à traduire le langage courant d'un exercice de probabilités en langage mathématique.

Sambe(1993) a réalisé un dossier pédagogique, intitulé « La problématique du calcul des probabilités dans le secondaire », dans lequel il propose une fiche de leçon sur la théorie des probabilités.

Dans son dossier pédagogique intitulé « L'enseignement des probabilités dans le secondaire », Ly(1994) a d'abord relaté quelques éléments d'histoire des probabilités, ensuite rappelé les principaux résultats de l'analyse combinatoire et enfin présenté une fiche de leçon sur les probabilités.

Dans son dossier pédagogique intitulé « Réflexions sur l'enseignement du calcul des probabilités en classe de Terminale », Mbaye(1998) a également présenté une fiche de leçon sur les probabilités.

3. *Objectifs de la recherche*

Pour ce qui concerne les travaux réalisés sur le plan local, la plupart des auteurs se sont limités dans une grande mesure à présenter des fiches pédagogiques sans pour autant étudier les difficultés de l'enseignement et de l'apprentissage des probabilités. C'est pourquoi, dans nous nous sommes fixé comme objectif principal de donner des éléments plus précis sur ces difficultés tant du point de vue des élèves que des enseignants, afin d'apporter une contribution originale à l'amélioration de la qualité de l'enseignement et de l'apprentissage des probabilités.

Les objectifs spécifiques de notre recherche sont de :

- déceler les difficultés de l'enseignement et de l'apprentissage des probabilités ;
- déceler les causes de ces difficultés ;
- proposer des solutions pour pallier ces difficultés.

4. *Questions de la recherche*

La recherche que nous sommes en train de mener soulève les questions globales suivantes :

- quelles sont les difficultés rencontrées dans l'enseignement et l'apprentissage des probabilités ?
- A quoi sont liées ces difficultés ?
- Quelles sont les causes de ces difficultés ?

Certes, des difficultés sont énumérées au niveau de la revue de littérature mais les recherches qui les ont fait sortir n'ont pas été faites au Sénégal. C'est pourquoi nous avons décidé de faire une étude d'investigation locale.

5. *Hypothèses de la recherche*

Nous sommes partie des hypothèses suivantes : il semble qu'il existe bien des difficultés au niveau de l'enseignement et de l'apprentissage des probabilités ; ces difficultés peuvent être de plusieurs ordres : pédagogiques, mathématiques, didactiques, socio-économiques, épistémologiques, conceptuels. Il nous a toutefois semblé que la spécificité du champ fait que d'une part, les difficultés de l'enseignement des probabilités sont essentiellement des difficultés d'ordre didactique liées au manque de formation des enseignants ; d'autre part, celles de leur apprentissage sont essentiellement dues à l'incompréhension du dénombrement et aux problèmes de langage.

6. *Délimitation du champ de l'étude*

Nous avions décidé de circonscrire notre étude et de la limiter dans la première circonscription urbaine du département de Dakar, mais pour des contraintes d'ordre temporel, nous avons finalement effectué notre recherche dans trois établissements d'enseignement secondaire de cette circonscription. Il faut également préciser que nous nous intéressons particulièrement aux Terminales scientifiques et par conséquent, aux professeurs ayant en charge ces classes. Nous avons fait ce choix car les programmes de probabilités de ces classes de Terminales (voir annexes 1et 2) sont plus complets que ceux des autres spécialités.

III. MÉTHODOLOGIE

1. Présentation de la population et de l'échantillon

Pour effectuer notre recherche, nous avons ciblé une population formée de professeurs de mathématiques (vacataires et titulaires) qui enseignent dans trois lycées différents. Le tableau suivant donne une répartition de cette population de professeurs suivant l'établissement d'enseignement secondaire (lycée).

Établissement d'enseignement secondaire	**Nombre de profs de maths**
Lycée Thierno Seydou Nourou Tall	5
Lycée Blaise Diagne	14
Lycée mixte Maurice Delafosse	6

Sur cette population, nous avons pris un échantillon de 18 professeurs qui ont enseigné dans une classe de Terminale S au moins une fois, auquel nous avons distribué un questionnaire (voir annexe 3).

2. Présentation des résultats de l'enquête

Sur les 18 questionnaires distribués nous n'avons reçu que 10 réponses car les professeurs du moyen et du secondaire étaient partis en grève, et du coup, ils n'étaient plus accessibles.

Le questionnaire est composé de quinze questions notées Q1 à Q15. Pour chaque question, nous présentons le tableau correspondant aux réponses obtenues.	Q1			Q2			Q3		
Réponses	Oui	Non	SR	Oui	Non	SR	Oui	Non	SR
Nombre de professeurs	10	0	0	9	1	0	5	5	0
Fréquence en %	100	0	0	90	10	0	50	50	0

	Q4			Q5			Q5		
Réponses	Oui	Non	SR	Oui	Non	SR	Oui	Non	SR
Nombre de professeurs	6	4	0	8	1	1	8	2	0
Fréquence en %	60	40	0	80	10	10	80	20	0

	Q7			Q8			Q9		
Réponses	Oui	Non	SR	Oui	Non	SR	Oui	Non	SR
Nombre de professeurs	0	8	2	10	0	0	10	0	0
Fréquence en %	0	80	20	100	0	0	100	0	0

	Q10			Q11			Q12		
Réponses	Oui	Non	SR	Oui	Non	SR	Oui	Non	SR
Nombre de professeurs	9	1	0	9	1	0	6	1	3
Fréquence en %	90	10	0	90	10	0	60	10	30

	Q13			Q14			Q15		
Réponses	Oui	Non	SR	Oui	Non	SR	Oui	Non	SR
Nombre de professeurs	8	1	1	5	4	1	10	0	0
Fréquence en %	80	10	10	50	40	10	100	0	0

3. *Analyse et exploitation des résultats*

L'enquête révèle qu'il existe bien des difficultés dans l'enseignement des probabilités. En effet, tous les professeurs interrogés ont répondu positivement à la question Q1.

Ces difficultés de l'enseignement des probabilités sont liées à plusieurs facteurs.

Parmi ces derniers il y a d'abord un problème lié à la formation des professeurs de mathématiques soulevé par 90% de notre échantillon.

Ensuite, il y a autant de professeurs qui pensent que ces difficultés sont liées au manque de manuels que de professeurs qui pensent le contraire. Ceux pense que le manque de manuels est un obstacle précisent qu'il s'agit d'un manque de manuels adaptés aux programmes sénégalais car la plupart des manuels disponibles sont des manuels français et ils ne prennent pas en charge certaines notions contenues dans le programme sénégalais.

Les autres pensent qu'il y a assez de manuels qui traitent des probabilités et que des efforts sont faits avec l'édition de manuels de mathématiques, dans le cadre de la Collection Inter Africaine de Mathématiques (CIAM), conforme aux programmes de mathématiques des États de l'Afrique de l'Ouest en général et du Sénégal en particulier.

Il y a aussi une difficulté liée à l'insuffisance du volume horaire : 40% des professeurs pensent que le volume horaire est suffisant tandis que les 60% restant soutiennent le contraire car : d'une part le dénombrement qui fait partie du programme de Première n'est généralement abordé qu'en classe de Terminale, juste avant l'étude du calcul des probabilités ; d'autre part, ces deux chapitres sont généralement étudiées en fin d'année. En Terminale S2, par exemple, avec le volume horaire qui est passé de six heures à cinq heures par semaine, il devient pratiquement impossible de consacrer à l'étude du calcul des probabilités le temps qui lui est nécessaire.

Parmi les difficultés de l'enseignement des probabilités, il y a celle qui est liée à la modélisation de la réalité. Cette idée est soutenue par 80% des professeurs interrogés. Ils disent qu'ils sont souvent confrontés à des réalités complexes dont l'explicitation à travers des modèles n'est pas toujours facile à faire. L'application des principes fondamentaux (addition, multiplication,…) n'est pas toujours aisée et le véritable problème c'est d'amener l'apprenant à comprendre cette nouvelle démarche qu'il rencontre en probabilités.

Parmi les professeurs interrogés, 80% disent introduire les probabilités par l'approche fréquentiste et pensent que c'est la meilleure approche d'une part, pour enseigner les probabilités sans passer par le dénombrement et d'autre part, pour faciliter aux élèves la compréhension de la notion de probabilité. Selon eux, cette approche n'est nullement à l'origine des difficultés rencontrées dans l'enseignement des probabilités. Cependant, les 20% ne connaissent même pas cette approche.

Enfin, les professeurs ont également soulevé d'autres facteurs auxquelles sont liées les difficultés rencontrées dans l'enseignement des probabilités : la suppression de la logique dans le programme de seconde, la liaison faite entre les probabilités et le dénombrement, le non suivi des professeurs vacataires et contractuels sur le terrain par l'organisation de séminaires et d'ateliers leur permettant de se recycler, le niveau faible en français de certains professeurs de mathématiques.

Toutes ces difficultés liées à l'enseignement des probabilités ont bien sûr des répercussions sur leur apprentissage.

Toutefois, il y a aussi des difficultés liées à la langue française et à la terminologie utilisée en probabilités. Le langage des probabilités étant assez particulier et très subtil, il faut un niveau acceptable en français pour pouvoir suivre. Or, la majeure partie des élèves ont un niveau faible en français, ils ne maitrisent par exemple pas les connecteurs logiques. De ce fait, ils ont du mal à comprendre les textes qu'on leur présente et à les traduire correctement en langage probabiliste.

Il y a aussi des difficultés dues à l'incompréhension du vocabulaire ensembliste. Du fait que la théorie des ensembles ne figure pas dans le programme, le vocabulaire ensembliste est assez étranger aux élèves et ces derniers font souvent la confusion entre réunion et intersection, entre contraire et opposé,…

De plus, les élèves ont des difficultés pour modéliser la réalité. Ils sont habitués à la résolution d'équations ou d'inéquations, à l'application permanente de façon mécanique, des règles de calcul. Les situations concrètes leur sont rarement proposées, ce qui fait qu'ils ne parviennent pas à comprendre la réalité dont les probabilités doivent rendre compte, en plus des principes et concepts étrangers ou nouveaux. En outre, les modèles choisis par l'enseignant ne tiennent pas compte, très souvent, de l'environnement de l'élève.

Une difficulté importante est due au fait que les probabilités sont liées au dénombrement. En effet, le programme propose d'étudier les probabilités après le dénombrement qui pose déjà de réelles difficultés aux élèves. Certains enseignants considèrent alors les probabilités comme un simple prolongement du dénombrement ; ce qui est une vision très limitative.

Enfin il y a des difficultés liées au programme. Selon certains professeurs (50% des interrogés), le programme introduit tardivement l'enseignement des probabilités, est trop ambitieux et manque de cohésion tandis que d'autres (40%) pensent que les contenus des programmes sont pertinents mais que c'est leur mise en œuvre dans la pratique qui pose problème.

Ainsi les résultats de notre enquête ont largement confirmé nos hypothèses, tout en permettant de les affiner.

IV. CONCLUSION. PROPOSITIONS DE SOLUTIONS

Au terme de notre étude, nous pouvons conclure que du point de vue des enseignants, il existe effectivement des difficultés dans l'enseignement et l'apprentissage des probabilités et qu'elles sont, liées, en partie à la modélisation de la réalité. De plus, les difficultés de l'enseignement des probabilités sont liées, la plupart du temps, au manque de manuels conforme aux programmes sénégalais, au problème de formation des professeurs de mathématiques et à l'insuffisance du volume horaire. Par ailleurs, les difficultés d'apprentissage sont liées au programme ; elles sont également dues au problème de langage mais la difficulté majeure est due à la liaison faite entre le dénombrement et les probabilités.

Pour aider à contourner ces difficultés, il nous semble que, d'abord, les concepteurs des programmes de mathématiques au Sénégal devraient réécrire le programme de probabilités et l'étaler sur les trois années du secondaire afin que les professeurs ne bâclent pas cette partie et que les élèves puissent avoir un temps suffisant d'assimilation. Ils devraient également organiser le programme de sorte que l'enseignement des probabilités ne soit plus lié au dénombrement, car ces deux parties sont effectivement indépendantes.

Par ailleurs les Inspecteurs de Spécialité mathématiques, en collaboration avec les acteurs de l'enseignement des mathématiques et les enseignants du secondaire, devraient organiser régulièrement des ateliers dans lesquels ils feraient diverses activités de modélisation en rapport avec les probabilités.

Enfin, les professeurs devraient motiver les élèves et les initier aux vocabulaires des événements et probabilistes en leur présentant des activités concrètes, tirées de l'environnement ou de leur milieu socioculturel. De plus, ils devraient varier leurs manuels de référence, s'inspirer d'eux et cesser de les copier. Mais surtout, ils doivent se recycler et mettre régulièrement à jour leurs connaissances car enseigner c'est d'abord apprendre.

REFERENCES

Coutinho C. (2001) *Introduction aux situations aléatoires dès le collège : de la modélisation à la simulation d'expériences de Bernoulli dans l'environnement informatique Cabri-géomètre II*. Thèse de l'université Joseph Fourier. Grenoble1.

Dheib M. (2009) *Contribution à l'introduction des probabilités au collège : rapports d'élèves à quelques notions probabilistes*. Thèse de l'université de Tunis, et de l'université Paris Descartes.

Diouf S.F. (1991) *Dénombrement et Probabilités: difficultés et stratégies.* Dossier pédagogique FASTEF, Dakar.

Girard J-C. (2001) Quelques hypothèses sur les difficultés rencontrées dans l'enseignement des probabilités. In Henry M. (Ed.) (pp. 189-200) Autour de la modélisation en probabilités. Commission inter-IREM, Collection « Didactiques ». Besançon : Presses Universitaires de Franche-Comté. http://pufc.univ-fcomte.fr/fiche_ouvrage.php?isbn=978-2-84627-018-2&id_titre=404965399

Henry M. (1994) L'enseignement du calcul des probabilités dans le second degré : perspectives historiques, épistémologiques et didactiques. *Repères IREM* 14, 69-104. http://www.univ-irem.fr/spip.php?article=71&id_numero=14&id_article_reperes=96

Henry M. (1999) L'introduction des probabilités au lycée : un processus de modélisation comparable à celui de la géométrie. *Repères IREM* 36, 15-34. http://www.univ-irem.fr/spip.php?article=71&id_numero=36&id_article_reperes=245

Larose F. (2011) *L'apprentissage des probabilités en contexte ludique : transfert de compétences sur la pratique des jeux de hasard et d'argent chez des élèves à risque du premier cycle secondaire*. Rapport de la recherche FQRSC #2008-JA-124845, Université de Sherbrooke. http://www.crie.ca/Recherches/Documents/Rapport_final_r%C3%A9vis%C3%A9_09-2011_AC-2008_124845_Larose_et_Al.pdf

Ly M. M. (1994) *L'enseignement des probabilités dans le secondaire*. Dossier pédagogique FASTEF, Dakar.
Martin V., Theis L. (2011) La résolution d'une situation-problème probabiliste en équipe hétérogène : le cas d'une élève à risque du primaire. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*. 14(1), 49-70.
Mbaye B.B. (1998) *Réflexions sur l'enseignement du calcul des probabilités en classe de Terminale*. Dossier pédagogique FASTEF, Dakar.
Sambe A. (1993) *La problématique du calcul des probabilités dans le secondaire*. Dossier pédagogique FASTEF, Dakar.

ANNEXE 1 : PROGRAMME DE PROBABILITÉS DES TERMINALES S1 ET S3

Pour introduire la notion de probabilité, on s'appuiera essentiellement sur l'observation statistique dans des cas simples et les stabilités de fréquence qui s'en dégagent. À travers quelques expériences aléatoires simples, on introduira la notion d'espace probabilisé en donnant la définition axiomatique de la probabilité. On s'attachera en introduction à faire l'historique de la naissance des probabilités et à montrer leur importance actuelle dans pratiquement tous les secteurs de la vie moderne.

Contenus	Commentaires	Compétences exigibles
événements, événements élémentaires, événements incompatibles, événements contraires, réunion et intersection de deux événements, probabilité d'un événement, cas d'équiprobabilité, probabilité conditionnelle d'un événement par rapport à un événement de probabilité non nulle, indépendance de deux événements, formule des probabilités totales, probabilité produit, variables aléatoires, loi de probabilité, espérance mathématique, variance, écart-type, fonction de répartition, expériences successives : épreuve de Bernoulli, distribution binomiale.	On définira la probabilité d'un événement comme étant un réel de l'intervalle [0, 1] tel que : • la probabilité de l'événement certain Ω est 1, celle de l'événement impossible Ø est 0. • Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont deset événements deux à deux disjoints, la probabilité de l'événement $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ est la somme des probabilités de chacun des événements$A_1, A_2, \dots, A_n$. En particulier : la probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent. Formule des probabilités totales : étant donnés des événements $B_1, B_2, \dots, B_n$ constituant une partition de Ω, pour tout événement A, $p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(A \cap B_i)$	Utiliser dans la résolution des problèmes : • la probabilité d'un événement ou d'une réunion d'événements. • La probabilité conditionnelle d'un événement par rapport à un événement de probabilité non nulle. • La formule des probabilités totales. • L'indépendance de deux événements. • Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire. • Calculer l'espérance, la variance et l'écart type d'une variable aléatoire. • Déterminer et représenter la fonction de répartition d'une variable aléatoire. • Connaitre et utiliser la loi binomiale.

ANNEXE 2 : PROGRAMME DE PROBABILITÉS DES TERMINALES S2 ET S4

Les acquis de Première sur le dénombrement seront consolidés sous forme d'exercices variés tirés de situations réelles.

Les probabilités constituent un chapitre important dont les applications sont nombreuses (en médecine, économie, pharmacie). En conséquence, on veillera à rendre ce cours attrayant par le choix judicieux d'activités préparatoires et d'exercices. On veillera à faire ressortir le lien naturel entre les statistiques et les probabilités. Seul figure au programme le cas où l'ensemble des événements élémentaires est fini.

Contenus	**Commentaires**	**Compétences exigibles**
• Notion de probabilité. • Probabilité d'un événement. • Probabilité de l'événement contraire. • Probabilité de la réunion de deux événements incompatibles ou non. • Cas de l'équiprobabilité. • Probabilité conditionnelle • Événements indépendants. • Formule des probabilités totales. • Notion de variable aléatoire : définition, vocabulaire, notation $P(X = x)$ • Fonction de répartition $F(x) = P(X \leq x)$ • Espérance, variance, écart type d'une variable aléatoire • Loi binomiale	Le vocabulaire probabiliste (univers, événement, événement élémentaire…) sera introduit à partir d'épreuves aléatoires simples. On pourra traiter des problèmes tirés de la médecine (tests médicaux). Les variables aléatoires seront introduites à partir d'exemples. Exemple de schéma de Bernoulli. On introduit la loi binomiale sur un exemple d'épreuves répétées indépendantes.	• Connaître le vocabulaire probabiliste • Calculer la probabilité d'un événement • Connaitre et utiliser les formules des probabilités au programme • Calculer la probabilité conditionnelle d'un événement • Montrer que deux événements sont indépendants • Utiliser la formule des probabilités totales pour résoudre des problèmes • Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire • Calculer l'espérance, la variance et l'écart type d'une variable aléatoire • Déterminer et représenter la fonction de répartition d'une variable aléatoire • Connaitre la formule de la loi binomiale et l'utiliser pour résoudre des problèmes

ANNEXE 3 : QUESTIONNAIRE[2]

Q1) Existe-t-il des difficultés dans l'enseignement des probabilités ?

Oui ☐ Non ☐

Si oui, nous vous prions de bien vouloir répondre aux questions suivantes.

Q2) Ces difficultés sont-elles liées au problème de formation des professeurs de mathématiques? Pourquoi ?

Q3) Ces difficultés sont-elles liées au manque de manuels de référence? Pourquoi ?

Q4) Ces difficultés sont-elles liées à l'insuffisance du volume horaire ? Pourquoi ?

Q5) Ces difficultés sont-elles liées à la modélisation de la réalité ? Pourquoi ?

Q6) Introduisez-vous la notion de probabilité par l'approche fréquentiste ?

Oui ☐ Non ☐

Q7) Pensez-vous que cette approche soit à l'origine des difficultés rencontrées dans l'enseignement des probabilités ? Justifiez votre réponse.

Q8) Y a-t–il d'autres facteurs qui soient à l'origine des difficultés rencontrées dans l'enseignement des probabilités ? Si oui, lesquels ?

Q9) Les élèves rencontrent-ils des difficultés dans l'apprentissage des probabilités ?

Oui ☐ Non ☐

Si oui, nous vous prions de bien vouloir répondre aux questions suivantes.

Q10) Ces difficultés sont-elles dues au problème de langage ? Pourquoi ?

Q11) Ces difficultés sont-elles dues à l'incompréhension du vocabulaire ensembliste ? Pourquoi ?

Q12) Ces difficultés sont-elles dues au fait que les élèves ont du mal à modéliser la réalité ?

Q13) Ces difficultés sont-elles dues au fait que l'enseignement du calcul des probabilités est lié au dénombrement ? Pourquoi ?

Q14) Ces difficultés sont-elles liées au programme ? Pourquoi ?

Q15) Existe-t-il d'autres facteurs qui soient à l'origine des difficultés rencontrées dans l'apprentissage des probabilités ? Si oui, lesquels ?

[2] Par souci de gain de place, nous donnons ici le questionnaire sans les espaces pour répondre qui étaient inclus dans la version données aux enseignants.

L'UTILISATION DE LOGICIELS INFORMATIQUES DANS L'ENSEIGNEMENT ET L'APPRENTISSAGE DES MATHEMATIQUES

Hicham MAADAN*

Résumé – Le présent travail rentre dans le cadre du mémoire de fin de formation pédagogique à l'Ecole Normale Supérieure de Rabat (ENS) qui est une école de formation initiale pour enseignants du secondaire. Il a pour objectif la présentation de l'utilité de l'informatique dans l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques à travers la mise en évidence de l'influence des logiciels informatiques sur les mathématiques ainsi que sur la favorisation de son enseignement et son apprentissage. Apres l'élaboration d'une grille d'analyse de deux exerciseurs, en vue de les comparer du point de vue forme et fond, nous exposons leurs forces et leurs faiblesses afin de permettre une meilleure utilisation de cet outil.

Mots-clefs : mathématique, logiciel informatique, exerciseurs, apprentissage, enseignement

Abstract: – The present text represent the result of memory concerning the end of pedagogical formation at the teacher's high school in Rabat (ENS), which is a school of initial formation for teachers of the secondary. It has for objective the presentation of the utility of the computing in the learning and the teaching of mathematics through the description of the influence of the computer software on mathematics as well as on the favorisation of its teaching and learning. After the elaboration of a an analytical schedule of two exercisers, in order to compare them in terms of form and content, we expose their strenghts and weakness to allow a better use of this tool.

Keywords: mathematics, computer software, exercisers, learning, teaching

Apparue il y a une soixante d'années, l'informatique a connu et connait encore une évolution extrêmement rapide. A sa motivation initiale, qui était de faciliter et d'accélérer les calculs se sont ajoutées de nombreuses fonctionnalités comme l'automatisation, la commande et le contrôle ainsi que la communication et le partage de l'information.

Après avoir été un outil réservé aux centres de recherches, elle s'est implantée dans l'industrie, et depuis une dizaine d'années, elle envahit nos foyers et nos bureaux. Aujourd'hui, elle est omniprésente dans pratiquement tous les secteurs d'activités de la vie quotidienne, notamment dans les domaines de la gestion, de l'industrie, des sciences et techniques, des télécommunications, du multimédia et de l'éducation…

De plus, l'ordinateur permet, par sa puissance de calcul, d'aborder énormément d'objets mathématiques. Peu de domaines échappent ainsi à l'expérimentation sur machine, qui permet souvent d'aller un cran plus loin que le papier- crayon, et qui fournit également visualisations et animations. A titre d'exemples, on peut citer :

- Le traitement des données statistiques en vraie grandeur et le test d'exemples des phénomènes théoriques et la simulation d'autres qui sont trop couteux, trop longs ou impossibles à réaliser « à la main ».
- Les systèmes de calcul formel traitent des groupes finis, des anneaux de polynômes, des algèbres différentielles.
- En arithmétique, l'ordinateur permet de tester certaines conjectures, de calculer la position des zéros de Riemann, de trouver le pgcd de deux grands nombres, etc.

Par ailleurs, les Mathématiques constituent un domaine de connaissances abstraites construites à l'aide de raisonnements logiques sur des concepts tels que les nombres, les figures, les structures et les transformations. Les mathématiques désignent aussi le domaine de recherche visant à développer ces connaissances, ainsi que la discipline qui les enseigne.

* Ecole Normale Supérieure Takkaddoum Rabat – Maroc – hicham.maadan@gmail.com

© Maadan H. (2012) L'utilisation de logiciels informatiques dans l'enseignement et l'apprentissage des mathematiques. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (SPE1, pp. 1616–1622). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

Les mathématiques se distinguent ainsi des autres sciences par un rapport particulier au réel. Elles sont de nature essentiellement de nature intellectuelle, basées sur des axiomes déclarés vrais ou sur des postulats provisoirement admis. Bien que les résultats Mathématiques soient des vérités purement formelles, ils trouvent cependant des applications dans les autres sciences et dans différents domaines de la technique.

L'utilisation de l'outil informatique dans l'enseignement des mathématiques s'inscrit dans le champ des pratiques : travail en équipe, contenu commun,… Elle vise à développer chez l'élève, conjointement et progressivement les capacités d'expérimentation et de raisonnement, d'imagination et d'analyse critique à travers une démarche de résolution de problèmes, de modélisation des situations et d'apprentissage progressif de la démonstration ; les élèves peuvent prendre conscience de la pertinence des activités mathématiques, identifier un problème et l'expérimenter sur des exemples, conjecturer un résultat, mettre en forme une solution, contrôler les résultats obtenus et évaluer leur pertinence en fonction du problème étudié. Ainsi l'outil informatique est un outil de travail pour l'élève, qui peut permettre :

- Un auto-apprentissage (avec évaluation préalable, analyse de réponses, régulation correspondant à une véritable analyse didactique),
- Une auto-évaluation : production de documents, échanges par courrier électronique, production de sites, etc.
- Il permet en classe, une transformation profonde de la relation pédagogique (contrat pédagogique) enseignant-élève. Ainsi, par exemple, la projection d'un document pour l'ensemble de la classe rend possible un travail collectif grâce à un logiciel approprié (traitement de texte, tableur) et permet une médiation dans la relation duale enseignant-élève.

Par ses spécificités, l'outil informatique complète les moyens à la disposition des enseignants et des élèves, il permet notamment :

- d'obtenir rapidement une présentation d'un problème, d'un concept, afin de lui donner du sens et de favoriser son appropriation par l'élève.
- de relier différents aspects (algébriques, géométriques, …) d'un même concept ou d'une même situation.
- d'explorer des situations en faisant apparaitre de façon dynamique différentes configurations.
- d'émettre des conjectures à partir d'une expérimentation interactive lors de l'étude d'un problème comportant des questions ouvertes ou d'une certaine complexité, et de procéder à des premières vérifications.
- de procéder rapidement à la vérification de certains résultats obtenus.

De plus, On ne peut pas parler d'informatique sans parler des mathématiques car la naissance de l'informatique est basée sur les mathématiques, à travers deux courants principaux : l'algorithmique, qui formalise la notion de calcul, et la logique qui modélise la notion de démonstration, d'où l'influence mutuelle ente eux. Cet outil s'avère donc, un moyen incontournable pour mettre en œuvre une véritable activité mathématique, par une transformation profonde du contrat pédagogique (enseignant-élève).

L'utilisation de cet outil dans l'enseignement des mathématiques pour l'amélioration de l'apprentissage de cette discipline nécessite cependant. la qualification des enseignants, le savoir acquis de la part des élèves, l'adaptation des contenus mathématiques aux apprentissages. D'où, notre intérêt envers l'utilisation de l'informatique dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, que nous allons aborder à travers les questions suivantes :

- Quels logiciels utiliser et dans quelles conditions ?
- Dans quelle mesure l'outil informatique peut-il favoriser l'apprentissage des élèves en mathématiques ?
- Quels sont les avantages mais aussi les difficultés qui entravent l'utilisation de l'outil informatique dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques ?

I. QUELQUES LOGICIELS UTILISES POUR L'ETUDE DES MATHEMATIQUES

On peut classer les logiciels dédiés à l'enseignement et à l'apprentissage des maths selon trois catégories.

- Logiciels commerciaux : *Derive, Maple, Mathematica, Matlab*.
- Logiciels libres : *Maxima, Xcas*.
- Logiciels en ligne : *Euler, WIMS, Giac, Mathenpoche, MathemaTICE, Mathou matheux*.

1. Etude d'une grille d'analyse de deux Logiciels de type Exerciseurs

L'utilisation des logiciels en ligne se développe, avec sans nul doute un impact sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Parmi ces ressources, nous nous intéressons aux bases d'exercices d'accès libre, ce que l'on appelle les *exerciseurs* constituées d'exercices ou de problèmes, organisées selon un certain classement, avec pour chacune un environnement qui peut comporter des aides de différents types, des outils (graphiques, calculatrices …) mais aussi la solution, des exercices ou des problèmes, permettant aux élèves de s'entrainer et de se tester de façon autonome. Les plus performants d'entre eux comprenne une analyse des erreurs plus ou moins élaborée et proposent des outils d'aide ou de remédiation, ces *exerciseurs* peuvent opérer dans des domaines divers (calcul numérique ou littéral, géométrie dans l'espace, …) et fonctionner en ligne ou hors ligne.

Nous allons cerner notre étude sur quelques *exerciseurs* tels que : *Mathenpoche* et *Wims* en vue de mettre en lumière leurs rôles possibles dans le processus d'apprentissage et d'enseignement des mathématiques.

2. MATHENPOCHE

MATHENPOCHE (http://www.MATHENPOCHE.com) est un e*xerciseur* en ligne, c'est-à-dire un logiciel qui permet de réaliser des exercices de mathématiques au sein d'un navigateur internet.

Les caractéristiques de ce logiciel sont résumées dans le tableau suivant :

structure didactique	**Public visé** : collège, lycée
	Organisation didactique : des séries d'exercices sont programmées. En version réseau, l'enseignant programme lui-même sa liste d'exercices. Les questions des exercices sont à variables numériques aléatoires et à énonces variables. L'idée est que les élèves recommencent pour améliorer leur score.
	Types de réponses : brèves (expressions algébriques, valeurs numériques ou QCM).
	Feedback à chaque question : « bonne réponse » si c'est juste, « faux, tu as encore un essai » lors d'une première erreur, avec l'apparition de l'icône « aide », lors d'une deuxième erreur, « encore faux, regarde bien l'aide » avec la mauvaise réponse barrée, la bonne réponse et l'écran d'aide ouvert quelques fois des messages complémentaires (des apports d'information mathématique sont donnés à la suite d'une réponse correcte).
	Notation : chaque exercice comporte entre cinq et dix questions.
Structure logicielle	**Classification des exercices** : organisation arborescente par niveaux scolaires puis par thèmes mathématiques, puis par séries d'exercices correspondant chacun à un type de tâche mathématique
	Enregistrement des traces : pas de trace dans la version en ligne. Dans la version en réseau, les élèves ont accès à leurs résultats.
Contenu	**Connaissances mathématiques abordées** : tous les thèmes du collège, plus un lien collège-lycée
	Types de taches : variées entre applications directes des connaissances et problèmes plus complexes.
	Environnement des exercices : selon les exercices : calculatrice disponible, brouillon disponible, aide disponible et conseillée.

3. WIMS

WIMS (*Web Interactive Mathematics Server*) (www.WIMS.unice.fr): est un logiciel générant des exercices de mathématiques, qui permet la création de cours interactifs, d'outils mathématiques et d'exercices. Pour l'utiliser, il suffit de posséder d'une connexion internet et de se connecter à l'un des serveurs *Wims* disponible.

Les caractéristiques de ce logiciel sont résumées dans le tableau suivant :

Structure didactique	**Public visé** : école, collège mais principalement lycée et université.
	Organisation didactique : accès libre par thèmes ou bien feuilles de TD-WIMS préparées par l'enseignant dans une classe virtuelle. Les exercices sont programmés et donc à variables aléatoires, parfois la forme des énoncés change aussi.
	Types de réponses : brèves (expressions algébriques, valeurs numériques, QCM)
	Feedback à chaque question : *WIMS* annonce « juste » ou « faux » mais ne donne pas en général la méthode pour obtenir la bonne réponse
	Notation : note entre 0 et 10 à chaque essai ; l'élève peut refaire plusieurs fois chaque exercice pour augmenter sa note mais a aussi la possibilité sur les feuilles de TD-WIMS de s'entraîner « à blanc »
Structure logicielle	**Classification des exercices** : par thèmes et/ou par niveaux scolaires
	Interactivité cognitive : *WIMS* donne pour chaque essai « juste » ou « faux » et note les élèves entre 0 et 10
	Enregistrement des traces : journaux de traces des activités de chaque élève lorsqu'ils sont dans une classe virtuelle et recueil des notes.
Contenu	**Connaissances mathématiques abordés** : tous les thèmes du primaire à l'enseignement supérieur
	Types de tâches : des applications immédiates mais aussi de véritables problèmes qu'il est par exemple possible de construire en regroupant plusieurs exercices techniques sous un seul.
	Environnement des exercices : selon les exercices, quelques documents de cours accessibles, surtout des outils graphiques, calculatrices numériques, fonctionnelles… de rares aides pour quelques exercices

On peut dire que ces logiciels offrent un outil puissant mettant en jeu une grande variété de tâches mathématiques, dans les domaines différents, et dans des registres différents (langage naturel, tableau, graphique…). Parfois, ils permettent aussi d'engendrer de nouvelles activités de traitement impossible en classe, dans le domaine graphique et géométrique notamment, où il s'agit de développer les représentations mentales à l'aide de tests et simulations. Mais parfois, il arrive que certains thèmes présents dans le programme ne le soient pas dans la base de données du logiciel. D'où l'utilité de cibler les atouts et les inconvénients de ces logiciels.

II. AVANTAGES ET INCONVÉNIENTS DE L'UTILISATION DES LOGICIELS INFORMATIQUES DE TYPE *EXERCISEURS* DANS L'ENSEIGNEMENT ET L'APPRENTISSAGE DES MATHÉMATIQUES

Les logiciels informatiques évoqués ci-dessus s'avèrent donc, un moyen intéressant pour mettre en œuvre une véritable activité mathématique. En effet, ils permettent notamment :

- D’assurer des contenus rigoureux et progressifs, des exercices interactifs, riches et non répétitifs et d’y accéder facilement, voire de façon autonome pour les élèves.
- D’offrir des aides claires, souvent animées qui semblent en général, offrir un réel soutien aux élèves.
- Une plus grande disponibilité du professeur pour les élèves en difficulté est constatée, les élèves plus à l’aise travaillant en autonomie.
- La réalisation d’une approche différente des mathématiques ; les supports utilisés sont variés et participent au développement de l’autonomie des élèves.
- Une mise au travail des élèves plus rapide et permettant une plus grande concentration des élèves. De plus, les élèves perçoivent les exercices de mathématiques autrement, de façon ludique, tout en respectant un niveau de rigueur. Leur attitude face aux mathématiques évolue positivement.
- Aux élèves de reprendre plusieurs fois un exercice, ou de revenir plus tard sur certains.
- La possibilité de travail à la maison : les élèves reprennent chez eux les exercices travaillés en classe : Ce travail est efficace car ces logiciels ne répètent jamais les mêmes séries puisque les données sont choisies de manière aléatoire.
- La motivation et re-motivation, autonomie, autoévaluation.
- La progressivité des difficultés dans les séries traitées, ce qui constitue un réel atout de motivation pour l’élève en difficulté.
- Un suivi détaillé des difficultés des élèves.
- D’obtenir rapidement une représentation, d’un problème, d’un concept afin de lui donner un sens et ainsi favoriser son appropriation par l’élève.
- De relier différents cadres (algébrique, géométrique, …) d’un même concept ou d’une même situation.
- D’explorer des situations en faisant apparaitre de façon dynamique différentes configurations.
- De procéder rapidement à la vérification de certains résultats obtenus.
- Dépôts de documents (pdf, image, audio, etc…) par les enseignants.
- Création de classes individuelles (gestion indépendante par l’enseignant) ou de groupes de classes (permettant de mutualiser des groupes d’élèves).

L’intérêt de l’utilisation des logiciels informatique dans l’enseignement et l’apprentissage des mathématiques permet de joindre l’utile à l’agréable. En effet, ils améliorent les pratiques d’enseignement et d’apprentissage des mathématiques et suscitent la motivation de l’élève.

Cependant dans leur conception, certains *exerciseurs* peuvent influer négativement sur l’activité mathématique, et par suite risquent de nuire à l’apprentissage. Dans ces effets négatifs on peut citer :

- Les exercices sont le plus souvent proches d’applications immédiates avec parfois un caractère répétitif des questions. D’autres demandent au contraire plus de disponibilité de connaissances, avec des étapes intermédiaires à résoudre non annoncées ou des données inutiles.
- Les aides en ligne ne sont pas toujours très claires pour les élèves, parfois longue.
- Certains exercices imposent des méthodes de résolution parfois mal adaptées au niveau des élèves puisqu’elles peuvent faire appel à des notions encore inconnues ou bien non revues.
- L'usage des instruments de dessin génère parfois des difficultés considérables.
- Quelques logiciels ne permettent ni la correction, ni la saisie.
- Il y a un risque d’avoir d’erreurs parasites, et des problèmes de connexion internet.

- Ces logiciels nécessitent la maitrise de l'outil informatique.
- Certains logiciels exigent une bonne connaissance en programmation.
- Il y a un manque de formation chez les enseignants.

Ces logiciels constituent un outil important pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques : à nous de faire que cet outil profite aux élèves au lieu de leur nuire.

III. CONCLUSION ET RECOMMANDATIONS

L'utilisation des logiciels dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques s'inscrit dans le champ des pratiques innovantes (travail en groupe, diversité des référentiels et des contenus, …). Nous venons de voir que ces logiciels offrent des opportunités intéressantes d'exploration dans des situations variées pour l'enseignant et pour l'élève en l'amenant à réfléchir sur ce qu'il fait. Cependant, nous avons signalé un certain nombre d'obstacles qui peuvent entraver l'intégration efficace de ces logiciels comme. le degré de maitrise de l'outil informatique, la maintenance du matériel informatique, les facteurs liés à la gestion du temps et du contenu et le manque d'explication bien détaillée des logiciels. Les sources de ces difficultés sont le manque de formation des enseignants dans ce domaine, mais aussi le nombre insuffisant d'ordinateurs pour les élèves, voire pour les enseignants, le manque de temps (emploi du temps chargé), le manque d'intérêts et de volonté de la part des élèves ainsi que l'absence d'une véritable politique encourageant l'utilisation des logiciels d'apprentissage et d'enseignement des mathématiques.

Une réelle intégration de logiciels d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques nécessite donc un changement en profondeur des pratiques et des conceptions de tous les acteurs en présence. Sans oublier qu'il y a des situations qui ne nécessitent pas l'utilisation des ces logiciels.

LES VÉRIFICATIONS DANS LE CALCUL LITTÉRAL EN CLASSES DE QUATRIÈME ET DE SECONDE

Bénédicte MARGET* – Amélia RAMPP**

Résumé – La question de la gestion des erreurs dans les classes se pose à tout professeur au quotidien. Par exemple, en calcul littéral, nous nous sommes aperçues que beaucoup d'élèves ont des difficultés, en particulier avec la distributivité. Nous avons alors émis l'hypothèse que l'utilisation de processus de vérification pouvait être une perspective de remédiation de ces erreurs. Nous avons donc élaboré, en nous appuyant sur des résultats de recherche concernant les vérifications et l'algèbre, une typologie des processus de vérification qui pouvaient être mis en œuvre par des élèves de quatrième ou de seconde lors d'exercices portant sur la distributivité. Puis nous avons conçu une expérimentation visant à développer l'utilisation de ces processus de vérification.

Mots-clefs : processus de vérification, validation, vraisemblance, distributivité, erreurs

Abstract – Everyday teachers wonder how to deal with the students' mistakes. For instance, we notice that many students have difficulties in algebra, especially with distributivity. So we have suggested that maybe new forms of correction could fix these mistakes. By using the results of researches concerning verification and algebra, we have worked out a list of verification processes, which can be used by students of eight-ten grade (14-16 years old) when they are doing distributivity exercises. After that, we have done an experimentation in order to use these methods.

Keywords: verification processes, validation, plausibility distributivity, mistakes

La question de la gestion des erreurs dans les classes se pose à tout professeur au quotidien. Par exemple lorsque nous avons commencé à enseigner le calcul littéral, nous nous sommes rapidement aperçues que beaucoup d'élèves avaient des difficultés, en particulier avec la notion de distributivité. Nous avons alors émis l'hypothèse que l'utilisation de moyens de contrôle de ses résultats pourrait permettre à un élève de prendre conscience de ses erreurs, puis d'y remédier. C'est ainsi que nous avons orienté notre travail de recherche vers les vérifications dans le calcul littéral. Toutefois, les erreurs fréquemment observées portant sur la distributivité, nous avons centré notre travail sur cette notion. Nous avons donc élaboré, en nous appuyant sur des résultats de recherche concernant les vérifications et l'algèbre, une typologie des processus de vérification pouvant être mis en œuvre par des élèves de quatrième ou de seconde lors d'exercices utilisant la distributivité. Nous avons alors conçu et réalisé une expérimentation visant à favoriser l'utilisation par les élèves de ces processus de vérification.

Celle-ci s'est déroulée en trois temps : tout d'abord, une évaluation diagnostique, afin de voir si les élèves vérifiaient spontanément leurs résultats et quels moyens ils utilisaient, puis, lors de la phase de synthèse, nous avons institutionnalisé des processus de vérification que nous avons utilisés dans les exercices, et enfin, nous avons testé la mise en œuvre et l'impact de ces vérifications sur les apprentissages des élèves.

I. QUELQUES ELEMENTS THEORIQUES

1. *Qu'est-ce qu'une vérification ?*

Une analyse des définitions issues de différents dictionnaires nous a tout d'abord permis de constater que les termes « vérifier » et « vérification » font partie du langage courant à la différence des termes « valider » et « démontrer » qui sont définis relativement à un ou

* Collège Victoire Daubié, Bourg-en-Bresse – France – benedicte.marget@ ac-lyon.fr
** Collège Marc Seguin, Saint Etienne – France – amrampp@hotmail.com

© Marget B., Rampp A. (2012) Les vérifications dans le calcul littéral en classes de quatrième et de seconde. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (SPE1, pp. 1623–1638). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

plusieurs domaines. D'autre part, dans le sens courant, il arrive que les termes « valider » et « vérifier » apparaissent comme synonymes, puisqu'ils renvoient à la détermination de l'exactitude de quelque chose établie par une preuve.

Lorsqu'on se place dans notre domaine d'étude, c'est-à-dire l'enseignement des mathématiques, ces deux termes ont des significations distinctes. En effet, le problème sous-jacent à la vérification est le contrôle de la vraisemblance d'un résultat alors que celui de la validation est plutôt la recherche de preuve, donc de vérité d'une assertion. Une étude de différents travaux de didactique nous a permis de mettre en évidence que l'absence de vérification chez les élèves s'explique en partie par les effets de contrat didactique et que, lorsqu'elles sont mises en œuvre, les vérifications sont davantage liées à la vraisemblance qu'à la vérité, qu'elles se développent à partir d'un doute de l'élève à la suite d'un résultat identifié, et qu'elles peuvent éventuellement déboucher sur une phase de rectification. Enfin si on peut penser que les élèves ne vérifient pas, c'est parce que ces vérifications font partie du travail privé de l'élève et ne sont donc pas données à voir au professeur (Coppé 1993). Nous reprenons, la définition du terme « vérification » donnée par Coppé (1993) :

> Dans une situation de résolution de problème, pour une question, un élève a identifié un résultat partiel ou final et il se pose la question de la validité de son résultat. Nous appellerons vérification tout argument avancé ou toute action mise en œuvre par l'élève pour limiter l'incertitude sur le résultat, si l'élève en a besoin, à ce moment-là et dans cette situation. Une vérification a pour conséquence, soit d'accroître la vraisemblance et éventuellement d'acquérir la certitude du résultat, soit d'engendrer un doute plus grand et éventuellement de déboucher sur une phase de rectification.

On entend ainsi qu'un processus de vérification est un processus de contrôle permettant à un sujet de déterminer si une tâche est achevée, si un résultat est acceptable, visant à accroître la vraisemblance voire la certitude alors qu'un processus de validation renvoie plutôt au processus de preuve et vise à établir la vérité d'une affirmation, d'un résultat ou d'un raisonnement. La première notion relève de la cohérence interne vis-à-vis des connaissances de l'élève, tandis que la seconde notion relève plutôt de la cohérence interne des savoirs mathématiques. Ainsi, la vérification est de l'ordre de la conviction personnelle alors que la validation relève plutôt de l'ordre de la convention sociale, dans le sens où la preuve a pour but d'établir la vérité par un moyen socialement reconnu. On peut toutefois noter que cette distinction n'est pas forcément faite par l'élève.

D'autre part, nous avons aussi retenu l'importance de la situation dans laquelle se trouve l'élève et de l'évaluation qu'il fait des enjeux de la vérification, en particulier en temps limité, ce qui est souligné par Balacheff (1988) :

> Lorsque j'achète un livre et que le libraire me rend vingt pence de monnaie, je suis « tout à fait certain » que les deux pièces ne sont pas des contrefaçons [...]. Si quelqu'un me demandait « êtes-vous certain que la pièce dans votre main est une pièce de dix pence? », je lui jetterais peut-être un nouveau coup d'œil et dirais « oui ». Mais si quelque chose d'important dépendait de la vérité de mon jugement, je pense que je prendrais la peine de me rendre dans la banque la plus proche et de demander au caissier d'examiner la pièce ; et si la vie d'un homme en dépendait, j'essayerais même de voir le chef cashier de la banque d'Angleterre, et je lui demanderais de certifier l'authenticité de la pièce.

Nous voyons donc que la mise en œuvre de processus de vérification ou le problème de la vraisemblance ou celui de la réduction du doute, va dépendre fortement des enjeux de la situation et donc de l'analyse qu'en fait l'élève : il va évaluer rapidement l'intérêt qu'il a à faire une vérification et même dans certains cas, laquelle. De ce fait, nous constatons qu'il y a non seulement des enjeux, mais aussi des degrés dans les vérifications : certaines seront simples et rapides mais d'autres pourraient être plus longues, plus complexes et nécessitant des connaissances mathématiques plus élaborées. C'est pourquoi il est important d'étudier les différents objets sur lesquels peuvent porter les processus de vérification.

2. *Sur quoi porte-t-elle ?*

Prenons un exemple dans le cas de la factorisation d'une expression littérale.

Le premier objet sur lequel peut porter la vérification est le résultat. Par exemple, après avoir factorisé, l'élève pourrait développer l'expression obtenue et la comparer à celle de départ ou bien remplacer la variable par un nombre.

Le deuxième est le procédé, la méthode de résolution. Par exemple, pour vérifier qu'il a bien factorisé, l'élève pourrait vérifier chacune des étapes de sa transformation. Ainsi il contrôlerait pas à pas son procédé de factorisation. Ces premiers objets renvoient plutôt à l'aspect technique dans la mesure où l'élève refait le calcul soit de la même manière, soit d'une manière un peu différente mais sans changer de cadre.

Le troisième objet sur lequel peuvent porter les vérifications sont les critères qui ont permis de déterminer le choix de la méthode. Par exemple, après avoir factorisé, l'élève peut vérifier que les conditions d'application de la procédure qu'il a choisie étaient réunies. Par exemple, il peut contrôler si le facteur commun était apparent ou s'il était caché (ce qui est le cas dans l'exemple suivant : $(x+1)(x-2)-x-1$), afin de déterminer si la méthode choisie était la bonne. Cet objet renvoie au contrat didactique dans la mesure où l'élève va choisir sa méthode de résolution parmi celles qu'il aura abordées en classe, mais implique qu'il ait compris ces différentes méthodes.

Enfin, le dernier objet est l'adéquation question/réponse. Par exemple pour vérifier sa factorisation, l'élève regarderait si l'expression obtenue est bien un produit. Cette vérification porte donc sur l'aspect structural de l'expression algébrique dont nous parlerons plus loin.

On voit donc que les vérifications peuvent porter sur différents objets et avoir lieu à différents moments de la résolution. Cette analyse des différents objets sur lesquels portent les vérifications nous amène à proposer une typologie des vérifications.

3. *Typologie des vérifications*

Nous reprenons rapidement la classification des vérifications de Coppé (1993) qui distinguait tout d'abord deux catégories en fonction du caractère plus ou moins mathématique des savoirs en jeu. Les vérifications de type interne qui reposent sur des connaissances et des savoir-faire mathématiques (comme dans l'exemple ci-dessus) et les vérifications de type externe, qui ne font pas vraiment appel aux connaissances mathématiques mises en jeu mais plutôt à l'expérience de l'élève ou au contrat didactique.

> Nous appellerons processus de vérification interne tout processus de vérification mettant en jeu des savoirs ou des savoir-faire typiquement mathématiques, ne dépendant pas nécessairement de la situation dans laquelle on les utilise. Ces processus sont davantage utilisés par les experts surtout s'ils nécessitent des connaissances mathématiques non triviales. Enfin, certains processus peuvent être longs et prendre du temps.

Elle cite les vérifications techniques (VI 1), les vérifications par condition nécessaire et pas suffisante (VI2), les vérifications par essais (VI 3), les vérifications par changement de cadre (VI 4) et les vérification par analogie avec un autre problème (VI 5).

> Les autres processus qui utilisent des connaissances portant sur d'autres savoirs ou savoir-faire moins mathématiques (notamment ceux qui utilisent la logique du problème mais qui dépendent davantage du contrat) seront appelés des vérifications de type externe. Ces processus ont la propriété d'être généralisables à tous les problèmes ou à des classes de problèmes très étendues, par exemple les problèmes de géométrie plane ou les problèmes d'analyse. Certains peuvent être courts et/ou se limiter à des arguments simples.

Elle cite les vérifications faisant référence au contrat didactique (VE1), au texte de l'exercice (VE2), à une certaine connaissance de la réalité (VE3) à la mémoire du savoir enseigné (VE4) et par analogie de certitude (VE5).

Avant de préciser davantage les types de vérification rencontrés dans notre domaine d'étude, nous allons nous intéresser au statut de l'algèbre ainsi qu'à sa place dans l'institution scolaire.

II. LA DISTRIBUTIVITE, LE CALCUL LITTERAL

Voici une définition de la distributivité du point de vue du savoir savant (d'après La bibliothèque des mathématiques en ligne bibm@th[1]) :

> Une opération notée multiplicativement (×) se distribue sur une opération notée additivement (+) si, quels que soient les nombres a, b et c, on a : $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$.
> Par exemple, la multiplication est distributive par rapport à l'addition sur l'ensemble des nombres réels.
> La factorisation est la démarche qui consiste, dans une somme de termes qui sont des produits, à repérer ce qu'on appelle un facteur commun, c'est à dire un terme commun dans chaque produit. On utilise alors la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition pour exprimer l'expression sous la forme d'un produit. Par exemple, dans l'expression : $(x-7)(2x+1)-(x-7)(x+3)$ le facteur $(x-7)$ est commun à ces deux produits. On le met en facteur, pour obtenir : $(x-7)[(2x+1)-(x+3)] = (x-7)(x-2)$ ».

1. Analyse des programmes

En France, la distributivité est introduite, pour la première fois, en classe de cinquième (élèves de 12-13 ans). Les élèves commencent juste à manipuler les lettres mais aucune compétence en termes de travail sur des expressions littérales n'est exigible. On peut constater que la notion de « test pour des valeurs » est au programme mais en lien avec l'approche des équations et non avec la vérification d'une expression littérale distribuée ou factorisée. Le terme « tester » apparaît donc mais il n'est pas précisé si cette action est liée ou non à une vérification.

Dans les programmes de quatrième et troisième, aucune référence n'est faite à la vérification ; à aucun moment, le terme ou la tâche « vérifier » ne sont mentionnés. L'institution scolaire ne demande donc pas explicitement aux élèves d'être capables de vérifier un résultat.

Dans le programme de seconde, l'accent est mis sur le fait d'utiliser simultanément différents registres (graphique, numérique, algébrique, géométrique). Ainsi, en changeant de registre, on peut vérifier un résultat trouvé.

Nous avons donc constaté que les vérifications étaient peu présentes dans les programmes du collège et que seules les vérifications par changement de cadres étaient mises en avant dans les programmes de seconde.

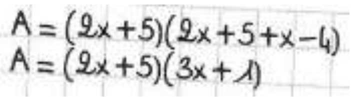
2. Analyse des manuels scolaires

Nous avons étudié cinq manuels de quatrième, deux manuels de troisième et trois manuels de seconde. On peut constater que les vérifications sont peu présentes. Nous avons seulement trouvé les types suivants : VI 1, VI 2, VI 3, VI 4 et VE 4. Par exemple, dans le manuel de seconde suivant (Hyperbole, 2009), voici ce qui pourrait constituer une vérification de type VI 3, mais le terme n'est pas employé :

[1] http://www.bibmath.net/

On considère l'expression algébrique suivante : $A = (2x + 5)^2 + (2x + 5)(x - 4) + 2x + 5$.

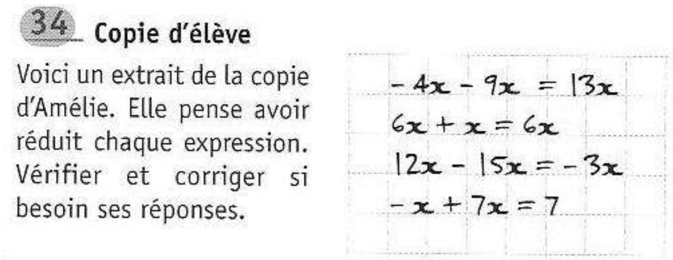
Hervé doit factoriser A. Voici sa copie :



Tester l'égalité obtenue par Hervé pour $x = 0$. Que peut-on en conclure ?

Figure 1 *– Exercice du manuel « Hyperbole » (2009)*

De façon plus générale, nous avons remarqué que certains manuels proposaient des exercices intitulés « copie d'élève ». Ce sont des tâches à erreur qui incitent les élèves à vérifier les résultats d'autres personnes. Ici le terme « vérifier » est explicitement employé.



34 **Copie d'élève**

Voici un extrait de la copie d'Amélie. Elle pense avoir réduit chaque expression. Vérifier et corriger si besoin ses réponses.

$-4x - 9x = 13x$
$6x + x = 6x$
$12x - 15x = -3x$
$-x + 7x = 7$

Figure 2 *– Exercice du manuel « Maths 4ème » Bréal(2007)*

A partir de ces deux exercices, on peut penser que les auteurs des manuels n'emploient pas les termes « tester » et « vérifier » comme synonymes. En effet, dans le second exercice, ils emploient le terme « vérifier » selon le sens courant puisque l'élève doit s'assurer de l'exactitude de la réponse d'Amélie et, dans le cas contraire, la corriger, alors que dans le premier exercice, on demande à l'élève de « tester » le résultat d'Hervé pour une valeur numérique donnée, et ce qu'il peut en conclure. Pour nous, cet exercice propose à l'élève de vérifier, au sens de la définition retenue pour notre étude, en lui donnant une méthode : la vérification par essais, VI 3, mais cela n'est pas explicite pour l'élève qui peut considérer cela comme une tâche isolée. Ainsi, le terme « tester », nous semble-t-il, est utilisé dans ce manuel pour faire référence au processus de vérification de type VI 3, alors que le terme « vérifier » est utilisé selon le sens courant.

3. Classification des processus de vérifications

Grâce à l'analyse des programmes et des manuels, nous avons créé une typologie des processus de vérification liés au calcul littéral.

PV 1 : Reprise étape par étape des calculs

PV 2 : Transformation d'expressions afin de les comparer

Par exemple, si la consigne est de factoriser l'expression $E = 15 - 3x$, l'élève peut développer et réduire l'expression $E = 3(5 - x)$ qu'il a obtenue et vérifier qu'elle est égale à celle de l'énoncé. Il est parfois nécessaire, pour les comparer, de développer et réduire l'expression de départ comme dans l'exemple suivant : $(x - 1)^2 - 16$ se factorise en $(x - 5)(x + 3)$, il faut donc développer et réduire les expressions initiale et finale pour les comparer : $(x - 1)^2 - 16 = x^2 - 2x - 15$ et $(x - 5)(x + 3) = x^2 - 2x - 15$.

PV 3 : Vérification du terme constant et du terme de plus haut degré.

Par exemple, dans l'expression $(x-2)(3x+4)$, le produit des coefficients des termes en x est égal à 3 et le produit des termes constants est égal à -8 , ce qui correspond bien au coefficient devant le terme de plus haut degré et au terme constant de l'expression $3x^2-2x-8$.

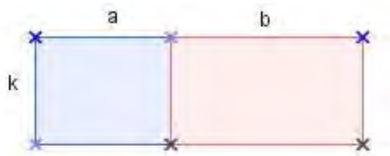
PV 4 : Vérification de la forme de l'expression obtenue ainsi que du nombre de termes
Dans les manuels scolaires, on trouve les définitions suivantes : « Développer, c'est transformer un produit en une somme » et « Factoriser, c'est transformer une somme en un produit ». Dans le cas d'un développement, il s'agit de vérifier que l'expression que l'on vient de développer (avant réduction) est bien une somme de deux termes dans le cas de la simple distributivité, et de quatre termes dans le cas de la double distributivité. Par exemple, l'expression $2x(x-1)$ se développe en $2x^2-2x$, qui est bien une somme de deux termes.

PV 5 : Test avec des valeurs numériques

PV 6 : Test de (n+1) valeurs dans des polynômes de degré n
Pour vérifier qu'une expression est bien factorisée, le mathématicien peut utiliser la propriété suivante : « Deux polynômes de degré n sont égaux s'ils sont égaux pour n+1 valeurs numériques distinctes ». Par exemple, les expressions $5(x+2)$ et $5x+10$ sont de même degré et sont égales à 10 pour $x=0$ et à -5 pour $x=-3$, on peut donc en déduire l'identité suivante : $5(x+2)=5x+10$.

PV 7 : Utilisation de l'aire des rectangles

Afin de vérifier le développement ou la factorisation d'une expression littérale utilisant la simple ou double distributivité, l'élève pourra s'aider du cadre géométrique. En effet, à l'aide de calculs d'aire de rectangles, il est possible de retrouver l'identité de simple et de double distributivité, comme par exemple.



$$k(a+b)=ka+kb$$

PV 8 : Utilisation de la calculatrice graphique
L'utilisation de la calculatrice permet à l'élève de tracer la courbe représentant l'expression de départ et celle représentant l'expression d'arrivée. Ainsi, il peut vérifier que son résultat est correct en comparant ces deux courbes (bien sûr, sur une fenêtre graphique limitée).

PV 9 : Vérification par multiplication posée
Il s'agit de vérifier un développement en posant la multiplication.

Cette classification, ainsi qu'une étude des situations propices à la mise en œuvre de processus de vérification, nous ont permis de construire une expérimentation que nous allons désormais présenter.

III. EXPERIMENTATION

Celle-ci a été conçue en trois temps et avec différents types de questions.

1. *Présentation de l'expérimentation*

Tout d'abord nous avons proposé une évaluation diagnostique (cf. annexe A), pour déterminer si les élèves utilisent des moyens de vérification et lesquels, composée de deux parties : la première place les élèves en situation de résolution d'exercices et leur demande leur degré de certitude, la seconde est un questionnaire d'ordre général qui permet d'évaluer le rapport des élèves à la vérification. Chaque élève répondait individuellement en laissant les traces de sa recherche, et des éventuelles vérifications et rectifications qu'il pouvait faire.

Dans un second temps, nous avons choisi d'institutionnaliser certains processus de vérification afin de donner des moyens de contrôle aux élèves (cf. annexe B). Ceci a été fait lors d'une phase de synthèse en classe, après avoir corrigé les exercices du test diagnostique, et organisé un débat au sujet des vérifications. En classe de quatrième, quatre processus de vérification (PV 1 ou PV 2 selon la classe, PV 4, PV 5 et PV 7) ont finalement été institutionnalisés puis réinvestis dans les exercices de calcul littéral. En classe de 2^{nde} la progression ne permettait pas cette institutionnalisation.

Enfin, nous avons donné une évaluation finale composée de quatre parties (cf. annexe C) dans le but de répondre aux questions suivantes : est-ce que les élèves mobilisent spontanément les processus de vérification dans des exercices de calcul littéral ? Quels sont les procédés de vérification qu'ils ont retenus ? Est-ce que le fait d'avoir à disposition des moyens de vérification les aide à mieux appréhender et conceptualiser la notion de distributivité ?

Dans la première partie, nous avons proposé des exercices de développement et réduction sans induire de vérification dans la consigne. Dans la deuxième partie, nous avons proposé le même type d'exercices en demandant, cette fois-ci, de préciser le degré de certitude. Nous voulions voir si les élèves pensaient à mobiliser des processus de vérification dans le but d'augmenter leur certitude et dans ce cas, quels procédés ils utilisaient. Dans la troisième partie, nous demandions aux élèves si des réponses d'élèves fictives étaient correctes, puis de corriger celles qui ne l'étaient pas. Nous avons donc induit fortement l'utilisation de processus de vérification dans le but d'observer ceux que les élèves savent mobiliser, mais aussi les conclusions, correctes ou non, qu'ils savent en tirer.

Enfin, nous avons élaboré une dernière partie, sous forme de questionnaire plus général, dans le but de répondre aux deux dernières questions.

Nous allons maintenant décrire les différentes conclusions que nous pouvons tirer des analyses a posteriori de ces différentes phases et voir si elles correspondent à ce que nous avions prévu dans l'analyse a priori (que nous ne donnerons pas ici).

2. *Résultats sur l'évaluation diagnostique et le questionnaire*

Tout d'abord, nous pouvons retenir de la partie « exercices » de l'évaluation diagnostique, que les élèves de quatrième ne sont globalement pas sûrs d'eux lorsqu'ils résolvent des exercices de calcul littéral, mais qu'ils mobilisent très peu de processus de vérification, contrairement à ce que nous avions prévu. Ils mobilisent essentiellement PV 2 et PV 5. Nous pensons que les élèves ont tenté de répondre, par effet de contrat didactique, mais qu'ils n'étaient globalement pas sûrs d'eux, comme le précise l'élève EC-B : « *Je n'ai pas compris ce qui était demandé* » ou encore CV-F : « *je n'ai pas fait* ». Nous pouvons expliquer le fait qu'ils ne mettent pas en œuvre de processus de vérification par leur difficulté à produire une réponse, qu'ils ne veulent donc pas remettre en cause, ou par manque de connaissances.

En classe de seconde, les élèves ont mobilisé un champ de vérification plus large : trois types de vérifications externes VE 1, VE 2 et VE 4 et quatre types de vérifications internes PV 1, PV 2, PV 4 et PV 5 sont apparus. Nous pouvons expliquer cette différence par le recul qu'ont les élèves de seconde sur l'algèbre, contrairement aux élèves de quatrième qui débutent dans ce domaine. Comme nous avons vu dans la partie théorique, les processus de vérification que les élèves peuvent mettre en œuvre pour augmenter leur degré de certitude nécessitent certaines connaissances des notions mathématiques en jeu.

A l'opposé, nous avons observé que certains élèves sont sûrs d'eux mais pour différentes raisons : la plupart des élèves de quatrième sont sûrs que leur réponse est fausse alors qu'un nombre important d'élèves de seconde n'a pas conscience de ses erreurs. Dans les deux cas, les élèves ne ressentent pas le besoin de réduire le doute, puisqu'ils n'en ont pas, et n'ont donc aucun intérêt à mettre en œuvre des processus de vérification pour réduire le doute. Toutefois, nous avons été surprises de constater qu'au moins la moitié des élèves sûrs de leurs réponses n'avaient pas laissé de traces de vérification. Pour ces élèves, ce ne serait donc pas la vérification qui contribuerait à augmenter la certitude. Cependant, nous émettons quelques réserves car nous sommes conscientes que certains élèves n'ont pas retranscrit sur papier tout le travail et les réflexions qu'ils ont pu faire dans leur tête. En particulier, les vérifications de type externe ou les vérifications de type PV 4 basées uniquement sur la perception de la forme (on a bien un produit de facteurs, ou une expression sans parenthèses) sont peut-être plus difficilement transposables sur papier car elles peuvent relever du subjectif et certains élèves n'ont peut-être pas « osé » les écrire.

Mais le résultat le plus frappant est le fait qu'une grande partie des élèves qui ne sont pas sûrs de leur réponse ne mobilisent pas de procédés de vérification, contrairement à ce que nous attendions. C'est comme si les élèves étaient capables de vérifier uniquement dans le cas d'expressions simples, car certains procédés sont faciles à mettre en œuvre.

D'autre part, comme nous nous y attendions, les élèves ont beaucoup de difficultés à utiliser PV5 correctement car pour cela, les notions sous-jacentes, comme le statut de la lettre, du signe égal ou d'identité doivent être assimilées. Comme nous l'avions vu dans la partie théorique, la conceptualisation des notions en jeu et l'utilisation bénéfique des vérifications sont intimement liées.

Enfin, la partie « questionnaire » de l'évaluation diagnostique a montré que la situation dans laquelle se trouve l'élève a un impact important sur la mise en œuvre de processus de vérification. En effet, il ressort que les élèves vérifient leur résultat lors de devoirs surveillés pour s'assurer que leur réponse est correcte. Cela s'explique par la volonté d'avoir une bonne note, et donc par des effets de contrat didactique. Cependant, lors d'exercices, ils ne vérifient pas leur résultat par manque de temps, de moyens et surtout parce qu'ils n'en ressentent pas le besoin, alors que la majorité des élèves pensent que c'est important pour eux.

Intéressons-nous maintenant aux résultats de l'évaluation finale pour pouvoir appréhender l'impact de l'institutionnalisation des vérifications auprès des élèves.

3. *Résultats sur l'évaluation finale*

Nous pouvons noter que des progrès importants ont été réalisés par les élèves après le test diagnostique concernant la distributivité. Nous pouvons supposer que l'enseignement des processus de vérification semble y avoir contribué. De plus, on peut penser que cela les a aidé à prendre confiance en eux. Même si l'évaluation finale a permis de mettre en évidence essentiellement l'utilisation des processus VE 4 et PV 5, puis des processus PV 2 et PV 1, peu d'élèves mobilisent spontanément des processus de vérification dans les exercices de calcul littéral. Toutefois, nous avons remarqué que, d'une part, contrairement à l'utilisation de VE 4, peu d'élèves ayant utilisé le processus PV 5 ont donné une réponse erronée, et d'autre part, l'utilisation de PV 2 était rarement vue comme un processus de vérification par les élèves. Enfin, comme prévu dans l'analyse a priori, les élèves n'ont pas eu la même faculté à intégrer les différentes méthodes de vérification. Quant à l'aide qu'a pu apporter le fait de les enseigner, les réponses ont été partagées, car comme nous l'avons constaté dans l'évaluation diagnostique, le bienfait des vérifications est intimement lié à la représentation et au degré de conceptualisation, suffisant ou non, qu'a l'élève des notions en jeu. Toutefois, l'évaluation finale a permis de mettre en avant l'aspect positif de la vérification, à savoir la réduction du doute.

IV. CONCLUSION

Nous avons étudié la place et l'impact que peuvent avoir les vérifications dans l'apprentissage des élèves. Nous pensions que vérifier pouvait être un moyen pour les élèves, de surmonter leurs difficultés. Nous avons testé notre hypothèse dans le domaine de l'algèbre, et plus particulièrement sur la distributivité. Nous pouvons retenir de cette expérimentation que la vérification peut aider à mieux conceptualiser les notions mathématiques en jeu, à condition qu'elle ne soit pas enseignée de manière théorique et obligatoire. Il est important que chaque élève se l'approprie lorsque sa conceptualisation est suffisamment avancée, c'est-à-dire à un moment propre à lui, sinon les vérifications peuvent freiner ses apprentissages à cause d'une surcharge cognitive, comme nous l'avons constaté sur certains élèves de quatrième. D'autre part, nous retenons la difficulté méthodologique à avoir accès au travail privé même si l'évaluation diagnostique leur a permis de se familiariser avec le type de questionnaire proposé, et nous a ainsi permis d'entrevoir une partie de leur travail privé. Enfin, nous regrettons ne pas avoir observé plus souvent la rectification de leur réponse après avoir vérifié. Ceci témoigne également du fait que la conceptualisation des notions en jeu est essentielle pour mobiliser et tirer profit des processus de vérification.

Cette étude a été particulièrement enrichissante dans la mesure où elle nous a permis de réfléchir sur nos pratiques enseignantes. En effet, l'étude théorique du statut de l'algèbre nous a montré les obstacles que les élèves doivent surmonter lors de l'introduction de l'algèbre, et l'étude des différentes définitions des termes « vérifier » et « vérification » ainsi que la typologie des processus de vérification établie nous ont permis de réfléchir et de nous interroger sur des méthodes de remédiation. Enfin, nous avons trouvé très intéressant de se pencher sur le travail privé de l'élève et sur son ressentiment face à ses réponses car ces temps d'échanges ne sont pas prévus officiellement dans l'institution scolaire.

A l'avenir, dans nos pratiques professionnelles, nous serons encore confrontées à des erreurs dans les calculs littéraux. Même si les vérifications peuvent être un obstacle supplémentaire pour certains élèves, nous pensons qu'en leur donnant du sens et en les institutionnalisant plus systématiquement, elles peuvent devenir un outil de remédiation et d'auto-évaluation pour l'élève, augmentant ainsi leur confiance.

REFERENCES

Balacheff N. (1988) Processus de preuve et situations de validation. *Educational studies in mathematics* 18(2), 147-176.

Brousseau G. (1986) Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématique*, 7(2), 33-115.

Chevallard Y. (1985) *La transposition didactique – Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble : La Pensée Sauvage Editions, deuxième édition augmentée, 1991.

Chevallard Y. (1988) Sur l'analyse didactique. Deux études sur les notions de contrat et de situation. *IREM d'Aix Marseille* 14.

Coppé S. (1993) *Processus de vérification en mathématiques chez les élèves de première scientifique en situation de devoir surveillé*. Thèse de Doctorat, Université Claude Bernard Lyon 1.

Douady R. (1984) Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques* 7.2, 5-31.

Petit Larousse en couleurs (1991).

Petit robert (1989) *Les dictionnaires LE ROBERT*.

Manuel Hyperbole 2nde (2009). Editions Nathan.

Manuel Mathématiques 4ème (2007). Editions Breal.

SITOGRAPHIE

L'algèbre au collège et en classe de seconde, Les vérifications, http://web.lyon.iufm.fr/UCDmath/algebre/outils_prof/verifF.htm). Document issu d'un site internet consacré à l'enseignement de l'algèbre au collège et en classe de seconde réalisé par un groupe de travail (constitué de Sylvie COPPE, Serge BETTON et de professeurs de mathématiques).

http://media.education.gouv.fr/file/special_6/52/5/Programme_math_33525.pdf . Programme de mathématiques du collège.

http://media.eduscol.education.fr/file/Programmes/17/3/du_numerique_au_litteral_109173.pdf. Document d'accompagnement du collège sur le thème : Du numérique au littéral.

http://media.eduscol.education.fr/file/Programmes/18/1/Doc_ressource_fonctions_109181.pdf Document d'accompagnement du lycée sur le thème des fonctions

http://media.education.gouv.fr/file/30/52/3/programme_mathematiques_seconde_65523.pdf Programme de mathématiques de la classe de seconde.

La bibliothèque des mathématiques, Le dictionnaire, http://www.bibmath.net/dico/index.php3?action=affiche&quoi=./d/distributif.html

ANNEXE A :
EVALUATION DIAGNOSTIQUE

Nom : **Prénom :**

Consigne : Ce questionnaire ne sera pas noté. Les correcteurs blancs et les effaceurs sont interdits (barrer proprement en cas d'erreur). Les calculatrices sont autorisées mais il faut écrire sur cette feuille tous les calculs effectués avec.

I. Exercices (Classe de quatrième) :

1. a) Développe l'expression suivante : $6 \times (4 + x)$.

Es-tu sûr/e de ta réponse ? Donne une note de 1 (pas du tout sûr/e) à 5 (sûr/e de toi) qui exprime ton degré de certitude sur ta réponse. **Expliquer pourquoi.**

b) Développe l'expression suivante : $-5(3 - 2x)$.

Es-tu sûr de ta réponse ? Donne une note de 1 (pas du tout sûr) à 5 (sûr de toi) qui exprime ton degré de certitude sur ta réponse. **Expliquer pourquoi.**

2. a) Réduire l'expression suivante : $8x - 3x$.

Es-tu sûr de ta réponse ? Donne une note de 1 (pas du tout sûr) à 5 (sûr de toi) qui exprime ton degré de certitude sur ta réponse. **Expliquer pourquoi.**

b) Réduire l'expression suivante : $x - 2 - 5x$.

Es-tu sûr de ta réponse ? Donne une note de 1 (pas du tout sûr) à 5 (sûr de toi) qui exprime ton degré de certitude sur ta réponse. **Expliquer pourquoi.**

3. Lors d'un devoir, les élèves de 5A ont eu à factoriser l'expression suivante : $12 - 3x$.

Voici les réponses de plusieurs élèves :

Hugo : $3(4 - x)$	Alice : $3(12 - x)$
Mehdi : $9x$	Selim : $(4 - x) \times 3$
Yasmine : $3(-x + 4)$	

Qui a répondu correctement ? Comment fais-tu pour le savoir ?

I. Exercices (Classe de seconde) :

1. a) Développe l'expression : $(x+3)(x-2)$

   Es-tu sûr de ta réponse ? Mets une note de 1 (pas du tout sûr) à 5 (sûr de vous) qui exprime ton degré de certitude sur la réponse que tu as donnée. **Explique pourquoi.**

Brouillon	Réponse :

   b) Développe l'expression : $5x-(2x+4)(3x-2)$

   Es-tu sûr de ta réponse ? Mets une note de 1 (pas du tout sûr) à 5 (sûr de vous) qui exprime ton degré de certitude sur la réponse que tu as donnée. **Explique pourquoi.**

2. a) Factorise : x^2-7.

   Es-tu sûr de ta réponse ? Mets une note de 1 (pas du tout sûr) à 5 (sûr de vous) qui

   exprime ton degré de certitude sur la réponse que tu as donnée. **Explique pourquoi.**

   b) Factorise l'expression : $(x+1)(3x+5)-x-1$

   Es-tu sûr de ta réponse ? Mets une note de 1 (pas du tout sûr) à 5 (sûr de vous) qui

   exprime ton degré de certitude sur la réponse que tu as donnée. **Explique pourquoi.**

3. Au brevet, Ryan, Lina et Téo ont eu à développer puis factoriser une expression. Ils ont notés sur un brouillon leur réponse :
   Ryan :
   a) $E = 15x^2 + 4x - 4$
   b) $E = (5x-2)(3x-6)$

   Lina :
   a) $E = 8x^2 + 4x - 4$
   b) $E = (5x-2)(3x+2)$

   Téo :
   a) $E = 15x^2 + 4x - 4$
   b) $E = (5x-2)(3x+2)$

   Nassim, en lisant les brouillons dit immédiatement à Ryan et Lina : « Vous avez certainement fait une erreur ». Comment Nassim s'y est pris ? Le résultat de Téo est-il juste ou faux??Propose au moins deux méthodes différentes.

Nom : **Prénom :**

II. **Ton avis :**

1. Lorsque tu résous un problème ou un exercice de calcul littéral, est-il important pour toi de vérifier ton résultat ? Pourquoi ?

En devoir surveillé, est-ce que tu vérifies ton résultat ? (entoure la réponse)

Oui	Non

Si oui, tu le fais : (entoure ta réponse)

Dans ta tête	Au brouillon	Sur ton cahier (ou ta copie)	A la calculatrice
Autres (à préciser) :			

Si non, pour quelles raisons ? (entoure la réponse)

Je n'ai pas le temps	Je ne sais pas comment faire	Ce n'est pas à moi de vérifier	Je n'en ressens pas le besoin
Autres (à préciser) :			

Pour les exercices (en classe ou à la maison), vérifies-tu tes résultats ? (entoure la réponse)

Oui	Non

a. Si oui, tu le fais : (entoure la réponse)

Dans ta tête	Au brouillon	Sur ton cahier (ou ta copie)	A la calculatrice
Autres (à préciser) :			

b. Si non, pour quelles raisons ? (entoure la réponse)

Je n'ai pas le temps	Je ne sais pas comment faire	Ce n'est pas à moi de vérifier	Je n'en ressens pas le besoin
Autres (à préciser) :			

ANNEXE B :

ENSEIGNEMENT DE LA DISTRIBUTIVITE EN CLASSE DE QUATRIEME

II. SIMPLE DISTRIBUTIVITE

1. Développer et réduire une expression littérale :

Propriété fondamentale : distributivité

Pour tout nombre $a, b, et\ k$, on a : $k(a + b) = ka + kb$.

Définitions : Développer c'est transformer un produit en une somme. Factoriser c'est transformer une somme en un produit.

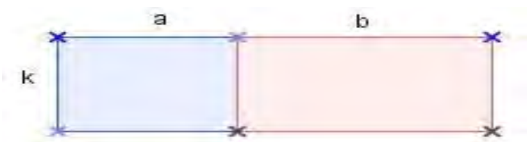
Applications :

1. Pour développer : $-3(x + 6) = -3 \times x + (-3) \times 6 = -3x + 6$
2. Pour factoriser : $6x - 12 = 6 \times x - 6 \times 2 = 6(x - 2)$
3. Pour réduire : $5x - 2x = x(5 - 2) = 3x$

Exemple des carreaux colorés : $4(c - 1) = 4c - 4$ et $2c + 2(c - 2) = 2c + 2c - 4 = 4c - 4$

Méthodes de vérification : Pour vérifier que l'on a bien distribué une expression littérale on peut :

a. Pour tester le résultat d'un calcul littéral, il suffit de remplacer la lettre par un même nombre dans l'expression de départ, puis dans le résultat.
b. Si le teste donne deux valeurs différentes, alors il y a une erreur. Attention ! Si le test réussit, cela ne garantit pas l'exactitude du résultat, mais cela augmente la confiance dans le résultat trouvé. Calculer l'aire du rectangle de deux façons différentes. On obtient : $k(a + b) = ka + kb$



c. Vérifier chacune des étapes de calcul (4F) ; Refaire la transformation inverse (4B)
d. Vérifier que l'expression obtenue est bien sous la forme d'une somme (pour un développement) ou d'un produit (pour une factorisation).

ANNEXE C :
EVALUATION FINALE

Consignes : ce questionnaire ne sera pas noté. Les correcteurs blancs et effaceurs sont interdits (barrer proprement en cas d'erreur). Les calculatrices sont autorisées mais il est demandé d'écrire sur cette feuille **tous** les calculs effectués (y compris les calculs mentaux et les calculs faits avec la calculatrice).

I. Exercices :

Exercice 1 :

1) Développer l'expression $A = 5(3x - 2)$.

Brouillon :	Réponse :

2) Réduire l'expression $B = 6x - (x - 3)$.

Exercice 2 :

1) Développer l'expression $C = -2(x + 1)$.

Es-tu sûr de ta réponse ? Donne une note de 1 (pas du tout sûr) à 5 (sûr de toi) qui exprime ton degré de certitude sur ta réponse.

2) Réduire l'expression $D = (5 - x^2) - (\ 6x^2 + 2)$.
   Es-tu sûr de ta réponse ? Donne une note de 1 (pas du tout sûr) à 5 (sûr de toi) qui exprime ton degré de certitude sur ta réponse.

Exercice 3 :

Certains élèves de 4$^{\text{ème}}$ ont développé, puis réduit l'expression $E = 4(3x - 2) - (2x + 6)$. Voici leurs réponses.

Hugo : $E = 4(3x - 2) - 2x - 6$ Flora : $E = 10x - 8$
Chloé : $E = 10x - 14$ Jérémy : $E = x - 4$

a) Thomas constate que certains de ses camarades n'ont pas répondu correctement à la question. Lesquels ?
b) Comment Thomas a-t-il pu procéder pour vérifier le résultat de chacun de ses camarades ?
c) Corriger leurs erreurs.

II. Questionnaire :

1. Indique par une croix les méthodes de vérification de calcul avec des lettres que tu as comprises et que tu saurais utiliser.

Tableau pour les 4ème B :

	Méthodes de vérification	J'ai compris	Je saurais utiliser
1	Remplacer la lettre par une ou plusieurs valeurs numériques		
2	Utiliser l'aire des rectangles		
3	Vérifier chaque étape de calcul		
4	Refaire les transformations inverses (factoriser l'expression développée, développer l'expression factorisée)		

Tableau pour les 4ème F :

	Méthode de vérification	J'ai compris	Je saurais utiliser
1	Remplacer la lettre par une ou plusieurs valeurs numériques		
2	Utiliser l'aire des rectangles		
3	Vérifier chaque étape de calcul		
4	Vérifier la forme de l'expression obtenue		

Donne le (ou les) numéro(s) de méthode que tu préfères. Explique pourquoi.

2. Quel est l'intérêt, pour toi, de connaître ces méthodes ?

3. Penses-tu que ces méthodes t'ont aidé pour ce chapitre ? Comment ?

4. As-tu l'impression de mieux comprendre en sachant vérifier tes résultats ? Explique.

5. Aimerais-tu que d'autres méthodes te permettant de vérifier tes résultats te soient enseignées dans les prochains chapitres de mathématiques? (entoure la réponse)

   Oui Non Je ne sais pas

6. Dans les exercices, envisages-tu de les utiliser (entoure la réponse) :

   Jamais De temps en temps Souvent Tout le temps

7. En devoir surveillé, envisages-tu de les utiliser ? (entoure la réponse)

   Oui Non Peut-être

L'ESCALIER – UNE ACTIVITÉ SUR LES MULTIPLES ET DIVISEURS EN FIN DE PRIMAIRE EN SUISSE ROMANDE

Lucie PASSAPLAN* – Sébastien TONINATO*

Résumé – Ce texte s'inscrit dans le cadre d'une recherche en didactique des mathématiques[1] ayant pour objet l'expérimentation à Genève de l'activité « L'escalier », tirée du livre de l'élève de 5ème primaire (10-11 ans) et portant sur les multiples et les diviseurs. Nous dégageons les différentes variables didactiques et leurs valeurs respectives et nous exposons les stratégies possibles de résolution. Puis, nous donnons les conditions de l'expérimentation sur le terrain et relatons son déroulement. Enfin, nous effectuons une analyse a posteriori de l'activité en comparant les stratégies formulées dans l'analyse à priori avec celles utilisées effectivement par les apprenants.

Mots-clefs : Analyse a priori, stratégies visées, stratégies effectives, variables didactiques, multiples et diviseurs

Abstract – This text is part of research in mathematics education on the experimentation of the activity « The stairs » from the book of primary school (10 – 11 years old) and dealing with multiples and dividers. We point out the different didactical variables and their respective values and we discuss the possible strategies for resolution. Then we give the experimental conditions and observe its progress. Finally, we perform an a posteriori analysis of the activity by comparing the formulated strategies in the a priori analysis to those actually used by learners.

Keywords: a priori analysis, referred strategies, effective strategies, educational variables, multiples and dividers

I. INTRODUCTION

Notre texte propose l'analyse d'une activité de mathématiques destinée à des élèves de 5ème primaire (10 -11 ans). Pour ce faire, nous proposons en premier lieu une analyse *a priori* de l'activité concernée où nous dégageons les savoirs mathématiques visés, les variables didactiques et leurs valeurs ainsi que les stratégies possibles de résolution. Dans la deuxième partie, nous décrivons les caractéristiques de l'expérimentation qui nous ont permis de mettre en pratique l'activité. Puis, nous proposons une analyse *a posteriori* où nous relatons le travail effectué par les élèves et le mettons en relation avec notre analyse *a priori*. Un intérêt tout particulier est accordé aux stratégies effectives observées lors de l'expérimentation. Enfin, nous concluons sur les apports de ce travail dans notre formation.

II. ANALYSE A PRIORI

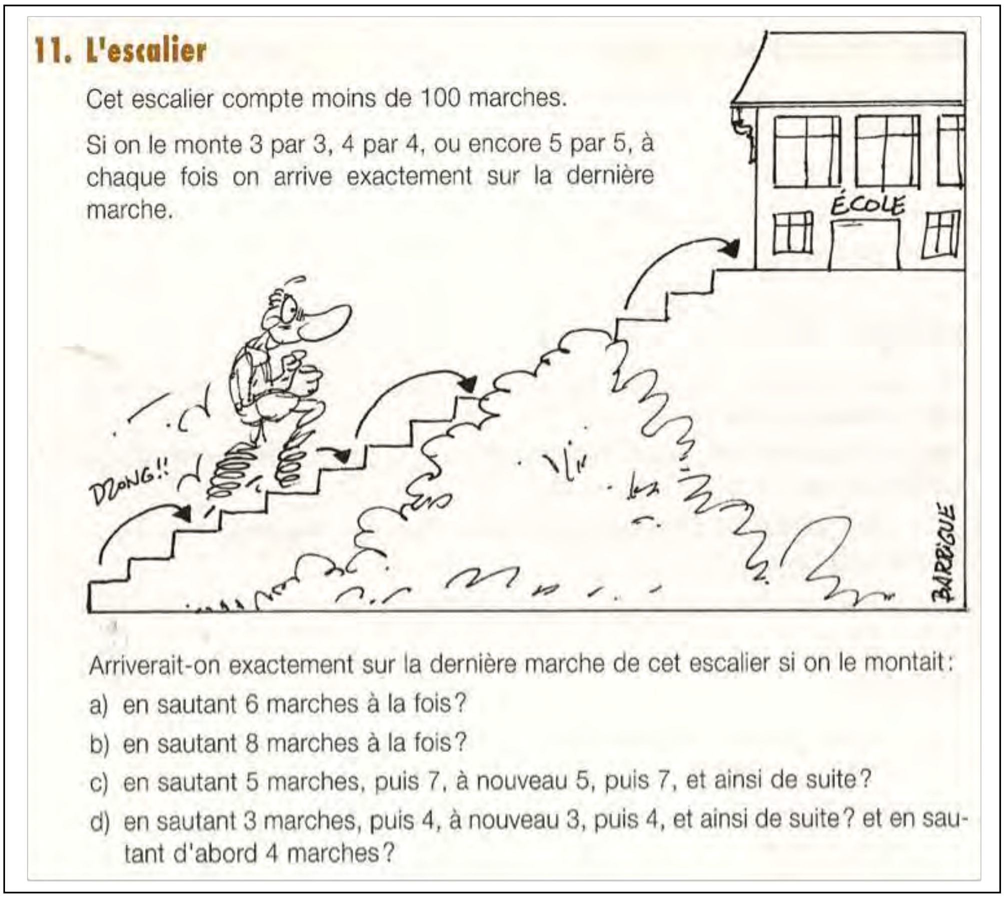
1. *Activité proposée*

L'activité « L'escalier » (Figure 1) se trouve dans les moyens d'enseignement romands de mathématiques de 5ème année primaire (Chastellain et Jaquet 2001, p. 52) et concerne des élèves de 10 à 11 ans. Elle se place dans le thème « multiples et diviseurs ».

* Université Genève – Suisse – passapl0@etu.unige.ch, toninat0@unige.ch

[1] Ce travail a été réalisé en collaboration avec une troisième étudiante Laura Petrucci.

© Passaplan L., Toninato S. (2012) L'escalier – Une activité sur les multiples et diviseurs en fin de primaire en Suisse romande. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (SPE1, pp. 1639–1648). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012



11. L'escalier

Cet escalier compte moins de 100 marches.

Si on le monte 3 par 3, 4 par 4, ou encore 5 par 5, à chaque fois on arrive exactement sur la dernière marche.

Arriverait-on exactement sur la dernière marche de cet escalier si on le montait :

a) en sautant 6 marches à la fois ?
b) en sautant 8 marches à la fois ?
c) en sautant 5 marches, puis 7, à nouveau 5, puis 7, et ainsi de suite ?
d) en sautant 3 marches, puis 4, à nouveau 3, puis 4, et ainsi de suite ? et en sautant d'abord 4 marches ?

***Figure 1** – Enoncé extrait du livre de l'élève*

Nous pouvons distinguer deux parties pour la résolution de cet exercice :

1ère partie

Identifier le nombre de marches de l'escalier, sachant qu'il compte moins de 100 marches et qu'il faut pouvoir le monter de 3 en 3, de 4 en 4 ou de 5 en 5, en arrivant exactement sur la dernière marche.

2ème partie

En se référant au nombre de marches trouvé ci-dessus, cette partie se penche sur différentes manières de gravir l'escalier, à savoir :

a) 6 marches à la fois

b) 8 marches à la fois

c) 5 marches, puis 7, et à nouveau 5 puis 7

d1) 3 marches, puis 4, et à nouveau 3 puis 4

d2) 4 marches, puis 3, et à nouveau 4 puis 3

Précisons qu'il est possible de répondre à l'item a) sans avoir défini préalablement la longueur de l'escalier. Toutefois, cette solution n'est pas à la portée des élèves observés et il est naturel de chercher à déterminer au plus vite le nombre de marches composant l'escalier. Nous allons effectuer une analyse a priori (cf. Bessot 2003, Brousseau 1986, 1998) de cette activité en vue de l'organisation et de l'observation de son expérimentation.

2. *Connaissances pré-requises et savoirs mathématiques visés*

Les connaissances en jeu pour la réalisation de cette activité touchent à l'établissement de suites numériques de multiples et à leur utilisation. Ainsi, afin d'être capables de résoudre ce problème, les élèves doivent savoir établir une liste de multiples, en utilisant leurs connaissances des livrets[2] ou en effectuant des additions successives ; ils peuvent également utiliser leurs connaissances des règles de divisibilité. En outre, cette activité exige aussi de la part des élèves la compréhension du problème, l'élaboration d'une stratégie, ainsi que la communication et l'explication du résultat ; plus encore que les connaissances mathématiques mobilisées sur les multiples, elle permet de tester la recherche et la mise en œuvre d'une démarche de résolution.

3. *Description des variables didactiques et leurs effets attendus*

En étudiant l'activité, nous avons pu dégager plusieurs variables didactiques :

- <u>le nombre de marches de l'escalier</u> : dans l'énoncé, il est spécifié que le nombre de marches est inférieur à 100. Cette variable, dont la valeur est peu élevée si nous considérons le champ numérique, mais suffisante pour un escalier, permet d'entreprendre une démarche additive et n'incite pas les élèves à utiliser la multiplication et la division, ni les règles de divisibilité. Si un tel but était recherché, il faudrait proposer un énoncé avec un escalier comprenant un nombre plus important de marches, par exemple au-dessus de 400. De plus, le choix de limiter la grandeur de l'escalier à 100 marches restreint le nombre d'escaliers possibles. Ici, en particulier, il n'y a qu'une seule possibilité.
- <u>le nombre de marches à monter par enjambée</u> : correspondant au nombre de marches enjambées à chaque pas ; mathématiquement, il représente la donnée qui permet l'établissement de la liste des multiples, ces derniers étant primordiaux pour la recherche du multiple commun, qui permet, in fine, de définir le nombre de marches de l'escalier.

Plus précisément, la première partie de l'exercice demande l'établissement de listes de multiples, afin de trouver un multiple commun répondant aux critères. La première variable que nous identifions ici correspond aux nombres de marches avec lesquels nous pouvons monter l'escalier en arrivant exactement sur la dernière marche ; c'est une variable qui se présente sous la forme d'un n-uplet de nombres. La variabilité joue donc à la fois sur la valeur de n et sur les valeurs des nombres de marches. Dans l'exercice tel qu'il est proposé, n vaut 3 et les trois valeurs sont 3, 4 et 5. La valeur de la variable est donc le triplet (3, 4, 5). Le fait d'avoir un triplet (n=3) présente une certaine difficulté, puisqu'il s'agit de chercher les multiples communs à trois nombres. Le point important est que ces trois nombres sont premiers entre eux, c'est-à-dire qu'ils n'ont pas de diviseur commun (mis à part 1). Ainsi, leur plus petit commun multiple (ppcm) est leur produit, c'est-à-dire 60, qui correspond au nombre de marches de l'escalier. Bien entendu, les élèves de 10 – 11 ans n'ont pas les connaissances pour appréhender cette stratégie experte, qui d'ailleurs ne leur sera pas expliquée. Ils peuvent par contre travailler à partir de listes des multiples communs ; dans ce cas, le facteur 5 facilite la recherche du multiple commun, étant donné qu'il ne peut s'agir que d'un nombre se terminant par 0 ou par 5 ; aussi, comme les multiples de 4 sont toujours pairs, ils peuvent déduire que le nombre d'escaliers se terminera par un 0. De ce fait, le champ de la recherche

[2] Les livrets désignent en Suisse romande ce que l'on nomme en France les tables de multiplication.

se retrouve déjà bien limité et ne nécessite pas, s'ils s'y prennent bien, l'écriture complète des trois listes de multiples.

Concernant la 2ème partie, pour les items a) et b), la réponse peut être trouvée en effectuant simplement une division, à savoir 60 : 6 et 60 : 8 ; si le reste dans la division euclidienne est zéro, cela signifie qu'il est possible de gravir les marches et d'atteindre la dernière ; par contre, si le reste n'est pas nul, cela signifie qu'il n'est pas possible de parvenir à la dernière marche en montant par enjambée ce nombre de marches. Cette méthode est valable pour n'importe quelle autre valeur de la variable « nombre de marches ». Une autre façon de faire est de chercher si 60 est dans la liste des multiples de 6 (respectivement de 8) ; c'est une méthode valable, mais plus longue, plus risquée (possibilité d'erreurs dans les tables de multiplication) et moins experte.

L'item c) présente une nouvelle difficulté, puisqu'il faut effectuer une suite inégale de pas, 5 puis 7, toujours dans cet ordre. Une première approche consiste à ne considérer que la succession, c'est-à-dire l'addition des deux enjambées. Ainsi, s'il est possible de monter l'escalier de 12 en 12 (5 + 7), et c'est le cas, la réponse est oui. Dans cette situation, n'importe quel choix de deux nombres dont la somme égale 12 (ou à tout autre diviseur de 60) aurait pu être résolu par le même raisonnement. Par contre, dans le cas où la somme des deux nombres n'est pas un diviseur de 60, il n'est pas correct de répondre immédiatement par la négative : il faut, en effet, vérifier s'il est possible d'atteindre ou non la dernière marche avec un nombre impair d'enjambée. Par exemple, pour les valeurs de l'item d), 3 puis 4, la somme faisant 7, et en reprenant le développement ci-dessus, nous constatons qu'il n'est pas possible d'arriver sur la 60ème marche, car 7 n'est pas un diviseur de 60. Par contre, après huit enjambées de 3 et de 4, la 56ème marche (8 x 7 = 56) est atteinte, mais le pas suivant étant 3, ceci nous amène sur la 59ème : il ne sera donc pas possible d'arriver exactement sur la 60ème marche. En revanche, si l'enjambement est d'abord de 4 marches, après 8 enjambées de 4 et 8 enjambées de 3, la 56ème marche est atteinte et l'enjambée de 4 mène exactement sur la dernière marche. Nous distinguons donc trois catégories de paires de nombres, qui déterminent les trois valeurs pertinentes de cette variable de paires inégales (n_1, n_2) de pas :

<u>Valeur n° 1</u> : n_1+n_2 est un diviseur de 60 ; dans ce cas, il est possible de parvenir sur la dernière marche avec un nombre pair d'enjambées.

<u>Valeur n° 2</u> : n_1+n_2 n'est pas un diviseur de 60, mais est un diviseur de 60-n_1. Autrement dit, le reste de la division de 60 par n_1+n_2 est n_1. Dans ce cas, la (60-n_1)ème marche est atteinte avec un nombre pair d'enjambées et le pas suivant de n_1 marches amène sur la dernière.

<u>Valeur n°3</u> : n_1+n_2 n'est ni un diviseur de 60, ni un diviseur de 60-n_1. Autrement dit, le reste de la division de 60 par n_1+n_2 n'est égal ni à 0, ni à n_1. Dans ce cas, il n'est jamais possible d'arriver exactement sur la dernière marche.

Ainsi, l'item c) correspond au choix d'un couple de la forme de la valeur n° 1 ; l'item d), l'ordre 4 puis 3 correspond à la valeur n° 2 et l'ordre 3 puis 4 à la valeur n° 3.

Il faut noter que, dans le cas où la somme des termes est un diviseur du nombre de marches totales (comme la valeur n° 1), l'ordre des nombres à additionner ne porte pas à conséquence. Par contre, pour les items d1) et d2), il est impératif de respecter l'ordre des enjambées. En effet, alors que les deux facteurs sont des diviseurs de 60, il serait tentant de répondre, de façon erronée, que ces deux façons de monter l'escalier permettent d'atteindre la 60ème marche. Par contre, la somme de ces termes n'étant pas un diviseur de 60, il n'est donc pas suffisant d'effectuer simplement une division euclidienne par 7, il faut aussi vérifier si le reste vaut ou non le premier terme (3 ou 4). Néanmoins, cet item peut aussi être résolu en effectuant des additions successives des termes, en respectant, comme déjà mentionné, l'ordre des enjambées ; cette stratégie est possible, car 60 est un nombre assez petit. A noter qu'au niveau des élèves interrogés, ce sera sûrement le seul moyen correct mis en œuvre.

Le fait de choisir ces valeurs (3 + 4 et 4 + 3) est très judicieux. En effet, il n'y a que peu de nombres possibles qui permettent une réponse affirmative et une réponse négative à la question avec deux diviseurs de 60. Un autre couple possible aurait été 6 et 2, mais l'écart est plus grand : 3 et 4 sont donc le meilleur choix.

- l'organisation sociale : le professionnel a le choix de faire résoudre cette tâche aux élèves de manière individuelle ou en groupe. Cette seconde solution permet une confrontation des stratégies résultant d'un conflit cognitif des élèves du même groupe.

4. *Stratégies possibles de résolution*

Tout d'abord, pour pouvoir entrer correctement dans le problème, il faut déterminer le nombre de marches (même si nous avons dit plus haut qu'il est possible de s'en passer pour l'item a), cela ne concerne pas nos élèves !). Or, pour déterminer le nombre de marches de l'escalier, il est indispensable d'avoir compris que la possibilité de monter l'escalier, par exemple de 4 en 4, signifie que le nombre de marches est un multiple de 4. A priori, il nous semble que tous les groupes (si ce n'est tous les élèves) devraient être capables d'utiliser cette procédure. Toutefois, si cela devait poser problème pour un groupe, nous prévoyons de les aider à identifier cet élément, sans lequel le traitement du problème serait compromis.

1ère partie

La stratégie experte consiste ici à utiliser le fait que les multiples communs sont les multiples du ppcm. Dans notre cas, le ppcm de 3, 4 et 5 est égal à leur produit, c'est-à-dire 60. De plus, seul 60 convient, car il s'agit du seul multiple commun inférieur à 100. Comme nous l'avons dit, cette stratégie n'est pas accessible, ni même visée, pour les élèves de ce niveau.

En fait, la recherche des multiples étant ici limitée à ceux inférieurs à 100, des stratégies de recherche exhaustive dans les listes de multiples sont tout-à-fait efficaces. Cette dernière consiste à écrire in extenso les trois listes de multiples et à chercher ceux qui sont communs. Une autre façon du même type consiste à écrire la liste des nombres jusqu'à 100 et à biffer ceux qui ne conviennent pas ou, au contraire, à entourer en trois couleurs ceux qui conviennent. L'avantage d'une stratégie exhaustive est qu'elle permet une bonne justification ; en revanche, elle est un peu laborieuse et risque de ne pas être souvent employée.

Enfin, une autre stratégie dite de « réduction » consiste à réduire peu à peu la liste des multiples possibles. La façon la plus rapide consiste à voir que les multiples communs de 5 et de 4 sont dans les multiples de 10 : ceci peut s'argumenter par le fait que les multiples de 5 se terminent par 0 ou 5 et que seuls ceux qui se terminent par un 0 sont pairs donc susceptibles d'être des multiples de 4. Nous pouvons bien sûr aussi affirmer que les multiples de 5 et de 4 sont les seuls multiples de 20, mais il n'est pas sûr que cet argument soit accessible à beaucoup d'élèves. Il reste ensuite à discerner que dans les dizaines restantes, seul 60 convient ! Cette stratégie se rapproche plus de la stratégie experte, mais par manque de connaissances théoriques sur les multiples communs, elle risque de conduire à des réponses insuffisamment argumentées.

2ème partie

Pour les items a) et b), la stratégie la plus accessible aux élèves concernés est l'établissement de listes de multiples, en prenant comme facteur le nombre de marches par enjambée. Idéalement, l'apprenant doit stopper son énumération à 60 (= nombre de marches de l'escalier déterminé par la 1ère partie de l'exercice), ou au multiple le plus proche ; toutefois, le fait de continuer la liste des multiples ne porte pas préjudice à la résolution de cet exercice. Puis, il doit contrôler si le nombre 60 figure bien dans sa liste ; si oui, il est possible de monter les marches et de s'arrêter sur la dernière ; si non, il est impossible de monter les marches et de s'arrêter sur la 60ème. La stratégie visée est de diviser le nombre total de marches de l'escalier, c'est-à-dire 60, par le nombre de marches enjambées ; si le résultat de la division euclidienne est nul, il est possible de monter les marches en atteignant la dernière ; si le résultat n'est pas égal à zéro, il n'est pas possible de parvenir directement à la dernière marche.

Pour l'item c), la stratégie de base consiste en l'addition successive des termes $5 + 7$ jusqu'à l'obtention de 60, ce qui prouve qu'il est possible de monter l'escalier en faisant une enjambée de 5, puis une de 7 et ainsi de suite, jusqu'à la 60ème marche. La stratégie visée est d'additionner $7 + 5 = 12$, afin de poursuivre la résolution avec la solution valable pour les items a) et b), c'est-à-dire en effectuant la division $60 \div 2$.

Pour l'item d), les élèves peuvent utiliser la même méthode décrite ci-dessus, à savoir l'addition successive des termes $3 + 4$ et $4 + 3$. La stratégie experte est d'utiliser le terme 7, résultant de l'addition $3 + 4$ et de s'approcher, grâce aux multiples de 7, du nombre 60 ($7 \times 8 = 56$). Puis, l'énoncé requiert de faire d'abord une enjambée de 3 marches, donc $56 + 3 = 59$; ceci prouve qu'il n'est pas possible de monter 3 puis 4 marches et de parvenir sur la 60ème. La deuxième proposition est de faire un pas de 4 marches : $56 + 4 = 60$, ainsi la dernière marche est atteinte. A noter que cette stratégie n'est pas accessible aux élèves de ce niveau.

III. CONTEXTE DE L'EXPERIMENTATION

Dix élèves de 5P (10 -11 ans) ont pris part à notre expérimentation. L'enseignante nous a informés qu'elle avait déjà proposé un exercice du même genre à ses élèves et expérimenté la recherche du ppcm dans une tâche du même type. Avec son aide, trois groupes homogènes, en fonction de leur niveau mathématique, ont été formés, deux de trois élèves et un de quatre élèves. De plus, nous avions convenu d'intervenir le moins possible durant la résolution de l'exercice. Nous ne le ferions que dans le cas où les élèves ne parviennent pas à rentrer dans la tâche. Mise à part pour un groupe qui n'avait pas bien compris la consigne, nous sommes restés en retrait pendant leurs discussions pour ne pas biaiser leurs recherches.

Les élèves étaient informés que, pour chaque groupe, un élève devrait, après le temps de travail, présenter les résultats au rétroprojecteur. Cette mise en commun avait pour but de confronter et discuter les différentes stratégies de résolution entre chacun des groupes.

A la fin des présentations, nous avons mené une mise en commun, ayant pour but de valider les stratégies et les résultats, ainsi que de proposer éventuellement d'autres résolutions. Au cas où il nous restait du temps, nous avions prévu un exercice de prolongement, afin de vérifier les acquis et la compréhension des élèves.

IV. ANALYSE A POSTERIORI

Avant tout, nous remarquons que les trois groupes ont rapidement compris qu'il s'agissait d'un problème concernant les multiples, ceci étant en plus favorisé par la connaissance du thème (thème 5 : multiples et diviseurs).

Pour la suite, nous avons choisi d'analyser, en premier, les sources des erreurs ; puis, nous exposons les stratégies effectives des élèves.

1. *Observations des erreurs*

Les erreurs que nous avons constatées proviennent principalement d'une mauvaise lecture de l'énoncé et plus rarement de l'utilisation de stratégies erronées. Par exemple, un groupe n'a pas identifié que le nombre de marches de l'escalier n'était pas donné : pour eux, l'escalier comptait 100 marches. Dans ce cas particulier, l'observateur n'a rien précisé de suite, espérant qu'un élève se rendrait compte de cette mauvaise interprétation de l'énoncé ; comme ceci n'a pas été le cas, une intervention a été nécessaire pour la bonne réalisation de la suite de la tâche. De plus, d'autres élèves n'ont pas remarqué immédiatement que l'item d1) comprenait deux questions ; cet oubli a été réparé lors de la mise au net précédant la présentation orale. Concernant l'utilisation de stratégies erronées, nous n'avons constaté que peu de cas. Toutefois, certains élèves n'ont pas saisi que le nombre de marches devait être commun à toutes les enjambées (3, 4 et 5) et n'ont identifié que $M3 \cap M4$, $M3 \cap M5$ ou $M4 \cap M5$.

Nous pouvons aussi signaler quelques erreurs de calcul qui n'ont pas permis aux élèves une bonne réalisation de la tâche, spécialement pour les items c) et d) qui demandaient l'addition de termes successifs.

2. *Stratégies effectives*

Pour la résolution de la 1ère partie de l'exercice, les élèves ont établi les listes de multiples de 3, 4 et 5. Ensuite, ils ont repéré les multiples communs. Seul un groupe a sélectionné, dans les multiples de 3 et 4, ceux se terminant par 5 et 0.

Pour la 2ème partie, nous indiquons les stratégies employées pour chaque item :

a) Les élèves ont écrit une liste des multiples de 6 et contrôlé si le nombre 60 était dans cette liste. Il est intéressant de noter que lors de l'écriture sur le transparent, les groupes ont proposé une justification (6x10=60) se rapprochant plus de la stratégie visée : diviser 60 par 6.

b) Tous les élèves ont établi une liste des multiples de 8 et contrôlé si le nombre de 60 était dans cette liste. Pour la justification d'un groupe notée $7 \times 8 = 56 + 8 = 64$, ce dernier s'est approché de la stratégie visée : diviser 60 par 8. En effet, par ce calcul, ils ont montré que 60 n'est pas un multiple de 8. A noter que cette écriture de justification est incorrecte, mais c'est une erreur classique qui porte sur la signification du signe « = ».

c) Ils ont additionné les termes 5 + 7 à plusieurs reprises, jusqu'à obtenir si possible 60. Aucun n'a pensé à additionner les deux enjambées et à résoudre cet item avec le nombre 12.

d) Ils ont additionné les termes 3 + 4 à plusieurs reprises, jusqu'à obtenir si possible 60. Ils ont fait de même pour 4 + 3.

3. *Présentation des groupes*

Comme prévu, les groupes ont présenté leurs résultats au rétroprojecteur les uns après les autres. Il n'y a pas eu de question, étant donné qu'ils avaient tous procédé de la même manière. Il y a eu néanmoins une intervention lors de la présentation du groupe 1. Un élève a expliqué leur stratégie de résolution pour le d1) comme suit : « On a fait… on a fait les multiples de 3 et après de 7 et après ça nous fait… et ça fait que ça peut pas marcher le premier ». Après l'exposé, nous avons demandé aux élèves de reformuler cette stratégie. En effet, s'ils étaient parvenus à comprendre que faire des enjambées de 3, puis de 4, correspondait à faire des sauts de 7 en 7, ils se rapprochaient de la stratégie optimale. L'étudiant a posé la question. « J'ai pas compris le d)… le d1) vous avez fait les multiples de

3 et les multiples de 7 ? ». La réponse a été donnée par un autre élève que celle qui avait présenté : « Non. En fait on a fait… on a fait… là on a fait 3 + 4, 7, 7 + 3, 10 et ainsi de suite. ». Les multiples de 7 ne sont donc pas réapparus.

4. *Mise en commun*

L'un de nous (que nous appellerons l'enseignant) s'est chargé de l'institutionnalisation devant la totalité des élèves. Il a validé les stratégies de chaque groupe : établir la liste des multiples de 3, 4 et 5 et observer lesquels sont communs (en l'occurrence 60). Il a également mis en évidence l'erreur d'un groupe qui avait compris que l'escalier faisait 100 marches et souligné l'importance d'une lecture précise de l'énoncé. Il a aussi discuté du fait qu'il n'y avait pas besoin d'écrire tous les multiples ; il suffisait d'écrire les multiples de 5, qui sont les plus faciles, puis d'entourer dans cette liste les multiples de 3 et ensuite ceux de 4 : cette stratégie était moins coûteuse et il y avait moins de risque de faire une erreur. Pour la deuxième partie de l'exercice, il a d'abord validé les stratégies employées par les groupes, à savoir : établir la liste des multiples de 6 et voir si 60 y apparaît. Il a également mis en avant le risque de faire des erreurs en écrivant la liste. Puis, il a demandé aux élèves s'ils pensaient nécessaire d'établir la liste des multiples jusqu'à 100. Les élèves ont répondu que non alors que, dans l'exercice, la plupart l'ont fait. Finalement, l'enseignant a souligné que certains groupes avaient écrit une autre justification sur leur transparent que lors de la résolution : « c'est possible, car 10 × 6 = 60 ». En partant de cette justification, il a alors demandé aux élèves de chercher une stratégie de résolution moins coûteuse que l'établissement de la liste de tous les multiples ; mais les élèves n'y sont pas parvenus. L'enseignant a donc institutionnalisé la possibilité de diviser le nombre de marches par la valeur des sauts pour savoir si c'était possible : « si on prend 60 et qu'on divise par 6, on trouve 10 et un reste de 0. Cela signifie qu'en 10 sauts, on arrivera pile sur la dernière marche ». Les élèves ont semblé comprendre cette stratégie.

b) Après une validation des stratégies proposées, l'enseignant a amené les élèves à transférer la technique décrite en a). Les élèves sont parvenus à dire qu'il suffisait de diviser 60 par 8 et voir si cela donne un reste de 0 ; si c'est le cas, cela fonctionne. Il a alors effectué la division au tableau en se faisant dicter par les élèves. Le reste étant de 4, les élèves ont conclu que le b) n'était pas possible.

c) L'enseignant a, une nouvelle fois, validé la stratégie des élèves tout en soulignant que le risque d'erreur était élevé. Il a ensuite demandé aux élèves comment il était possible d'utiliser la nouvelle stratégie vue en a) et b) pour cet exercice. Les élèves ont proposé de diviser par 5 et de diviser par 7 et d'observer les restes. Cette stratégie n'étant pas correcte, l'enseignant a mis en évidence que faire une enjambée de 5, puis une enjambée de 7 correspond à faire une longue enjambée de 12. Les élèves n'ont pas compris ce rapport. Il a alors noté la liste des sauts au tableau : 5, 12, 17, 24, 29, 36, 41, 48, 53, 60. Puis, il a entouré les multiples de 12 pour montrer qu'ils étaient tous présents. Finalement, il a ramené cela à la stratégie vue et a) et b). Faire des sauts de 5, puis des sauts de 7 revient à faire des sauts de 12 tous les deux sauts ; alors, si le reste de la division de 60 par 12 est 0, on arrive pile sur la dernière marche. La plupart des élèves n'ont pas du tout compris cette stratégie. L'enseignant a alors pris un autre exemple : « un saut de 8, puis un saut de 4, puis un nouveau saut de 8, etc. Est-ce qu'on arrive sur la dernière marche ? » Il a demandé à un élève de répondre à cette question en utilisant la stratégie qui venait d'être expliquée. L'élève est parvenu à trouver la réponse avec un peu d'aide de la part de ses camarades.

d) Faute de temps, cette partie de l'exercice n'a pas pu faire l'objet d'une mise en commun. Nous pensons qu'il aurait été difficile pour les élèves de comprendre la stratégie adéquate : 3 + 4 ou 4 + 3 valent 7 et vu que le reste de la division de 60 par 7 est non-nul, les élèves auraient sans doute trouvé qu'il n'était pas possible d'arriver sur la dernière marche. Nous pensons qu'il aurait été intéressant de réécrire la liste des sauts et d'entourer les multiples de 7 pour montrer qu'on passait bien par ces nombres. Mais qu'en est-il des autres ? Quand on fait 3 + 4 + 3 + 4, etc. on passe aussi par 3, 10, 17, 24 et ce ne sont pas des multiples de 7. Nous pensons que la stratégie optimale, qui consiste à comprendre qu'on arrive sur la dernière marche si c'est un multiple de 7 ou un multiple de 7 plus 4 aurait été difficile d'accès pour ces élèves en si peu de temps. De plus, il aurait fallu soulever le fait que le nombre par lequel on commence a une influence.

5. *Synthèse de l'analyse a posteriori*

Les élèves ont su se débrouiller seuls pour trouver le bon raisonnement et ont employé la plupart du temps la stratégie de base. L'un des groupes a même utilisé la stratégie visée pour l'un des items, mais au moment de la présentation, ils ont choisi de justifier leur réponse par la stratégie de base ; ceci indique que la stratégie visée n'était peut-être pas encore très bien acquise. Au moment de la présentation, tous étaient d'accord sur les résultats, qui avaient été validés par l'ensemble du groupe avant le report sur l'acétate. Ainsi, ils ont été capables d'expliquer leur manière de procéder. Ils se sont écoutés et ont aidé leurs camarades qui avaient des difficultés » cela montre une réelle implication des élèves dans la tâche.

Durant la mise en commun les élèves ont eu de la peine à comprendre les stratégies expertes que l'enseignant a proposées » elles n'avaient que peu de sens pour eux, car leurs méthodes de résolution étaient déjà bien intégrées et il était difficile, à ce moment, de leur en faire accepter d'autres. De plus, leurs méthodes avaient parfaitement fonctionné et les élèves ne cernaient donc pas l'utilité d'en changer. Si nous souhaitons que les élèves soient forcés de mobiliser une stratégie « experte », il convient d'agir sur les valeurs des variables de cet exercice : il serait tout à fait pertinent d'augmenter le nombre de marches de l'escalier tout en gardant les mêmes sauts. Avec un escalier de 600 marches par exemple, les élèves comprendraient que l'établissement de la liste des multiples est une stratégie trop coûteuse. En effet, ils réaliseraient qu'elle demande trop de temps et seraient contraints de trouver une autre façon de faire ; c'est de cette manière que les élèves vont, peu à peu, se rapprocher d'une stratégie « experte ».

V. CONCLUSION

Pour conclure, nous avons trouvé beaucoup d'intérêt à réaliser cette expérimentation qui était la première de notre cursus universitaire. L'approfondissement d'une tâche spécifique nous a incités à nous questionner sur les variables didactiques et les moyens mathématiques à disposition des enseignants. Concernant la tâche « l'escalier », , nous avions remarqué durant l'analyse *a priori* qu'elle comportait des valeurs de variables très intéressantes. L'exercice est pensé dans une certaine progression et les valeurs des différentes enjambées sont parfaitement pertinentes. Par contre, nous avions aussi observé qu'avec un escalier de seulement 60 marches, les élèves ne voient pas l'intérêt de chercher et de mobiliser d'autres stratégies que celles qu'ils maîtrisent déjà ; cela s'est vérifié dans notre expérimentation. Nous pensons qu'il aurait été intéressant de refaire l'activité dans les mêmes conditions, mais avec un escalier plus long. Ainsi, nous pourrons observer l'émergence de nouvelles stratégies.

REFERENCES

Bessot A. (2003) *Une Introduction à la Théorie des Situations Didactiques*, Cahier du laboratoire Leibniz n° 91. http://www.leibniz.imag.fr/lescahiers/.

Brousseau G. (1986) Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 7(2), 33-115.

Brousseau G. (1998) *Théorie des Situations Didactiques* (textes rassemblés et préparés par N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, V. Warfield). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chastellain M., Jaquet F. (2001) *Mathématiques cinquième année, Livre de l'élève.* Fribourg : Office romand des éditions et du matériel scolaire.

ANCRER L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES DANS UNE PERSPECTIVE HISTORIQUE

Marika PERRAULT*

Résumé – Le caractère historique lié à toute discipline est partie intégrante de cette discipline. Dans l'enseignement des mathématiques au Québec, l'intégration de cette dimension est fortement recommandée par le programme de formation. L'enjeu est de parvenir à toucher les intérêts à la fois des élèves et des enseignants, tout en proposant une comparaison entre les époques actuelle et passée qui amène les élèves à apprécier le travail mathématique dans une perspective culturelle. D'une activité réalisée auprès d'élèves de troisième secondaire portant sur la vie du mathématicien Pythagore émerge une réflexion sur la place de l'histoire dans l'enseignement des mathématiques.

Mots-clefs : Enseignement, Histoire, mathématique, Pythagore, activité en classe

Abstract – The historic character bound to any discipline is an integral part of this discipline. The integration of this dimension is strongly recommended by the training program of the Quebecois school. The stake is to succeed in touching the interests of both pupils and teachers, while proposing a comparison between the last periods which brings the pupils to understand the mathematical work in a cultural prospect (Inchauspé, 2007). Of an activity realized with pupils of the third secondary (high school) about the life of the mathematician Pythagoras appears a reflection on the place of History in the teaching of the mathematics.

Keywords: Education (Teaching), History, mathematics, Pythagoras, activity in class

I. INTRODUCTION

Les mathématiques ont influencé le développement du monde tel qu'on le connaît aujourd'hui. L'école québécoise, depuis le primaire jusqu'à l'université, entretient la diffusion de cette culture pour amener chaque élève du niveau de maîtrise d'une arithmétique élémentaire au travail des mathématiques modernes, en passant par les rudiments de l'algèbre. Ainsi, de manière consciente ou non, les apprenants effectuent un voyage dans le temps, se familiarisant d'abord avec les mesures entières de la Grèce Antique, puis avec les quantités inconnues propres au monde arabe, pour poursuivre avec les notions de fonctions et les autres représentations symboliques de la Renaissance européenne. L'histoire des mathématiques peut bien entendu faire en elle-même l'objet d'un cours, ce qui, au Québec, est le cas uniquement au niveau postsecondaire. Mais l'intégration d'une composante historique à l'enseignement des mathématiques au niveau secondaire ne permettrait-elle pas de mieux exposer la pratique mathématique et ce, dans une perspective culturelle ? Qu'est-ce que cela pourrait apporter aux jeunes, qui vivent dans une société où l'instantané et le « neuf » prennent une place capitale au quotidien ? C'est à ces questions que je vais tenter de répondre.

S'il est clair que les mathématiques constituent une discipline parfois abstraite pour les élèves qui entament le niveau d'études secondaires, ceux-ci doivent délaisser la perception de leurs sens pour plus de rigueur et de logique et ainsi effectuer le passage obligé de l'arithmétique vers l'algèbre. Dans ce sens, le questionnement demeure : l'élève n'y trouverait-il pas un certain sens, en lien avec sa propre démarche de familiarisation avec un concept mathématique, s'il pouvait le faire en parallèle avec la place que ce concept a prise historiquement ?

Dans cette intention de trouver comment l'histoire pourrait enrichir le développement des concepts mathématiques dans une classe de niveau secondaire, je vais présenter dans cette recherche-action les prescriptions du programme d'études en vigueur au Québec qui ont guidé

* UQAM, Montréal – Québec, Canada – perrault.marika@courrier.uqam.ca

© Perrault M. (2012) Ancrer l'enseignement des mathématiques dans une perspective historique. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (SPE1, pp. 1649–1661). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

mon questionnement. Pour cela, je soulignerai tout d'abord l'apport de certains écrits dans ma réflexion sur le type de travail qui peut être réalisé en classe afin d'atteindre l'objectif ciblé plus tôt. Ensuite, je détaillerai les résultats obtenus en classe lors de la réalisation d'une activité mathématique à saveur historique menée auprès d'une classe d'élèves de 3e secondaire[1]. Le sujet de cette activité est la découverte de la vie du mathématicien Pythagore. Toutefois, au niveau des mathématiques, ce n'est pas le fameux théorème attribué à Pythagore qui est travaillé, mais d'autres notions étudiées par le mathématicien et son école, tels les nombres polygonaux, les propriétés des solides, la parité des nombres et les moyennes. Une approche interdisciplinaire est aussi suggérée, pour accroître le potentiel culturel de l'activité. Enfin, je conclurai sur les avantages d'un travail mathématique avec une approche historique dans la classe de niveau secondaire.

II. PRESENTATION DU PROBLEME GENERAL DE RECHERCHE ET DU CONTEXTE DANS LEQUEL IL SE POSE

La problématique liée à l'intégration d'une composante historique dans l'enseignement des mathématiques revêt deux volets : le pourquoi et le comment. Pour satisfaire ces deux contraintes, l'entrée que je propose est différente pour chacune. D'une part, on peut se renseigner sur la mission de l'enseignant, défini par les programmes d'études, afin de justifier le pourquoi. D'autre part, il faut se questionner sur le meilleur moyen d'atteindre l'objectif défini dans le pourquoi, afin de définir le comment. Des exemples de travaux dans ce sens peuvent nous aider à répondre à cette question.

Le programme de formation de l'école québécoise répond à la première partie de ce questionnement. Il énonce l'importance de l'histoire dans le développement de la pensée mathématique :

> Par ailleurs, le développement de la mathématique étant étroitement lié à l'évolution de l'humanité, son enseignement doit intégrer la dimension historique. Les élèves pourront ainsi mieux en saisir le sens et l'utilité. Ils découvriront comment sa transformation au fil du temps et la création de certains instruments sont directement ou indirectement liées à des besoins ressentis dans les sociétés. L'histoire devrait permettre à l'élève de comprendre que les savoirs mathématiques sont le fruit de longs travaux menés par des chercheurs passionnés par cette discipline, qu'ils soient mathématiciens, philosophes, physiciens, artistes ou autres. (MELS 2006, p. 232)

On note donc dans le programme d'études un désir manifeste d'amener les élèves à mieux saisir l'apport historique des mathématiques à la société et au développement même de la discipline. Le mandat est donc clairement établi pour les enseignants de mathématiques : il faut tenir compte de la perspective historico-culturelle. Inchauspé (2007), qui a été président du groupe de travail sur la réforme ayant rédigé ce programme d'études, appuie fortement cette prise de position. Il détaille d'ailleurs celle-ci de manière à la rendre accessible aux enseignants. Cette entrée culturelle sur la discipline se justifie selon lui de manière à contrer la logique de segmentation et de cloisonnement dans laquelle les disciplines scolaires, dont les mathématiques, ont été enfermées par le passé. Au sujet de ce programme, implanté au Québec depuis la fin des années 1990, Inchauspé souligne d'ailleurs ceci :

> Mais si on me demandait quel est l'aspect le plus important du renouveau proposé par le programme d'études de l'école québécoise, c'est sans hésitation celui de l'introduction de la perspective culturelle que je choisirais. (Inchauspé 2007, p. 24)

Ainsi, l'idée d'adopter une approche de la discipline enseignée de manière culturelle et nécessairement historique fait manifestement contrepoids à l'approche purement utilitaire,

[1] Élèves âgés de 14-15 ans.

trop souvent privilégiée dans l'enseignement dit « par objectifs » (Proulx 2006). Ce que je veux mettre en lumière ici est que bon nombre d'enseignants mettent uniquement l'emphase dans leur cours sur les objectifs spécifiques du programme (exemple : calculer l'aire d'un polygone régulier, manipuler des expressions algébriques, interpréter un graphique, etc.) alors que ce n'est pas leur unique mandat, comme cela est illustré par l'extrait du programme et le commentaire de Paul Inchauspé. Les objectifs généraux du programme, comprenant une approche culturelle et historique de la matière, devraient donc toujours être liés aux objectifs spécifiques de la matière.

Par ailleurs, Charbonneau (2002) apporte un éclairage déterminant sur la question de l'intégration d'un volet historique à l'enseignement des mathématiques et définit clairement l'importance de l'histoire sur le développement des mathématiques :

> L'histoire doit être vue comme un outil pour faire en sorte que les mathématiques soient perçues comme une activité humaine qui a évolué (…). Elle montre que les mathématiques font partie de l'évolution de notre civilisation, et en fait, de toutes les civilisations, bien qu'à des degrés divers. Ainsi, l'on sait que l'on peut discuter les mathématiques ou que l'on doit discuter de mathématique, car c'est comme cela qu'elles ont évolué. En fin de compte, sans discussion et droit à l'erreur, pas de mathématiques. (Charbonneau 2002, p. 21)

On décode à travers ces lignes l'importance de mettre l'élève dans une situation similaire à celle de ceux qui, historiquement, ont été les premiers à entrer en relation avec un concept mathématique. L'idée de la discussion et du droit à l'erreur est ici fondamentale. De plus, le fait de replacer l'élève dans un contexte historique permet à ce dernier de mieux comprendre les difficultés liées à l'élaboration du concept mathématique. De retour à l'époque même où un concept s'édifiait, il est alors possible d'observer le temps et le labeur nécessaire pour obtenir des mathématiques qui se tiennent, qui ont du sens. C'est un des éléments qui doit donc être à la base de la construction d'une activité d'intégration de la perspective historique en mathématique.

Une autre idée permettant de définir comment ramifier les composantes historiques et mathématiques à l'enseignement au secondaire est de viser le vécu scolaire des apprenants. Dans un autre écrit, Charbonneau et Ross (2003) présentent un survol historique de l'évolution des mathématiques à travers le profil de trois élèves, chacun ayant vécu à une époque différente, soit au début de notre ère, en l'an 1000 et au milieu du XVIIIe siècle. Les auteurs présentent ce que chaque jeune devait apprendre jadis, du point de vue mathématique, et comment ces connaissances entraient en jeu dans leurs activités quotidiennes. Ce moyen d'entrer en contact avec l'histoire peut certainement susciter l'intérêt des élèves. Évidemment, ce type de travail peut aussi mener à une comparaison entre le passé et ce qui est fait aujourd'hui, et en quoi l'avancement des mathématiques facilite la vie de chacun.

Par l'analyse du programme de formation de l'école québécoise et par l'apport de l'expertise de certains auteurs, on comprend l'importance qu'il faut accorder à la perspective historique dans l'enseignement des mathématiques. Néanmoins, ce qu'il faut retenir des différents éléments qui sont ressortis ici pour faciliter l'intégration de l'histoire dans l'enseignement des mathématiques, est qu'il faut cibler une tâche qui se raccorde aux intérêts et au vécu des élèves (et des enseignants), et que l'aspect comparatif entre différentes époques est un moyen privilégié pour servir l'intention d'intégrer une composante historique au cours de mathématiques.

III. PRÉSENTATION DE L'ACTIVITÉ RÉALISÉE EN CLASSE

Celle-ci a pour but d'initier les élèves de troisième secondaire (14-15 ans) à une culture historique mathématique sur le thème du mathématicien Pythagore. L'activité s'intitule

Pythagore : l'homme derrière le mathématicien et elle s'articule autour d'un extrait de la biographique romancée du mathématicien (Negri 1991). Avant d'entrer dans les détails de l'activité, il est nécessaire de comprendre les intentions de celle-ci. L'idée de départ est issue du constat suivant : les élèves, de même que bon nombre d'adultes, se souviennent généralement de la relation de Pythagore dans le triangle rectangle, et ce, même plusieurs années après l'apprentissage du fameux théorème. Toutefois, peu de gens connaissent les autres sujets mathématiques étudiés par Pythagore et ses disciples. Cette activité a donc comme dessein de remédier à cette triste situation. Ainsi, cette activité trouve son ancrage à même l'intention pédagogique de l'enseignant, c'est-à-dire au niveau de concepts mathématiques précis. Si le but premier dans la réalisation de cette activité est d'intégrer une composante historique à l'enseignement des mathématiques, il est tout de même primordial de demeurer au centre de l'intention de l'enseignant envers ses élèves : faire des mathématiques.

Cette activité a aussi comme intention de présenter le personnage historique de Pythagore dans son univers grec d'origine. Cela est facilité par l'extrait choisi, qui fait ressortir à travers une quinzaine de pages, plusieurs facettes du personnage de Pythagore. Bien sûr, on retrouve Pythagore en tant que mathématicien et érudit respecté de tous ses contemporains, fondateur d'une école célèbre. On découvre également le visage d'un homme empli de compassion pour son prochain en quête de savoir, qu'il s'agisse d'un homme, d'une femme, ou même d'un esclave. Située dans le contexte de la Grèce hellénique, cette personnalité se révèle être la source de réflexion et de débat au sein de la société de l'époque, comme elle peut l'être aussi aujourd'hui. Donc, dans le choix de l'extrait du roman, l'idée a été d'identifier un contexte propice à l'intention culturelle et mathématique de l'activité. Il est donc important de pouvoir cibler des points de comparaison entre cette époque et la nôtre, pour rattacher le plus possible l'étude du concept mathématique à des éléments concrets connus des élèves qui réaliseront l'activité.

Par ailleurs, si le point d'entrée ici se fait à partir d'un personnage historique et de son histoire relatée sous forme narrative, le point d'ancrage d'une activité mathématique à caractère historique peut aussi être fait à partir d'autres éléments significatifs pour les élèves et les enseignants. Charbonneau (2010) en suggère plusieurs : textes originaux d'époque, architecture, musique, vocabulaire (étymologie), films historiques, etc. Par ailleurs, je souligne le fait qu'en dehors de l'idée de capter l'intérêt des élèves, il ne faut pas oublier que l'intérêt des enseignants vis-à-vis de l'activité est déterminant. Si ceux-ci ne se sentent pas interpellés par la tâche, ils n'y consacreront pas le temps nécessaire pour la rendre pertinente.

Les intentions de l'activité ayant été bien définis, il est impératif de regarder de plus près ce qui est proposé aux élèves. Il est important de souligner que cette activité a été développée avec une intention interdisciplinaire qui est fortement encouragée par le programme de formation de l'école québécoise, comme le met en évidence cet extrait :

> Dans une telle organisation, chaque discipline doit être conçue en filiation avec une ou plusieurs autres disciplines qui présentent avec elle une parenté ou une complémentarité. Il est donc primordial d'imaginer des situations d'apprentissage qui, mettant à profit le métissage des disciplines d'un même domaine ou d'autres domaines, amènent les élèves à faire eux-mêmes des liens entre ces divers éléments (…) (MELS 2006, p. 57)

C'est donc autour de trois disciplines scolaires que l'activité se développe : le français, l'histoire et les mathématiques. Dans un premier temps, l'idée est de proposer une comparaison entre les époques, celle de Pythagore et la nôtre. Ainsi, on rattache le passé au présent, on tisse des liens dans différents domaines, pas seulement pour les mathématiques, pour amener l'élève à considérer la portée de l'intervention de Pythagore sur son monde, et sur notre monde. Les quelques lignes ci-dessous sont les premières de l'extrait choisi et donne le ton du texte :

> Le soleil vient de passer le zénith marquant le plus fort de la chaleur. Seul sous l'amandier du jardin, Pythagore s'est assis, ses tablettes répandues autour de lui pour préparer l'exposé qu'il destine à ses disciples. Dans une maison voisine, quelqu'un fait vibrer les cordes d'une lyre et il ferme les yeux pour mieux entendre les sons qui traversent l'espace avec délicatesse. (Negri 1991, p. 355)

L'activité débute donc dans la classe de français, où se fait la lecture du texte de Negri et l'analyse de celui-ci du point de vue littéraire. Les élèves doivent donc identifier le nouveau vocabulaire, puis les caractéristiques des personnages, les indicateurs temporels, les indicateurs de lieux, pour conclure avec un résumé des deux fils conducteurs narratifs de l'extrait analysé. L'activité se poursuit parallèlement dans deux autres directions, soit dans les cours d'histoire et de mathématiques. La poursuite de l'activité dans le cours d'histoire propose un débat d'idées, appuyé par une recherche, sur l'accès des femmes à l'éducation et/ou sur l'esclavage, sujet dont il est aussi question dans le texte de Negri, et ce, en parallèle aux mêmes thèmes développés en classe sur la Nouvelle-France, dans le but de respecter le programme de formation de l'école québécoise dans cette discipline.

Enfin, en ce qui nous concerne plus précisément, l'activité se poursuit dans le cours de mathématiques avec une entrée directe sur des concepts mathématiques nouveaux ou connus. L'enseignant revisite donc avec les élèves l'extrait de Negri, mais en ciblant les concepts mathématiques qui y sont révélés. La partie mathématique se découpe alors en cinq parties. La première consiste en une discussion sur les nombres entiers entre l'enseignant et les élèves à propos de la philosophie pythagoricienne du « Tout est nombre ». Un extrait du texte permet de comprendre que les élèves réagiront à de telles idées sur les nombres :

> - Le un, entend-il, c'est l'identité de l'être humain, c'est le tout ordonné et harmonieux, le bel ordre, le Cosmos, c'est le caractère de la perfection et c'est l'unité de Dieu dans sa simplicité. Un, est le seul nombre qui reste égal à lui-même, le multiplie-t-on un nombre infini de fois par lui-même. Le un est le centre de tout système. Le deux est ce qui est divisible et mouvant, ce qui a deux faces ou deux pôles, ce qui est obscur et clair, c'est le jour et la nuit, la guerre et la paix. Le trois est ce qui a un début, un milieu et une fin, et tout ce qui est parfait est semblable à trois. Le quatre est la première puissance mathématique. (…) (Negri 1991, p. 360)

Dans la deuxième partie, l'enseignant engage les élèves dans une tâche sur les nombres polygonaux, suite à la lecture du discours du personnage Pythagore qui se poursuit et du schéma (Figure 1) qui est proposé dans l'extrait de la biographie romancée du mathématicien. Les élèves doivent alors trouver et dessiner de nouveaux nombres triangulaires et carrés, qui ne figuraient pas dans le schéma. Ensuite, les élèves doivent anticiper un raisonnement pour définir les nombres pentagonaux et ultimement, les élèves doivent trouver une formule algébrique permettant de généraliser le nombre de points d'une nième figure composée à la manière des nombres triangulaires, carrés et pentagonaux.

> (…) Ainsi, il y a des nombres qui engendrent des figures planes, c'est le cas de trois, six et dix que l'on peut disposer en triangle et que j'appellerai pour cela des nombres triangulaires. Et il y a des nombres carrés, tels le quatre et le neuf. D'autres nombres encore engendrent des solides, le cinq fait naître une pyramide et le huit, un cube. (Negri 1991, p. 361)

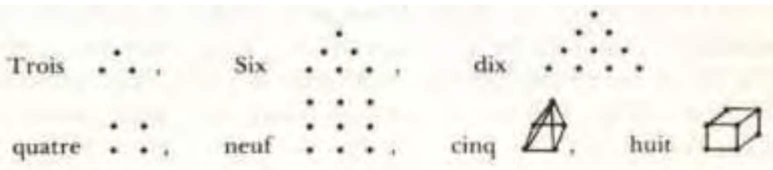


Figure 1 *– Schéma extrait du texte de Negri (1991)*

La troisième partie de l'activité dans le volet mathématique amènent les élèves à réfléchir sur les propriétés des solides, à partir des phrases énoncées dans l'extrait ci-dessus du texte de Negri. Puis, toujours au fil des leçons données par le personnage de Pythagore, la quatrième section propose un travail sur la preuve de la propriété suivante : « Toute quantité paire de nombres impairs donne un nombre pair ». Ce travail est fait à l'aide de schéma, pour être accessible aux élèves et dans l'intention de demeurer centrer sur le contexte des mathématiques pythagoriciennes. L'enseignant peut aussi demander une preuve algébrique, s'il le souhaite, à ce moment. Enfin, la dernière partie mathématique de l'activité porte sur le passage traitant des moyennes arithmétique, géométrique et harmonique. On suggère alors à l'élève de traduire les définitions de ces moyennes et de fournir de nouveaux exemples, qui ne sont pas donnés par l'élève de Pythagore dans l'histoire. Un petit prolongement algébrique est aussi suggéré dans cette section, pour ceux qui veulent pousser plus loin le raisonnement algébrique lié à la moyenne géométrique, que l'on voit au secondaire plus souvent sous le nom de « moyenne proportionnelle » de deux nombres. Encore une fois, un extrait du texte de Negri est présenté ci-dessous, pour mieux comprendre le type de décodage qui est attendu des élèves.

> -Tu as déjà écrit qu'il y a trois genres de moyennes et pour chacune tu as donné des exemples. Mais, moi je peux t'en fournir d'autres. -Vraiment ? Alors dis-les-moi, je t'en pris. -Eh bien je te dirai que sept est la moyenne arithmétique de cinq et neuf, car la somme de cinq et neuf, divisée par deux, donne sept. Et aussi que six est la moyenne géométrique de trois et douze car trois divisé par six est égal à six divisé par douze. Et si je t'ai parlé du nombre sept, c'est parce qu'il est le soleil, la Fortune, la voix, le chant, qu'il est comme la déesse Athéna, qui n'est point née d'une mère et n'a pas d'enfant, car il n'engendre ni n'est engendré par aucun nombre de la décade. (Negri 1991 p. 368)

IV. MÉTHODOLOGIE RELATIVE AUX INTERVENTIONS AUPRÈS DES ÉLÈVES

L'activité est réalisée auprès d'élèves de troisième secondaire (14-15ans), puisque c'est à ce niveau que se fait l'apprentissage « formel » du théorème de Pythagore. Je dis « formel » car il arrive que certains élèves entrevoient le concept plus tôt dans leur parcours, mais en ce qui concerne le programme de formation de l'école québécoise (MELS, 2007), c'est vraiment à ce moment que ce travail est prescrit. L'idée est donc de proposer cette activité aux élèves avant tout enseignement sur le théorème de Pythagore, pour les amener à se représenter l'époque et le contexte dans lequel le mathématicien a développé le théorème.

Le groupe dans lequel a été réalisée l'activité a été choisi de façon purement pratique : il s'agit du seul groupe auquel j'enseigne actuellement qui est de niveau troisième secondaire. Par ailleurs, il s'agit d'un groupe d'élèves auquel j'ai enseigné en deuxième secondaire, ce qui fait que les élèves étaient familiers avec la manière de procéder en général dans le cours. Le groupe est composé de 36 élèves de niveaux mathématiques assez différents (fort, moyen, faible). Cette hétérogénéité permet donc de représenter une population diversifiée d'apprenants.

1. Approche d'intervention privilégiée et justification

L'analyse d'un extrait de la biographie romancée de Michèle Negri, *Le roman de Pythagore*, est donc à la base de découvertes historiques sur la vie de Pythagore dans cette activité, autant sur la personnalité du mathématicien-philosophe que sur son univers, ses valeurs ainsi que sur les concepts mathématiques qu'il a développés.

En ce qui concerne l'approche pédagogique privilégiée dans la partie mathématique de l'activité, j'ai choisi une intervention en alternance entre la discussion de groupe et le travail en petites équipes. La tâche est énoncée alors que les élèves en prennent connaissance dans le document de travail. Ensuite, les élèves se regroupent en petites équipes de deux ou trois élèves pour tenter de résoudre les problèmes qui leur sont proposés. Durant ce temps, l'enseignant circule dans la classe pour poser des questions concernant la tâche aux élèves, pour les amener à décortiquer le problème davantage. Enfin, une fois qu'une bonne proportion d'élèves a proposé une solution, un retour est fait par l'enseignant avec le groupe-classe, sous forme de discussion, pour valider ce qui est pertinent et ce qui fait moins de sens. L'enseignant guide alors la conversation pour décortiquer le concept dont il s'agit.

Pour ce qui est de l'approche d'intervention privilégiée dans les cours de français et d'histoire, une approche similaire est recommandée, s'arrimant bien sûr avec la spécificité des tâches pour chacune de ces matières.

2. *Plan global des interventions*

L'activité s'échelonne normalement sur six périodes de 75 minutes, deux périodes pour chacune des trois disciplines qui participent à l'activité, *Français*, *Histoire* et *Mathématique*. Concernant l'ordre dans lequel devraient être présentés les cours portant sur l'activité, il est primordial que le premier de tous soit celui de français, car la lecture du texte est préalable au travail dans chacune des deux autres disciplines.

Le tableau 1 suggère une chronologie des cours, qui peut toutefois être réorganisée selon leurs préférences et les contraintes imposées par les horaires des enseignants participants au projet.

Ordre	Titre du cours
1	*Francais* – 1ère partie
2	*Histoire* – 1ère partie
3	*Mathématiques* – 1ère partie
4	*Français* – 2e partie
5	*Histoire* – 2e partie
6	*Mathématiques* – 2e partie

***Tableau 1** – Ordre des cours suggéré pour l'activité*

3. *Méthodologie de collecte et d'analyse des données2*

Le choix de la méthodologie de collecte des données est issu de l'intention de la recherche-action, c'est-à-dire illustrer que l'intégration d'une composante historique à l'enseignement des mathématiques est bénéfique pour l'apprentissage des élèves et le développement du volet culturel du cours. Dans ce sens, ce sont mes observations réalisées dans la salle de classe durant l'activité qui sont présentées, de même que quelques extraits des productions des élèves en lien avec les tâches explicitées plus haut. L'analyse des données se présente donc façon qualitative, tout en préservant l'anonymat des élèves participants.

V. RÉSULTATS

En ce qui concerne la première tâche, la discussion sur les nombres entiers tels que les voyait Pythagore, elle a permis une entrée en matière qui engageait manifestement les élèves. Plusieurs élèves voulaient communiquer leur impression personnelle sur le paragraphe du texte de Negri cité plus tôt (voir p. 5).

Ce type de discussion est pertinent du point de vue l'approche culturelle dans le sens où les nombres que les élèves connaissent et manipulent depuis plusieurs années sont alors présentés

[2] *L'analyse des données est fournie seulement pour l'orientation Mathématique, puisque c'est ce qui est visé par la problématique de la recherche-action.*

de manière très différente et très singulière. Cette discussion permet aux élèves de mieux comprendre peut-être l'intérêt des grecs de l'époque de Pythagore, alors qu'ils sont présentés comme des « objets » auxquels on cherche à donner un sens. C'est là le début du travail mathématique.

La deuxième tâche, celle sur les nombres polygonaux, s'est avérée fort intéressante. Dans le groupe où l'activité a été testée, c'est la section qui a suscité le plus d'intérêt de la part des élèves. Pour ce qui est de trouver de nouveaux nombres triangulaires et de nouveaux nombres carrés, il n'y avait pas de véritable défi. Toutefois, lors du travail sur les nombres pentagonaux, les élèves confrontaient entre eux leurs idées car la façon de représenter les nombres pentagonaux n'était pas la même pour tous. Les figures 2, 3 et 4 présentent des productions d'élèves qui illustrent ce propos. Le désir des élèves de découvrir comment « fonctionnent » les nombres pentagonaux était alors tangible de par les interactions que les élèves avaient entre eux.

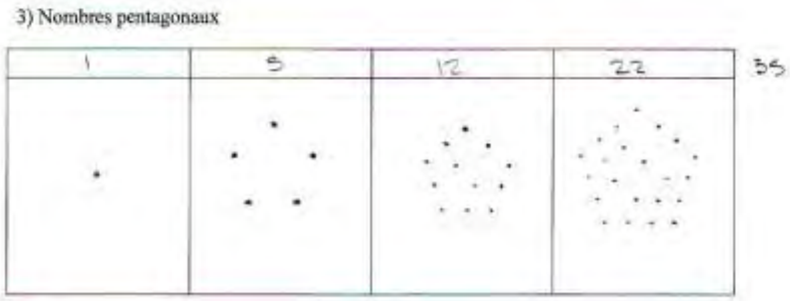


Figure 2 *– Production de l'élève A*

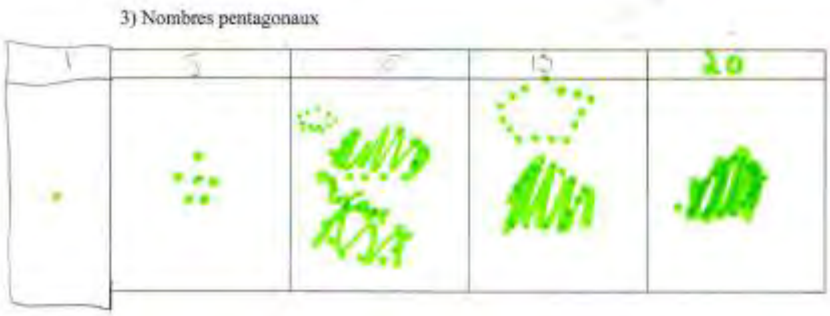


Figure 3 *– Production de l'élève B*

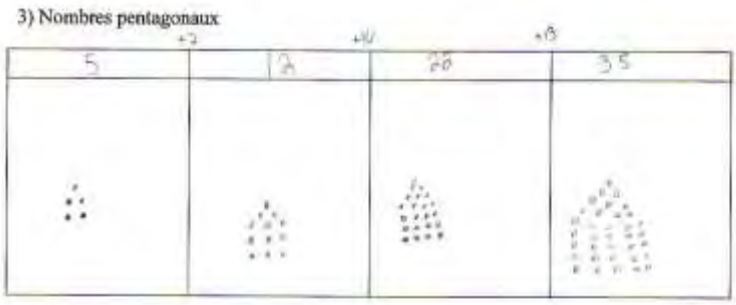


Figure 4 *– Production de l'élève C*

La figure 2 montre que l'élève A obtient la bonne suite de nombres pentagonaux, dans une disposition s'apparentant à celle d'un pentagone régulier. L'élève C propose lui aussi une suite de nombres valide, mais l'allure des points est différente, ne formant pas cette fois une disposition « régulière » (Figure 4). De son côté, l'élève B dispose les points à la manière aussi d'un pentagone régulier, sans toutefois obtenir les bons nombres de points (Figure 3). Pour lui, on comprend que ce sont les multiples de 5 qui forment les nombres polygonaux. En comparant sa solution à celle des autres élèves, ou encore au raisonnement exploité pour les nombres triangulaires ou carrés, l'élève B peut être amené à se repositionner.

Cette partie de l'activité prend donc son ancrage à travers « la leçon donnée par le personnage de Pythagore », mais elle est bonifiée en classe, d'une part par le prolongement sur les nombres pentagonaux, et d'autre part parce qu'on amène les élèves à trouver une façon de généraliser le nombre de points de la 15^{e} figure. Ce passage vers un raisonnement algébrique permet à l'élève de dépasser le niveau des pythagoriciens, beaucoup plus empirique. Il est à noter que les élèves participants savaient déjà que l'algèbre avait vu le jour des siècles après l'époque de Pythagore, au Moyen Âge, dû à une présentation en deuxième secondaire, lors du début du travail algébrique. À travers la tâche, les élèves ont donc pu, d'une certaine manière, se replacer dans la peau d'un élève de Pythagore, puis ils découvrent qu'ils sont capables de pousser leur raisonnement encore plus loin. C'est précisément en ce point que la richesse de l'activité se déploie dans une dimension historique et culturelle.

Dans la troisième partie de l'activité, le travail sur les solides se veut davantage un décodage du vocabulaire utilisé dans le texte dans le but de tracer de nouveaux solides. En troisième secondaire, les élèves sont déjà familiers avec les prismes et les pyramides, donc la tâche en lien avec la leçon de Pythagore permet surtout d'effectuer un retour sur des notions déjà connues des élèves. La façon dont le personnage de Pythagore s'exprime dans le texte peut toutefois susciter certaines réactions. Lorsque les élèves lisent dans le texte « le cinq fait naître une pyramide et le huit un cube », on veut amener les élèves à comprendre que pour Pythagore et ses élèves, tout travail se fait en lien direct avec les nombres entiers. Ce sont ces nombres qui leur permettent de travailler sur les nombres polygonaux, tout comme cela leur permet de travailler les solides. L'entrée historique permet ici de faire comprendre aux élèves que, pour les pythagoriciens, tout travail mathématique se fait en lien direct avec des quantités entières, car c'était ces quantités qui intéressaient les mathématiciens de l'époque.

La quatrième partie a aussi donné lieu à des raisonnements intéressants chez les élèves. Les élèves devaient par un schéma montrer que « si on ajoute une quantité paire de nombres impairs, cela donne un nombre pair » (Negri 1991). Le travail sur les nombres polygonaux qui a été fait dans la deuxième partie de l'activité est réinvesti ici, comme le témoigne la production de l'élève D, sur la figure 5, qui présente les quantités en jeu par des arrangements de points. Ce qui est intéressant, c'est qu'on voit aussi que l'élève exploite la définition de la multiplication comme étant une addition répétée pour détailler son raisonnement. ^^

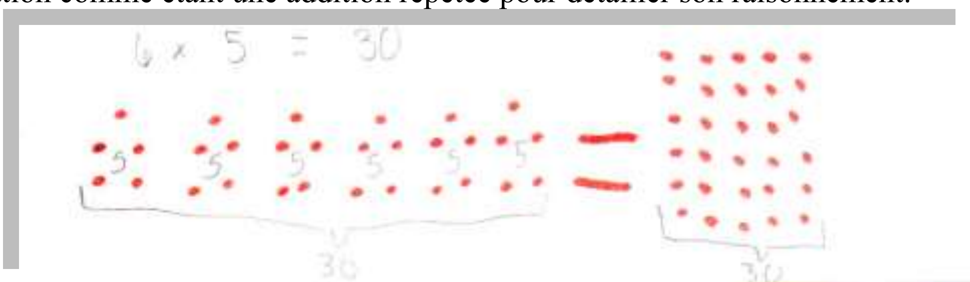
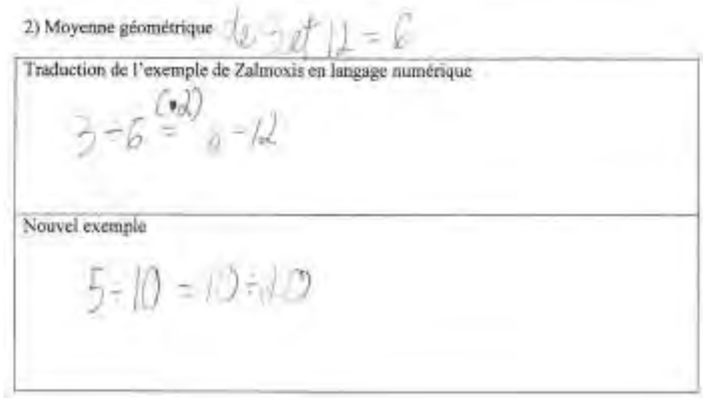


***Figure 5** – Production de l'élève D*

Enfin, dans la dernière partie de l'activité *Pythagore : L'homme derrière le mathématicien*, les élèves devaient encore une fois traduire un énoncé mathématique, cette fois-ci concernant les moyennes. Dans un premier temps, il fallait décoder l'exemple en langage numérique, puis, à partir de cet exemple et des propriétés qui en découlent, produire un nouvel exemple.

Cette activité encore une fois directement liée avec le dialogue dans le texte de Negri entre Pythagore et un de ses élèves (Zalmoxis) permet aux apprenants de la classe de transposer la relation élève/enseignant de cette époque, et de voir que mathématiquement, ce qui est présenté lui est accessible. La figure 6 montre un exemple de ce qui était attendu des élèves. Il est intéressant ici de noter que la propriété dégagée par l'élève E dans l'exemple de Zalmoxis, soit que les quantités de droite, par rapport au symbole d'égalité, sont doublées par rapport à celle de gauche, lui permet de répondre facilement à la question suivante, voulant qu'il formule un nouvel exemple.


2) Moyenne géométrique

Traduction de l'exemple de Zalmoxis en langage numérique

3÷6 (•2) = 6÷12

Nouvel exemple

5÷10 = 10÷20

Figure 6 *– Production de l'élève E*

Chacune des cinq sections de la partie mathématique de l'activité a donc à sa manière exploitée un sujet mathématique via un artéfact historique, dans le but d'intégrer l'histoire à l'enseignement des mathématiques

VI. CONCLUSION

Dans un premier temps, il est apparu clairement que la perspective historique et culturelle de l'enseignement des mathématiques est encouragée non seulement par le programme de formation de l'école québécoise, mais aussi par des spécialistes de l'enseignement (Inchauspé 2007) et plus spécifiquement de l'enseignement des mathématiques (Charbonneau et Ross 2002, 2003). D'autre part, pour parvenir à instaurer un tel caractère historique à l'enseignement des mathématiques, il faut assurer la présence de certains éléments nécessaires à la réussite du contact historique et culturel. Ces éléments se résument ainsi : il faut organiser une tâche permettant une comparaison entre une époque déterminée et l'époque actuelle. Aussi, pour assurer la pertinence de la démarche, la tâche doit s'enrouler autour de concepts mathématiques précis, bien identifiés, accessibles pour les élèves. Enfin, il est nécessaire que l'activité ayant pour but de fusionner l'histoire et les mathématiques soit reliée à un ou des champs d'intérêt des principaux acteurs de la démarche : soit les élèves et les enseignants.

C'est donc dans ce cadre que l'activité *Pythagore : L'homme derrière le mathématicien* a été érigée. Si la partie interdisciplinaire à réaliser conjointement dans les cours de français et d'histoire a été peu détaillée lors de l'analyse, il n'en demeure pas moins que cela contribue à démontrer la portée des mathématiques du point de vue culturel et historique, au-delà de la classe de mathématiques elle-même. Ces diverses orientations permettent donc aux élèves d'établir des liens entre les différentes disciplines de leur corpus scolaire.

Par ailleurs, à travers les cinq tâches mathématiques qui sont proposées à travers l'activité, le lien entre l'objet historique, soit les enseignements de Pythagore dans le cas présent, et l'objet mathématique est omniprésent. Cela permet à l'élève d'une part de prendre conscience de l'héritage laissé par les Grecs à l'humanité, et d'autre part de valider que les concepts présentés peuvent être encore étudiés et approfondis aujourd'hui, qu'ils conservent leur pertinence.

Enfin, on peut se questionner sur une approche d'enseignement des mathématiques qui serait basée uniquement sur une perspective historique et sur l'aspect réaliste d'une telle entreprise. Un long travail de création accompagnerait certainement une telle démarche, mais il serait intéressant d'en étudier les répercussions à long terme, sur le développement de la pensée mathématique des élèves. Je pense toutefois que dans un premier temps, le mandat à se donner en ce qui concerne l'intégration de la perspective historique dans l'enseignement des mathématiques serait de développer davantage d'activités répondant aux critères énoncés plus tôt, pour rendre cette approche culturelle plus accessible aux enseignants de mathématiques.

RÉFÉRENCES

Charbonneau L. (2002) Histoire des mathématiques et enseignement des mathématiques au primaire. *Instantanées Mathématiques* 29(1), 21-36. *Consulté le 30/3/12 sur :* http://www.math.uqam.ca/~charbon/personnel/histoire.html

Charbonneau L. (2010) *MAT6221 Histoire des mathématiques – Notes de cours*. Montréal : Coop UQAM Éditeur.

Inchauspé P. (2007) *Pour l'école, Lettre à un enseignant sur la réforme des programmes*. Montréal : Editions Liber

MELS (2006) *Programme de formation de l'école québécoise, Enseignement secondaire – Premier cycle*. Montréal : Gouvernement du Québec.

MELS (2007) *Programme de formation de l'école québécoise*, *Enseignement secondaire – Deuxième cycle*. Montréal : Gouvernement du Québec

Negri M. (1991) *Le roman de Pythagore*, Paris : Éditions Buchet-Chastel.

Perrault M. (2010) *Activité mathématique à caractère historique – Pythagore : l'homme derrière le mathématicien*, Montréal UQAM : Travail réalisé dans le cours MAT7222.

Proulx J. (2006) *« Objectifs comme points de départ » versus « objectifs comme point d'arrivée » : un défi pour la formation des maîtres*. In Bednarz N., Mary C. (Eds.) *Actes (CDROM) de EMF2006 – L'enseignement des mathématiques faces aux défis de l'école et des communautés – Université de Sherbrooke – 27-31 mai*. Montréal : éditions du CRP et Faculté de l'Education de l'Université de Sherbrooke.

Ross A, Charbonneau L. (2003) Trois petits écoliers, trois grandes époques, Coccalas, Abdellah et Pierre. *Bulletin AMQ* Vol. XLIII no.4 (décembre), 48-57.

ANNEXE[3] – GRANDES LIGNES DE L'ACTIVITÉ PRÉSENTÉE (CONSIGNES AUX ÉLÈVES)

Partie 1 – S'interroger sur une autre vision des mathématiques

Selon Pythagore, « Tout est nombre ». Il explique clairement cette vision du monde en corrélation directe avec les mathématiques dans l'extrait présenté à la page 360 du texte de Michèle Negri. Discute avec les autres élèves de cette idéologie.

Partie 2 – À la découverte des nombres polygonaux

Lors de la première leçon de Pythagore, ses élèves découvrent que :

« Chaque nombre entier peut être représenté par un ensemble ordonné de points qui nous renseignera sur ces propriétés. »

Regardons ensemble les exemples proposés par Pythagore, que Zalmoxis s'est représentés mentalement. Il y a d'abord les nombres triangulaires, puis les nombres carrés.

Dessine les deux prochains nombres triangulaires et carrés qui respectent les mêmes propriétés que les exemples donnés par Pythagore. Indique quelle propriété des figures présentées te permettent de construire les deux nouvelles figures.

Bien que Pythagore n'en ait pas parlé dans sa leçon, tu devines sûrement qu'il existe d'autres nombres polygonaux. Selon le même procédé que pour les nombres triangulaires et carrés, représente les cinq premiers nombres pentagonaux.

Existe-t-il un procédé mathématique permettant de connaître le nombre de points que possède le 15^{e} nombre triangulaire, carré ou pentagonal ? Certainement! Pythagore ne le connaissait peut-être pas au moment de cette première leçon mais aujourd'hui nous savons comment faire pour le savoir !

Rappelle-toi ce que tu as vu l'an dernier à propos des suites arithmétiques et détermine combien de points possèdent les trois sortes de nombres polygonaux que nous avons étudiés. Indique aussi la formule algébrique qui permet de trouver le nombre de points que possède n'importe quel nombre triangulaire, carré ou pentagonal.

Partie 3 – À la découverte des solides

Toujours dans l'extrait du texte de Negri de la page 361, Pythagore traite des nombres qui « engendrent des solides ». Qu'est-ce que les nombres représentent sur les solides que Pythagore présente?

Pythagore parle d'abord du nombre 5 qui « fait naître une pyramide ». Existe-t-il un nombre entier inférieur à 5 qui permet de faire naître une pyramide?
Si oui, représente-la.

À ton avis, quelle célèbre construction connue à l'époque de la Grèce Antique a incité Pythagore à voir 5 comme étant le premier nombre à engendrer une pyramide?

[3] Pour obtenir le document de travail complet fourni aux élèves de même que l'extrait de la biographie romancée de Michèle Negri, contacter Marika Perrault à perrault.marika@courrier.uqam.ca.

Évidemment, il existe plusieurs autres pyramides que celle mentionnée par Pythagore. Dessine en deux autres dont le nombre permettant de les « faire naître » est inférieur à 10. Pythagore parle aussi du nombre 8, qui « fait naître » un cube. Quel autre solide peut être « engendré » par le nombre 8? Dessine trois solides autres que des pyramides, engendrées par les nombres 6, 9 et 10.

Partie 4 – Élaborer une preuve au sujet des nombres pairs

Dans l'extrait du *Roman de Pythagore* du bas de la page 366 et du haut de la page 367, Zalmoxis se remémore la leçon de Pythagore qui portait sur les nombres pairs et impairs :

> Comme la définition du nombre pair qu'a donné, la veille, Pythagore, et il se souvient que le maître a demandé à ses élèves de prouver que si l'on ajoute une quantité paire de nombres impairs, cela donne un nombre pair. Et lui, il a été le premier à savoir le faire.

Relève le défi proposé par Pythagore, que Zalmoxis, un garçon de ton âge, a été capable de relever, il y a plus deux millénaires de cela. D'abord, rappelle-toi les définitions des nombres pairs et impairs. Ensuite, commence par faire une preuve à l'aide d'un schéma. Tu peux partir d'un exemple pour ensuite généraliser ton raisonnement. C'est d'ailleurs sûrement ce que Zalmoxis a fait à l'époque. Enfin, écris ta preuve de façon formelle, avec les outils algébriques que tu connais. (C'est là que tu dépasses le raisonnement de Zalmoxis, car à son époque, l'algèbre n'était pas encore inventée !)

Partie 5 - À la découverte des moyennes arithmétiques, géométriques et harmoniques

Dans les deux dernières pages du texte (p.367-368), Zalmoxis démontre sa valeur intellectuelle en donnant à Pythagore un exemple validant chacun des concepts du cours qu'il avait préparé sur les moyennes. Pour chaque type de moyenne, transcris en langage numérique l'exemple donné par Zalmoxis. Ensuite, fournis toi aussi un autre exemple illustrant chaque moyenne, soit en mots ou numériquement.

Approfondissement de la partie 5

La moyenne géométrique est aussi appelée de nos jours « moyenne proportionnelle ». Lorsque dans une proportion, on a trois termes tels que $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$, on dit que *c* 'est moyenne proportionnelle de *a* et *b* Aussi, on peut dire que $c^2 = a \cdot b$, et que la moyenne géométrique de deux nombres *a* et b est c*,* tel que $c = \sqrt{a \cdot b}$.
Telle qu'on la définit aujourd'hui, la moyenne harmonique *H* de deux nombres *a* et *b,* peut être généralisée avec la formule suivante : $H = \frac{2\,a \cdot b}{a + b}$. Est-ce que l'exemple donné par Zalmoxis et celui que tu as suggéré fonctionnent toujours selon cette définition? Démontre algébriquement que l'explication que donne Zalmoxis est en fait celle d'une moyenne géométrique.

LANGAGES MATHÉMATIQUE ET PHYSIQUE ET DIFFÉRENCES

Céline RENKENS*

Résumé – Après une brève description du langage des sciences formelles et de celui des sciences expérimentales, nous chercherons à décrire le rapport au réel, à la vérité ainsi que le fonctionnement des communautés de chercheurs en mathématique ainsi qu'en physique. Nous terminerons par une comparaison de ces deux langages afin d'essayer de mettre quelques différences en évidence.

Mots-clefs : Langage, mathématique, scientifique, comparaison, enseignement

Abstract – After a brief description of the language of the formal sciences and experimental sciences, we seek to describe the connection to reality, truth and the working of the communities of researchers in mathematics and physics. We conclude with a comparison of these two languages in an attempt to highlight some differences.

Keywords: Language, mathematics, physics, comparison, teaching

I. INTRODUCTION

Lorsque nous enseignons différentes disciplines au secondaire, nous sommes vite confrontés à des élèves qui ne réagissent pas de la même façon dans les différents cours. Intéressons-nous aux cours de mathématique et de physique en particulier. Une opération mathématique qui leur semble simple au sein même de ce cours devient très compliquée en cours de physique, qu'il s'agisse de la trigonométrie dans le triangle rectangle, des équations du second degré ou encore des systèmes de deux équations à deux inconnues. En fait, si nous observons bien les choses, nous pouvons remarquer que, souvent, nous ne voyons pas ces outils de la même façon dans ces deux cours. Dans mon travail de fin d'étude j'ai comparé les langages utilisés en mathématique et en physique. Je vais donc commencer par une description de ces langages. Ensuite, par une brève comparaison nous montrerons quelques différences d'approches entre ces 2 disciplines.

II. DESCRIPTION DES DEUX LANGAGES

Afin d'être rigoureux sur les termes que nous allons utiliser, nous allons commencer par introduire quelques définitions.

1. Définitions de base

Pour entamer cette démarche, nous avons choisi une définition du langage tirée de la linguistique.

> Un langage peut être considéré comme l'ensemble (virtuellement infini) des phrases bien formées qui peuvent être engendrées au moyen d'une grammaire déterminée, c'est-à-dire au moyen d'un ensemble fini de règles d'engendrement, permettant de former des unités complexes, susceptibles de revêtir un sens complet (qui peuvent être de nature abstraite et ne sont en général pas directement repérables comme telles au niveau perceptif). (Ladrière 1970, p. 17)

La grammaire comprend trois composantes. La première est une composante syntaxique - c'est-à-dire les règles formelles - qui engendre une structure abstraite, qui doit être « interprétée » par les deux autres composantes.

> Plus précisément, elle produit des unités capables de fonctionner syntaxiquement et les distribue en catégorie ; en particulier elle produit les unités syntaxiques correspondant aux phrases. (Ibid, p. 17)

* FUNDP – Belgique – celine.renkens@math.fundp.ac.be

© Renkens C. (2012) Langages mathématique et physique et différences. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (SPE1, pp. 1662–1670). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

On peut observer 3 niveaux dans la syntaxe :

- le langage : phrases bien faites ;
- la langue : succession cohérente de phrases ;
- la théorie : la langue à laquelle on ajoute des axiomes (ou des tautologies).

La deuxième est une composante sémantique qui associe à ces unités des significations. Il y a également 3 niveaux dans la sémantique correspondant aux 3 niveaux de la syntaxe :

- les phrases interprétées ;
- la structure : suite cohérente de phrases interprétées ;
- le modèle : celui-ci est compatible avec la théorie si tous les axiomes sont interprétés par des phrases vraies dans la réalité.

Enfin, une composante phonologique qui associe à ces unités des représentations phonétiques. Cette composante est très importante lorsque, notamment, nous sommes confrontés à des mots écrits avec une orthographe identique, mais dont la prononciation peut faire varier la signification. Par exemple, le mot « couvent » possède des sens différents dans les phrases « les poules couvent » et « les sœurs sont au couvent ». Nous voyons donc que la sémantique a besoin de cette composante phonologique.

> Ainsi une grammaire permet, en définitive, d'associer par l'intermédiaire de structures abstraites, des significations à des signaux acoustiquement déchiffrables. (Ibid., p. 17)

Pour définir les langages scientifiques, nous devons introduire les notions de signe et de concept. Un *signe* est une expression capable de véhiculer un sens, le signe « ∃ » en mathématique en est un exemple.

> Un concept est une représentation idéale[1] à travers laquelle l'esprit vise un segment du monde réel ou du monde idéal, ou une propriété, individuelle ou relationnelle, susceptible de se rapporter à une entité réelle ou idéale. (Ibid., p. 25)

Par exemple, le concept de « nombre pair », en mathématique, est une propriété individuelle qui se rapporte à une entité idéale. Celui « d'être frère de » en langage commun est une propriété relationnelle qui se rapporte à une entité réelle.

Nous devons définir ce que sont les signes et les concepts pour chacun des langages.

2. Le langage des sciences formelles

Les sciences formelles sont les mathématiques et la logique. Avant d'expliquer la forme et le rôle des signes et des concepts dans le langage mathématique, reprenons quelques définitions données par Ladrière qui faciliteront la compréhension.

Un *symbole* formel est une unité élémentaire faisant partie du vocabulaire d'un langage artificiel complètement formalisé, c'est-à-dire d'un langage défini de manière purement syntaxique, au moyen d'un système explicite de règles, abstraction faite de toute référence à d'éventuelles significations intuitives des expressions utilisées, comme par exemple les symboles « ∃ », « x », « = », ...

Un *système formel* est un langage artificiel muni de procédures qui permettent de classer les « sentences » en deux classes : celles des sentences vraies et celles des sentences fausses.

Une *sentence* est une expression qui représente, dans un langage formel, une affirmation relative à un état de choses, et comme telle est susceptible d'être vraie ou fausse. Voici un

[1] Le mot idéal, dans ce mémoire, signifie « qui vient du monde des Idées » au sens de Platon.

exemple assez simple de sentence : « 1 + 1 = 2 ». Dans ce cas, les signes sont assez limités, il s'agit de symboles formels.

Les mathématiques peuvent prendre la forme d'un système déductif (exemple de système formel). Dans un système déductif, les procédures se présentent sous la forme d'axiomes - c'est-à-dire de sentences déclarées vraies - et de règles de déduction qui permettent de proche en proche, à partir des axiomes, d'obtenir toutes les sentences vraies du système.

Dans le cadre des mathématiques, les *concepts* sont les objets idéaux dont traitent les différentes disciplines des mathématiques tels que les nombres, les ensembles, les structures algébriques, les espaces, ...

Dans le cadre de la logique, les concepts sont en fait le discours, ou plus précisément les propositions catégoriques qui sont les sentences de la logique, et les quatre principes de base de tout raisonnement logique :

- le *modus ponens :* si on a A et que A entraîne B alors on a B.
- la généralisation : si on a C alors pour tout *x*, on a C ; lorsqu'on a une formule générale, elle est vraie dans un cas particulier.
- le principe du tiers exclu : une proposition est soit vraie, soit fausse.
- le principe de la double négation : non (non E) = E.

Les concepts ont un rôle à la fois descriptif et explicatif.

3. Le langage des sciences empirico-formelles

Les sciences empirico-formelles sont les sciences construites sur le modèle de la physique. Elles visent une réalité qui est empiriquement saisissable. Pour analyser cette réalité, elles peuvent s'appuyer sur les ressources fournies par les sciences formelles. Nous devons donc, dans ce langage, tenir compte des données empiriques et des manipulations. C'est pourquoi nous distinguons deux sous-langages :

- le langage théorique, qui exprime certaines relations d'ordre général entre les entités et les propriétés grâce auxquelles on peut analyser la réalité à étudier.

  Il contiendra des « termes théoriques » qui se réfèrent à des entités ou à des propriétés dont la majorité, voire la totalité, peuvent être inobservables.

- le langage empirique, qui permet de décrire les aspects empiriquement observables de cette réalité et les opérations que l'on peut effectuer sur elle.

  Il contiendra des « termes empiriques » qui se réfèrent à des entités et des propriétés observables.

Les termes théoriques ou empiriques ne réfèrent pas directement aux objets et propriétés qu'ils évoquent. Ils en désignent leurs concepts. Par exemple, « L'eau bout à 100°C » désigne une propriété physique générale (concept) et non pas un phénomène particulier.

Ces deux sous-langages doivent bien évidemment être mis en relation l'un avec l'autre. Il est donc nécessaire d'introduire des règles de correspondance, grâce auxquelles nous pourront traduire certaines propositions du langage empirique en langage théorique et réciproquement. Dans ce langage, la théorie est composée d'un ensemble de propositions prises comme axiomes, formulées dans le langage théorique, et d'un autre ensemble de propositions qui expriment les règles de correspondance. Les propositions prises comme axiomes sont considérées comme vraies, elles jouent le rôle des hypothèses. A partir de ces axiomes, on peut formuler de nouvelles propositions vraies ou fausses. Grâce aux règles de correspondance, ces propositions pourront être traduites en propositions du langage empirique, qui pourront alors éventuellement être vérifiées par l'observation.

Les sciences empirico-formelles se basent donc essentiellement sur une analyse des confrontations entre l'observation et la théorie acceptée comme vraie. Si nous prenons comme exemple l'observation : « La pomme tombe de l'arbre », nous pouvons proposer l'hypothèse qu' « Il existe une force attractrice entre la Terre et la pomme ». Ensuite par les règles de correspondances, nous prenons comme modèle : « La Terre attire la pomme et la pomme attire la Terre ».

Lorsque l'expérience empirique est vue comme une mise à l'épreuve de la théorie, on parle de falsifiabilité ou de réfutabilité. C'est ici que se situe l'utilité des concepts théoriques. En effet la théorie ne se borne pas à des faits connus, ni uniquement à ce qui est empiriquement vérifiable. La théorie a un rôle prospectif, anticipatif, elle est destinée à nous faire découvrir de nouveaux faits. Elle exprime ce qui est déjà connu et se confirme progressivement notamment par l'accumulation des faits. Ces théories sont éliminées ou remplacées par d'autres si elles sont réfutées ou falsifiées par l'expérience ou l'observation.

En ce qui concerne les signes, les propositions observationnelles doivent être distinguées des propositions théoriques, car elles sont élaborées dans un contexte opératoire de nature différente. Les propositions observationnelles sont des interprétations. Elles ne peuvent donc pas être considérées comme ultimes, irréformables. Les propositions théoriques[2], ne sont pas des images du monde mais seulement des reconstitutions conjecturales de la réalité, des modélisations du monde. Nous rencontrons dans ce langage le cercle méthodologique : d'une part la construction des théories nécessite une compréhension de l'objet, d'autre part l'objet ne nous est donné qu'à travers l'interprétation théorique. La démarche des sciences empirico-formelles peut être envisagée comme un déchiffrement de signes. Nous essayons de représenter le monde réel à travers des théories et nous mettons ensuite ces théories à l'épreuve afin de voir si elles s'accordent avec le monde empirique, réel.

4. *Différences observées par l'expérience entre les deux langages concernés*

Notre expérience, en tant qu'étudiant puis enseignant, met en évidence une différence assez marquante. Dans le langage mathématique, à partir de concepts, on communique et on en définit d'autres qui ne sont pas liés directement au monde réel. Le concept « *i* » par exemple représente la racine carrée de (-1). Il est apparu pour résoudre des problèmes calculatoires sans avoir au moment de sa création de signification concrète. On peut donc dire de ce discours qu'il est en partie abstrait. Dans le langage scientifique, à partir de l'homme, de son expérience, on parle des objets du monde réel. Par exemple, la loi de gravitation modélise des phénomènes du monde réel. Ce discours nous paraît donc plus concret.

III. RESULTATS D'ANALYSE DU LANGAGE MATHEMATIQUE

Nous nous posons la question suivante : « Comment se situent les mathématiques dans le monde qui nous entoure ? » La question étant assez vaste, nous allons décrire le rapport des mathématiques au réel, le rapport à la vérité et le fonctionnement des communautés de mathématiciens.

---

[2] Ces propositions sont aussi appelées théories dans certains livres mais ces dernières n'ont pas le même sens que celui que nous donnons aux théories dans ce mémoire.

A l'origine, la plupart des concepts mathématiques naissent pour être utile au monde. Ensuite, en mathématiques, on développe des modèles à partir de propriétés existantes, dans un univers déterminé par une série d'axiomes. A ce stade, le rapport au réel devient alors quasi inexistant. Bien souvent, ce n'est qu'a posteriori que nous pouvons nous rendre compte de l'utilité de ces théories, lorsqu'elles sont utilisées par des scientifiques. On en trouve un exemple chez Riemann : il a développé une géométrie qui, selon lui, n'aurait jamais la moindre utilité : elle était juste belle mathématiquement. C'est pourtant grâce à sa géométrie qu'Einstein à pu expliquer la relativité générale.

Néanmoins, la compréhension des règles de la logique mathématique peut permettre de mieux appréhender certains aspects du réel. Il s'agit d'une réflexion déductive et rigoureuse que l'on peut utiliser dans notre vie quotidienne. Je trouve que cette manière de penser apporte beaucoup au niveau de l'organisation, qu'elle permet de prévoir les éventuels problèmes ou incohérences d'un projet et qu'elle permet d'envisager les choses de manière juste et optimisée, même si cette logique n'est pas toujours bien comprise par tous, elle fonctionne très bien pour résoudre des problèmes rationnels.

Par contre, cette manière de réfléchir n'est pas applicable directement dans la vie quotidienne sociale. En effet, en mathématiques, une affirmation est soit vraie, soit fausse dans un univers déterminé et cette vérité découle d'un raisonnement sans faille, alors que dans nos relations, dans nos vies quotidiennes, dès qu'il s'agit de problèmes subjectifs, les choses sont loin d'être aussi simples. Non seulement certaines choses ne sont ni vraiment vraies, ni vraiment fausses, mais en outre, ce qui me semble vrai ne l'est pas forcément pour un autre. Ce raisonnement n'est donc pas applicable en toutes circonstances.

Au niveau de la vérité, par construction et de manière générale, les modèles sont des vérités intemporelles dans leurs univers. Ils ne sont pas falsifiables. Néanmoins, nous savons qu'il existe une incohérence ou une incomplétude, que les mathématiques ne suffisent pas à se fonder elles-mêmes comme nous l'a démontré Gödel par exemple. Il existe des paradoxes en arithmétique, mais ils ne nous empêchent pas de faire de l'arithmétique.

Les mathématiques se sont développées grâce aux mathématiciens qui travaillent en collaboration les uns avec les autres. Les groupes de travail se créent en fonction des spécialités telles que les statistiques, l'analyse numérique, les systèmes dynamiques, ... Ils avancent ensuite de manière structurée et rigoureuse par des raisonnements déductifs cohérents. Bien souvent ils ne repartent pas des axiomes pour établir un nouveau modèle, mais des travaux de recherche d'autres mathématiciens qui ont trouvé de nouveaux théorèmes, car ceux-ci peuvent être utilisés pour démontrer la suite au même titre que les axiomes.

Les mathématiques sont importantes car elles constituent un outil qui permet aux sciences de se développer, elles permettent un mode de réflexion rigoureux et cohérent, c'est un raisonnement universel, reconnu par tous. Elles essaient également de modéliser le réel mais agissent moins visiblement sur le monde.

IV. RESULTATS D'ANALYSE DU LANGAGE SCIENTIFIQUE

Nous nous posons la question suivante : comment se situent les sciences dans le monde qui nous entoure ? La question étant assez vaste, nous allons décrire le rapport des sciences à la vérité, le fonctionnement des communautés de scientifiques et le rapport au réel. Ce que les sciences développent n'est pas certain, il ne s'agit pas de vérités absolues. En physique, ou de manière plus générale dans les sciences, rien n'est considéré comme définitivement acquis. Tout peut être remis en question, même les fondements des modèles. C'est ce qui s'est passé lors du passage du modèle géocentrique au modèle héliocentrique pour la représentation de notre système solaire.

Les modèles scientifiques obtiennent une série d'approximations relativement bonnes. Peut-être qu'un jour nous comprendrons le fonctionnement du monde, mais visiblement nous n'y sommes pas encore arrivés. A chaque changement de paradigme, les gens pensent que les scientifiques ont enfin trouvé comment fonctionne le monde, mais l'expérience du passé nous montre bien qu'il ne s'agit que d'une amélioration des approximations. En effet, nous pouvons observer que les approximations scientifiques sont toujours meilleures, c'est-à-dire plus cohérentes avec les observations, avec le réel. La dimension historique est donc très importante ici. Nous entendons souvent les scientifiques faire un abus de langage à ce niveau : « Aujourd'hui, nous savons que ... », en réalité ils en sont persuadés mais ne peuvent pas l'affirmer car ce qu'ils pensent savoir peut être réfuté plus tard. Ils devraient dire : « Aujourd'hui, nous avons de bonnes raisons de penser que le monde fonctionne ainsi » mais face au public, ils perdraient peut être une certaine crédibilité. Ils font donc cet abus de langage pour convaincre et faire passer leurs idées.

Si une théorie est reconnue, nous pouvons considérer qu'il s'agit d'une approximation valable. Même si le monde ne fonctionne pas ainsi, la théorie nous donne des résultats assez satisfaisants. Parfois, dans un souci de simplicité, nous utilisons encore d'anciennes théories, lorsque l'objectif souhaité est une approximation et non la précision (d'une approximation meilleure qui ne sera pas non plus la vérité). C'est dans cette optique que dans l'enseignement secondaire nous expliquons toujours la gravitation par la théorie de Newton. Il s'agissait d'une bonne approximation, beaucoup plus simple que la théorie d'Einstein acceptée actuellement.

La communauté des chercheurs scientifiques ne cherche rien de définitif comme il peut y avoir des changements de paradigmes. Ils cherchent, selon leur intuition, à faire toujours de meilleures approximations. Il s'agit donc d'un travail continu.

Les sciences se basent sur l'observation du réel et permettent de découvrir que le monde est complexe, que ce que nous savons est relatif et qu'il ne s'agit donc pas de vérités absolues. Suite à ces observations, je pense devoir rester très prudente quant à ce que je dis au niveau scientifique. Cependant, grâce à elles, les scientifiques peuvent investir le monde : à partir de ce qui est compris (de manière approximative ou dans un certain contexte ou ...), ils peuvent créer des choses pour le monde. C'est là un des grands buts de la science, l'activité scientifique cherche à comprendre le monde, souvent dans un but de CREATION pour améliorer le monde.

Les sciences sont donc importantes pour le monde car elles lui permettent d'évoluer, d'avoir de nouvelles technologies qui nous permettent de vivre mieux. Il faut rester vigilant car l'intervention des sciences dans le monde peut comprendre des risques : nous avons connu des découvertes scientifiques qui peuvent être utilisées à mauvais escient, comme la radioactivité utilisée pour la bombe atomique, les découvertes sur les cellules souches utilisées pour le clonage, ... Nous nous rendons compte ainsi de l'importance du sens éthique des scientifiques.

La vue de Popper qui ne considère comme scientifiques que les énoncés falsifiables empiriquement, peut aider à comprendre comment fonctionnent les sciences et comment elles évoluent. Elles sont d'autant plus applicables actuellement, en ce temps de crise scientifique où nous recevons tant d'observations contradictoires. Dès lors, nous avons une idée assez vague de la direction dans laquelle les sciences vont évoluer dans un avenir relativement proche.

V. COMPARAISON DES DEUX LANGAGES

1. Le rapport au réel

Dans ce paragraphe, nous allons observer dans les deux langages qui nous intéressent, le rapport au réel, c'est-à-dire observer les liens entre les différentes matières et la réalité.

En mathématiques, le rapport au réel n'est pas fondamental, le mathématicien peut développer sa théorie dans un univers abstrait, et ne pas se préoccuper du monde concret. En effet, les mathématiques se basent sur diverses hypothèses, qu'elles correspondent ou non au monde réel que nous percevons. Cependant elles apportent leur contribution au monde : les mathématiques serviront utilement dans les autres sciences qui font le lien avec le monde, mais elles nous permettent aussi de développer une réflexion structurée, cohérente et rigoureuse, transposable dans la vie quotidienne. Cette manière de réfléchir que nous apporte les mathématiques est utile surtout pour tout ce qui est rationnel. Au niveau relationnel, par exemple, cette réflexion ne nous aidera pas.

En sciences, le rapport au réel est une interaction quasi constante. La physique est naturellement plus basée sur le factuel du réel (observation, expérimentation). Grâce à une série d'outils tels que les mathématiques, l'informatique, la technologie, ... elle développe une modélisation du réel. Ensuite grâce à ces modèles, les industriels peuvent développer des « objets ». Elle agit donc pour le monde en créant de nouveaux « outils » pour le monde.

2. Le rapport à la vérité

Dans ce paragraphe, nous allons observer dans les deux langages qui nous intéressent, le rapport à la vérité.

En mathématiques, les vérités sont ici intemporelles, on ne les remet pas en question. Les règles de calculs peuvent toujours être utilisées après avoir été réfutées, tant qu'on ne sort pas des limites de leur applicabilité. Comme la base du raisonnement mathématique est une série d'axiomes et non l'univers que nous percevons, nous pouvons choisir et définir un univers dans lequel une théorie est valable, est applicable.

En sciences, les paradigmes sont des théories acceptées comme vraies, mais il ne s'agit pas de vérités absolues car elles peuvent être remises en question en permanence. Les sciences cherchent à tendre vers la « vérité » par une série de descriptions toujours meilleures.

3. Le fonctionnement des communautés

Abordons enfin le fonctionnement des communautés de chercheurs en mathématique et en physique.

Le mathématicien s'intègre régulièrement dans des groupes de recherche, souvent en fonction de sa spécialité. Globalement, les avancées, en mathématique, se construisent progressivement sur base des travaux d'autres chercheurs et sont communiqués sous forme d'un enchainement de raisonnements déductifs cohérents.

Les bases de recherches des scientifiques expérimentaux sont généralement l'observation, l'expérimentation et l'interprétation. Ainsi, en fonction de leurs convictions, ils tentent de développer les modèles existants ou de les réfuter pour proposer de nouvelles hypothèses.

Que ce soit en mathématiques ou en sciences, les membres font partie de communautés, ils ne sont pas seuls. Ils s'entraident et travaillent ensemble.

4. Apports pour l'enseignement

Dans ce paragraphe, nous allons observer ce que nos conclusions au niveau de ces deux langages peuvent apporter à l'enseignement. Nous allons commencer par une réflexion à ce sujet pour l'enseignement des mathématiques, ensuite pour l'enseignement des sciences, ou plus précisément de la physique.

En cours de mathématique, un professeur peut exiger de la rigueur dans les justifications car c'est ainsi que les mathématiques ont du sens : c'est à partir de ce que l'on connaît que l'on peut démontrer de nouvelles choses. Nous retrouvons donc la démarche du mathématicien en classe lors des démonstrations (ou lors d'exercices dont le but est de proposer des preuves).

Les élèves comprennent l'absence de relation directe avec le réel, même s'ils le verbalisent différemment et disent plutôt « les maths ça ne sert à rien ». Suite à mon parcours et à mes réflexions, je trouve qu'à leur niveau il n'est pas facile de répondre à cela. Nous pouvons expliquer que les mathématiques sont nécessaires dans diverses sciences qui, elles, font le lien avec le réel. Le problème étant qu'à leur niveau, ils ne comprennent pas nécessairement l'utilité des mathématiques dans les sciences, car les mathématiques qu'ils utilisent sont trop basiques. Nous pouvons aussi leur dire que les mathématiques permettent de développer une réflexion rigoureuse et cohérente. Là encore, les élèves ne voient pas trop leur utilité car ils se disent capables de réfléchir sans cela. Je trouve qu'on ne réalise l'apport de cette rigueur dans nos réflexions (au niveau du sens critique notamment) qu'au terme d'une démarche aboutie.

La notion de vérité intemporelle des mathématiques a l'air également bien perçue par les élèves. En cette période où la tendance chez les jeunes est de remettre tout en question, je n'ai jamais entendu un élève remettre les résultats mathématiques en question. Je pense que cela peut aider les jeunes à trouver de la motivation pour le cours. Cependant, comme les notions mathématiques sont vues progressivement, pour des raisons didactiques, le professeur simplifie parfois son discours en disant par exemple : « La racine carrée d’un nombre négatif n’existe pas », avant d’avoir vu les nombres complexes. Mais il est conscient, à ce moment, que ce qu’il dit n’est exact que dans les réels et sait ce que cela devient lorsqu’on sort de l’ensemble des réels.

En cours de physique, il est intéressant de préciser aux élèves les problèmes des théories que les professeurs leur proposent. Cela leur permettra de bien comprendre l'intérêt de la recherche (nous n'avons pas tout trouvé, il y a encore du travail sur cette voie). Il est important aussi, je trouve, que lorsqu'ils utilisent une théorie « dépassée », ils le sachent et qu'ils sachent aussi pourquoi ils l'utilisent encore malgré cela. Tout comme en mathématique, on peut considérer l’enseignement de ces théories comme une simplification didactique mais par contre en sciences expérimentales une bonne description n’est pas forcément la réalité. Ce « problème » peut mettre le professeur mal à l'aise car il enseigne des choses qui ne sont peut-être pas tout à fait correctes. C'est pourquoi certains évitent ce genre de débat avec leurs élèves.

Néanmoins le rapport au réel est motivant, car non seulement ils savent que les sciences interviennent dans le monde, mais en plus, au cours, ils manipulent pour comprendre les choses par eux-mêmes. Nous pouvons donc leur proposer des travaux pratiques qui leur permettent de créer quelque chose afin de bien montrer l'utilité des sciences pour le monde.

VI. CONCLUSION

Nous avons effectué la comparaison de deux langages différents, à savoir, les langages mathématique et scientifique afin d'en faire la distinction dans leurs univers respectifs.

Pour cela, nous avons commencé par une approche de ces différents langages. Nous avons observé comment fonctionne le langage selon la linguistique, donné une brève explication des univers dans lesquels nos deux langages sont utilisés, ainsi que la manière dont nous les utilisons. Ensuite, nous avons analysé de manière plus approfondie les langages mathématiques, scientifiques en fonction de leurs caractéristiques propres. Et enfin, nous avons fait une comparaison de ces langages selon certains critères, et nous y avons découvert que :

- par rapport au monde, nous pouvons dire que les mathématiques sont l'outil des sciences qui tentent de répondre à la question du « comment ».
- nous savons qu'en mathématique, les savoirs sont moins sujets au changement et qu'en sciences, ils sont temporaires et évolutifs.
- les mathématiciens, les scientifiques ne sont pas seuls, ils se regroupent en communautés. En mathématique c'est en fonction de leurs spécialités qu'ils se regroupent et en sciences en fonction de leurs intuitions et de leurs spécialités.

Pour répondre à mes intérêts quand à la profession d'enseignante, j'ai également cherché en quoi ces découvertes pouvaient me guider dans l'enseignement de ces différents domaines. Ce travail à été fait pour mettre en évidence quelques différences entre les mathématiques et la physique dans l'enseignement. Néanmoins, il nous paraît intéressant de nuancer tout ceci. En effet, certaines théories actuelles en physique peuvent être tout aussi abstraites que celles dont nous avons parlé en mathématique. De même la plupart du temps, les mathématiques de base ont été construites en relation avec le monde réel.

Suite à tout ceci et à mon expérience, je pense que le sens donné, en secondaire, aux mathématiques et à la physique se fait tout à fait différemment, ce qui nous pousse à ne pas utiliser les outils mathématiques de la même manière dans les deux cours. Evidemment pour nous, enseignants, tout ceci va de soi alors que pour les élèves c'est bien plus compliqué à comprendre. Il est donc intéressant de creuser ces différences afin de permettre aux élèves de faire les liens nécessaires entre ces 2 cours. Voilà donc ce qui constitue ma motivation à entreprendre une thèse.

REFERENCE

Ladrière J. (1970) *L'articulation du sens. Discours scientifique et parole de la foi*. Paris : Aubier-Montaigne - Éd. du Cerf - Delachaux & Niestlé - Desclée de Brouwer.

RESOLUTION DE PROBLEMES MATHEMATIQUES ET REGISTRES DE LANGAGE

Camille SCHWAB*

Résumé – Comment nos élèves s'y prennent-ils pour résoudre un problème mathématique ? Que signifie au juste résoudre un problème mathématique ? J'ai cherché une ébauche de réponse à ces questions en observant deux séquences d'enseignement, en écoutant ce que les élèves avaient à me dire concernant la résolution de problèmes mathématiques et en observant leurs traces écrites. Sont apparues, dans les propos des élèves et les solutions qu'ils présentaient, différentes manières d'aborder et de considérer un problème. Si pour certains c'est « faire des calculs », pour d'autres c'est « chercher, essayer ». Ce texte propose d'analyser plus en détail ces éléments, ce qu'ils signifient pour l'élève et pour l'enseignant.

Mots-clefs : Elève, résolution de problèmes mathématiques, langage mathématique, registre du langage, rapport au savoir

Abstract – How do our pupils solve a mathematical problem? What does solving a mathematical problem mean? I tried to answer these questions by observing two sequences of teaching, by listening to what the pupils had to say concerning mathematical problem solving and by observing their hard copies. In their remarks and the solutions that they gave, appeared various manners of tackling and considering a problem. If for some of them it means "making calculations", for others it means "searching, trying". in this text we analyse more in details these elements and theirs significations for pupil and teacher.

Keywords: Pupil, mathematical problem solving, mathematical language, language register, relationship to knowledge

« Pour comprendre les mathématiques et d'abord les apprendre, il faut entendre leur langue » (Baruk 1992, 4ème de couverture). Cette phrase m'a poussée à diriger mes recherches du côté de la langue. M'intéressant à ce qu'il se passait du côté de l'élève lorsqu'il résout un problème de mathématiques, j'ai décidé d'observer, puis d'analyser le langage utilisé par les élèves dans ce contexte afin de savoir s'ils parlent la « langue des mathématiques », le sens qu'ils lui donnent, la compréhension qu'ils en ont. J'ai aussi gardé, en arrière-plan, des questions sur le cheminement des élèves et les difficultés rencontrées.

I. PROBLEMATIQUE

Résoudre un problème mathématique est une activité complexe qui requiert des connaissances de type mathématique ou logique, mais pas seulement. Toute une série de comportements plus généraux interagissent avec ces connaissances.

Cette activité se situe en effet au carrefour de nombreuses activités psychologiques :

> [...] la mémoire, car elle fait appel aux connaissances et à l'expérience passée, la perception, car la prise d'information sur la situation joue un rôle majeur, le raisonnement prospectif pour planifier et anticiper les conséquences d'une action, le raisonnement rétrospectif pour comprendre les raisons d'un échec, la compréhension, car la difficulté d'un problème tient bien souvent à une mauvaise appréhension de la situation, de sorte que la résolution requiert une réinterprétation (Clément 2009, p. 7).

Ce sont de nombreux facteurs, aux origines très diverses, qui vont donc venir influencer l'interprétation que l'enfant construit de la situation-problème. La lecture de l'article du quotidien *le Monde* « Stella Baruk, le goût des maths, une affaire de langue » (Krémer 2008), m'a laissé entrevoir une autre « manière d'enseigner » les mathématiques.

Selon Baruk (1992), la première difficulté en mathématique est dans son langage propre, ses mots « savants ». Face à ces mots, qui peuvent aussi présenter une difficulté pour le pédagogue, on préfère adopter une attitude méfiante et « [...] « éviter de fixer d'emblée le

* HEP Bejune – Suisse – camille.schwab@hotmail.com

© Schwab C. (2012) Résolution de problèmes mathématiques et registres de langage. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (SPE1, pp. 1671–1680). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

vocabulaire et les notations. Autant proposer, par exemple, d'éviter de fixer d'emblée le vocabulaire et l'alphabet russes pour enseigner le russe » (Op. cité, p. 20). Pour elle, c'est « [...] méconnaître l'importance constitutive d'une langue de savoir dans l'édification de ce savoir [...] » (Ibid., p. 20). Travailler l'étymologie des mots permet de leur donner du sens, de les ancrer, ce qui optimise les chances de s'en rappeler et de faire des liens avec d'autres mots et concepts. Pour Baruk, expliquer le sens des mots et des concepts enseignés doit donc faire partie intégrante de l'enseignement des mathématiques. M'intéressant plutôt à l'élève qu'à l'enseignement de la discipline, cela m'amène aux questions suivantes : Quel langage mathématique les élèves utilisent-t-ils ? Quelle compréhension des mots et concepts ont-ils ?

Au cours d'une recherche sur la représentation des élèves à l'égard des mathématiques, Blanchet (1995) a analysé la démarche des élèves en leur faisant faire des activités de recherche (c'est ainsi qu'il appelle les problèmes). Il remarque :

> [...] combien de fois ne doit-on pas constater que le savoir se limite à un ensemble de règles ou même de 'trucs' à appliquer dans des situations précises, sans réelle compréhension de la fonction et de l'utilité de ces procédés ? Ces prétendues connaissances sont juste utiles pour affronter la prochaine évaluation et s'oublient aussi vite que se collectent les nouveaux 'trucs' propres au chapitre suivant (Op. cité, p. 8).

Ce document de référence vaudois date de 1995 ; depuis, le moyen d'enseignement des mathématiques a changé. Si l'on regarde le plan d'études romand (PER) qui va entrer en vigueur pour l'année scolaire 2011-2012, on constate que l'enseignement des mathématiques devrait prendre un sens plus large. En effet, il devrait participer, avec d'autres disciplines, au développement de diverses capacités intellectuelles : l'imagination, la curiosité, le raisonnement, la modélisation, l'argumentation, la vérification. Il devrait susciter l'envie de comprendre, permettre le développement d'une pensée autonome et de la confiance en soi.

Ceci m'amène à la question de recherche suivante : « Quel langage est utilisé par les élèves dans le cadre de la résolution d'un problème mathématique ? »

Les questions sous-jacentes à cette question sont :

- Quel est le cheminement langagier des élèves qui résolvent un problème de mathématique ?
- Quelles difficultés rencontrent-ils en lien avec le langage utilisé ?

II. CADRE THEORIQUE

1. Registre de langage et rapport au savoir

Je m'intéresse au langage utilisé par les élèves afin de déterminer s'il se situe dans un registre mathématique ou non. Pour illustrer ce que j'entends par « registre », et pourquoi je souhaite l'analyser, je trouve parlant l'exemple de Bautier et Goigoux (2004). Ces deux auteurs font référence à une séquence en cours préparatoire où l'enseignante demande aux élèves de rechercher des mots où ils entendent le son [a]. Un élève propose « papa », un autre « maman » et le dernier « tonton ». Dans cette situation, le troisième élève, et le deuxième peut-être aussi, n'est plus dans un registre phonologique, mais sémantique. Or, en ne répondant pas dans le registre attendu par l'enseignante, ces élèves risquent de passer à côté de l'apprentissage visé. Les auteurs émettent l'hypothèse « [...] que cet élève traite le problème par analogie avec d'autres situations habituelles à l'école maternelle (et dans la vie quotidienne) où la proximité sémantique, par association, est pertinente » (Op. cité, p. 94). Pour eux, le fait de répondre dans un autre registre que celui attendu est le signe d'un non transfert de l'implicite à l'explicite, ce qui signifie pour eux que cet élève n'est pas dans une posture seconde.

Le plus souvent enfermés dans une logique du faire et guidés par la recherche de la réussite immédiate, les élèves traitent les tâches scolaires sans chercher à en saisir la signification, c'est-à-dire ce qu'elles leur permettent d'apprendre (Ibid., p. 90). Ils ont donc des difficultés de transfert ou appliquent en toute situation, sans analyse, les procédures qu'ils maîtrisent. Une « attitude de secondarisation » (genre second) serait donc une capacité à « faire circuler les savoirs et les activités d'un moment et d'un objet scolaire à un autre » (Ibid., p. 91).

Ces lectures me permettent de dire que la manière dont les élèves s'expriment, plus précisément les mots qu'ils utilisent, nous donnent des indices quant à leur rapport au savoir. L'élève qui utilise un langage se situant dans un registre mathématique, a bien des chances d'être dans un rapport second au savoir.

C'est donc dans le langage oral et écrit utilisé par les élèves qui résolvent un problème de mathématique que je vais rechercher des indicateurs de « rapport au savoir ». Je vais également analyser la relation maître-élève, afin d'émettre quelques hypothèses quant aux éléments indépendants de l'élève lui-même qui peuvent le pousser à adopter une posture de genre second.

2. Qu'est-ce qu'un langage mathématique ?

Le Plan d'Etude Romand (PER) affirme que l'enseignement des mathématiques devrait participer à développer l'imagination, la curiosité, le raisonnement, une pensée autonome. J'en déduis que l'application d'une règle, d'un théorème appris ne permet pas, seule, de dire que l'élève est dans un langage mathématique. « Le propos des Mathématiques est d'offrir des manières de penser dotées de méthodes et d'un langage spécifiques » (PER 2010). Un élève qui se situe dans un langage mathématique est donc un élève qui « pense mathématiquement », c'est-à-dire qui, justement, fait preuve d'imagination ou encore de logique et d'intuition et qui identifie les enjeux mathématiques de la tâche à effectuer.

III. METHODOLOGIE

1. Déroulement des récoltes de données

C'est dans une classe de 5e année primaire [1]nombreuse (30 élèves) que j'ai effectué mes deux récoltes de données. J'ai observé à deux reprises une leçon de mathématique (traitant le thème des multiples et diviseurs) où les élèves devaient résoudre un problème, puis ai questionné individuellement huit élèves sur leur démarche lors d'un entretien. Lors de la 2e visite, je me suis à nouveau entretenue avec ces huit élèves et me suis également appuyée sur leurs traces écrites.

2. Enoncés des problèmes proposés aux élèves

> Problème 11 l'escalier : « Cet escalier compte moins de 100 marches. Si on le monte 3 par 3, 4 par 4, ou encore 5 par 5, à chaque fois on arrive exactement sur la dernière marche ». Combien de marches cet escalier compte-il ? (Chastellain et Jaquet, 2001, p. 52)

> Problème 20 : Les 28 élèves d'une classe ont récolté ensemble 450 fr. pour l'organisation d'un camp. Dans la classe voisine, qui participera au même camp, il n'y a que 22 élèves, qui ont récolté 354 fr. Les élèves de la première classe disent à leurs camarades de la seconde classe : « Vous n'avez pas fait autant d'efforts que nous pour trouver de l'argent ! » Qu'en penses-tu ? (Chastellain et Jaquet 2001, p .65)

---

[1] Cela correspond à la 7e année Harmos et au CM2.

IV. INTERPRETATION DES RESULTATS : PREMIERE RECOLTE DE DONNEES

Les résultats de cette première récolte de données se présentent sous la forme suivante : pour chacun des huit élèves observés, j'ai analysé sa compréhension de l'énoncé, sa démarche pour trouver la solution. Puis j'ai essayé de dégager des caractéristiques communes pour finalement déboucher sur deux principaux profils d'élèves : « je fais ce que l'on me dit de faire » et « je recherche ». Le niveau de ces élèves en mathématique est chaque fois indiqué à travers la dénomination suivante : « bon » élève (moyenne de math de 5 ou 5.5), élève « suffisant » (moyenne de math de 4 ou 4.5) et élève « insuffisant » (moyenne de math de 3 ou 3.5).

1. Mode de faire de l'enseignant

Lors de cette leçon, l'enseignant s'est retrouvé dans ce que Brousseau (2004) appelle « le paradoxe de la dévolution des situations » (p. 73). Le maître souhaite que ses élèves résolvent des problèmes seuls, mais lors de leur présentation, il communique déjà en grande partie comment les résoudre. Le risque, dans cette situation, est que l'élève n'atteigne pas l'objectif d'apprentissage visé par le maître.

> L'élève n'ayant eu à effectuer ni choix, ni essais de méthodes, ni modification de ses propres connaissances ou de ses convictions, n'a pas donné la preuve attendue de l'appropriation visée. Il n'en a donné que l'illusion (Ibid., p. 73).

2. Profil 1 : « Je fais ce que l'on me dit de faire »

Deux élèves « insuffisants » (e.1 et e.6) et un élève « suffisant » (e.7) présentent ce profil. Dans ce « paradoxe de dévolution », les élèves n'ont presque pas eu à chgercher comment résoudre le problème puisque l'enseignant a terminé sa présentation en notant M3, M4, M5 [2]au tableau. En écrivant M3, M4, M5, l'enseignant indique aux élèves qu'ils doivent rechercher l'ensemble des multiples de 3, de 4 et de 5. Il n'est donc pas étonnant que ces élèves adoptent une posture de genre premier. Comme l'explique Bautier (2005), les élèves qui adoptent cette posture assimilent le savoir aux savoirs d'action scolaires, ponctuels, comme par exemple ici : faire un calcul, chercher les multiples. Ils « [...] n'incluent pas ce que ces actions permettent d'élaborer au-delà de leur mise en œuvre » (p. 52). « Les genres premiers [...] [relèvent] d'une production spontanée, immédiate, liée au contexte qui la suscite et n'existant que par lui, dans 'l'oubli' d'un quelconque apprentissage ou travail sous-jacent » (p. 50).

Ces élèves cherchent donc des multiples, sans s'occuper du contexte du problème (ils ne se rappellent plus de l'énoncé, voire même de ce qu'ils cherchent). Ainsi, ils répondent aux attentes du maître : « quand il a expliqué qu'il fallait faire les multiples, j'ai droit commencé par faire les multiples » explique un élève. Ces élèves sont dans une logique du faire qui a sans doute été initiée par l'enseignant, consciemment ou non.

Deux élèves « insuffisants » (e.4 et e.8) présentent ce profil 1 nuancé. Ils se différencient des précédents, car ils se rappellent de l'énoncé du problème et ne font pas référence à l'enseignant pour justifier leur démarche.

3. Profil 2 : « Je recherche »

Les deux « bons » élèves (e.3 et e.5) présentent ce profil. Ils font en effet un lien entre les données du problème et les calculs effectués. Quelquefois, on sent qu'ils ne s'affranchissent pas totalement de la démarche de l'enseignant. Cela est très certainement dû à cette situation particulière de dévolution. Brousseau (2004) explique que dans ce cas, l'élève se retrouve dans une injonction paradoxale :

> S'il accepte que, selon le contrat, le maître lui enseigne les résultats, il ne les établit pas lui-même et donc il n'apprend pas de mathématiques, il ne se les approprie pas. Si, au contraire, il refuse toute information de la part du maître, alors, la relation didactique est rompue. Apprendre, implique, pour lui, qu'il accepte la relation didactique, mais qu'il la considère comme provisoire et s'efforce de la rejeter. (Op. cité, p. 73)

Ainsi ces élèves ont, réfléchi à une autre manière de faire que celle suggérée par l'enseignant, mais ils n'ont pas totalement refusé d'utiliser les informations données par ce dernier. Un des deux élèves fait référence à la phase de communication de la démarche et des résultats. Pour lui, cette étape fait partie intégrante du processus de résolution d'un problème. Cela signifie que cet élève perçoit les enjeux d'apprentissage. Comme le souligne Bautier (2005), le fait de voir au-delà de soi et de la situation immédiate (la résolution du problème) relève d'une posture de genre second.

Un élève « suffisant » (e.2) présente le profil 2 nuancé. Si, comme les élèves précédents, il fait clairement le lien entre les données du problème et les calculs effectués, il est davantage dépendant de l'enseignant.

V. INTERPRETATION DES RESULTATS : DEUXIEME RECOLTE DE DONNEES

Lors de cette seconde récolte de données, je me suis surtout concentrée sur l'analyse des traces écrites laissées par les élèves, ce qui a mis en évidence trois types de solutions aux dénominations suivantes : « du texte », « des opérations », « des opérations et du texte ». J'ai ensuite mis en relation ces solutions avec ce que les élèves m'ont dit lors de ce nouvel entretien avec eux, où je les confrontais à leurs traces écrites.

1. Mode de faire de l'enseignant

Cette fois-ci, l'enseignant n'a pas induit totalement la démarche des élèves, mais a tout de même suggéré qu'une division pourrait apparaître. On peut toutefois considérer qu'il y a dévolution du problème aux élèves.

2. Solution A : « Du texte »

Deux élèves « insuffisants » (e.4 et e.6) présentent ce type de solution. Ces élèves répondent dans un registre non mathématique. En suivant Bautier et Goigoux (2004), il semble que ces élèves traitent le problème comme ils le feraient dans une autre activité scolaire. En l'occurrence, ici, une question du type « qu'en penses-tu ? » peut leur évoquer une situation d'enseignement en français, lorsque l'enseignant demande à l'élève de donner son avis sur un texte lu. Malgré le fait que l'enseignant ait précisé qu'il attendait une preuve mathématique, ces élèves présentent pour réponse les phrases suivantes : « Je pense que c'est pas juste qu'il dit ça parce que dans la première classe ils sont 6 élèves de plus que dans la deuxième », « Les élèves de la première classe n'auraient pas dû dire ça. Parce qu'ils ne sont pas le même nombre d'élèves dans les deux classes. ». On peut donc interpréter ces réponses comme celles d'élèves qui ne parviennent pas à percevoir les enjeux mathématiques de la tâche, ou comme celles d'élèves qui, n'arrivant pas à prouver mathématiquement, préfèrent présenter une solution, même s'ils la savent « insuffisante » au niveau mathématique puisque l'enseignant, durant la leçon, leur a précisé qu'une seule phrase en français n'était pas une preuve mathématique.

Un troisième élève « insuffisant » (e.8) présente ce type de solution nuancé. En effet, cet élève donne une réponse du même registre que les deux autres : « Moi je trouve cette phrase incorrecte. C'est normal que la classe de 28 élèves a récolté plus d'argent car ils sont beaucoup plus que l'autre classe et ils ont quand même fait de l'effort ». Pourtant, cet élève a réalisé les deux opérations qu'il fallait pour justifier mathématiquement sa réponse. Apparemment il n'arrive pas à faire le lien entre les résultats de ces opérations et la question posée, comme il l'exprime bien lorsque je lui demande pourquoi il a eu de la peine « pour ce que j'en pensais de la phrase, et puis pour mettre le calcul pour cette phrase ».

3. Solution B : « Des opérations »

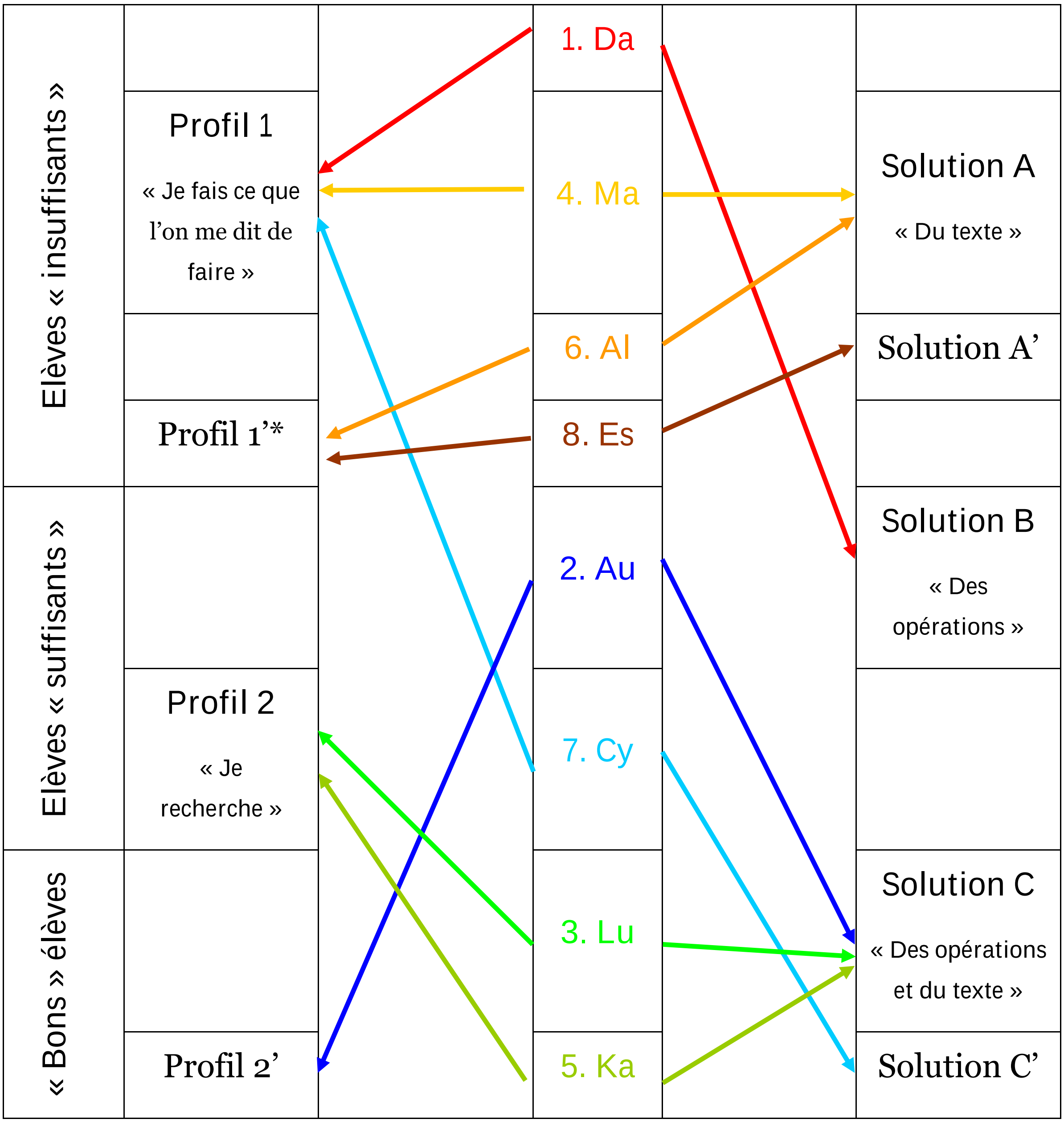
Un seul élève « insuffisant » (e.1) présente ce profil. Les traces laissées par cet élève et l'entretien que j'ai eu avec lui me laissent penser que, pour lui, résoudre un problème mathématique c'est « faire des opérations ». Il le dit d'ailleurs bien « j'essaie de voir quel calcul il faut faire ». Il propose les deux divisions attendues (450 divisé par 28 et 354 divisé par 22), mais n'arrive pas à leur donner du sens dans le problème. L'addition des nombres 450 et 354, et la multiplication de 16 et 17 (ce calcul a été effacé, mais est encore lisible) renforcent mon impression qu'il utilise aléatoirement les nombres de l'énoncé pour faire des opérations connues, sans leur donner de signification pour étayer sa réponse. Malgré des réponses « mathématiques » en apparence (trois calculs effectués et pas de phrase en français), cet élève ne s'exprime pas dans un registre mathématique. D'ailleurs, à la question « qu'en penses-tu ? », il me répond qu'il ne trouve pas ça juste « parce que c'est pas sympa », il ne donne aucune preuve mathématique, ne s'appuie pas sur les calculs qu'il a pourtant effectués.

4. Solution C : « Des opérations et du texte »

Les deux « bons » élèves (e.3 et e.5) et l'élève « suffisant » (e.2) présentent ce type de solution. Contrairement aux élèves des deux autres profils, ces élèves établissent clairement un lien entre les opérations effectuées et la réponse à la question, cela signifie qu'ils arrivent à donner du sens à ce qu'ils font. Pour moi, ces élèves s'inscrivent tous dans une démarche mathématique. Même si l'un de ces élèves a interprété de manière erronée le résultat de ces divisions, il est, malgré son erreur, dans une démarche mathématique puisqu'il sort d'abord les informations du problème, sur la base de celles-ci effectue deux opérations, puis se sert du résultat de ces opérations pour démontrer, justifier sa réponse.

Le deuxième élève « suffisant » (e.7) présente ce type de solution nuancé. Cet élève ne répond pas à la question posée initialement, puisqu'il répond « La seconde classe a moins d'élèves, mais le même nombre d'argent ». J'émets l'hypothèse qu'il a oublié, au fil des calculs, ce qu'il cherchait. Le fait que cet élève ne donne à aucun moment l'information que le dividende « 16 » représente l'argent rapporté par chaque élève, peut également signaler qu'il a des difficultés à donner du sens au quotient. En revanche, sa réponse démontre tout de même qu'il n'est pas dans une logique de « faire des opérations », puisqu'il rédige une phrase qui leur donne du sens. Il est donc bien dans un registre mathématique.

VI. DISCUSSION DES RESULTATS



* Le prime' indique ce que j'ai appelé dans mon travail un profil nuancé ou une solution nuancée.

Avec cette discussion, je vais faire le lien entre les résultats de la première récolte de données et de la seconde. Ce tableau permet, d'un coup d'œil, de visualiser où se situe chaque élève et de faire le lien avec son « niveau » en mathématique.

Dans ma première analyse, deux profils principaux se dégageaient. Le premier profil « je fais ce que l'on me dit de faire » correspondait aux élèves qui, d'après ce qu'ils me disaient, ne se situaient pas dans un registre mathématique, alors que le deuxième profil « je recherche » correspondait aux élèves qui semblaient dans un registre mathématique.

Dans la deuxième série de données, on peut voir que les réponses de type C sont produites par tous les élèves présentant dans la première série le deuxième profil, celui que j'ai appelé « de chercheur », alors que les élèves présentant le premier profil « je fais ce que l'on me dit de faire » présentent des réponses de type A, B et C. On pourrait dire, si l'on admet que la posture des élèves n'a pas changé, que les solutions de type C sont les seules à refléter une posture de genre second mais qu'elles peuvent également refléter une posture de genre premier. Mais l'hypothèse que je privilégie (pour des raisons qui apparaitront à la fin de cette discussion des résultats) est que l'élève (e.7) qui présente une posture de genre premier lors de la première récolte de données, et présente une solution de type C lors de la seconde récolte de données, a changé de posture, la situation didactique étant différente. Si l'on admet que cet élève a effectivement changé de posture, on peut dire qu'une solution de type C reflète une posture de genre second dans le cadre de ma recherche.

J'ai donc constaté que les élèves qui présentaient des solutions de type C avaient effectué une démarche mathématique. Peut-on affirmer pour autant que ces élèves, présentant une démarche mathématique, sont dans une posture de genre second ou est-ce un raccourci ? Mes critères pour définir une démarche mathématique sont-ils suffisants ?

Être dans une posture seconde ne signifie pas forcément être « bon élève » ou trouver « la bonne réponse ». Cela n'apparaît pas dans mes analyses, mais l'un des trois élèves présentant le profil « de chercheur », qui est considéré comme élève « suffisant » par l'enseignant, a, lors de la dernière évaluation formative sur le thème, obtenu le moins de points sur les huit élèves. N'ayant pas vu cette évaluation et cela n'étant pas le sujet de mon analyse, je ne vais pas chercher à donner une explication à ce résultat. En revanche, cela montre bien qu'un élève qui est dans une démarche mathématique n'est pas forcément « bon élève » ou ne trouve pas forcément la réponse attendue.

Autre constatation, la présence du calcul attendu n'est pas garante de la compréhension de la situation-problème (si je m'appuie sur l'élève qui présente la solution de type B), ni de la construction de savoir mathématique. Ce que l'on voit peut parfois être trompeur. Pour moi, deux élèves présentant des solutions identiques peuvent se situer à des niveaux de compréhension bien différents.

Si je prends les résultats obtenus dans mes deux récoltes de données, qui présentaient deux situations d'enseignement différentes, je peux dire que tous les élèves avaient une meilleure représentation de la situation problème lors de la deuxième récolte de données. Cela semble logique puisque dans cette deuxième situation, les élèves n'ont pas pu se contenter de faire ce que l'enseignant leur avait dit.

Parmi les élèves qui s'étaient montrés très dépendants de l'enseignant lors de la première observation, un seul a développé une procédure de type mathématique lors de la seconde observation. Il s'agit d'un des élèves « suffisants » (e.7) qui, lors de la première récolte de données, avait suivi la démarche proposée par l'enseignant et que j'avais donc considéré comme élève qui « fait ce qu'on lui dit de faire ». Cet élève n'avait pas pu me dire, lors de cet entretien, ce qu'il cherchait. Or, lors du deuxième entretien, j'ai remarqué que cet élève réfléchissait, cherchait, mais plus d'une fois, interprétait les consignes de manière erronée. Je dirais que cet élève était, lors de la deuxième récolte de données, dans une démarche mathématique, mais du fait qu'il a commis des erreurs, on pourrait penser qu'il ne donne pas de sens à ce qu'il fait, donc qu'il n'est pas dans une démarche mathématique. Cela rejoint ce que je disais précédemment, un élève qui est dans une démarche mathématique, n'est pas forcément « bon élève » ou ne trouve pas forcément la « bonne réponse ». Ces élèves sont probablement plus difficiles à repérer.

VII. CONCLUSION

1. Retour sur ma question de recherche et mes résultats

Sur les huit élèves questionnés, trois présentaient le profil « je recherche » et cinq « je fais ce que l'on me dit de faire ». Les résultats de ma recherche ont montré que pour quatre des cinq élèves de profil « je fais ce que l'on me dit de faire » résoudre des problèmes, c'est faire des calculs ou répondre à la question posée en français. Lorsqu'ils sont dans une situation où l'enseignant a induit la démarche à suivre, ces élèves ne tiennent généralement pas compte de l'énoncé du problème et commencent directement par faire ce qui l'enseignant rajoute à l'énoncé, ici la recherche de multiples, et oublient le problème. Ce que j'ai pu observer dans cette situation, qui n'apparaît pas dans l'analyse de mes données car cela ne ressortait pas directement dans les entretiens, c'est que ces élèves étaient souvent en difficulté dans la recherche des multiples. Ils commettent des erreurs et surtout consacrent énormément de temps pour faire cet exercice, car ils ne développent aucune stratégie et n'ont pas le recul nécessaire pour se rendre compte d'une erreur commise. Dans une situation de dévolution du problème, ces élèves arrivent à reconstituer l'énoncé du problème mais la réponse qu'ils donnent est généralement directement accessible. J'entends par là que, soit les élèves répondent « en français », soit ils prennent les nombres de l'énoncé et font une opération sans y donner de sens. Leur résolution de problème se limite à « une étape ». On peut donc dire qu'ils n'élaborent pas de démarche mathématique pour arriver à la solution.

Trois élèves étaient, d'après moi, dans un langage mathématique et dans une posture seconde, autant dans leurs propos, dans leur cheminement que dans les solutions qu'ils présentaient. Dans la situation que j'ai appelée de « paradoxe de dévolution », ces élèves ont tenu compte de l'énoncé et des indices de l'enseignant pour arriver à la solution. Ils ont démontré des stratégies de recherche. Cela leur permet d'avancer relativement rapidement. Ils commettent également des erreurs, mais parviennent à les détecter, à déceler leur origine, donc à leur « donner du sens ». Ces élèves ne s'arrêtent pas l'opération terminée, ils vont jusqu'au bout du problème pour répondre à la question initiale. On peut dire qu'ils ont une vision beaucoup plus globale du problème. En situation de dévolution du problème, ces élèves sont en recherche, ils essaient. Ce que l'on remarque chez ces élèves, c'est que la résolution du problème se déroule en plusieurs étapes : ressortir les données, poser et effectuer l'opération ou les opérations, rédiger la réponse à la question posée dans l'énoncé. Les difficultés rencontrées par ces élèves sont principalement inhérentes au savoir en jeu (ici, par exemple, donner du sens au résultat d'une division).

Je souhaite aussi revenir sur une question laissée ouverte par un autre étudiant de la HEP Bejune lors de son travail de Bachelor (Leonardi 2007). Il avait constaté que les élèves actuels utilisaient presque exclusivement une stratégie de formulation en français de la situation pour résoudre les problèmes alors qu'avant, à l'époque des « maths modernes » les élèves utilisaient des outils mathématiques comme des tableaux de Carroll, diagrammes fléchés. Leonardi se posait donc la question suivante : « Dans nos classes actuellement, y a-t-il corrélation entre les compétences langagières d'un élève en L1 (langue 1) et ses compétences à développer des stratégies de résolutions pour un problème ? » (Op. cité, p. 37).

Après ce travail, je ne prétends pas pouvoir répondre à cette question, mais il me semble pouvoir dire à l'appui des résultats et analyses produits que ce ne sont pas les compétences langagières en L1 en elles-mêmes qui vont jouer un rôle important, mais plutôt la compétence à décrypter les attentes de l'enseignant et le sens donné au langage mathématique. J'ai l'impression qu'avec la méthode actuelle d'enseignement des mathématiques, ce langage est plus masqué, moins évident à percevoir et à décrypter pour les élèves.

2. Ce que j'ai compris et ce que j'en retire

En tant qu'enseignant, il est important de se poser la question suivante afin de faire des choix d'enseignement pertinents : Que veut dire « apprendre » en mathématique ? Améliorer sa capacité à résoudre des problèmes, donc à raisonner mathématiquement, ou apprendre à utiliser des algorithmes ? Personnellement, je pense que, quotidiennement, ont est bien plus souvent amené à réfléchir qu'à appliquer un algorithme. Plutôt que de favoriser l'exécution d'algorithmes je trouve qu'il serait plus important de viser la compréhension. Surtout que l'exécution reste dans beaucoup de cas assez précaire, peut-être justement parce que dénuée de sens.

En lien avec ce que j'ai appris en menant cette recherche, je pense que je soignerai la communication de mes attentes aux élèves. Les élèves ont besoin d'entendre que les mathématiques ont leur propre langage, leurs propres « règles ». Cela m'amène d'ailleurs aussi à me poser de nombreuses questions au sujet de l'évaluation : Qu'évalue l'enseignant ? Et au fond, qu'est-ce qu'être « bon » en mathématique ? Pourquoi ne pratique-t-on pas ou peu l'évaluation orale dans l'enseignement des mathématiques au niveau primaire ?

Reste donc à réfléchir comment enseigner afin de favoriser le développement d'un langage, d'une démarche mathématique chez les élèves.

REFERENCES

Baruk S. (1992) *Dictionnaire de mathématiques élémentaires – Pédagogie, Langue, Méthode Exemples, Etymologie, Histoire, Curiosités*. Paris : Seuil.

Bautier E. (2005) *Le français hier et aujourd'hui : Politiques de la langue et apprentissages scolaires*. Aix-en-Provence : Publications de l'Université de Provence.

Bautier E., Goigoux R. (2004) Difficultés d'apprentissage, processus de secondarisation et pratiques enseignantes : une hypothèse relationnelle. *Revue Française de Pédagogie* 148, 89-100.

Blanchet A. (1995) *Mathématiques en situations.* Lausanne : Centre Vaudois de Recherches Pédagogiques.

Brousseau G. (2004) *Théorie des situations didactiques (2e éd.). Recueil de textes de Didactique des mathématiques 1970-1990 présentés par M. Cooper et N. Balacheff, Rasamund Sutherland et Virginia Warfield*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chastellain M., Jaquet F. (2001) *Mathématiques cinquième année : livre de l'élève*. Neuchâtel : COROME.

CIIP (Conférence Intercantonale de l'Instruction Publique de la Suisse romande et du Tessin). (2010). *Plan d'Etude Romand.* [Consulté le 5 mars dans http://www.plandetudes.ch/web/guest/systemic?domainId=62&&courseId=261]

Clément E. (2009) *La résolution de problème : A la découverte de la flexibilité cognitive*. Paris : Armand Colin.

Krémer P. (2008, 12 septembre) Stella Baruk, le goût des maths, une affaire de langue. *Le Monde.* (Quotidien français édité à Paris) [Consulté le 19 août dans http://www.lemonde.fr/cgi-bin/ACHATS/acheter.cgi?offre=ARCHIVES&type_item=ART_ARCH_30J&objet_id=1050923&clef=ARC-TRK-NC_01]

Leonardi F. (2007) *Les stratégies de résolution mobilisées avant et après la réforme des maths des années 90*. Mémoire professionnel en Sciences de l'éducation, Haute Ecole Pédagogique de Bienne.

LES CONSTRUCTIONS GÉOMÉTRIQUES DANS L'ESPACE POUR L'APPRENTISSAGE DE LA GÉOMÉTRIE

Jimmy SERMENT*

Résumé – L'enseignement de la géométrie dans l'espace est souvent délaissé au secondaire1 (élèves âgés de 11 à 15 ans actuellement), faute de moyen mis à disposition des élèves. Cette recherche tente d'observer et d'analyser des élèves de l'enseignement spécialisé dans des situations problèmes concrètes en géométrie de l'espace.

Mots-clefs : espace, géométrie, expérimentations, constructions, apprentissage

Abstract – The teaching of 3D geometry is often abandoned in lower secondary education (11 to 15 years old pupils) due to a lack of means given to students. This research made observations and analyses of students with special needs in special education classes in situations of concrete problems in 3D geometry.

Keywords: space, geometry, experimentations, constructions, learning

I. INTRODUCTION

En Suisse Romande et au Tessin, les enseignants de l'école obligatoire en mathématiques sont tenus de suivre les manuels institutionnels de la Conférence Intercantonale de l'Instruction Publique, CIIP, manuels qui sont constitués par des fiches ou des exercices. Or, concernant la géométrie, aucune activité de ces manuels ne propose de construction, de fabrication d'objets réels dans l'espace. Pourtant l'unique compétence visée en géométrie du Plan d'Etudes Vaudois (PEV[1]) est : « modéliser le plan et l'espace » (PEV 2003, partie B 15-7). Chaque année, les thèmes des propriétés des triangles et quadrilatères, des droites remarquables dans le triangle, des solides et celui des aires et volumes doivent être repris à zéro, comme si les élèves n'avaient appris leurs leçons que pour l'évaluation finale. L'enseignement de ces thèmes se fait le plus souvent de manière déductive, l'enseignant donne le fonctionnement à l'élève et celui-ci doit ensuite l'appliquer à divers exercices sur papier. Cette manière d'enseigner permet certainement à l'enseignant de gagner du temps, mais on peut penser qu'elle ne permet pas à tous les élèves de s'approprier toutes les notions des thèmes précédemment cités. Au final, qu'ont-ils retenu ?

Pour développer ce point de vue critique envers un enseignement plus traditionnel de la géométrie (Bkouche 2006), j'ai déjà pratiqué quelques expérimentations dans le cadre de mon enseignement qui se place dans le cadre d'une classe ressource, c'est-à-dire avec des élèves présentant un certain retard scolaire, pour des raisons diverses (voir plus loin). J'ai fait fabriquer concrètement divers polyèdres aux élèves, comme des cubes, des parallélépipèdes rectangles, des pyramides, des tétraèdres. La fabrication de solides s'est faite de quatre manières différentes. La première étant la construction de cube en polystyrène, les élèves ont dû construire les plus grands cubes possibles à partir d'une plaque de polystyrène de 50×100×8 cm, cette activité a permis construire des cubes à partir des faces. La deuxième construction s'est faite à partir de l'assemblage de pailles de vingt centimètres et de connecteurs afin de faire construire de petits cubes à partir des arêtes. La troisième construction ressemble à la deuxième, seule la taille de l'objet diffère, les élèves ont dû construire un cube d'arête de deux mètres à partir de tube et de connecteurs en PVC (Serment

* Haute Ecole Pédagogique Vaud – Suisse – j.serment@hotmail.fr

[1] http://www.vd.ch/fr/themes/formation/scolarite-obligatoire/plan-detude-vaudois/

© Serment J. (2012) Les constructions géométriques dans l'espace pour l'apprentissage de la géométrie. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (SPE1, pp. 1681–1695). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

2012). Le dernier type de construction, plus traditionnel, est la construction de solide à partir d'un développement.

Par la suite, j'ai proposé des constructions d'objets plus complexes, en assemblant les différents polyèdres précédents. Les élèves ont dû assembler plusieurs tétraèdres pour former des kaléidocycles (suite de tétraèdres assemblés circulairement, figure I). L'étape ultime des constructions a été la construction d'un grand cube transformable à partir de huit petits cubes coupés par la section hexagonale régulière. Ce grand cube peut se transformer en deux octaèdres tronqués (Figures II et III).

Après avoir fabriqué ces solides, les élèves ont dû narrer ce qu'ils avaient vécu durant toute la séquence à travers le média d'Internet. Les élèves ont écrit dans un premier temps une présentation avec le logiciel Keynote, ils ont dû relater tout ce qu'ils ont retenu et appris en faisant les diverses expériences proposées. Cette présentation a été transformée en vidéo puis difusée sur Youtube et sur un blog de la classe[2].

En faisant ceci, j'ai remarqué que j'avais agi sur *la* compétence principale visée en géométrie dans le PEV : « Modéliser le plan et l'espace » mais également sur d'autres compétences également visées par le PEV :

- construire des figures géométriques
- construire des figures planes
- représenter des solides en perspective et en faisant le développement
- définir des figures par certaines de leurs propriétés
- communiquer une marche à suivre, un raisonnement en utilisant un vocabulaire adéquat.

Un nouveau plan d'études est en train de prendre la place du PEV, le *Plan d'Etudes Romand* (PER[3]). En ce qui concerne la géométrie, la visée fondamentale sera : « poser et résoudre des problèmes pour modéliser le plan et l'espace ». Cette visée est toujours respectée dans ma séquence. Le PER précise toutefois les manières d'y arriver en proposant diverses méthodes :

- en définissant des figures planes et des solides par certaines de leurs propriétés géométriques,
- en utilisant des propriétés des figures et leur décomposition en figures élémentaires pour les construire et les reproduire,
- en mobilisant des systèmes de repérages,
- en utilisant les instruments ou les logiciels appropriés,
- en mobilisant des représentations conventionnelles des figures planes et des solides (croquis, dessin à l'échelle, perspective,…),
- en recourant au raisonnement déductif,
- en mobilisant des transformations géométriques,
- en représentant des solides en perspective et en faisant le développement.

En analysant ma séquence a priori, j'ai pu voir que je prenais en compte diverses méthodes citées ci-dessus, notamment, dans un premier temps, « en définissant des figures planes et des solides par certaines de leurs propriétés géométriques ». Dans un deuxième temps, j'ai fait travailler les élèves « en utilisant des propriétés des figures et leur décomposition en figures élémentaires pour les construire et les reproduire », ou encore « en utilisant les instruments ou les logiciels appropriés ». En fin de séquence, ils ont construit leurs apprentissages « en mobilisant des représentations conventionnelles des figures planes et des solides (croquis,

[2] http://classer.over-blog.com/pages/les-videos-des-cubes-6143148.html
[3] http://www.plandetudes.ch/web/guest/home

dessin à l'échelle, perspective…) » et enfin « en représentant des solides en perspective et en faisant le développement ».

II. QUESTION DE RECHERCHE ET BUTS POURSUIVIS

La question de recherche qui motive mon travail est de façon générale : « les situations de constructions d'objets géométriques dans l'espace sont-elles susceptibles de révéler les connaissances géométriques des élèves d'une classe ressource ? »

Le but principal est de proposer une autre démarche d'enseignement de la géométrie. Cette nouvelle manière d'enseigner devrait permettre aux élèves de mettre en relation l'aspect théorique de certaines notions géométriques avec des objets réels. Les élèves seront ainsi plus actifs, car ils seront impliqués sur une de leur construction tout en construisant des compétences que l'on peut référer au plan d'études en vigueur.

Plusieurs autres buts seront également poursuivis :

- Consolider les apprentissages des élèves sur le long terme.
- Rendre les théories géométriques plus concrètes, plus intéressantes grâce à la réalisation des objets.
- Développer chez l'élève des connaissances théoriques en géométrie plane, en géométrie de l'espace puis permettre mettre en relation ces deux géométries (Gonseth 1945).

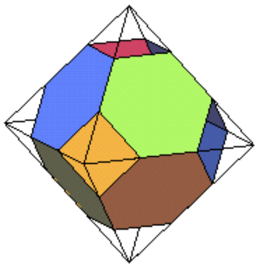
III. LES CONDITIONS DE REALISATION DU TRAVAIL

1. Sources d'information ou d'observation

Je travaille dans la classe ressource (Res) de collège secondaire de Pully. Dans cette classe, il y a une douzaine d'élèves âgés de 11 à 16 ans qui ont un retard scolaire par rapport aux élèves des classes ordinaires. Ces élèves n'ont pas de troubles psychologiques ni psychiatriques avérés. Certains ont également des troubles du comportement, ils sont dans la classe Res car ils dérangent le bon fonctionnement des classes ordinaires. Le public de la classe Res est donc hétérogène, il va du jeune à haut-potentiel qui n'arrive pas à se concentrer dans sa classe, au jeune ayant un QI entre 70 et 100, en passant par les jeunes « normaux » qui ont des problèmes de comportement dans leur classe ou encore des jeunes avec des handicaps physiques comme des surdités partielles. La plupart ont aussi des troubles associés telle la dyslexie, la dyscalculie ou la dysorthographie.

2. Description et déroulement de l'expérimentation

Les élèves doivent fabriquer deux objets géométriques, un kaléidocycle et un cube d'octaèdres tronqués.

		
Figure I *– Kaléidocycle*	***Figure II*** *– Octaèdre tronqué*	***Figure III*** *–Octaèdre tronqué 2e transformation*

Ces deux choix de construction se justifient en analysant leur composition. Pour faire le premier, on part d'un rectangle de papier avec un rapport longueur/largeur bien précis. Les élèves doivent ensuite y inscrire des losanges en faisant des parallèles et des perpendiculaires. La dernière étape étant le pliage et la création du kaléidocycle (six tétraèdres disposés circulairement) en trois dimensions. On commence donc cette activité avec les quadrilatères, les rapports et la construction de parallèles et perpendiculaires, ensuite il y a le passage du rectangle plat vert la troisième dimension, enfin on termine l'activité avec les tétraèdres.

Pour le cube d'octaèdres tronqués, Il y aura cinq étapes différentes lors de la séquence pédagogique :

Activité de l'élève	**Savoir**	**Savoir-faire ou qualités requises (ex précision)**
1. La construction de petits cubes (8 cm. d'arrête) en polystyrène. A partir de grandes plaques de polystyrène (50x100x8 cm), les élèves devront découper les plus grands cubes possibles. Pour ce faire, ils disposeront de deux machines de découpe de polystyrène à fil chaud.	Propriétés et constructions de parallèles et perpendiculaires. Propriété du carré et du cube.	Précision. Maîtrise des outils spécifiques (coupeurs à fil chaud).
2. Les sections du cube. Une fois les cubes formés, les élèves devront trouver les diverses sections du cube possibles. Pour les réaliser, ils devront couper leurs cubes avec les deux mêmes machines.	Propriétés des triangles et quadrilatères.	Précision. Maîtrise des outils spécifiques (coupeurs à fil chaud).
3. La section hexagonale régulière du cube. Les élèves construiront un cube géant à partir de pailles et de connecteurs. A l'intérieur de ce cube géant, les élèves devront mettre de la ficelle sur les arrêtes afin de former la section hexagonale régulière.	Propriétés et construction de l'hexagone régulier.	
4. Formation de la forme finale en polystyrène, à partir de huit sections hexagonales régulières du cube. Une fois l'étape 3 passée, les élèves découperont dans le polystyrène huit formes identiques (cubes coupés en deux par la section hexagonale régulière), ils les assembleront pour former un octaèdre tronqué, qui pourra se transformer également en cube évidé de l'intérieur.	Aires et volumes. Construction de solides	Patience. Précision. Maîtrise des outils spécifiques (coupeurs à fil chaud).
5. Formation de la forme finale en papier. Les élèves devront faire le développement du cube coupé par sa section hexagonale régulière, puis répéter l'opération 16 fois, afin de former deux octaèdres tronqués et au final les assembler. Cela	Construction de solides, réalisation de développements (constructions de médiatrices, du cercle	Utilisation des outils géométriques (règles, équerre, compas). Utilisation de l'outil informatique.

permettra aux élèves de résoudre leur question de recherche posée en début de séquence.	de Thales, des angles et de l’hexagone régulier)	Motricité fine (assemblage des développements et de l’ensemble des pièces) Patience. Précision.

Figure IV *– Tableau : Les relations entre les étapes de la construction et les savoirs en jeu*

Dès le début de la séquence, les élèves sont mis dans une situation de recherche. Ils doivent reconstruire et compléter la partie intérieure d’un cube évidé d’un octaèdre tronqué.

Durant les 5 étapes citées ci-dessus, divers documents écrits sont récoltés. Nous travaillons plusieurs connaissances en géométrie, comme les propriétés des triangles et quadrilatères, les notions de parallèles et de perpendiculaires, les aires et les volumes, ainsi que le dessin géométrique.

Les élèves passent des quadrilatères en deux dimensions pour finir avec la troisième dimension et le cube. Il y aura également dans cette séquence le passage inverse, en commençant par les volumes (cube) pour finir avec les sections du cube.

Ces deux activités permettent donc de travailler les compétences en géométrie du plan d’études, citées précédemment.

3. Hypothèses

Pour les jeunes de la classe Res, les mathématiques riment avec *drill numérique* (tâches mécaniques et répétitives). Comme ces élèves n’arrivent pas à suivre le programme des classes ordinaires, le réflexe de la plupart des enseignants spécialisés est de simplifier les exercices. Cette simplification amène les enseignants à faire faire aux élèves beaucoup d’exercices de calcul sur les quatre opérations, des exercices de drill de calculs, et par conséquent d’oublier ou de mettre de côté les apprentissages en géométrie. Ma première hypothèse va à contre-courant de ce que je viens d’expliquer, je pense qu’il est indispensable de proposer des situations complexes, pouvant mettre ces élèves en situation de recherche. A mon avis, il faut proposer des situations attrayantes et suffisamment complexes pour permettre aux élèves de réfléchir sur les mathématiques et pas seulement d’appliquer des mathématiques. Cette façon de penser montrera aux élèves aussi que j’attends d’eux un certain travail et que je les considère comme capables de résoudre des situations problèmes complexes. Ce regard de l’enseignant sur les élèves est important pour l’estime de soi des enfants. Un enseignant qui croit dans les capacités de ses élèves va leur montrer et ceux-ci sentiront qu’ils sont considérés comme des apprenants et pas comme des élèves ne pouvant rien apprendre. Cette manière d’agir, en proposant des exercices complexes, devrait donc motiver les élèves, révéler leur potentiel et augmenter leur estime de soi.

Tout enseignant devrait croire au postulat d’éducabilité de Philippe Meirieu, surtout quand on est en face d’enfants avec des difficultés d’apprentissage. Evidemment ce postulat ne doit pas nous faire oublier que si ces élèves sont dans la classe Res, c’est qu’ils n’ont pas réussi à suivre le programme ordinaire, mais cela ne veut pas dire qu’il n’est pas possible d’appliquer le postulat de Meirieu. Ma deuxième hypothèse va dans ce sens, je pense que ces élèves sont capables d’apprendre, mais qu’ils n’utilisent pas les mêmes canaux que la plupart des autres élèves. Le rôle de l’enseignant est donc de trouver d’autres pistes pour faire passer les apprentissages auprès des enfants avec des difficultés scolaires.

4. Méthode de récolte de données

Les élèves ont été filmés, enregistrés vocalement et ont présenté les constructions géométriques. Leurs productions ont été également photographiées. Ils ont tenté d'expliquer comment reproduire l'objet géométrique construit en narrant les diverses étapes pour y arriver. Les objectifs pour eux sont qu'une personne quelconque puisse reproduire leur construction grâce à leurs explications, schémas, dessins, vidéos, ainsi que montrer ce qu'ils ont fait et retenu.

J'ai tenu aussi un journal de bord, où j'ai noté des éléments de séquences pédagogiques pendant la préparation des constructions et des productions d'élèves.

5. Petit tour épistémologique

Qu'entend-on par espace ? L'espace est une des deux intuitions pures kantiennes, l'espace est donc une sorte de condition d'existence des objets a priori. Nous ne pouvons pas créer ou imaginer l'espace, car il préexiste avant les objets. Il ne peut pas y avoir des objets dans l'espace si l'espace n'est pas considéré comme préalable. Kant nous dit d'ailleurs : « … l'espace ne peut être comme quelque chose en nous. » (Kant 1781), cela signifie que l'espace est hors de nous, qu'il existe sans notre présence, mais que nous en avons une « intuition pure » de sa préexistence. Sans cette nature de l'espace, l'existence même de tous nos objets serait remise en cause par la logique. Si l'on image que l'espace venait à être postérieur à l'existence des objets eux-mêmes, il y aurait donc une incohérence, car l'objet ne peut pas former l'espace entier. Il doit y avoir un espace a priori, contenant tous les objets de la pensée. « L'espace ne représente pas une propriété des choses en soi […] il n'y a point de déterminations, ni absolues, ni relatives, qui puissent être intuitionnées antérieurement à l'existence des choses … » (Ibid.), ceci est donc la première conséquence du concept de l'espace comme une intuition pure.

Sans cette « matrice » qu'est l'espace, les objets ne seraient pas concevables, Brousseau le dira aussi plus tard : « il est assez commun de justifier l'enseignement de la géométrie par le fait qu'elle est la science de l'espace, le décor essentiel de toutes nos actions et la matrice de toutes nos conceptions » (Brousseau 2007).

Ce point de vue mène donc l'homme à avoir avant toute chose des intuitions. Kant, toujours dans la critique de la raison pure, dit : « de quelque manière et par quelque moyen qu'une connaissance puisse se rapporter à des objets, le mode par lequel elle se rapporte immédiatement à des objets, et que toute pensée, à titre de moyen, prend pour fin, est l'*intuition*. » (Kant 1980). L'intuition est d'ailleurs considérée comme le premier des quatre principes de Kant. Sur ce principe, qu'il qualifie de mathématique, nous ne pouvons pas agir, car l'homme doit avoir cette intuition d'un espace a priori, sans quoi l'homme ne pourrait pas pousser la réflexion plus loin.

Maintenant que la notion de l'espace a été clarifiée, on peut la lier directement à la Géométrie, comme le dit Greenwood : « Toutes les sciences de la quantité empruntent à l'intuition et surtout la Géométrie : l'intuition du discret, du continu, du continu homogène, de l'espace pur » (Greenwood 1926). L'étude des objets, des corps dans l'espace est donc directement affectée par ce positionnement sur le terme espace. La Géométrie est même privilégiée, car elle met en relation directement les objets et l'espace.

Cependant, il n'est pas suffisant de posséder ces deux intuitions pures pour commencer à faire de la géométrie. En effet, une fois l'espace étant intuitionné, il nous faut percevoir les objets de l'espace. Pour ce faire, nous devons utiliser nos sens, la vue, l'ouïe, le toucher…

Cette perception, cette sensation nous permettra d'apprécier la qualité des objets réels. Cette deuxième étape d'un raisonnement en géométrie de l'espace est le deuxième principe de Kant. Pour apprécier les phénomènes, le réel nous devons utiliser la subjectivité de nos sens, ainsi « L'espace n'est autre chose que la seule forme de tous les phénomènes des sens externes, c'est-à-dire la condition subjective de la sensibilité… » (Kant 1980). (L'utilisation du terme subjectivité des sens est présent car l'être humain est doté d'appareils sensibles limités dans la réception d'information sur l'objet. Nous ne pouvons pas, par exemple, voir les rayons x, ce qui montre que notre appareil sensible ne prend pas en compte tous les éléments possibles de l'objet, nous n'avons donc qu'une partie des informations de l'objet.)

Sans ses sensations, nous ne percevrions pas les objets et par conséquent nous ne ferions pas de géométrie. « Si donc il n'y avait pas de corps solides dans la nature, il n'y aurait pas de géométrie » (Poincaré 1968), cette citation montre effectivement que nous devons percevoir des objets concrets pour faire de la géométrie. Nous ne pourrions pas avancer plus dans notre raisonnement géométrique si n'avions pas ces capacités de sensations. « La capacité de recevoir (la réceptivité) des représentations grâce à la manière dont nous sommes affectés par des objets s'appelle *sensibilité*. C'est donc au moyen de la sensibilité que des objets nous sont donnés, et elle seule nous fournit des *intuitions* » (Kant 1980). Kant nomme ce deuxième principe l' « anticipation de la perception ». Pour lui, ce principe est aussi un principe mathématique et donc inné car il est difficile de travailler sur nos sens. Toutefois, j'émets l'hypothèse qu'il est primordial de faire vivre aux élèves des sensations en géométrie, certes, il sera difficile pour un enseignant d'agir directement sur la perception des sens des élèves, mais il est important de pouvoir activer chez eux leurs sens en proposant des objets réels. Je suppose donc qu'un enseignant peut agir indirectement sur les sens des élèves en faisant construire des objets en trois dimensions. En ce sens, Brousseau ajoute : « Le micro-espace, l'enfant construit ses premières connaissances spatiales dans la manipulation de petits objets. Par le toucher ... par la vue, par le mouvement qu'il leur fait subir, il identifie leur consistance, leur forme solide, leurs positions relatives, et leurs propriétés » (Brousseau 2007), l'enfant se construit donc sa représentation de l'espace bien avant son entrée à l'école. Il expérimente, manipule grâce à ses sensations, ses perceptions des objets constituants l'espace.

N'est-ce pas d'ailleurs une des finalités de la géométrie ? Quand Gonseth propose qu' «...aux fins naturelles de toute géométrie qui sont,..., d'étendre et de préciser la connaissance que tout homme possède de l'espace en général et plus spécialement de la forme et de la grandeur des corps, de leurs positions et de leurs déplacements » (Gonseth 1945), il me semble qu'il est indispensable de faire vivre la géométrie aux élèves à travers leurs sensations, leurs perceptions.

Ce deuxième principe ne peut être vu comme étant notre appareil sensible externe nous permettant d'appréhender les objets de notre espace, « Nous ne pouvons donc parler de l'espace, d'êtres étendus, etc., qu'au point de vue de l'homme. Si nous sortons de la condition subjective sous laquelle seulement nous pouvons recevoir l'intuition externe, c'est-à-dire la possibilité d'être affecté par les objets, la représentation de l'espace ne signifie plus rien » (Kant 1980).

Les objets ne sont donc existants que par le fait que nous pouvons les percevoir. De plus, notre manière de percevoir ces objets étant subjective, nous ne pouvons dire que ce que nous voyons est vrai. « Notre esprit s'est adapté aux conditions du monde extérieur, qu'il a adopté la géométrie la plus avantageuse à l'espèce ; ou en d'autres termes la plus commode... la géométrie n'est pas vraie, elle est avantageuse » (Poincaré 1968), Nous percevons subjectivement des objets dans un espace intuitif pur, a priori. Nos sens nous donnent une représentation des objets de l'espace qui est compréhensible, intuitive pour notre cerveau.

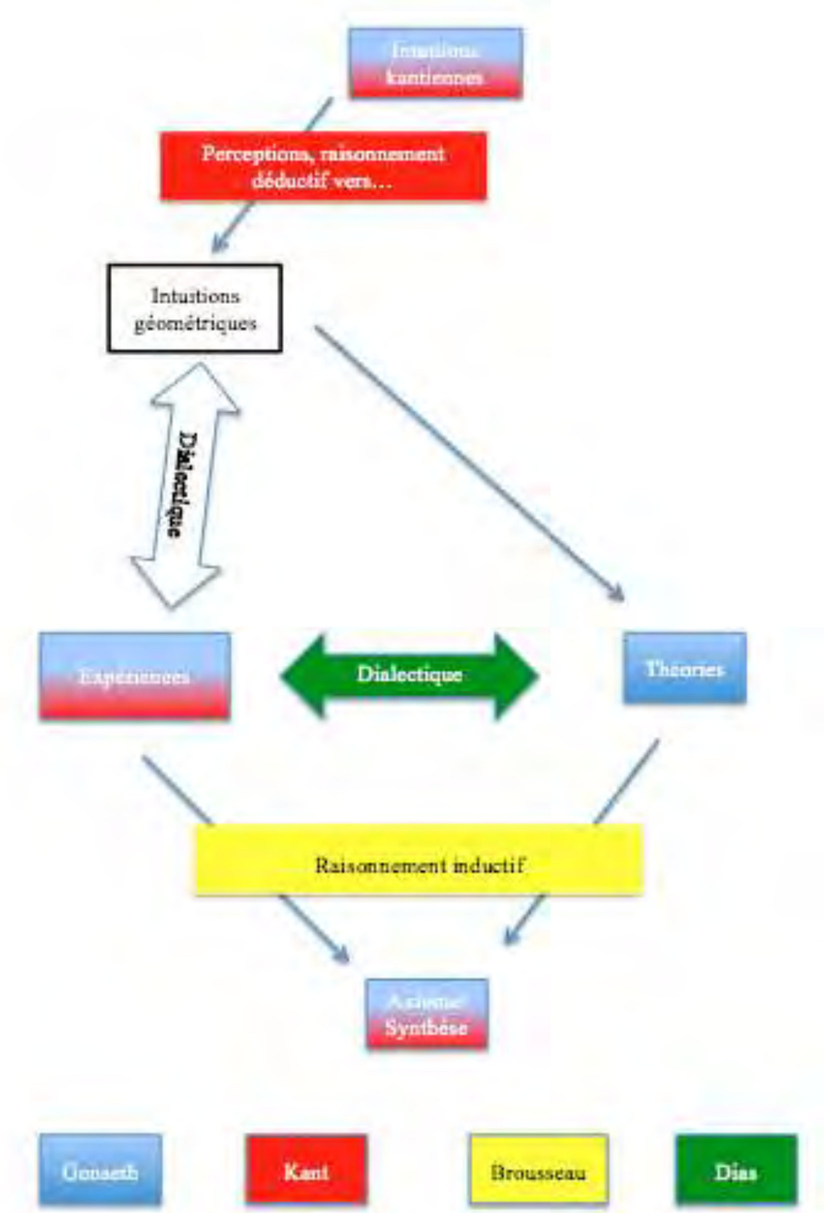


Figure V *– schéma résumant le parcours épistémologique*

La figure V va me permettre d'analyser les données récoltées, je vais essayer de mettre en évidences les deux relations dialectiques dans l'apprentissage de la géométrie. Ce schéma me permettra de situer l'élève dans ses apprentissages, d'observer si l'élève arrive à faire des liens entre l'intuition, l'expérience et la théorie.

Je me suis donné comme axe méthodologique l'analyse de données à travers les narrations de recherche (Bonafé 2003). Pourquoi la forme de narration ? Pour justifier un tel choix, je reprends une citation de François Conne avec laquelle je suis complètement en accord : « la narration est pour moi l'expression vivante d'une pensée » (Conne 2011). Demander aux élèves de raconter comment procéder pour obtenir une construction géométrique permet donc d'observer activement les apprentissages, la manière de penser des élèves. L'usage de la narration permet donc d'aller plus loin que l'impression de réussite ou d'échec d'un élève. Le fait de narrer permet aussi aux élèves de se questionner sur l'activité, de repérer les difficultés (Bachelard 1938) et donc de problématiser l'activité de construction géométrique. La narration, après avoir fait la construction géométrique permet également refaire autrement l'activité, en réfléchissant différemment, bref en utilisant l'aspect métacognitif du retour sur l'activité. Finalement, l'usage de la narration permet aussi à l'élève en enseignement spécialisé de faire l'activité à sa manière, il n'y a pas de « mauvaise » manière de faire, par conséquent l'élève peut exister dans l'activité et exprimer ce qu'il sait sans la crainte du juste-faux. Selon moi, narrer permet d'aider à mieux maîtriser un objet de savoir.

6. Premiers résultats

Les premiers résultats sont des observations faites à partir d'images figées de vidéos. Je vais analyser mes observations en me basant dans un premier temps sur le schéma de la figure V. L'analyse des productions finales des élèves se fera plus tard.

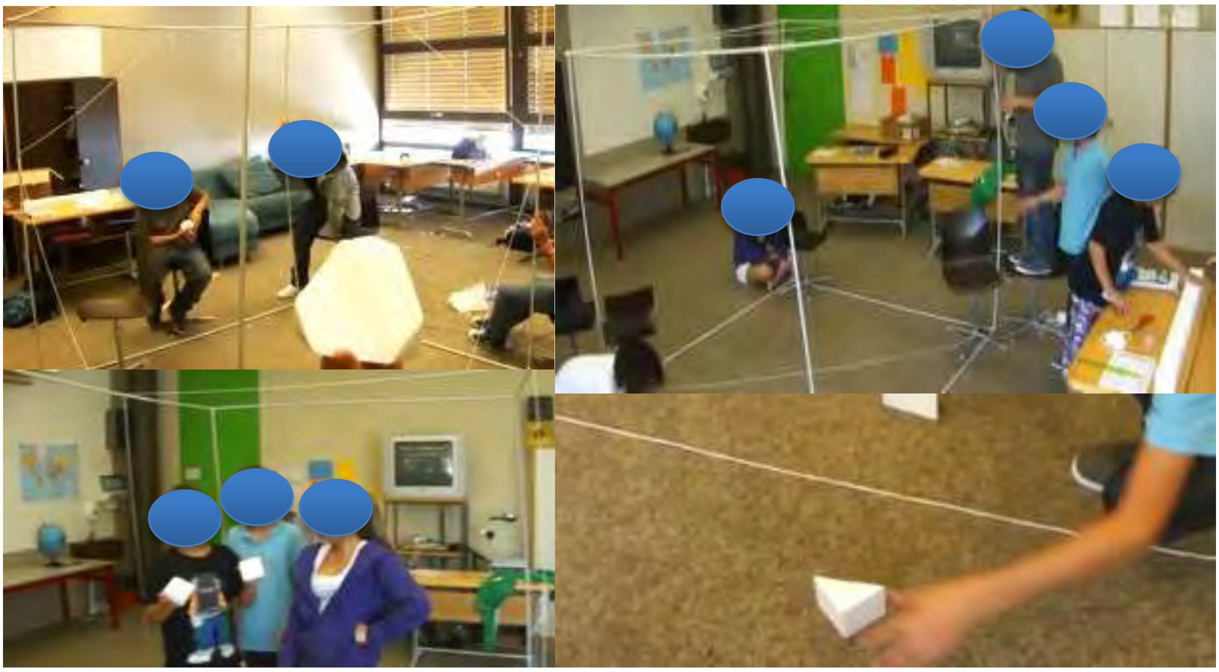


Figure VI *– Quatre images d'éleves utilisant des expérimentations précédentes pour faire une autre expérimentation*

Sur les quatre images ci-dessus, on peut voir que les élèves ont fait des liens entre les différents exercices proposés. Les élèves doivent, dans l'activité du cube géant, refaire les sections avec de la ficelle. On peut voir, qu'afin d'y parvenir, les élèves prennent les cubes en polystyrène de l'activité précédente (découpes des sections dans des cubes en polystyrène). Les élèves sont donc capables de passer d'un cube défini par des faces (cube en polystyrène) à un cube défini par des arêtes (cube géant). Cette dialectique entre les exercices peut permettre aux élèves de mieux conceptualiser le cube ainsi que ces propriétés. Pour réussir à passer d'un petit cube en polystyrène à un grand défini par des arêtes, l'élève est obligé de maîtriser la notion de parallélisme des faces et arêtes du cube, il doit aussi maîtriser la notion de plan afin de pouvoir faire des sections planes.

Cette dialectique est certainement une des clés de la réussite des élèves, en ne proposant qu'un seul type d'exercice, je n'aurais certainement pas eu autant de réussite de la part des élèves. Le fait de diversifier les entrées d'un problème permet à chaque élève de trouver une entrée qui le conviendra, puis d'utiliser l'exercice compris afin de réaliser d'autres tâches.

Sur les images ci-dessus, les élèves qui ont eu de la facilité à découper les sections du cube en polystyrène sont ceux qui tiennent les arêtes du cube géant. Alors que les élèves qui montrent les cubes en polystyrènes, pour justifier que la ficelle dans le cube géant est bien positionnée, sont des élèves qui ont plus de facilité avec cette activité du cube géant qu'avec les découpes de sections. Chaque élève a trouvé une entrée au problème posé et peut faire des liens entre les différents exercices en observant les autres camarades et leur autre manière de fonctionner.

Figure VII *– Travaux d'élèves basés sur leur intuition*

L'analyse suivant porte plutôt sur l'intuition que les élèves peuvent avoir et utilisent pour résoudre des problèmes. Sur la première image ci-dessus, on voit un travail d'un élève que j'ai retrouvé chez tous les élèves. Les élèves devaient reporter trois points sur chaque cube en polystyrène afin qu'ils découpent ce cube selon ces trois points. On peut voir sur l'image cette même image que les trois points demandés ne sont pas reliés. Les élèves ont pris l'initiative intuitivement, sans rien demander de relier, quand cela était possible, les points reportés. Les élèves ont donc senti qu'il serait plus facile de découper les sections en suivant une ligne ou deux plutôt que trois points. Leur intuition, sans aucune recommandation de ma part, m'a surpris et leur a permis de découper les sections avec plus de facilité.

L'exercice de report des points permet aux élèves de passer d'un exercice sur papier en perspective cavalière à la réalité d'un cube dans l'espace. Cet exercice permet ce passage de deux dimensions à trois dimensions. Mais l'intuition des élèves peut leur permettre, dans le cas de problèmes complexes de réussir l'activité en économisant du temps et de l'énergie (Meyers 2012). Sans que je ne demande rien et surtout sans aucune explication pour dessiner les sections du cube dans les perspectives cavalières du cube, un élève a dessiné les sections proprement, comme on peut le voir sur la deuxième image ci-dessus. Cet élève a donc produit un travail supplémentaire sans trop d'effort, rien qu'en suivant ses intuitions. De plus, l'élève a marqué sur chaque section dessinée le nom de la forme que la section donne. Afin d'y parvenir, l'élève a pu se servir de son aide-mémoire pour trouver le nom de toutes les figures. Je vois ici deux éléments importants, en plus de l'intuition de l'élève. La première est le passage de la dimension spatiale vers la dimension deux, l'élève arrive à passer d'un objet réel (le cube en polystyrène découpé) à sa représentation sur une feuille. Ces deux passages (deux dimensions <=> trois dimensions) sont importants et doivent exister pour les élèves afin qu'il existe une dialectique entre les différentes dimensions en géométrie, cela peut favoriser l'intuition de certains élèves.

La seconde dialectique que je vois ici est celle qui existe entre l'expérimentation et la théorie. L'élève qui arrive à reconnaître les douze formes, avec ou sans l'aide de l'aide-mémoire, est donc capable de se les représenter mentalement avec leurs propriétés. Sur le deuxième dessin de l'élève (deuxième image ci-dessus), il n'est pas facile d'y reconnaître un rectangle. L'élève qui note sur cette image que la section est un rectangle a su se représenter la forme et n'a pas besoin de la dessiner avec des angles droits car l'élève a fait ce passage de la dimension expérimentale vers la dimension théorique de la forme. La forme et ses propriétés sont donc bien présentes dans la tête de l'élève. L'élève peut vivre la forme et est plus susceptible de faire des liens avec la théorie des propriétés des quadrilatères et triangles.

Figure VIII *– Photos d'élèves transposant la théorie à un autre exercice*

J'ai pu remarquer que la dialectique expérimentation-théorie est à nouveau présente lors de l'activité du cube géant, dans ce cas lors de la reconstitution de l'hexagone régulier avec de la ficelle. Une fois l'hexagone terminé, les élèves m'ont justement montré les côtés parallèles de l'hexagone régulier (première image ci-dessus) puis ajouté, à l'aide de pailles assemblées, tous les axes de symétrie de cet hexagone. Avant de faire cette activité du cube géant, j'avais institutionnalisé les propriétés des triangles et quadrilatères uniquement. Nous n'avions pas vu les propriétés des formes à plus de quatre côtés étant donné que ce n'est pas au programme du PEV. Les élèves ont appliqué et mis en lien la théorie sur les propriétés des triangles et quadrilatères à l'hexagone. Ils ont même réussi à montrer les propriétés dans un hexagone inscrit dans un cube de deux mètres d'arête, alors que la théorie se trouve dans leur cahier, donc en deux dimensions. Il y a donc deux passages que les élèves ont franchis, celui de la dialectique entre expérimentation et théorie et celui des différents supports utilisés pour passer de la feuille de papier à la réalité.

7. Analyse des narrations

Les élèves ont produit leur narration de recherche en écrivant, relatant ce qu'ils avaient fait en classe. Pour y arriver, les jeunes ont dû faire une présentation sur le logiciel Keynote. Ils avaient aussi à disposition les diverses photos prises durant toute la séquence, ils pouvaient également aller chercher des images ou informations sur internet. Chacun des huit élèves a produit une narration avec les éléments mentionnés ci-dessus. Pour analyser les narrations des élèves, j'ai dénombré les images différentes utilisées dans leur présentation. Je les ai ensuite classées en fonction des cinq étapes de l'expérimentation 2, j'ai dû ajouter la catégorie théorie, car certains élèves ont ajouté des images de la théorie produite en classe.

Analyse narrations	Al	And	Ant	D	L	O	S	T	Total
Nb. images dans la narration	11	13	6	12	11	9	11	7	80
1. Découpe cubes polyst.	1	1	1	1	3	1	1	1	10
2. Sections cube polyst.	2	4	1	3	2	2	3	1	18
3. Cubes à partir d'arêtes	3	1	1	1	2	1	0	1	10
4. Forme finale polyst.	1	2	1	2	1	2	2	2	13
5. Forme finale papier	3	5	2	4	3	2	5	2	26
Théorie	1	0	0	1	0	1	0	0	3

Figure IX *– Tableau des narrations de recherche*

Al, And, Ant, D, L, O, S et T sont les huit élèves qui ont produit les narrations de recherche

On peut constater que les élèves ont retenu les cinq étapes de la construction de ma séquence.

Tous les élèves, à l'exception de S. qui ne mentionne pas l'étape des cubes formés par leurs arêtes, ont gardé en mémoire les cinq expériences. Je notais dans les chapitres précédents l'importance pour ces élèves du spécialisé de pouvoir utiliser leur intuition dans la résolution de problèmes. Or, l'intuition est générée grâce aux diverses expériences, il était donc indispensable de faire vivre aux élèves ces expériences. Mon premier constat est donc positif, en remarquant que presque tous les élèves ont retenu les cinq étapes, chaque élève a pu accumuler un certain nombre d'expériences en mathématique, qui, je l'espère, leurs seront utiles pour leur futures expériences mathématiques.

Ces cinq étapes de ma séquence sont presque équivalentes, on constate toutefois une légère accentuation pour les deux étapes des sections des cubes en polystyrènes ainsi que pour la forme finale en papier. Ces deux étapes ont plus marqué les élèves, cela est peut-être dû au fait que ce sont les deux étapes qui ont pris le plus de temps et de concentration de la part des élèves. Ces deux étapes sont également, à mon avis, les plus complexes, ce qui a certainement mis les élèves plus en difficulté. Pour réussir ces étapes, les élèves ont dû faire plus d'effort que pour les autres étapes ce qui pourrait expliquer ce pourcentage supérieur d'images relatées par les élèves dans leur narration.

Il est intéressant de noter que trois élèves signalent dans leur narration l'étape théorique, certes ce n'est pas une majorité, mais quelques élèves ont intégré la partie théorique dans leur narration, cela peut montrer que des liens ses sont faits entre les expériences et la théorie, que la dialectique (Dias 2008) entre ces deux pôles a été perçue pour ces élèves.

Sur les huitante images des narrations, seulement deux (de deux élèves différents) ont des images insérées, cherchées sur internet. Pour narrer leurs expériences, les élèves n'ont donc pas eu besoin d'aller chercher d'autres images, ils ont utilisé pour la grande majorité de leur présentation leurs photos. Ce fait montre que les expériences proposées ont marqué les élèves. Avec ces expériences, l'élève n'a pas ressenti le besoin d'aller chercher des images, des informations ailleurs que dans ses productions. Ces expériences ont donc bien marqué les élèves, ce qui leur sera profitable pour leurs intuitions futures.

La première image insérée est un hypercube :

***Figure IX** – Insertion d'un hypercube dans une narration*

D'après mon interprétation, simplement décorative. L'élève a certainement voulu illustrer son titre (cube) avec une image et est tombé sur cette image.

La deuxième image insérée est plus interrogative. L'élève a mis en parallèle les sections du cube dessinées sur une feuille de papier et une image de différents solides :

***Figure IX** – Insertion d'une image de solide dans une narration*

L'élève met donc en l'un en face de l'autre des formes planes avec des solides. Il met l'image des solides pour, peut-être, illustrer les quadrilatères et triangles cités juste avant. Il y a, à mon avis, dans la tête de cet élève une confusion entre le spatiale et la géométrie plane. Le fait de travailler sur des cubes, pour trouver les différents quadrilatères et triangles a peut-être perturbé l'élève, il n'a pas fait les liens entre les deux géométries, plane et spatiale.

Pour continuer l'analyse de certaines pages des narrations, je vais différencier trois types de représentation : l'icône, le symbole et l'indice (Dias 2012). L'icône est une forme de représentation imagée (Ibid.) qui se rapporte fidèlement à la réalité observée. Le symbole est une représentation moins proche d'une réalité (Ibid.) qu'un icône, le symbole est mis en place pour gagner du temps, pour mettre en place un consensus entre plusieurs personnes pour parler d'un même objet (ex. : le vocabulaire, les francophones symbolisent une chaise avec une suite de lettre c/h/a/i/s/e). L'indice est une représentation indirecte, qui suggère (Ibid.) un objet.

Un autre élève a produit une majorité de pages comme celle-ci :

Figure IX *– Exemple d'une image de la narration de Al*

La représentation ne se fait qu'à travers une icône (la photo), l'élève ne met pas de symbole (vocabulaire) précis pour expliciter. L'élève qui produit un tel travail peut avoir compris le problème, mais n'arrive pas à l'exprimer avec des mots. L'icône est donc utile pour représenter ce que l'élève veut montrer.

Dans toutes les narrations, on trouve dans la majorité des cas une icône (image ou photo) en relation avec un symbole (l'écriture du nom), en voici deux exemples :

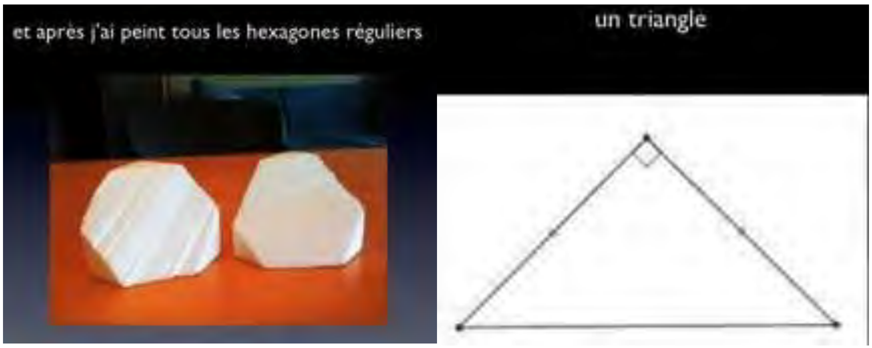


Figure IX *– Icône et symbole représentés sur une même page de narration*

Dans ces cas, l'élève utilise correctement le vocabulaire francophone spécifique aux formes géométriques. Il y ajoute une représentation iconique, le fait de mettre en parallèle une icône et un symbole peut aider l'élève à stabiliser son vocabulaire spécifique à la géométrie. Toutes les images de la narration sur le kaléidocycle montrent cette double représentation, iconique et symbolique en même temps.

Dans toutes les narrations, je n'ai pas pu observer de représentation sous forme d'indice. Etant la forme la plus éloignée de la représentation concrète d'un objet, l'indice n'est pas la forme choisie par les élèves. Ils privilégient les représentations se rapprochant au mieux du réel, l'icône. Souvent, ils y ajoutent des mots scientifiques précis, des symboles.

8. Conclusion

Les élèves en difficulté sont capables de faire des activités complexes non-simplifiées. Ces jeunes utilisent leurs intuitions et ont besoin de matériel pour se représenter des objets géométriques en trois dimensions et réussir ces activités. Ils peuvent produire de bons travaux malgré les difficultés des activités. J'ai pu observer qu'ils réussissent à faire des liens entre théorie et expériences (Dias 2008) ainsi qu'entre les différents exercices (Serment 2012).

REFERENCES

Bachelard G. (1938) *La formation de l'esprit scientifique*. Paris : Vrin.

Bkouche, R. (2006) La Géométrie entre mathématiques et sciences physiques. In Kourkoulos M., Troulis G., Tzanakis C. (Eds.) *Proceedings of the 4th International Colloquium on the Didactics of Mathematics*. (vol.II, art.2.3). Université de Crète.

Bonafé F. (2003) *Les narrations de recherche de l'école primaire au lycée*. Paris: APMEP.

Brousseau, G. (2000). Les propriétés didactiques de la géométrie élémentaire. *Actes du Séminaire de Didactique des Mathématiques de l'Université de Crète.* Rethymon.

Changeux J., Connes A. (1989) *Matière à pensée*. Paris : Odile Jacob.

Chevalier A. (1992) Narration de recherche: un nouveau type d'exercice scolaire. *Petit x* 33, 71-79.

Conne F. (2011) La narration est un relai, une auberge ...espagnole bien entendu. *Actes des journées de la Chaux-d'Abel 2011*.

Dias T. (2008) *La dimension expérimentale des mathématiques : un levier pour l'enseignement et l'apprentissage*. Doctorat de l'université Claude Bernard – Lyon 1.

Dias T. (2008) L'apprentissage de la géométrie dans la scolarité obligatoire : une didactique entre objets sensibles et objets théoriqus. In Bloch I., Conne F. (Eds) *Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques – La géométrie, les documents pour l'enseignement, le métier de chercheur en didactique* – Cours de la XIVe école d'été de didactique des mathématiques Sainte Livrade (Lot et Garonne), 2007 (cédérom d'accompagnement). Grenoble : La pensée Sauvage.

Gonseth F. (1945) *La géométrie et le problème de l'espace*. Neuchâtel : Editions du Griffon.

Greenwood T. (1926) L'adaptation de la géométrie au monde sensible. *Revue néo-scolastique de philosophie* 9, 37-51.

Kant E. (1980) *Critique de la raison pure*. Paris : Gallimard – Folio essais (première édition originale 1781).

Poincaré H. (1968) *La science et l'hypothèse*. Paris: Flammarion (première édition originale 1902).

Serment J. (2012) Sections du cube... en version géante. *Math-Ecole* 218, 35-39.

CONCEPTION ET MISE À L'ÉPREUVE D'UN ENSEIGNEMENT INTÉGRANT LA CALCULATRICE DANS UNE SITUATION VISANT UNE MEILLEURE COMPRÉHENSION DES PROPRIÉTÉS DES OPÉRATIONS CHEZ LES ÉLÈVES DU TROISIÈME CYCLE DU PRIMAIRE

Stéphane SINOTTE*

Résumé – Le texte présenté porte sur une recherche action menée par un enseignant de niveau primaire avec ses élèves de 5e et de 6e année (10-12 ans). Cette recherche prend son origine dans le questionnement que l'enseignant a eu lors de l'étude des tables de multiplication et de division où il a constaté que les élèves ne font pas toujours le lien entre ces deux opérations arithmétiques. Cette recherche-action concerne l'élaboration d'une approche utilisant la calculatrice et permettant aux élèves la découverte et la construction des propriétés des opérations arithmétiques.

Mots-clefs : Propriétés des opérations arithmétiques, multiplication, division, utilisation de la calculatrice en enseignement, enseignement primaire

Abstract – The text is about an action research conducted by an elementary school teacher with his 5th and 6th grades students (10-12 years old). This research origins in the teacher's questioning about the study of multiplication and division tables into which he observed that the students did not understood the relations between those arithmetic operations. This action research then present the elaboration of a sequence using the calculator to allow students to discover the arithmetic properties, which have been developed by those students.

Keywords: Properties of arithmetic operations, multiplication, division, the use of the calculator in teaching, elementary school teaching

I. INTRODUCTION

Cette recherche action concerne vise à l'élaboration d'une approche permettant à des élèves de 5e et 6e années du primaire (10-12 ans) de découvrir les propriétés des opérations arithmétiques, lesquelles ont été construites par les élèves, et non amenées par l'enseignant dans le cadre d'un enseignement plus formel. À cette fin, nous avons introduit la calculatrice comme outil pour libérer l'élève des tâches de calcul, laissant ainsi toute la place au raisonnement mathématique. La recherche a été menée dans la classe d'un jeune enseignant du primaire qui débute sa quatrième année d'enseignement.

II. DESCRIPTION DU CONTEXTE

Le groupe classe participant à cette recherche action est une classe du troisième cycle du primaire, soit le groupe de double niveau de cinquième et sixième années de l'auteur. Ce double niveau est dû au nombre d'élèves de chaque niveau disponible lors de la formation des groupes de l'école. Onze de ces élèves sont de niveau cinquième année et les quatorze autres de niveau sixième année. Le groupe complet compte 25 élèves (12 filles et 13 garçons), tous issus de foyers de classe moyenne. L'école est située dans la municipalité rurale de Stoke, en banlieue de Sherbrooke, et fait partie de la Commission scolaire de la Région-de-Sherbrooke. L'école compte dix classes qui totalisent environ 200 élèves. L'école est considérée, dans la réalité du territoire couvert par cette commission scolaire, comme étant une « petite école ».

Le groupe d'enfants présente quelques particularités qui ont un impact direct sur l'apprentissage de la notion visée par l'expérimentation et le déroulement de

* Commission scolaire de la Région-de-Sherbrooke – Québec, Canada – sinottes@csrs.qc.ca

© Sinotte S. (2012) Conception et mise à l'épreuve d'un enseignement intégrant la calculatrice dans une situation visant une meilleure compréhension des propriétés des opérations chez les élèves du troisième cycle du primaire. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (SPE1, pp. 1696–1706). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

l'expérimentation elle-même. En effet, huit des enfants composant le groupe ont un plan d'intervention actif. Le plan d'intervention vise à prévoir des interventions précises pour un élève donné, et effectuées par les divers intervenants de l'école afin d'aider l'élève à réussir. de cinq de ces huit enfants est axé sur des difficultés d'apprentissage.

III. ÉLÉMENTS DE PROBLÉMATIQUE

Lors de l'étude des tables de multiplication et de division en classe, nous avons constaté que les élèves ne font pas toujours le lien entre la multiplication et la division. Ainsi, ils ne voient pas que la multiplication est l'opération inverse de la division, et vice-versa, et voient l'étude des tables de multiplication et division comme une double tâche à accomplir.

Par exemple, nous avons constaté que les élèves, même avec deux opérations écrites côte à côte (voir figure 1), n'étaient pas capables de voir la relation entre les deux. S'ils parviennent à faire la première opération avec une certaine facilité, ils ont de la difficulté pour la deuxième, bien qu'elle soit l'inverse de la première. Ainsi, ils ne voient pas les liens qui existent entre la multiplication et la division.

12 x 9 =	÷ 9 = 12

Figure 1

Ils présentent également des difficultés à percevoir ce lien, même si les divisions sont en contexte. Étant donné que les élèves de notre classe semblent bien comprendre le sens de la multiplication, nous avons voulu vérifier s'il en est de même pour le sens de la division. Une méconnaissance de la division pourrait en effet expliquer une compréhension déficiente du lien qui existe entre la multiplication et la division. Pour ce faire, nous leur avons donné le problème suivant, inspiré de Fosnot et Dolk (2011). Ce problème appelle à deux divisions, une faisant intervenir le sens du partage et l'autre, le sens de la mesure :

> Une enseignante a acheté 186 crayons pour remplacer les crayons sur chacune des tables de travail de la classe. Avant de les distribuer, elle a demandé aux élèves de déterminer combien il y en aura sur chacune des six tables.
>
> Étant donné que les crayons se vendent en boîte de six, elle leur a également demandé de calculer combien de boîtes elle avait achetées.

Nous avons été très étonné de la diversité des démarches que les élèves pour résoudre ces deux problèmes ayant une structure multiplicative. Ainsi :

- Huit élèves sur 25 ont bien compris les relations partie/tout de la structure multiplicative et, par la même occasion, la relation entre la multiplication et la division. Ces élèves ont fait une seule division (par l'algorithme) et ont correctement interprété les réponses. (Il y a 6 boîtes de crayons et il y aura 31 crayons par table). La moitié de ces élèves a fait la preuve par la multiplication.
- Onze élèves n'ont pas tout de suite vu la relation entre les deux problèmes puisqu'ils les ont résolus séparément :
  - Deux élèves ont fait deux algorithmes identiques qu'ils ont interprétés différemment (186 crayons ÷ 6 tables = 31 crayons par table ; 186 crayons ÷ 6 paquets = 31 paquets).
  - Un élève a résolu la division partage par additions répétées et la division mesure par soustractions répétées.

- Un élève a résolu la division partage à l'aide de l'algorithme tandis qu'il a fait appel à la distributivité de la multiplication pour résoudre la division mesure (20 X 6) + (11 X 6) = 186). Bien que cet élève ait une très bonne maîtrise des propriétés de la multiplication, sa démarche montre qu'il ne saisit pas parfaitement les sens associés à la division.
- Un élève a fait la division de type mesure à l'aide de l'algorithme et, en ce qui concerne la division partage, il a procédé par dénombrement des multiples de 6 jusqu'à 186. Toutefois, une erreur de calcul ne lui a pas permis d'arriver à la bonne réponse.
- Trois élèves ont résolu la division mesure avec l'algorithme, mais ont eu de la difficulté à donner du sens à la division partage. Deux de ces élèves ont fait la preuve de la division par la multiplication.
- Trois élèves ont résolu la division partage avec l'algorithme, mais n'ont pas réussi celle qui faisait appel à la mesure. Un de ces élèves a fait la preuve de leur division par additions répétées.

- Trois élèves n'ont pas été capables de donner du sens aux divisions puisqu'ils ont fait 186 X 6, pour un total de 1116 crayons ;
- Trois élèves qui présentent de graves difficultés d'apprentissage ont utilisé des stratégies diverses qui ne s'apparentent pas à la division.

Ces résultats indiquent que seul le tiers des élèves de la classe comprend bien les relations partie/tout de la structure multiplicative. Si plusieurs des élèves montrent qu'ils savent appliquer l'algorithme, leur démarche illustre qu'ils ne maîtrisent pas les sens associés à la division. En fait, ils sont en train de les construire. Dans ces circonstances, il n'est pas étonnant que l'on ait remarqué que ces élèves présentent des difficultés à établir un lien entre la multiplication et la division.

Pour aller plus loin au niveau de la résolution de l'algorithme de division, dans un tout autre contexte nous avons remarqué que, si l'effectuation de l'algorithme de multiplication ne pose généralement pas de problème, il en est autrement pour celui de la division. En effet, nous avons noté que les élèves ont parfois de la difficulté à choisir un nombre assez grand au quotient. Par exemple, dans la division de 760 par 8, certains ne sont pas à l'aise avec des opérations du genre (8 x) + = 76 (voir figure 2), ce qui vient expliquer que certains élèves ont de la difficulté à établir des liens entre la multiplication et la division.

76~~0~~ / 8
64 815
12
8
40
40
0

Figure 2 – *Démarche erronée d'un élève*

IV. CADRE DE RÉFÉRENCE

Les élèves présentent des difficultés dans la résolution de l'algorithme de division. Toutefois, nous faisons l'hypothèse que ces difficultés ne sont pas dues tant à l'algorithme lui-même qu'à des difficultés plus fondamentales. Dans le cadre de cette expérimentation, nous désirons ainsi aller à la base en travaillant au niveau des propriétés des opérations arithmétiques, plus précisément les propriétés de la multiplication et la division. Ainsi, nous voulons amener les élèves à comprendre la relation entre la multiplication et la division, qui est un préalable essentiel à la compréhension des relations partie/tout des problèmes à structure multiplicative. En effet, en considérant le tout comme un nombre de groupes d'un nombre d'objets - par exemple 12 X 9 ou douze groupes de neuf – « ensemble, les parties deviennent le nouveau tout, et ces parties (les groupes) et le tout peuvent être considérés simultanément. La relation de ces parties au tout explique la relation réciproque entre la division et la multiplication » (Fosnot et Dolk 2011). Par la même occasion, nous avons travaillé la relation entre l'addition et la soustraction, l'une étant l'inverse de l'autre.

Dans ce contexte, nous avons pensé que l'utilisation de la calculatrice comme instrument pour la découverte des propriétés des opérations était toute indiquée. En effet, grâce à cet instrument, « les élèves disposent de nombreux résultats observables facilement obtenus, à partir desquels ils peuvent percevoir des régularités, émettre des hypothèses, mettre ces hypothèses à l'épreuve en expérimentant » (Lajoie 2009, p. 69). De plus, ainsi que le rapportent Guin et Trouche (2002), la *Commission Nationale sur l'Enseignement des Mathématiques* (CNEM) précise que l'informatique, dont fait partie la calculatrice, apporte une motivation nouvelle dans l'enseignement des mathématiques, qu'elle amène à repenser la façon de voir les notions. Nous pensons donc que la calculatrice peut ainsi amener chez les élèves une motivation supplémentaire dans la situation que nous projetons.

Pour Roegiers (1998), la calculatrice peut jouer plusieurs fonctions : un outil de calcul, un outil de renforcement de l'acquis, un outil de recherche et d'apprentissage de même qu'un outil de contrôle et de vérification du travail fait à la main. Nous sommes donc loin de la conception de la calculatrice qui fait les calculs à la place de l'élève. Pour Charnay (1994), qui débat de la nécessité de faire entrer la calculatrice à l'école primaire, l'élève doit comprendre que, utilisée correctement, la calculatrice « n'élabore pas les solutions, elle ne dispense pas de chercher quels calculs il faut faire » (p. 116).

Pour reprendre les diverses fonctions de la calculatrice identifiées par Roegiers (1998), elle est premièrement un outil de calcul lorsque dans un problème, « l'aspect calcul est secondaire » (p. 249). Deuxièmement, elle est utilisée comme outil de renforcement de l'acquis, lorsqu'elle permet à l'élève de travailler les stratégies numériques et le sens des opérations. Cette conception va dans le sens de ce que Charnay (2004) avance lorsqu'il dit que « la calculatrice n'est en réalité que le support du questionnement et non le moyen d'y répondre » (p. 73). Troisièmement, la calculatrice peut être un « outil de recherche et d'apprentissage » lorsqu'elle agit comme « support à des questions qui vont amener l'enfant à prolonger l'apprentissage » (Roegiers 1998, p. 250). Dans ce cas, Roegiers donne comme exemple la recherche du reste d'une division. 4732 ÷ 8 = 591,5. Le chiffre 5 après la virgule représente 5/10 = 4/8, le reste de cette division est donc 4. Enfin, elle peut servir comme outil de contrôle lorsque l'activité proposée à l'élève en est une de calcul écrit. Dans le cas qui nous préoccupe, nous voulons utiliser la calculatrice comme outil de recherche et d'apprentissage.

Il est d'autant plus justifié d'utiliser la calculatrice que le Programme de formation de l'école québécoise (PFEQ) accorde une place importante aux technologies de l'information et de la communication (TIC) dans le curriculum du primaire. D'une part, les élèves sont appelés à travailler la compétence transversale qui consiste à exploiter les TIC, dont fait partie la calculatrice, et d'autre part ces technologies doivent être utilisées comme outil pour l'enseignement et l'apprentissage de diverses disciplines, dont les mathématiques. Le Ministère de l'éducation (MEQ) considère ainsi les TIC comme un « outil précieux pour supporter la démarche de résolution de situations-problèmes, favoriser la compréhension de concepts et de processus et augmenter l'efficacité des élèves dans l'exécution des tâches qui leurs sont proposées » (Gouvernement du Québec 2001, p. 125).

Enfin, toujours dans le cadre du PFEQ, la calculatrice est identifiée comme matériel technologique et se retrouve comme un objet (avec les bâtonnets, les traits, le boulier et l'abaque) dans l'évolution de la technologie. Si on conseille une appropriation des touches de base de la calculatrice au début de son utilisation, on suggère aussi d'utiliser la calculatrice lorsque les nombres dépassent les limites proposées, lors de la preuve de diverses opérations, lors de l'exploration de nombres naturels, décimaux, de fractions et des opérations avec ces différents nombres (Gouvernement du Québec 2001).

V. OBJECTIF DE RECHERCHE

Notre objectif de recherche consiste alors à expérimenter une situation d'apprentissage intégrant la calculatrice et visant une meilleure compréhension des propriétés des opérations chez les élèves du troisième cycle du primaire. Nous visons ainsi à solidifier les connaissances des élèves quant à la relation entre la multiplication et la division, en s'appuyant sur leurs connaissances concernant la relation entre l'addition et la soustraction.

VI. MÉTHODOLOGIE

Dans l'exploration des situations d'apprentissage et des activités proposées avec la calculatrice à travers la littérature, nous avons porté notre choix sur l'activité du « Jeu des devinettes » de Mary, Squalli et Schmidt (2006). Cette activité permet une découverte des propriétés des opérations par les élèves, ce qui rejoint notre objectif. Comme cette activité est à la base une activité d'intégration réfléchie de la calculatrice en classe, elle renforce donc notre choix d'utiliser cet outil.

Cependant, comme les élèves de la classe où se déroule l'expérimentation ne sont pas à l'aise avec la calculatrice, nous avons d'abord commencé par une activité de prise en main de celle-ci et ainsi éviter que la calculatrice ne devienne l'objet de l'apprentissage, tel que le rapporte Morin et Corriveau (2009) au sujet d'une étude qui portait sur l'utilisation des technologies dans l'enseignement de la géométrie. Ces dernières ont en effet constaté qu'il semble y avoir deux façons d'intégrer les technologies à l'enseignement.

> Si certains enseignants du primaire utilisent l'ordinateur comme un outil qui soutient l'apprentissage et qui est susceptible d'amener les élèves vers une meilleure compréhension, d'autres voient davantage l'ordinateur comme un objet d'apprentissage en ce sens qu'ils ne dépassent pas l'étape de l'appropriation de l'objet. (Morin et Corrivea 2009 p. 57)

De la même façon, Lajoie (2009) est d'avis qu' « une exploration de l'outil est de mise, de manière à en démystifier le fonctionnement, de manière aussi à faire connaître aux élèves diverses possibilités et limites de leur calculatrice » (p. 68). Cette prise en main était pour nous essentielle d'une part, pour ne pas créer un effet de distraction par la nouveauté lors de l'expérimentation et d'autre part, pour faire en sorte que les élèves partagent une base commune.

Pour débuter, compte-tenu le niveau scolaire des élèves et le but visé par l'expérimentation, nous avons vu l'importance de chacune des touches qui les concerne. Aussi, en plus d'initier les élèves aux touches de base telle la fonction de remise à zéro qui remet l'écran d'affichage de la calculatrice à zéro, effaçant le résultat ou les données précédemment affichées et enregistrées dans la mémoire de l'outil, nous avons choisi une activité suggérée par Lajoie (2009). Cette activité a comme but de faire réfléchir l'élève par rapport au fonctionnement de la calculatrice. Par exemple, l'élève doit réfléchir quant aux conséquences liées au fait d'appuyer plusieurs fois sur la touche « = » après une opération. En effet, 8 + 6 = n'est pas équivalent à 8 + 6 = =, où la calculatrice ajoute 6 à deux reprises. Nous voulions ainsi amener les élèves à constater que pour obtenir un résultat juste à l'opération commandée à l'outil, ils doivent appuyer sur une séquence précise de touches, sans en dupliquer inutilement, puisque la calculatrice ne peut faire la différence entre une entrée utile et une entrée inutile. L'opération utilisée, « 8 + 6 », est simple et les élèves peuvent la réaliser en calcul mental, ce qui leur permet de valider ou d'invalider aisément les résultats obtenus à la calculatrice.

Note tous les résultats que tu obtiens en effectuant

8 + 6 =

8 + 6 + =

8 + 6 + +

8 + 6 + = =

Que remarques-tu ?

Après les activités de prise en main, pour travailler les propriétés des opérations, nous avons choisi l'activité du Jeu des devinettes tel que proposée par Schmidt, Mary et Squalli (2006). Le but de l'activité est d'amener les élèves à réfléchir collectivement sur la généralité derrière une chaîne d'opérations, de construire eux-mêmes de telles chaînes et de s'engager dans un processus de validation à l'aide de la calculatrice. Elle s'adresse à des élèves de 3e cycle du primaire et du cycle du secondaire. Le travail d'équivalence sur les calculs permet de réfléchir et de raisonner sur les opérations et sur les propriétés des opérations, donc sur la réversibilité de la multiplication et de la division.

Dans cette activité, l'enseignant prétend être un magicien parce qu'il peut prédire avec certitude le résultat à une chaîne d'opérations effectuées avec un nombre secret choisi par chacun des élèves. Il présente ainsi les deux devinettes suivantes, lesquelles doivent être résolues par les élèves. Par la suite, afin de vérifier la compréhension des élèves, ils doivent eux-mêmes construire des devinettes. Voici les deux premières devinettes présentées aux élèves.

Fiche enseignant

Les 2 devinettes :

Choisissez, sans rien dire, un nombre compris entre 1 et 10.

- Multipliez-le mentalement par 6
- Divisez le nombre obtenu par 3
- Divisez le nombre obtenu par 2.
- Enlevez le nombre choisi au départ
- Ajoutez 7
- Retranchez 2.

Choisissez un nombre compris entre 1 et 10.

- ➢ Multipliez-le mentalement par 10
- ➢ Divisez le nombre obtenu par 5
- ➢ Divisez le nombre obtenu par 2
- ➢ Ajoutez 9
- ➢ Enlevez le nombre choisi au départ
- ➢ Retranchez 4.

VII. PLANIFICATION

Séance 1 : Découverte de la calculatrice : activité de Lajoie (2006).

Séance 2 : Jeu des devinettes, d'après Schmidt, Mary et Squalli (2006).

- Phase 1 : phase d'initiation (5 minutes). Lancer la première devinette. Les élèves utilisent leur calculatrice à affichage multi-lignes. S'adresser à un élève en lui disant que l'on devine qu'il a obtenu le nombre 5.
- Phase 2 : travail en équipe (10 minutes). Scinder la classe en équipes de 4 élèves. Demander aux équipes de construire une devinette: « Faites une devinette qui, elle aussi, donne toujours le même nombre. C'est à vous de décider quel nombre elle va toujours donner ».
- Phase 3 : retour en grand groupe (20 minutes). À tour de rôle, les équipes présentent leur devinette oralement. L'enseignante questionne les élèves : « Est-ce que ça marche ? Pourquoi ? » (validation). Le groupe, avec l'enseignant, examine les devinettes (certaines fonctionnent d'autres pas). Celles-ci sont alors présentées sur transparents. Le groupe analyse les devinettes incorrectes, pour en dégager les raisons. Au terme de cette réflexion de groupe, l'enseignante pose cette question : « Est-il possible de deviner le nombre secret, juste en regardant les opérations demandées ? Comment faites-vous ? »
- Phase 4 : construction d'une devinette qui arrive au nombre 7 (10 minutes). Demander aux équipes de construire une devinette qui arrive nécessairement au nombre 7.
- Phase 5 : retour en grand groupe (15 minutes). À tour de rôle, les équipes présentent leur devinette oralement. L'enseignante questionne les élèves de la classe : « Est-ce que ça marche ? Pourquoi ? » (validation). Le groupe, avec l'enseignante, vérifie les devinettes qui ne fonctionnent pas. Celles-ci sont alors présentées sur transparents. Le groupe analyse les devinettes incorrectes, pour en dégager les raisons.

VIII. RÉSULTATS

La prise en main a été très profitable aux élèves, puisque ceux-ci n'avaient jamais travaillé à la calculatrice. De plus, étant donné que nous avions des calculatrices qui permettent un affichage sur plusieurs lignes, l'effet de nouveauté était encore plus grand.

Afin que les élèves constatent l'importance de la calculatrice dans leur travail, la première devinette proposée aux élèves a été travaillée sans calculatrice. Cela nous a permis de constater que certains élèves étaient mélangés dans certains calculs d'apparence simple et perdaient ainsi le fil du travail à exécuter. Par exemple, comme le montre la vidéo tournée lors de l’expérimentation, en tentant de résoudre la devinette « □ x 6 ÷ 3 ÷ 2 – □ + 5 = 5 », où □ est un nombre au choix compris entre 0 et 10, une élève qui n’était pas en mesure de calculer mentalement le résultat de 42 divisé par 3 a non seulement repris son calcul sur papier puisque le résultat ne lui semblait pas correct, mais a complètement oublié où elle était rendue dans la devinette. Les seconde et troisième devinettes ont quant à elles été effectuées à l’aide de la calculatrice, permettant ainsi aux enfants de se concentrer sur les liens entre les opérations.

Lorsque nous avons proposé aux élèves de construire eux-mêmes des devinettes, les enfants ont d’abord été déstabilisés puisqu’ils n’étaient pas certains de bien comprendre ce qu’ils devaient faire pour prévoir le résultat de leurs propres devinettes. S’ils comprenaient ce qui se cachait derrière les devinettes de l’enseignant, en produire était différent. Progressivement, les élèves ont découvert certaines pistes leur permettant de progresser.

Par exemple, certains élèves ont été en mesure de comprendre qu’il s’agissait d’annuler des opérations. Ils ont donc essayé de produire une devinette en utilisant la réversibilité de l’addition et de la soustraction, mais n’utilisaient pas la réversibilité entre la multiplication et la division. Comme il s’agissait de notre objectif caché, nous avons dû orienter différemment les élèves. En effet, ils répondaient à la consigne en produisant des devinettes correctes, mais ces devinettes ne nous permettaient pas d’atteindre nos objectifs. C’est pourquoi nous sommes revenu à notre questionnement de départ, en axant sur la multiplication et la division. *Pourquoi puis-je prédire avec succès les réponses obtenues ? Quelles opérations sont utilisées ?* et *Que remarquez-vous à propos des opérations utilisées ?*

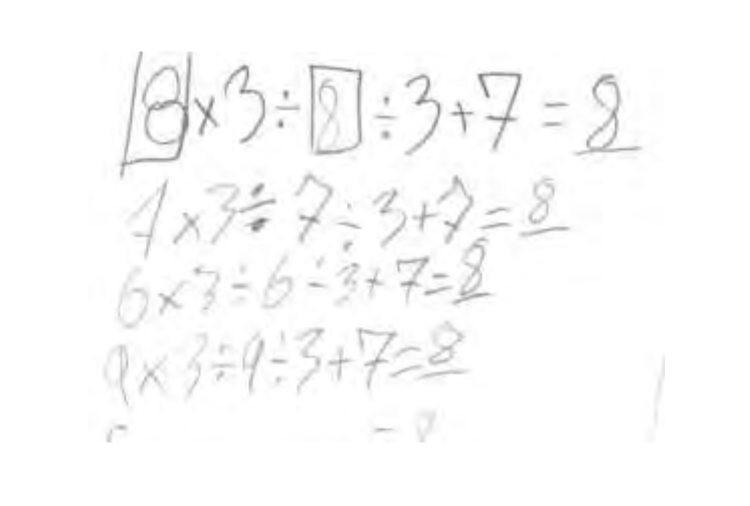
Devinette de l’équipe de Laurianne	Devinettes de l’équipe de Laurence
$\boxed{nb}$ +2 x4 - $\boxed{nb}$ +1	_ +8 ÷2 x5 - _ = 20 _ +2x4 - _ +1 = 9

Lors de cette intervention, nous avons vraiment senti qu’un déclic a eu lieu lorsqu’un élève a affirmé que « chaque fois que x6 est présent, il y a ÷3 et ÷2 par la suite, et que 2x3, c’est 6 ». L’élève avait donc trouvé comment réutiliser le principe de l’opération inverse qu’il connaissait sur l’addition et la soustraction. Les élèves ont par la suite été en mesure de produire des devinettes dans lesquelles intervenaient les opérations de multiplication et de division. Toutefois, comme le montre l’exemple suivant, certains élèves ont voulu jouer sûr en calquant exactement l’ordre des opérations fournies par l’enseignant !

Devinette de l’équipe de Kevin	Devinette l’équipe d’Anne
nombre au choix multiplie par 18 diviser par 9 diviser par 2 soustrait $\boxed{18}$ du départ	$\boxed{?}$ x 8 ÷ 4 ÷ 2 - $\boxed{?}$ + 9

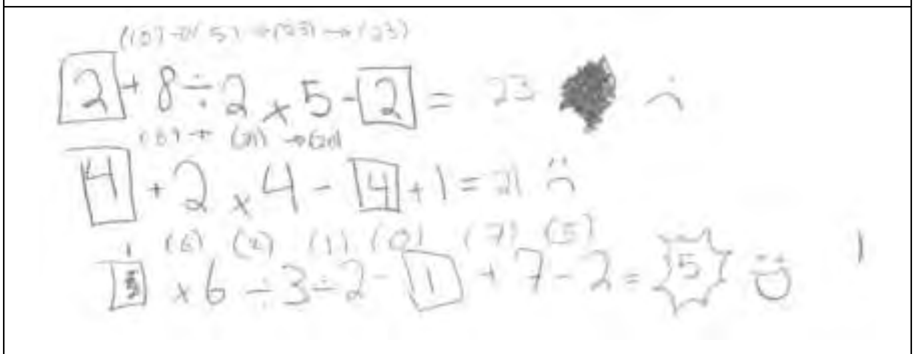
Enfin, une élève est allée plus loin en produisant une devinette qui se distinguait de celle de l’enseignant.

Devinette de l’équipe de Josianne



Il a été intéressant de constater que ce travail sur les propriétés des opérations nous a amené à travailler les priorités des opérations. Comme en témoigne l’exemple suivant, bien que l’équipe de Chloé ait fait des devinettes correctes, elles ne fonctionnaient pas. En observant bien leur travail, nous avons constaté que c’est parce que cette équipe résolvait leurs chaînes d’opérations mentalement, sans respecter la priorité des opérations. Ainsi, dans un premier temps, nous avons amené cette équipe à refaire leurs calculs à l’aide de la calculatrice et, dans un deuxième temps, une capsule mathématique[1] a été réalisée concernant la nécessité de respecter la priorité des opérations.

Devinette de l’équipe de Chloé



Suite au travail réalisé par rapport aux propriétés des opérations nous avons voulu retourner à notre problématique de départ concernant la relation partie/tout de la structure multiplicative. Nous avons ainsi fourni aux élèves un problème qui faisait intervenir deux divisions, une division partage et une division mesure.

> On peut se procurer la série de romans Harry Potter à la librairie pour 91$. Comme il y a sept tomes, combien coûte chaque tome ?
>
> Pour 91$ aussi, on peut avoir le coffret des Chroniques de Narnia. Chacun des livres coûte 13$. Combien de tomes y a-t-il dans le coffret ?

[1] Cette capsule a été réalisée en utilisant les équipes de la classe. Dans la classe il y a 25 élèves. Quand l’enseignant veut former des équipes de 5, il y a un élève seul et 8 équipes de 3, ce qui fait 1 + 8 X 3. Dépendant du respect ou non de la priorité des opérations, ce calcul donne 25 ou 27.

Nous avons voulu que les deux divisions n'aient pas tout à fait la même structure que celles du problème initial en ce sens que les deux divisions recherchées n'étaient pas les mêmes. En effet, dans un cas il fallait faire 91$ ÷ 7 tomes = 13$ et dans l'autre 91$ ÷ 13$ = 7 tomes. Nous avons procédé de cette façon afin de voir quels élèves réussiraient à faire le deuxième problème uniquement en raisonnant à partir du premier et en montrant ainsi une bonne compréhension du lien entre la multiplication et la division.

Nous sommes très satisfaits des résultats qui montrent que, sur les 21 élèves[2], 3 ont montré qu'ils maîtrisent bien le lien entre la multiplication et la division puisqu'ils ont fait la première division et en ont déduit la deuxième réponse (si 91$ ÷ 7 tomes = 13$ alors 91$ ÷ 13$ donneront forcément 7). Six ont fait la première division et pour trouver la deuxième réponse, ils ont fait l'opération inverse, soit 13 $ X 7 tomes = 91 $. Trois élèves ont procédé par additions répétées (13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13 = 91, donc 13 X 7 = 91) et ont ensuite déduit l'autre réponse. Six élèves ont montré qu'ils comprenaient bien le sens que l'on doit accorder à chacune de ces divisions puisqu'ils ont effectué les deux divisions avec succès et enfin, 3 ont utilisé des procédures diverses qui ne leur a pas permis d'accéder aux bonnes réponses (par exemple, 91 X 13 = 364 tomes). Nous avons comparé les résultats un à un, afin de bien voir le progrès d'une situation à l'autre. Cet exercice nous a permis de constater que certains élèves ont fait de réels gains par rapport à la pré-expérimentation. Par exemple, l'élève 6, qui avait fait une première division réussie puis une deuxième division dont le résultat était erroné, a procédé par division (réussie) et ensuite par multiplication (opération inverse) pour trouver la réponse à la deuxième question. Ou encore, l'élève 8, qui avait procédé par additions répétées puis par soustractions répétées, a fait la première division puis, voyant bien le lien entre les deux problèmes, n'a pas ressenti le besoin de faire une deuxième division et a déduit la deuxième réponse. Pour nous, ces résultats montrent qu'il y a eu, chez un grand nombre de nos élèves, une progression quant à la compréhension du lien existant entre la multiplication et la division. Nous pensons ainsi que le travail réalisé sur les propriétés des opérations a vraiment aidé les élèves à ce niveau.

IX. CONCLUSION

Suite à cette utilisation réfléchie de la calculatrice et ce travail sur les propriétés des opérations arithmétiques, nous pensons déjà à une intégration plus poussée de la calculatrice dans l'enseignement des mathématiques. Étant donné le questionnement amené par une élève concernant les priorités des opérations, nous pourrions en profiter approfondir le travail que nous avons commencé. Par exemple, l'utilisation de calculatrices qui tiennent compte de la priorité des opérations en parallèle avec l'utilisation de calculettes de base pourrait servir à produire deux résultats différents pour une même équation, ce qui pourrait donner lieu à des réflexions intéressantes pour travailler les priorités des opérations et les opérations sur les nombres.

De même, une poursuite de l'activité pourrait être réalisée dans le cadre du développement de la pensée algébrique chez ces élèves. L'idée est, selon Carpenter, Franke et Levi (2003), d'aider les élèves à bâtir une base solide en arithmétique, sur laquelle ils pourront s'appuyer pour apprendre l'algèbre. Par exemple, si les élèves comprennent assez bien l'arithmétique pour pouvoir expliquer et justifier les propriétés utilisées dans leurs calculs, on peut dire qu'ils ont acquis une des fondations de l'algèbre. En effet, le développement du sens des opérations au primaire favorise le développement de la pensée algébrique (Squalli 2002).

[2] Quatre élèves étaient absents cette journée-là.

Pour continuer à travailler au niveau du développement du sens des opérations, nous pensons qu'il est essentiel que l'on vise davantage à orienter la réflexion des élèves vers les opérations en se détachant de la valeur numérique des nombres d'une chaîne d'opérations.

RÉFÉRENCES

Carpenter T., Loef M., Levi L. (2003) *Thinking mathematically. Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Portsmouth, NH : Heinemann.

Charnay R. (2004) Des calculatrices à l'école primaire ? Oui ? Non ? Pourquoi ? Comment ? *Grand N* 74, 67-75.

Charnay R. (1996) *Pourquoi des mathématiques à l'école ?* Paris : ESF éditeur.

Gouvernement du Québec (2001) *Programme de formation de l'école québécoise. Éducation primaire et préscolaire.* Québec : Ministère de l'Éducation.

Guin D., Trouche L. (2002) *Calculatrices symboliques : transformer un outil en un instrument de travail mathématique : un problème didactique*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Fosnot C., Dolk M. (2011) *Jeunes mathématiciens en action. Construire la multiplication et la division*. Montréal : Chenelière Éducation.

Lajoie C. (2009) La calculatrice comme source et support de questions fécondes : quelques exemples pour la classe de mathématiques au primaire et pour la formation des maîtres. *Bulletin AMQ* 49(1), 65-75.

Mary C., Squalli H., Schmidt S. (2006) *Le rôle de l'argumentation et de la validation en classe dans l'émergence de la généralisation chez les élèves en difficulté grave d'apprentissage*. Rapport de recherche non publié.

Morin M.-P., Corriveau A. (2009) Deux générations d'instruments pour l'enseignement de la géométrie : une rencontre souhaitable et réussie ! In Spagnolo F. (Ed.) *L'activité mathématique dans la pratique de la classe et comme objet de recherche en didactique. Actes de la 61e rencontre de la CIEAEM*. Montréal, Québec. *Quaderni di ricerca in didattica (Scienze Matematiche)* Supplemento n°2, 2009. G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy).

Squalli, H. (2002) Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire : un exemple de raisonnements à l'aide de concepts mathématiques. *Instantanés mathématiques* 39(1), 4-13.

ÉVALUATION, COMPETENCES ET ORIENTATION DANS LES TRANSITIONS SCOLAIRES : ROLE DES MATHEMATIQUES

Compte-rendu du projet spécial n°2 – EMF2012

Ghislaine GUEUDET[*] – Faten KHALLOUFI[**] – Viridiana MARC[***]

I. POINTS DE DÉPART ET DÉROULEMENT

Le titre de ce projet spécial associe plusieurs concepts forts. Nous avons donc, au départ du travail, cherché à préciser les questionnements possibles tout en restreignant le nombre de concepts considérés.

Il nous a ainsi semblé pertinent de poser des questions relatives aux notions de transition et d'orientation, et au lien entre les deux. Parle-t-on seulement de transition institutionnelle ? Quand considère-t-on que l'on reste dans la même institution, quand change-t-on d'institution ? Ce type de changement nécessite-t-il systématiquement une orientation particulière des élèves ? En ne considérant que des aspects liés aux transitions institutionnelles, sans immédiatement entrer dans des contenus mathématiques, la situation est complexe, et peut être très diverse selon les pays ; la comparaison internationale apparaît ici essentielle.

Alors que de nombreux travaux, à EMF et en dehors, ont étudié la question des transitions à différents niveaux scolaires, celle de l'orientation – du point de vue de la didactique des mathématiques – ne semble avoir fait l'objet que de peu d'études. Les mathématiques sont prises en compte dans certains travaux sociologiques, interrogeant les choix d'orientation, en fonction du prestige des filières (Franquet, Friant et Demeuse 2011, Friant et Demeuse 2011) ; ou dans des travaux de psychologues, liant orientation et sentiment d'efficacité personnelle (Blanchard 2008).

Par ailleurs, dans les revues anglo-saxonnes consacrées à l'orientation (« Guidance & Counselling », *British journal of Guidance & Counselling*), sont présentées des recherches étudiant l'orientation – ou plutôt la non-orientation – des filles vers les filières scientifiques. Ceci peut résulter d'une autocensuré, mais aussi des conseillers d'orientation qui ont tendance à envoyer les filles vers des filières non-scientifiques. Il semble que peu de travaux francophones interrogent cet aspect.

Le lien entre transitions et orientation amène également à poser la question des types d'évaluations qui peuvent y jouer un rôle. Quels sont les différents dispositifs d'évaluation selon les différents types de transition et quelles sont les relations entre ces dispositifs et les modes d'orientation ? Quelles compétences sont prises en compte des les évaluations qui sont faites aux moments de transition ? Est-ce que ces évaluations jouent un rôle pour l'orientation, et lequel ? Plus généralement, qu'est-ce que l'on entend par évaluation de compétences mathématiques ? Ces évaluations concernent-elles les compétences ou plutôt des connaissances et applications mathématiques ? Quel est le rapport entre les évaluations de compétences mathématiques au niveau micro (d'une classe) et au niveau macro (par exemple au niveau national) dans l'orientation des élèves ?

[*] CREAD, IUFM Bretagne, Université de Bretagne Occidentale – France – ghislaine.gueudet@bretagne.iufm.fr
[*] Faculté des sciences de Bizerte, Université de Carthage – Tunisie – fkhalloufi@yahoo.fr
[*] Institut de Recherche et de Documentation Pédagogique (IRDP) – Suisse – viridiana.marc@ne.ch

© Gueudet G., Khaloufi F., Marc V. (2012) Evaluation, compétences et orientation dans les transitions scolaires : rôle des mathématiques – *Compte-rendu du projet spécial n°2*. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21[e] siècle – Actes du colloque EMF2012* (SPE2, pp. 1707–1712). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

Ces questions sur l'évaluation amènent à interroger également les curriculums et la place des compétences dans ceux-ci. Dans certains pays, des référentiels identifient des listes de compétences précises. Quelle est la place des compétences mathématiques dans l'orientation ? Comment déterminer d'éventuelles compétences-clés et les retrouve-t-on systématiquement dans les différents systèmes et pays étudiés ?

On le voit, les questions de départ étaient nombreuses ; elles n'ont pas toutes été abordées dans le projet spécial, les interventions et les intérêts des participants amenant à retenir des focus plus précis, que nous allons préciser dans ce compte-rendu.

Le projet spécial 2 a réuni environ 30 participants, représentant 11 nationalités. Les travaux ont été organisés autour des quatre présentations retenues, qui figurent dans ces actes.

Ces présentations (dont nous redonnons la liste en fin de texte) ont été réparties au cours des trois séances de travail de manière à débuter par une prise de recul historique, amenant en particulier une réflexion sur la notion d'orientation (d'Enfert). La deuxième séance a été consacrée à une réflexion sur les compétences, et en particulier sur le lien entre compétences mathématiques et élaboration de curricula (en appui sur le cas de la Suisse, sur la base des présentations de Guignard, Emery et Marc). Enfin lors de la dernière séance, la question des compétences a été approfondie, en lien d'une part avec les transitions et les processus d'orientation, d'autre part avec les évaluations internationales (Bodin).

II. ORIENTATION ET MATHÉMATIQUES

L'intervention de d'Enfert a amené un point de vue historique (pour le cas de la France en particulier), mais aussi plus généralement une réflexion sur les différents sens qui peuvent être attribués au terme orientation. En effet, il a analysé un mouvement qui, visant d'abord une promotion des filières scientifiques, pour répondre à des besoins en professionnels, en est venu ensuite à présenter les mathématiques comme une discipline permettant une sélection équitable (du point de vue de l'origine sociale des élèves, les mathématiques étant vues comme un langage universel accessible à tous). Finalement celles-ci sont passées au statut d'instrument de tri entre élèves, et donc de cause d'échec pour nombre d'entre eux.

1. Politiques d'orientation

Dans l'introduction du projet spécial, nous avions plutôt considéré l'orientation d'un point de vue de choix individuel : qu'est-ce qui va décider un élève à choisir telle orientation ou telle autre ? Qu'est-ce qui va lui permettre, ou au contraire lui interdire, de poursuivre vers certaines filières ? Or, des points de vue plus macro, relevant des politiques éducatives, sont également essentiels.

Une politique d'orientation se fait par la création de filières, l'incitation à aller vers ces filières.

Cette politique peut prendre des formes programmatiques fortes : en France en 1957, un plan visait explicitement que 40% d'élèves puissent entrer dans les filières « longues », 40% sortant avec une qualification de niveau intermédiaire et 20% vers le marché du travail.

Cet aspect programmatique, numérique, peut sembler de nos jours moins visible au niveau national ; mais il existe à un niveau international, globalisé. Le processus de Lisbonne prévoit pour l'Europe, 80% d'élèves au niveau du bac, et 50% au niveau licence.

Cependant ces politiques : création de filières entièrement déterminées, ou systèmes d'options plus souples, sont très différentes d'un pays à l'autre.

La mise en œuvre, sur le terrain, de processus d'orientation, est inévitablement liée à la sélection. Une fois les filières créées, les élèves ne vont pas se diriger vers celles-ci en suivant naturellement la répartition idéale théorique. Il faut donc mettre en place un processus de tri ; celui-ci devient rapidement, par un glissement difficilement évitable, un tri entre élèves aptes et inaptes.

2. Nature des contenus mathématiques pris en compte pour la sélection

Quand on parle d'une « sélection par les mathématiques », il est important de regarder de près de quels contenus mathématiques il s'agit. Les mathématiques très abstraites, type théorie des ensembles, ne conduisent pas à sélectionner le même type d'élèves que les mathématiques qui sont enseignées dans les filières techniques. Il peut aussi y avoir une visée de sélection des futurs mathématiciens (en particulier dans l'enseignement supérieur) ; dans ce cas, les élèves ou étudiants seront plutôt sélectionnés selon des critères de résolution de situations mathématiques complexes.

Cette question a peu été étudiée par la recherche didactique. On ne dispose pas ainsi, par exemple (sauf dans certains cas très spécifiques), d'analyses didactiques de sujets (pour la France) du diplôme national de brevet, ou de baccalauréat. Ceci apparaît comme une piste à poursuivre pour les chercheurs.

III. RÉFÉRENTIELS DE COMPÉTENCES ET TRANSITION

A partir de l'exemple de la Suisse, qui a récemment travaillé à la conception de référentiels de compétences, des discussions ont eu lieu dans le projet spécial à propos du contenu de ces référentiels, mais également de leur mode d'élaboration, et de la gestion du passage d'un référentiel à un autre.

1. Sur les différents sens de la transition

Dans la présentation du projet spécial, le terme de transition était entendu au sens de transitions institutionnelles : du primaire au secondaire, du secondaire au supérieur, par exemple. Or ce terme peut recouvrir d'autres réalités, tout aussi importantes, dans le contexte scolaire. Au niveau (micro) d'un élève donné, tout apprentissage de connaissances nouvelles peut être vu comme une transition, à partir de connaissances antérieures. On peut alors analyser les liens entre connaissances, pour identifier ce sur quoi l'élève peut s'appuyer pour construire du nouveau. Ce point de vue a l'intérêt de se centrer sur les apprentissages effectifs ; il amène à tenir compte, non seulement du contenu de ces apprentissages, mais également du temps qu'ils requièrent. La durée des apprentissages, qui dépend de chaque élève, ne coïncide pas avec la durée du cursus scolaire.

A un niveau macro, avec une perspective d'évolutions historiques, on peut parler de transitions lors de changements de programmes. Comment sera géré le passage d'un programme à un autre ? Lorsque le contenu enseigné une année donnée est modifié, a priori les élèves sont moins bien préparés à rencontrer ce nouveau contenu. Comment cette difficulté est-elle prise en compte, dans chaque pays ?

On voit dans tous les cas, quel que soit le sens retenu, qu'interroger la transition demande d'observer des continuités et des ruptures, et de formuler des propositions visant à construire une cohérence dans la durée.

2. Des compétences déterminantes ?

L'élaboration de référentiels de compétences vise à constituer une référence partagée par tous les acteurs du système éducatif, il doit ainsi permettre de clarifier les objectifs de l'enseignement des mathématiques.

C'est un travail de transposition didactique spécifique, qui soulève des questions complexes.

Il s'agit, d'une part, de proposer une structuration du savoir à enseigner : identifier des domaines, des thèmes, et décider de ce qui relève du même domaine, ou de domaines différents. Il faut donc en particulier décider ce qui relève ou non des mathématiques : selon les pays, la mécanique, les statistiques, seront reconnues ou non comme des domaines mathématiques, et ceci modifie la manière de les travailler. Il faut aussi décider de retenir ou non certaines compétences transversales, notamment en ce qui concerne la résolution de problèmes, ou la modélisation mathématique.

D'autre part, toujours dans l'objectif de clarifier les références communes, on peut aussi souhaiter identifier des compétences ayant une importance particulière, que l'on désignera comme compétences déterminantes, ou attentes fondamentales, selon les pays. Ceci crée, dans le même temps, un risque d'appauvrissement de l'enseignement : si certaines attentes sont désignées comme fondamentales, naturellement les autres peuvent être qualifiées de secondaires.

De plus l'évaluation par compétences induit un découpage fin, associé à un risque de morcellement des contenus.

IV. COMPÉTENCES ET ORIENTATION

Sur ce thème, les discussions ont eu lieu pendant, et à la suite de la présentation de Bodin.

1. Les compétences déterminantes sont-elles déterminantes pour l'orientation ?

Cette présentation a d'emblée soulevé un point crucial : quel est, ou quel peut être, le poids des compétences mathématiques dans l'orientation des élèves ? En effet, d'autres facteurs semblent nettement plus déterminants, comme l'origine sociale des élèves, et surtout leur passé scolaire. Ainsi en France, alors que 20% d'une classe d'âge arrive à obtenir un Bac S (filière sceintifique), seulement 1% des élèves ayant redoublé une classe au primaire parvient à obtenir ce même Bac. Ainsi, même en identifiant des compétences « déterminantes », on peut se demander si celles-ci ont une vraie place, par rapport aux facteurs sociaux, et surtout par rapport aux notes obtenues par les élèves.

2. Compétences et évaluations internationales

Les évaluations internationales de type PISA jouent un rôle important pour le pilotage des systèmes éducatifs, dans différents pays. Or ces évaluations retiennent des indicateurs spécifiques ; le référentiel international qu'elles instaurent laisse de côté des compétences qui peuvent être jugées comme importante dans certains pays. Il semble donc particulièrement important d'entreprendre l'étude didactique des items de test proposés, pour clarifier ce qui est réellement évalué, et en conséquence ce qui est laissé dans l'ombre.

3. Des aspects qui restent à discuter

Au-delà des points évoqués dans la présentation de Bodin, les participants de ce projet spécial ont souligné l'importance de certains aspects que les limitations de temps ne nous ont pas permis d'approfondir. Du point de vue des élèves, au-delà des compétences officiellement reconnues dans les référentiels, certains apprentissages « cachés », réalisés hors de l'école, peuvent avoir une importance déterminante. Comment les chercheurs peuvent-ils identifier de tels apprentissages ? Comment s'articulent-ils avec les compétences travaillées en classe ?

Par ailleurs, le point de vue des professeurs est également essentiel. Sans aborder la question des référentiels de compétences professionnelles, qui dépasse le cadre de ce projet spécial, celle de la formation des enseignants doit être soulevée. Quelles formations initiale, et continue, proposer en lien avec les « compétences mathématiques déterminantes » ? Il s'agit de soutenir le développement de pratiques qui évitent la proposition de tâches morcelées, calquées sur des référentiels. Peut-on proposer aux professeurs des formations qui leur permettent au contraire d'élaborer des ensembles structurés d'activités liées, à mettre en place sur une durée longue ? Il s’agit là encore de choix de politiques éducatives, pour lesquels des résultats de recherche en didactique pourraient être éclairants.

V. CONCLUSIONS

Les discussions dans ce projet spécial ont montré l'intérêt de mêler des participants de nombreux pays pour les questions abordées, en particulier celles portant sur les compétences. De nombreux pays ont défini, ou sont en train de définir des référentiels de compétences (les tables rondes de ce colloque ont largement souligné cet aspect). Peut-on réellement identifier des compétences déterminantes en mathématiques, et de quelle nature ? Une fois ces compétences identifiées, comment peut-on éviter l'écueil d'un enseignement réduit à ces seules compétences ? Quelle présentation peut-on en faire pour les enseignants, quelles ressources fournir, quelle évaluation mettre en oeuvre pour préserver la richesse des savoirs en jeu, et de l'activité mathématique des élèves ?

Ainsi cet aspect des compétences semble une piste qu’il serait intéressant de poursuivre lors de prochains colloques EMF, dans le cadre d'un Groupe de Travail. Les questions sur ce thème ont en effet une grande importance, en particulier pour les politiques éducatives. Elles interrogent réellement la perspective retenue sur l'enseignement des mathématiques – peut-on ainsi viser simultanément un enseignement des mathématiques pour tous, et un enseignement des mathématiques adapté à chacun ? Il est donc essentiel que les chercheurs en didactique des mathématiques s'emparent de ces questions, et se donnent les moyens d'intervenir dans les choix politiques associés.

REFERENCES

Blanchard S. (2008) Introduction : sentiments d'efficacité personnelle et orientation scolaire et professionnelle. *L'orientation scolaire et professionnelle* 37(1). http://osp.revues.org/index1582.html

Franquet A., Friant N., Demeuse M. (2010) (S') orienter dans l'enseignement secondaire technique et professionnel en Communauté française de Belgique : la part du choix. *L'orientation scolaire et professionnelle* 39(4). http://osp.revues.org/index2937.html

Friant N., Demeuse M. (2011) Un modèle du prestige des options dans l'enseignement secondaire de transition en Communauté française de Belgique. *L'orientation scolaire et professionnelle* 40(2). http://osp.revues.org/index3099.html

CONTRIBUTIONS AU SPE2

AUTOUR DES COMPETENCES DETERMINANTES POUR L'ORIENTATION

Antoine BODIN*

Résumé – Assigné à répondre à la question de savoir quelles sont les compétences mathématiques qui auraient une influence déterminante sur l'orientation et dans les transitions scolaire, l'article, en cherchant à mettre en évidence la complexité des phénomènes en jeu finit par conclure à l'impossibilité de répondre à la question de façon frontale. Il propose alors une reformulation de la problématique sur des questions voisines ainsi que quelques résultats déjà acquis et quelques pistes de recherches.

Mots-clefs : orientation, représentations, évaluation, compétences, études à grande échelle

Abstract – Aimed to identify which are the competencies or skills that have a predominant influence on the students' tracking process across educational systems and on associated transitional phases, the paper highlights the huge complexity of the tracking process and concludes to the impossibility to provide a sound answer to the question. It then suggests to modify the question towards some related issues more due to be attainable on which it gives some already acquired results and on which it suggests some possible lines of research.

Keywords: Student distribution, beliefs, assessment, competencies, large-scale studies

I. INTRODUCTION

Dans cet article nous parlerons des études des individus de façon à englober non seulement ce que l'on appelle habituellement la scolarité mais aussi les diverses poursuites d'études (post secondaires, universitaires ou non) et à laisser la porte ouverte à la problématique de la formation continue et de la formation tout au long de la vie.

Ces études sont jalonnées de moments qui en quelque sorte les conditionnent. Il s'agit des moments où des choix souhaités, consentis, ou forcés viennent modifier leur cours ou simplement leur donner une impulsion nouvelle.

Ces moments d'orientation et de transitions, bien connus et bien documentés dans le cadre scolaire se rencontrent aussi à l'université et dans le cadre de la formation continue.

La question que nous nous posons (et qui nous est posée) est celle du rôle que jouent les mathématiques dans ces orientations-transitions et plus précisément du rôle que jouent les compétences mathématiques dans ce processus. Il conviendrait même d'aller plus loin en cherchant à identifier les compétences mathématiques qui à tel ou tel niveau sont les plus déterminantes.

De même que nous ne voulons pas nous limiter au cadre strictement scolaire, nous ne voudrions ne pas nous limiter au cas français. On sait en effet ce que l'approche comparative peut apporter d'éclairages intéressants sur des pratiques ou des observations particulières.

L'ambition est donc immense et point n'est besoin d'attendre la conclusion de cet article pour prédire qu'elle ne pourra, au mieux, qu'être très partiellement satisfaite ; pour prédire aussi qu'il faudra à la fois restreindre la problématique et chercher à mieux la préciser.

* IREM d'Aix-Marseille – France – antoinebodin@mac.com

© Bodin A. (2012) Autour des compétences déterminantes pour l'orientation In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (SPE2, pp. 1713–1726). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012.

II. ORIENTATION ET TRANSITIONS

1. L'orientation, élément essentiel des politiques éducatives

Dans la plupart des pays, le développement de la scolarité et des possibilités d'études et leurs allongements placent les responsables politiques devant des problèmes complexes. Ces problèmes sont liés à la nécessité de gérer les flux d'élèves en tenant compte des disponibilités en termes de structures d'établissements et de personnels disponibles. Ils sont aussi liés, et ce point est souvent antagoniste au précédent, à la nécessité d'adapter les formations aux besoins de l'économie. De ces points de vue, l'orientation apparaît d'abord comme un problème de gestion. Toutefois les idées d'équité et d'égalité des chances se sont aussi largement répandues qui interdisent les solutions purement autoritaires.

Si ces remarques peuvent s'appliquer à de nombreux pays, c'est sans doute que l'OCDE comme l'UNESCO, par leurs réflexions et leur travaux en matière d'éducation exercent une influence importante et sans cesse grandissante sur les conceptions des décideurs et sur les mesures adoptées nationalement (en particulier avec les études PISA et les autres études de même type menées par l'OCDE). Au niveau de l'Europe, la Commission Européenne, très liée à l'OCDE ne fait que suivre et parfois anticiper le mouvement. Il serait donc très réducteur de ne considérer ces questions que du point de vue d'un système éducatif particulier.

Pour illustrer ce qui précède, citons ici le rapport du Haut Conseil de l'Éducation (HCE 2008) :

> Depuis la décision du Conseil européen, réuni à Lisbonne en 2000, de faire de l'Europe la société de la connaissance la plus compétitive et la plus dynamique au monde d'ici 2010, l'orientation scolaire et professionnelle se trouve plus que jamais au premier plan des politiques éducatives des pays industriels et développés.

Phrase qui semble devoir convenir pour la plupart des pays d'Europe mais que l'on retrouve par exemple - mutatis mutandis - aux Etats-Unis. Sous des formes éventuellement différentes, tous les pays se trouvent en effet confrontés à la question de l'adaptation de leur système scolaire aux besoins de leur économie.

2. L'orientation, processus associé à des procédures

Remarquons d'abord, comme le fait le HCE que le terme d'orientation utilisé dans le monde francophone recouvre deux types d'activités que la langue anglaise distingue et qui sont souvent conduites par des institutions distinctes : d'une part les activités visant à répartir les individus dans les différentes voies de formation, filières et options (students' distribution) et d'autre part l'aide apportée à ces individus dans leurs choix d'avenir scolaire et professionnel (vocational guidance, school and career counseling). Conformément à l'usage en langue française, nous regroupons ici ces deux types d'activités dans ce que nous appelons les procédures d'orientation.

Dans tous les cas l'orientation peut être définie comme le processus qui régule les trajets de formation des individus ; ce processus étant lié à un ensemble de procédures de nature organisationnelles plus ou moins réglementaires qui sont gérées, selon les cas, au niveau du pays, d'un territoire ou d'un ensemble d'établissements. C'est souvent à cette partie procédurale que l'on réduit l'orientation (ce que l'on fait implicitement lorsque l'on dit que l'élève a été orienté) mais nous verrons que cette partie n'est que la partie émergée d'un phénomène complexe.

3. L'orientation, conceptions et contraintes

Ainsi que nous l'avons dit en introduction, nous souhaitons nous intéresser au rôle joué par les mathématiques dans l'orientation et, si possible, au caractère éventuellement déterminant de compétences mathématiques bien identifiées dans ce processus. Cependant, après avoir consulté ou étudié un grand nombre de documents de nature diverse (documents réglementaires, articles de revues scientifiques, thèses et rapports de recherche…), nous avons dû nous rendre à l'évidence : sauf dans deux ou trois cas sur lesquels nous reviendrons, point de trace de contenus mathématiques et encore moins de compétences mathématiques précises ni même de compétences d'autres domaines. Certes les mots « mathématiques » et « compétence » apparaissent ici ou là mais sont utilisés mais de façon trop vague pour pouvoir répondre à nos questions.

À titre d'exemple, citons la loi française :

> Article L. 313-1 du Code de l'éducation : L'orientation et les formations proposées aux élèves tiennent compte de leurs aspirations, de leurs aptitudes et des perspectives professionnelles liées aux besoins prévisibles de la société, de l'économie et de l'aménagement du territoire. Dans ce cadre, les élèves élaborent leur projet d'orientation scolaire et professionnelle avec l'aide des parents, des enseignants, des personnels d'orientation et des autres professionnels compétents. Les administrations concernées, les collectivités territoriales, les organisations professionnelles, les entreprises et les associations y contribuent.

Ici, il est simplement question d'aptitudes sans que l'on sache si ce terme désigne des potentialités de développement ou des compétences acquises.

Ailleurs on parlera de capacités :

> Article D. 331-23 du Code de l'éducation : L'orientation est le résultat du processus continu d'élaboration et de réalisation du projet personnel de formation et d'insertion sociale et professionnelle que l'élève de collège, puis de lycée, mène en fonction de ses aspirations et de ses capacités. La consultation de l'élève garantit le caractère personnel de son projet….

Certes, il est normal qu'un texte législatif n'entre pas dans les détails, mais on retrouve la même discrétion sur la question qui nous occupe dans la plupart des documents étudiés.

Nous avons tenu à citer ces textes car ils permettent de mieux situer la diversité des éléments qu'il est légitime et même requis de faire intervenir dans le processus. Mieux situer aussi, dans cette diversité le poids que peuvent prendre les compétences mathématiques.

Certes, notre tâche serait plus facile si les formations se limitaient à l'enseignement des mathématiques et si l'orientation dans les parcours possibles se faisait par le biais d'épreuves objectives et valides « mesurant » des compétences bien identifiées et si, de plus, les décisions d'orientation étaient prises de façon administrative et autoritaire sur la seule base des résultats de ces épreuves.

Malheureusement, pour notre propos, et heureusement en ce qui concerne nos sociétés, cela n'est pas (n'est plus ?) le cas. Le dernier article cité du code français souligne le caractère personnel des choix d'orientation. Ajoutons-y celui-ci qui est peut-être plus spécifique au cas français mais qui montre bien que la seule centration sur les compétences risque de nous faire passer à côté de l'essentiel.

> Article L. 331-8 du Code de l'éducation :
>
> La décision d'orientation est préparée par une observation continue de l'élève.
>
> Le choix de l'orientation est de la responsabilité de la famille ou de l'élève quand celui-ci est majeur. Tout désaccord avec la proposition du conseil de classe fait l'objet d'un entretien préalable à la décision du chef d'établissement. Si cette dernière n'est pas conforme à la demande de l'élève ou de sa famille, elle est motivée.

Si l'on veut étudier les éléments déterminant le processus d'orientation il faut aller voir du côté des travaux des sociologues et des psychologues de l'éducation. Tous mettent en évidence la place *limitée*[1] des compétences ou plus précisément des indicateurs de niveau que sont les notes attribuées par les enseignants ou obtenus dans les examens dans le processus d'orientation et pour valoriser les jugements des enseignants et surtout les représentations que se font les individus de leurs possibilités et de leur avenir.

4. La question des transitions

À coté ou en complément des points d'orientation les trajets de formation comprennent aussi des points de rupture. On passe d'un système à un autre qui n'obéit pas aux mêmes règles de fonctionnement que le précédent, qui suppose des adaptations parfois douloureuses, qui suppose implicitement des connaissances et des compétences que seuls certains des entrants ont réellement acquises. C'est ce que nous appelons les transitions.

De même que nous avons étendu la notion d'orientation scolaire à l'orientation dans les parcours de formation, de même il nous semble intéressant d'étendre la notion de transition à l'ensemble des événements du parcours de formation qui supposent des ruptures de nature curriculaire ou environnemental : changement d'établissement (en cours d'année ou en fin d'année), changement de professeur ou changement de classe en cours d'année, absence de longue durée de l'élève pour cause de maladie ou autre…

Ces situations sont d'autant plus intéressantes à étudier que c'est à leur propos que l'on trouve le plus facilement des bilans de compétences susceptibles de faciliter les transitions.

Par exemple, nous avons été intéressés par une recherche concernant le suivi de la scolarité des enfants du voyage (Deryck 2000). Comment communiquer les informations d'un enseignant à l'autre au fil des mois et des déplacements des enfants ? À l'évidence les notes seules sont de peu d'utilité. Deux autres méthodes sont confrontées : celle de la description analytique des compétences (grilles) et celle du portfolio. Dans ce contexte au moins, la méthode du portfolio semble mieux faciliter les transitions que celle des grilles.

La question se pose plus ou moins de la même façon pour tous les types de transitions. Quelle information faut-il communiquer d'un niveau à l'autre ou d'une institution à une autre pour faciliter l'action pédagogique ? Sous quelle forme ?

Là encore, la simple communication de notes attribuées par les enseignants ou des résultats aux examens est de peu d'utilité. Par ailleurs, du moins en France, tout ce qui peut ressembler à une mise en fiche des individus, même en ce qui concerne leurs acquis cognitifs, est regardé avec beaucoup de suspicion par une grande partie des acteurs, enseignants ou non. Cette réticence obéit pour une part à des considérations de nature idéologique mais elle se justifie aussi, pour une autre part, par des arguments techniques sur lesquels nous reviendrons.

III. LES DÉTERMINANTS DE L'ORIENTATION

1. Le rôle modeste joué par le niveau dans l'orientation

De nombreuses études mettent en évidence que le niveau réel (qui de toutes façon reste largement inconnu) ne constitue pas l'élément déterminant dans l'orientation et, par contre

[1] En relecture, cette référence à une influence limitée des notes et des examens est mal présentée et risque d'être mal interprétée. Nous avons seulement voulu nous faire l'écho de l'idée que les notes et les examens ne suffisent pas à prédire les parcours de formation – d'où le terme de « limité ».

coup, qu'il ne faut pas chercher des éléments déterminants dans telle ou telle compétence mathématique explicite.

Nous préférons utiliser ici le terme vague de niveau pour éviter momentanément les termes de connaissances et de compétences. Les indicateurs pris en compte dans les procédures d'orientation sont massivement des notes attribuées par les enseignants et, dans une moindre mesure, des jugements qu'il est difficile de rapporter à des compétences ou à des connaissances précises.

Dans quelques cas, des tentatives sont faites (au Québec par exemple, ou en France dans l'enseignement professionnel) pour remplacer ces indicateurs par des bilans positionnant les apprenants par rapport à des ensembles de compétences plus ou moins bien définies. La démarche est souvent balbutiante avec bien souvent des retours aux méthodes traditionnelles. En effet, soit les enseignants se perdent dans les grilles qui leur sont imposées et considèrent qu'ils finissent pas utiliser davantage d'énergie pour évaluer que pour enseigner, et cela sans bénéfice notable en ce qui concerne leur connaissance des compétences acquises par leurs élèves, soit ils trouvent un moyen subtil pour contourner les grilles et revenir aux notes. Dans certains cas cependant, les enseignants s'approprient ce type de démarche et parviennent à les rendre opératoires, mais cela demande formation et accompagnement.

Nous reviendrons plus loin sur la tentative faite dans le système français pour instaurer une évaluation par compétences dans le cadre du socle commun de compétences et de connaissances, mais cela sort un peu de notre propos dans la mesure où ce socle, devant être acquis pour tous, n'est pas appelé à intervenir dans les procédures d'orientation.

Des recherches, tout aussi nombreuses mettent en évidence que les éléments les plus déterminants du processus d'orientation sont plutôt à rechercher du côté des représentations que les personnes ont de leurs potentialités, des formations qui leur sont proposées, des débouchés associés, de leur perspectives d'intégration dans la société. Par exemple, il est difficile d'expliquer par les seuls acquis scolaires le fait que, parmi les élèves entrés en sixième en 1995, 90,6 % des enfants d'enseignants (professeurs et instituteurs) contre 40,7% des enfants d'ouvriers non qualifiés ont obtenu le baccalauréat, ou encore, pour nous rapprocher des mathématiques, que pour la même cohorte, 40,2 % des enfants d'enseignants ont obtenu le baccalauréat scientifique contre seulement… 4,6 % des enfants d'ouvriers non qualifiés (DEPP 2010).

Une recherche de Séverine Le-Bastard Landrier (Le-Bastard Landrier 2005) qui porte sur un échantillon de 2750 élèves de seconde est très éclairante sur cette question. Cette recherche s'appuie sur un questionnaire portant sur les représentations des élèves et sur les moyennes successives qu'ils ont obtenues à la fin de chaque trimestre. Citons une partie de ses conclusions :

> …certaines dimensions de l'expérience scolaire des élèves, telles la perception qu'ils ont de leur niveau scolaire ou le rapport qu'ils entretiennent à l'égard des disciplines, influencent de manière non négligeable leurs résultats scolaires (français et mathématiques) (p. 2)
>
> …
>
> le choix des vœux d'orientation est loin d'être aléatoire : tout d'abord, l'environnement familial, ensuite le vécu scolaire de l'élève, les représentations qu'il a de son propre niveau scolaire, le rapport qu'il entretient à l'égard des disciplines, ainsi que ses résultats sont autant de facteurs qui semblent déterminants. (p. 28)

On voit apparaître une sorte de boucle : la perception que les élèves ont de leur niveau influence à la fois leur niveau et leurs choix d'orientation, choix progressifs qui eux-mêmes influencent leur engagement dans l'étude et finalement leur niveau (cas bien connu en ce qui concerne la relation des filles aux mathématiques). Le niveau intervient bien, mais surtout dans la construction des représentations et des vœux d'orientation et plutôt indirectement sur les décisions d'orientation.

Avec d'autres, cette recherche met en évidence le fait qu'à niveau de réussite scolaire égale, attestée par les notes des enseignants, la confiance en soi et la perception que les élèves ont de leur niveau peuvent être très différents et cela pour les deux disciplines sur lesquelles porte l'étude : le français et les mathématiques.

Dans l'ensemble, la perception que les élèves ont de leur niveau va dans le même sens que les notes qui leurs sont attribuées par leurs professeurs, et cela de façon plus sensible en mathématiques qu'en français ; un peu comme si les élèves intégraient plus facilement les jugements (positifs ou négatifs) de leurs professeurs en mathématiques qu'en français. On retrouve toutefois un phénomène connu, à savoir qu'en mathématiques, à niveau égal, les filles se sous-évaluent davantage que les garçons.

À partir d'un questionnaire que la place ne permet pas de reproduire ici, l'auteure conclut à une confiance en soi plus grande en français qu'en mathématique (ce que confirment les études PISA). Toutefois, les élèves sont aussi nombreux à déclarer aimer les mathématiques que le français (resp. 66,5% et 65,2%).

2. Les indicateurs utilisés dans les procédures d'orientation

Malgré ce qui précède, il reste vrai que les procédures visibles d'orientation et d'admission s'appuient sur des indicateurs plus ou moins objectifs : les notes, les appréciations, les bilans de compétences…

Nous ne reviendrons pas ici sur la confiance que l'on peut accorder aux notes. Signalons seulement l'absence d'un code clair susceptible de leur donner une signification intrinsèque et leur tendance à agglomérer des informations de nature différentes (surtout lorsqu'il s'agit de moyennes), ce qui en fait de pauvres instruments de communication et de « mesure » du niveau ou des acquis.

Les appréciations et jugements des enseignants ne viennent que légèrement modérer le poids des notes, du moins tant qu'ils ne sont pas insérés dans des procédures leur donnant un poids égal ou supérieur à celui des notes ou mieux lorsqu'ils interviennent seuls.

Dans certains pays, certaines orientations sont conditionnées par la réussite à des examens ou par l'obtention d'un score minimum à certains tests. Dans d'autres cas, des combinaisons de ces diverses procédures sont utilisées.

Les avantages et inconvénients de ces diverses approches ont été largement étudiés depuis des années dans divers environnements éducatifs en ce qui concerne leur valeur prédictive par rapport à la réussite dans les études ultérieures. Les conclusions ne sont pas toujours convergentes mais on peut tenter de les résumer ainsi :

- Les jugements des enseignants ont une validité prédictive bien souvent supérieure à celle des notes qu'ils attribuent.
- Les notes attribuées par les enseignants sont elles-mêmes des prédicteurs assez fiables des résultats ultérieurs.
- La combinaison notes - jugements augmente la qualité de la prédiction.
- Les scores des tests d'admission où les notes d'examens ont le plus souvent une valeur prédictive moindre que les démarches précédentes.

La solution, intuitivement satisfaisante, qui consiste à faire dépendre de façon exclusive l'orientation de la réussite à un test ou à une batterie de test ne résiste pas à l'examen (bien que cette solution soit utilisée dans certains cas).

D'une part, nous faisons nôtre cette remarque de Marie Duru-Bellat rapportée dans la thèse de Sophie Morlaix (Morlaix 2007, p. 46) :

> aucune épreuve commune ne permet de comparer sur une base externe ce que les étudiants ont effectivement appris durant leur cursus.

Une recherche menée sur les étudiants de l'Université de Berkeley en Californie (Geiser et al. 2007) s'est attachée à comparer les caractères prédictifs de réussite des indicateurs utilisés pour l'orientation : notes obtenues au lycée (High School Grade Point Average - HSGPA) et scores obtenus aux tests standardisés habituellement utilisés pour l'orientation (SAT). L'étude porte sur près de 80 000 étudiants et prend en compte les notes qu'ils ont obtenues au lycée et celles qu'ils ont ensuite obtenues à l'université tout au long de leur 4 années d'études. Précisons que l'université de Berkeley se targue de recruter les 12,5 % meilleurs élèves des lycées de l'État de Californie. Les enjeux des procédures de sélection qu'elle utilise sont donc importants et ces procédures font régulièrement l'objet d'études approfondies.

Les conclusions de l'étude citée sont importantes et largement contre intuitives. Résumons les ici :

1. Les résultats scolaires (HSGPA) sont, de loin meilleurs prédicteurs de la réussite universitaire que les résultats aux tests standardisés (SAT) et cela aussi bien au niveau de la première année universitaire que de la quatrième.
2. La valeur prédictive du HSGPA s'accroît tout au long du parcours universitaire : meilleur prédicteur des scores obtenus en fin de quatrième année que de ceux obtenus en fin de première année.
3. Les tests standardisés défavorisent les élèves des milieux socialement ou économiquement défavorisés et cela à niveau égal mesuré aussi bien par les résultats scolaires (HSGPA) que par les résultats universitaires.

Les caractéristiques des batteries de SAT (SAT I, SAT II, verbal, maths,…) sont assez bien connues. Il n'en est pas de même de la façon dont les HSGPA sont construits (sinon qu'ils sont des moyenne de notes (GPA) obtenues au cours de la scolarité). Ce point resterait à éclaircir, mais il semble que ces notes scolaires reflètent bien les jugements des enseignants et que les outils utilisés, dont des tests que nous qualifierions de connaissances et de compétence, lesquels peuvent d'ailleurs être eux-mêmes standardisés (achievement tests) s'inscrivent assez bien dans le contrat didactique ; en tout cas, beaucoup mieux que les SAT.

Bien sûr il faut se garder de généraliser à partir de cette étude sans tenir compte des conditions particulières dans laquelle se déroule tel ou tel processus d'orientation, mais avec d'autres études évoquées ci-dessus elle contribue à mettre en doute la possibilité d'asseoir l'orientation sur des procédures purement objectives.

Mais il y a longtemps que l'on sait que l'objectivité en évaluation est un leurre : les procédures utilisées peuvent - et doivent - être aussi objectives que possible, mais le résultat qui justement dépend du choix des procédures ne peut être qualifié d'objectif.

Cela rejoint un vieux débat qui est celui de la mesure en éducation. Il est clair qu'au sens strict la mesure est impossible. On peut cependant recourir de façon utile à des modèles qui nous rapprochent de l'idée de mesure et que l'on appelle par commodité modèles de mesure. L'un de ces modèles, connu sous le nom de théorie des réponses à l'item (IRT), largement utilisé dans les études à grande échelle, nationales ou internationale, a tendance à se répandre dans la plupart des systèmes éducatifs, en particulier pour les tests standardisés. Ce modèle a de nombreux avantages en termes de communication, mais il a l'inconvénient de considérer implicitement que la « compétence » (mathématique ou autre) serait unidimensionnelle ou, au mieux multidimensionnelle, ce que toute la recherche en didactique vient récuser.

Concluons simplement cette section en disant que chacun des indicateurs utilisés pour l'orientation a ses avantages et ses inconvénients et qu'il convient de n'en privilégier aucun. Nous rejoignons ici l'idée que l'évaluation est d'autant plus fiable qu'elle est plurielle et qu'elle coordonne des indicateurs de nature différente.

3. Niveau : de quoi parle-t-on ?

Le terme de niveau renvoie à l'idée que l'on peut mesurer ou du moins situer sur un axe un niveau de connaissances ou de compétences dans un domaine donné. Cela est conforme aux conceptions courantes de nombre d'acteurs et est conforté par l'usage des modèles dont nous venons de parler.

Autour de PISA ont été construites des échelles de niveaux dites de compétences basées sur l'utilisation de ces modèles. La méthode est maintenant utilisée dans plusieurs pays et particulièrement en France par la DEPP (Direction de l'Évaluation, de la Prospective et de la Performance).

Par exemple voici comment est décrit le niveau 4 de l'échelle en 6 niveaux de compétence mathématique générale (OECD 2003, traduction personnelle) :

> Au niveau 4, les élèves sont capables d'utiliser de façon efficace des modèles explicites pour traiter des situations concrètes complexes qui peuvent comporter des contraintes ou qui supposent d'émettre des hypothèses.
>
> Ils peuvent choisir et intégrer différentes représentations, dont des représentations symboliques, et les relier directement à certains aspects de situations tirées du monde réel. Dans ces situations, ils peuvent mettre en œuvre des savoir-faire bien développés et raisonner avec souplesse, utilisant leur intuition et leur compréhension de la situation.
>
> Ils peuvent construire des explications et des arguments sur la base de leurs interprétations et de leurs actions et les communiquer.

Rappelons que PISA concerne les élèves de 15 ans et notons que cette description est spécifiée pour chacun des 4 sous-domaines de l'étude : Quantités, Variations et relations, Espace et formes, Incertitude.

L'utilisation de telles descriptions synthétiques pourrait être de nature à faciliter la communication au moment des transitions et dans le processus d'orientation. En particulier elle pourrait permettre aux apprenants de mieux situer leurs propres compétences.

4. Compétences : de quoi parle-t-on ?

Nous avons utilisé à plusieurs reprises le terme de compétence(s), mais chacun sait à quel point ce terme est polysémique et déclenche dans nos milieux des polémiques infinies.

Notons déjà que la polémique est, pour l'essentiel, restreinte au monde francophone et résulte davantage du prosélytisme fait autour de « l'approche par compétences », laquelle désigne une approche de l'enseignement qui ne nous concerne pas ici, que du souci de ne pas limiter l'apprentissage à l'acquisition de connaissances formelles et de procédures, ni l'évaluation au contrôle de ce seul type d'acquisitions.

Le cadre de référence et les rapports de PISA font d'ailleurs une utilisation très modérée du terme competency. Les termes traduits en français par compétence(s) sont bien souvent skill(s) qui se traduit mieux par savoir-faire, abilities, capacities ou proficiency qui peut aussi se traduire par maîtrise.

Dans le cas des échelles de compétences évoquées ci-dessus, l'expression utilisée en anglais est level of proficiency qui pourrait aussi bien se traduire par niveau de maîtrise.

On notera avec intérêt que dans le projet de cadre de référence de la prochaine étude PISA qui aura lieu en 2012, le terme competence a été remplacé par capability du moins dans toute la partie décrivant les processus mathématique.

Le succès rencontré par la notion de compétence(s) dans la monde francophone vient à l'évidence de la volonté de mieux prendre en compte le caractère opératoire des connaissances, caractère qui est depuis longtemps affirmé et assumé dans le monde anglophone et plus encore dans les systèmes éducatifs du Nord de l'Europe.

Dans notre travail sur l'évaluation (voir site de l'IREM d'Aix-Marseille) nous nous contentons de définir et de distinguer partiellement les compétences des connaissances de la façon suivante :

- Avoir des connaissances, signifie, connaître des faits, des définitions, des règles, des procédures. Il est entendu ici que « connaître » suppose compréhension et capacité à reconnaître ou appliquer dans les cas ne demandant pas une mobilisation personnelle. Par exemple, connaître une procédure suppose de savoir la mettre en œuvre dans les cas triviaux.
- Avoir des compétences, signifie avoir des connaissances ET être capable de mobiliser ces connaissances dans des situations qui ne les appellent pas directement (par exemple, organiser son espace de vie, y prévoir la place du mobilier, met en jeu des connaissances de nature géométrique mais ne les appellent pas directement).

Ces définitions (a minima) ne cherchent pas à régler une question qui est vive pour les spécialistes et, spécialement chez les didacticiens des mathématiques, mais, simplement, à réduire, au sein de notre équipe et dans nos relations avec l'extérieur, le flou, pour ne pas dire la confusion générale qui prédomine. Elles se veulent opératoires en matière d'évaluation et c'est dans l'opérationnalisation que l'on verra si les différences suggérées sont pertinentes ou non.

C'est en ce sens que nous utiliserons maintenant les notions de connaissance et de compétence ; notons que notre définition des compétences ne s'oppose pas à celle du HCE, reprise dans le décret français :

> les compétences sont définies comme une combinaison de connaissances, d'aptitudes et d'attitudes.

Concrètement, savoir résoudre une équation du second degré est de l'ordre des connaissances ; savoir traiter une situation dont la résolution suppose une mise en équation du second degré est de l'ordre des compétences.

Nos travaux sur les évaluations à grande échelle du domaine mathématique, en particulier dans le cadre de l'observatoire EVAPM, nous ont convaincu de l'intérêt qu'il y avait à distinguer ainsi, pour l'évaluation, les connaissances des compétences (voir EVAPM sur le site de l'APMEP).

En effet, les questions d'évaluation opérationnalisant les compétences se situent aux niveaux supérieurs des taxonomies (cf références) tandis que les questions portant sur les connaissances (au sens que nous donnons à ces termes), se situent au nivaux inférieurs. Or nous avons observé de façon régulière (25 ans d'observation à tous les niveaux de la sixième aux classes terminales) que :

1. Les corrélations entre les niveaux taxonomiques étaient assez faibles - beaucoup plus faibles par exemple que ce qui est observé entre les domaines mathématique et lecture

dans les études PISA. Clairement, les élèves qui maîtrisent les connaissances ne sont pas nécessairement capables de les mobiliser de façon autonome et, a contrario, ceux qui manifestent des habilités de nature opératoire ne maîtrisent pas toujours les connaissances que l'on pourrait attendre d'eux.

2. les situations susceptibles d'évaluer les compétences ne permettent pas toujours d'évaluer, simultanément, les connaissances. Soit le traitement utilisé permet de s'affranchir de certaines connaissances, soit l'échec observé ne permet pas de distinguer les connaissances manquantes des processus cognitifs relevant plus spécifiquement des compétences.
3. Dans leurs évaluations, les enseignants privilégient de fait les bas niveaux taxonomiques, donc essentiellement les connaissances, au détriment des compétences.

Ce dernier point signifie que les notes utilisées lors des procédures d'orientation et conditionnant pour une part les représentations des élèves, donc le processus d'orientation, reflètent davantage la maîtrise de connaissances que celle des compétences.

Ainsi que nous l'avons déjà souligné, les jugements des enseignants peuvent venir corriger ce biais, ce qui expliquerait la plus grande validité prédictive de ces jugements.

Dans tous les cas, il est illusoire de vouloir chercher ici des compétences mathématiques qui seraient déterminantes dans le processus d'orientation.

IV. RÉVISION DE NOTRE PROBLÉMATIQUE

1. Un constat

Jusqu'à présent, nous avons tourné autour de la question posée qui était celle du rôle des compétences mathématiques dans les processus d'orientation et dans les transitions. Ce long détour nous a paru nécessaire pour replacer la question dans toute sa complexité. Il est clair maintenant qu'il ne peut y avoir de réponse directe à cette question et même qu'il est peut-être heureux qu'il n'y en ait pas.

Par contre au long de notre réflexion et de l'écriture de cet article nous avons vu apparaître des éléments qui pouvaient être plus ou moins liés à cette question et qui pouvaient contribuer à une meilleure compréhension du processus de gestion des parcours de formation et qui pourraient nous aider à formuler une ou plusieurs problématiques de recherche.

2. Des pistes possibles

Partant du principe que l'orientation est en grande partie matière de représentation des acteurs (élèves, enseignants, chefs d'établissement) et que ces acteurs ont justement des représentations de ce qui importe pour l'orientation, une recherche pourrait porter, non directement sur les compétences objectivement déterminantes mais sur les représentations que les acteurs s'en font.

Dans les études EVAPM, par exemple, nous utilisons systématiquement un questionnaire destiné aux enseignants. Certaines des questions portent sur l'importance qu'ils accordent à tel ou tel sous-domaine du programme. Dans certains cas nous demandons aussi aux enseignants de donner leur avis sur l'importance de chacune des questions posées : sous-entendu dans quelle mesure considérez-vous comme important que vos élèves sachent résoudre cette question ? Trois réponses sont proposées :

1 : Vous jugez cette question essentielle.

2 : Vous jugez cette question importante.

3 : Vous jugez cette question secondaire.

De plus les enseignants ont la possibilité d'argumenter et de justifier leurs avis.

Mais d'une part les questions portent soit sur les contenus enseignés soit sur la pertinence des questions d'évaluation et non sur des compétences et d'autre part rien ne prouve que ce que les enseignants considèrent majoritairement comme essentiel soit aussi ce qui a le plus de poids dans les décisions d'orientation.

Nous verrons plus loin que, sous certaines conditions, il est possible d'associer des compétences à certains groupes de questions et de ce fait de passer des jugements concernant l'importance des questions à des jugements relatifs à l'importance estimée des compétences associées. Quoi qu'il en soit les données accumulées, de ce type, sont importantes et ont été peu exploitées à ce jour. D'autres études mériteraient d'être menées dans la même direction. La question pourrait être ainsi reformulée de la façon suivante :

Quelles sont les compétences mathématiques qui sont considérées comme essentielles au niveau des paliers d'orientation : par les enseignants, par les élèves, par l'encadrement ?

À défaut de pouvoir identifier les compétences qui jouent un rôle déterminant dans le processus d'orientation et au moment des transitions, on pourrait s'interroger sur les compétences qui sont installées et sur celles qui bien qu'attendues font défaut.

Pour cela les études internationales comme les études nationales pourraient être utilisées de façon plus systématique. Autour de PISA par exemple l'œil reste trop fixé sur le palmarès et sur le baromètre sans que l'on sache bien quelles sont les compétences qui sont en jeu. En France, l'étude nationale CEDRE (Cycle des Évaluations disciplinaires Réalisées sur Échantillon) a entrepris de faire des évaluations, pour l'instant en fin de troisième en utilisant les méthodologies utilisées pour PISA. Cette étude semble être bien conduite et pourrait être susceptible d'apporter des données utiles à notre propos. Cependant, pour l'instant on a accès à la « mesure » obtenue mais pas au thermomètre et bien peu à l'objet mesuré. Cela est peut-être seulement un défaut de jeunesse mais est bien conforme à l'habitude de confidentialité exagérée qui, en France, entoure ce type d'étude. Dans la plupart des pays ainsi que dans les études internationales, la part est faite entre la confidentialité nécessaire et les besoins de communication tout aussi nécessaire. Quoi qu'il en soit, rapportons la façon dont CEDRE est décrit sur le site officiel Educnet :

> CEDRE, à portée nationale, s'intéresse à ce que les élèves ont assimilé tant sur un plan de connaissances que de compétences relativement aux programmes qui définissent le cadre des enseignements qu'ils ont reçus, ainsi qu'aux différentes modalités de conceptualisation chez l'élève telles qu'elles sont décrites dans les travaux de la recherche.

Bien sûr, en ce qui concerne les mathématiques on pourrait souhaiter qu'un dispositif du type EVAPM soit relancé. Un tel dispositif ayant l'avantage d'être moins dépendant des caprices du politique et plus facilement en prise avec les enseignants et le milieu éducatif.

3. *Identifier les compétences a postériori*

Le plus souvent, les compétences sont définies préalablement à l'évaluation et les questions construites sont supposées évaluer ces compétences. Ensuite, soit les traitements statistiques agglomèrent le tout et l'on fait comme si l'intention de départ était confirmée, à savoir comme si la validité des questions n'avait pas à être soupçonnée, soit on regarde les choses de plus près et l'on a alors bien souvent des surprises. Dans bien des cas, deux questions qui étaient censées évaluer une même compétence A sont si faiblement corrélées entre elles qu'à l'évidence si l'une des deux évalue bien la compétence A, alors l'autre évalue tout à fait autre chose. À l'opposé, deux questions qui étaient censées évaluer des compétences différentes sont si fortement corrélées qu'on doit convenir qu'elles évaluent une même compétence, même si cette compétence reste à préciser. Ce qui est dit ici pour des paires de questions se rencontre évidemment pour des groupes de plus de deux questions.

Une méthode, que nous avons largement expérimentée, et qui permet de telle identification est bien connue des didacticiens. Il s'agit de l'analyse statistique et cohésive (ASI) mise au point par Régis Gras et ses élèves. L'ASI permet d'organiser un ensemble de questions en fonction des réponses apportées par les élèves et de repérer des groupes de questions liées de telle façon qu'il est possible d'associer une compétence à certains des groupements. De plus les structures en graphe orienté et en arbre orienté obtenues permettent de valider ou de réfuter les hypothèses a priori sur les compétences réellement évaluées.

Bien qu'utilisée de plus en plus dans de nombreuses recherches, dans des domaines divers (didactiques, mais aussi médecine, psychologie, marketing,…) cette méthode reste, pour le moment assez peu utilisée en évaluation (voir cependant Malaise 2010).

Une autre démarche consiste à utiliser les modèles structuraux, dont le plus connu est sans doute LISREL. Dans son rapport d'habilitation à diriger des recherches, Sophie Morlaix en fait un usage intéressant pour définir a postériori les compétences évaluées par les évaluations nationale de début de CE2 en 1999 et à l'entrée en sixième en 2002 (Morlaix, S, 2007).

Son travail l'amène à identifier a posteriori des compétences et des groupements de compétences et à observer les relations qu'entretiennent entre elles ces compétences et ces classes de compétences, non seulement à un même niveau (même année, même épreuve) mais aussi dans le temps (années différentes, épreuves différentes et compétences évaluées éventuellement différentes). L'étude montre en particulier que le groupe de compétences (ou, si l'on veut, la compétence « calcul mental » est assez indépendante des compétences « orthographe » et « compréhension » au niveau du CE2, mais qu'il est fortement lié au groupe de compétences « calcul mental – numération » du niveau Sixième.

D'autre part, le groupe « calcul mental – numération » du niveau Sixième est lui très lié aux groupes « compréhension » et « calcul » du même niveau sixième.

Pour résumer ce dernier paragraphe, oui on peut évaluer les compétences mais pas n'importe comment et pas en appelant compétence n'importe quoi. Tout travail sérieux sur cette question contribuera à dissiper le flou régnant sur ces questions et sera de nature à faciliter sinon la gestion, du moins la compréhension des parcours de formation.

V. CONCLUSION

La question qui nous était posée ne manquait pas d'intérêt mais nous avons été amenés à la contourner, puis à la pervertir. Il est possible que si nous nous étions davantage tournés vers certaines études post secondaires dans lesquelles les mathématiques occupent une place importante nous aurions pu apporter des réponses plus précises. Mais nous nous sommes implicitement concentrés sur les enseignements élémentaires et secondaires.

Nous pensons cependant avoir apporté des éléments de réflexion pouvant nous éviter de tomber dans les pièges de certaines fausses évidences. Nous avons aussi essayé de montrer que certaines problématiques voisines mériteraient d'être approfondies et pourraient être à la source de recherches fort intéressantes.

REFERENCES

Bodin A. (1997) L'évaluation du savoir mathématique - Questions et méthodes. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 17(1), 49-96.

Bodin A. (2006) Les mathématiques face aux évaluations nationales et internationales. De la première étude menée en 1960 aux études TIMSS et PISA… en passant par les études de la DEP et d'EVAPM. Communication séminaire de l'EHESS. *Repères IREM* 65.

Bodin A. (2007) Dissonances et convergences évaluatives - De l'évaluation dans la classe aux évaluations internationales : quelle cohérence ? *Bulletin de l'APMEP* 474 ,47-79.

Bodin A. (2007) What does PISA really assess? What it doesn't? A French view." In Hopmann S. T. (Ed.) *PISA zufolge PISA / PISA According to PISA* – Wien.

Bodin A. (2008) Lecture et utilisation de PISA pour les enseignants. *Petit x* 78, 53-78.

DEPP (2010) L'évolution des compétences générales des élèves en fin de collège de 200 à 2009. Note d'information N°10.22

DEPP (2010) Les bacheliers du panel 1995 : évolution et analyse des parcours. Note d'information N°10.13

DEPP (2010) Les compétences en mathématiques des élèves en fin de collège. Note d'information N°10.18

Dequiré A. F. (2008) Le conseil de classe face à la notation des élèves : une évaluation subjective ? *Spirale - Revue de Recherches en Éducation* 41, 57-71.

Derycke M. (2000) La grille critériée et le portfolio à l'épreuve du suivi pédagogique. *Revue Française de Pédagogie* 132, 23-32.

Geiser S., Santelices M. V. (2007*) Validity of high-school grades in predictingstudent success beyond the freshman year: High-School Record vs. Standardized Tests as Indicators of Four-Year College Outcomes.* Center for Studies in Higher Education. University of California, Berkeley.

Gras R., Régnier J.-C., Guillet F. (2009) *Analyse statistique implicative*. Toulouse : Cépadues.

Guimard P., Cosnefroy O., Florin A. (2007) Évaluation des comportements et des compétences scolaires par les enseignants et prédiction des performances et des parcours à l'école élémentaire et au collège. *L'orientation scolaire et professionnelle* 36/2.

Le-Bastard Landrier S. (2002) *Les effets du contexte scolaire sur la réussite des élèves en classe de seconde*. Thèse de L'Université de Bourgogne.

Le-Bastard Landrier S. (2005) L'expérience subjective des élèves de seconde : influence sur les résultats scolaires et les vœux d'orientation. *L'Orientation scolaire et professionnelle* 34/2.

Malaise S. (2010) Classification hiérarchique de compétences : comparaison d'une méthode basée sur l'analyse de fréquences de réussite et d'une méthode d'analyse statistique implicative. *Bulletin de l'ADMEE-Europe* n°2011/1.

Morlaix S. (2007) *Identifier et évaluer les compétences dans le système éducatif : quels apports pour la recherche en éducation ?* Rapport d'habilitation à diriger des recherches. Université de Bourgogne.

Morlaix S., Suchaut B. (2007) Evolution et structure des compétences des élèves à l'école élémentaire et au collège - Une analyse empirique des évaluations nationales. *Cahiers de l'IREDU* 68.

Morlaix S., Suchaut B. (2010) Identification des compétences à l école élémentaire : une approche empirique à partir des évaluations institutionnelles. *Mesure et évaluation en éducation* 30(2).

Morlaix S., Suchaut B. (2012) *Analyse de la réussite en première année universitaire : effets des facteurs sociaux, scolaires et cognitif* - IREDU-CNRS et Université de Bourgogne. Document de travail.

OCDE (2003) Orientation professionnelle : nouvelles pistes de réflexion. Analyse des politiques d'éducation

OECD (2004) Learning for Tomorrow's World – First Results from PISA 2003

Polikof M. S., Porter A. C., Smithson J. (2011) How Well Aligned Are State Assessments of Student Achievement With State Content Standards? *American Educational Research journal* 48(4).

Watts A. G, Sultana R. G. (2003) *Politiques d'orientation professionnelle dans 36 pays : contrastes et thèmes communs*. Cedefop-OECD

Code français de l'éducation : http://www.legifrance.gouv.fr/
Educnet : http://www.educnet.education.fr/
Eduscol :http://eduscol.education.fr/
Observatoire EVAPM. http://www.apmep.asso.fr/-Observatoire-EVAPM-

N.B. La présente communication est illustrée par un diaporama "EMF2012_Communication A_Bodin" téléchargeable sur le site de l'auteur. http://web.me.com/antoinebodin/pro/ page "Divers".

D’UNE ORIENTATION *VERS* LES MATHÉMATIQUES À UNE ORIENTATION *PAR* LES MATHÉMATIQUES (ANNÉES 1950-ANNÉES 1980)

Renaud D’ENFERT*

Résumé – Cette communication examine, pour ce qui est de la France, la place des mathématiques dans les cursus scolaires et leur rôle dans l’orientation des élèves, des années 1950 aux années 1980. Elle s’attache à montrer comment, au cours de cette période, on est passé d’une orientation *vers* les mathématiques à une orientation *par* les mathématiques.

Mots-clefs : histoire de l’enseignement des mathématiques, orientation scolaire, sélection sociale, mathématiques modernes, réformes

Abstract – This paper concerns the place of the mathematics teaching in the French school curriculum and the role it plays in educational and (vocational) guidance between the 1950s and the 1980s. It aims to show that it passed from a guidance to go in for mathematics to a guidance based on a selection through mathematics.

Keywords: history of mathematics teaching, educational guidance, social selection, modern mathematics, reforms

En France, depuis plusieurs décennies, la place des mathématiques dans les cursus scolaires et leur rôle – souvent jugé excessif – dans l’orientation des élèves sont régulièrement questionnés. La presse évoque périodiquement la « dictature des mathématiques », tandis que le ministère de l’Éducation nationale multiplie les tentatives pour rompre avec leur prééminence, véritable ou supposée. Reprenant certains travaux réalisés dans le cadre d’une recherche collective sur les réformes disciplinaires dans la seconde moitié du XX^{e} siècle (d’Enfert 2010 ; d’Enfert et Gispert 2011 à paraître ; Cardon, d’Enfert et Gispert à paraître)[1], c’est cette place et ce rôle des mathématiques dans l’enseignement, des années 1950 aux années 1980, que cette communication veut examiner. Elle s’attache à montrer comment, au cours de cette période, on est passé d’une orientation *vers* les mathématiques à une orientation *par* les mathématiques.

I. ORIENTER LES ÉLÈVES VERS L’ENSEIGNEMENT SCIENTIFIQUE (ANNÉES 1950)

C’est à partir des années 1950 que la question de l’accroissement du poids des mathématiques dans la scolarité, notamment secondaire, apparaît avec acuité. Dans le contexte de reconstruction qui suit la Seconde Guerre mondiale, les besoins en scientifiques et en techniciens pour assurer le développement économique et la modernisation du pays, évalués à partir des travaux du Plan et des données statistiques sur la main d’œuvre, sont mis en avant. Un important mouvement se fait jour en faveur d’un renforcement de l’enseignement scientifique et technique, qui s’appuie à la fois sur le constat d’une pénurie des emplois scientifiques et sur une reconnaissance de la valeur formatrice des sciences. L’une des résolutions du colloque de Caen de novembre 1956, consacré à la recherche et à l’enseignement scientifique, indique ainsi :

---

* École normale supérieure de Lyon, UMR 5190 LARHRA, équipe Histoire de l’éducation ; Groupe d’histoire et diffusion des sciences d’Orsay (EST-EA 1610) – France – renaud.denfert@freesbee.fr

[1] Recherche REDISCOL « Réformer les disciplines scolaires : acteurs, contenus, enjeux, dynamiques (années 1950-années 1980) », soutenue par l’Agence nationale de la recherche. Je remercie Clémence Cardon-Quint et Hélène Gispert de m’avoir autorisé à utiliser nos travaux conduits en commun.

© d’Enfert R. (2012) D’une orientation *vers* les mathématiques à une orientation *par* les mathématiques (années 1950-années 1980). In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21^{e} siècle – Actes du colloque EMF2012* (SPE2, pp. 1727–1733). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

> L'intérêt national exige que la majorité des enfants et jeunes gens reçoive une formation qui fasse une large place aux sciences et aux techniques. […] L'enseignement scientifique et technique rénové doit être un des éléments d'un véritable humanisme. (Colloque de Caen 1956, p. 362)

Dans les années 1950, plusieurs projets de réforme de l'enseignement s'appuient sur cette nécessité de pallier l'insuffisance numérique des élites scientifiques pour justifier une réorganisation du système scolaire. Cette nécessité est également mise en avant dans le décret Berthoin[2] du 6 janvier 1959 portant réforme de l'enseignement public :

> Nous ne pouvons plus maintenir une organisation scolaire qui ne nous permet de former qu'un chercheur, un ingénieur, un professeur quand il en faudrait deux, un technicien quand trois seraient nécessaires, tandis qu'à l'inverse, se presse dans nos enseignements supérieurs des lettres, de la philosophie et du droit une foule d'étudiants, à qui nous n'avions pas préparé d'autre issue. (Ministère de l'éducation nationale 1959)

Alors que la scolarisation post-élémentaire est en forte croissance, un des enjeux annoncés de la réforme Berthoin, qui veut « investir à plein profit » dans ce capital humain que forment les élèves, est de favoriser les orientations vers les enseignements scientifiques et techniques afin d'améliorer les performances de l'économie nationale.

Les mathématiques sont directement concernées par ce mouvement favorable aux sciences et à leur enseignement. Dans les années 1950, l'Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public (APMEP), qui réunit essentiellement des professeurs du secondaire (Barbazo et Pombourcq 2010), s'appuie sur le même type d'arguments pour favoriser le développement de l'enseignement des mathématiques. Elle met en exergue, par la voie de son président Gilbert Walusinski, « la pénurie de travailleurs scientifiques qualifiés » ainsi que la nécessité de faire de cette discipline « un élément bien vivant de l'humanisme moderne » (Walusinski 1956, pp. 74-79). Estimant que les mathématiques occupent – ou vont occuper à brève échéance – une place prééminente, non seulement dans la sphère industrielle et économique, mais aussi dans la vie des citoyens, dans la vie sociale, l'APMEP milite pour que des mesures soient prises dans deux directions : d'une part, former massivement et rapidement de futurs scientifiques et favoriser les vocations ; d'autre part, faire des mathématiques le pilier essentiel de la culture générale dispensée au lycée ou au collège, afin de donner à l'ensemble des élèves les outils indispensables pour comprendre et affronter le monde moderne, et pour participer à sa transformation.

Pour favoriser l'orientation des élèves vers les études scientifiques, l'APMEP réclame que les horaires alloués aux mathématiques soient augmentés, et ce, dès le début de la scolarité secondaire : avec des horaires renforcés, les élèves prendront conscience de l'importance de la discipline, dans la vie comme au lycée, et, de plus, leur niveau s'en trouvera rehaussé. Cette revendication se double d'une dénonciation de la prééminence des disciplines littéraires, et notamment des langues anciennes, dans les plans d'études : « Si vraiment on a besoin de scientifiques, il faudra bien que les latinistes capitulent » (APMEP 1955, p. 152). La formule, prononcée lors d'une l'assemblée générale de l'APMEP, résume bien l'état d'esprit qui règne dans la seconde moitié des années 1950.

Si l'APMEP obtient gain de cause sur la question des horaires, ceux-ci étant renforcés dans le secondaire au tournant des années 1950-1960, c'est surtout la réforme du second cycle secondaire, menée par le ministre de l'Éducation nationale Christian Fouchet en 1965, qui place les mathématiques en position dominante en instaurant de nouvelles séries du baccalauréat A, B, C, D plus spécialisées qu'auparavant. Arguant de la nécessaire modernisation du pays et des besoins en scientifiques et en ingénieurs, la réforme est partie

---

[2] Jean Berthoin est alors ministre de l'Éducation nationale.

prenante d’un mouvement de fond initié dès les années 1950 et qui voit, selon Antoine Prost, « la conversion de la bourgeoisie aux mathématiques et l’irrésistible ascension des sections scientifiques » (Prost 2004, p. 455). Elle répond au développement programmé des études supérieures scientifiques et à la volonté d’y orienter les futurs étudiants, et entérine un basculement des hiérarchies disciplinaires qui avait déjà débuté depuis quelques années : au nom de la modernisation, l’élément discriminant n’est plus le latin, ou même les lettres, mais les sciences, et en tout premier lieu les mathématiques. Alors qu’auparavant, le baccalauréat « philosophie » était plus recherché que le baccalauréat « mathématiques », la réforme consacre la supériorité des nouvelles sections scientifiques C et D, et surtout de la section C où les mathématique dominent, au détriment des sections littéraires A (à l’exception de la section A1 lettres classiques).

II. DES MATHÉMATIQUES « POUR TOUS » : LA CONTRIBUTION DES « MATHÉMATIQUES MODERNES » (ANNÉES 1950-60)

Cette volonté d’accroître la place des sciences, et notamment des mathématiques, dans l’enseignement est fortement connectée à un désir de rénovation de la discipline visant à rendre celle-ci accessible à « tous les élèves », qu’expriment les partisans de l’introduction des « mathématiques modernes » dans l’enseignement. Ce désir de rénovation participe lui-même d’un mouvement d’ampleur internationale qui prend corps dans les années 1950 et que portent alors plusieurs organisations internationales. Parmi ces dernières, on peut citer la Commission internationale pour l’étude et l’amélioration de l’enseignement mathématique (CIEAEM), qui réunit des mathématiciens (bourbakistes), des pédagogues et des psychologues comme Jean Piaget, ainsi que l’Organisation européenne de coopération économique (OECE)[3]. Celle-ci organisa plusieurs colloques d’experts des mathématiques et de leur enseignement au tournant des années 1950-1960, dont le colloque de Royaumont (1959), connu pour le « À bas Euclide » lancé par le mathématicien Jean Dieudonné. Les réflexions sur la modernisation de l’enseignement mathématique menées au sein de ces diverses organisations ont conjugué divers enjeux : mathématiques, pédagogiques, économiques (Gispert 2010). Dans le cas de la France, les mathématiques modernes dont se réclament les réformateurs de la discipline, mathématiciens et pédagogues, tout au long des années 1950-1960, sont présentées comme étant « des mathématiques pour tous ». Et ce, à double titre.

En premier lieu, les « modernisateurs » militent pour une introduction des mathématiques modernes à tous les niveaux du cursus scolaire. Certes, pour certains professeurs de faculté, il s’agit de mieux préparer les élèves à recevoir les mathématiques universitaires dont la modernisation a commencé dans les années 1950. Mais le projet est en réalité plus global : il s’agit de construire la cohérence verticale de la discipline, « de la Maternelle aux Facultés », de telle sorte que les mêmes mathématiques, certes plus ou moins élaborées, seront enseignées tout au long de la scolarité. Les réformateurs justifient cette introduction par l’identité qu’ils établissent entre l’élaboration des structures mathématiques et le développement des structures mentales de l’enfant mis en évidence par la psychologie génétique de Jean Piaget. Tous les élèves, quel que soit le niveau d’études, sont ainsi concernés par ces nouvelles mathématiques, la question de l’établissement d’une continuité entre le premier et le second degré n’apparaissant toutefois qu’au début des années 1960.

En second lieu, les réformateurs veulent « démocratiser » les mathématiques, au sens où ils considèrent que la « vraie » science, c’est-à-dire les mathématiques contemporaines, doit être connue de tous et pas seulement de quelques initiés. Cette ambition démocratique se retrouve

[3] Celle-ci devient en 1961 l'Organisation de coopération et de développement économiques (OCDE).

au niveau des méthodes préconisées : moderniser l'enseignement des mathématiques, c'est également développer des méthodes actives favorisant l'initiative et l'esprit de recherche, afin de permettre aux élèves de « faire » des « vraies » mathématiques, comme un mathématicien. Il s'agit donc d'ouvrir les élèves aux mathématiques qui seront universellement pratiquées lorsqu'ils seront adultes (statistiques, algèbre ensembliste…), et non aux mathématiques du passé, qu'incarne à leurs yeux la géométrie euclidienne traditionnelle. Celle-ci est d'ailleurs accusée de mêler approche expérimentale et raisonnement déductif et donc de manquer de rigueur, de donner une vision confuse, faussée des mathématiques, et d'être en conséquence peu accessible à l'élève moyen. Avec les mathématiques modernes qui privilégient une présentation logique des notions mathématiques et évacuent ce qui pourrait relever de l'intuition, nul besoin d'aptitudes particulières pour comprendre et réussir dans la discipline. Les discours sur la « bosse des maths » sont d'ailleurs réfutés, tant au sein de l'APMEP, où l'on considère qu'« il n'y a pas d'esprit complètement fermé aux mathématiques » (Walusinski 1955, p. 130), qu'au niveau ministériel où l'on affirme que les mathématiques sont faites pour et peuvent être comprises par tous les élèves :

> L'enseignement des mathématiques, au moins au niveau de l'initiation (6e à 3e) ne peut plus être réservé, s'il l'a jamais été, à des esprits supposés doués ; l'évolution de l'activité humaine et des sociétés nous impose d'enseigner des mathématiques à *tous* [en italiques dans le texte] les enfants. (Ministère de l'Éducation nationale 1961, p. 3137)

Mais ces « mathématiques pour tous » n'ont pas pour ambition première de réduire d'éventuelles inégalités sociales devant la discipline. Les motivations sont essentiellement d'ordre psycho-pédagogique, l'élève étant appréhendé comme un individu générique, idéal, sans véritable existence sociale. Les mathématiques modernes n'en sont pas moins considérées comme socialement neutres, et donc par nature, plus démocratiques que les lettres accusées d'être socialement sélectives. La prééminence des mathématiques, instaurée avec la réforme Fouchet de 1965, n'en paraît que plus légitime.

III. VERS UNE « DICTATURE » DES MATHÉMATIQUES ? (ANNÉES 1970)

Les années 1970 se caractérisent au contraire par une dénonciation appuyée des mathématiques comme discipline de sélection, en particulier sociale, et de la suprématie de la filière C où dominent les mathématiques. Cette dénonciation du caractère sélectif des mathématiques, largement médiatisée, porte sur l'ensemble du cursus secondaire[4]. Le rôle excessif joué par les mathématiques dans l'orientation des élèves aurait transformé les études secondaires en une véritable course d'obstacles, qui commence dès l'entrée en sixième et se poursuit à chaque palier d'orientation, la filière C étant réservée aux « bons en maths ». Mais si des voix s'élèvent contre la « tyrannie des mathématiques », comme le titre *Paris Match* en 1979, c'est aussi parce que les mathématiques inscrites aux programmes d'enseignement, tant à l'école élémentaire que dans l'enseignement secondaire, sont des mathématiques « modernes » : la réforme promue dans les années 1950-1960 est en effet entrée en vigueur à partir de la rentrée 1969, sur la base des travaux d'une commission ministérielle réunie sous la présidence du mathématicien André Lichnerowicz.

Dès le début des années 1970, cette réforme est mise en cause. Les critiques visent principalement les nouveaux programmes des classes de quatrième et de troisième (13-15 ans). Ceux-ci sont jugés trop ambitieux et donc inadaptés à la grande majorité des élèves : la question des échecs en mathématiques est posée, que révèle par exemple le livre de Stella

[4] Ce développement s'appuie principalement sur les coupures de presse relatives à l'enseignement des mathématiques rassemblées par la direction de l'information et de la communication (bureau de la documentation) du ministère de l'Éducation nationale pour la période 1969-1980 (Archives nationales, Centre des archives contemporaines, 19820346/4).

Baruk, *Échec et Maths* (1973). Il est vrai que les ambitions de la réforme sont confrontées aux réalités de son application : alors que les réformateurs souhaitaient rendre accessible les *mêmes* mathématiques à *tous* les élèves, les nouveaux programmes sont mis en difficulté par la diversité des élèves de cette classe d'âge du premier cycle désormais massifié. Les adversaires de la réforme réclament d'ailleurs un retour à des mathématiques plus traditionnelles, avec des contenus distincts selon les avenirs scolaires puis professionnels des élèves. Leur demande est assez proche des intentions du ministre de l'Éducation nationale René Haby qui, dans la cadre de l'institution du « collègue unique » (1975) souhaite mettre en place, dans les classes de quatrième et de troisième, un « programme allégé » pour les élèves qui seraient peu enclins à l'abstraction. Pour l'APMEP, une telle mesure reviendrait à réserver les mathématiques modernes, « celles qui permettent de dominer les techniques de calcul », aux meilleurs élèves, et à opérer, de fait, une sélection précoce : selon l'association, ce sont moins les mathématiques modernes qui sont source d'échec scolaire, que les mauvaises conditions de leur enseignement, notamment la faiblesses des horaires alloués à la discipline.

Se pose, en fait, la question du caractère « démocratique », au sens social du terme, des mathématiques modernes : selon leurs détracteurs, loin d'abolir les barrières entre les classes sociales, les mathématiques modernes, qui privilégient l'abstraction et un certain formalisme, seraient en fait surtout accessibles aux élèves issus des milieux favorisés et accroîtraient en conséquence les écarts de réussite entre les élèves. Les professeurs de mathématiques, soucieux de ne pas apparaître comme les agents directs de la sélection, ont en revanche une autre analyse : pour eux, c'est le pouvoir politique qui, en allouant des horaires insuffisants et en limitant la liberté des professeurs par des programmes contraignants, instrumentalise l'enseignement des mathématiques afin qu'il contribue à la sélectivité – voulue – du système.

Cette prééminence, véritable ou supposée, des mathématiques dans l'orientation des élèves tout au long de leur scolarité – une orientation ressentie comme une orientation par l'échec –, se double d'une critique de la section C du second cycle (et du baccalauréat qui lui est attaché) en tant que seule voie possible pour accéder aux formations et aux positions les plus prestigieuses. Les « bons en maths » remplaçant désormais les « forts en thèmes », elle conduit aussi à une certaine inquiétude face à l'éventuelle domination, dans la société, d'une technocratie de scientifiques « sans cœur ni âme » (polytechniciens, ingénieurs, informaticiens, etc.). Ce rôle attribué aux mathématiques débouche également, de façon corollaire, sur le constat de la dévalorisation des autres filières du second cycle général, et plus particulièrement de la filière A qui, contrairement à l'ancienne filière classique, ne permet guère les reconversions vers une voie scientifique en vue d'accéder aux études de médecine ou aux grandes écoles. La diminution notable, au cours de la décennie 1970, du nombre de bacheliers A (littéraires) et la progression parallèle du nombre de bacheliers scientifiques C et D, témoignent de l'évolution des stratégies familiales : si les études scientifiques apparaissent bien sélectives, elles n'en sont pas moins attractives. Du reste, pour les élèves qui entrent dans second cycle général (environ 35 % des élèves sortant de 3^{e} à la rentrée 1970), l'accès à la filière C n'est pas aussi fermé que le suggèrent ses détracteurs. Sur l'ensemble de la décennie 1970, en effet, la classe de seconde C l'emporte nettement, en termes d'effectifs, sur la classe de seconde A : pour ce qui est de l'enseignement public, elle accueille en moyenne, chaque année, près de 100 000 élèves quand son homologue littéraire en accueille moins de 45 000. En revanche, la classe de seconde C est une classe où l'on redouble davantage et qui est loin d'assurer un accès automatique à la série C du baccalauréat : seulement un tiers de ses élèves sont dans ce cas[5]. En tout état de cause, la sélection par les mathématiques apparaît socialement tout aussi injuste que la sélection par le latin et les lettres qui prévalait auparavant.

---

[5] Données collectées sur le site http://www.infocentre.education.fr/acadoc /, cotes TS 5043 et NI 72-04.

Comment faire, dès lors, pour réduire le pouvoir d'attraction/sélection de la section C d'une part, et revaloriser la section A d'autre part ? En fait, la solution va essentiellement se situer du côté d'un rééquilibrage de la place des mathématiques entre les différentes sections. Si la nomination de René Haby à la tête du ministère de l'Éducation nationale amorce un repli concernant la place des mathématiques modernes dans l'enseignement, il revient à son successeur, Christian Beullac, de tenter d'atténuer la sélectivité des mathématiques au niveau du second cycle. À cet effet, celui-ci propose d'instituer une seconde générale indifférenciée avec un horaire de mathématiques moindre qu'en seconde C. Ce qui fait dire à la présidente de l'APMEP : « Ainsi donc, apprenez, si vous n'y aviez pas pensé, que moins on fait de mathématiques, plus elles sont faciles et moins elles sont sélectives ! » (Zehren, 19). Le ministre propose également de réduire les différences d'horaires de mathématiques entre les différentes sections de première et de terminale, les programmes étant allégés ou renforcés en conséquence. Si le discours du ministre concerne essentiellement les classes non littéraires, l'inspection générale de mathématiques y voit aussi le moyen de « combler le "désert scientifique" des classes A ». On peut néanmoins s'interroger sur la portée effective de ce dispositif, qui entre en vigueur à partir de la rentrée 1981 en même temps que se met en place une « contre-réforme » des programmes marquée par un recul des théories ensemblistes (Artigue 1996). C'est, en effet, une initiative presque analogue que prend en 1985 le ministre de l'Éducation nationale J.-P. Chevènement lorsqu'il propose de rééquilibrer une nouvelle fois les filières du second cycle au profit des autres sciences et de l'économie, mais aussi des lettres. Débute ainsi une succession de réformes qui chercheront toutes à rompre avec la prééminence conjointe des mathématiques et des filières scientifiques dans les cursus et l'orientation scolaires dans les décennies 1990-2000.

IV. CONCLUSION

Les décennies qui suivent la Seconde Guerre mondiale marquent donc une évolution importante de la place et du rôle des mathématiques dans les cursus scolaires. Deux mouvements se conjuguent. Le premier, d'ordre curriculaire, est un mouvement de réévaluation des hiérarchies disciplinaires au profit des sciences, et plus particulièrement des mathématiques. Le second mouvement est de nature disciplinaire : il vise la rénovation l'enseignement des mathématiques et culmine au tournant des années 1960-1970 avec la réforme des « mathématiques modernes ». À l'issue de ce double mouvement, les mathématiques sont devenues un marqueur essentiel de l'excellence scolaire. Malgré la promesse démocratique des mathématiques modernes, cette discipline apparaît comme le principal instrument de la sélection et de l'orientation des élèves.

Les réformes curriculaires successives comme le reflux des mathématiques modernes à partir du milieu des années 1970 n'ont pas véritablement levé les questionnements relatifs au caractère sélectif des mathématiques et de leur enseignement. Le fait qu'en 2006 encore, le *Monde de l'éducation*, périodique « grand public » spécialisé dans les questions éducatives, fasse son grand titre avec « Non à la dictature des maths ! » montre que des interrogations subsistent[6]. Aujourd'hui comme dans les années 1970, l'enjeu consiste peut-être à tenter de résoudre la contradiction qui existe potentiellement entre la volonté de dispenser des « mathématiques pour tous », y compris au lycée, et celle de former la petite fraction d'élèves qui deviendront des spécialistes de la discipline.

---

[6] *Le Monde de l'éducation* 351, octobre 2006. Voir la réaction de l'AMPEP à l'adresse : http://www.apmep.asso.fr/La-rengaine-de-la-dictature-des (consulté le 14 novembre 2011).

REFERENCES

APMEP (1955) Assemblée générale du 29 mai 1955. *Bulletin de l'association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public*, 169, 148-158.

Artigue M. (1996) Réformes et contre-réformes dans l'enseignement de l'analyse au lycée (1902-1994). In Belhoste B., Gispert H., Hulin N. (Eds.) (pp. 197-217) *Les sciences au lycée. Un siècle de réformes des mathématiques et de la physique en France et à l'étranger* Paris : Vuibert/INRP.

Barbazo E., Pombourcq P. (2010) *Cent ans d'APMEP*. Brochure APMEP 192.

Cardon-Quint C., d'Enfert R., Gispert H. (à paraître) Démocratiser, orienter, sélectionner : l'enseignement du français et des mathématiques dans le second degré (1945-1985). In d'Enfert R. (Ed.) *Réformer les disciplines scolaires, 1945-1985*.

Colloque de Caen (1956) Les douze points du colloque de Caen. Résolutions adoptées à la séance de clôture du 3 novembre 1956. In Chatriot A., Duclert V. (Eds.) (pp. 361-369 *Le gouvernement de la recherche. Histoire d'un engagement politique, de Pierre Mendès-France à Charles de Gaulle (1953-1969)* Paris : La Découverte.

d'Enfert R. (2010) Mathématiques modernes et méthodes actives : les ambitions réformatrices des professeurs de mathématiques du secondaire sous la Quatrième République. In d'Enfert R., Kahn P. (Eds.) (pp. 115-129) *En attendant la réforme. Disciplines scolaires et politiques éducatives sous la Quatrième République*. Grenoble : Presses universitaires de Grenoble.

d'Enfert R., Gispert H. (2011 à paraître) Une réforme à l'épreuve des réalités : le cas des « mathématiques modernes » au tournant des années 1960-1970. *Histoire de l'éducation*, 131.

Gispert H. (2010). Rénover l'enseignement des mathématiques. La dynamique internationale des années 1950. In R. d'Enfert, P. Kahn (Eds) (pp. 131-143) *En attendant la réforme. Disciplines scolaires et politiques éducatives sous la Quatrième République.* Grenoble : Presses universitaires de Grenoble.

Ministère de l'Éducation nationale (1959) Décret du 6 janvier 1959 portant réforme de l'enseignement public (exposé des motifs). En ligne sur : http://www.vie-publique.fr/documents-vp/decret_berthoin.shtml (consulté le 16 septembre 2011).

Ministère de l'Éducation nationale (1961) Enquête sur les travaux pratiques de mathématiques auprès des professeurs du second degré. Circulaire du 24 août 1961. *Bulletin officiel de l'Éducation nationale* 31, 3137-3138.

Prost A. (2004) *Histoire générale de l'enseignement et de l'éducation. Tome IV. L'école et la famille dans une société en mutation (depuis 1930)* Paris : Perrin (1ère ed. 1981).

Walusinski G. (1955) Les mathématiques et la réforme de l'enseignement. *Bulletin de l'association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public* 174, 129-132.

Walusinski G. (1956) La rentrée à l'heure de la réforme. *Bulletin de l'association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public* 179, 73-79.

Zehren C. (1980) Éditorial. *Bulletin de l'association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public* 322, 19-20.

COMMENT LE PLAN D'ETUDES ROMAND CARACTERISE LES COMPETENCES MATHEMATIQUES DETERMINANTES DANS LES PHASES DE TRANSITION ?

Alain EMERY[*] – Viridiana MARC[**]

Résumé – Un Plan d'études romand (PER) vient d'être introduit en Suisse romande. C'est une étape historique et importante dans le processus d'harmonisation de la scolarité pour cette région linguistique. Le PER organise la scolarité en trois cycles et définit des repères pour l'enseignement et la régulation des apprentissages. Les éléments structurant de ce plan d'études appellent moult questionnements tant sur la place à leur accorder, que le rôle qu'ils se devraient de jouer et celui qu'il est effectivement possible de leur faire jouer. Par ailleurs, le découpage en cycles définit des moments de transition, en partie déjà établis dans les cantons avec, selon leur culture, des épreuves accompagnant plus ou moins la promotion ou l'orientation. Que fournit le référentiel d'enseignement pour ces moments de transition ? Met-il en évidence des compétences déterminantes qu'il s'agirait par conséquent d'assurer pour un cycle ? Si tel est le cas, quels rôles peuvent-elles vraiment jouer et quelles sont les caractéristiques d'une évaluation capable de produire une information pertinente relative à ces compétences ? Tous ces questionnements seront exemplifiés dans le cadre des mathématiques.

Mots-clefs : compétences déterminantes, référentiel d'enseignement, transition, évaluation

Abstract – A French -speaking set of standards (PER) has been reccently introduced in French-speaking Switzerland. It is an imporant, historical step in the effort of harminisation in this region. The PER organises scholarship in three cycles and defines stepstones for the teaching, and its pace. The structuring features of this PER raise important questions: about their place and role, about what it should be, about what it actually is. Moreover, the organisation in cycles introduces transitions – some of these already established in the districts (cantons), with, according to the local culture, assessements associated with counselling. How does the standarads support these transitions? Does it evidence dertermining skills, for a given cycle? Inthis case, what is their role, how are they assessed? All this question are tackeld in this paper, in the case of mathematics.

Keywords: crucial skills, teaching standards, transition, assessment

Préambule

Dans le contexte suisse romand actuellement constellé de nombreux changements en termes de structures scolaires et de référentiel d'enseignement, nous avons fait le choix d'inscrire notre présentation dans une perspective exploratoire. Ce texte ne se présente pas comme un article mais comme un exposé succinct des éléments qui seront développés et explorés lors de la présentation.

I. CONTEXTE

Le 21 mai 2006, le peuple suisse acceptait, avec une majorité très nette de 86%, les nouveaux articles constitutionnels sur la formation, obligeant les cantons à adhérer notamment à des conventions intercantonales dans le domaine de l'instruction publique. Les cantons sont ainsi tenus par la Constitution de réglementer certains paramètres fondamentaux de leur système éducatif. Un accord intercantonal sur l'harmonisation de la scolarité obligatoire est établit (concordat HarmoS) par la Conférence suisse des directeurs de l'instruction publique (CDIP). Notamment, il harmonise la durée des degrés d'enseignement (deux cycles primaires de quatre ans et un cycle secondaire de trois ans), leurs principaux objectifs et le passage de l'un à l'autre.

[*] Conférence intercantonale de l'instruction publique de la Suisse romande et du Tessin (CIIP) – Suisse – alain.emery@edu.ge.ch
[**] Institut de recherche et de documentation pédagogique (IRDP) – Suisse – viridiana.marc@ne.ch

© Emery A., Marc V. (2012) Comment le plan d'études romand caractérise les compétences mathématiques déterminantes dans les phases de transition ? In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (SPE2, pp. 1734–1740). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

Parallèlement, dans l'espace romand et sous l'impulsion du canton de Berne francophone, des travaux d'écriture d'un plan d'études commun débutent en 2005, associant progressivement l'ensemble des cantons romands. Ce projet est reconnu par la Conférence intercantonale de l'instruction publique de la Suisse romande et du Tessin (CIIP), le 20 septembre 2007, pour devenir alors le Plan d'études romand (PER). Celui-ci, soumis à des experts, fait l'objet d'une large consultation en automne 2008. Pour prendre en compte les remarques issues de la consultation, des travaux d'amélioration sont entrepris en automne 2009 pour parvenir à une version finale du PER au printemps 2010. La mise en application progressive de ce plan d'études est prévue dans les classes dès août 2011, selon des modalités propres à chaque canton. Ceux-ci ont également la charge de réorganiser leurs structures scolaires en conformité avec le Concordat HarmoS, notamment en organisant la scolarité obligatoire en trois cycles. Ainsi, la scolarité comporte, a priori, des transitions entre chaque cycle et en fin de scolarité obligatoire.

1. Plan d'études romand et transition

Comment ces transitions sont-elles prises en compte dans le Plan d'études romand (PER) et quels sont les éléments proposés pour faciliter ces passages ?

Descriptif

Le Plan d'études romand (PER) se présente comme un projet global de formation articulé autour de trois entrées (*Domaines disciplinaires, Capacités transversales, Formation générale*).

Figure 1 – *Structure du PER*

Il constitue le référentiel d'enseignement pour l'ensemble de la scolarité obligatoire. Il offre une structure similaire pour chaque domaine disciplinaire :

– des *visées prioritaires* définies pour l’ensemble du domaine et pour toute la scolarité obligatoire. Elles décrivent globalement les grandes orientations des disciplines qui composent le domaine ;

– un réseau *d'objectifs d'apprentissage*, qui décline les visées. Il est structuré par cycle et par thématique couvrant les onze années concernées. Chaque cycle est donc défini par une série de compétences permettant une lecture progressive des apprentissages tout au long de la scolarité ;

***Figure 2** – Réseau des objectifs d’apprentissage en mathématiques*

– une *progression des apprentissages* décrit et précise, pour chaque *objectif d’apprentissage*, les enseignements-apprentissages à mener, par tranche de deux années pour le degré primaire et par année pour le degré secondaire ;

– des *attentes fondamentales* sont définies pour chaque cycle, précisant les « incontournables » dont la maîtrise devrait garantir pour chaque élève la poursuite de ses apprentissages. Ces attentes fondamentales doivent donc être atteintes *au cours mais au plus tard à la fin du cycle.* Elles ont ainsi pour but de fournir une aide pour la régulation des apprentissages des élèves, ce sont avant tout des repères pédagogiques pour les enseignants.

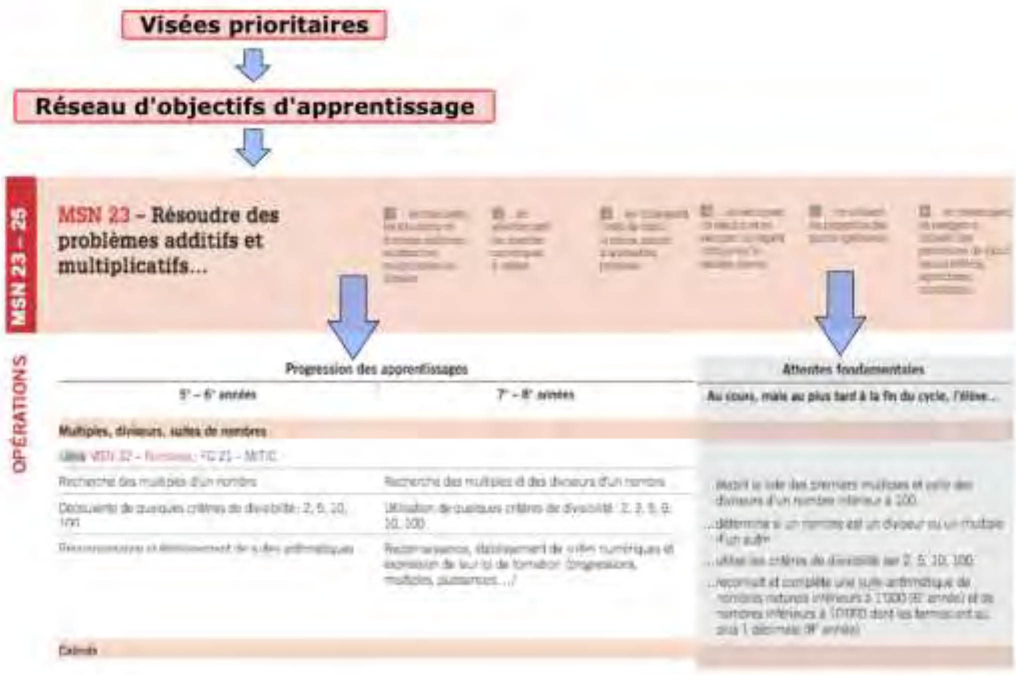


Figure 3 *– Organisation du PER*

Cette architecture présente potentiellement différents atouts au regard de la problématique des transitions, notamment, elle propose :

– une vision synthétique à travers les *visées* et le *réseau d'objectifs* qui, en définissant un cadre commun pour l'ensemble de la scolarité obligatoire, permet d'identifier et de mieux contrôler les continuités ou les ruptures pouvant apparaître lors des transitions inter-cycles ;

– des *progressions d'apprentissages* qui fournissent un niveau de description assez fin des apprentissages à aborder ; elles sont présentées de manière identique quel que soit le cycle, permettant aux différents intervenants d'être au clair sur le travail qui a été, ou sera, effectué ;

– des *attentes fondamentales* qui devraient assurer, pour chaque transition, que tout élève est en mesure de poursuivre ses apprentissages dans le cycle suivant.

2. *Attentes fondamentales*

Faire figurer des attentes fondamentales dans le PER a suscité tout une série d'interprétations, de réactions et d'attentes de la part des différents acteurs et cela aussi bien pendant sa réalisation que suite à sa publication. Entre autres, on peut relever les interrogations et remarques suivantes :

- attentes de fin de cycle ou attentes pour le cycle ?
- par *attentes fondamentales* entend-on :
  * des connaissances culturellement considérées comme obligatoires pour tous les élèves ?
  * des compétences incontournables sensées assurer la suite de la formation ?
  * des connaissances de bases facilement mesurables et donc présentes de façon récurrentes dans les évaluations ?

- niveau d'exigence ou repère pédagogique ?
- est-ce vraiment judicieux d'avoir appelé cela « attentes fondamentales » ?
- les *attentes fondamentales* déterminent-elle une « Ecole à la baisse » ou une « Ecole à la hausse » ?
- les compétences et connaissances retenues sont-elles les bonnes au regard des intentions déclarées ?
- garantir la poursuite des apprentissages ou de la scolarité ?
- quels liens entretiennent ces attentes avec l'évaluation des élèves ? Avec l'évaluation du système ?
- quel sens donner à « l'élève maîtrise les attentes fondamentales » ?
- la maîtrise des attentes fondamentales correspond-elle à la note 3, 4 ou 6 ? (note de suffisance 4, note maximale 6) ?
- elles ne sont pas assez précises ; elles peuvent être interprétées ; une *attente fondamentale* peut se concrétiser par des activités de niveau de difficulté ou de complexité très différent !
- cela ne suffit pas de les décliner pour le cycle, il faut les préciser par année scolaire !
- qu'apportent-elles au niveau de la communication avec les parents ?

La prise en compte de ces interrogations et remarques a contribué à préciser progressivement le rôle des attentes fondamentales et surtout à mettre en évidence leurs avantages et leurs limites.

Ce sont donc les réflexions et conséquences qu'ont suscité ces différentes réactions que nous voulons explorer et illustrer dans le cadre de la présentation. Par exemple, le fait d'implanter, dans un référentiel d'enseignement, des éléments pour la régulation des apprentissages, jette un pont vers l'évaluation, non seulement formative, mais également sommative, ou encore certificative puisqu'apparaissant en fin de cycle. La fonction de l'évaluation certificative prenant de plus en plus de poids dans l'enseignement, ce lien peut pervertir la fonction même des repères pédagogiques. D'où la nécessité de bien définir ce que ces repères peuvent et ne peuvent pas apporter dans le champ de l'évaluation, que ce soit l'évaluation des élèves ou l'évaluation du système.

II. TRANSITION ET EVALUATION DANS LE CADRE DE L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

Le paysage scolaire romand en matière de transition est spécialement marqué par le passage école primaire - école secondaire. Généralement située en 8^{e} année, cette transition se caractérise par des évaluations dites d'orientation qui contribuent ensuite à répartir les élèves dans différents regroupements d'élèves à l'école secondaire. Dans ce but, les cantons constituent, entre autres outils d'orientation, des épreuves constituées de tâches discriminantes. Par ailleurs, le passage du cycle 1 au cycle 2 correspond également à une transition importante, avec des épreuves cantonales principalement à visée diagnostique, dans le sens où elles complètent et tendent à renforcer l'avis des enseignants sur les compétences de leurs élèves. Mais qu'entend-on exactement par compétence, qui plus est lorsque l'on souhaiterait interroger les « compétences déterminantes » qui justifieraient une promotion en fin de cycle ? Est-il possible de les distinguer, dans le PER, du reste des connaissances ? Et en ce sens, comment s'agit-il de les évaluer ?

1. Compétences déterminantes et PER

En mathématiques, le choix des auteurs du PER s'est porté sur cinq axes thématiques traversant toute la scolarité permettant de définir les apprentissages que tous les élèves devront mener. Il s'agit d'*Espace, Nombres, Opérations, Grandeurs et mesures* et

Modélisation. Ce dernier contient également la modélisation des sciences de la nature et doit donc se spécifier selon la discipline. Les rédacteurs ont pris l'option d'intégrer l'axe Modélisation directement dans la *progression des apprentissages* donc de l'associer systématiquement à un des axes mathématiques (respectivement un des axes des sciences de la nature).

En parcourant la description des éléments décrivant l'enseignement des mathématiques tel qu'il est prévu dans le PER, parvient-on à mettre en évidence ce qui semble relever de « compétences déterminantes » ? Ne s'agit-il pas effectivement de montrer aux enseignants, les compétences – et pas seulement les savoirs et savoir-faire[1] – à développer ainsi qu'un niveau satisfaisant de ces compétences, dans le but d'assurer, en fin de cycle, une bonne transition vers la suite de la formation ? Comment alors assurer que des évaluations soient effectivement en accord avec ces compétences déterminantes que nous dirions curriculaires, et pas seulement la trace d'habitudes évaluatives – bien que répondant au référentiel – dressant aisément une courbe de répartition des élèves ?

Si de fortes impulsions existent pour harmoniser structurellement l'École et ses référentiels (plans d'études régionaux et standards de base nationaux), il est nécessaire de préciser la variété des évaluations externes qui existent en Suisse romande, sans qu'aucune harmonisation institutionnelle à leur sujet ne soit menée. L'introduction d'un référentiel commun d'enseignement pose alors la question d'épreuves romandes communes et, globalement, de l'évaluation qui peut être associée au PER. L'enjeu de l'opérationnalisation de ce référentiel, nécessite de préciser quels sont les éléments susceptibles de servir de référentiel d'évaluation : les objectifs d'apprentissage, la progression des apprentissages ou les attentes fondamentales ? L'analyse a priori de différents scénarios quant au positionnement des attentes fondamentales dans l'évaluation permet de trancher entre « l'École de la baisse » et « l'École de la hausse ».

2. *Quelle évaluation des compétences ?*

Interrogeant enfin l'adéquation de la forme de l'évaluation, nous exposerons un modèle évaluatif en deux phases développé dans le cadre du projet des Épreuves romandes communes mené par l'Institut de recherche et de documentation pédagogique de Suisse romande (IRDP). Ce modèle s'appuie amplement sur le modèle évaluatif belge en trois phases développé par l'équipe de Bernard Rey (2004). Partant de l'hypothèse qu'à un moment donné de la scolarité il est possible de caractériser des compétences de degré 3, 2 ou 1, l'équipe propose respectivement trois phases : la première propose aux élèves une tâche inédite, la deuxième leur soumet la même tâche mais découpée en tâches élémentaires et chronologiques avec des consignes explicites et enfin la troisième propose une série de tâches simples décontextualisées. La compétence, définie par B. Rey comme « Une authentique compétence est la capacité à répondre à des situations complexes et inédites par une combinaison nouvelle de procédures connues ; et non pas seulement à répondre par une procédure stéréotypée à un signal préétabli. » (Rey 2006), est ici considérée comme non spécifiquement disciplinaire. Les tâches soumises aux élèves sont des situations inédites exigeant le choix et la combinaison d'un nombre significatif de procédures automatisées qu'ils sont censés posséder à la fin d'un cycle.

Ajustant ce modèle à l'évaluation de compétences disciplinaires telles que présentées dans le PER et tenant compte des avantages et limites de ces trois phases, le modèle que nous avons exploré se compose de deux phases et est adapté au référentiel romand. Nous

[1] Le terme compétence est ici compris au sens de Roegiers (2004) et se distingue des savoirs et savoir-faire, contrairement à Rey et al. (2004) qui parlerait de compétences de degré 1, 2 ou 3.

exposerons donc les caractéristiques principales de ce modèle, notamment la prise en charge des éléments structurels du PER qu'il permet. Nous présenterons également un prototype d'évaluation à visée diagnostique développé sur ce modèle en mathématiques et analyserons ainsi les ajustements nécessaires qu'impliquent les spécificités de la discipline dans l'opérationnalisation de ce modèle d'évaluation. Mentionnons qu'une des deux phases a été réalisée sur support informatique, dans une perspective d'épreuve adaptative, où la succession des questions dépend donc des réponses fournies par les élèves. Dans cette optique, des questions complémentaires sont soumises à certains élèves suite à des erreurs sur d'autres questions. Nous faisons des hypothèses sur la source de certaines erreurs que la réponse à la question complémentaire devrait permettre de confirmer ou d'infirmer. Contrairement à la plupart des épreuves adaptatives existantes qui proposent simplement une succession de questions plus simples ou plus compliquées, donc caractérisées par une analyse IRT, notre partie adaptative repose donc sur des hypothèses didactiques dans l'analyse a priori des causes d'erreurs. Par ailleurs, nous relèverons à quel point les possibilités dans la prise d'informations sont vastes avec un support informatique et la plus-value que cela permet.

Dans cet essai de mise en œuvre de ce modèle en deux phases pour la fin du cycle 1, nous tenterons de mettre en évidence quels sont les éléments du référentiel PER qui pourraient permettre de caractériser des compétences déterminantes et comment il semble possible d'en prélever des traces à travers des tâches complexes. Le prototype ayant par ailleurs été testé dans quelques classes, nous présenterons le type d'analyse des résultats qu'il a été possible de réaliser ainsi que l'interprétation des réponses obtenues.

III. CONCLUSION

Notre présentation se conclura sur un certain nombre de constats et de questions quant au référentiel d'évaluation qui semble tenir compte de compétences mathématiques déterminantes, d’abord dans le but d’assurer de bonnes transitions, ainsi qu'aux caractéristiques d'une évaluation qui semble effectivement mesurer ces compétences.

PARADOXES DES TRANSITIONS

Ninon GUIGNARD*

Résumé – Transitions institutionnelles, notionnelles et cognitives ne coïncident que rarement pour l'élève. En faisant le panorama de ces diverses transitions scolaires, un certain nombre de paradoxes apparaissent et interrogent notamment l'évaluation qui leur est associée. La rédaction de moyens d'enseignement romands avait pour but d'assurer une continuité dans l'enseignement tout au long de la scolarité obligatoire et l'espoir de réduire les effets des ruptures. Toutefois, les changements successifs de moyens d'enseignement ont également provoqué des obstacles pour les enseignants, constituant une transition professionnelle vécue très différemment selon les cantons.

Mots-clefs : transition, cadre institutionnel, développement cognitif, évaluation

Abstract – Institutional, notional and cognitive transitions coincide rarely for pupils. By the panorama of the various school transitions, a number of paradoxes appear and particulary assessment questions associated with them. Writing teaching books for French part of Switzerland aimed at ensuring the continuity in teaching throughout compulsory school, with the hope of reducing the gaps. However, the successive changes of teaching books also created barriers for teachers, yielding a professional transition, experienced very differently by teachers in each district (canton).

Keywords: transition, institutional, cognitive development, evaluation

Pardonnez-moi mes paradoxes. Il faut en faire quand on réfléchit ; et quoi que vous puissiez dire, j'aime mieux être homme à paradoxes qu'homme à préjugés. (Jean-Jacques Rousseau).

I. SENS COMMUN ET PARADOXE

Dès l'Antiquité, les philosophes opposent la doxa (sens commun) au paradoxe (contre la doxa, celle-ci s'opposant à l'epistèmè). L'épistémologie, sens critique de l'histoire des connaissances permettra d'éclairer quelque peu notre propos.

L'enseignement consiste en général à faire acquérir le savoir, et la didactique des mathématiques, science qui a pris naissance il y a quelques décennies, s'est penchée sur la transposition didactique pour modéliser le passage du savoir savant au savoir enseigné. Actuellement, il y a conflit entre ces positions et celles du pouvoir enseignant qui tend à imposer ses propres représentations.

II. LES MATHÉMATIQUES EN SUISSE ROMANDE

En Suisse romande, au cours des quarante dernières années, les changements dans l'enseignement des mathématiques ont été relativement nombreux tant au plan du référentiel que de la méthode et des organisations du système scolaire. Ces changements de natures différentes entraînent souvent des décalages et produisent des paradoxes.

III. EVOLUTION DEPUIS L'APRÈS-GUERRE

Dans les années 50, l'OECE (Organisation européenne de coopération économique), ancêtre de l'OCDE, crée le Bureau du personnel scientifique et technique. Celui-ci organise un congrès à Royaumont (1958), qui marque profondément les décideurs de l'éducation, notamment en Suisse romande. Son but est de réfléchir à la façon de former des scientifiques de haut niveau. Pour se faire, il faut rénover magistralement l'enseignement des sciences et des mathématiques.

* Service de la recherche en éducation (SRED) – Suisse – nguignard1@gmail.com

© Guignard N. (2012) Paradoxes des transitions. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (SPE2, pp. 1741–1745). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

Cette réforme consiste à penser en termes de structures pour systématiser les domaines de connaissances et créer des liens entres eux.

IV. STRUCTURALISME ET CONSTRUCTIVISME

Cette décision n'est pas anodine, elle rejoint un courant de pensée, le structuralisme, qui anime quasiment toutes les sciences, aussi bien celles de la nature que celles de l'homme. En psychologie, Jean Piaget, un épistémologue, élabore une psychologie du développement cognitif.

Le structuralisme en psychologie est essentiellement représenté par la théorie piagétienne : le constructivisme.

« Le structuralisme est une méthode (et non une doctrine) et il n'y a pas de structure sans une construction. L'histoire a construit chaque connaissance et vue d'une structure organisée. » (Piaget)

Le sujet construit les connaissances à travers des processus d'assimilation et d'accommodation … quel que soit le type d'enseignement ! De plus, pour Piaget, il existe un lien entre l'évolution des connaissances dans l'histoire et la genèse de ces connaissances chez le sujet. Ce lien est notamment relatif aux obstacles, rencontrés dans l'histoire comme au cours du développement cognitif.

V. STRUCTURALISME ET ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

Après quelques années d'enseignement mathématique, à l'école primaire, autour des nombres en couleur et des réglettes « Cuisenaire », la réforme consiste à donner une place prépondérante à des concepts relatifs aux mathématiques ensemblistes.

Dans les années soixante-dix, la réforme en profondeur de l'enseignement mathématique s'est réalisée sur plusieurs plans et en concertation entre professionnels de l'éducation (enseignants, chercheurs, mathématiciens, méthodologues et formateurs) des différents cantons romands. Cette réforme concernait à la fois le référentiel mathématique (mathématiques dites « modernes ») et les méthodes d'enseignement qui tentaient de prendre en compte le développement cognitif de l'élève (constructivisme).

Pour des raisons souvent relatives à l'évaluation « papier-crayon », un glissement se produit et l'on enseigne les représentations ensemblistes comme des objets mathématiques.

La didactique des mathématiques, faisant son chemin, la Suisse romande décide de renoncer aux maths modernes. Pas sans dommages. Avec quelques paradoxes. Par exemple, la notion d'ensemble ne fait plus partie du référentiel de l'élève mais dans son aide-mémoire, le nombre est défini en termes d'ensemble. De plus, le fait d'asseoir les opérations arithmétiques sur les opérations logiques facilitait leur différenciation. Ainsi, par exemple, la persistance des élèves en difficulté à penser « additivement » n'a plus le support logique qui lui permettait de distinguer entre réunion d'ensembles disjoints et produit cartésien.

VI. ET VIENT LA DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

Quelque vingt année plus tard, sous l'essor d'une nouvelle science, la didactique des mathématiques, de nouveaux moyens de mathématiques, abandonnant l'aspect ensembliste des mathématiques, s'élaborent autour de situations-problèmes, jouant sur le conflit cognitif et les sauts qualitatifs pour provoquer la découverte de nouveaux savoirs grâce à des démarches et des stratégies productives. Sans renoncer au constructivisme, la didactique, au contraire, reprend le schéma piagétien Sujet – Objet, en s'interrogeant plus particulièrement cette fois, sur l'objet d'enseignement et des conditions optimales pour favoriser les apprentissages.

VII. TRANSITION MITIGÉE ENTRE LES MOYENS D'ENSEIGNEMENT

Cette nouvelle approche ne connaît pas le même enthousiasme de la part des enseignants, comme ce fut le cas pour les mathématiques « modernes ». Certes, en 70, il y eut quelques irréductibles mais dans l'ensemble, le départ fut prometteur. C'est que d'emblée la formation initiale comme la formation continue s'appuie sur une approche des manuels. L'enseignement basé sur les situations-problèmes n'a pas non plus rencontré beaucoup de résistance chez les enseignants du primaire, formés également à ce type d'enseignement, même si les évaluations entreprises pour mesurer l'efficacité de ces moyens a mis en évidence quelques difficultés, notamment en ce qui concerne la dévolution et les relances, ainsi que la façon d'institutionnaliser les nouveaux savoirs.

Il n'en a pas été de même de la part des enseignants du 3e cycle. La plupart d'entre eux proposent quelques situations-problèmes à leurs élèves si ceux-ci appartiennent aux filières les plus exigeantes. L'utilisation de ces moyens d'enseignement a trouvé un écho fort divers suivant les cantons. Un grand nombre d'enseignants les jugent inadéquats pour des élèves de bas niveau et préfèrent consacrer beaucoup plus d'activités à l'entraînement. Une enquête de l'IRDP (Institut de recherche et de documentation pédagogique) révèle que l'utilisation varie entre 100 et 15% dans les filières de haut niveau et de 50 à 0% dans les autres. Ces différences dans le taux de pratique sont cantonales.

C'est pourquoi une nouvelle mouture de manuels est sortie en août 2011 pour la 9e année (élèves de 13 ans) et sera suivie par celle de 10e et 11e ces deux prochaines années.

VIII. PARADOXES ET QUESTIONS ÉPISTÉMOLOGIQUES

L'élève n'assimile pas tout à tout moment. La connaissance ne vient pas à l'élève par imprégnation mais se construit par le biais d'essais-erreur. L'erreur est d'ailleurs révélatrice du niveau de construction d'une connaissance.

La théorie didactique des mathématiques n'a donc pas renoncé au constructivisme. Elle l'a enrichi en portant l'attention non seulement sur le « sujet construisant » mais aussi sur les conditions spécifiques dans lesquelles les apprentissages peuvent se produire.

Actuellement, les concepteurs de manuels, même s'ils ont cet arrière-fond de connaissance du développement, n'ont plus accès au langage qui le définit, le terme même de constructivisme est devenu tabou.

La transposition didactique, ce passage du savoir « savant » au savoir enseigné tend à devenir passage du savoir « enseignant » au savoir enseigné. Ou, de l'epistèmè avec ses paradoxes à la doxa.

Actuellement, il y a conflit entre les positions épistémiques et celles du pouvoir enseignant qui tend à imposer ses propres représentations. Parmi celles-ci : - l'élève faible doit abondamment répéter des savoir-faire (algorithmes) et n'a pas accès à des situations où il s'agit de faire acte d'invention et de recherche ; - l'élève faible « ne sait pas compter » alors que les enquêtes telle que PISA révèlent que face à un problème, ces élèves ne savent pas organiser les données pour y trouver des informations et chercher des solutions ; - le constructivisme est jugé incompatible avec l'enseignement. Il est considéré comme une forme d'enseignement et non comme une théorie de l'apprentissage quel que soit le mode d'enseignement.

IX. LES TRANSITIONS COMME PROGRESSION OU RUPTURES

Les transitions sont souvent ruptures et ce à plusieurs niveaux : psychologique, sociologique, organisationnel… Le passage du 1er au 2e cycle (8 ans) ne constitue qu'une faible rupture pour les élèves, notamment du fait que les enseignants sont formés à enseigner pour toutes les années de ces deux cycles. Le passage du 2e au 3^e cycle après huit années d'école (12-13 ans) est souvent plus délicat car les élèves changent de système : l'enseignement généraliste est remplacé par des enseignements spécifiques donnés par des spécialistes des disciplines concernées. Néanmoins, en mathématiques, la transition la plus complexe pour l'élève est d'ordre cognitif à cause du changement de référentiel scientifique. Elle intervient à l'intérieur du 2^e cycle (vers 10-11 ans). Lors d'une seule année scolaire apparaissent dans l'univers des savoirs de l'élève les ensembles numériques autres que IN (nombres négatifs, décimaux) , l'approche des fonctions, la géométrie … C'est pourquoi le plan d'études prévoit des balises, et certains cantons une évaluation externe.

En revanche, lors du passage du 2^e au 3^e cycle, l'organisation scolaire change, mais sur le plan mathématique, la transition creuse plutôt l'écart dans la pratique de l'évaluation. Une récente étude compare des épreuves de fin de 2^e cycle et de début de 3^e cycle: en une seule année, l'évaluation certificative devient beaucoup plus exigeante (niveau de compétence, quantité de questions, temps imparti). L'élève est-il capable d'assumer un tel changement ? (Exemple pris dans le canton de Genève, canton romand où l'évaluation certificative externe est la plus fréquente).

Partout, l'enseignement connaît de profondes ruptures entre le 2^e et le 3^e cycle. Il ne s'agit pas de les éviter. D'ailleurs la plupart des élèves sont psychologiquement mûrs pour cette mutation, malgré la réticence de beaucoup de leurs parents qui craignent cette transition.

Le problème c'est que ces changements interviennent juste au moment de l'orientation, ce qui rend non aisée la tâche des éducateurs. Si un grand nombre d'élèves évoluent harmonieusement, reste que beaucoup ne surmontent pas les heurts de ces transitions.

Et comment surmonter les paradoxes ? L'enseignement des mathématiques visait les connaissances utiles, il envisage maintenant plutôt des compétences voire des systèmes de compétences. Désormais, suivant les orientations internationales (PISA par exemple), cet enseignement doit former des citoyens aptes à résoudre des problèmes nouveaux. Or en Suisse romande, l'aptitude à résoudre des situations inédites est considérée comme une compétence de haut niveau, attendue seulement des élèves les plus doués !

Gérer les paradoxes pour penser l'enseignement des mathématiques !

REFERENCES

Guignard N. (1988) *Si l'erreur m'était contée… Essai critique des évaluations et étude de quelques rapports entre apprentissage, recherche et évaluation*. Genève : SRP.

Guignard N., Hirsig F. (1997) Nombre et algorithme dans l'histoire de l'élève. La mémoire des nombres. *Actes du Xe colloque inter-IREM d'épistémologie et d'histoire* (pp. 129-133). Université de Caen. Cherburg : mai 1994.

Nidegger C., Antonietti J.-P., Guignard N. (2005) *PISA 2003 : Compétences des jeunes romands. Résultats de la seconde enquête PISA auprès des élèves de 9e année*. Neuchâtel : IRDP.

Pochon L. O., Vermot B. (2010) *Résultats de l'enquête auprès des enseignants de mathématiques. Premières tendances. Math789-eval*. Neuchâtel : IRDP.

Soussi A., Ducrey F., Ferrez E., Guignard N., Nidegger C. (2005) *Evalepcopo : principes et modalités d'évaluation des apprentissages à l'école primaire, au Cycle d'orientation et dans l'enseignement postobligatoire, analyse et documents*. Genève : SRED.

Soussi A., Guillet E., Guignard N., Nidegger C. (2009) *L'évaluation des acquis à l'école primaire genevoise.* Genève : SRED.

COMPARAISON DE L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES À TRAVERS LES PAYS FRANCOPHONES : RÉSULTATS, SENS ET USAGES

Compte-rendu du projet spécial n°3 – EMF2012

Philippe R. RICHARD[*] – Catherine HOUDEMENT[**] – Isabelle DEMONTY[***]

I. INTRODUCTION

De par sa nature « spéciale », le projet *Comparaison de l'enseignement des mathématiques à travers les pays francophones : résultats, sens et usages* se destinait à offrir un thème plus ouvert que dans un groupe de travail, en lien avec des questions vives qui n'ont pas encore forcément donné lieu à beaucoup de travaux de recherche. Dès sa conception, le projet visait à poursuivre l'esprit d'un projet spécial de l'EMF 2009 intitulé *Évaluations internationales : impacts politiques, curriculaires et place des pays francophones*. Si nous n'avions pas l'intention d'insister sur les grandes évaluations internationales, c'est parce qu'au lieu de regarder d'abord la performance d'élèves et leurs conséquences sur l'institution scolaire, nous voulions maintenant porter le regard inverse. C'est-à-dire aider à comprendre comment les contrats sociaux des pays francophones, dans ce qu'ils ont de spécifique à l'enseignement des mathématiques, créent les opportunités d'apprentissage pour l'élève.

Afin d'encourager d'emblée les rapprochements sur une base commune, nous avons choisi d'orienter les contributions selon les axes suivants :

1. Description générale du système scolaire.
2. Orientation des programmes de formation ou d'études.
3. Développement des mathématiques à travers les programmes.
4. Exemples de traitement d'un thème d'enseignement (proportionnalité, équations quadratiques, théorème de Pythagore, problèmes de modélisation, problèmes de preuve, etc.), aux niveaux du primaire, du secondaire inférieur ou du secondaire, à travers quatre regards : programmes, ressources pour l'enseignant, pratiques effectives, considérations sur l'histoire ou l'héritage de la culture mathématique.
5. Quelques considérations connexes comme les caractéristiques régionales, les stratégies d'implémentation, d'adaptation scolaire, de promotion de l'intérêt pour les mathématiques, d'équité et de formation des enseignants, les ressources d'enseignement disponibles, les problèmes systémiques ou les difficultés connues, les données internationales et des exemples d'activités inspirantes.

Nous avons souligné l'existence d'études comparatives et celle d'outils théoriques utiles à la comparaison (Adler et al. 2007, Castela et al. 2007, Godino 2008 et Artigue et Winsløw 2010), mais l'essentiel consistait à recueillir des observables suffisamment riches de différents pays pour dresser, dans un deuxième temps, un portrait contrasté de l'enseignement des mathématiques à travers les pays francophones. Nous avons encouragé l'accessibilité du style, le traitement sur chaque axe devait être suffisamment étayé pour favoriser la comparaison à partir d'informations pertinentes, fondées et justes.

[*] Université de Montréal et Universitat Autònoma de Barcelona – philippe.r.richard@umontreal.ca
[**] LDAR, Universités Paris Diderot et de Rouen, IUFM – catherine.houdement@univ-rouen.fr
[***] Université de Liège – isabelle.demonty@ulg.ac.be

© Richard P. R., Houdement C., Demonty I. (2012) Comparaison de l'enseignement des mathématiques à travers les pays francophones : résultats, sens et usages – *Compte-rendu du projet spécial n°3*. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (SPE3, pp. 1746–1751). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

Les contributions du groupe spécial sont constituées de monographies régionales (Québec, Nouveau-Brunswick et Canada anglais), nationales (Belgique, France et Mali) et d'une comparaison bi-régionale (le Leicestershire en Angleterre et le canton de Neuchâtel en Suisse). Après l'annonce du colloque, nous avons sollicité la contribution d'autres pays francophones, mais les mouvements sociaux qui se sont produits dans certaines régions du monde ont vraisemblablement limité le spectre participatif. Nous attendions plutôt des contributions « de l'intérieur » d'un pays (ou d'une région), pour rendre compte des implicites culturels, mais aussi mieux questionner, par l'effet de groupe, les choix non retenus ou repoussés dans un autre pays. Nous avons aussi vu la richesse de contributions « de l'extérieur », notamment sur les choix descriptifs de l'auteur.

Le style employé d'une contribution à l'autre témoigne de la pluralité des comparaisons envisagées. Les monographies canadiennes ont rendu compte de l'enseignement des mathématiques en français selon une logique de responsabilité constitutionnelle ; les contributions française et belge ont insisté sur les conditions de la résolution de problème au cours d'une démarche collaborative qui tendait vers l'harmonisation de leur contributions respectives ; la monographie malienne montrait l'évolution des programmes au regard des fonctions éducatives et sociales des mathématiques ; et, la comparaison anglo-suisse contrastait les approches éducatives dans deux régions qui n'ont pas d'entente institutionnelle particulière en matière d'enseignement des mathématiques. Comme nous avions déjà choisi de programmer les présentations orales suivant ce groupement stylistique, nous le conservons ici pour orienter la lecture des contributions du projet spécial n°3.

II. CANADA

Modèle par excellence d'un système scolaire décentralisé, la compréhension de l'enseignement des mathématiques au Canada s'est fondée sur trois monographies. Dans un pays aussi peuplé que la moitié de la France, les systèmes d'enseignement canadien semblent aussi variés que son climat d'un océan à l'autre. Alors que c'est la majorité linguistique qui énonce, dans chaque province ou territoire, le programme d'études ou de formation source – au Québec, le programme anglais est une traduction du programme français et au Canada anglais, c'est le contraire –, le Nouveau-Brunswick offre deux programmes indépendants basés sur l'appartenance à l'un des groupes linguistiques officiels et le Canada anglais autorise entre autres des cours d'immersion où le français devient la langue véhiculaire pour « faire des mathématiques ».

Mises à part plusieurs différences fonctionnelles sur la façon dont les contenus disciplinaires interviennent durant la scolarité obligatoire, les idées de développement de compétences essentielles et d'acquisition de connaissances mathématiques apparaissent partout au Canada. À l'instar d'une étude du Conseil des ministres de l'Éducation du Canada (PPCE 2011), les domaines mathématiques communs peuvent se catégoriser en termes de nombres et opérations, de géométrie et mesure, de régularités et relations ainsi que de gestion de données et probabilités. Toutefois, si la notion de compétence mathématique se montre au niveau le plus général de l'organisation curriculaire au Québec (résolution de problèmes, raisonnement et communication en mathématiques, Richard et al.), on remarque qu'elles se posent au niveau des attentes au Nouveau-Brunswick (profil de compétence, Freiman et al.) et qu'elles s'attachent davantage à l'évaluation au Canada anglais (compétences à évaluer, Jarvis et al.).

Des présentations canadiennes, il ressort que l'enseignement des mathématiques se tourne manifestement vers les communautés linguistiques qui encadrent son enseignement. Au-delà de la structuration des systèmes éducatifs, cela veut dire que l'élaboration de manuels scolaires, l'usage de ressources didactiques, la mise en place et l'évaluation des activités d'apprentissage, les dispositifs de formation des enseignants et la mission institutionnelle des écoles doivent s'enraciner dans la réalité sociale de l'élève. Dans sa bienveillance, l'enseignement des mathématiques serait la marque d'un héritage culturel et celui-ci doit aider l'élève à comprendre son environnement et à s'y épanouir.

III. MALI

Cette contribution s'intéresse à la cohérence entre l'écriture d'un programme de mathématiques et les enjeux d'une éducation des jeunes Maliens. Elle soulève des questions relatives aux contraintes politiques et historiques face aux nécessaires ouvertures culturelles, sociales et éducatives dans des pays dont la langue d'enseignement a été longtemps limitée au français. Elle questionne la création d'une nouvelle culture scolaire à l'occasion de l'étude de la proportionnalité dans l'enseignement secondaire fondamental.

Le programme officiel de mathématiques de 1990 ne laisse pas d'espace pour des situations de la vie courante visant à promouvoir les finalités sociales de l'éducation mathématique, contrairement aux programmes des autres disciplines qui préconisent une adaptation aux réalités locales. Cela est confirmé par l'étude du thème de la proportionnalité qui ne vise qu'à initier l'élève au formalisme mathématique, le coupant de tout contexte « concret ».

Le curriculum rénové de 2004, notamment dans ses intentions concernant les mathématiques et leur évaluation, porte les prémices d'un changement, par exemple par l'introduction de démarches de modélisation en 7^{e} année, à l'instar d'une certaine dynamique européenne.

Mais la question de la déterination des concepts mathématiques accessibles à des élèves de 15 ans et, plus généralement, d'une culture scolaire adaptée aux enjeux du pays reste un énorme chantier.

IV. BELGIQUE ET FRANCE

Bien que centrées sur la problématique générale liée à la résolution de problèmes, les communications belge et française l'ont exploitée de manières assez contrastées.

La contribution française a choisi ce thème pour réfléchir à la problématique plus large de cohérence :

- cohérence des enseignements à l'intérieur de l'école élémentaire d'une part et entre l'école élémentaire et le collège d'autre part ;
- cohérence entre les programmes d'enseignement et les manuels scolaires.

De nombreuses incohérences sont pointées : l'évolution des programmes montre des points de ruptures entre des programmes d'une même année de référence (soit 2002, soit 2008) destinés à des élèves d'âges différents (école élémentaire versus collège) ou pour un même programme d'étude (soit école élémentaire, soit collège) mais envisagé pour deux années de référence (2002 versus 2008).

Ces éléments de ruptures n'apparaissent que dans la comparaison des programmes et les raisons de ces changements ne sont ni justifiées ni même clairement mentionnées. En revanche, on retrouve ces diverses ruptures dans les manuels mis à la disposition des enseignants.

Se pose alors la question de l'impact de ces inconstances sur les enseignements proposés aux élèves.

La contribution belge s'intéresse quant à elle au rôle des problèmes dans la formation mathématique des élèves.

Deux fonctions des problèmes sont envisagées :

- l'une consiste à concevoir la résolution de problèmes au service des apprentissages de contenus. Ces derniers sont donc au cœur de cette finalité, que ce soit pour découvrir de nouvelles connaissances ou pour réinvestir des connaissances dans un nouveau contexte ;
- l'autre envisage les contenus comme étant au service de la résolution de problèmes.

Une analyse de référentiels en Communauté française et une illustration réalisée à partir de deux manuels contrastés amène à penser que les problèmes sont essentiellement envisagés dans la première perspective. Les enseignants sont en conséquence fortement démunis pour aider les élèves à mieux résoudre les problèmes, finalité particulièrement cruciale vu l'importance croissante attribuée à l'approche par compétences dans les programmes d'enseignement francophones.

V. SUISSE ET ROYAUME-UNI

L'auteure de cette présentation s'est placée dans une double position : posture comparative et observatrice étrangère de deux régions de langues différentes : anglais dans le Leicestershire en Angleterre et français dans le canton de Neuchâtel en Suisse. Elle a choisi pour sa contribution des critères relevant de l'organisation des enseignements, à réponses différentes dans chaque région, dont elle questionne l'impact sur la manière d'enseigner les mathématiques et de rédiger les programmes.

L'Angleterre se caractérise par un curriculum national qui définit les objectifs à atteindre pour l'école primaire et secondaire, et par une autonomie de décision à l'échelon des circonscriptions administratives (comtés) responsables du suivi de la performance des établissements, aussi autonomes, mais contrôlés par un organisme indépendant quant aux performances et nécessités de formation des enseignants. Ce pilotage par l'évaluation n'oublie pas les élèves : l'évaluation et l'attitude des enseignants sont plus orientés vers la valorisation des qualités d'un élève que le repérage de ses déficits. Si le choix des disciplines d'évaluation est libre pour l'examen de fin de secondaire, l'entrée à l'université reste sélective à travers les disciplines valorisées pour l'accès à tel ou tel parcours.

Le canton de Neuchâtel se caractérise par une orientation forte au degré 8 (13-14 ans) de la scolarité selon trois sections (pré-professionnelle, axée sur l'étude des langues ou préparant des études longues) après trois avis : conseil d'enseignants, regard sur les résultats de l'élève et tests QCM sur trois disciplines, mathématiques, français et allemand. L'entrée à l'université est en général non sélective.

Ces entrées institutionnelles différentes ont été ensuite mises en relation avec la prise en compte du Programme international de l'OCDE pour le suivi des acquis des élèves (PISA), les mathématiques dans les programmes et dans les classes.

VI. CONCLUSION

Les réflexions menées dans le cadre de ce projet spécial ont été fortement influencées par les présentations envisagées. Au terme de chacune d'entre elles, des questions ont été soumises à une discussion d'ensemble où les représentants d'une vingtaine de pays ont eu l'occasion d'exprimer leur avis sur chacune des thématiques en lien avec le contexte et les éléments culturels liés à leur pays ou leur région d'origine.

Les présentations canadiennes ont permis de mettre en évidence l'impact de la diversité des communautés linguistiques sur les programmes et les manuels utilisés par les enseignants. Une comparaison des résultats à des tests standardisés d'élèves issues des diverses provinces canadiennes a permis d'entamer un débat sur les conséquences potentielles de ces aspects linguistiques sur les résultats d'apprentissages. Ces présentations ont aussi relancé l'ambigüité d'une entrée unique par les compétences, encore annoncées a priori comme un progrès dans certains pays, re-transformées en « connaissances et compétences » dans d'autres, reconnues dans tous les cas comme passant sous silence les contenus à enseigner et laissant les enseignants démunis.

En prolongement de l'intervention du Mali, la question de la formation des enseignants suite aux diverses réformes imposées par les décideurs politiques s'est avérée particulièrement cruciale : il semble que cet aspect soit très peu envisagé dans d'autres pays également.

Les réflexions plus directement centrées sur la résolution de problèmes ont quant à elles permis d'entamer un débat sur la résolution de problèmes dans les différents pays représentés dans le groupe ainsi que sur l'importance accordée à l'approche par compétences dans les pays francophones. Au-delà de cette thématique plus spécifiquement liée à la résolution de problèmes, la question de l'incohérence et du manque d'explicitation des divers changements d'optiques dans les programmes d'enseignement a permis de prolonger les réflexions déjà entamées sur la question de la formation des enseignants.

Enfin, proposée en clôture du groupe spécial, la comparaison bi-régionale (le Leicestershire en Angleterre et le canton de Neuchâtel en Suisse) a montré l'intérêt d'une confrontation de deux systèmes éducatifs pour aider à mieux comprendre les spécificités de chacun d'entre eux.

Si les descriptions institutionnelles systémiques permettent d'ouvrir le champ des possibles pour un curriculum à construire ou à redéfinir, la mise en relation avec la culture « locale » à un échelon de détermination supérieur à celui des mathématiques semble bien utile pour comprendre les raisons d'être des choix existants, à défaut de prévoir les possibilités de transfert. Dans la logique évolutive du groupe spécial que nous citons dès l'introduction, puisque les opportunités d'apprentissage pour l'élève semblent indissociables des cultures locales, il faudrait maintenant envisager l'enseignement des mathématiques sous l'angle unité des interactions entre le contrat social et l'institution scolaire.

REFERENCES PRINCIPALES

Adler J., Kazima M., Mwakapenda W., Nyabanyaba T., Xolo S. (Eds.) (2007) *Mathematics Teacher Education: Trends across twelve African countries*. Johannesburg : Marang Centre for Mathematics and Science Education.

Artigue M., Winsløw C. (2010) International comparative studies on mathematics education : a viewpoint from the anthropological theory of didactics. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 30(1), 47-82.

Castela C., Consigliere L., Guzmán I., Houdement C., Kuzniak A., Rauscher J.-C. (2006). Paradigmes géométriques et géométrie enseignée au Chili et en ranc e. ne étude comparative de l'enseignement de la géométrie dans les s st èmes scolaires chilien et fran ai s. *Cahier de Didirem* , IREM de Paris 7.

Godino,J. D., Batanero C., Font V. (2008). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática*. http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_eos.htm

PPCE (2011) PPCÉ de 2010 - *Rapport de l'évaluation pancanadienne en mathématiques, en sciences et en lecture.* Conseil des ministres de l'Éducation du Canada.

CONTRIBUTIONS AU SPE3

DEMONTY I., FAGNANT A. – Les différentes fonctions de la résolution de problèmes sont-elles présentes dans l'enseignement primaire en communauté française de Belgique ?

FREIMAN V., RICHARD P. R., JARVIS D. H. – Enseignement de mathématiques au Nouveau-Brunswick (secteur francophone).

GALISSON M.-P. – Évolution des programmes de l'enseignement fondamental au Mali : fonctions éducatives et sociales des mathématiques.

HOUDEMENT C. – La résolution de problèmes en France (6 à 12 ans).

JARVIS D. H., BROCK E., FREIMAN V., RICHARD P. R. – L'enseignement des mathématiques en français au canada anglais : cas de l'Ontario et aperçu des autres provinces et territoires.

RICHARD P. R., FREIMAN V., JARVIS D. H. – L'enseignement des mathématiques au Québec.

ROUSSET-BERT S. – Un regard (extérieur) sur deux systèmes éducatifs : le Leicestershire en Angleterre et le canton de Neuchâtel en Suisse.

LES DIFFERENTES FONCTIONS DE LA RESOLUTION DE PROBLEMES SONT-ELLES PRESENTES DANS L'ENSEIGNEMENT PRIMAIRE EN COMMUNAUTE FRANÇAISE DE BELGIQUE ?

Isabelle DEMONTY* – Annick FAGNANT*

Résumé – Comment la résolution de problèmes est-elle envisagée dans l'enseignement primaire en Communauté française de Belgique ? Quelles fonctions lui sont attribuées ? L'objet de cette contribution est de proposer un cadrage et quelques pistes de réflexion en vue de lancer une discussion au sein du groupe. Deux aspects sont envisagés : d'une part les référentiels de compétences en mathématiques qui constituent le cadre légal fixant les compétences attendues à 8, 12 et 14 ans et d'autre part une illustration au travers de deux manuels de mathématiques destinés aux élèves de sixième année de l'enseignement primaire (niveau 6).

Mots-clés : Enseignement primaire, résolution de problèmes, problèmes pour chercher, problèmes pour apprendre, fonctions des problèmes

Abstract – How does mathematics teaching in the French Community of Belgium's primary schools prepare pupils to solve problems? Which functions are attributed to this topic? This contribution aims to propose a framework in order to compare the situation in the French community of Belgium with the characteristics of the teaching of problems solving in others countries. Our study is focused on two main aspects: the curriculum that indicates the orientations and the competencies that have to be reached by pupils by age 8, 12 and 14 years, and the analysis of the types of problems found in two specific classroom textbooks that are commonly used by Belgian teachers to support their mathematics teaching in Grade 6 (i.e., the final year of primary school).

Keywords: Primary school, problem solving, problem to learn, problem to search, functions of problems

I. INTRODUCTION

La résolution de problèmes est au cœur des mathématiques, de leur enseignement et de leur apprentissage : « Faire des mathématiques, c'est résoudre des problèmes » ; « Apprendre à résoudre des problèmes, c'est essentiel en mathématique » ; « C'est par la résolution de problèmes que l'élève apprend les mathématiques » ; … Mais de quoi parle-t-on exactement ? « Situations-problèmes », « problèmes », « problèmes de recherche », « problèmes d'application », « problèmes d'intégration »… Les terminologies sont nombreuses, tant dans la littérature de recherche que dans les documents officiels pour faire mention de l'enseignement / apprentissage « par » (ou « de ») la résolution de problèmes et pour distinguer les types de problèmes qui peuvent être employés à diverses fins pédagogiques (Fagnant et Vlassis 2010).

Dans l'approche par compétences, la notion de situation est un élément clé (Jonnaert 2002). A l'heure actuelle, la plupart des auteurs qui se sont penchés sur cette question estiment que les situations sont à la fois le point de départ des apprentissages et le critère qui permettra de déterminer la maîtrise des compétences. Dans une perspective socioconstructiviste, souvent associée à l'approche par compétences, on reconnait que les connaissances ne peuvent pas être transmises par l'enseignant mais qu'elles doivent, au contraire, être construites par l'apprenant au travers des expériences qu'il vit dans son environnement. Enseigner selon une approche par compétences pourrait dès lors impliquer de partir de situations-problèmes (ou de projets) qui nécessitent la mobilisation conjointe de différentes ressources (Rey, Carette, Defrance et Kahn 2006).

* Université de liège – Belgique – isabelle.demonty@ulg.ac.be, afagnant@ulg.ac.be

© Demonty I., Fagnant A. (2012) Les différentes fonctions de la resolution de problèmes sont-elles présentes dans l'enseignement primaire en communauté française de Belgique ? In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21^e siècle – Actes du colloque EMF2012* (SPE3, pp. 1752–1760). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

Le concept de situations-problèmes est central dans la littérature francophone ; il trouve son origine dans les travaux des didacticiens français des mathématiques et s'inscrit essentiellement dans une perspective de développement des connaissances et de compétences mathématiques. Comme mentionné précédemment, les situations-problèmes sont généralement distinguées des problèmes d'application : l'objectif des situations-problèmes est d'introduire de nouvelles connaissances alors que le but des problèmes d'application est d'utiliser et d'entraîner les nouvelles connaissances (Pallascio 2005).

Dans une approche par compétences, les situations-problèmes peuvent constituer le point de départ des apprentissages. Mais la capacité à résoudre des problèmes est aussi en soi une finalité de l'approche par compétences. En effet, dans un décret publié en 1997 définissant les missions prioritaires de l'enseignement fondamental en Communauté française de Belgique, la compétence est définie comme « l'aptitude à mettre en œuvre un ensemble organisé de savoirs, de savoir-faire et d'attitudes permettant d'accomplir un certain nombre de tâches » (p. 2). Dans cette définition, il y a deux éléments importants : le premier est le fait de pouvoir mobiliser, coordonner, et intégrer plusieurs ressources (connaissances, habiletés, attitudes) ; et le second, insiste sur le caractère situé de l'action (tâches s'appariant souvent à des problématiques complexes).

Pour que les élèves développent de réelles compétences, il n'est pas suffisant de leur enseigner les différentes ressources de manière isolée, de les inciter à les exercer et de les inviter occasionnellement à les appliquer dans des problèmes qui interviennent directement dans le prolongement des matières enseignées (les problèmes d'application, au sens classique du terme). Intégrer et organiser les différentes ressources doivent s'apprendre, tout comme il est également essentiel d'apprendre aux élèves à développer des stratégies efficaces de résolution de problèmes.

Dans cette perspective, on peut dès lors distinguer deux grandes finalités généralement attribuées à la résolution de problèmes : (i) développer l'apprentissage des mathématiques par la résolution de problèmes, et (ii) développer l'apprentissage de démarches et de processus de résolution de problèmes. L'apprentissage des contenus mathématiques est au cœur de la première finalité : les problèmes servent de point de départ pour construire de nouvelles connaissances et ces connaissances sont réinvesties dans ce que l'on appelle des problèmes d'application (Pallascio 2005). L'apprentissage de procédures efficaces de résolution de problèmes est quant à lui au centre de la deuxième finalité : il s'agit alors d'un apprentissage de démarches heuristiques et métacognitives de résolution de problèmes (Charnay 1992 ; Verschaffel et De Corte 2005).

A l'origine des ces deux grandes finalités, on trouve des courants théoriques différents (voir Fagnant et Vlassis 2010, pour une discussion plus détaillée sur cette question) : les travaux d'inspiration socioconstructiviste portent essentiellement sur la résolution de problèmes en tant que modalité pédagogique (les situations-problèmes sont une méthode d'enseignement / apprentissage qui permet de construire les concepts et les procédures en leur donnant du sens) ; alors les travaux liés aux approches cognitives se sont essentiellement intéressés au processus même de résolution de problèmes, ainsi qu'à l'enseignement et à l'apprentissage de stratégies efficaces de résolution. L'influence des deux types de courants sur les programmes d'enseignement de plusieurs pays, notamment en France, est pointée par Sarrazy (2008). Il distingue, d'une part, un modèle activiste, influencé par le constructivisme piagétien et les travaux en didactique des mathématiques et pour lequel le problème devient le moyen privilégié de donner du sens aux connaissances enseignées et, d'autre part, un modèle métacognitif, influencé par la psychologie cognitive et qui met l'accent sur le processus même de résolution de problèmes et sur l'apprentissage de stratégies métacognitives. Notons encore que l'influence de la psychologie cognitive mettant l'accent sur l'apprentissage de processus de résolution de problèmes a été vivement critiquée par certains auteurs, bien qu'ils reconnaissent qu'elle a eu relativement peu d'impacts dans les classes. Notamment, Mercier (2008) et Sarrazy (2008) semblent craindre une « démathématisation » de l'enseignement au sens où l'activité de résolution de problèmes deviendrait une activité pour elle-même (résoudre pour résoudre ou apprendre à résoudre).

Comme on l'a vu précédemment, les problèmes peuvent servir à rencontrer différents objectifs d'apprentissage. Nous nous appuyons sur une typologie proposée par Charnay (1992) pour distinguer les différents types de problèmes que nous étudierons par la suite :

- les problèmes qui ont pour objectif la construction de nouvelles connaissances (les situations-problèmes proposées en début d'apprentissage) ;
- les problèmes qui ont pour objectif de réinvestir les connaissances acquises et parmi lesquels nous distinguerons ;
- les problèmes d'application directe ou de réinvestissement (problèmes impliquant de mobiliser et/ou d'appliquer des connaissances et procédures apprises antérieurement) ;
- les problèmes d'intégration (problèmes nécessitant de mobiliser et d'intégrer diverses connaissances et procédures) ;
- les problèmes destinés à placer les élèves en situation de recherche et à développer des connaissances plus méthodologiques (problèmes ouverts ou problèmes visant à développer la modélisation mathématique).

Pour Charnay (1992) ce sont les « problèmes pour apprendre à chercher » ou « problèmes ouverts » qui constituent cette dernière catégorie. Le terme « problème ouvert » a été introduit par une équipe de l'Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de Lyon (IREM) pour évoquer une catégorie de problèmes destinés à placer les élèves dans une situation propre au développement d'une démarche scientifique. Selon cette équipe, un problème ouvert est un problème qui possède les caractéristiques suivantes : « (1) l'énoncé est court ; (2) l'énoncé n'induit ni la méthode, ni la solution (pas de questions intermédiaires ni de questions du type « montrer que »). En aucun cas, cette solution ne doit se réduire à l'utilisation ou l'application immédiate des derniers résultats présentés en classe ; (3) le problème se trouve dans un domaine conceptuel avec lequel les élèves ont assez de familiarité. Ainsi, peuvent-ils prendre facilement « possession » de la situation et s'engager dans des essais, des conjectures, des projets de résolution, des contre-exemples » (Charnay 1992, p. 1).

Nous intégrerons également dans cette catégorie d'autres types de problèmes dont la structure et les contenus mathématiques impliqués peuvent s'apparenter à des problèmes d'application ou d'intégration, mais qui présentent une complexité nécessitant la mise en œuvre d'une réelle démarche de « modélisation mathématique » (Verschaffel, Greer et De Corte 2000) et qui seront utilisés dans le but de travailler explicitement le développement d'heuristiques propres aux différentes étapes de la démarche de résolution de problèmes (Demonty, Fagnant et Lejong 2004 ; Fagnant et Demonty 2005).

La dernière catégorie de problèmes (dans laquelle nous plaçons donc les problèmes ouverts et les problèmes visant à développer la modélisation mathématique) se distingue alors particulièrement des autres types de problèmes dans la mesure où les objectifs visés se situent avant tout au niveau du processus même de résolution de problèmes alors que ce sont les contenus mathématiques qui sont centraux dans les autres types de problèmes.

Dans le cadre de cette contribution, nous nous interrogeons sur les finalités de la résolution de problèmes dans l'enseignement primaire en Communauté française de Belgique : comment la résolution de problèmes est-elle envisagée dans les référentiels officiels et comment est-elle « travaillée » dans les classes ? Quelle(s) est (sont) la(les) fonction(s) attribuée(s) à ce vaste contenu d'enseignement ? L'objet de cette contribution n'est nullement de proposer une étude exhaustive et rigoureuse de la question, mais plus modestement de poser un cadrage et quelques pistes de réflexion en vue de lancer une discussion au sein du groupe de travail. Après un bref regard sur les structures de l'enseignement en Communauté française de Belgique, nous proposons une analyse du document « Socles de compétences » qui définit l'ensemble des compétences à travailler avec les élèves aux différentes étapes de la scolarité jusqu'à 14 ans (niveau 8). Par la suite, nous illustrerons la réflexion en envisageant quelques extraits de manuels destinés à des élèves de dernière année de l'enseignement primaire (sixième année, niveau 6).

II. APERÇU SUR LE SYSTÈME SCOLAIRE EN COMMUNAUTÉ FRANÇAISE

En Communauté française, l'enseignement primaire fait partie d'un continuum pédagogique qui accueille les élèves de 3 à 14 ans. Ce continuum comporte l'enseignement maternel (de 3 à 6 ans), l'enseignement primaire (de 6 à 12 ans) et le premier degré de l'enseignement secondaire (de 12 à 14 ans). L'enseignement primaire est réparti en trois cycles (le cycle 5-8 ans, qui inclut la dernière année de l'enseignement maternel, le cycle 8-10 ans et le cycle 10-12 ans). Au terme de l'enseignement primaire, tous les élèves sont soumis à une évaluation externe qui permet d'obtenir un certificat d'étude de base (CEB).

Les élèves qui obtiennent ce certificat sont alors dirigés vers le premier degré commun (1C et 2C) et ceux qui échouent sont orientés dans un premier degré différencié (1D et 2D) où ils ont l'opportunité de présenter, au terme de chacune des années, l'examen externe en vue d'obtenir le CEB. En cas de réussite, ils sont alors orientés vers le premier degré commun. Au terme du premier degré, d'une durée maximale de 3 ans, les élèves sont orientés vers la section de transition qui les prépare à l'enseignement supérieur ou vers celle de qualification les préparant plus directement à un métier, tout en leur permettant l'accès à l'enseignement supérieur (moyennant parfois certaines conditions). Le schéma suivant présente une vision synthétique du système scolaire en Communauté française de Belgique.

***Figure 1** – Schéma du système scolaire en Communauté française de Belgique, (Source – Ministère de laCommunauté française (2010), Indicateurs de l'enseignement en Communauté française de Belgique, p. 4.).*

III. LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES DANS LES DOCUMENTS OFFICIELS DU PRIMAIRE

Les compétences mathématiques à travailler aux différentes étapes de l'enseignement primaire sont répertoriées dans le document « Socles de compétences ». Selon ce document, la résolution de problèmes est présentée comme la pierre angulaire de l'enseignement des mathématiques : « C'est par la résolution de problèmes que l'élève développe des aptitudes mathématiques, acquiert des connaissances profondes et se forge une personnalité confiante et active » (p. 23). Cette idée générale est concrétisée au travers de diverses compétences qui permettent de baliser un enseignement basé sur la résolution de problèmes :

- analyser et comprendre un message (se l'approprier avant d'entrer dans une démarche de résolution) ;
- résoudre, raisonner et argumenter (cerner les démarches et/ou les opérations à effectuer pour arriver à la solution en veillant à justifier toutes les étapes oralement et par écrit) ;
- appliquer et généraliser (s'approprier des matières, des méthodes, mais aussi construire des démarches nouvelles) ;
- structurer et synthétiser (organiser, oralement et par écrit, sa démarche de réflexion … réorganiser ses connaissances antérieures en y intégrant les acquis nouveaux) (Socles de compétences, pp. 24-25).

Le document « Socles de compétences » liste également une série de compétences spécifiques relatives aux quatre grands domaines de savoirs à travailler en primaire : « les nombres », « les solides et les figures », « les grandeurs » et « le traitement de données ». Parmi ces compétences spécifiques, on retrouve une série d'intitulés qui ont trait à la résolution de problèmes, et ceci essentiellement dans les contenus « nombres » et « grandeurs » :

- dans le domaine des nombres, « identifier et effectuer des opérations dans des situations variées » (p. 27) ;
- dans le domaine des grandeurs, « résoudre un problème de proportionnalité directe » (p. 31).

Ce bref aperçu montre que c'est principalement la résolution de problèmes au service de l'apprentissage de contenus mathématiques qui est mise en exergue dans le prescrit légal : les problèmes ont pour objectif la construction de connaissances mathématiques, l'application des connaissances acquises et l'intégration de celles-ci. Toutefois, parmi la liste des compétences à travailler en primaire, on retrouve aussi quelques intitulés qui visent à placer les élèves en situation de recherche (« vérifier la plausibilité d'un résultat », « distinguer ce dont on est sûr de ce qu'il faut justifier », « exposer et comparer ses arguments, ses méthodes ») et qui mettent davantage l'accent sur la démarche de résolution de problèmes que sur le contenu mathématique sous-jacent.

IV. ILLUSTRATION A TRAVERS L'ECLAIRAGE APPORTÉ PAR DEUX MANUELS SCOLAIRES

Au-delà des documents officiels, il nous semble également intéressant d'analyser quelques supports fréquemment utilisés par les enseignants du primaire afin de donner un éclairage sur les opportunités d'apprentissage qui sont offertes aux élèves.

Deux manuels contrastés sont envisagés : ils sont issus des deux maisons d'édition de manuels scolaires (De Boeck et Plantyn) les plus connues en Communauté française de

Belgique. Les descriptifs présentés dans les pages qui suivent ne visent pas à fournir des données quantitatives sur l'importance accordée aux diverses fonctions des problèmes dans chaque manuel. Ceci n'aurait pas grand intérêt puisque la majorité des enseignants ne suivent pas un manuel pas à pas mais construisent leur enseignement en se basant sur plusieurs ressources. Il s'agit plutôt de cerner la philosophie sous-jacente à chaque manuel et d'essayer de rendre compte d'exemples de ressources dont disposent les enseignants pour mettre en œuvre les prescrits légaux déclinés dans les « Socles de compétences ».

1. Le manuel « Basile et les maths » - 6e année du primaire

Dans ce manuel, les contenus sont organisés en 16 modules. Chaque module se répartit en une série de huit ou neuf fiches d'activités centrées chaque fois sur une thématique spécifique. Dans chaque module, les quatre domaines mathématiques définis dans les Socles de compétences sont envisagés : « nombres », « solides et figures », « grandeurs » et « traitement de donnée »». Il semble donc que la matière dévolue à la sixième primaire soit répartie assez équitablement en seize modules dans lesquels on travaille en parallèle les différentes thématiques. Chaque module se termine par un bilan reprenant quelques situations proches de celles travaillées dans le module, sans qu'il n'y ait une volonté systématique de couvrir l'entièreté des aspects travaillés dans le module.

Ce manuel est conçu pour que l'élève puisse travailler seul. Un document à l'attention des enseignants accompagne le manuel élève : on y trouve des exemples d'activités d'apprentissages inédites ouvrant la voie vers des progressions moins linéaires dans les apprentissages.

Chaque module démarre par une activité de résolution de problèmes destinée à travailler plus spécifiquement des connaissances méthodologiques propres à la résolution de problèmes (problèmes visant à développer la modélisation mathématique) : repérer des données utiles, analyser un schéma, interpréter un tableau, utiliser des procédures de vérification, faire preuve d'esprit critique. Dans ces situations, le problème est décomposé en tâches plus spécifiquement centrées sur ce qui est visé (liste d'éléments à cocher, textes lacunaires, …). Au sein de quelques modules, on rencontre également des problèmes d'application ou de réinvestissement (problèmes de vitesse, d'échelle, de durée, problème impliquant les pourcentages, prix d'achat et prix de vente, ...) qui démarrent en général par un énoncé accompagné d'une question, se prolongent par une résolution guidée (où l'élève est amené à compléter un schéma ou un texte, puis à effectuer des calculs) et se terminent par des exercices de fixation. Quelques situations centrées sur des contenus numériques sont illustrées par un contexte destiné à montrer l'utilisation de ce contenu dans la vie réelle, mais il ne s'agit pas réellement de problèmes, dans la mesure où il n'y a en général pas de questions. Par ailleurs, on ne trouve pas de problèmes « ouverts » au sens de la définition proposée par Charnay (1992).

Dans les bilans clôturant chaque module, on trouve des problèmes souvent accompagnés d'un support où de questions de guidage amenant l'élève à se concentrer sur une procédure mathématique particulière et non sur sa mobilisation en contexte. Aucune question n'est spécifiquement centrée sur l'activité introduisant le module.

Ce bref tour d'horizon nous conduit à penser que, si quelques compétences méthodologiques propres à la résolution de problèmes sont présentes dans ce manuel, l'accent est principalement mis sur la construction de nouvelles connaissances et l'application directe de procédures mathématiques. On ne trouve pas de problèmes d'intégration qui amènerait l'élève à mobiliser des compétences issues de plusieurs domaines.

2. Le manuel « Crack en maths » - 6e année du primaire

Ce manuel propose d'aborder les mathématiques par des situations-problèmes. Ces activités constituent l'essentiel du fichier d'apprentissage de l'enfant et du guide méthodologique de l'enseignant. Les auteurs du manuel précisent qu' »une situation-problème n'est pas un exercice : dans un exercice, on utilise quelque chose que l'on a appris, que l'on sait, que l'on applique, tandis que dans un problème, on est amené à chercher, à explorer et puis à découvrir de nouvelles choses. Il est donc normal de se tromper, de faire des erreurs » (Guide méthodologique, p. 12).

Le manuel est organisé en s'appuyant en partie sur les grands domaines de contenus présentés dans les socles de compétences : on trouve une partie « nombres », une partie « opérations », une partie « grandeurs » et une partie « espace ». On notera donc qu'aucun chapitre ne porte spécifiquement sur le « traitement de données ». Par ailleurs, le manuel se termine par deux chapitres proposant des problèmes d'intégration des quatre domaines précités.

Dans le guide méthodologique, trois grandes étapes sont proposées pour gérer les situations-problèmes. La première étape est l'étape de « préparation » qui comprend une « mise en situation » (où la situation doit être proposée aux élèves sans en dévoiler le contenu), une invitation à « faire des liens » (où les enfants sont interrogés sur leur vécu en lien avec la situation) ; une incitation à « formuler des questions » (où les élèves peuvent poser des questions en lien avec l'illustration qui accompagne la situation-problème) et un moment consacré à « expliquer les consignes » (où les élèves sont invités à reformuler les questions pour s'assurer de leur bonne compréhension de la tâche à réaliser). La deuxième étape est celle de « réalisation » : les élèves sont invités à travailler seuls ou en petites équipes, l'enseignant doit instaurer un climat de travail propre à la coopération et inviter les élèves à prendre le temps de se mettre d'accord sur les stratégies à développer. L'étape de réalisation se clôture alors par une mise en commun qui conduira à comparer les stratégies, les hypothèses, les solutions,… Enfin, la troisième étape est une étape de « formalisation » où les élèves sont invités à prendre le temps de s'arrêter et d'exprimer ce qu'ils ont appris, « tant au niveau des concepts mathématiques que des stratégies de résolution de problèmes ou même de l'attitude à adopter pour trouver des solutions » (Guide méthodologique, p. 16). C'est aussi à cette étape qu'il s'agira d'établir une synthèse sur les concepts découverts et sur les stratégies de résolution de problèmes développées. En vue d'aider cette étape, la collection présente un manuel de fixation qui présente les principaux contenus abordés par les situations problèmes.

Dans le fichier d'apprentissage, chaque situation-problème se complète par deux à trois problèmes ou exercices permettant de réinvestir directement les notions qui viennent d'être « découvertes » ou travaillées dans la situation-problème (problèmes d'application directe). Ce fichier d'apprentissage peut être complété par une « banque d'exercices reproductibles » qui comprend des exercices « matière » (permettant de s'entraîner et de systématiser les apprentissages réalisés), une « boîte à outils » (proposant des exercices visant à entraîner des techniques comme le calcul écrit ou à utiliser des instruments mathématiques comme le compas), des exercices portant davantage sur « la méthode de résolution des situations-problèmes » (apprendre à interpréter un problème, aider l'enfant à réfléchir sur le type de réponse attendue et développer la précision), les « situations-problèmes » du fichier d'apprentissage (mais cette fois présentées en noir et blanc et reproductibles pour des manipulations en classe) et enfin des « exercices d'évaluation » qui, d'après les auteurs du manuel, sont davantage orientés vers la maîtrise des matières.

Ce bref tour d'horizon montre la variété des « outils didactiques » proposés dans cette collection. Il apparaît que les problèmes sont essentiellement perçus comme moyens d'appréhender de nouveaux contenus (situations-problèmes). On trouve quelques problèmes d'application directe à la suite de chaque situation-problème, mais les problèmes invitant à réinvestir des notions vues précédemment (et donc nécessitant de choisir et de mobiliser les procédures mathématiques adéquates) sont relativement peu présents. On trouve quelques situations intitulées « problèmes d'intégration » en fin de manuel et l'on peut supposer qu'ils ne sont proposés qu'en fin d'année. En ce qui concerne l'acquisition de connaissances plus méthodologiques propres à l'apprentissage d'une démarche de résolution de problèmes, quelques exercices de la « banque » s'orientent spécifiquement dans cette voie (mais on peut s'interroger sur l'intérêt d'« exercices » - c'est le nom employé par les auteurs - pour réellement développer la modélisation mathématique) et l'on note également que les auteurs insistent sur l'importance d'accorder une attention spécifique aux stratégies de résolution lors de l'étape de formalisation et de synthèse. Enfin, on ne trouve pas, à proprement parler, de problèmes « ouverts » (Charnay 1992).

V. DISCUSSION ET PERSPECTIVES

Comme mentionné en Introduction, l'objet de cette contribution est de proposer un cadrage et quelques pistes de réflexion en vue de lancer une discussion au sein du groupe de travail. Pour alimenter le débat, ce document est structuré de façon relativement parallèle à celui de Catherine Houdemont qui propose une réflexion du même type pour la France.

En accord avec le référentiel de compétences, les deux manuels brièvement présentés proposent essentiellement une exploitation des problèmes dans le cadre de la découverte ou de l'exploitation/application de contenus mathématiques. Les problèmes « ouverts » sont peu présents, voire absents, des manuels à destination des élèves. Si l'on suit Charnay (1992), ces problèmes présentent pourtant de nombreux avantage : (1) ils permettent de proposer à l'élève une activité comparable à celle du mathématicien confronté à des problèmes qu'il n'a pas appris à résoudre ; (2) ils permettent de mettre l'accent sur des objectifs spécifiques d'ordre méthodologique dans la mesure où ils impliquent la mise en œuvre de démarches généralement peu travaillées par ailleurs (développer des démarches de type essais-erreurs, organiser sa démarche, vérifier sa propre solution, l'argumenter et la confronter avec celles des autres, etc.) ; (3) ils permettent de prendre en compte et même de valoriser les différences entre élèves (ces problèmes encouragent la mise en œuvre d'une diversité de stratégies de résolution, qui s'appuient sur des connaissances variées et qui valorisent souvent les démarches originales et moins scolairement conventionnelles) ; et (4) ils permettent à l'enseignant de faire connaître aux élèves quelles sont ses attentes en matière de résolution de problèmes (face à ces problèmes, il est inefficace d'essayer d'appliquer directement des connaissances déjà étudiées ; il s'agit de prendre des initiatives, de chercher, d'essayer, de faire preuve d'originalité, d'argumenter ses propres solutions, de chercher à les valider, etc.).

Les problèmes que nous avons qualifiés de « problèmes visant à développer la modélisation mathématique » pourraient rencontrer la plupart des caractéristiques précitées mais force est de constater que les problèmes que nous avons repérés dans les manuels comme spécifiquement ou partiellement dédiés à cette fonction soulèvent d'autres questionnements. Dans le manuel « Basile et les maths », les problèmes sont systématiquement décomposés en sous-problèmes laissant finalement peu d'autonomie à l'élève pour développer et organiser sa propre démarche de résolution. On peut supposer que l'intention des auteurs est que les élèves apprendront à développer une « modélisation » des problèmes en s'entraînant face à des tâches très orientées (ex. : parmi la liste de données proposées ci-dessous, coche celles qui serviront à résoudre le problème). Dans le manuel « Cracks en math », c'est par la résolution des situations-problèmes elles-mêmes (et par les synthèses méthodologiques qui en découlent) que l'on attend des élèves qu'ils apprennent à résoudre des problèmes (on apprend en faisant). On peut toutefois regretter que peu d'indications précises soient données aux enseignants quant à la façon de travailler cet aspect avec les élèves.

En Communauté française de Belgique, on attend des élèves qu'ils développent des compétences définies comme « l'aptitude à mettre en œuvre un ensemble organisé de savoirs, de savoir-faire et d'attitudes permettant d'accomplir un certain nombre de tâches » (Décret « Missions », p. 2). Les approches proposées dans les manuels permettent-elles réellement aux élèves de développer de telles compétences ?

REFERENCES

Charnay R. (1992) Problème ouvert, problème pour chercher. *Grand N* 51, 77-83.

Demonty I., Fagnant A., Lejong M. (2004*) Résoudre des problèmes : Pas de problème ! Guide méthodologique et documents reproductibles (8-10 ans).* Bruxelles : De Boeck.

Fagnant A., Demonty I. (2005) *Résoudre des problèmes : Pas de problème ! Guide méthodologique et documents reproductibles (10-12 ans).* Bruxelles : De Boeck.

Fagnant A., Vlassis J. (2010) Le rôle de la résolution de problèmes dans les apprentissages mathématiques : Questions et réflexions. *Education Canada* 50 (1), 50-52.

Jonnaert P. (2002) *Compétences et socio-constructivisme*. Bruxelles : De Boeck.

Jonnaert P., Balaban F. (2006) *Basile et les maths. 6a et 6b.* Bruxelles : Planthyn.

Mercier A. (2008) Une question curriculaire de l'enseignement élémentaire des mathématiques : La résolution de problèmes. *Actes du séminaire national L'enseignement des mathématiques à l'école primaire, Paris le 13 et 14 novembre 2007*. Ministère de l'Education, Eduscol, 93-116.

Pallascio R. (2005) Les situations-problèmes : Un concept central du nouveau programme de mathématique*. Vie Pédagogique* 136, 32-35.

Rey B., Carette V., Defrance A., Kahn S. (2006) *Les compétences à l'école – Apprentissage et évaluation*. Bruxelles : De Boeck.

Sarrazy B. (2008) De quelques effets de contrats et du rôle des situations didactiques dans la résolution de problèmes d'arithmétique au cycle 3. *Actes du séminaire national L'enseignement des mathématiques à l'école primaire, Paris le 13 et 14 novembre 2007*, Ministère de l'Education, Eduscol, 61-81.

Verschaffel L., De Corte E. (2005) La modélisation et la résolution des problèmes d'application : De l'analyse à l'utilisation efficace. In Crahay M., Verschaffel L., De Corte E., Grégoire J. (Eds.) (pp. 153-176) *Enseignement et apprentissage des mathématiques : Que disent les recherches psychopédagogiques ?* Bruxelles : De Boeck.

Verschaffel L., Greer B., De Corte E. (2000) *Making sense of word problems*. Lisse, The Netherlands: Swets & Zeitlinger.

Van Lint S. (2008) *Cracks en maths 6. Guide métholdologique et corrigé*. Bruxelles : De Boek.

ENSEIGNEMENT DE MATHÉMATIQUES AU NOUVEAU-BRUNSWICK (SECTEUR FRANCOPHONE)

Viktor FREIMAN* – Philippe RICHARD** – Daniel JARVIS***

Résumé – Pour aider à comprendre la diversité canadienne dans l'enseignement des mathématiques, notre contribution porte sur la réalité canadienne anglaise, complétant les études sur le Québec et le Nouveau-Brunswick. Cette découpure s'inscrit dans une logique linguistique et constitutionnelle: chaque région doit fournir à leurs minorités l'enseignement primaire et secondaire dans leur langue (l'anglais au Québec, le français partout ailleurs), mais l'éducation demeure la responsabilité exclusive des provinces et des territoires. Si officiellement, le Québec est unilingue et le Nouveau-Brunswick bilingue, le Canada anglais se compose de minorités francophones et il offre des cours d'immersion qui parachève la comparaison du panorama canadien.

Mots-clefs : enseignement des mathématiques, panorama canadien, spécificité du Nouveau-Brunswick (secteur francophone)

Abstract – To help understand the diversity of Canadian mathematics education, our contribution relates to the English Canadian reality, having completed separate papers on the Quebec and New Brunswick contexts. As a country that is officially "bilingual" (English/French), Canada has unique constitutional considerations within education: each region must provide minority populations with both primary and secondary level education in their own language (English in Quebec, French elsewhere), yet education remains the sole responsibility of the individual provinces and territories, as there is no national education body or standardized, national curriculum. Whereas the province of Quebec is officially considered "unilingual" (French), and New Brunswick considered "bilingual" (English/French), the rest of the Canadian provinces/territories are made up of English and French minorities (i.e., anglophones / francophones) with education offered in both languages depending on population, as well as "Immersion" language programs in some jurisdictions.

Keywords: mathematics instruction, Canadian context, specific French New Brunswick issues

I. DESCRIPTION GENERALE DU SYSTEME SCOLAIRE

1. Le Nouveau-Brunswick : un système éducatif en transition

Depuis les années 90, le système scolaire du Nouveau-Brunswick, unique au Canada par sa dualité linguistique, subit des changements importants. Les deux secteurs scolaires, francophone et anglophone, modifient leurs structures organisationnelles et pédagogiques selon leurs propres besoins, visions, modalités, régimes pédagogiques, programmes d'études en essayant d'améliorer les services éducatifs fournis à la population de langue respective, tout en gardant en vue les tendances nouvelles en éducation communes aux deux secteurs, qu'on retrouve d'ailleurs dans plusieurs autres systèmes éducatifs occidentaux.

Les grandes lignes de ces changements se trouvent par ailleurs dans le rapport de la Commission provinciale sur l'excellence en éducation, créée pour promouvoir l'excellence en éducation, en formation et en développement de ressources humaines au Nouveau-Brunswick (Landry et Downey 1991). Les recommandations de cette commission trouvent, peu à peu, leur chemin à travers le milieu scolaire complexe et diversifié. Aujourd'hui, vingt ans plus tard, on repère plusieurs changements qui ont été initiés par ce rapport. Ainsi, les nouveaux programmes standardisés ont été créés pour presque la totalité de matières scolaires et des outils d'évaluation provinciale sous forme de tests ont été implantés en langue (première et

* Université de Moncton – Nouveau-Brunswick, Canada – viktor.freiman@umoncton.ca
** Université de Montréal – Québec, Canada – philippe.r.richard@umontreal.ca
*** Nipissing University – Ontario, Canada – danj@nipissingu.ca

© Freiman V., Richard P., Jarvis, D. (2012) Enseignement de mathématiques au Nouveau-Brunswick (secteur francophone). In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (SPE3, pp. 1761–1780). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

seconde[1]), en mathématiques et en sciences. L'intégration des élèves à besoins spéciaux a pris la forme la plus radicale d'inclusion scolaire avec l'offre de services d'encadrement de plus en plus individualisés pour ces élèves. Le rapport sur l'inclusion scolaire commandé par le gouvernement a été publié en 2006 (Mackay 2006) en dressant le portrait de la situation actuelle (à date du rapport), en identifiant les enjeux et les défis et en proposant de pistes de solution.

Malgré des efforts énormes d'implantation de ces mesures, les problématiques soulevées dans le rapport demeurent encore peu résolues, comme le témoignent, entre autres, les résultats des élèves de la province aux épreuves internationales conduites par le Programme for International Student Assessment (PISA) (Organisation de Coopération et de Développement Économique OCDE, 2000, 2003, 2006) en les situant à la queue du peloton pour les trois matières évaluées, soit la lecture, les mathématiques et les sciences par rapport à leurs pairs provenant des autres provinces canadiennes (surtout le Québec et l'Alberta). De plus, une analyse profonde de données issues du PISA-2000 pour les élèves francophones en mathématiques démontre que ces derniers montraient de résultats inférieurs aux élèves du secteur anglophone de la province.

Ainsi, des documents politiques ciblant les problèmes et proposant des solutions se multiplient, comme le *Plan d'Apprentissage de Qualité* (Gouvernement du Nouveau-Brunswick - GNB 2002) ou le récent programme *Les enfants au premier plan* (GNB 2007). Dans ce dernier document, citons, entre autres, l'engagement du ministère de l'Éducation à agir avec urgence au niveau de la littératie, de la numératie et des sciences. Au-delà de changements souhaités par les politiciens qui s'adressent simultanément aux deux secteurs d'éducation, francophone et anglophone, le système francophone fait face à ses propres défis qui sont liés à la situation démographique difficile et au statut minoritaire de la langue française.

En parcourant le paysage éducatif néobrunswicois, il n'est pas difficile de constater que la dualité linguistique ne mène pas automatiquement à une équité linguistique, car les francophones vivant dans une situation minoritaire doivent faire face à de défis particuliers, surtout au niveau de la conservation et du développement de leur langue et de leur culture. Dans la section suivante, nous allons analyser ces problématiques plus en détails.

2. Milieu scolaire francophone minoritaire et ses défis

Alors qu'au Québec, la majorité de la population est influencée par des aspects de la vie principalement francophones (médias, échanges économiques, culture), les francophones hors Québec vivent sous une influence principalement anglophone. Leur statut minoritaire limite alors les ressources francophones qui leur sont disponibles sur le plan culturel Laplante (2001). Cette situation de minorité a des impacts aussi sur l'éducation des élèves, incluant la question de l'enseignement des mathématiques.

Comme on l'a mentionné ci haut, le système scolaire du Nouveau-Brunswick est divisé en deux secteurs : anglophone et francophone. Le secteur éducatif francophone regroupait en 2003-2004 cinq districts scolaires avec 102 écoles et 35 070 élèves répartis entre 13 niveaux scolaires (de la maternelle obligatoire à la 12 année) et deux types d'écoles : primaire (de la maternelle à la 8^{e} année) et secondaire (de la 9^{e} à la 12^{e} année). Ces statistiques changent en suivant les tendances sociodémographiques de la région : un faible taux de natalité chez les francophones, une migration du nord de la province vers le sud de la province et vers l'Ouest

[1] Dans le système français, la langue première est le français et la seconde est l'anglais et inversement dans le système anglophone.

Canadien, ainsi que la concurrence du système anglophone (qui offre aussi un programme d'immersion française), affectant au plus fort les régions avec très peu de francophones et de familles exogames. Les régions du nord de la province font ainsi face à un problème de fermeture d'écoles et une pénurie d'enseignants. Certains cours du secondaire ne peuvent même pas être offerts en raison du manque d'enseignants et d'autres cours se donnent à distance, sous forme de cours en ligne.

S'il est déjà difficile de recruter des enseignants dans les régions éloignées, la tâche est encore plus ardue dans les disciplines scientifiques (Gilbert, LeTouzé, Thériault et Landry 2004). Parfois, on peut y retrouver, par exemple, les enseignants de mathématiques au secondaire qui n'ont jamais suivi un seul cours de mathématiques au niveau universitaire. Les régions plus urbaines du sud-est, au contraire, vivent un surpeuplement dans les écoles, certaines classes étant hébergées dans des roulottes et, malgré un taux élevé de recrutement de nouveaux enseignants, les postes disponibles deviennent plutôt rares. Mais c'est exactement ces régions qui représentent le plus grand défi pour l'identité francophone et acadienne, car ils sont particulièrement dominés par la langue et la culture anglophone en plus de faire face à un phénomène d'insécurité linguistique (Boudreau et Dubois 2008).

Quel pourrait être l'impact de la situation de la minorité linguistique sur l'enseignement et l'apprentissage de mathématiques ? Assez direct, selon les recherches menées par d'Entremont (2000) sur l'enseignement de mathématiques en milieu minoritaire, la langue jouant un rôle important en enseignement de mathématiques, elle peut devenir un obstacle important pour les apprentissages des élèves vivant en milieu francophone minoritaire. La langue parlée à la maison et avec les pairs a un impact direct sur le développement des compétences en littératie. Plus un élève francophone vit dans un milieu francophone, plus il développe des compétences en littératie francophone. Les élèves francophones en situation minoritaire vivent aussi en relation avec les anglophones, que ce soit au niveau de la famille ou avec les pairs et donc, souvent, la langue d'usage est l'anglais. Cette situation peut créer des obstacles pour le développement de compétences en littératie chez les francophones minoritaires. Cette diminution du niveau de compétence en littératie aurait par la suite un impact négatif sur la compétence en numératie d'un élève, notamment au niveau de son aptitude à la communication mathématique, comme le souligne d'Entremont (2002), qui avance aussi que l'utilisation mixte des langues semble avoir un effet négatif sur le rendement en mathématiques de ces élèves. En somme, selon la chercheure, une bonne connaissance de la langue française facilite la verbalisation des stratégies de résolution de problèmes et des algorithmes (d'Entremont 2002).

Aux prises avec les défis de maintenir la langue, la culture et l'identité francophone et acadienne dans un milieu linguistique minoritaire, la communauté francophone et acadienne du N.-B. se mobilise pour améliorer les services éducatifs offerts par l'école vue comme lieu important de la construction de l'identité culturelle et langagière chez les jeunes francophones et acadiens de la province. Le travail de la *Commission sur l'école francophone* réalisé en 2008 a permis au gouvernement du Nouveau-Brunswick de prendre conscience de besoins et de problématiques de l'enseignement en français ainsi qu'avoir des recommandations fondées sur la réalité, les pratiques et les recherches (GNB 2008).

II. ORIENTATION DES PROGRAMMES D'ETUDES EN MATHEMATIQUES AU NOUVEAU-BRUNSWICK (SECTEUR FRANCOPHONE)

1. Programme d'études en mathématiques au primaire, M-8

Suite au rapport Downey-Landry (1991) mentionné ci haut, le travail de construction d'une école renouvelée au Nouveau-Brunswick (deux secteurs linguistiques confondus) a commencé.

Tel que précisé dans Mackay (2006), en octobre 1995, le secteur francophone du ministère de l'Éducation publie le document « Excellence en éducation – *L'école primaire »*. Il définit l'école primaire renouvelée par les six principes directeurs suivants :

- Les situations d'apprentissage doivent viser le développement global et intégral de l'enfant.
- Tout élève peut et veut apprendre ; chacun apprend à son rythme et selon des modalités qui lui sont propres.
- L'habileté à communiquer est à la base de l'apprentissage et est essentielle pour vivre en société.
- Le développement intellectuel et social s'effectue au contact des autres ; les interactions sociales au sein de la classe jouent un rôle de premier plan dans l'apprentissage.
- La démarche de résolution de problèmes favorise le développement d'habiletés de niveau supérieur.
- L'élève doit être amené à se responsabiliser face à ses apprentissages.

Les nouveaux programmes en enseignement de mathématiques dans le secteur francophone au Nouveau-Brunswick s'implantent graduellement depuis 2000. Les premiers niveaux scolaires visés par les changements sont 1-2-7-8 (2000) suivis de la maternelle (2003), 3-4 (2004) et 5-6 (2005). Ils portent toujours un sigle provisoire ce qui souligne le fait qu'ils soient en développement constant.

Chaque programme est doté d'un cadre théorique commun M-12 commun à toutes les matières. Il reflète les principes énoncés ci haut et établit un modèle pédagogique unificateur avec 13 principes directeurs (tels que, par exemple, le sens aux apprentissages, estime de soi, interdisciplinarité, rigueur, responsabilisation de l'élève, autonomie) et 6 résultats d'apprentissages transdisciplinaires (méthodes de travail, communication, culture et patrimoine, TIC, pensée critique, développement personnel et social). Ce modèle favorise le développement du gout d'apprendre et le plaisir de la réussite ainsi menant à la réalisation d'un plein potentiel de chaque élève (MENB 2005). Les approches pédagogiques préconisées sont axées sur un enseignement cohérent et différencié avec un modèle d'évaluation équilibré adapté aux besoins de chaque élève en combinant les méthodes formatives et sommatives.

La définition de mathématiques comme discipline scolaire englobe 4 domaines d'étude (nombres et opérations ; relations et régularités ; formes et espace ; statistiques et probabilités) et 4 principes didactiques (gérer et résoudre une situation-problème, communiquer mathématiquement, raisonner mathématiquement et habileté de faire des liens). Pour chaque domaine d'études, deux résultats d'apprentissages généraux sont définis selon le tableau suivant (MENB 2005), *Figure 1* :

Domaine	Résultats d'apprentissage généraux
Le nombre et les opérations	Démontrer une compréhension du concept du nombre et l'utiliser pour décrire des quantités du monde réel.
	Effectuer les opérations avec différentes représentations numériques afin de résoudre des problèmes du monde réel.
Les régularités et les relations	Utiliser les régularités dans le but de résoudre des problèmes du monde réel.
	Exploiter les relations mathématiques pour analyser des situations diverses, faire des prédictions et prendre des décisions éclairées.
Les formes et l'espace	Utiliser la mesure pour décrire et comparer des phénomènes du monde réel.
	Décrire, comparer et analyser les figures géométriques pour comprendre les structures du monde réel et pour en créer de nouvelles.
	Utiliser des transformations pour analyser leurs effets et faciliter une conception graphique du monde réel.
L'analyse de données et les probabilités	Recueillir et traiter des données statistiques pour faire des prédictions et prendre des décisions éclairées.
	Utiliser les probabilités afin de prédire le résultat de situations incertaines d'ordre pratique ou théorique.

***Figure 1** – Les quatre domaines du programme d'études en mathématiques*

On y note, entre autres, l'importance accordée à la résolution de problèmes en lien avec les situations de vie réelle. Cette importance se lit également à travers la définition d'une personne mathématiquement éduquée. Ainsi, le programme met l'accent sur les qualités requises par le marché de travail. Comme exemple, on cite la compréhension de la technologie, la complexité de situations à résoudre, la communication et la collaboration. D'où le rôle de mathématiques devient important sur le plan de développement de compétences personnelles. Ce développement passe surtout par la résolution de problèmes complexes, parfois mal formulés avec une démarche de résolution qui n'est pas évidente.

Pour chaque domaine d'études et chaque résultat d'apprentissage général, le plan d'études définit plusieurs résultats d'apprentissages spécifiques, présentés sous forme de tableau de progression d'un niveau à l'autre, comme, par exemple, dans le domaine *Le nombre et les opérations* pour le résultat général, *L'élève doit pouvoir effectuer les opérations avec différentes représentations numériques pour résoudre des problèmes du monde réel (MENB 2005), Figure 2 :*

Résultats d'apprentissage spécifiques : *L'élève doit pouvoir…*

	4e année	5e année	6e année
Addition et soustraction	• estimer et effectuer dans un contexte de résolution de problèmes à l'aide de matériel concret, imagée ou symbolique : – des additions dont la somme des nombres naturels est inférieure à 10 000; – des soustractions dont le premier terme est inférieur à 10 000. • écrire une phrase mathématique comprenant une addition ou une soustraction pour modéliser une situation réelle. • mémoriser et appliquer les tables d'addition et de multiplication (10 x 10) pour effectuer les quatre opérations. • additionner et soustraire, à l'aide de matériel concret, d'images et de symboles, des fractions ayant un dénominateur commun. • apprécier l'utilité des mathématiques dans le monde réel. • composer et résoudre un problème comportant une ou deux opérations.	• estimer et effectuer, avec et sans calculatrice, dans un contexte de résolution de problèmes : – des additions dont la somme des nombres naturels est inférieure à 1 000 000; – des soustractions dont le premier nombre est inférieur à 1 000 000; • additionner et soustraire des nombres décimaux jusqu'au centième symboliquement et à l'aide d'images. • mémoriser et appliquer les tables d'addition et de multiplication (12 x 12) pour effectuer les quatre opérations. • additionner et soustraire des fractions (dénominateur inférieur ou égal à 12) à l'aide de matériel concret et d'images. • estimer la somme et la différence de deux fractions. • apprécier l'utilité des mathématiques dans le monde réel. • appliquer les règles de priorité des opérations suivantes : parenthèses, multiplication, addition et soustraction.	• estimer et effectuer, avec et sans calculatrice, dans un contexte de résolution de problèmes : – des additions; – des soustractions. • additionner et soustraire, à l'aide de représentations imagées et symboliques, des nombres décimaux jusqu'aux millièmes. • mémoriser et appliquer les tables d'addition et de multiplication (12 x 12) pour effectuer les quatre opérations. • additionner et soustraire des fractions (dénominateur inférieur ou égal à 12) à l'aide de matériel concret, de symboles et d'images. • apprécier l'utilité des mathématiques dans le monde réel. • appliquer les règles de priorité des opérations suivantes : parenthèses, exposant, division, multiplication, addition et soustraction.

***Figure 2** – Extrait du programme d'études en mathématiques de 5e année (domaine Nombres et opérations)*

Le programme met ainsi l'accent sur le contexte de résolution de problèmes, l'utilisation du matériel concret ou imagé, ainsi que les symboles, la modélisation d'une situation réelle. On observe également l'introduction de la calculatrice à partir de la 5e année. L'estimation est aussi mentionnée à quelques reprises. En même temps, le répertoire mémorisé doit aussi être élargi. À chaque niveau, l'élève est appelé à apprécier l'utilité des mathématiques dans le monde réel.

2. *Programme d'études en mathématiques au secondaire, 9-12*

Selon le ministère, l'école secondaire renouvelée :

> vise l'acquisition des savoirs, des savoir-faire et des savoir-être qui permettront aux élèves d'acquérir une formation fondamentale, d'ancrer leur identité culturelle et d'apprendre leur vie durant. Elle leur offre une formation qui tient compte des champs d'intérêt et des besoins des élèves par l'entremise de cours obligatoires et de cours au choix. L'école secondaire tient compte des styles et des rythmes d'apprentissage des élèves par le biais d'une pédagogie différenciée. Elle leur offre aussi un éventail d'activités complémentaires tant à l'intérieur qu'à l'extérieur de ses murs. L'école secondaire s'échelonne généralement sur un cycle de quatre ans au terme duquel les acquis des élèves sont sanctionnés par un diplôme provincial.
>
> (http://www.gnb.ca/0000/publications/servped/Secondaire_Renouvele_Enseignant.pdf)

Selon le même document :

> au terme de leurs années à l'école secondaire, les élèves auront acquis une formation fondamentale qui leur permettra de :
> • consolider leur identité culturelle et francophone ;
> • communiquer efficacement ;
> • poursuivre leur formation après le secondaire et ainsi apprendre leur vie durant ;
> • vivre en tant que citoyennes et citoyens autonomes et responsables.
> (http://www.gnb.ca/0000/publications/servped/Secondaire_Renouvele_Enseignant.pdf)

Le cadre du programme de mathématiques au secondaire est essentiellement le même qu'au primaire avec les mêmes définitions de la discipline et de domaines d'études (seule modification – domaine de *relations et régularités* devient *algèbre*.

Au lieu d'avoir un cours de mathématiques comme au primaire qui est obligatoire pour tous les élèves, au secondaire, les cours de mathématiques portent un sigle différent pour chaque niveau selon le régime pédagogique (nombre d'heures, nombre de crédits, cours obligatoires et cours options). Il est à noter que le premier cours s'adresse à tous (9e année), suite à quoi, certains élèves ayant de retards ou de problèmes d'apprentissage considérables sont regroupés ensemble en suivant le programme « modifié ». Les autres élèves suivent le programme « régulier » avec ces cours obligatoires de 10e et 11e année (1er semestre). Les cours de 11e année (2e semestre) et de 12e année sont optionnels pour les élèves qui se dirigent vers les études universitaires plus poussées de côtés mathématiques et sciences. Ce système doit bientôt être remplacé par un autre, encore plus sélectif, avec trois parcours différents menant vers les métiers (cours appliqués), vers les sciences humaines (cours réguliers) et vers les sciences naturelles (cours enrichis).

Voici la description de chaque cours actuel selon le site : http://www.cmec.ca/Programs/mobility/transferguide/Documents/2008-09-transfer-guide/2008-09-guide-transfer-nb.pdf :

Cours obligatoires

Mathématiques 30131

Ce cours annuel de mathématiques jette un pont entre les apprentissages faits à l'école primaire et ceux à faire tout au long du secondaire. Dans ce cours, l'élève a l'occasion d'explorer les concepts suivants : les nombres réels et les interrelations, la modélisation de situations à l'aide de relations (majoritairement linéaires), l'aire et le volume de figures et de solides, les propriétés de polygones, les démonstrations géométriques, ainsi que la démarche statistique. Comme tout cours de mathématiques enseigné au Nouveau-Brunswick, l'approche didactique préconisée passe par la résolution de problèmes tout en créant des liens avec des situations de la vie courante et en communiquant un raisonnement qui est basé sur une démarche cohérente et appropriée.

Mathématiques 30231 et 30232

Ce cours annuel est une suite logique du cours de mathématiques 30131. Il aborde les thèmes suivants : les formes de représentation de sous-ensembles des réels, les radicaux et les valeurs absolues dans un contexte numérique, les lois des exposants et des radicaux, les relations et les fonctions affines, les relations entre les points d'un plan cartésien (ex. : la pente), les opérations sur les polynômes, la factorisation, les suites numériques, la trigonométrie, les figures semblables, ainsi que les probabilités et les valeurs probables. Comme tout cours de mathématiques enseigné au Nouveau-Brunswick, l'approche didactique préconisée passe par la résolution de problèmes tout en créant des liens avec des situations de la vie courante et en communiquant un raisonnement qui est basé sur une démarche cohérente et appropriée.

Mathématiques 30311 et 30312

Ce cours semestriel est une suite logique du cours de mathématiques 30231 ou 30232. Il explore les thèmes suivants : les mathématiques financières, les systèmes d'équations linéaires dans un contexte de programmation linéaire, les fonctions quadratiques ainsi que la modélisation et la résolution de situations variées impliquant la trigonométrie. Comme tout cours de mathématiques enseigné au Nouveau- Brunswick, l'approche didactique préconisée passe par la résolution de problèmes, tout en créant des liens avec des situations de la vie courante et en communiquant un raisonnement qui est basé sur une démarche cohérente et appropriée. Ce cours est nécessaire à l'obtention du diplôme d'études secondaires.

Cours optionnels

Mathématiques 30321

Ce cours semestriel, suite logique du cours de mathématiques 30311, aborde les thèmes suivants : les nombres complexes, les matrices, la résolution d'équations et d'inéquations quadratiques, le cercle dans le plan cartésien, les séries et leurs applications, les démonstrations de propositions géométriques impliquant des triangles, les diverses relations métriques dans le cercle. Comme tout cours de mathématiques enseigné au Nouveau-Brunswick, l'approche didactique préconisée passe par la résolution de problèmes tout en créant des liens avec des situations de la vie courante et en communiquant un raisonnement qui est basé sur une démarche cohérente et appropriée.

Mathématiques 30411

Ce cours semestriel, suite logique du cours de mathématiques 30321, aborde l'analyse de fonctions particulières : cubique, rationnelle, racine carrée, valeur absolue, exponentielle, logarithmique et trigonométrique. Comme tout cours de mathématiques enseigné au Nouveau-Brunswick, l'approche didactique préconisée passe par la résolution de problèmes, tout en créant des liens avec des situations de la vie courante et en communiquant un raisonnement qui est basé sur une démarche cohérente et appropriée.

Mathématiques 30421

Ce cours semestriel, suite logique du cours de mathématiques 30411, aborde les thèmes suivants : l'analyse combinatoire et la distribution binomiale, l'analyse des fonctions partie entière et demi-cercle, les opérations sur les fonctions, la limite d'une fonction, la modélisation à l'aide de la dérivée et les caractéristiques qui y sont associées, ainsi que l'application des dérivées liées à des problèmes d'optimisation. Comme tout cours de mathématiques enseigné au Nouveau-Brunswick, l'approche didactique préconisée passe par la résolution de problèmes tout en créant des liens avec des situations de la vie courante et en communiquant un raisonnement qui est basé sur une démarche cohérente et appropriée.

Statistique 31411

Ce cours semestriel est offert aux élèves désirant approfondir leurs connaissances des statistiques et de leur influence sur les décisions prises au regard de divers enjeux de la vie courante. Il se veut une introduction aux aspects principaux touchant les statistiques, dont les populations et les variables statistiques, les méthodes d'enquête et d'échantillonnage, les contraintes et les sources de biais, les divers modes de représentation de données, les sommaires numériques, les échelles standardisées, les associations et la causalité, la régression et les prédictions associées aux applications de la régression. Comme tout cours de mathématiques enseigné au Nouveau-Brunswick, l'approche didactique préconisée passe par la résolution de problèmes tout en créant des liens avec des situations de la vie courante et en communiquant un raisonnement qui est basé sur une démarche cohérente et appropriée.

Pour chaque cours, chaque domaine d'études et chaque résultat d'apprentissage général, le programme définit les résultats d'apprentissage spécifiques et les contenus d'apprentissage, comme par exemple dans le cours 30311/30312, le dernier qui obligatoire pour la diplomation (11^{e} année, 1er semestre). Les programmes d'études sont en évolution constante et les dernières versions officielles sont assez récentes : 2005 pour le cours 31411 ; 2007 pour 30311/12 et 30321 ; 2008 pour 30231/32 et 30411 et 30421.

PLAN D'ÉTUDES

LE NOMBRE 2 - LES OPÉRATIONS

1	**Résultat d'apprentissage général** Effectuer les opérations avec différentes représentations numériques afin de résoudre des problèmes du monde réel.

Résultats d'apprentissage spécifiques *L'élève doit pouvoir :*	**Contenu d'apprentissage**
1.1 modéliser des problèmes financiers liés à des situations de la vie courante **1.2** résoudre des problèmes financiers liés à des situations de la vie courante	❖ *Prix unitaire* ▪ Taux de change ▪ Fiscalité ◊ Revenu brut ◊ Revenu net ▪ Intérêts ❖ *Simple* ◊ Composé ◊ Valeur initiale et finale - Placement et prêt - Bien (dépréciation et inflation) ▪ Annuités ◊ Rente ◊ Prêt (incluant hypothèque) ◊ Tableau d'amortissement (Annexe C) ◊ Taxe foncière ▪ Crédit à la consommation

Note : les contenus en *italique* et identifiés par la puce ❖ indiquent que les élèves ont déjà vu ces notions dans les cours précédents et qu'ils auront à les réutiliser afin de cheminer dans les nouveaux contenus.

Figure 3 *– Extrait du programme d'études en mathématiques au secondaire (cours 30311, domaine Nombres et opérations)*

De la même façon qu'au primaire, l'emphase est mise sur la modélisation de situations de vie courante et la résolution de problèmes. Le contexte de vie réelle sert ainsi pour introduire les concepts et les opérations mathématiques (*Figure 3*).

Les élèves de classes modifiées et régulières apprennent les mêmes contenus, mais les différences sont explicitées au niveau des attentes, qui sont fixées comme profil de compétence. Voici le profil pour les résultats d'apprentissages cités ci haut (*Figure 4*) :

Profil de compétence

	À la fin du cours 30312, l'élève du niveau	À la fin du cours 30311, l'élève du niveau		
	acceptable (modifié)	**acceptable (régulier)**	**attendu**	**supérieur**
1.1 et 1.2	✦ calcule le prix unitaire de deux ou plusieurs articles afin de les rendre comparables			
	✦ calcule le nombre d'unités de monnaie étrangère que l'on peut acheter avec une unité de monnaie nationale	✦ calcule le nombre d'unités de monnaie étrangère que l'on peut acheter avec une unité de monnaie nationale et vice versa	✦ calcule le nombre d'unités de monnaie étrangère que l'on peut acheter avec une unité de monnaie nationale et vice versa lorsque le calcul implique la conversion entre trois pays	
	✦ calcule le revenu brut d'un travail à salaire horaire, à commission ou à la pièce	✦ calcule le revenu brut d'un travail à salaire horaire et/ou à commission pour un taux fixe et/ou à la pièce	✦ calcule le revenu brut d'un travail à salaire horaire et/ou à la pièce et/ou à commission pour un taux fixe ou progressif, avec ou sans quota de vente	
	✦ calcule la valeur initiale et finale d'un placement ou d'un prêt lorsque le taux d'intérêt est capitalisé annuellement	✦ calcule la valeur initiale, la valeur finale ou le taux d'intérêt d'un placement ou d'un prêt, peu importe la capitalisation du taux d'intérêt		
		✦ compare différents taux d'intérêt et différentes périodes de capitalisation afin de déterminer le placement ou le prêt le plus avantageux		
	✦ calcule la valeur initiale ou finale d'un bien soumis à un taux constant d'inflation	✦ calcule la valeur initiale ou finale d'un bien soumis à un taux constant d'inflation ou de dépréciation		✦ calcule la valeur initiale ou finale d'un bien soumis à un taux constant ou variable d'inflation ou de dépréciation
		✦ détermine la valeur restante d'un prêt ou d'une rente à la fin de la première période de paiement ou de versement à l'aide d'un tableau d'amortissement (voir Annexe C)	✦ détermine la valeur restante d'un prêt ou d'une rente pour une durée ne dépassant pas 3 périodes de paiement ou de versement à l'aide d'un tableau d'amortissement (voir Annexe C)	

***Figure 4** – Extrait du programme d'études en mathématiques au secondaire (profil de compétences)*

3. Système d'évaluation provinciale

Les évaluations provinciales sont assurées par *La Direction de la mesure et de l'évaluation* (DMÉ) du ministère qui « assure le développement, l'administration et la notation d'examens standardisés dans le cadre du programme provincial d'évaluation des apprentissages. Les données recueillies sont utilisées au niveau provincial, au niveau des districts et des écoles afin d'élaborer des directives et de prendre des décisions qui visent la réussite de tous les élèves. Les résultats des évaluations permettent de déterminer si les élèves possèdent les compétences et les connaissances décrites dans les programmes d'études ; d'établir des objectifs d'amélioration et de fournir aux parents et au public en général des renseignements importants sur le rendement des élèves dans les matières ciblées par les évaluations ». http://www.gnb.ca/0000/publications/evalf/FondementsGestion.pdf.

Établi en 1986 pour sanctionner les résultats de fin d'études secondaires dans plusieurs matières y compris les mathématiques, le programme s'est évolué considérablement depuis. En 1994, en réponse au rapport de la commission sur l'Excellence en éducation décrit en début de notre texte, le ministère commence à évaluer les élèves lors de leur parcours scolaire. C'est ainsi que le ministère de l'Éducation introduisit en 1994 les premières évaluations en début d'année scolaire au primaire en français et en mathématiques (4e et 8e année) dans le but de permettre aux enseignants d'orienter leurs pratiques pédagogiques sur la base des résultats des élèves. http://www.gnb.ca/0000/publications/evalf/FondementsGestion.pdf

Une nouvelle politique du ministère portant sur l'évaluation des apprentissages « énonce un ensemble de valeurs que le processus d'évaluation des apprentissages doit refléter pour en assurer la qualité : la justice, l'égalité, l'équité, la pertinence, la cohérence, la transparence et la rigueur. Les valeurs de justice, d'égalité et d'équité sont intimement reliées. Ainsi, pour assurer qu'un élève ayant une déficience visuelle puisse prendre part à l'évaluation provinciale (justice), cet élève peut faire le même examen que les autres élèves (égalité) en profitant d'une accommodation visuelle (équité). Les évaluations provinciales tiennent compte des différences individuelles des élèves à la lumière de ces trois valeurs ».

http://www.gnb.ca/0000/publications/evalf/FondementsGestion.pdf

En 2005, le ministère remplace les examens formatifs de début de l'année par les examens administratifs de fin d'année (en mathématiques : en fin de 5e et en fin de 8e) en y ajoutant un autre examen en fin de 3e. En rendant ainsi l'école responsable du rendement de ses élèves, le ministère publie un rapport annuel de ces évaluations par école et par district scolaire (*Figure 5*) :

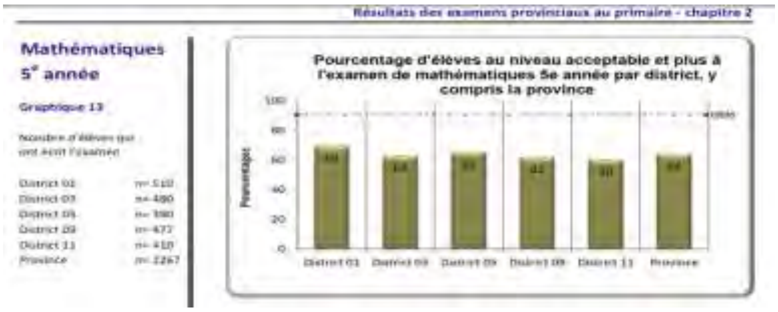


Figure 5 *– Résultats des examens provinciaux en 5e année (par District scolaire)*

Le schéma démontre, entre autres, que la cible (ligne rouge) est loin d'être atteinte pour l'année 2009.

Pour chaque niveau scolaire évalué, il existe un cadre d'évaluation. Par exemple, celui de 5e année précise que « quel que soit le niveau scolaire, la contribution de la mathématique à la formation fondamentale de l'élève porte sur la capacité de celui-ci à gérer et résoudre des problèmes, à établir des liens, à raisonner et à communiquer efficacement et ce, dans des contextes variés qui sont liés aux quatre domaines conceptuels retenus dans les plans d'études. Cela suppose en salle de classe des situations d'apprentissages authentiques par lesquelles les élèves développent leur compréhension des notions, leur habileté à raisonner et à faire l'application de procédures mathématiques. L'évaluation sommative, pour être conséquente au domaine ainsi défini, proposera aux élèves, pour chacun des quatre domaines conceptuels, des tâches signifiantes faisant appel à différentes habiletés caractérisées par les démarches cognitives qu'elles sollicitent » http://www.gnb.ca/0000/publications/evalf/math5-cadreevaluation.pdf.

Selon ce même cadre, les trois catégories d'habiletés ont été retenues : la maîtrise des concepts, la maîtrise des applications et la résolution de problèmes.

Pour ***la maîtrise des concepts***, les élèves devront montrer qu'ils peuvent définir des concepts mathématiques, les expliquer, en générer des exemples et des contre-exemples, et passer d'un mode de représentation à un autre. Interpréter un graphique et traduire une situation donnée par un modèle mathématique sont aussi des manifestations de cette habileté. Quant à ***la maîtrise des applications,*** les élèves devront démontrer leur connaissance des règles et des procédures utilisées pour accomplir des opérations mathématiques. Finalement pour ***la résolution de problèmes,*** les élèves devront démontrer leur capacité à résoudre des problèmes plutôt familiers. Les situations proposées, qu'elles soient contextualisées ou non, leur permettront de mettre en application leurs stratégies de résolution de problèmes.

Une démarche complète de résolution de problème implique les étapes suivantes :

- dégager de la situation les éléments d'information pertinents qui se prêtent à un traitement mathématique ;
- modéliser la situation et élaborer une démarche de solution appropriée qui démontre par le choix des opérations, une compréhension adéquate du problème ;
- appliquer correctement les opérations ou les relations choisies dans la démarche de solution ;
- valider sa solution en s'assurant que sa démarche est adéquate et communiquée clairement, et que sa réponse est plausible en regard du contexte.

Chaque domaine d'études et chaque catégorie a son poids dans la répartition des items comme le démontre le tableau suivant (*Figure 6*) :

***Tableau des dimensions*, mathématiques 5e année**

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="4"></td><td colspan="13">Domaine conceptuel</td></tr>
<tr><td colspan="3">Nombre et opérations
23-27 %</td><td colspan="2" rowspan="2">Régularités et relations
18-22 %</td><td colspan="5">Formes et espace
38-42 %</td><td colspan="3">Statistique et probabilités
15-18 %</td></tr>
<tr><td>Le système numérique</td><td colspan="2">Les opérations</td><td>La mesure</td><td colspan="2">Les figures planes et les solides</td><td colspan="2">Les transformations</td><td colspan="2">La statistique</td><td>Les probabilités</td></tr>
<tr><td>Les ensembles : nombres naturels nombres rationnels nombres décimaux</td><td>Addition et soustraction</td><td>Multiplication et division</td><td>Régularités</td><td>Algèbre</td><td>Argent, longueur, périmètre, aire, volume, masse, angle</td><td>Figures planes</td><td>Solides</td><td>Réflexion, rotation et transformation</td><td>Système de repérage</td><td>Démarche statistique</td><td>Représentation, mesure</td><td>Décrire un événement</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Habileté</td><td>Maîtrise des concepts
28-32 %</td><td colspan="3">Dimension 1</td><td colspan="2">Dimension 3</td><td colspan="5">Dimension 5</td><td colspan="3">Dimension 7</td></tr>
<tr><td>Maîtrise des Applications
38-42 %</td><td colspan="3">Dimension 2</td><td colspan="2">Dimension 4</td><td colspan="5">Dimension 6</td><td colspan="3">Dimension 8</td></tr>
<tr><td>Résolution de problèmes
28-32 %</td><td colspan="13">Dimension 9</td></tr>
</table>

Figure 6 *– Cadre d'évaluation, 5e année (tableau des dimensions mathématiques)*

Les items sont de quatre types, deux à réponse construite (courte et élaborée) et deux à réponse choisie (choix multiple et choix alternatif, *Figure 7*) :

Figure 7 *– Exemples d'items tirés du cadre d'évaluation provinciale en 5e année*

4. Ressources pédagogiques

Au niveau de ressources, la situation du milieu francophone minoritaire décrite en début de l'article affecte également l'accès aux manuels et d'autres types de ressources de langue française. N'ayant aucun manuel scolaire fait maison, la province puise dans les ressources traduites de l'anglais ou produits au Québec. C'est d'ailleurs une collection québécoise *Défi Mathématique* qui formait la base du programme de mathématiques avant la réforme 2000 aux niveaux 1-6. Depuis, les deux réformes effectuées au Québec (Programme de formation de l'école québécoise) et dans les provinces de l'Atlantique (Fondations for the Atlantic Mathematics Curriculum 1999) ont affecté le programme au Nouveau-Brunswick de sorte que cette collection ne répondait plus au programme.

En effet, même si quelques nouvelles collections québécoises recommandées par le ministère (entre autres, celle d'Allegro (1-2 années), Adagio (3-4 années) et Presto (5-6 années), ou la nouvelle version du Défi mathématique, aucune ne pouvait combler les besoins. Par exemple, il manquait un domaine entier Relations et Régularités (Algèbre) dans ces manuels. Ceci n'est pas surprenant, car le nouveau programme a été élaboré conformément aux standards du Canada Atlantique qui ont leurs origines dans les documents de la NCTM (National Council of Teachers of Mathematics). La situation était plus complexe au niveau 7-8, car le *Défi mathématique* (Lyons et Lyons 2001) d'arrêtait au niveau 6 et à partir de la 7^{e} année, au Québec, c'était déjà le secondaire. Donc, c'est une collection ontarienne *Interaction* 7-8 (traduite de l'anglais) qui a été retenue (elle demeure toujours seule recommandée par le ministère).

Au secondaire (9-12 années), il y avait un essai d'introduire le manuel *Impacts mathématiques* (Fendel et a.l 1999), une collection développée dans le paradigme de résolution de problèmes et de développement du sens de concepts mathématiques. Avec le secondaire renouvelé, le ministère s'est tourné vers la collection ontarienne *Omnimaths* (Knill et al. 2001 ; Koe 2001), version Ouest, traduite. Dans le programme d'études, on trouve encore quelques références au Impacts mathématiques ainsi que des collections québécoises, comme par exemple, en 11^{e} année (*Figure 8*),

http://www.gnb.ca/0000/publications/servped/Mathematiques30311et30312-11e2007.pdf.

Remarques liées à la collection OMNIMATHS 11

- La collection OMNIMATHS 11 n'offre pas beaucoup de variété au niveau des problèmes écrits dans l'étude de l'optimisation. Pour l'étude des notions des RAS 2.1 et 2.2, l'enseignant peut choisir de puiser des exemples et exercices dans les manuels suivants :
  - Module « Espaces verts et centres commerciaux ? » d'IMPact ;
  - CEC Réflexions mathématiques 536 (ou Regards mathématiques 514) ;
  - Mathématiques discrètes

***Figure 8** – Extrait du programme d'études en 11^{e} année faisant référence au manuel scolaire*

Cet exemple illustre bien la situation où le choix d'une ressource appropriée appartient à l'enseignant, donc il est même possible que l'enseignant se crée ses propres ressources ou se tourne vers les ressources en ligne. Par exemple, le site CAMI (Communauté d'Apprentissages Multidisciplinaires Interactifs, www.umoncton.ca/cami), au service depuis 2000 (sous le nom du Chantier d'Apprentissages Mathématiques Interactifs, 2000-2005 et Communauté d'Apprentissages Scientifiques et Mathématiques (2006-2009), offre de problèmes mathématiques pour tous les niveaux scolaires et tous les domaines du programme d'études. Les élèves peuvent même soumettre leurs solutions de façon électronique et avoir une rétroaction personnelle (Freiman, Vézina et Langlais 2005). La banque CAMI compte déjà plus d'un mille de problèmes pour tous les niveaux et tous les domaines du programme d'études.

Toutes les écoles primaires (niveaux 6-8) et secondaires (9-12) possèdent une licence pour le logiciel *CABRI Géomètre* et *Graphe Easy*. D'ailleurs, des exemples d'utilisation de ces deux logiciels ainsi qu'une calculatrice à l'affichage graphique se trouvent dans le programme d'études au secondaire (*Figure 9*),

http://www.gnb.ca/0000/publications/servped/Mathematiques30311et30312-11e2007.pdf.

2.2

- L'enseignant est invité à utiliser la technologie dans l'enseignement de l'optimisation.

  Calculatrice à affichage graphique : le programme de la droite baladeuse qui se trouve à l'annexe E permet de balayer la fonction de l'objectif sur le polygone de contraintes de façon à déterminer la solution optimale.

  Logiciel Graphe Easy : on peut y représenter le polygone de contraintes et le balayer avec la fonction de l'objectif à l'aide de l'outil « animation ». Notez bien que le logiciel Graphe Easy hachure (colore) le demi-plan non-solution d'une inéquation. Le polygone de contraintes correspondra donc à la région blanche (non-hachurée) du plan dans ce logiciel.

Figure 9 *– Extrait du programme d'études en 11e année faisant référence aux outils technologiques*

Afin d'aider les enseignants dans le développement et l'utilisation de ressources pédagogiques et de scénarios d'apprentissage, le ministère a fourni deux nouvelles collections : *Trousse PRIME,* http://www.duvaleducation.com/fr/developpement-professionnel/prime-52/ qui peut servir à l'évaluation diagnostique de chaque élève et propose de stratégies d'intervention et *Enseignement de mathématiques : l'élève au centre de son apprentissage* (3 volumes, M-2, 3-5 et 6-8) de Van de Walle J. et Lovin L.).

5. *Formation des enseignants et développement professionnel*

La formation initiale à l'enseignement de mathématiques au Nouveau-Brunswick (francophone) est effectuée, en grande partie, par l'Université de Moncton. Cette formation de durée de 5 ans permet aux étudiants en formation à l'enseignement au primaire de suivre un programme combiné B.A.-B. Éd. (primaire) qui prépare les étudiantes et les étudiants à l'enseignement des classes allant de la maternelle à la 8e année. Au secondaire, le programme mène à la double diplomation, soit dans le domaine des arts et sciences sociales (B.A.) ou dans le domaine de sciences (B. Sc.) avec deux disciplines (majeure et mineure) ainsi qu'en éducation (B. Éd.). Il existe aussi un programme de deux ans en éducation pour des personnes ayant déjà un diplôme de premier cycle.

En mathématiques, au primaire, les étudiants suivent 5 cours de 3 crédits (4 en maths et 1 en statistique). De plus, les étudiants avec l'option 5-8 années doivent suivre un autre cours en mathématiques. En plus d'avoir une formation disciplinaire, les étudiants reçoivent une formation pédagogique générale et spécialisée (incluant deux cours de 2 crédits en didactique des mathématiques au primaire). Le premier cours se concentre sur la connaissance de courants didactiques modernes, du programme d'études en mathématiques au N.-B. et de ressources didactiques ainsi que sur le développement des habiletés de concevoir les situations d'enseignement/apprentissage (incluant les évaluations).

Le deuxième cours voit plus les modes d'apprentissage de mathématiques par les élèves, leurs conceptions, leur compréhension de concepts (évaluation diagnostique) et comment bâtir l'enseignement en fonction de besoins de chaque élève selon une approche différenciée. Tous les étudiants travaillent avec le site CAMI pour résoudre les problèmes et analyser les solutions des élèves. Le programme de formation inclut également les stages de 1ère (3 semaines), de 3e (3 semaines) et de 5e (4 mois) années.

Au secondaire, la formation disciplinaire en mathématiques se fait dans le cadre du programme de 1er cycle (majeur ou mineur selon le choix de l'étudiant) suivi d'une formation pédagogique semblable au primaire, mais avec un seul cours de didactique de 3 crédits. Ce cours se construit en combinant les idées de deux cours du primaire, mais plus condensé. Les stages sont similaires à ceux au primaire.

Avec l'obtention du diplôme, les finissants reçoivent également un certificat leur permettant d'enseigner au Nouveau-Brunswick ou toute autre province canadienne excepté le Québec.

Le développement professionnel peut prendre des formes variées. Ainsi, les ateliers de formation peuvent être organisés par l'école et prennent souvent la forme de CAP (Communautés d'apprentissages professionnels), par le district scolaire (par exemple, un agent pédagogique ou un mentor en mathématiques peut venir donner une formation à l'école ou le faire au district), par les associations professionnelles ou sans but lucratif (exemple, AEFNB – Association des enseignants francophones du N.-B. ou APTICA, Avancement pédagogique des TIC en Atlantique, www.aptica.ca) ou par le ministère, sous formes vairées selon les plans, les modalités et les budgets disponibles. Des formations spécialisées (par exemple, sur la trousse PRIME http://www.duvaleducation.com/fr/developpement-professionnel/prime-52/) peuvent être organisées par les experts invités (parfois des entreprises privées).

Il y également des cours de niveau maitrise qui sont offerts par l'Université de Moncton aux enseignants cherchant un niveau plus élevé de certification (Certificat 6) ou les diplômes de cycles supérieures (maitrise ou doctorat). Ainsi, les enseignants peuvent se perfectionner en didactique de mathématiques (cours d'études individuels et de didactique approfondie ou projets de thèses ou de mémoires).

6. Addendum au lieu de conclusion : réalité dynamique et regard vers l'avenir

Dans notre version finale du texte, suite aux commentaires de collègues, développements nouveaux dans le milieu scolaire du Nouveau-Brunswick francophone, ainsi qu'en prévision de discussions futures lors du Colloque, les auteurs trouvent utile l'ajout de cette nouvelle section qui tentera de lier les problématiques présentées dans ce texte avec les programmes décrits et surtout de s'ouvrir sur la question d'amélioration des habiletés des élèves à mettre les apprentissages visés en rapport avec le contexte de résolution de problèmes qui est central au paradigme didactique de la dernière décennie.

En rapport avec les défis discuté dans notre texte, notons tout d'abord l'élaboration d'un nouveau plan stratégique du ministère de l'Éducation et du développement de la petite enfance du Nouveau-Brunswick, lancé en septembre 2010 donc l'objectif principal est de mettre en place diverses initiatives visant l'amélioration des apprentissages et des résultats en mathématiques chez les jeunes francophones du Nouveau-Brunswick. Les grandes lignes de ce plan ont été présentées dans le cadre du colloque du Groupe des didaciticiens des mathématiques du Québec, à Moncton et sont parues dans les Actes tout recements sortis de l'imprimérie (Landry 2011). En présentant le bilan de la décennie d'implantation de nouveaux programmes décrits ci haut, l'auteur avance que les fondements pédagogiques énoncés dans le cadre théorique qui se basent sur un enseignement centré sur la résolution de situations-problèmes demeurent un défi dans la pratique enseignante (Landry 2011).

Bati autour de quatre axes principaux, le plan prévoit, entre autres, de :

- Fournir des programmes d'études répondant aux besoins des élèves et définissant des attentes claires.
- Fournir les ressources didactiques, pédagogiques et humaines nécessaires à l'amélioration de la qualité de l'enseignement.
- Améliorer la qualité de l'enseignement des programmes de mathématiques.
- Soutenir les initiatives gagnantes déjà en place dans les districts scolaires. (Landry 2011, p. 17).

Parmi les nouvelles mesures, « le désir d'améliorer davantage la compréhension des attentes, la communication d'un continuum des apprentissages plus cohérent, le soutien de chaque résultat d'apprentissage par des directives pédagogiques claires et une rédaction plus uniforme des attentes d'un niveau scolaire à l'autre' ont motivé l'élaboration de nouveaux programmes du primaire » (Landry 2011, p. 14, instaurés graduellement dès septembre 2011 (niveaux scolaire M-4).

Les changements importants touchent également l'école secondaire où, selon Landry (2011), le modèle faisant chaque élève vivre le même parcours en mathématiques et, selon ses forces et ses défis, explorer certains concepts mathématiques plus en profondeur a généré plusieurs défis dont la difficulté de gérer la différentiation des apprentissages. Ainsi, 'la proposition d'un nouveau modèle basé sur les passions, les intérêts et les projets de vie-carrière a été développé' (Landry 2011, p. 14) prévoyant trois différents parcours en mathématiques, où chaque parcours présentera des mathématiques et des approches pédagogiques qui sont différentes.

Bien que le milieu scolaire francophone minoritaire ne cache pas énormes défis en terme d'amélioration du processus d'enseignement/d'apprentissage, comme le témoignent les documents recensés, quelques bonne nouvelles venues tout récemment indiquent certains progrès. Notamment, les résultats de la dernière épreuve pancanadienne axée en 2010 particulièrement sur les mathématiques démontrent que les élèves du Nouveau-Brunswick se classent troisièmes parmi les élèves francophones de huit autres provinces, incluant le Québec, majoritairement francophone, en montrant, en plus, un score se situant au même niveau que le score moyen total (deux communautés linguistiques confondues), en dépassant de même coup leurs homologues anglophones (*Figure 9*).

TABLEAU 3-2 **Résultats pancanadiens en mathématiques — Français**

	Instance	Score moyen et intervalle de confiance
Égal au score moyen du Canada francophone	QCf	516 ± 3
	CAN	515 ± 4
	ONf	511 ± 4
	NBf	507 ± 5
Inférieur au score moyen du Canada francophone	ABf	504 ± 5
	BCf	504 ± 5
	NSf	503 ± 3
	SKf	498 ± 7
	MBf	480 ± 3

Figure 9 *– Résultats des élèves francophones au PPCE (2011)*

Sans pouvoir entrer dans une analyse plus profonde de résultats de cette épreuve, notons qu'environ 70% d'items demandaient une réponse construite. Ainsi, les résultats des francophones minoritaires du Nouveau-Brunswick peuvent faire réjouir les éducateurs. Toutefois, une observation faite dans le rapport qui se réfère aux habiletés en résolution de problèmes indique le rendement significativement inférieur au score moyen canadien chez les élèves francophones néo-brunswicois, tandis que chez les élèves québécois et ontariens, il se situe au niveau du score moyen chez l'ensemble de francophones du Canada.

Ces quelques brèves observations provenant du rapport ne laissent pas l'espace aux conclusions fiables, mais dégagent de pistes de recherches prometteuses par rapport aux résultats mêmes qui peuvent et doivent être analysées avec beaucoup plus de profondeur et de façon didactiquement plus nuancée. C'est d'ailleurs, sur cette note qui s'ouvre sur les besoins en données probantes provenant de recherches empiriques que nous aimerions conclure notre texte. Les recherches reliant les aspects didactiques, notamment, les programmes d'études, les pratiques en salle de classe, les ressources didactiques et humaines et les évaluations avec les particularités d'un milieu linguistique minoritaire pourront éventuellement nous éclairer sur les problématiques identifiées, les mesures recensées et les tendances observées.

REFERENCES

Boudreau A., Dubois L. (2008) Représentations, sécurité/insécurité linguistique. In Roy S., Dalley P. (Dirs.) (pp. 145-175) *Francophonie, minorités et pédagogie.* Ottawa : Presses de l'Université d'Ottawa.

Conseil des ministres de l'éducation du Canada (CMEC). L'enseignement secondaire au Canada: guide de transfert des élèves Nouveau-Brunswick (secteur francophone). http://www.cmec.ca/Programs/mobility/transferguide/Documents/2008-09-transfer-guide/2008-09-guide-transfer-nb.pdf

D'Entremont Y. (2002) Enseignement des mathématiques en milieu minoritaire : situation albertienne. In Allard R. (Dir.) (pp. 203-208) *Actes du Colloque pancandien sur la recherche en éducation en milieu minoritaire*. Moncton, Canada : ACELF-CRDE.

Fendel D. et al. (1999) *Impacts Mathématiques Espaces verts ou Centre commerciaux. Guide d'enseignant.* Montréal : Chenelière-McGraw-Hill.

Fendel D. et al. (1999) *Impacts Mathématiques Espaces verts ou Centre commerciaux. Manuel de l'élève*. Montréal : Chenelière-McGraw-Hill.

Gilbert A., LeTouzé S., Thériault J. Landry R. (2004) *Le personnel enseignant face aux défis de l'enseignement en milieu minoritaire francophone.* Rapport final de la recherche. Institut canadien de recherche sur les minorités linguistiques.

GNB (année non disponible). *Le secondaire renouvelé … pour un monde nouveau.* Gouv. du N.-B.

GNB (2002) *Plan d'apprentissage de qualité*. Gouv. du N.-B.

GNB (2007) *Les enfants au premier plan*. Gouv. du N.-B.

GNB (2008) *Commission sur l'école francophone, document préliminaire*, Gouv. du N.-B.

GNB (2010) *Fondements et Gestion : Programme provincial d'évaluation des apprentissages*. Gouvernement du N.-B.

GNB (2010) *Mesure et évaluation : Cadre d'évaluation. Mathématiques, 5^{e} année*. Gouvernement du N.-B.

Knill G. et al. (2001) *OMNIMATHS 11. Manuel de l'élève.* Montréal : Chenelière-McGraw-Hill.

Koe K. (2001) *OMNIMATHS 11. Guide d'enseignant.* Montréal : Chenelière-McGraw-Hill.

Landry L. (2011) L'enseignement des mathématiques au Nouveau-Brunswick francophone : vers la réussite scolaire et des apprentissages durables pour tous les élèves. In Freiman V.et coll. (Dir.) *L'enseignement de mathématiques dans et à travers des contextes particuliers : quel support didactique privilégier ? Actes du Colloque du Groupe des didacticiens des mathématiques du Québec, Moncton, 11-13 juin, 2010.* Université de Moncton.

Landry R., Downey J. (1991) *Excellence in Education.* Fredericton, New Brunswick : Commission on the excellence in education.

Laplante B. (2001) Enseigner en milieu minoritaire: histoires d'enseignantes oeuvrant dans les écoles fransaskoises, *Revue des sciences de l'éducation, 27*(1), 127-150.

Lyons R., Lyons M. (2001) *Défi mathématiques. 2^{e} année.* Montréal : Chenelière-McGraw-Hill.

MacKay A. W. (2006) *Relier les besoins et les défis : Utiliser notre potentiel humain.* Gouvernement du N.-B.

MENB (2005) *Programme d'études en mathématiques. 5^{e} année.* Gouvernement du N.-B.

MENB (2007) *Programme d'études. Mathématiques, 11^{e}, 30311-30312.* Gouvernement du N.-B.

MEQ (2000) *Programme de formation de l'école québécoise*. Gouvernement du Québec.

NCTM (2000) *Standards in mathematics education*. National Council of Teachers of Mathematics.

OCDE (2000, 2003 et 2006). *Programme PISA*. http://www.oecd.org/document/24/0,3343,en_32252351_32235731_38378840_1_1_1_1,00.html

PPCE (2011) *PPCÉ de 2010 - Rapport de l'évaluation pancanadienne en mathématiques, en sciences et en lecture*. Conseil des ministres de l'Éducation du Canada.

EVOLUTION DES PROGRAMMES DE L'ENSEIGNEMENT FONDAMENTAL AU MALI : FONCTIONS EDUCATIVES ET SOCIALES DES MATHEMATIQUES

Marie-Pierre GALISSON*

Résumé – Notre objectif est de présenter une image des mathématiques enseignées dans le second cycle de l'enseignement fondamental au Mali depuis 1990. Notre étude s'appuie sur les textes officiels (programmes). Elle montre qu'après une période de stabilité, le programme, transposition des programmes du collège français de 1980, n'est plus compatible avec les enjeux d'une réforme curriculaire en œuvre depuis les années 2000. Cette situation semble impliquer une réorganisation des programmes de mathématiques adaptée à de nouveaux enjeux (liés à la mise en œuvre de la pédagogie convergente, fondés sur le bilinguisme et l'approche par compétences).

Mots-clefs : éducation mathématiques, enseignement fondamental, enjeux de formation, réforme curriculaire, pédagogie convergente

Abstract – Our goal is to present a picture of mathematics taught in the second cycle of basic éducation in Mali since 1990. Our study is based on official documents (curricula). It shows that after a period of stability, the curriculum, transposition of French curriculum taught in the first cycle of secondary schooling is no more compatible with the challenges of curriculum reform implemented since the 2000s. This reform shows the necessity to adapt the mathematical curriculum taught in the second cycle of basic education to new challenges: aims of convergent pedagogy. Convergent pedagogy turn one's attention to bilinguism and skills-based approach.

Keywords: mathematics education, basic education or fundamental (secondary) schooling, education challenges, curricular reform, convergent pedagogy

I. INTRODUCTION

Il s'agit dans cette étude d'obtenir une image des mathématiques enseignées dans le second cycle de l'enseignement fondamental au Mali depuis 1990. Nous cherchons, à partir d'une analyse des textes officiels (programmes, curriculum en vigueur), de manuels quasi-officiels, à obtenir des outils d'intelligibilité pour caractériser l'éducation mathématique dédiée aux élèves âgés de 13 à 15 ans. Nous nous intéresserons au traitement du thème de la proportionnalité : ce thème est à l'origine dans certains programmes francophones, à partir de 1985, du développement d'un domaine novateur « Organisation des données » ; ce domaine qui répond à des enjeux sociaux couvre la proportionnalité, ses applications, les statistiques et les fonctions. Il n'existe pas dans les programmes maliens. Ces derniers traitent de la proportionnalité et des fonctions en les référant au domaine de l'algèbre, ils éludent les statistiques. Notre intention d'identifier les mathématiques qui vivent dans les programmes maliens, les enjeux sociaux auxquels elles répondent, est en résonance avec le thème développé par le groupe spécial 3, à savoir « Comparaisons de l'enseignement des mathématiques à travers les pays francophones : résultats, sens et usage ».

Notre étude porte sur les programmes de 1990 émanant du Ministère de l'éducation de base puis sur des textes officiels publiés à partir des années 2000

Les premiers présentent les enjeux promus par une politique éducative qui privilégie des priorités : l'accès à l'éducation pour « tous », l'accès à des savoirs et savoir-faire de base pour favoriser le développement économique du pays, principes promus par le mouvement Education for all, lors de la Conférence Internationale de 1990 sous l'égide de l'UNESCO.

* Laboratoire André Revuz, Paris VII, GREMA, IREM Paris VII – France – mpgalisson@aol.com

© Galisson M.-P. (2012) Evolution des programmes de l'enseignement fondamental au Mali : fonctions éducatives et sociales des mathématiques. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (SPE3, pp. 1781–1794). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

Ces programmes renvoient à une particularité malienne : les programmes de l'enseignement fondamental (2$^{\text{ème}}$ cycle), contrairement à ceux du lycée, ne s'inscrivent pas dans le projet HPM (Harmonisation des Programmes de Mathématiques) issu d'un mouvement de coopération impliquant Afrique francophone, Océan Indien, Belgique et France. Ils préservent[1] un second cycle de l'enseignement fondamental d'une durée de trois ans (de la 7$^{\text{ème}}$ à la 9$^{\text{ème}}$ année) pour les élèves de 13 à 15 ans, alors que les programmes HPM généralise un modèle d'enseignement secondaire de type collège (11-14 ans) et lycée (15-17 ans).

Les programmes maliens de 1990 nous livrent une caractérisation des besoins en savoir des élèves de 13 à 15 ans et des moyens que les concepteurs de programmes déterminent pour y répondre.

Les autorités maliennes décident, dès 1996, pour pallier les faiblesses du système éducatif (déperdition scolaire, manque de qualification des enseignants), de mettre en place un programme d'éducation pluriannuel, le PRODEC (programme décennal de développement de l'éducation). Les textes officiels publiés en 2000 par le Ministère de l'Education nationale définissent « les grandes orientations de la politique éducative » (janvier 2000), puis le « Cadre général d'orientation du curriculum de l'enseignement fondamental du Mali ». Ces textes officialisent la généralisation d'un modèle d'apprentissage expérimenté depuis 20 ans dans l'éducation de base (élèves de 7 à 15 ans) : la pédagogie convergente. Méthode active d'apprentissage des langues, son objectif est de développer chez l'élève un bilinguisme fonctionnel, l'usage des langues nationales comme médium d'enseignement. L'Approche Par Compétences (APC) s'impose avec le bilinguisme comme un fondement du curriculum.

Dans ce cadre, les programmes de formation sont envisagés sur la continuité des 9 années de scolarité (pour les élèves de 7 à 15 ans), gradués en 4 niveaux, organisés en cinq domaines de compétences qui mettent en avant la finalité éducative globalisante de la formation. Le processus de mise en œuvre du curriculum étant en cours, la question d'une réorganisation du curriculum étant soulevée, nous ne disposons que de certains éléments d'informations (programmes, commentaires).

Ces constats faits, nous pouvons définir notre objet d'étude : Quelles sont les mathématiques qui vivent dans ces ressources officielles depuis 1990 ? Comment évoluent-elles ?

II. SYSTEME EDUCATIF ET ELEMENTS DE CONTEXTUALISATION

1. Comparaison des correspondances établissement-âge

Ages	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
France	<u>Maternelle</u> Petite, Moyenne et Grande sections			<u>Ecole élémentaire</u> CP, CE1, CE2, CM1, CM2					<u>Collège</u> Cycle d'adaptation (6$^{\text{ème}}$) Cycle central				<u>Lycée</u> Seconde de détermination Première			

[1] Créé par la réforme de 1962, l'enseignement fondamental a pour but de rompre avec le système d'enseignement hérité de la colonisation : il promeut un enseignement de « masse », un enseignement de « qualité » par opposition à la formation des seuls subalternes de l'administration, la réduction d'un an du cycle correspondant au collège colonial (second cycle fondamental) en raison des besoins énormes en ressources humaines qualifiées.

				(5ème) Cycle d'orientation (3ème) *Fin d'études sanctionnée par le diplôme national du brevet (DNB)*	Terminale *Fin d'études sanctionnée par un Baccalauréat*	
Mali Programme De 1990	Préscolaire ou jardin d'enfants	Enseignement fondamental 1er cycle (de la 1ère à la 6ème) *Fin d'études sanctionnée par le Certificat de Fin d'Etudes du 1er cycle (CFE)*			Enseignement fondamental 2ème cycle (de la 7ème à la 9ème) *Fin d'études sanctionnée par le Diplôme d'Etudes Fondamentales (DEF)*	Lycée (de la 10ème à la 12ème) *Fin d'études sanctionnée par le Baccalauréat.*
Mali Curriculum de 2000 appliqué partiellement		Niveau 1	Niveau 2	Niveau 3	Niveau 4	

Tableau 1

2. *Le contexte environnemental*

Le contexte éducatif est tributaire de son environnement sociétal. L'éducation est une priorité nationale mais le contexte économique est une contrainte forte dont doit tenir compte une politique éducative appuyée par les Organisations Non Gouvernementales (ONG) et par le secteur privé.

Comme le souligne Vellard (2009, pp. 124-138), le taux brut de scolarisation en augmentation implique une réflexion sur les moyens de stabiliser la proportion d'élèves qui restent dans le système. Cet accroissement du nombre d'élèves se traduit par des classes d'effectifs pléthoriques. La qualité de l'enseignement dispensé reste sensible tout comme la question des débouchés professionnels. Sur la période de 1998 – 2004, la grande majorité des emplois (96%) sont constitués par le secteur informel[2] (professions ne requérant aucun diplôme scolaire). Les faiblesses du système de certification demeurent : sur la période 2003 – 2004, on dénombre 6% de bacheliers, 21% de détenteurs du brevet, 42% détenteurs du certificat de fin d'études avec 67% de scolarisés au primaire. Plus de deux tiers des élèves évalués en 2ème et 5ème années ont un niveau insuffisant en français et en mathématiques.

[2] Activités du commerce et artisanales, emplois dans l'agriculture (respectivement 31% et 65% pour cette période) dont l'apprentissage se fait sur le tas ou dans le cadre de l'apprentissage traditionnel chez un artisan.

La réforme curriculaire tend à répondre à ces défis. Réforme systémique ambitieuse, l'opérationnalisation du curriculum procède par des étapes qui doivent s'achever en 2017 (Rapport 3, *Etude sur le curriculum de l'enseignement fondamental* - janvier 2010).

Le rapport dresse un état des lieux et des perspectives : l'absence d'un fonctionnement systémique opératoire et des performances discutables. L'application du curriculum qui prend en compte 11 langues nationales ne concerne encore que le 1er cycle fondamental. Le rapport souligne la nécessité de préciser et simplifier le curriculum, de fournir des documents[3] aux enseignants et de diminuer le rapport élèves-maîtres, l'urgence d'une réforme de l'évaluation en concordance avec le curriculum.

Le curriculum est fondé sur la généralisation de la pédagogie convergente qui en détermine les objectifs :

- Réaliser une plus grande intégration de l'école au milieu de l'apprenant ;
- Faciliter l'apprentissage des disciplines instrumentales (lecture, écriture, mathématiques) ;
- Améliorer le rendement interne du système éducatif ;
- Valoriser les langues nationales et, par la même occasion la culture. (Traore 2001, p. 4)

Cette pédagogie supprime les obstacles liés à l'usage du français comme médium d'enseignement (déperdition scolaire, blocage psychologique) :

> La pédagogie convergente, en voie de généralisation à travers le pays, est une nouvelle conception de l'école susceptible de donner à l'école malienne une nouvelle finalité : former des élèves autonomes, créatifs, ancrés dans leur culture, mais ouverts vers l'avenir, qui seront les acteurs de la société de demain, tout ce dont notre jeune démocratie a besoin. (Traore, p. 39)

C'est cette perspective qu'adopte D. Vellard (2009, p. 136).

> Pour que l'enseignement des mathématiques puisse participer lui aussi à cette nouvelle éducation endogène, il est urgent de développer des enseignements donnés en langue locale.

Mais d'autres analyses sont à prendre en compte. Maurer (2007, pp. 426–430) relève la nécessité de faire évoluer le cadre conceptuel et les pratiques de la pédagogie convergente pour finaliser un curriculum fondé sur une Approche Par Compétences. Maurer suggère que l'idée de cheminements cognitifs isomorphes pour apprendre langue première et langue seconde mérite une réflexion sur l'articulation entre ce qui relève des méthodes et ce qui relève de la didactique des langues (et des autres didactiques, ajoutons-nous).

Ces éléments traduisent moins une réforme curriculaire qu'une régénérescence d'un système éducatif conduit à produire une nouvelle culture scolaire. La réforme est générée en amont et engage l'opérationnalisation d'un système complexe (le curriculum) : elle montre la nécessité de reconsidérer les programmes disciplinaires, les modes d'évaluation. Elle révèle l'étendue des domaines où concepteurs des programmes, pédagogues, didacticiens, formateurs et bailleurs de fonds sont appelés à mutualiser leurs ressources.

III. LES MATHEMATIQUES DANS LES PROGRAMMES OFFICIELS DE 1990 : QUELLES FONCTIONS ?

1. Les programmes

Les programmes officiels du second cycle de l'enseignement fondamental couvrent treize « matières » dans un ordre qui n'est pas indifférent : la Morale et l'Instruction Civique, le

[3] Cadre d'orientation du curriculum, référentiel, guide pédagogique, module de formation pour un niveau et pour le directeur.

Français, l'Histoire-Géographie, les Sciences Naturelles, les Mathématiques, les Sciences Physiques, les Activités pratiques et ruralisation, l'Economie Familiale, la Technologie, l'Anglais, le dessin, la Musique et l'Education physique et sportive.

La prépondérance du Français, des Mathématiques et des Activités pratiques de ruralisation est affirmée. L'intention des concepteurs est d'équilibrer formation aux humanités classiques et scientifiques et formation pratique, d'associer les caractères éducatifs, sociaux et utilitaires de l'enseignement fondamental… moins discernable en mathématiques.

L'éducation civique et morale présente les enjeux quasi-universels de toute éducation populaire démocratique (p. 6) :

> Au moment où il est question de « l'homme qu'il faut à la place qu'il faut », de « restauration du crédit de l'Etat », de « consolidation de la cohésion et de la solidarité nationale », de « moralisation de la vie publique, du « consommer malien », l'éducation civique et morale visera à former des citoyens éclairés, c'est-à-dire des hommes libres et travailleurs, conscients de leurs devoirs et de leurs droits, capables de juger par eux-mêmes, ayant le sens des lois.

En français, le choix des textes littéraires témoigne de l'intention d'articuler les apports culturels de la littérature africaine et de la littérature française.

La prise en compte du contexte local est affirmée : l'introduction de la notion de peuplement des milieux en sciences naturelles et le thème de l'alimentation traitée en économie familiale soulignent l'importance des enjeux éducatifs et sociaux locaux.

Le programme d'anglais se réfère explicitement à la Charte d'orientation nationale et de Conduite de la vie publique qui préconise d'adapter les programmes aux réalités locales, il souligne la nécessité de prendre en compte des contraintes telles les effectifs pléthoriques.

Le programme de mathématiques n'est pas présenté en termes de finalités : il est découpé en deux domaines « Algèbre et Géométrie ». Ce choix de découpage s'explique par un certain « réflexe de conservation » lié à la période dite des « mathématiques modernes ». On voit bien que ce choix de transposition considère les « nombres » comme partie intégrante du domaine algébrique. Ce choix caractérise des mathématiques peu liées aux applications pratiques : peu de références aux grandeurs (en dehors des angles, aires et volumes des polyèdres), aucune référence aux concepts développés à partir de la proportionnalité (pourcentage, échelle, vitesse...). L'exigence de toute construction axiomatique est écartée, mais la présence du langage des ensembles, les thèmes caractérisent un domaine de savoir motivé par l'existence des objets d'étude emblématiques des deux domaines et non par les enjeux utilitaires et sociaux pour lesquels ces objets pourraient constituer des outils d'intelligibilité.

Il existe pourtant des niches pour des mathématiques pratiques. Par exemple, le programme des « Activités pratiques de ruralisation » décrit des enjeux visant la modification des conduites du citoyen dans un milieu à dominante agro-pastorale (p. 90).

> Au niveau du second cycle, l'agriculture regroupe un certain nombre d'activités pratiques en rapport avec les cours théorique permettant à l'enfant d'appréhender les problèmes de son environnement en vue de sa transformation qualitative.

Les objectifs associent finalités éducatives, sociales, économiques. Les niches que peuvent occuper les mathématiques apparaissent plus ou moins explicitement dans les libellés du programme déclinés en « objectifs opérationnels » :

Calculer les dimensions d'un champ ; tenir un registre des recettes et des dépenses (comptabilité) ; clôturer le jardin ; vendre les plants ; vendre les produits du verger ; tenir un registre d'exploitation (rubrique du reboisement) ; calculer et respecter les rations alimentaires ; vendre les produits de l'élevage ; dresser un bilan mensuel, trimestriel, annuel des activités d'élevage.

Ces tâches convoquent des secteurs des mathématiques appliquées : arithmétique appliquée aux opérations pratiques, arpentage, tenue des livres et gestion des données.

L'éducation technologique (d'introduction récente) expose des orientations proches de celles des activités pratiques de ruralisation.

De la même manière, en géographie, on relève la présence de thèmes relevant de la gestion des données, des statistiques : « relativité des distances et des superficies, problèmes démographiques, détérioration des termes de l'échange, population du globe : notions de répartition, de densité, de natalité, mortalité, accroissement naturel, migrations ».

Une lecture en réseau des programmes permet d'identifier une composante des mathématiques détachée de ses applications, motivée par des raisons d'être internes à la discipline (le développement d'un mode de pensée mathématique universel) et une composante relevant des applications pratiques, propice à une problématisation de situations réelles, apparentée au domaine « Gestion de données ».

Mais cette lecture met aussi en évidence la fragilité de cette seconde composante qui suggérerait un travail de réflexion interdisciplinaire et la prise en compte des contextes locaux. Privé d'un préambule qui en précise les finalités, le programme de mathématiques apparaît comme isolé, marqué par des enjeux éducatifs purement disciplinaires. Une lecture plus détaillée du programme, de ses commentaires, des manuels conformes en tout point au programme permettent d'affiner ce constat.

2. *Le programme de mathématiques*

Le programme officiel de mathématiques de 1990 se présente comme le produit d'un processus de transposition didactique des programmes de mathématiques du collège français de 1980.

En France, le processus de « Contre Réforme » qui succède à la Réforme des maths modernes transforme progressivement la structure des programmes du collège français qui s'organisent à partir de 1985 autour de trois champs d'activités : travaux numériques, travaux géométriques et organisation de données, fonctions. Les programmes du Mali témoignent qu'en 1990, les rédacteurs tiennent compte d'une certaine révision des programmes français, mais n'adoptent pas l'organisation de 1985. Alors que les programmes HPM intègrent en 1992 un domaine « Organisation de données », le programme malien emprunte au programme français de 3ème de 1980 son organisation en deux domaines : algèbre et géométrie.

Le découpage proposé met en exergue la présence des divers systèmes de nombres dans le domaine de l'algèbre, et le passage d'une géométrie des figures du plan vers une géométrie analytique.

En algèbre, sont progressivement mises en évidence les structures des ensembles de nombres (sans le langage des structures) à travers les propriétés des opérations. Dans le secteur « Ensemble N des entiers », se développe en 7ème et 8ème années, un sous-secteur consacré aux propriétés des nombres, « une arithmétique théorique », qui recoupe l'arithmétique du programme français de 1980. Les rédacteurs insistent sur la continuité entre calcul numérique et calcul algébrique : l'introduction des équations et inéquations du premier degré à une inconnue apparaît dans le secteur relevant de l'ensemble des rationnels ; le développement du calcul algébrique, s'inspirant des programmes français de 1980 (4ème et 3ème), se poursuit en 9ème année dans le domaine consacré aux nombres réels. L'importance octroyée au caractère outil des nombres décimaux renvoie à leur usage pour introduire et caractériser de nouveaux nombres, les rationnels, les réels.

Si la présence du calcul numérique est dominante, le rôle de la résolution de problèmes est peu souligné. En 7ème année, nous trouvons la « pratique des opérations dans N dans le système décimal à partir de problèmes pratiques de la vie courante […], « introduction non constructive de Z : faire appel à des exemples de la vie courante, « introduction non constructive de $\boldsymbol{D}$ à partir d'exemples ».

En 8ème, la « Pratique du calcul sur les proportions » parachève l'étude du secteur consacré aux rationnels en termes d'application de la propriété des quotients égaux. Ce thème est repris à un autre niveau de conceptualisation en termes de suites de nombres proportionnelles et sous l'intitulé unificateur des applications linéaires en 9ème. En 9ème, une ligne de commentaire signale que les équations seront utilisées dans la résolution de problèmes pratiques.

Les commentaires du programme ne donnent pas d'éléments sur le caractère « outil d'apprentissage, outil d'intelligibilité pour les pratiques sociales », que pourraient revêtir les problèmes : ce sont les propriétés des opérations, les techniques de résolution sur lesquelles insistent les rédacteurs. Les problèmes pratiques apparaissent comme des prétextes, des moyens pour appliquer ce qui a été étudié, voire de susciter une certaine capacité à reconnaître et appliquer un modèle (cas des proportions, des équations et inéquations).

En conclusion, le programme présente une organisation du savoir où on ne peut discerner d'espace pour des situations de la vie courante visant à promouvoir les finalités sociales de l'éducation mathématique.

IV. LE THEME DE LA PROPORTIONNALITE

1. La proportionnalité4 dans les manuels du second cycle de l'enseignement fondamental publiés par le Ministère de l'Education Nationale (programmes de 1990)

Conformes aux programmes, les manuels publiés sous l'égide de l'Institut Pédagogique National (édition Hatier) disposent d'un sommaire calqué sur la progression thématique de ces derniers, avec une alternance des domaines Algèbre et Géométrie.

Pour le thème de la proportionnalité, en 8ème, la « pratique du calcul sur les proportions » (4 pages sur 194) apparaît après que le secteur d'études relatif à l'ensemble des rationnels a été traité. En 9ème, le thème apparaît au chapitre 10 « Suites de nombres proportionnels *(sic)* », au chapitre 15 « Application linéaire ». Notons qu'en ce qui concerne les fonctions, se succèdent « Application affine (utilisation pratique de ces applications) ch.19, « Application affine par morceaux » ch.23, « Application polynôme à une variable » ch. 25, « Fonction fraction rationnelle » ch. 27. L'organigramme du manuel marque l'émergence d'un secteur autonome dédié aux fonctions, sans lien avec la proportionnalité.

Censé « induire une pédagogie fondée sur l'activité de l'élève », le manuel de 9ème est organisé en chapitres constitués d'activités introduisant des définitions (par exemple, proportion, application linéaire), des techniques permettant de réaliser des types de tâches (« reconnaître une proportion », « former des suites de nombres proportionnels connaissant une proportion »,…) et d'exercices (d'application directe, au nombre d'une dizaine pour chaque chapitre). Les activités proposées dans les chapitres 10, 15 et 19 témoignent d'un appui sur l'évocation d'une certaine réalité (le prix du kilogramme de viande) et sur les liens avec la géométrie (la longueur d'un arc de cercle).

Ainsi, l'activité 1 du chapitre 10 a pour objectif la reconnaissance de deux « suites de nombres proportionnels » : deux situations comprenant dans leur présentation deux tableaux

[4] Thème lié au traitement des problèmes pratiques, noyau du domaine « Gestion de données ».

de nombres (certes référés à des grandeurs (prix CFA, poids ; longueur, angle en degrés)) conduisent l'élève à opérer une réduction à l'unité. La technique qui en résulte « calculer des quotients et vérifier leur égalité » conduit à la définition des suites de nombres proportionnels. Les activités qui suivent (2- reconnaître une proportion : technique donnée par le manuel- « égalité des produits des extrêmes et des moyens » ; 3 – former des suites de nombres proportionnels : techniques liées aux propriétés des opérations) s'affranchissent de tout lien avec le domaine des grandeurs ou avec une réalité évoquée. Les cinq derniers exercices (sur 15) font des liens avec d'autres secteurs (propriétés de Thalès –problèmes de longueurs d'ombres ou de rapport de grandeurs ; partage proportionnel dans des contextes de longueurs).

Le chapitre 15 sur « Application linéaire » se décline selon un processus semblable : une activité[5] liée à une pratique sociale – un boucher, Bamako, en 1990, des prix, des poids de viande : il s'agit de savoir si des suites sont proportionnelles, de calculer le prix pour un poids donné et de reproduire un graphique. L'énoncé propose un tableau de nombres et l'ébauche du graphique (avec des points alignés référant au tableau de nombres). L'élève, guidé, doit comprendre « comment visualiser des suites de nombres proportionnels » dans un repère cartésien, puis savoir « représenter des couples de nombres fournis par une relation de type y = ax », « reconnaître des applications linéaires à partir de leur graphique », « passer du graphique à la formule » et appliquer … pour calculer un arc de méridien terrestre de 13°. Les exercices développent l'étude des aspects formels de la notion (représentation graphique de la fonction caractérisée par son expression algébrique, détermination de cette relation) mais aussi une application (calcul de longueur d'arcs).

Les chapitres portant sur les fonctions confirment qu'elles sont essentiellement étudiées en termes d'objet d'études : l'aspect outil qu'induirait la prise en charge par l'élève d'une modélisation de situations issues de la réalité ou d'un autre domaine mathématique ne peut être évoqué. Certes, les activités introduisant les nouveaux objets (fonctions affines ou affines par morceaux) reposent sur l'interprétation de situations « réelles » (évolution d'un avoir pour un taux d'intérêt donné pour la fonction affine ; lien entre dépense et consommation d'électricité pour les fonctions affines par morceaux). Elles peuvent se constituer en situations de référence, mais le travail de l'élève consiste prioritairement à travailler des techniques hors contexte de modélisation. Ce constat est à mettre en lien avec les analyses de Mopondi et al (2010) portant sur les manuels CIAM élaborés dans le cadre du projet HPM. Les situations, conformes aux intentions des concepteurs de manuels, s'appuient sur une certaine réalité socio-culturelle, mais la tâche de l'élève se réduit à une suite d'observations et d'exécutions de consignes balisées pour découvrir enfin le modèle. Il s'agit pour l'élève de s'initier au formalisme mathématique : l'objectif n'est pas d'utiliser le modèle mais de l'étudier pour développer un mode de pensée permettant de donner sens à la notion de fonction hors de tout contexte « concret » ce qui est le cas pour les fonctions polynômes, fractions rationnelles.

2. La proportionnalité dans les évaluations

Le diplôme de fin d'études fondamentales (DEF) conserve jusqu'en 2009 sa configuration initiale. D'une durée de 2 heures, l'épreuve se découpe en deux composantes Algèbre et Géométrie, comprenant chacune deux à trois exercices.

Le sujet[6] proposé en 2009 confirme une organisation du savoir définie par les programmes de 1990. En algèbre, les élèves doivent d'abord (exercice 1) résoudre un problème concret (un achat) impliquant de modéliser la situation à l'aide d'un système de deux équations à deux

[5] Annexe 1
[6] Annexe 2

inconnues. La présence d'un pourcentage nécessite que l'élève utilise la proportionnalité (directement ou en utilisant une application linéaire). Le second exercice évalue la capacité de l'élève à établir des liens entre langage naturel et langage algébrique, à résoudre deux équations (après conversion des registres langagiers) : recherche de racines carrées (calcul mental pour l'un, décomposition en produits de facteurs premiers pour l'autre…). Le dernier exercice évalue la capacité des élèves à comparer des décimaux exprimés à l'aide de puissances de 10 (distances planète soleil). En géométrie, les deux exercices mobilisent les capacités à construire des figures, les identifier et justifier de leur nature. Les notions de symétrie, les théorèmes de Thalès et de Pythagore sont les outils sollicités.

Cette évaluation montre en termes de découpage et de tâches la résistance des programmes de 1990, la faible part accordée aux applications de la proportionnalité ; elle illustre l'écart entre les enjeux des programmes de 1990 et ceux du curriculum qui s'impose à partir des années 2000 et est publié à partir de juin 2004.

V. UN ECLAIRAGE SUR LES MATHEMATIQUES DANS LE CURRICULUM RENOVE DE L'ENSEIGNEMENT FONDAMENTAL

1. Le contexte général

Dans les « principes généraux » les concepteurs du curriculum rappellent les finalités : former « un citoyen patriote et bâtisseur d'un société démocratique, un acteur du développement profondément ancré dans sa culture et ouvert à la culture universelle, un homme moderne possédant les compétences liées aux progrès scientifiques et technologiques ». Le « profil de sortie » de l'élève est l'expression d'un ensemble de cinq compétences liées à un domaine de formation, appelées à se développer au long des neuf années du curriculum.

Domaines	Libellés des compétences
Langues et communication (LC)	Communiquer oralement et par écrit en tenant compte de la situation de communication
Sciences, Mathématiques et Technologie (SMT)	Résoudre des problèmes de la vie courante
Sciences Humaines (SH)	Comprendre le monde et participer pleinement au développement de son pays
Arts	S'exprimer à travers des productions artistiques
Développement de la Personne (DP)	Intégrer harmonieusement son milieu de vie

***Figure 2** – Compétences du profil de sortie*

Cette approche impose le décloisonnement des disciplines, la création de situation d'apprentissage pour permettre des acquisitions en rapport avec les besoins de la vie et une évaluation formative.

« Le curriculum adopte le bilinguisme fonctionnel de la pédagogie convergente et utilise les éléments de l'unité pédagogique comme support du procédé ». Ces unités pédagogiques (d'apprentissage) représentent « un ensemble nommant les compétences disciplinaires, transversales et de vie, les objectifs d'apprentissage, les contenus d'apprentissages, les activités d'apprentissage et les activités d'évaluation par domaine ». D'une durée mensuelle, elles couvrent les cinq domaines. Les compétences sont de trois types : disciplinaires, transversales (d'ordre intellectuel, méthodologique, personnel, social et communicationnel), enfin compétences de vie (attitudes pour s'adapter à la vie et servir de lien entre apprentissage scolaire et vie quotidienne).

Les programmes de formation pour les niveaux respectifs se déroulent selon l'ordre chronologique des unités d'apprentissage : 14 pour les niveaux 1, 2, et 3 ; 21 a priori pour le niveau 4.

2. *Les compétences mathématiques*

Déclinées dans chacune des unités d'apprentissage (UA) sur la totalité du curriculum, ces compétences sont de deux types, illustrées ici à partir d'un extrait du programme de niveau 4, première année. (En gras, les invariants)

Compétences	Objectifs d'apprentissage	Contenus d'apprentissage
UA 6 **Lire, rédiger et communiquer en utilisant le langage et le symbolisme mathématique**	Lire et écrire les nombre décimaux	Nombres décimaux : Introduction non constructive à partir d'exemple Adoption de l'écriture des nombres décimaux sous forme de nombres à virgule ; Valeur absolue
Résoudre des situations problèmes en utilisant des connaissances, des capacités et des habiletés acquises mathématiques	Résoudre de situations problèmes relatives à l'addition, à la soustraction, à la multiplication et à la division des nombres décimaux	Opérations : addition, soustraction, multiplication Propriétés de ces opérations Quotient à 0,1 près ; à 0,01 près ; à 0,001 près par excès et par défaut de la division de deux nombres entiers ou décimaux Ecriture des nombres décimaux sous forme de fractions décimales
	Construire des figures géométriques	Cercle ; Le cercle disque : construction, définition
	Effectuer des calculs sur les mesures	Périmètre du cercle Aire du disque
	Appliquer la démarche de résolution de la situation problème relatif aux apprentissages de l'unité	**Démarche de résolution de situations problèmes :** **-décodage** **-modélisation de la situation problème (comparaison de la situation à une situation semblable résolue antérieurement)** **-application de différentes stratégies de résolution** **-partage de l'information relative à la situation ; application de la démarche à la résolution des situations problèmes.**

Figure 3 *– Compétences mathématiques*

Les commentaires du programme de 7ème année ne présentent plus le découpage Algèbre/Géométrie mais reproduisent les contenus des programmes de 1990 ; les compétences sont complémentaires, « la seconde d'ordre didactique permettant d'opérationnaliser la première ». Les différentes étapes de résolution d'une situation problème sont présentées comme critères d'évaluation des productions d'élèves.

Des interprétations et des questions s'imposent : l'introduction de la modélisation dans l'enseignement renvoie à l'une des acceptions que propose G. Brousseau, la première :

> Le projet d'introduire la notion de modèle dans l'enseignement peut se traduire de diverses façons. Il convient de distinguer :
>
> - l'enseignement de modèles déjà construits et utilisés,
> - l'initiation à la modélisation,
> - l'initiation à la pratique de la modélisation par les élèves
>
> Car la possibilité de réaliser et de réussir ces opérations sur une grande échelle sont très différentes. (Brousseau 2003, p. 25)

L'insistance sur la dimension langagière renvoie aux analyses de Maurer (2002). Les méthodes de la pédagogie convergente sont-elles applicables à l'apprentissage mathématique ? Leurs fondements théoriques, une théorie de l'apprentissage constructiviste, (synthèse des approches de J. Piaget et L. S. Vygotski), axée sur l'apprenant, une conception de la langue qui se réclame du structuro-globalisme (dans notre cas, une conception du langage mathématique qui renouerait avec une conception structuraliste) sont en décalage sur le dernier point avec des pratiques centrées sur une approche communicationnelle globale (primat de la communication). Ces éléments mettent en évidence la nécessité d'une réflexion didactique sur la nature des méthodes et des situations problèmes.

Le fait que ces situations problèmes doivent faire sens et être ancrées dans des pratiques socio-culturelles n'oblitère en rien la portée cruciale d'une condition : déterminer l'ensemble des concepts accessibles à des élèves de 15 ans pour qu'ils puissent s'approprier une culture scolaire susceptible de développer la culture de leur société.

VI. CONCLUSION

Cette étude limitée met en évidence la stabilité des enjeux socio-culturels et éducatifs de l'enseignement fondamental au cours des deux dernières décennies. La transformation du curriculum en transformant le système éducatif et les méthodes d'apprentissage par le biais de la pédagogie convergente crée les conditions qui motivent une réforme de l'éducation mathématique. La question d'une réforme de l'évaluation (selon l'approche par compétences) apparaît déterminante. Elle entraîne la réflexion sur le développement d'un secteur d'études « mathématiques appliquées aux situations issues de la réalité ».

Les conditions induites par la réforme suscitent encore plusieurs questions :

La réforme du programme de mathématiques semble inéluctable : Comment ? En circonscrivant un ensemble de situations problèmes (liées à des pratiques culturelles et économiques authentiques) et en délimitant une organisation du savoir à posteriori ? Ou inversement ? Quelle caractérisation pour ces situations problèmes ?

Les méthodes de la pédagogie convergente sont-elles compatibles avec des approches didactiques qui promeuvent un enseignement mathématique fortement inscrit dans un contexte réel ?

REFERENCES

Brousseau G. (2003) *Pratique de la modélisation par les élèves et complexité didactique.* Recueil des contributions présentées à la séance du Comité Scientifique des IREM le 26 novembre 2003. (pp. 25-27).

Chevallard Y. (1985) *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chevallard Y. (2002) Organiser l'étude. Ecologie et régulation. *Actes de la 11ème école d'été de Didactique des mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Maurer B. (2007) De la « pédagogie convergente » à l'« éducation bilingue » : généralisation des langues nationales au Mali et transformations du modèle de la pédagogie convergente, *Penser la francophonie-Concepts, actions et outils linguistiques.* Agence Universitaire de la Francophonie, 425-438.

Mopondi A., Malonga-Moungabio F., Denys B. (2010), Education mathématique et attentes de la société africaine : une articulation recherché, un enjeu de formation. *30ème colloque de l'APMEP.*

Traoré S. (2001) *La pédagogie convergente : son expérimentation au Mali et son impact sur le système éducatif,* Monographies Innodata- 6, UNESCO : BIE.

Vellard D. (2009) Vers une éducation post-coloniale favorisant un développement endogène en Afrique sub-saharienne : proposition d'un enseignement endogène des mathématiques donné en langue locale à l'école primaire africaine et ouvert sur le monde. *Actes EMF 2009.* Groupe de travail 4 (pp. 124-138).

Etude sur le curriculum de l'enseignement fondamental Rapport 3 Développement privilégié (janvier 2010) – Agence Française de Développement- République du Mali Ministère de l'Education, de l'Alphabétisation et des langues nationales- CRC SOGEMA.

Curriculum de l'enseignement fondamental, Référentiel Niveau 1. Ministère de l'Education Nationale, Centre National de l'Education (12 juin 2004).

Curriculum de l'enseignement fondamental, programme de formation Niveau 2. Ministère de l'Education Nationale, Centre National de l'Education (mai 2005).

Curriculum de l'enseignement fondamental, programme de formation Niveau 3. Ministère de l'Education Nationale, Centre National de l'Education.

Programme formation de l'enseignement fondamental Niveau 4 1ère année.

Programmes officiels de l'enseignement fondamental second cycle 1990 IPN

Programmes de mathématiques du collège (France) 1980, 1985.

Site : www.educamer.org.

Manuels :

Mathématiques 7ème année, (1995), Ministère de l'Education Nationale/République du Mali, I.P.N. Bamako, Hatier –Paris, Librairie Nouvelle Bamako.

Mathématiques 8ème année, (1995), Ministère de l'Education Nationale/République du Mali, I.P.N. Bamako, Hatier –Paris, Librairie Nouvelle Bamako.

Mathématiques 9ème année, (1996), Ministère de l'Education Nationale/République du Mali, I.P.N. Bamako, Hatier –Paris, Librairie Nouvelle Bamako.

Les curricula et programmes actuellement en vigueur m'ont été fournis par Mamadou Sangare (EdiMath, Mali) : je l'en remercie.

ANNEXE 1

Extrait du manuel : Mathématiques 9ème année, Ministère de l'Education Nationale/ République du Mali, I.P.N Bamako, Hatier –Paris, LIBRAIRIE NOUVELLE,- Bamako.

Chapitre 15 Application Linéaire
Activité 1

Comment visualiser des suites de nombres proportionnels

Voici quelques prix pratiqués en 1990 par un boucher du marché Didiba à Bamako pour la viande de mouton avec os.

Prix en francs CFA	300	1 200	600	1 800	1 500
Masse en kg	0,4	1,6	0,8	2,4	2

S'agit-il de deux suites de nombres proportionnels ?
Peux-tu calculer le prix de 5,3 kg de viande ?
Reproduis le schéma suivant :

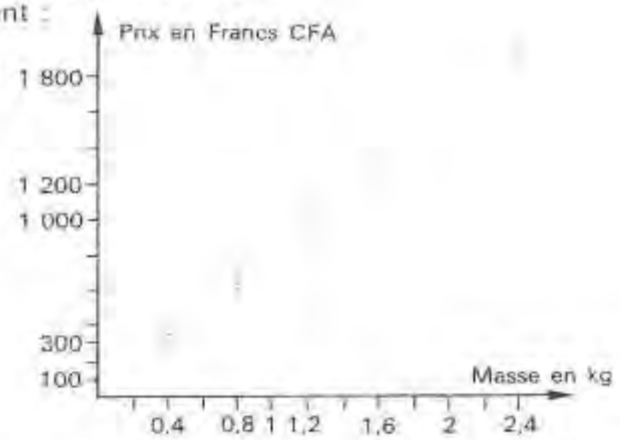


Fig. 1

Si tu regardes le point A, tu vois qu'il correspond au couple (0,4 ; 300), c'est-à-dire : « 0,4 kg de viande coûte 300 F ».
Traduis de même en français la signification des autres points B, C, D, E.
Que constates-tu à propos de ces cinq points ?
Peux-tu lire sur ton graphique le prix de 2 kg de viande ? 1,4 kg ? de 2,2 kg ? de 1 kg ?

Conclusion : Tu as remarqué que le quotient **p** du prix par la masse **m** est constant et égal à 750. On a donc

$$\frac{p}{m} = 750 \quad \text{ou} \quad p = 750.m$$

A chaque valeur de m correspond une valeur de p.

102

ANNEXE 2

Ministère de l'Éducation Nationale
Centre National des Examens et
Concours de l'Éducation

République du Mali
Un Peuple - Un But - Une Foi

EXAMEN : *D.E.F.* *DEF*
SÉRIES : **SESSION** : *Juin 2009*
ÉPREUVE DE : *MATHÉMATIQUES* **DURÉE** : *2 heures* **COEF** :

A/ ALGÈBRE

EXERCICE 1

Au moment des fêtes de Noël, un client achète six boules et une guirlande dans un grand magasin. Il paie 1 840 F. CFA. Le client suivant possède une carte de fidélité de ce magasin lui donnant droit à une réduction de 20% sur tous les articles. Il achète cinq boules et cinq guirlandes. En présentant sa carte de fidélité à la caisse, il paie alors 2560 F. CFA.

Donne le prix d'une boule et celui d'une guirlande.

EXERCICE 2

1. Détermine trois nombres entiers positifs consécutifs, $(x - 1)$, x et $(x + 1)$ dont la somme des carrés est 1 325.
2. Déterminer les deux nombres relatifs dont le carré du triple est égal a 64.

EXERCICE 3

Voici les distances (en km) qui séparent le soleil de trois planètes du système solaire :
Vénus : 105×10^6 ; Mars : $2\,250 \times 10^5$; Terre : $1{,}5 \times 10^8$.
Parmi ces trois planètes, quelle est celle qui est la plus éloignée du soleil. Explique toutes tes démarches.

B/ GÉOMÉTRIE

EXERCICE 1

On considère un cercle (C) de Centre O et de diamètre 8 cm.
I et J sont deux points de (C) diamétralement opposés ; K est un point de (C) tel que JK =4 cm.

1. Précise la nature du triangle IJK. Justifie ta réponse.
2. Calcule IK. Donner le résultat sous la forme $b\sqrt{3}$, avec b entier.
3. Précise la nature du triangle OJK. Justifie ta réponse.
4. On appelle R le symétrique de K par rapport à la droite (IJ).
   Démontre que le quadrilatère ROKJ est un losange.

EXERCICE 2

1. a) Le segment [AB] est donné. Explique la construction géométrique du triangle ABC rectangle en A tel que AB = 6 cm et AC =8 cm à l'aide du compas et du rapporteur.
   b) Montre que BC = 10 cm.
2. a) Place le point E sur le segment [AB] tel que BE = 1,5 cm.
   Place le point F sur le segment [BC] tel que BF = 2,5 cm.
   b) Montre que les droites (AC) et (EF) sont parallèles.
   c) Montre que EF = 2 cm.
3. Soit le point B' symétrique de B par rapport à A.
   Montre que le triangle BB'C est isocèle en C.

LA RESOLUTION DE PROBLEMES EN FRANCE (6 A 12 ANS)

Catherine HOUDEMENT*

Résumé – Le thème de la résolution de problèmes est choisi comme support d'une comparaison entre deux institutions de pays voisins, la communauté francophone de Belgique et la France. Cet article analyse la situation française à travers deux observables que sont les programmes et des manuels scolaires. Cette brève étude permet déjà, à l'intérieur d'un pays, d'interroger l'uniformité de l'enseignement pour un même niveau de classe et la cohérence entre des niveaux différents. Elle questionne l'égalité des enseignements théoriques délivrés aux élèves.

Mots-clefs : résolution de problèmes, programmes, manuels scolaires

Abstract – Problem solving is chosen as comparison topic between institutions of both countries, French Community of Belgium and France. This text analyses the French situation through two teaching aids, textbooks and syllabi. This short study already permits to question, inside a country, the uniformity of the teaching in the same grade and the coherence between different grades. It challenges teaching equality in front of the students.

Keywords: problem solving, national curriculum, textbooks

INTRODUCTION

Pourquoi choisir ce thème pour des comparaisons ? C'est un thème emblématique des mathématiques dans tous les pays et de tous temps, un fondement épistémologique des mathématiques savantes. Il n'est cependant pas sûr qu'il recouvre les mêmes objets, ni ne donne lieu aux mêmes démarches d'enseignement. Nous nous intéressons ici plus spécifiquement à la première école obligatoire. En France, cette première école court de 6 à 11 ans. Mais pour rendre les comparaisons plus riches, notamment avec la Communauté française de Belgique qui présente un texte sur le même thème, nous nous intéressons à la scolarité de 6 à 12 ans et plutôt aux problèmes numériques.

Quelle entrée pour les comparaisons ? Nous nous limiterons à l'approche des curricula, n'étudierons pas la nature des influences didactiques et sociétales qui s'exercent sur ce thème curriculaire (Artigue et Houdement 2007 ; Coppé et Houdement 2010).

Nous nous appuierons sur l'approche systémique de TIMSS (Kuzniak 2006) qui distingue différents niveaux de curriculum : *the intended curriculum*, le programme souhaité, défini par les institutions du pays*, the implemented curriculum,* le programme mis en œuvre par les enseignants sous les contraintes d'enseignements spécifiques et enfin *the attained curriculum*, le programme atteint par les élèves. La modestie de cet article nous engage à ne traiter que certains aspects de ces trois pôles : nous préciserons quelles sont les attentes institutionnelles, regarderons *the implemented curriculum* par la mise en œuvre dans des manuels et lancerons des hypothèses conclusives sur *the attained curriculum.*

Nous verrons que cette étude sur la résolution de problèmes permet de soulever beaucoup de questions, entrées possibles pour des comparaisons dans l'esprit de ce projet spécial.

Cette contribution présente brièvement le thème de la résolution de problèmes et l'organisation de l'enseignement en France, puis étudie le contexte français de ce thème à travers la comparaison de ses traitements dans les derniers programmes de mathématiques du primaire et du collège et l'analyse de manuels scolaires de niveaux 4 et 6. Les différences constatées montrent l'instabilité du traitement de ce thème et laissent supposer une grande variabilité du rapport aux problèmes des élèves français, déjà à l'école primaire.

* LDAR, Universités Paris Denis Diderot et Rouen (IUFM) – France – catherine.houdement@univ-rouen.fr

© Houdement C. (2012) La résolution de problèmes en France (6 à 12 ans). In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (SPE3, pp. 1795–1805). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

Enfin d'autres questions prétextes à comparaison entre pays jalonnent cette étude.

I. LA QUESTION DE LA RESOLUTION DE PROBLEMES

La recommandation d'un enseignement par les problèmes, du moins à l'école primaire, est internationale : « *Using problems during school lessons is widely recommended today as a solution to the challenges faced by contemparu educators*. » (Lampert 2001, p. 3). Cette injonction pédagogique n'est pas dénuée de fondements théoriques à la fois mathématiques, didactiques et cognitifs. D'une part il est universellement reconnu dans le monde scientifique qu'une des activités principales des mathématiciens consiste à résoudre des problèmes. D'autre part, depuis les travaux de Piaget et de ses successeurs, la construction des connaissances par l'action du sujet dans des situations adaptées (dont les problèmes, pour les mathématiques) est une des hypothèses les plus partagées par les psychologues et les didacticiens des mathématiques. L'enjeu fondamental de l'enseignement des mathématiques est donc : comment apprendre aux élèves à résoudre des problèmes, puisque les problèmes sont à la fois la source et la finalité des connaissances mathématiques, aussi bien au niveau mathématique que didactique. La résolution de problèmes nous parait donc être un thème particulièrement propice à des comparaisons entre différents pays. Nous présentons ici une image française de son traitement en fin de scolarité primaire, début de collège.

II. APERÇU SUR LE SYSTEME SCOLAIRE FRANÇAIS

En France la scolarité est obligatoire de 6 à 16 ans, d'abord en primaire (écoles de 6 à 11 ans), puis dans le secondaire (collèges, puis lycées, de 11 à 18 ans). En général l'élève commence sa scolarité (s'il le souhaite) en école maternelle (3 à 6 ans, 3 niveaux de classe), la poursuit à l'école élémentaire (6 à 11 ans, 5 niveaux de classe avec des professeurs généralistes). L'école primaire est aussi découpée en trois cycles (cycle des apprentissages premiers de 3 à 6 ans, des apprentissages fondamentaux de 6 à 8 ans, des consolidations de 8 à 11 ans). La scolarité se poursuit au collège (11 à 15 ans, 4 niveaux d'enseignement général, avec des professeurs disciplinaires ; 4 niveaux d'enseignement adapté SEGPA[1] avec des professeurs des écoles spécialisés) à l'issue duquel est passé le brevet des collèges ou le CFG[2].

Le tableau ci-après résume le système scolaire français.

[1] Section d'Enseignement Général et Professionnel Adaptée.
[2] Certificat de Formation Générale.

<table>
<tr><td></td><td>Baccalauréat technologique</td><td>Baccalauréat professionnel</td><td>Baccalauréat général</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Terminale pro</td><td rowspan="2">Terminale pro</td><td rowspan="2">Terminale</td><td rowspan="4">Lycée général ou professionnel</td></tr>
<tr><td>CAP</td><td>BEP ou CAP</td></tr>
<tr><td></td><td>Première pro</td><td>Première pro</td><td>Première</td></tr>
<tr><td></td><td>Seconde pro</td><td colspan="2">Seconde générale et technologique</td></tr>
<tr><td colspan="4">Brevet des collèges</td><td rowspan="2">Collège</td></tr>
<tr><td colspan="4">Troisième
Quatrième
Cinquième
Sixième</td></tr>
<tr><td colspan="4">CM2
CM1
CE2
CE1
CP</td><td>Ecole élémentaire</td></tr>
<tr><td colspan="4">GS, MS, PS (TPS)</td><td>Ecole maternelle</td></tr>
</table>

Tableau 1 *– Système scolaire français*

La scolarité des élèves de 6 à 15 ans est partagée entre deux institutions, l'école et le collège alors que d'autres pays ont choisi une plus grande continuité de l'école obligatoire. Ce changement de lieu, de temps et de type d'enseignant ou de superviseur n'est pas anodin comme le résume le tableau suivant :

Scolarité	**6 à 11 ans**	**12 à 16 ans**
Lieux différents	37609 écoles élémentaires[3] CP à CM2	7018 collèges [4] $6^{\text{ème}}$ à $3^{\text{ème}}$
Enseignants différents	Généralistes	Spécialistes de mathématiques
Découpages différents	Un enseignant par classe, enseignant 24h par semaine plusieurs disciplines	Un enseignant par discipline, enseignant 15h ou 18h par semaine devant plusieurs classes
Temps des élèves consacré aux mathématiques différents : 2011-12	180 h sur 864 h annuelles : 20,8 % du temps Plages choisies par l'enseignant et pouvant varier (place, durée)	environ 4 h sur 24 h à 28 h semaine 12 % à 17,6 % du temps Plages imposées par l'emploi du temps
Superviseurs différents	IEN généraliste	IA-IPR spécialiste

Examinons comment ces différences systémiques entre école et collège sont accompagnées par les textes de programmes et les propositions des manuels scolaires.

[3] Source Insee 2010-11.
[4] Idem.

III. LA RESOLUTION DE PROBLEMES A TRAVERS DES DOCUMENTS OFFICIELS[5]

Il nous semble intéressant de considérer, pour l'école primaire les textes actuels (2008) et ceux des derniers programmes (2002) dans la mesure où les actuels étaient annoncés, dans la noosphère, en rupture avec les précédents. Ce qui n'est pas le cas des textes de collège.

1. Les textes des programmes du primaire 2002

Les textes de programmes 2002 (MJER 2002 a et b) sont particulièrement nombreux. Pour les mathématiques ils se composent de deux documents, un pour chaque cycle (cycle 2, 37 pages et cycle 3, 70 pages) qui déclinent les contenus en compétences et commentent ces compétences. Ils comportent sept rubriques dont une transversale aux mathématiques (*Place des problèmes dans les apprentissages,* 2 pages A4 pour chaque cycle) avec quatre fonctions pour les problèmes : construire des connaissances nouvelles, chercher, appliquer, réinvestir dans du plus complexe. La rubrique *Exploitation de données numériques* (3 pages A4 pour chaque cycle) se centre sur les problèmes arithmétiques et l'organisation de données. Les six autres rubriques sont *Connaissance des nombres entiers naturels*, *Connaissance des fractions et des nombres décimaux*, *Calcul*, *Espace et géométrie*, *Grandeurs et mesure*.

Un grand nombre de conseils (type de tâches, procédures à accepter…) sont prodigués, des mises en garde sont présentes. Un document complémentaire (MENESR 2005, 96 pages, 9 chapitres) focalise ces conseils sur les problèmes en deux chapitres *(Les problèmes pour chercher* et *Résolution de problèmes et apprentissage)* qui correspondent aux deux premières fonctions des problèmes.

2. Les textes des programmes 2008 : école et collège

Les textes des programmes du primaire 2008 tiennent en 39 pages A4, toutes disciplines confondues. Ils mettent en avant le principe de la liberté pédagogique. Les mathématiques sont découpées en quatre domaines : *Nombres et calcul, Géométrie, Grandeurs et mesure, Organisation et gestion de données*. Des commentaires généraux déclarent que les élèves doivent rencontrer des problèmes, qu'ils jouent un rôle essentiel dans les apprentissages mais sans précision sur ce rôle : par exemple au cycle 2, p. 18 « La résolution de problèmes fait l'objet d'un apprentissage progressif et contribue à construire le sens des opérations » ; au cycle 3 p. 22 « … l'élève continue d'apprendre à résoudre des problèmes ».

On trouve des explicitations du type : « problèmes simples à un opération », « problèmes de la vie courante » (BO 2008, cycle 2, p. 33), « problèmes engageant une démarche à une ou plusieurs étapes », « savoir organiser les données d'un problème en vue de sa résolution » (BO 2008, cycle 3 p. 39).

Un document complémentaire (*Le nombre au cycle 2,* 97 pages B5, huit contributions) est paru en 2010, commandé par le Ministère, a priori pour accompagner les programmes 2008. La rédaction en a été confiée à des universitaires didacticiens ou des inspecteurs de circonscription, volontaires pour le thème. Les diverses contributions ne sont pas toujours en phase ni entre elles, ni avec les programmes 2008. Deux textes traitent des Problèmes arithmétiques : ils développent une progressivité de rencontre avec les problèmes (surtout additifs) en jouant sur la classification de Vergnaud (1997) et les variables et proposent une entrée dans la multiplication et la division par les problèmes.

---

[5] Voir tableaux synoptiques en annexes

Les textes de programmes de mathématiques du collège, dans la continuité de ceux de 2005, se déclinent sur les mêmes cinq domaines des programmes de l'école. Ils associent explicitement la résolution de problèmes à l'activité mathématique et les mathématiques à, entre autres, des outils pour la résolution de problèmes (BO 2008b p10). L'accent est mis sur la construction des processus de preuve. Les objectifs des problèmes sont mentionnés pour chaque domaine, pour faire apprendre et utiliser de nouvelles connaissances, entraîner au raisonnement, apprendre à présenter correctement des résultats (BO 2008b p. 14).

En ce qui concerne les mathématiques du socle commun, on ne trouve aucune occurrence du mot problème pour le palier 1 (fin de cycle 2) ; se lit pour le palier 2 (fin de cycle 3) une phrase globale mais cependant assez hétérogène :

> résoudre des problèmes relevant des quatre opérations, de la proportionnalité et faisant intervenir différents objets mathématiques : nombres, mesures, « règle de trois », figures géométriques, schémas.

Pour le palier 3 (fin de scolarité obligatoire), les problèmes « inspirés de situations concrètes de la vie courante » (p. 11) apparaissent comme les supports permettant l'évaluation des « principaux éléments de mathématiques et de culture scientifique et technologique ».

3. *En résumé*

Les programmes 2008 se démarquent des programmes 2002 par une vision simple (voire simpliste) et un consensus mou sur les problèmes comme utiles aux apprentissages et outils d'évaluation. La possibilité de fonctions différentes pour la résolution de problèmes, très présentes dans les programmes de primaire 2002 (introduire, entraîner, chercher) est absente, la fonction « pour chercher » et ce qu'elle embarquait (comparer des procédures, argumenter) disparaît. Par contre au collège le processus de preuve joue une place essentielle, mais sans doute plus dans le domaine géométrique que numérique. On peut donc s'interroger sur les conséquences des manques de continuité temporelles (programmes successifs) et spatiales (niveaux d'enseignement différents).

IV. ETUDE DE MANUELS

Les manuels scolaires fournissent aux enseignants des repères pour leur programmation annuelle et leurs progressions thématiques, des exercices et/ou problèmes pour leurs élèves. Aussi bien à l'école qu'au collège, il est rare que les enseignants n'utilisent qu'un seul manuel que ce soit pour préparer leur cours ou choisir des exercices pour leurs élèves. Gueudet et Trouche (2009) ont montré, à propos de genèses documentaires des professeurs de collège, comment les enseignants transforment les ressources qu'ils utilisent, mais aussi comment celles-ci peuvent modifier leurs pratiques. Margolinas et Wozniak (2009) parlent de document générateur pour le professeur des écoles, une sorte de noyau qui les aide à penser les articulations globales en mathématiques. Un manuel peut donc avoir une influence sur les pratiques des enseignants du moins à l'école.

Nous allons examiner deux collections pour le primaire (car les manuels peuvent être contrastés) et une seule pour le collège (plus unitaire dans ses propositions) et centrer notre étude sur les problèmes numériques.

1. *Manuels école primaire annoncés conformes aux programmes 2008*

Le manuel de l'élève *Compagnon maths CM1*, Sedrap 2008 (188 pages, écrites par de professeurs des écoles) se compose, de façon assez a-typique en primaire de quatre rubriques juxtaposées[6] qui reprennent les intitulés des domaines du programmes. Il n'y a donc pas de rubrique spécifique Problèmes, mais le *Guide de l'enseignant* (Sedrap 2008) insiste sur la résolution de problèmes et rappelle trois de ses fonctions données en 2002 : construire de nouvelles connaissances, s'exercer et s'entraîner, apprendre à chercher. Chaque séquence de la rubrique *Nombre et calcul* contient une partie destinée au calcul, mais aussi une Situation-Problème avec un texte de « Solution expliquée » qu'il s'agit de réinvestir dans un autre problème annoncé par « J'applique ». Dans les activités individuelles, les problèmes ne sont pas systématiques : l'ensemble consacré aux problèmes couvre au maximum une page (sur 4) par séquence. Par contre en fin de manuel, avant une liste de 16 problèmes à résoudre, figurent sur quelques énoncés des questions sur du type « trouve la question pour chaque énoncé et résous le problème » (1 fois) « supprime les informations inutiles et résous le problème ». L'espace consacré aux problèmes est en gros 24 pages sur 170 soit 14% de l'espace leçons.

Le manuel de l'élève *Euro Maths CM1* Hatier 2009 (207 pages, écrites par des didacticiens), se compose, comme la majorité des manuels de mathématiques de primaire, de six rubriques imbriquées. Le Livre du Professeur (Hatier 2009) enrichit beaucoup le manuel scolaire en proposant des activités introductrices, des aides à la gestion collective et individuelle des élèves et une préface qui justifie les raisons des choix des progressions. Le domaine Nombres et Calcul est scindé en 3 rubriques Nombres entiers, Fractions et décimaux, et enfin Problèmes et calcul (61 pages). Les rubriques sont partagées en étapes, toutes les étapes démarrent par une Découverte, un problème dans les rubriques numériques. Dans la rubrique Problèmes et calcul (61 pages), les problèmes sont dotés de différents objectifs : apprendre et consolider les choix et les techniques opératoires par des problèmes (22 pages sur 180, suivies de pages dévolues au calcul réfléchi et à l'apprentissage des techniques), entraîner à la résolution (2 pages d'aides méthodologiques), faire chercher (2 pages où le raisonnement est particulièrement sollicité). Une double page de cette rubrique propose en général un problème numérique destiné à être étudié collectivement et une dizaine de problèmes plus individuels. Les problèmes sont souvent organisés selon des critères issus des résultats de Vergnaud (synthèse 1997). L'espace consacré aux problèmes, uniquement dans cette rubrique[7] représente 26 pages sur 180 : 14,4 % de l'espace leçons.

En résumé, dans les deux manuels du CM1, les déclarations d'intention sur le rôle des problèmes sont les mêmes, influencés par les programmes 2002. Mais le traitement effectif est différent. Dans le second manuel étudié, la surface du livre accordée aux problèmes est plus importante ; les problèmes ne sont pas noyés dans une séquence : ils sont pris comme objets d'étude. Le second manuel contient des problèmes plus résistants (problèmes pour chercher), les activités d'aide méthodologique n'ont pas de caractère « général » (avec l'hypothèse implicite qu'il existerait une compétence générale de résolution de problèmes Coppé et Houdement 2001) comme dans le premier manuel. On peut donc pointer une intégration différente de connaissances didactiques relativement aux problèmes arithmétiques (Vergnaud 1997 ; Julo 2002 ; Fagnant et Demonty 2004 ; Houdement 1999, 2003, 2009), ce dont l'enseignant n'a pas nécessairement conscience.

2. *Manuel collège*

Le manuel de l'élève *Triangle 6ème*, Hatier 2009 (290 pages, écrits par des professeurs) est divisé, comme tous les manuels de mathématiques de collège, en chapitres juxtaposés regroupés selon les cinq domaines du programme (voir plus haut). Dans le

[6] Un exemple d'imbrication des rubriques (ordre des 39 séquences) est proposé en fin de livre.
[7] Il existe des problèmes dans les autres rubriques.

sommaire le mot Problèmes n'apparaît en regard que de trois chapitres (sur 15) Multiplication et problèmes, Division et problèmes, Fractions et problèmes. Pourtant il existe bien dans chaque chapitre des Problèmes à résoudre avec les connaissances du chapitre.

Prenons par exemple le chapitre Division et problèmes : quatre volets *Un point sur les connaissance*s (pré-requis pour la leçon) ; *Activités* pour introduire multiples, diviseurs, division décimale et valeur approchée du quotient ; *Connaissances* qui résument ce qu'il faut savoir et *Exercices* qui se décomposent en calculs à effectuer ou à étudier, mais aussi problèmes : reconnaître (8 problèmes « à une opération ») l'opération en jeu ; résoudre 12 problèmes de division quotition ou partition[8] dont les difficultés sont plutôt liées aux variables numériques (nature_ entier ou décimal_ du produit, du multiplicateur, du quotient à chercher, place de ce nombre par rapport à 1) qu'aux contextes et raisonnements en jeu ; résoudre des problèmes (environ 15) « à plus d'une opération » ; et enfin des problèmes (10) « autres » : problème ouvert, raconter sa recherche, avec un tableur, problèmes avec beaucoup d'informations …. Le manuel propose également deux pages (QCM et problèmes corrigés en fin de volume) pour faire le point et se préparer au contrôle (pp. 62-63).

3. *En résumé*

Les manuels des élèves de l'école primaire et du collège sont en général structurés différemment, ce qui semble en conformité avec des pratiques bien souvent différentes en termes chronogénétiques : avancée par séquence de leçons à l'école, avancée par chapitre, et donc quasiment par rubrique au collège[9]. Les exercices des chapitres collège sont plus nombreux, sans doute pour retravailler des connaissances anciennes qui ne seraient pas revisitées sinon. A l'école, le manuel prend en charge cet étalement de la fréquentation des connaissances et les répartit (du moins en intention) tout au long de l'année.

Si les problèmes en primaire visent les progrès en calcul et en raisonnement, au collège la finalité principale semble être l'excellence calculatoire : aucune aide à la résolution n'est envisagée, tout se passe comme si les capacités de calcul suffisaient pour bien résoudre. Il est vrai aussi que la plupart des problèmes du chapitre se résolvent avec les outils mathématiques du chapitre.

Cette brève étude nous montre que sur la résolution de problèmes, les tendances peuvent être différentes selon les manuels, selon les cycles.

V. DISCUSSION

1. *Sur la structure de l'école dans un pays*

La différence française entre école et collège, avec tout ce qu'elle embarque (différence de lieu, de fonctionnement de classe, de qualification des enseignants encadrant, de manuels…) ne se retrouve pas dans tous les pays pour des élèves de 11-12 ans. Quels effets ont ces ruptures sur la mémoire des connaissances des élèves, sur l'acquisition de nouvelles connaissances ? Ce sont des questions didactiques encore peu explorées, sauf peut-être par les sociologues (Bonnery 2007). Ces ruptures existent-elles ailleurs ? Comment sont-elles étudiées ? Prises en compte ?

[8] Nous les avons analysé comme tels, cette typologie est indiscernable dans le manuel.
[9] et sans doute aussi topogénétiques : l'élève peut s'exercer, hors classe, sur des exercices nouveaux.

2. Sur le manuel

Le changement de la structure du support de travail pour l'élève, en l'occurrence le manuel scolaire est-il pris en compte ? Ce changement ne relève pas uniquement du collège : en effet à l'école au cycle 2, les élèves écrivent très souvent sur un fichier (un livre-cahier personnel proposant des emplacements pour des réponses manuscrites), qui est corrigé par l'enseignant, alors qu'au cycle 3, les élèves travaillent avec un manuel. Quelle que soit la classe, tous les enseignants ne souhaitent pas que les élèves aient leur propre manuel, certains travaillent uniquement avec des photocopies.

A l'école le manuel est essentiellement utilisé comme support d'activités, il ne joue pas le rôle de référence. Au collège le livre joue à la fois le rôle d'aide pour entrer dans la leçon, de leçon, d'entrainement sur la leçon (avec souvent des exercices autocorrectifs).

Finalement le manuel est-il une aide pour l'élève ? Est-il même pensé pour cela ? Quel rôle joue-t-il dans l'enseignement et pour les apprentissages ?

3. Sur le thème étudié : la résolution de problèmes

La variété des problèmes proposés dans un champ conceptuel donné ne semble de la même richesse dans tous les manuels. Prenons l'exemple des structures multiplicatives : au collège les problèmes de division semblent se limiter à la division quotition et partition (pas de problèmes de comparaison, des problèmes de proportionnalité seulement dans le chapitre éponyme). A l'école avec *Compagnon* l'élève n'est souvent confronté dans un chapitre qu'à des problèmes relevant de l'opération du chapitre. Avec *Euromaths* il rencontre à chaque fois différents types de problèmes multiplicatifs, ne relevant jamais que d'une seule opération. La vigilance sur la variété des problèmes à rencontrer dans un champ conceptuel ne semble pas assurée de la même façon dans tous les manuels. Cela signifie que des connaissances didactiques sur les problèmes arithmétiques sont loin d'être partagées dans les pratiques, même des auteurs de manuels.

La sollicitation du raisonnement de l'élève n'est pas de même richesse dans tous les manuels : un seul des manuels étudiés (*Euro maths*) propose des problèmes pour lesquels les élèves ont à construire une stratégie originale annoncé (titre de l'étape : Problèmes pour chercher) ; dans les deux autres la complexité du problème touche essentiellement à la planification du traitement ou au grand nombre d'informations.

Les aides méthodologiques ne sont pas assumées de la même façon. Dans deux manuels *Compagnon* et *Triangle*, il s'agit de considérations générales qui apparaissent au détour d'un problème et dont la validité locale (a fortiori générale) est fausse, comme par exemple souligner les informations utiles, écrire l'opération avant de résoudre... Dans *Euro Maths* il s'agit d'aides locales assumées et explicitées : apprendre à simplifier les données pour raisonner, par exemple remplacer par nombres plus petits, plus "ronds" (multiples de dix), par des nombres entiers.

Les manuels français, par leur diversité et leur « liberté pédagogique », sont donc créateurs d'hétérogénéité didactique : dans certains de leurs choix il se pourrait même qu'ils fassent obstacles à la formation des enseignants, en laissant survivre des activités d'enseignement sans effet reconnu, voire génératrices de perturbations.

4. Sur le rôle des programmes

Des différences d'approche didactique sont lisibles par comparaison dans les textes des programmes 2002 et 2008. Comment les enseignants vont-ils interpréter ces changements ?

Phénomène de mode, nouvelles recherches en didactique ? Des changements conséquents non explicités entre deux textes de programmes successifs risquent de créer des pratiques alambiquées qui recomposeraient des éléments des anciens et nouveaux programmes.

Les documents d'accompagnement (2002, 2008) visent à permettre une meilleure interprétation des textes des programmes. Or ils engendrent parfois des effets de radicalisation (Sierpinska 2006) par exemple quand ils développent plus finement de « nouveaux objets », tels les « problèmes pour chercher » (MENESR 2005 pp. 7-14). Un rapport de l'Inspection Générale de l'Éducation Nationale sur l'enseignement des mathématiques, basé sur des observations de classe de cycle 3, signale que les problèmes proposés aux élèves sont souvent complexes (pour qu'ils cherchent) aux dépens des entrainements systématiques sur des problèmes ordinaires. De plus la conclusion de telles séances reste souvent insuffisamment riche en apprentissages mathématiques.

Les documents d'accompagnement peuvent aussi neutraliser des revirements de programmes. L'inhibition de la résolution de problèmes dans les programmes 2008 est contrebalancée par les développements sur les problèmes arithmétiques dans le document complémentaire, *le Nombre au Cycle 2* (MEN 2010 pp. 53-76) : ces développements, globalement en accord avec les théories scientifiques, donnent des éléments tangibles pour la classe (voire des progressions) accessibles aux formateurs de terrain, non spécialistes des mathématiques et de sa didactique. Comment sont- ils lus par les enseignants ?

Qu’en est-il ailleurs ? Assiste-t-on aussi à des ruptures de tendances entre deux programmes successifs ? Ces ruptures sont-elles explicitées et justifiées par des accompagnements ? Se limite-t-on à des injonctions ? La cohérence entre les différents textes de programmes est-elle examinée ?

Cela met certes en jeu la responsabilité des concepteurs de programmes, mais ceux-ci doivent se soumettre aux contraintes de temps, de quantité et aussi de la culture moyenne des enseignants. Quelles modalités s’exercent dans les différents pays ? Les programmes peuvent-ils ignorer des résultats didactiques ? Ne pas les intégrer avec des raisons valables ?

Les programmes respectent- ils un continuum sur l’école obligatoire dans d’autres pays ?

VI. CONCLUSION

L'objectif de départ était de donner une image de l'école primaire et du début de collège français relativement à un thème récurrent de l'enseignement des mathématiques, la résolution de problèmes. Cette étude a relevé des décalages sur le traitement de ce thème entre deux programmes d'écoles école successifs (2002 et 2008), entre programmes d'école et de collège simultanés ; elle a aussi noté des choix didactiques différents dans des manuels d'un même niveau.

Cette étude met en avant une certaine variabilité intra-pays, qu'il s'agisse du *curriculum intended* ou du *curriculum implemented.* Comment l'enseignant qui doit naviguer entre les injonctions de l'institution et les lectures scientifiques peut-il tenir le cap ? Dans la grande variété des possibles il se pourrait que la régulation vienne des évaluations qui ont tendance à se multiplier. Mais les évaluations sont-elles pensées pour réguler les apprentissages ? L'étude d'autres pays devrait permettre d'étudier si ces questions sont partagées et comment elles sont traitées.

REFERENCES

Artigue M., Houdement C. (2007) Problem Solving in France: didactic and curricular perspectives. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* vol. 39/5-6, 365-382.

Coppé S., Houdement C. (2001) Réflexion sur les activités concernant la résolution de problèmes à l'école primaire. *Grand N* 69, 53-62.

Coppé S., Houdement C. (2010) Résolution de problèmes à l'école primaire : perspectives curriculaire et didactique. In *Actes du 35ème Colloque des formateurs d'enseignants du premier degré en mathématiques* (pp. 48-71). ARPEME.

Fagnant A., Demonty I. (2004) *Résoudre des problèmes : pas de problème !* Bruxelles : De Boeck .

Gueudet G., Trouche L. (2009) Vers de nouveaux systèmes documentaires des professeurs en mathématiques. In Bloch I., Conne F. (Eds) (pp. 109-134) *Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Houdement C. (1999) Le choix des problèmes pour « la résolution de problèmes. *Grand N* 63, 59-76.

Houdement C. (2003) La résolution de problèmes en questions. *Grand N* 71, 7-24.

Houdement C. (2009) Une place pour les problèmes pour chercher. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 14, 31-60.

Julo J. (2002) Des apprentissages spécifiques pour la résolution de problèmes ? *Grand N* 69, 31-52.

Kuzniak A. (2006) Diversité des mathématiques enseignées ici et ailleurs : l'exemple de la géométrie. In *Actes du colloque Enseigner les mathématiques en France, en Europe et ailleurs*. IREM de Strasbourg.

Margolinas C., Gueudet G. (2009) Place des documents dans l'élaboration d'un enseignement de mathématique à l'école primaire. In Bloch I. & Conne F. (Eds) (pp. 135-146) *Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Sierpinska A. (2006) Entre l'idéal et la réalité de l'enseignement mathématique. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 11, 5-40.

Vergnaud G. (Dir) (1997) *Le Moniteur de Mathématiques cycle 3* : *Résolution de problèmes*. Paris : Nathan.

DOCUMENTS OFFICIELS (ISSUS DU MINISTÈRE DE L'EDUCATION NATIONALE)

MJER (2002a) *Mathématiques : cycle 2.* Documents d'application des programmes. Scéren-CNDP.

MJER (2002b) *Mathématiques : cycle 3.* Documents d'application des programmes. Scéren-CNDP.

MENESR (2005) *Mathématiques. Ecole primaire.* Documents d'accompagnement des programmes. Scéren-CNDP,

MENESR (2006) *L'enseignement des mathématiques au cycle 3 de l'école primaire*. Rapport de l'Inspection Générale de l'Éducation Nationale.

MEN (19 juin 2008a) BO spécial n°3 Horaires et programmes d'enseignement de l'école primaire,

MEN (28 août 2008b) BO spécial n°6 Programmes du collège : enseignement des mathématiques.

MEN (2010) *Le nombre au cycle 2.* Scéren-CNDP.

MANUELS SCOLAIRES

Boëche S., Delpeuch R. (2008) (Dirs) *Compagnon Maths CM1*. Paris : Sedrap.
Mole Y. (2008) *Compagnon Maths CM1. Le guide de l'enseignant* . Paris : Sedrap.
Peltier M.-L. & al (2009) *Euro Maths CM1*. Paris : Hatier.
Peltier M.-L. & al (2009) *Euro Maths CM1. Livre du professeur*. Paris : Hatier.
Chapiron G. & al (2009) *Mathématiques Triangle $6^{ème}$*. Paris : Hatier.

ANNEXES

On recense différentes fonctions d'apprentissage pour les problèmes dans le programme	A. Problèmes pour apprendre : rencontrer B. Problèmes pour entrainer : appliquer C. Problèmes pour réinvestir : planifier, organiser D. Problèmes pour chercher : inventer, prouver E. Problèmes pour évaluer

Programmes EE 2002	**Programmes EE 2008**
Math (107 pages + 96 pages)	Tout 39 pages + Math (48 p. cy2 + ? Cy3)
<u>7 rubriques</u> Exploitation de données Connaissance des nombres entiers naturels Connaissance des fractions et des nombres décimaux / Calcul Espace et géométrie / Grandeurs et mesure	<u>4 rubriques</u> Organisation et gestion de données Nombres et calcul Géométrie Grandeurs et mesure
dont une explicitement transversale Place des problèmes dans les apprentissages	
<u>4 fonctions pour les problèmes</u> A B C D	<u>Pas de typologie, mais des expressions</u> * problèmes simples à une opération * problèmes de la vie courante * problèmes engageant une démarche à une ou plusieurs étapes * savoir organiser les données d'un problème en vue de sa résolution

Début collège 2005 : $6^{ème}$	**Début collège 2008 : $6^{ème}$**
<u>4 rubriques</u> Organisation et gestion de données. Fonctions Nombres et calcul Géométrie Grandeurs et mesure	<u>4 rubriques</u> Organisation et gestion de données. Fonctions Nombres et calcul Géométrie Grandeurs et mesure
Résolution de problèmes (math et autres disciplines) dans chaque rubrique, dans continuité programme école 2002	Problèmes encore plus explicités dans introduction, dans chaque rubrique math et sciences (démarche d'investigation)
Fonctions A B	Fonctions A B C D Problèmes pour apprendre du nouveau Problèmes pour réinvestir des connaissances anciennes (dialectique outil-objet) Avec différents degrés d'ouverture

L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES EN FRANÇAIS AU CANADA ANGLAIS : CAS DE L'ONTARIO ET APERÇU DES AUTRES PROVINCES ET TERRITOIRES

Daniel H. JARVIS* – Erin BROCK* – Viktor FREIMAN** – Philippe R. RICHARD***

Résumé – Pour aider à comprendre la diversité canadienne dans l'enseignement des mathématiques, notre contribution porte sur la réalité canadienne anglaise, complétant les études sur le Québec et le Nouveau-Brunswick. Cette découpure s'inscrit dans une logique linguistique et constitutionnelle: chaque région doit fournir à leurs minorités l'enseignement primaire et secondaire dans leur langue (l'anglais au Québec, le français partout ailleurs), mais l'éducation demeure la responsabilité exclusive des provinces et des territoires. Si officiellement, le Québec est unilingue et le Nouveau-Brunswick bilingue, le Canada anglais se compose de minorités francophones et il offre des cours d'immersion qui parachève la comparaison du panorama canadien.

Mots-clefs : enseignement des mathématiques, panorama canadien, spécificité du Canada anglais

Abstract – To help understand the diversity that exists in Canadian mathematics education, this contribution focuses on the reality of English Canada, complementing the separate studies we have completed on Québec and New Brunswick. As a country that is officially «bilingual» (English/French), Canada has unique constitutional considerations within education: each region must provide minority populations with both primary and secondary level education in their own language (English in Québec, French elsewhere), yet education remains the sole responsibility of the individual provinces and territories. Officially, Québec is «unilingual», New Brunswick is «bilingual» and the remainder of English Canada is composed of French-speaking minority populations, who are guaranteed schooling in French according to the Charter. Regular weekly French instruction is offered in most English schools, and full French immersion programs are also offered in many jurisdictions.

Keywords: mathematics instruction, Canadian context, and specificity of English Canada

I. LE SYSTÈME ÉDUCATIF CANADIEN

Au Canada, l'éducation est gérée par chaque province et territoire. Il n'existe pas d'ordre professionnel pancanadien ni de curriculum commun. Selon le Conseil des ministres de l'Éducation du Canada (CMÉC) :

> Au Canada, il n'y a ni ministère fédéral de l'Éducation ni système national intégré d'éducation. Dans le système fédéral de partage des pouvoirs, la Loi constitutionnelle de 1867 du Canada stipule que, dans « chaque province, la législature pourra exclusivement décréter des lois relatives à l'éducation ». Dans les 13 instances – 10 provinces et trois territoires, les ministères de l'Éducation sont responsables de l'organisation, de la prestation et de l'évaluation de l'éducation primaire et secondaire, de la formation technique et professionnelle et de l'enseignement postsecondaire. Certaines provinces et certains territoires sont dotés de deux ministères, l'un responsable de l'éducation primaire-secondaire et l'autre de l'enseignement postsecondaire et de la formation professionnelle. (CMÉC, n.d.)

Le Canada est officiellement bilingue : la Constitution reconnaît le français et l'anglais comme ses deux langues officielles. Pour l'éducation primaire et secondaire, l'enseignement dans la langue de la minorité est un fait accepté à travers le Canada.

> D'après le recensement de 2006, plus de 85 p. 100 des Canadiennes et Canadiens de langue maternelle française vivent au Québec ; les droits linguistiques en milieu minoritaire des élèves francophones résidant à l'extérieur du Québec et des élèves anglophones vivant au Québec sont protégés par la Charte canadienne des droits et libertés. Cette charte définit les conditions sous lesquelles les Canadiennes et Canadiens ont le droit d'avoir accès à une instruction publique dans la langue de la minorité. Chaque

* Nipissing University – Ontario, Canada – danj@nipissingu.ca
** Université de Moncton – New Brunswick, Canada – viktor.freiman@umoncton.ca
*** Université de Montréal – Québec, Canada – philippe.r.richard@umontreal.ca

© Jarvis D. H., Brock E., Freiman V., Richard P. R. (2012) L'enseignement des mathématiques en français au Canada anglais : cas de l'Ontario et aperçu des autres provinces et territoires. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (SPE3, pp. 1806–1823). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

> province et territoire ont créé des conseils scolaires francophones pour gérer le réseau d'écoles où le française est la langue première. Au Québec, la même structure existe pour l'éducation en anglais langue première. (CMÉC, n.d.)

Selon le Conseil Canadien d'Apprentissage, les francophones vivant à l'extérieur du Québec font face à des défis particuliers notamment ceux liés à l'éducation :

> Au Canada, on retrouve deux groupes de communautés de langue officielle en situation minoritaire : les anglophones au Québec et les francophones hors Québec. Bien que les deux groupes aient plusieurs défis à relever, les minorités francophones font face à des problèmes particulièrement importants : déclin démographique et vieillissement de la population, taux d'emploi inférieur à la moyenne et taux de chômage supérieur à la moyenne, accès limité aux manifestations culturelles et aux artéfacts, et, finalement, possibilités réduites d'instruction et faibles résultats scolaires. (2009, p.2)

La Fédération Canadienne des Enseignantes et des Enseignants (2008) a souligné que les écoles de langue française peinent dans leur responsabilité de faire respecter les exigences de l'institution scolaire, tout comme dans la construction de l'identité culturelle :

> De façon générale, l'éducation vit des changements profonds et les écoles tentent de s'ajuster aux nouvelles réalités sociales à la mesure de leurs moyens. L'école de langue française n'échappe pas aux grands courants pédagogiques et psychoéducationnels. Elle doit relever les mêmes défis que l'école de la majorité en constatant souvent que cette dernière a une longueur d'avance appréciable. Chaque évaluation d'envergure, par exemple, nous rappelle que la barre est bien haute pour les écoles francophones en milieu minoritaire. (p. 7)

Selon les données récentes recueillies auprès des différents sites des gouvernements provinciaux et de leurs ministères de l'Éducation, le diagramme et le tableau suivants (Figure 1, Tableau 1) montrent, selon le nombre d'inscriptions, la répartition des élèves francophones dans l'ensemble du Canada, hors Québec

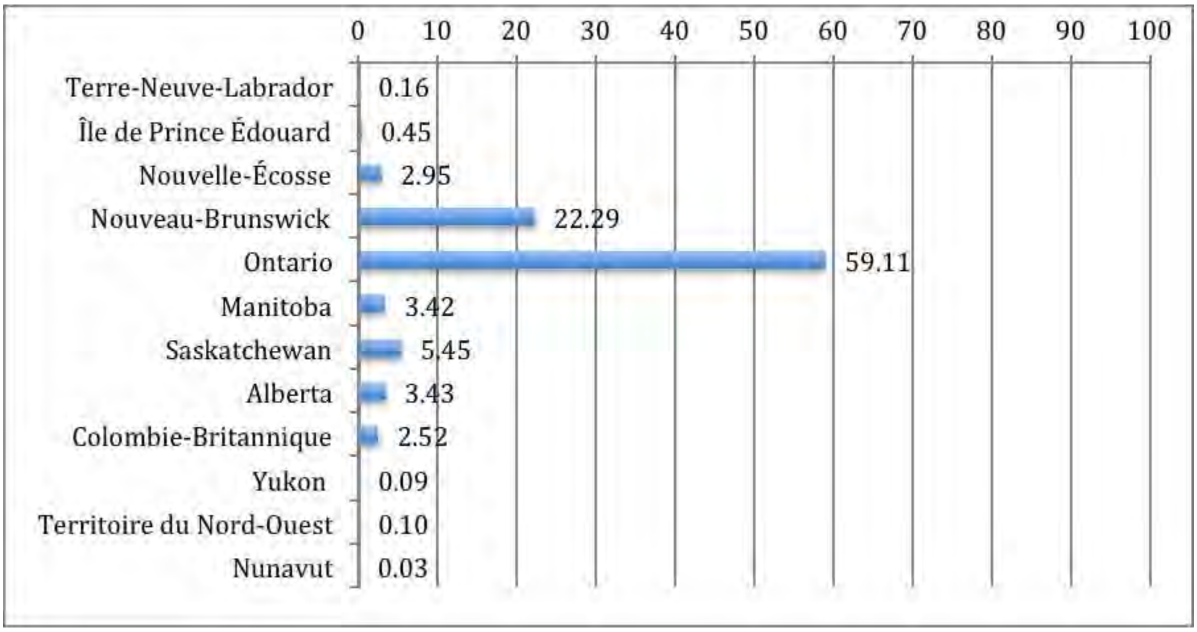


Figure 1 – *Proportion d'élèves francophones par province (en %) par rapport à la population scolaire francophone totale à travers le Canada*

Province ou Territoire	Nombre d'élèves francophones	Répartition des francophones au Canada	Année de publication des données
Terre-Neuve-Labrador	**251**	**0,16 %**	**2007**
Île de Prince Édouard	**707**	**0,45 %**	**2008**
Nouvelle-Écosse	**4 634**	**2,95 %**	**2010**
Nouveau-Brunswick	**35 070**	**22,29 %**	**2011**
Ontario	**92 976**	**59,11 %**	**2010**
Manitoba	**5 378**	**3,42 %**	**2007**
Saskatchewan	**8 566**	**5,45 %**	**2007**
Alberta	**5 398**	**3,43 %**	**2007**
Colombie-Britannique	**3 969**	**2,52 %**	**2010**
Yukon	**142**	**0,09 %**	**2007**
Territoire du Nord-Ouest	**163**	**0,10 %**	**2007**
Nunavut	**50**	**0,03 %**	**2009**
Total des élèves francophones hors Québec	**157 304**	**100 %**	**2007-2011**

** La référence aux sites Web consultés se trouve dans la bibliographie*

Tableau 1 *– Proportion d'élèves francophones par province (en %) par rapport à la population scolaire francophone totale à travers le Canada*

Comme l'Ontario représente la plus grande proportion d'élèves francophones au Canada anglais, nous traitons d'abord le contexte ontarien. Ensuite, nous décrivons succinctement la réalité des autres provinces et territoires, présenté dans l'ordre décroissant du nombre d'élèves francophones. Le cas du Nouveau-Brunswick, plus forte concentration de francophones hors Québec, est analysé dans Freiman, Richard et Jarvis (2012).

II. ONTARIO

1. *Sites Web d'intérêt*

- Ministère de l'Éducation de l'Ontario: http://www.edu.gov.on.ca/fre/index.html
- Programme de mathématique en Ontario (élémentaire, 1-8 et secondaire, 9-12) :http://www.edu.gov.on.ca/fre/curriculum/

2. *Description générale du système scolaire*

Le ministère de l'Éducation de l'Ontario (MÉO) règlemente et gère une situation unique dans laquelle il y a quatre systèmes scolaires différents qui sont financés par l'État dans la province, et qui sont basées sur l'appartenance linguistique et aussi religieuse : anglophone public (31 conseils scolaires), anglophone séparé (ou catholique romaine) (29), francophone public (4), et francophone séparé (8).

Au total, les écoles publiques sont administrées par 72 conseils scolaires, dont 12 sont de langue française, avec plus de 425 écoles. Dans ces écoles, l'ensemble du programme d'enseignement est en français, à l'exception des cours de langues seconde et tierce. Les écoles de langue française ont pour mandat de « protéger, valoriser et transmettre la langue et la culture françaises ». Elles accueillent les élèves dont les parents sont « en langue française des détenteurs de droits », selon l'article 23 de la Charte canadienne des droits et libertés, mais les personnes qui ne détiennent pas ces « droits » peuvent tout de même présenter une demande d'admission à une école de langue française. Puisque le français est l'une des deux langues officielles du Canada, les élèves qui fréquentent les écoles publiques anglaises doivent aussi étudier le français, que ce soit dans le cadre de leur programme ordinaire (un ou plusieurs cours de français par semaine) ou d'un programme d'immersion française (le français est la langue principale d'enseignement pour la plupart ou pour de nombreuses matières). Le tableau 2 présente le nombre d'élèves inscrits dans les écoles de langue française en Ontario au cours des cinq dernières années :

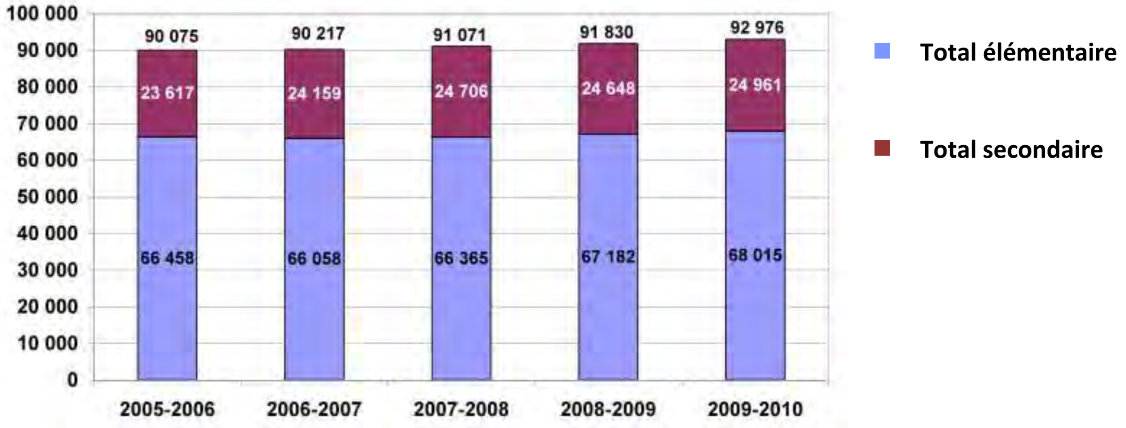


Tableau 2 *– Nombre d'élèves inscrits dans les écoles de langue française en Ontario, des années 2005-2006 à 2009-2010*

Responsabilité linguistique : *L'Aménagement Linguistique* est la mise en œuvre par les établissements d'enseignement d'interventions planifiées et systémiques pour assurer la protection, la valorisation et la transmission de la langue et la culture françaises en milieu minoritaire. La politique *d'Aménagement Linguistique* est un document cadre qui fixe les lignes directrices pour les écoles de langue française, et les conseils scolaires et pour le gouvernement de l'Ontario. Les objectifs de la politique sont les suivants :

> Dispenser dans les écoles de langue française un enseignement de qualité adapté au milieu minoritaire ; former des jeunes francophones responsables, compétents et forts de leur identité linguistique et culturelle ; augmenter les capacités de la communauté d'apprentissage (c'est-à-dire le personnel scolaire, les parents et les élèves) à soutenir le développement linguistique et culturel de la communauté dans une perspective d'apprentissage tout au long de la vie ; élargir et animer l'espace francophone en établissant des partenariats solides entre l'école, la famille et la communauté locale et élargie ; accroître la vitalité des institutions éducatives ontariennes en favorisant, entre autres, le recrutement et la rétention des élèves des écoles de langue française et contribuer ainsi au développement durable de la communauté francophone. (MÉO, n.d., p. 4)

Accès aux écoles : Les écoles publiques anglophones sont ouvertes à tous les élèves. Les écoles catholiques séparées le sont pour les élèves baptisés ou pour les enfants de parents catholiques romains. Les écoles publiques de langue française sont ouvertes à tous les élèves qui cherchent une éducation en français. Le système scolaire en Ontario se divise d'abord en deux ordres. L'école élémentaire s'étend de la maternelle à la 8^{e} année et elle couvre l'enseignement obligatoire de 4 à 14 ans, et l'école secondaire, de la 9^{e} à la 12^{e} année pour les élèves de 14 à 18 ans.

Curriculum : En Ontario, toutes les écoles se rapportent au même curriculum. Au sein de programmes-cadres groupés par ordre d'enseignement, il décrit ce que les élèves sont censés apprendre ou développer dans chaque domaine, dont les mathématiques. Le texte du curriculum est dans les deux langues. Les enseignants utilisent les documents du curriculum pour planifier les activités d'apprentissage et pour évaluer la mesure dans laquelle les élèves sont aptes à passer au niveau suivant.

Évaluation : Les grilles provinciales standardisées (rapports intérimaires et finaux) sont utilisées systématiquement en Ontario dans les quatre systèmes scolaires. De la maternelle à la 8^{e} année, les enseignants utilisent une notation littérale pour chaque domaine d'étude, et de la 9^{e} à la 12^{e}, des valeurs numériques. En 3^{e}, 6^{e} et 9^{e} années, on fait passer aux élèves des tests uniformisés qui sont élaborés et mis en œuvre par l'Office de la qualité et de la responsabilité en éducation (OQRÉ). Ces tests se rapportent au curriculum ontarien et ils prétendent fournir des informations sur la qualité des apprentissages des élèves en lecture, en écriture, en compréhension de langue anglaise et en mathématiques. L'OQRÉ prépare un rapport contenant les résultats de chaque enfant et ce rapport est envoyé à l'école dans l'intention d'aider les enseignants à cibler les domaines où les élèves ont besoin d'appui. Un exemplaire personnalisé de l'évaluation est également envoyé à la maison au cours de l'année scolaire suivante.

3. *Orientation des programmes de formation ou d'études*

Il n'y a actuellement que trois facultés d'éducation en Ontario qui préparent les enseignants au système scolaire de langue française : l'Université Laurentienne à Sudbury, l'Université d'Ottawa et le Campus Glendon de l'Université York à Toronto. Les professeurs de ces trois facultés se réunissent à chaque année, lors d'un colloque financé par le Ministère, pour discuter des questions relatives à l'enseignement et à la formation en français des enseignants ontariens. Dans ces trois facultés, candidats à l'enseignement suivent un programme préparatoire d'un an. Comme dans n'importe lequel des autres baccalauréats consécutifs de programmes d'éducation en Ontario (anglophone et francophone), les professeurs et les candidats en formation trouvent souvent insuffisant le nombre d'heures allouées au contenu mathématique et à la préparation pédagogique , en particulier puisque beaucoup de candidats ne possèdent pas de bonnes connaissances en mathématiques, ni des études postsecondaire en mathématiques comme qui existe souvent dans plusieurs des autres pays de monde.

4. *Développement des mathématiques à travers les programmes*

Le nouveau programme de mathématiques ontarien (MÉO, 2005a, 2005b, 2007, 2010), tant au niveau primaire qu'au secondaire est présenté de façon similaire en respectant une même structure et une même vision pédagogique dans les quatre documents suivants :

- *Programme d'apprentissage à temps plein de la maternelle et du jardin d'enfants, 2010, version provisoire*
- *Le curriculum de l'Ontario, Mathématiques de la 1re à la 8e année, édition révisée, 2005*
- *Le curriculum de l'Ontario, Mathématiques, 9e et 10e année, édition révisée, 2005*
- *Le curriculum de l'Ontario, Mathématiques, 11e et 12e année, édition révisée, 2007.*

Chaque programme se compose des attentes et le contenu d'apprentissage repartis en cinq domaines principaux de mathématiques (ou groupes thématiques) : sens du nombre et de la numération, modélisation (et pensée algébrique), géométrie et sens de l'espace, mesure, gestion de données et probabilités. Il y a aussi sept attentes liées au *processus mathématiques* qui apparaissent dans les documents avant chaque année scolaire et qui doivent être abordées tout au long du cursus : la résolution de problèmes, le raisonnement et la preuve, la capacité de réfléchir, le choix des outils et des stratégies, la capacité de faire des liens, la représentation, et l'habileté de communiquer. Cette structure commune, avec les attentes globales et les attentes spécifiques, les cinq domaines mathématiques, et l'inclusion des processus mathématiques globaux fonctionnent maintenant à travers les quatre documents connexes, faisant du programme de mathématiques en Ontario (pré-M-12) un programme cohérent et bien organisé.

Nous présenterons maintenant des élements clés du programme à partir des documents qui sont disponibles sur le site Web du ministère de l'Éducation dans les deux langues officielles :

Programme d'apprentissage à temps plein de la maternelle et du jardin d'enfants (2010)

Les éléments essentiels du programme de mathématiques sont décrits comme suit :

> L'enseignement des mathématiques est beaucoup trop important pour qu'on le laisse au hasard. (. . .) Le programme d'apprentissage à temps plein de la maternelle et du jardin d'enfants aborde l'apprentissage des mathématiques dans la même optique que le programme-cadre de mathématiques de la 1re à la 8e année (2005). Les attentes portent d'ailleurs sur les cinq domaines suivants : Numération et sens du nombre (dénombrement, quantité, relations, représentations et sens des opérations) ; mesure (unités de mesure non conventionnelles) ; géométrie et sens de l'espace (propriétés des formes géométriques, position et déplacement) ; modélisation (régularités et suites) ; et, traitement des données et probabilité (collecte, représentation et interprétation de données, probabilité). (MÉO, 2010, p. 85)

Également, dans le *Programme d'apprentissage à temps plein de la maternelle et du jardin d'enfants* (Figure 2) l'on trouve les sept *processus mathématiques* avec des notes spécifiques pour sa mise en oeuvre (2010, pp. 86-87).

Processus	**Mise en œuvre**
Résolution de problèmes L'enfant commence à développer et à appliquer des stratégies de résolution de problèmes. Il ou elle persévère dans ses explorations mathématiques et dans ses étapes de résolution.	L'équipe pédagogique planifie des activités ludiques d'apprentissage qui permettent aux enfants de commencer à comprendre qu'il existe plus d'une façon de résoudre des problèmes et que ceux-ci peuvent être réglés en collaborant.
Communication L'enfant commence à communiquer ses réflexions mathématiques oralement, visuellement ou sous forme écrite très simple, et ce, dans un langage de tous les jours, à l'aide d'un vocabulaire mathématique émergent et de formes de représentation variées.	L'équipe pédagogique montre par l'exemple comment utiliser le vocabulaire des mathématiques afin que l'enfant apprenne à l'utiliser de façon appropriée et à approfondir sa pensée (p. ex., « Comment le sais-tu? » ou « Montre-moi comment tu as accompli… »).
Réflexion L'enfant réfléchit et commence à adapter sa pensée pour clarifier sa compréhension d'un problème au fur et à mesure qu'il ou elle l'explore ou le solutionne (p. ex., en expliquant aux autres sa façon d'arriver à la solution).	L'équipe pédagogique guide l'enfant afin qu'il ou elle apprenne à partager ses expériences, ses connaissances et ses stratégies de résolution de problèmes (p. ex., « Est-ce que tu aurais pu t'y prendre d'une autre façon pour…? » ou « Explique-nous les différentes façons que tu as utilisées pour… »).
Raisonnement L'enfant applique des habiletés émergentes de raisonnement (p. ex., reconnaissance des modèles, classification) pour identifier et explorer des possibilités (p. ex., la modélisation, le monologue intérieur ou non).	L'équipe pédagogique observe les stratégies mathématiques utilisées par les enfants et, ensuite, les questionne afin de les amener à préciser leur pensée (p. ex., « Pourquoi as-tu décidé de t'y prendre ainsi pour…? » ou « Comment as-tu découvert la régularité dans la suite ? »).
Établissement de liens L'enfant fait des liens entre des concepts mathématiques simples et reconnaît des mathématiques dans la vie courante.	L'équipe pédagogique planifie des activités ludiques qui permettent d'établir des liens entre les mathématiques, les activités quotidiennes et les intérêts des enfants (p. ex., au centre de dramatisation : « Combien d'amis vont venir à ta fête ? Alors, combien d'assiettes te faudra-t-il ? », au centre de construction : « De quelle grosseur est ta maison? »).
Sélection d'outils et de stratégies L'enfant choisit et utilise une gamme d'outils	L'équipe pédagogique observe comment les enfants choisissent et utilisent les matériaux afin d'ajuster ses

d'apprentissage de nature concrète, visuelle et électronique. Il ou elle recourt aussi aux stratégies appropriées pour explorer des idées maîtresses ou concepts mathématiques et pour résoudre des problèmes.	stratégies d'enseignement au besoin (p. ex., « Samuel, peux-tu nous montrer comment tu as utilisé les blocs pour trouver ta solution ? »).
Modélisation L'enfant crée des représentations simples des notions de base en mathématiques (p. ex., à l'aide de matériel de manipulation, d'actions physiques comme sauter ou taper des mains, d'images, de nombres, de diagrammes, de symboles inventés), établit des liens entre ces notions et les applique à la résolution de problèmes.	L'équipe pédagogique montre que les concepts peuvent être représentés de diverses façons. L'enfant qui utilise du matériel de manipulation ou des dessins pour illustrer un concept mathématique a plus de chance de le maîtriser.

Figure 2 – *Les sept processus mathématiques issus du Programme d'apprentissage à temps plein de la maternelle et du jardin d'enfants (MÉO, 2010, pp. 86-87)*

Le curriculum de l'Ontario, mathématiques 1ère à l 8ème année, édition révisée, 2005

Le curriculum se motive dès premières pages du document :

> Le présent programme-cadre maintient des attentes élevées et des contenus d'apprentissage rigoureux pour chaque année d'études, et décrit les compétences à évaluer dans toutes les écoles franco-ontariennes. Il a pour but d'informer les élèves, les parents et le public en général sur les composantes du programme de mathématiques, de faciliter la planification de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques et d'assurer la réussite de tous les élèves de l'Ontario. (MÉO, 2005a, p. 3)

Le programme-cadre de mathématiques de la 1ère à la 8^{e} année est divisé en cinq domaines d'études : numération et sens du nombre, mesure, géométrie et sens de l'espace, modélisation et algèbre, traitement des données et probabilité. La Figure 3 montre la distribution du contenu mathématique en fonction de l'année scolaire :

	Numération et sens du nombre	Mesure	Géométrie et sens de l'espace	Modélisation et algèbre	Traitement des données et probabilité
1re à la 2e année	• Dénombrement • Quantité et relations • Représentations • Sens des opérations	• Longueur • Temps • Aire • Capacité et masse	• Propriétés des figures planes et des solides • Position et déplacement	• Suites non numériques • Suites numériques • Égalités	• Collecte, représentation et interprétation • Probabilité
3e année				• Suites non numériques • Suites numériques • Équations	
4e année		• Longueur • Temps et température • Aire et volume • Capacité et masse		• Relations • Équations	
5e année	• Quantité et relations • Représentations • Sens des opérations	• Longueur • Temps • Aire et volume • Capacité et masse			
6e année		• Longueur • Aire et volume • Capacité et masse		• Relations • Concepts algébriques	
7e année		• Longueur • Aire et volume			
8e année		• Aire et volume			

Figure 3 – *Les cinq domaines d'études de la 1re à la 8e année (MÉO, 2005a, p. 7)*

Le curriculum de l'Ontario, Mathématiques, 9e et 10e année, édition révisée, 2005

La place du programme-cadre de mathématiques dans le curriculum est mise en relief dans le passage suivant (MÉO, 2005b, p. 3) :

> Les élèves d'aujourd'hui vivent dans un monde qui se caractérise par l'accès à une surabondance d'informations et une progression sans précédent des connaissances dans tous les domaines du savoir. Pour réussir dans ce monde en constante évolution, il leur faudra faire preuve d'une grande capacité d'adaptation au changement et être en mesure de renouveler continuellement l'état de leurs connaissances. (. . .) Le programme-cadre de mathématiques de 9e et 10e année a pour but de donner à l'élève les moyens de préparer son avenir en lui permettant : d'acquérir les connaissances et les compétences essentielles en mathématiques ; de développer sa capacité à raisonner, à résoudre des problèmes et à utiliser convenablement les différentes facettes de la communication ; d'éveiller sa volonté à poursuivre de façon autonome son apprentissage en fonction des défis rencontrés dans la vie courante.

Les domaines du programme de 9e année sont abordés de façon à consolider les contenus de 8e année tout en ouvrant de nouvelles perspectives à l'élève pour la poursuite de ses études. Ils sont semblables à ceux du curriculum de l'élémentaire (Figure 4). Certaines modifications ont néanmoins été apportées afin de les adapter à la nouvelle orientation que prennent les mathématiques au secondaire (p. 9).

9^e^ année

Cours	Principes de mathématiques	Méthodes de mathématiques
Domaines	▪ Relations ▪ Mesure et géométrie ▪ Numération et algèbre ▪ Géométrie analytique	▪ Relations ▪ Mesure et géométrie ▪ Numération et algèbre

10^e^ année

Cours	Principes de mathématiques	Méthodes de mathématiques
Domaines	▪ Fonctions du second degré ▪ Géométrie analytique ▪ Trigonométrie	▪ Fonctions affines ▪ Fonctions du second degré ▪ Trigonométrie

Figure 4 – *Les domaines d'études en mathématiques de 9^e^ et 10^e^ années (MÉO, 2005b, p. 9)*

Le curriculum de l'Ontario, Mathématiques, 11^e^ et 12^e^ année, édition révisée, 2007

La place du programme-cadre de mathématiques dans le curriculum sénior est expliquée de façon similaire, avec un accent sur l'idée que le curriculum transpose à travers tous ses niveaux d'éducation (pré-maternelle - 12^e^), dans le passage suivant (MÉO, 2005b, p. 5) :

> Au cours des dernières décennies, notre société a connu des transformations aussi rapides que profondes, notamment sous l'impulsion de progrès scientifiques et technologiques sans précédent. Dans ce contexte, on comprendra toute l'importance que revêt l'apprentissage des mathématiques à l'école secondaire pour mener les activités quotidiennes liées au marché du travail, à la famille et aux loisirs. . . . Une transition sans heurt entre les mathématiques à l'élémentaire et au secondaire permet à l'élève de développer sa confiance et sa compétence en mathématiques.

À la Figure 5, on présente sous forme graphique la structure générale des cours de mathématiques de 11^e^ et 12^e^ années en fonction des préalables et de leurs rapports respectifs.

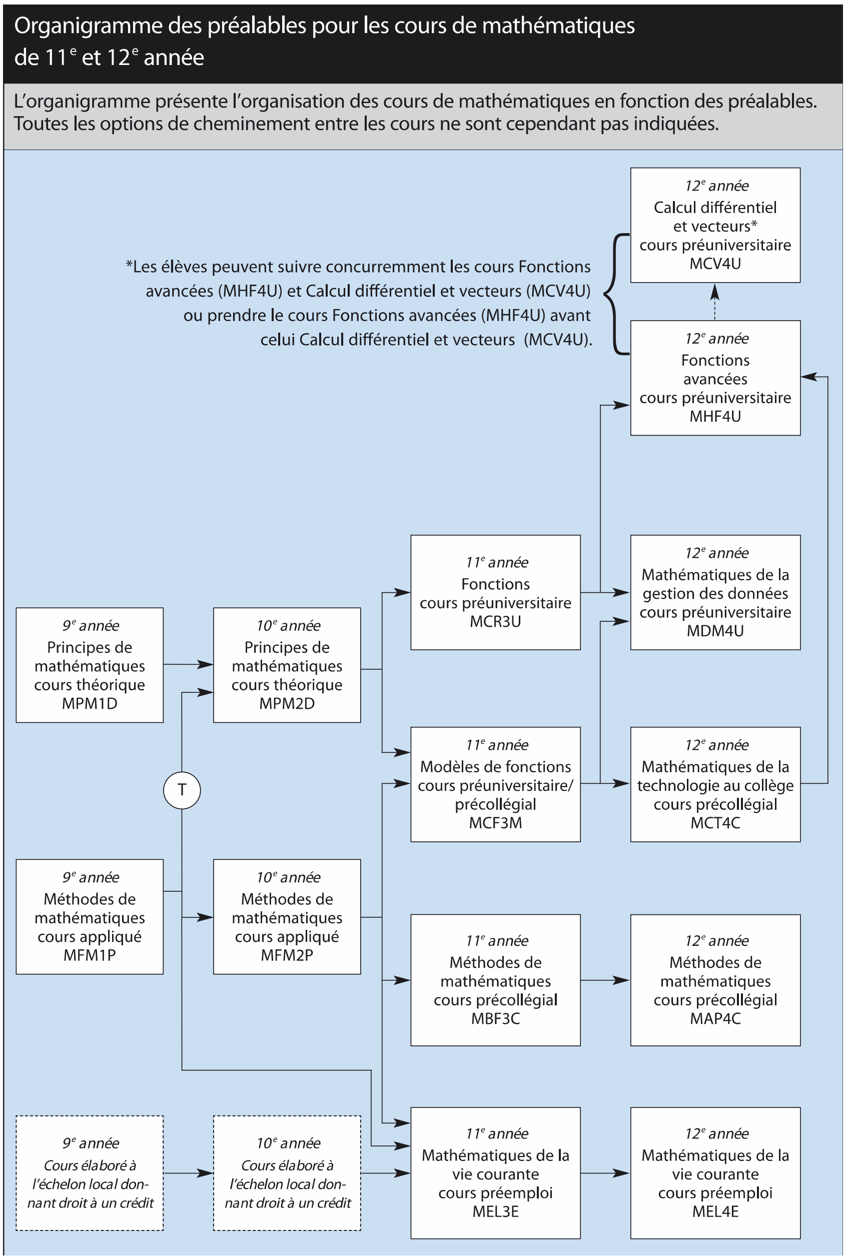


Figure 5 – *Organigramme des préalables pour les cours de mathématiques au secondaire (MÉO, 2007, p. 11)*

5. *Exemples de traitement d’un thème d’enseignement au niveau primaire*

Le thème du *traitement de données et probabilité* commence déjà au niveau. Dans le curriculum d’Ontario, il est décrit comme suit :

> La probabilité et les statistiques sont deux sujets qui présentent des applications très pertinentes dans la vie quotidienne. Le public est submergé de graphiques et de statistiques dans le domaine de la publicité, des sondages d’opinion, des estimations de fiabilité, des tendances démographiques, des descriptions de découvertes par des scientifiques, de l’évaluation des risques pour la santé, de l’analyse des progrès des élèves dans les écoles, etc. Les élèves devraient explorer activement les concepts liés à la probabilité par le biais d’expériences simples, de jeux ou de simulations. L’accent devrait être mis sur les situations réelles de la vie telles que sur les résultats probables d’un évènement sportif ou sur la probabilité de pluie lors d’une sortie scolaire. (MÉO 2005a, p. 10)

Le traitement des données peut être exploré en demandant aux jeunes enfants de créer et de mettre en œuvre des enquêtes simples pour un groupe, dont les résultats peuvent ensuite être affichées, analysées, et discutées avec les autres. Les concepts simples de probabilité (jamais, parfois, et toujours) peuvent aussi être appris à un âge très jeune. La distinction entre la probabilité théorique et expérimentale devient de plus en plus une priorité pour les élèves lorsqu'ils atteignent les niveaux intermédiaires. Des logiciels tels que Microsoft Excel (tableur) et TinkerPlots (statistiques dynamiques) sont particulièrement efficaces pour explorer ce thème. L'histoire de la théorie des probabilités est d'un intérêt particulier pour les élèves à mesure qu'ils mûrissent, car elle propose des liens avec la théorie des jeux et de nombreuses applications quotidiennes.

6. *Les caractéristiques régionales*

Le nombre total d'élèves francophones ou anglophones pour la province de l'Ontario est d'environ 1 300 000 à l'élémentaire et 700 000 au secondaire, et donc un total d'un peu plus de deux millions d'élèves. Avec 89 500 élèves, les apprenants de langue française représentent environ 20 % de la population scolaire de l'Ontario.

7. *Les stratégies d'implémentation*

Le Secrétariat de la littératie et de la numératie, à travers ses stratégies d'alphabétisation et d'apprentissage de notions d'arithmétiques pour les écoles ontariennes, mène des recherches sur l'enseignement des mathématiques avec un soutien financier pour le perfectionnement professionnel des enseignants, dont la création de ressources imprimées et en ligne dans les deux langues officielles. Plusieurs études ont été menées par les comités d'experts au cours de la dernière décennie, notamment les rapports suivants :

- Le Secrétariat de la littératie et de la numératiehttp://www.edu.gov.on.ca/fre/literacynumeracy/publications.html
- Stratégie de mathématiques au primaire : Rapport de la table ronde des experts en mathématiques (MÉO 2003) http://www.edu.gov.on.ca/fre/document/reports/math/index.html
- Pour aider votre enfant à apprendre les mathématiques : Un guide à l'intention des parents (MÉO 2002) http://www.edu.gov.on.ca/fre/document/brochure/earlymath/index.html
- Enseigner et apprendre les mathématiques : Rapport de la Table ronde des experts en mathématiques de la 4e à la 6e année (MÉO 2004) http://www.edu.gov.on.ca/fre/document/reports/numeracy/panel/index.html
- La numératie en tête de la 7e à la 12e année : Rapport du Groupe d'experts pour la réussite des élèves (MÉO 2004) http://www.edu.gov.on.ca/fre/document/reports/numeracy/index.html
- Réussite des élèves/Apprentissage jusqu'à l'âge de 18 ans (MÉO 2008) http://www.edu.gov.on.ca/fre/studentsuccess/lms/
- Math GAINS (Growing Accessible Interactive Networked Supports) (MÉO 2011) http://www.edugains.ca/newsite/math2/index.html

8. *Les ressources d'enseignement disponibles*

Bien que tous les documents ministériels qui se destinent aux enseignants soient disponibles en français, il n'y a que certaines maisons d'édition qui offrent une collection de manuels scolaires en français. Celles-ci doivent être approuvées par le Ministère pour être incluses sur la liste officielle des manuels recommandés. Les collections s'intitulent : Accent, Chenelière Mathématiques et Défi mathématique. Les enseignants de mathématiques en français sont également outillés par deux sites Web, développés et financés par le MÉO, ainsi que par des ressources imprimées et des médias qui soutiennent l'enseignement des mathématiques dans le sens de la réforme :

- *L'Atelier* avec des *Guides d'enseignement* (*eWorkshop* with *Guides to Effective Instruction in Mathematics*) http://www.atelier.on.ca/edu/core.cfm?L=2
- *L'Enquête collaborative pour l'apprentissage des mathématiques (Collaborative Inquiry in Mathematics*) http://www.curriculum.org/secretariat/111309f.shtml

Une autre ressource textuelle devenue très populaire chez les enseignants s'intitule Les mathématiques : *Un peu, beaucoup, à la folie!* Elle a été développée par Bélanger et Gaudreault du Centre franco-ontarien de ressources pédagogiques à Ottawa. Les autres ressources ontariennes sur le Web incluent :

- Association francophone pour l'enseignement des mathématiques en Ontario (AFEMO), ressources et support pour les enseignants de mathématiques en langue française : http://www.afemo.on.ca/fr/
- Association l'Ontarienne pour l'enseignement des mathématiques (OAME), a une liste complète de ressources pour les professeurs de mathématiques M-12 (surtout en anglais) : http://www.oame.on.ca/

Plusieurs autres ressources numériques en français ont été créées à l'extérieur de l'Ontario et pour ne nommer que deux ressources nord-américaines à l'extérieur du Québec et du Nouveau-Brunswick :

- Le site Web Learn Alberta du ministère de l'Éducation d'Alberta dispose d'une grande base de données de leçons mathématiques et d'autres ressources : http://www.learnalberta.ca/Home.aspx?lang=fr
- La Bibliothèque virtuelle en mathématiques (NLVM) de la Utah State University : http://nlvm.usu.edu/fr/nav/vlibrary.html

9. *Les exemples d'activités inspirantes*

Le plus récent ajout au curriculum de l'Ontario est la mise en œuvre du programme de maternelle à temps plein et les documents curriculaires correspondants (2010, provisoire). Ce document reprend la même structure et la même vision que le programme pour les niveaux scoalires 1-12 en énonçant un programme ambitieux et rigoureux des mathématiques pour les élèves très jeunes. Plusieurs activités de perfectionnement professionnel pour les équipes d'enseignants *Early Learning* s'offrent en l'Ontario afin de les diriger vers un programme commun de maternelle à temps complet dans l'ensemble des quatre systèmes scolaires en 2012. Notons que de nombreuses écoles issues des conseils scolaires de langue française offraient déjà des programmes de maternelle à temps complet avec leur propre financement. Puisque maintenant, il y aura des programmes similaires offerts dans les écoles anglaises, on remarque une certaine inquiétude quant à l'effet de ce prolongement de scolarité sur le taux d'inscription aux écoles de langue française en 2011-2012. C'est-à-dire qu'en pouvant choisir une école (anglaise) géographiquement plus proche du domicile ou dont la qualité est perçue comme étant plus élevée, les parents ne verront peut-être plus de la même façon l'avantage de l'exclusivité de la maternelle en français. Ce qui suit sont les *Attentes pour les mathématiques* formulées dans le document sur la nouvelle école maternelle.

> À la fin du programme d'apprentissage à temps plein de la maternelle et du jardin d'enfants, l'enfant peut : (1) utiliser les notions de base du système de numération et démontrer sa compréhension du sens du nombre ; (2) mesurer et comparer des objets selon la taille, la longueur, la capacité et la masse ; (3) identifier des caractéristiques des figures planes et des solides ; (4) reconnaître la position d'un objet dans l'espace ; (5) reconnaître des régularités dans l'environnement et dans des suites non numériques ; (6)

> recueillir, représenter et interpréter des données ; et, (7) décrire en mots la probabilité d'un évènement relié à son quotidien. (MÉO, 2010, p. 90)

Ce programme semble bien accueilli par le public et son succès a priori est garanti par son application dans toutes les écoles ontariennes dès 2012.

III. AUTRES PROVINCES ET TERRITOIRES

En raison des contraintes de l'espace, nous allons limiter le traitement des autres provinces et territoires à une liste des principaux sites Web d'intérêt (programmes, apprentissage en français, évaluation) de même qu'à un examen sommaire et une description superficielle. Comme nous l'avons déjà annoncé à la section Description générale du système scolaire, les premiers aperçus s'effectuent selon l'ordre décroissant du nombre d'élèves francophones. Bien que le cas du Nouveau-Brunswick soit analysé dans Freiman, Richard et Jarvis (2012), nous terminons ici par une petite section sur l'immersion en français dans le secteur anglophone de cette province.

1. Saskatchewan

Sites Web d'intérêt

- Ministère de l'Apprentissage de la Saskatchewan : http://www.education.gov.sk.ca/
- Conseil scolaire fransaskois (CSF) : http://www.cefsk.ca/FR/MembresduCSF/index.html
- Documents des mathématiques de Saskatchewan Fransaskois (français) : http://www.education.gov.sk.ca/Mathematiques
- Ressources de mathématiques (niveaux 1-3) : http://olc.spsd.sk.ca/de/math1-3/
- Extensions mathématiques (niveaux 6-9) : http://olc.spsd.sk.ca/de/MathExtensions/index.html

Premier aperçu : La Saskatchewan n'administre qu'une seule division scolaire francophone, le Conseil des écoles fransaskoises (CÉF). La Loi sur l'éducation de 1995, stipule qu'il existe trois entités juridiques et l'égalité d'éducation en Saskatchewan : les systèmes scolaires publics, les systèmes scolaires séparés, et le Conseil des écoles fransaskoises (CÉF). Le CÉF gère neuf régions scolaires francophones regroupant au total quinze écoles fransaskoises. Le Conseil de l'éducation se compose de neuf administrateurs élus dans les domaines éducatifs francophones, et chaque membre représente une région de la province. Bien que le Conseil des écoles fransaskoises respecte le programme élaboré et recommandé par le ministère de l'éducation, son programme éducatif comporte des contenus supplémentaires qui répondent aux besoins spécifiques des élèves de langue française. Toutes les matières sont enseignées en français, à l'exception de l'anglais et des arts. Les élèves à travers la province ont récemment subi des tests normalisés fournis par le ministère de l'Éducation. Leurs résultats ont ensuite été comparés à ceux obtenus par d'autres élèves dans la province. Ainsi, les résultats des élèves de 8^{e} année sont significativement plus élevés que la moyenne provinciale en mathématiques.

2. Alberta

Sites Web d'intérêt

- Ministère de l'Éducation de l'Alberta : http://education.alberta.ca/

- Fédération des Conseils scolaires francophones de l'Alberta : http://www.ecolefrancophone.ca/
- Instruction des mathématiques francophones en Alberta : http://education.alberta.ca/francais/teachers/progres/core/math.aspx
- Les documents du curriculum et les attentes en mathématiques par niveau : http://education.alberta.ca/parents/resources/summaries.aspx
- Learn Alberta: Programmes de mathématiques (français) : http://www.learnalberta.ca/ProgramsOfStudy.aspx?lang=en&posLang=fr&Core=Math%C3%A9matiques
    - Math 3 Under the Sea (Learn Alberta, Niveau 3): http://www.learnalberta.ca/content/me3usa/flash/index.html
    - Math 5 Live (Learn Alberta, Niveau 5): http://www.learnalberta.ca/content/me5l/html/Math5.html?launch=true
    - M-G6 (Learn Alberta, Niveau 6): http://www.learnalberta.ca/content/mesg/html/math6web/index.html
- La didactique des mathématiques en Alberta : http://education.alberta.ca/teachers/program/math/educator.aspx

Premier aperçu : Les programmes d'études en mathématiques de la maternelle à la 12^{e} année sont basés sur le Cadre commun des résultats d'apprentissage (CCF), au sein du Protocole de l'Ouest du Nord canadien (PONC). Le CCF identifie les, certaines, des croyances relatives aux mathématiques, les résultats d'apprentissages généraux et spécifiques des élèves, ainsi que les indicateurs de réussite. Il y a un certain nombre d'organismes francophones régionaux qui gèrent les écoles en Alberta. Les besoins éducatifs des élèves francophones, leurs familles et les communautés, les résultats attendus pour l'enseignement francophone, et les conditions qui doivent être respectées pour s'assurer que ces résultats sont atteints se trouvent dans le document intitulé *Affirmer l'éducation en français, langue première (2001)*. Selon ce document, la mission de l'éducation francophone est d'assurer la transmission et la vitalité de la langue et la culture française et de contribuer à la croissance et à l'épanouissement de la communauté francophone. L'école joue un rôle clé en permettant aux élèves de développer une identité francophone et un sentiment d'appartenance à leur communauté, ainsi que pour l'acquisition des compétences dont ils ont besoin pour s'intégrer et participer au bien-être de leur communauté, la société en général et le monde. Parallèlement à l'appartenance communautaire, l'éducation francophone doit incontestablement être reconnue au niveau provincial, national et international pour sa poursuite de l'excellence en aidant à former des personnes qui sont fiers de leur identité culturelle et capables de contribuer à la société. Tous les cours sont offerts entièrement en français, sauf les cours d'anglais. On les retrouve dans 35 écoles de la province, y compris un centre d'apprentissage à distance, gouverné par cinq autorités régionales francophones.

3. Manitoba

Sites Web d'intérêt

- Ministère de l'Éducation et Littératie du Manitoba : http://www.edu.gov.mb.ca/indexfr.html
- Division scolaire franco-manitobaine (DSFM) : http://www.dsfm.mb.ca/ScriptorWeb/scripto.asp?resultat=669949#
- Curriculum de mathématiques : http://www.edu.gov.mb.ca/k12/cur/math/overview.html

Premier aperçu : La Division scolaire franco-manitobaine (DSFM) a été créée par une loi provinciale adoptée en juillet 1993. Les vingt écoles originelles de la DSFM ont été transférées au conseil scolaire francophone en septembre 1994. Chaque école de la DSFM doit voir à l'élection d'un comité scolaire regroupant des représentants de parents, d'enseignants, d'élèves et de membre de la direction. Ce comité a la responsabilité de définir les grandes orientations de l'école et d'acheminer au conseil scolaire toute recommandation, suggestion, et évaluation qu'il juge à propos relativement à son école ou touchant aux activités du conseil scolaire. Le comité scolaire forme donc le palier local du conseil scolaire et assure une communication étroite entre les parents et l'école.

4. *Nouvelle-Écosse*

Sites Web d'intérêt

- Département d'éducation de Nouvelle-Écosse : http://www.ednet.ns.ca/
- Nouvelle-Écosse Communautés Acadiennes et Francophones : http://www.ednet.ns.ca/index.php?t=sub_pages&cat=410
- Conseil scolaire acadien provincial : http://csap.ednet.ns.ca/
- Curriculum de mathématiques : http://csap.ednet.ns.ca/prog_etude.php?id=138
- Ressources de mathématiques : http://lrt.ednet.ns.ca/PD/math.shtml

Premier aperçu : Étant le seul conseil scolaire français en Nouvelle-Écosse, le CSAP dessert toute la province avec ses vingt écoles. Il offre une éducation de qualité en français langue première à la population d'origine acadienne et aux autres francophones résidant en Nouvelle-Écosse. Le Conseil scolaire acadien provincial a été créé par la Loi du 1er avril 1996. Il s'agit du seul conseil scolaire en Nouvelle-Écosse qui donne une éducation en français langue première de la maternelle à la fin du secondaire. La création du CSAP marque l'aboutissement de nombreuses années de lutte des Acadiens, Acadiennes et francophones désireux d'obtenir la gestion de leur propre institution scolaire à l'échelle provinciale. Aujourd'hui, le CSAP compte vingt écoles fréquentées par plus de 4 000 élèves et environ 600 employés à travers la province. Dix-sept conseillers scolaires sont élus pour représenter les régions acadiennes et francophones de la province. Le CSAP travaille en partenariat avec tous les intervenants de l'éducation française en Nouvelle-Écosse, de la petite enfance jusqu'à l'université. Il valorise l'apprentissage de l'histoire et de la culture acadiennes, au sein d'un milieu francophone dynamique. Le CSAP fournit à l'élève des outils pour développer son identité culturelle et linguistique et l'exprimer avec fierté. Le CSAP souhaite contribuer activement au développement et à l'affirmation culturelle des communautés acadiennes et francophones de la Nouvelle-Écosse. En 2010, les vingt écoles francophones sont regroupées en trois grandes régions administratives : la Région du Nord-Est (4 écoles), la Région Centrale (7 écoles), et la Région du Sud-Ouest (9 écoles).

5. *Colombie-Britannique*

Sites Web d'intérêt

- Ministère de l'Éducation de la Colombie-Britannique : http://www.gov.bc.ca/bced/
- Conseil scolaire francophone de la Colombie-Britannique (CSF) : http://www.csf.bc.ca/
- Curriculum de mathématiques : http://www.bced.gov.bc.ca/irp/subject.php?lang=en&subject=Mathematics

Premier aperçu : Le ministère de l'Éducation fixe les normes d'éducation pour les élèves de la maternelle à la 12 dans son curriculum provincial. Ces normes sont appelées Résultats d'apprentissage prescrits (RAP). Les RAP décrivent les attentes de ce que les élèves doivent savoir et être capables de faire à chaque niveau et dans chaque domaine. Depuis sa création en 1995, le CSF offre des programmes et des services éducatifs valorisant le plein épanouissement et l'identité culturelle des apprenants francophones de la province.

6. L'Île du Prince Édouard

Sites Web d'intérêt

- Département de l'éducation et du développement de la petite enfance de l'Île du Prince Édouard : http://www.gov.pe.ca/eecd/
- Commission scolaire de langue française de l'Île du Prince Édouard : http://www.edu.pe.ca/cslf/home_en.html
- Curriculum de mathématiques : http://www.gov.pe.ca/photos/original/ed_math_found.pdf
- Ressources de mathématiques : http://www.grms.qc.ca/

Premier aperçu : La Commission scolaire gère actuellement six écoles. Le 1er Juillet 1990, le gouvernement a officiellement donné au conseil scolaire de l'Île du Prince Édouard de langue française de la responsabilité d'administrer et de promouvoir l'éducation en français dans la province.

7. Terre Neuve et Labrador

Sites Web d'intérêt

- Département d'éducation de Terre Neuve et Labrador : http://www.ed.gov.nl.ca/edu/
- Conseil scolaire francophone de Terre Neuve et Labrador : http://www.csfp.nl.ca/
- Instruction Francophone de Terre Neuve et Labrador :

  http://www.ed.gov.nl.ca/edu/k12/french/languepremiere/description.html
- Ressources de mathématiques : http://www.ed.gov.nl.ca/edu/earlychildhood/learningresources.html

Premier bref : L'éducation à Terre-Neuve et Labrador veut permettre et encourager chez toute personne l'apprentissage à vie, ainsi que l'acquisition des connaissances, des compétences et des valeurs nécessaires au développement personnel et à celui de la société. Le programme de français langue première est conçu pour les francophones qui désirent que leurs enfants poursuivent leur scolarisation en français. Ce programme vise les résultats d'apprentissage transdisciplinaires tels que formulés par la province, avec le mandat additionnel de sauvegarder et perfectionner la compétence langagière ainsi que de préserver l'héritage culturel de la population francophone de la province. Dans un programme de français langue première, l'enseignement se fait en français à tous les niveaux et dans toutes les matières, sauf pour l'anglais langue seconde. Le programme d'études a pour but de répondre aux besoins de la population francophone en situation minoritaire. La vision du Conseil scolaire francophone provincial est de mettre en place un système éducatif de langue française afin d'aider chaque élève à réussir, atteindre son plein potentiel et développer un esprit ouvert. À partir du 30 juin 2011, le Conseil scolaire francophone provincial va offrir un système d'éducation de langue française concentré sur la qualité de résultats et le développement de la langue et de la culture. Le Conseil gère cinq écoles catégorisées comme petites par le Département d'éducation avec un nombre d'élèves variant d'aussi peu que 22 (Goose Bay) jusqu'à un maximum de 82 (Mainland). Il faut ainsi souligner une distance considérable entre les écoles et la localisation du Conseil, à l'exception de la localisation du Conseil à St. John's.

8. Yukon, Territoires du Nord-Ouest, et Nunavut

Sites Web d'intérêt

- Département de l'éducation du Yukon : http://www.education.gov.yk.ca/
- Commission scolaire francophone du Yukon (CSFY) : http://www.csfy.ca/fr/
- Enseignement des mathématiques du Yukon : http://yukon-education-mathematics.wikispaces.com/
- Département de l'éducation, culture, et d'emploi du Territoires du Nord-Ouest : http://www.ece.gov.nt.ca/
- Département de l'éducation du Nunavut : http://www.edu.gov.nu.ca/apps/authoring/dspPage.aspx?page=home

Premier aperçu : Il y a 14 écoles publiques dans Whitehorse, capitale et plus grande ville du Yukon. Elles comprennent huit écoles primaires, deux écoles catholiques élémentaires, deux écoles secondaires, une école secondaire catholique et un une école primaire et secondaire de français langue première. Environ 30 % de la population étudiante du Yukon est issue des Premières nations. L'enseignement est basé sur l'anglais pour la majorité des élèves, mais les langues française et autochtones sont largement offertes comme choix de langue seconde. Le Yukon est un partenaire à part entière dans le Le protocole de l'Ouest et du Nord canadiens. Ce protocole prend en charge l'élaboration de cadres communs de l'Ouest et du Nord Canada. Au sein de ces cadres, le programme d'études de la Colombie-Britannique est à la base du programme d'études du Yukon. Ce programme est fréquemment adapté pour refléter les besoins et les conditions locales. Le ministère de l'Éducation établit le programme et la philosophie générale du système éducatif pour toutes les écoles du Yukon. La Commission scolaire francophone du Yukon (CSFY) s'engage à offrir des services éducatifs valorisant le plein épanouissement et l'identité culturelle des apprenants francophones du Territoire.

IV. CONSIDÉRATIONS FINALES

De toute évidence, le système éducatif au Canada anglais est particulièrement varié. L'enseignement des mathématiques en français suit souvent le curriculum anglophone de même que ses pratiques d'évaluation, avec parfois quelques ajustements qui répondent aux besoins culturels des francophones. Si l'Ontario demeure une référence pour le nombre d'élèves francophones à l'extérieur du Québec et du Nouveau-Brunswick, il semble que la plupart des autres provinces et territoires canadiens ont aussi des programmes francophones dynamiques, du moins c'est ce qui se dégage des documents officiels. Bien que les ressources disponibles soient difficilement comparables à celles de la majorité, la vitalité des communautés et la collaboration des gouvernements locaux constituent sans doute le moyen le plus efficace de préserver et de rehausser la qualité du système éducatif en français partout au Canada anglais, dont l'enseignement des mathématiques qui nous concerne.

RÉFÉRENCES[1]

Conseil Canadien sur l'Apprentissage. (2009). L'éducation sur les minorités francophones du Canada. Auteur. Récupérée le 2011-09-02 de http://www.ccl-cca.ca/pdfs/LessonsInLearning/08_20_09-F.pdf

Conseil des ministres de l'Éducation, Canada. (n.d.). Information pancanadienne. Auteur. Récupérée le 2011-09-02 de http://www.cmec.ca/Pages/Default_fr.aspx

Conseil des ministres de l'Éducation, Canada. (n.d.). Éducation primaire et secondaire: Enseignement dans la langue de la minorité. Auteur. Récupérée le 2011-09-02 de http://www.cmec.ca/pages/canadawide_fr.aspx#03

Citizenship and Immigration Canada. (n.d.). The newcomer's guide to elementary school in Ontario: Information and suggestions for your child's success in school. Récupérée le 2011-09-02 de http://www.settlement.org/downloads/edguide/en_pub_full.pdf

Fédération Canadienne des Enseignantes et des Enseignants. (2008). Plan d'action : L'École de langue française au rythme du changement. Auteur. Récupérée le 2011-09-02 de http://www.ctf-fce.ca/Documents/Resources/Francaise/Action_plan_ang.pdf

Ferron M. (n.d.). Conseil scolaire acadien Provincial. Récupérée le 2011-09-02 de http://csap.ednet.ns.ca/

Ministère de l'Éducation Ontario. (2005a). Le curriculum de l'Ontario, Mathématiques de la 1re à la 8e année, édition révisée, 2005. Auteur. Récupérée le 2011-09-02 de http://www.edu.gov.on.ca/fre/curriculum/elementary/math.html

Ministère de l'Éducation Ontario. (2005b). Le curriculum de l'Ontario, Mathématiques, 9e et 10e année, édition révisée, 2005. Auteur. Récupérée le 2011-09-02 de http://www.edu.gov.on.ca/fre/curriculum/secondary/math.html

Ministère de l'Éducation Ontario. (2007). Le curriculum de l'Ontario, Mathématiques, 11e et 12e année, édition révisée, 2007. Auteur. Récupérée le 2011-09-02 de http://www.edu.gov.on.ca/fre/curriculum/secondary/math.html

Ministère de l'Éducation Ontario. (2010). Programme d'apprentissage à temps plein de la maternelle et du jardin d'enfants, 2010, version provisoire. Auteur. Récupérée le 2011-09-02 de http://www.edu.gov.on.ca/fre/curriculum/elementary/kindergarten_french_june3.pdf

Ministère de l'Éducation Ontario. (n.d.). L'aménagement linguistique : Une politique au service des écoles et de la communauté de langue française de l'Ontario. Récupérée le 2011-09-02 de http://www.edu.gov.on.ca/fre/document/policy/linguistique/guide/index.html

Province de Columbie Britannique. (n.d.). Entente Canada-Colombie Britannique relative à l'enseignement dans la langue de la minorité et à l'enseignement de la langue seconde officielle 2009-2010 à 2012-2013. Récupérée le 2011-09-02 de http://www.bced.gov.bc.ca/frenchprograms/welcome_fr.htm

[1] Il s'agit de la bibliographie principale qui s'ajoute aux sites Web compris dans le texte.

L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES AU QUÉBEC

Philippe R. RICHARD[*] – Viktor FREIMAN[**] – Daniel JARVIS[***]

Résumé – Pour aider à comprendre la diversité canadienne dans l'enseignement des mathématiques, notre contribution porte sur la réalité québécoise, complétant les études sur le Nouveau-Brunswick et le Canada anglais. Cette découpure s'inscrit dans une logique linguistique et constitutionnelle : chaque région doit fournir à leurs minorités l'enseignement primaire et secondaire dans leur langue (l'anglais au Québec, le français partout ailleurs), mais l'éducation demeure la responsabilité exclusive des provinces et des territoires. Si officiellement, le Québec est unilingue et le Nouveau-Brunswick bilingue, le Canada anglais se compose de minorités francophones et il offre des cours d'immersion qui parachève la comparaison du panorama canadien.

Mots-clefs : enseignement des mathématiques, panorama canadien, spécificité du Québec

Abstract – To increase understanding of the diversity that exists in Canadian mathematics education, this contribution focuses on Québec, complementing the separate papers that we have also written on New Brunswick and English Canada. The Canadian educational context involves both linguistic and constitutional factors: each region must provide primary and secondary education to minorities in their own language (English in Québec, French everywhere else), yet education remains the exclusive responsibility of the provinces and territories. Officially, Québec is unilingual, New Brunswick is bilingual, and the remainder of English Canada involves pockets of French-speaking minority populations, members of which are guaranteed schooling in French according to the Charter. Regular French instruction classes are offered in most English schools, and full French immersion programs are also provided in many jurisdictions.

Keywords: Mathematics education, Canadian overview, Québec context

Cet article, d'une série de trois, aborde la question de l'enseignement des mathématiques dans le vaste paysage canadien. Il contribue au groupe spécial *Comparaison de l'enseignement des mathématiques à travers les pays francophones ; résultats, sens et usages* en portant précisément sur la spécificité québécoise. Le Québec est l'un des treize membres de la fédération canadienne, une monarchie constitutionnelle de type britannique. En vertu de la Constitution canadienne de 1867, le Québec, tout comme les autres provinces et les territoires, a le pouvoir exclusif d'adopter des lois en matière d'éducation.

Notre texte se structure selon les cinq points proposés par le groupe spécial afin de faciliter la comparaison avec les deux autres contributions canadiennes, une première étude sur le Nouveau-Brunswick et une seconde sur le Canada anglais. Cette dernière entité regroupe les provinces et les territoires où l'anglais sert habituellement de langue de convergence interculturelle, mais qui héberge des populations francophones souvent très anciennes qui peuvent recevoir l'enseignement obligatoire en français, ou qui offre des programmes d'immersion française à l'ensemble de leur population.

I. DESCRIPTION GÉNÉRALE DU SYSTÈME SCOLAIRE

À l'instar de l'ensemble du Canada, le système scolaire québécois offre à la population une variété de programmes et de services éducatifs. Le système s'organise au sein d'un réseau de l'éducation, formé d'établissements publics et privés, francophones et anglophones, qui comporte quatre ordres d'enseignement : le primaire (y compris l'éducation préscolaire), le secondaire, le collégial et l'enseignement universitaire (voir figure 1). L'enseignement est

[*] Université de Montréal – Canada – philippe.r.richard@umontreal.ca
[**] Université de Moncton – Canada – viktor.freiman@umoncton.ca
[***] Nipissing University – Canada – danj@nipissingu.ca

© Richard P. R., Freiman V., Jarvis D. H (2012) L'enseignement des mathématiques au Québec. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (SPE3, pp. 1824–1846). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

gratuit au primaire, au secondaire et au collégial, mais à l'université des droits de scolarité sont exigés peu importe le type d'établissement.

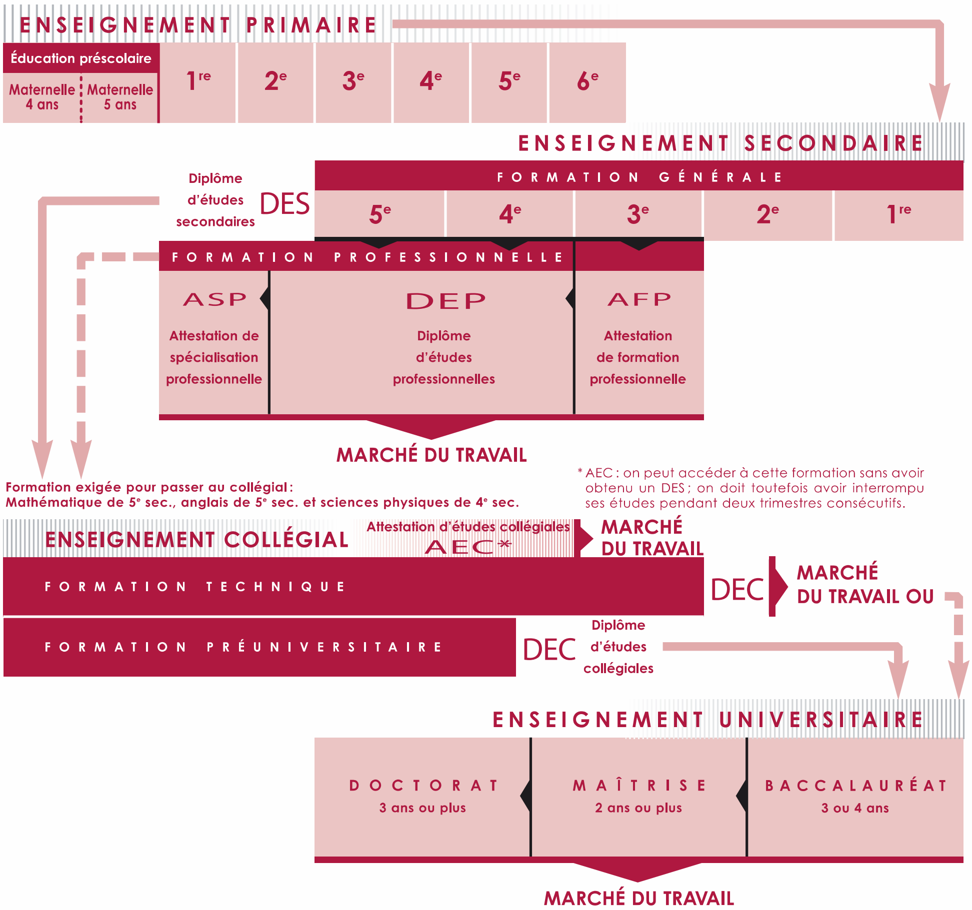


***Figure 1** – Le système scolaire au Québec*[1]

Après une formation de base commune qui s'étend de la première année du primaire à la seconde année du secondaire, aux parcours de formation générale (traditionnelle ou appliquée) s'ajoutent les parcours de formation professionnelle et de formation axée sur l'emploi. Pour ceux qui poursuivent leurs études, la formation postsecondaire commence dans les cégeps, une institution typiquement québécoise. Il s'agit des collèges d'enseignement général et professionnel qui offrent au sein d'un même établissement des programmes de formation préuniversitaire et de formation technique. Cette particularité d'un ordre d'enseignement charnière entre le secondaire et l'université se traduit par le fait qu'au Québec on entre à l'université un an après le reste du Canada, mais que les programmes universitaires sont plus spécifiques dès le début de la formation et qu'ils durent une année en moins.

Lorsque l'on souhaite comparer finement le nombre d'années d'études entre les systèmes québécois et hors du Québec, on doit considérer les particularités sur le début de l'enseignement obligatoire. Néanmoins, malgré une tendance canadienne qui cherche à commencer la scolarisation dès la maternelle ou la prématernelle, l'éducation préscolaire au Québec est toujours volontaire. Afin de simplifier la comparaison au tableau 2, nous avons alors fixé la première année d'étude à la première année du primaire. Cette année coïncide avec les mêmes élèves du groupe d'âge 6-7 ans et l'échelle qui découle se poursuit jusqu'à l'université. On remarque plusieurs différences entre les notions d'école élémentaire,

[1] Adaptation de http://www.mels.gouv.qc.ca/scolaire/educqc/systemeScolaire/.

secondaire et de collège, le début et la fin de la formation de base commune, de la scolarité obligatoire, de la formation professionnelle, etc. Par contre, les diplômes universitaires sont délivrés essentiellement après le même nombre d'années d'étude.

Système québécois		Années d'étude	Systèmes canadiens hors Québec	Nouveau-Brunswick		Canada anglais		
				Fra	Ang	I	II	
	Enseignement primaire 1re	1	*Elementary education* Grade 1	École élémentaire	Elementary School	Elementary School	Elementary School	
	2e	2	Grade 2					
	3e	3	Grade 3					
	4e	4	Grade 4					
	5e	5	Grade 5					
	6e	6	Grade 6		Middle School			
	Enseignement secondaire 1re	7	Grade 7				Senior Elementary - Junior High School	
	2e	8	Grade 8					
Programmes professionnels du secondaire **DEP**, **ASP** et **AEP**	3e	9	*Secondary education* Grade 9	École secondaire	High School		Senior High School	
	4e	10	Grade 10					Technical Vocational High School
	5e **DES**	11	Grade 11					
Programmes techniques du collégial **DEC** et **AEC**	*Enseignement collégial* Formation pré-universitaire **DEC**	12	Grade 12					
		13	*Tertiary education* Université Undergraduate 4 ans **Bachelor's degree**					College • Community college (2 ans) • Technical, applied arts or applied science school (4 ans)
	Enseignement universitaire 1er cycle 3 ou 4 ans (ex. éducation, génie) **Baccalauréat**	14						
		15						
		16						
DESS	2e cycle **Maîtrise**	17	Graduate **Master's degree**					
		18						
	3e cycle **Doctorat**	19	Postgraduate **Doctorate**					
		20						
		21						

***Tableau 2** – Équivalences entre les systèmes québécois, néo-brunswickois et canadiens anglais*

Note sur le tableau 2 : La trame en vert représente la scolarité obligatoire, en orange la formation supérieure générale et en bleu la formation professionnelle, technique ou spécialisée. L'italique souligne l'ordre d'enseignement et le gras le diplôme ou l'attestation obtenue. Au Canada anglais, nous avons reproduit les deux modèles les plus fréquents (colonnes I et II). De façon générale, on amorce souvent l'école élémentaire dès la maternelle (voir les études sur le Nouveau-Brunswick et le Canada anglais), mais l'enseignement obligatoire au Québec commence en premier année du primaire et sert de point de départ pour compter le nombre d'années d'étude. En bout de piste, les programmes de maîtrise et de doctorat se rejoignent. Mais au Québec, pour un même diplôme universitaire de 1[er] cycle (baccalauréat), la formation peut durer 3 ou 4 ans selon les spécialités. Ainsi, la formation initiale des enseignants pour le préscolaire-primaire et pour l'enseignement des mathématiques au secondaire dure 4 ans.

II. ORIENTATION DES PROGRAMMES

1. Responsabilités des programmes selon les ordres d'enseignement

Au Québec, le ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport est le premier responsable d'élaborer et de proposer au gouvernement des politiques relatives aux domaines qui vont de l'éducation préscolaire jusqu'à l'enseignement et la recherche universitaires. Bien qu'il joue un rôle différent selon l'ordre d'enseignement visé, au préscolaire, au primaire, au secondaire et au collégial, il établit les programmes, définit les objectifs et souvent, les contenus ou les standards. À l'université, le Ministère assure l'avancement de l'enseignement et de la recherche en fournissant aux établissements d'enseignement les ressources nécessaires pour leur fonctionnement et leur développement, mais il en respecte l'autonomie, tout en favorisant une certaine concertation entre ses partenaires. Hormis les plans des relations de travail et des finances, on peut résumer au tableau 3 les principaux organismes institutionnels qui orientent ou coordonnent les ordres d'enseignement.

Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport	http://www.mels.gouv.qc.ca/
Fédération des commissions scolaires du Québec	http://www.fcsq.qc.ca
Fédération des cégeps	http://www.fedecegeps.qc.ca/
Conférence des recteurs et des principaux des universités du Québec	http://www.crepuq.qc.ca/

***Tableau 3** – Institutions québécoise en amont dans la formation*

Bien que le rôle de chaque organisme ne soit pas exclusif, on peut facilement en situer les mandats à partir des portails respectifs. On assiste notamment, au gré de l'évolution ministérielle, à la création de petites entités charnières comme le *Comité-conseil sur les programmes d'études* (du préscolaire au secondaire) ou les *Comité-conseil de la formation générale* et *du programme d'études préuniversitaires sciences, lettres et arts* (cégep). Par ailleurs, ces sites Web débouchent sur une quantité importante d'information et de liens privilégiés qui demeurent accessibles aux parents, élèves ou tout autre intervenant du monde de l'éducation. Une partie de notre propos se fonde sur l'information qui se trouve sur ces sites, mais comme elle est du domaine public, nous ne mentionnons dans ce qui suit que les références précises ou les citations.

Le Ministère est responsable de la définition des programmes de formation pour l'enseignement préscolaire, primaire et secondaire, ce qui facilite l'identification de la formation mathématique commune à tous les élèves québécois. Les programmes d'études au collégial se composent d'une partie commune (trois cours de langue d'enseignement et littérature, un cours de langue seconde, deux cours de philosophie et trois cours d'éducation physique), d'une partie propre au programme d'études choisi (un cours de langue d'enseignement et littérature, un cours de langue seconde et un cours de philosophie) et d’une partie complémentaire (deux cours dans d'autres domaines que ceux de la formation spécifique), laissant à chaque cégep la responsabilité de définir l’ensemble de leurs programmes sous ces contraintes, aussi bien au sein de la formation préuniversitaire que de la formation technique.

Il est difficile d’établir avec précision le nombre de programmes qui coexistent au collège. En plus de la formation dite régulière, certains programmes sont conçus temporairement pour des clientèles particulières, comme les programmes de formation continue ou d’éducation aux adultes. Comparativement à l’enseignement obligatoire, l’enseignement des mathématiques y est donc très variable et même en connaissant la description de cours communs, comme les cours de calcul différentiel et intégral, d’algèbre et de statistique pour ne nommer que ceux là, nous ne pouvons rendre compte de la formation effective à partir de cet ordre d’enseignement. À l’université, la variété de la formation en mathématique est encore plus grande : toute tentative de brosser un portrait même global dépasse largement les limites de notre étude.

Il convient de souligner l’exception de la formation des enseignants, dont la responsabilité entre les universités et le Ministère se chevauche. Le *Comité d'agrément des programmes de formation à l'enseignement* (voir http://www.capfe.gouv.qc.ca/) est un organisme qui a la responsabilité d'agréer ces programmes de formation selon les orientations et les directives du Ministère. Il doit interpréter ces dernières en fonction des programmes de formation à l’enseignement que lui soumettent les universités et, tout en respectant les pratiques de liberté universitaire, il peut recommander d’autres approches de formation. Malgré une autonomie certaine, la qualité des programmes qu'il agrée et qu'il recommande pour fin d'obtention d'une autorisation d'enseigner est la responsabilité du ministre.

2. *L’enseignement des mathématiques dans la formation de base*

De la première année du primaire à la seconde année du secondaire, le programme de formation est commun à tous les élèves québécois. Dans une intention digne de mention, la formulation des programmes visait à assurer une continuité du préscolaire au cégep en insistant sur la notion de compétence, ce qui permettait notamment d’éviter un effet de cloisonnement disciplinaire. Les contenus étaient énoncés, mais on laissait aux enseignants une grande marge de manœuvre quant à leur ordre d’étude, légitimant en quelque sorte le caractère relatif des connaissances dans l’apprentissage. On ne parle d’ailleurs plus de programmes d’études, mais bien de programmes de formation. Fondés en partie sur la recherche pédagogique, les programmes introduisent plusieurs nouvelles notions techniques qui s’ajoutent aux repères épistémologiques traditionnels et au vocabulaire hérité des programmes précédents, formulé par objectifs. En outre, les programmes doivent être compréhensibles à la fois par les parents et l’ensemble des intervenants du monde de l’éducation, jouant sur la polysémie des termes et l’élasticité sémantique. Il s’agit forcément d’un exercice périlleux, mais le résultat est là, avec ses avantages et ses inconvénients.

Afin de s’y retrouver, nous profitons des nombreux diagrammes qui figurent dans le texte des programmes, mais nous les décrivons à peine. Faute d’espace, nous invitons le lecteur à consulter les originaux dans MÉLS (2001, 2006 et 2007), de même que certaines mises à jour récentes qui ne modifient pas l’esprit initial de ces versions. Elles sont disponibles en navigant sur le site Web de la Direction générale de la formation des jeunes[2]. À la figure 4, nous résumons les éléments clefs du programme de formation au préscolaire-primaire, issus de MÉLS (2001). Même si les cadres de couleur apparaissent sur des pages différentes, nous

---

[2] Voir http://www.mels.gouv.qc.ca/DGFJ/.

avons conservé le même ordre de numération des schémas (1, 2, 3, 4 et 8) tout comme l'esthétique ministérielle de l'ensemble. Les trois compétences mathématiques se trouvent dans le tiers inférieur et, à droite, leurs composantes respectives. À part quelques différences de formulation, les compétences mathématiques du primaire au secondaire s'énoncent *résoudre une situation-problème*, *déployer un raisonnement mathématique* et *communiquer à l'aide du langage mathématique*. La spécificité du préscolaire est au schéma 4.

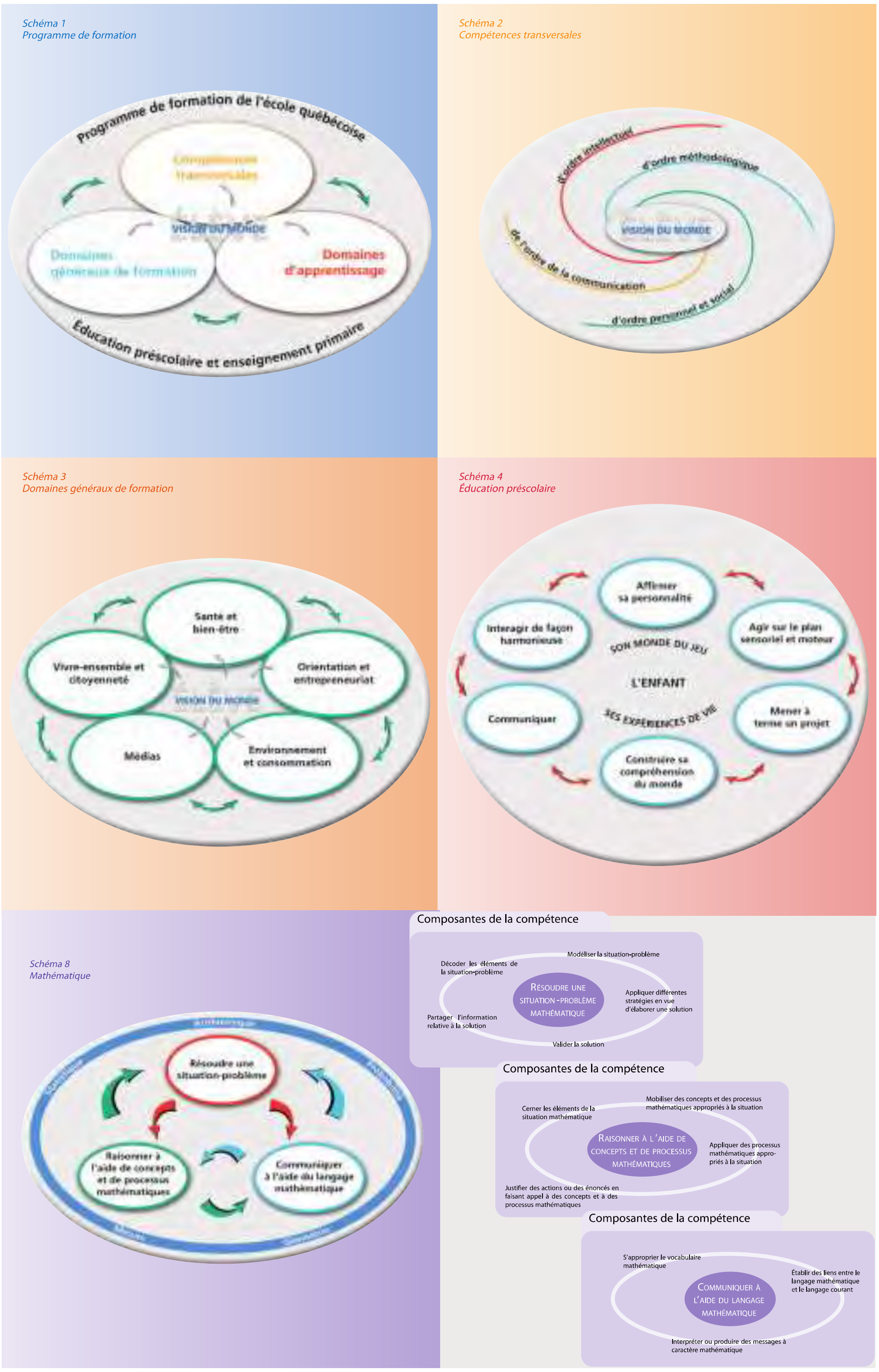
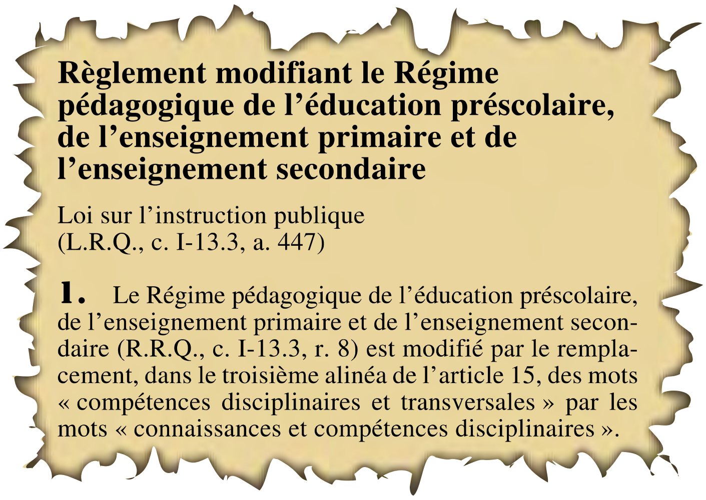


***Figure 4** – Les principaux éléments de programme de formation au préscolaire-primaire*

Au cours des dernières années, les notions de compétences disciplinaires et surtout de compétences transversales ont suscité de vives réactions chez les parents et dans le monde de l'éducation en général. Cette disposition a été largement été couverte par les médias et elle a entraîné une modification dans le régime pédagogique (voir illustration 5). Malgré la bonne intention dont nous avons parlée précédemment, on trouvait que les compétences transversales étaient difficiles à évaluer et que l'évaluation même des compétences risquait d'y subordonner les connaissances traditionnelles. On a même souligné que la compétence transversale portant sur la résolution de problème entrait en conflit avec la compétence mathématique du même nom, typique du domaine et sans doute la plus importante. Les connaissances disciplinaires se montrent alors au premier plan pour chaque domaine d'apprentissage. Jusqu'à la fin de secondaire, les mathématiques appartiennent au domaine *de la mathématique, de la science et de la technologie*, aux côtés des domaines *des langues*, *de l'univers social*, *des arts* et *du développement personnel*.



Règlement modifiant le Régime pédagogique de l'éducation préscolaire, de l'enseignement primaire et de l'enseignement secondaire

Loi sur l'instruction publique
(L.R.Q., c. I-13.3, a. 447)

1. Le Régime pédagogique de l'éducation préscolaire, de l'enseignement primaire et de l'enseignement secondaire (R.R.Q., c. I-13.3, r. 8) est modifié par le remplacement, dans le troisième alinéa de l'article 15, des mots « compétences disciplinaires et transversales » par les mots « connaissances et compétences disciplinaires ».

***Illustration 5** – Extrait de la Gazette officielle du Québec, 8 septembre 2010, 142e année, no 36*

3. *L'enseignement des mathématiques au deuxième cycle du secondaire*

La structure du programme est reprise au 2e cycle du secondaire, mais la coexistence des parcours de formation générale, de formation générale appliquée et de formation axée sur l'emploi (préparatoire au travail ou menant à l'exercice d'un métier semi-spécialisé) se traduit par une différenciation dans le cheminement de l'élève. Après une première année commune en 3e secondaire, l'élève poursuit sa formation selon une des trois séquences offertes, ce qui implique une particularisation au niveau du contenu mathématique (figure 6).

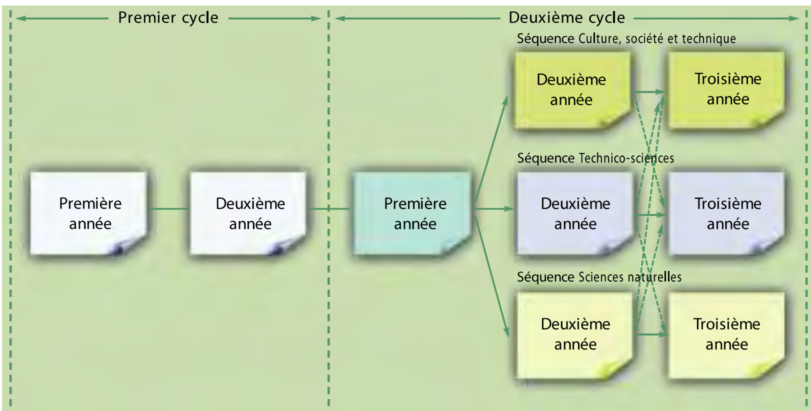


***Figure 6** – Trois cheminements possibles en mathématiques pour les deux dernières années du cycle*

III. DÉVELOPPEMENT DES MATHÉMATIQUES À TRAVERS LES PROGRAMMES

1. *Contenu de formation*

Dans toute la scolarité obligatoire, le contenu mathématique se présente en cinq branches, souvent groupés selon les disciplines « arithmétique et algèbre », « probabilités et statistiques » et « géométrie ». En plus de proposer des liens avec les autres contenus de formation (figure 7), on y montre également certains liens intramathématiques (figure 8). Les programmes commencent par la présentation du sens de la discipline et des compétences mathématiques, dont les composantes de chaque compétence, les attentes de fin de cycle et des critères d’évaluation. Le contenu mathématique apparaît précisément dans les « savoirs essentiels » (préscolaire-primaire) ou dans les listes de « concepts » et de « processus » (secondaire), ordonné sous les branches ou les disciplines mathématiques. On y donne également des repères culturels, des éléments de méthode (secondaire) et quelques considérations sémiotiques (symboles, notations, vocabulaire) ou heuristiques générales (stratégies relatives à la résolution de situations-problèmes).

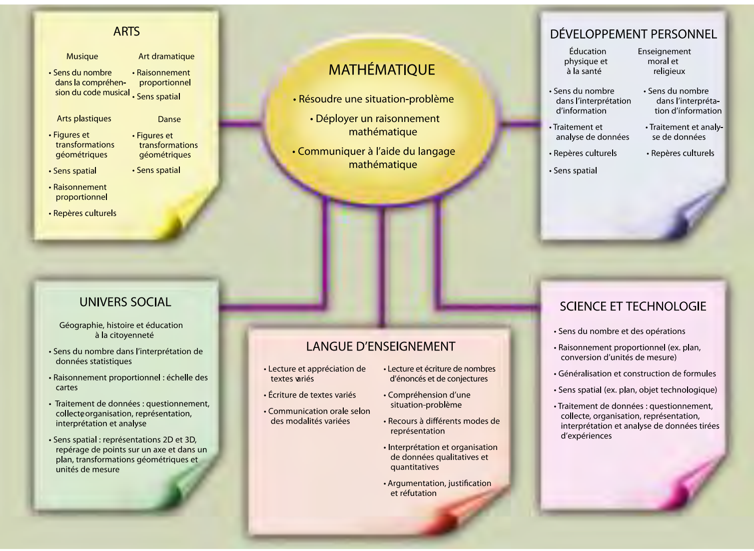


***Figure 7** – Liens interdisciplinaires issus du programme de 1er cycle au secondaire*

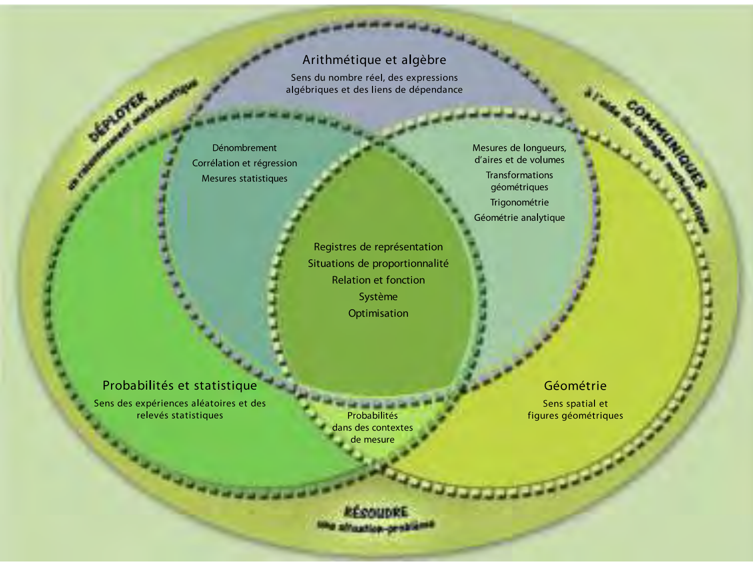


***Figure 8** – Liens intramathématiques issus du programme de 2e cycle au secondaire*

2. *Exemple de la géométrie*

Pour comprendre la logique évolutive du développement des compétences mathématiques à travers le contenu de formation, nous avons produit un collage du contenu géométrique issu de MÉLS (2001, 2006 et 2007). Au préscolaire-primaire (tableau 9), la géométrie comprend l'étude de l'espace et des formes, avec une attention toute particulière sur la mesure. Les puces 1, 2 et 3 se réfèrent au cycle de formation (1er cycle : 1re et 2e année; 2e cycle : 3e et 4e année; 3e cycle : 5e et 6e année) où chaque savoir essentiel est censé apparaître. Ces savoirs sont groupés suivant un thème commun, comme l'espace, les solides, les figures planes, de ainsi que les frises et les dallages.

GÉOMÉTRIE : FIGURES GÉOMÉTRIQUES ET SENS SPATIAL			
• Espace			
– Repérage d'objets et de soi dans l'espace, relations spatiales (devant, sur, à gauche, etc.)	1		
– Repérage sur un axe	1	2	3
– Repérage dans un plan	1	2	
– Repérage dans le plan cartésien		2	3
• Solides			
– Comparaison et construction : prisme, pyramide, boule, cylindre, cône	1		
– Comparaison des objets de l'environnement aux solides	1		
– Attributs (nombre de faces, base) : prisme, pyramide	1		
– Description de prismes et de pyramides à l'aide de faces, de sommets, d'arêtes		2	
– Développement de prismes et de pyramides		2	
– Classification de prismes et de pyramides		2	
– Reconnaissance du développement de polyèdres convexes			3
– Expérimentation de la relation d'Euler (relation entre les faces, les sommets et les arêtes d'un polyèdre convexe)			3
• Figures planes			
– Comparaison et construction de figures composées de lignes courbes fermées ou de lignes brisées fermées	1		
– Identification du carré, du rectangle, du triangle, du cercle et du losange	1		
– Description du carré, du rectangle, du triangle et du losange	1		
– Description de polygones convexes et non convexes		2	
– Description des quadrilatères dont le trapèze et le parallélogramme : segments parallèles, segments perpendiculaires, angle droit, angle aigu, angle obtus		2	
– Classification des quadrilatères		2	
– Construction de lignes parallèles et de lignes perpendiculaires		2	
– Description de triangles : triangle rectangle, triangle isocèle, triangle scalène, triangle équilatéral			3
– Classification de triangles			3
– Mesure d'angles en degrés à l'aide d'un rapporteur d'angles			3
– Étude du cercle : rayon, diamètre, circonférence, angle au centre			3
• Frises et dallages			
– Observation et production de régularités à l'aide de figures géométriques		2	
– Figures isométriques (mêmes mesures)	1		
– Observation et production (grilles, papier calque) de frises par réflexion : réflexion, axe de réflexion		2	
– Observation et production de dallages à l'aide de la réflexion		2	
– Observation et production (grilles, papier calque) de frises par translation : translation, flèche de translation (longueur, direction, sens)			3
– Observation et production de dallages à l'aide de la translation			3

MESURE			
• Longueurs : estimation et mesurage			
– Dimensions d'un objet	1		
– Unités non conventionnelles : comparaison, construction de règles	1		
– Unités conventionnelles (m, dm, cm)	1		
– Unités conventionnelles (m, dm, cm, mm)		2	
– Unités conventionnelles (km, m, dm, cm, mm)			3
– Relations entre les unités de mesure		2	3
– Périmètre, calcul du périmètre		2	
• Angles : estimation et mesurage			
– Comparaison d'angles (droit, aigu, obtus)		2	
– Degré			3
• Surfaces : estimation et mesurage			
– Unités non conventionnelles		2	
– Unités conventionnelles (m^2, dm^2, cm^2), relations entre les unités de mesure			3
• Volumes : estimation et mesurage			
– Unités non conventionnelles		2	
– Unités conventionnelles (m^3, dm^3, cm^3), relations entre les unités de mesure			3
• Capacités : estimation et mesurage			
– Unités non conventionnelles			3
– Unités conventionnelles (L, mL), relations entre les unités de mesure			3
• Masses : estimation et mesurage			
– Unités non conventionnelles			3
– Unités conventionnelles (kg, g), relations entre les unités de mesure			3
• Temps : estimation et mesurage			
– Unités conventionnelles, durée (jour, heure, minute, seconde, cycle quotidien, cycle hebdomadaire, cycle annuel)	1	2	
– Relations entre les unités de mesure			3
• Températures : estimation et mesurage			
– Unité conventionnelle (°C)			3

Tableau 9 *– Contenu géométrique au préscolaire-primaire*

Au 1er cycle du secondaire (tableau 10), ce sont maintenant les concepts et les processus géométriques qui chapeautent le contenu de formation. Celui-ci se présente dans des blocs séparés, mais les définitions et les propriétés caractéristiques nécessaires à la mise en œuvre de raisonnements déductifs sont formulées dans une section à part. Bien qu'il n'y ait aucune indication à cet effet, nous croyons que l'on veut éviter d'avoir à en distinguer les aspects conceptuels des aspects processuels. On y formule en termes isométriques 28 « énoncés de géométrie euclidienne » que nous ne reproduisons pas dans notre texte.

Concepts	Processus
Figures géométriques[12] et sens spatial – Figures planes • Triangles, quadrilatères et polygones réguliers convexes – Segments et droites remarquables : bissectrice, médiatrice, médiane, hauteur – Base, hauteur • Cercle, disque et secteur – Rayon, diamètre, corde, arc – Angle au centre • Mesure – Angle et arc en degrés – Longueur – Périmètre, circonférence – Aire, aire latérale, aire totale – Choix de l’unité de mesure pour les longueurs ou les aires – Relations entre les unités de longueur du SI[13] – Relations entre les unités d’aire du SI – Angles • Complémentaires, supplémentaires • Créés par deux droites sécantes : opposés par le sommet, adjacents • Créés par une droite sécante à deux autres droites : alternes-internes, alternes-externes, correspondants – Solides[14] • Prismes droits, pyramides droites et cylindres droits • Développements possibles d’un solide • Solides décomposables – Figures isométriques et semblables	– Constructions géométriques – Transformations géométriques • Translation, rotation, réflexion • Homothétie de rapport positif – Recherche de mesures manquantes • Angles – Mesures manquantes dans différents contextes • Longueurs – Périmètre d’une figure plane – Circonférence d’un cercle et longueur d’un arc – Périmètre d’une figure provenant d’une similitude – Segments provenant d’une isométrie ou d’une similitude – Mesure manquante d’un segment d’une figure plane • Aires – Aire de polygones décomposables en triangles et en quadrilatères – Aire de disques et de secteurs – Aire de figures décomposables en disques, en triangles ou en quadrilatères – Aire latérale ou totale de prismes droits, de cylindres droits ou de pyramides droites – Aire latérale ou totale de solides décomposables en prismes droits, en cylindres droits ou en pyramides droites **Note** Les processus liés aux transformations et aux constructions géométriques servent à construire des concepts et à dégager des invariants et des propriétés afin de les réinvestir dans différents contextes et de développer le sens spatial. Elles peuvent être réalisées à l’aide d’instruments de géométrie ou de logiciels appropriés dans le plan euclidien. Les transformations géométriques dans le plan cartésien ne sont pas retenues au premier cycle. Lors de la recherche de mesures manquantes, l’élève est occasionnellement invité à effectuer des transferts dans des problèmes plus complexes, c’est-à-dire ceux qui nécessitent la décomposition d’un problème en sous-problèmes, par exemple le calcul de l’aire de figures décomposables. De ce fait, il gère un problème qui comporte plusieurs étapes. Il met aussi à profit le développement d’un solide. De plus, il utilise des relations et des propriétés connues. Il met en œuvre des processus arithmétiques et algébriques ainsi qu’un raisonnement proportionnel.

***Tableau 10** – Contenu géométrique au 1er cycle du secondaire*

La même logique de blocs séparés est reprise au 2e cycle du secondaire, mais à partir de la 2e année il faut tenir compte d’une particularisation suivant les séquences (tableau 11). C’est la première fois qu’on introduit des notions de géométrie analytique dans la formation et plusieurs propriétés géométriques, dont de nouveaux énoncés de géométrie euclidienne, sont reportées dans une annexe intitulée *Pistes d’exploration* (MÉLS 2007). Pour la séquence culture, société et technique, la géométrie s’enrichit par des considérations en théorie des graphes, et si elle semble disparaître du programme en 5e secondaire, un examen plus attentif montre qu’il reste encore à l’étude les « figures équivalentes » et l’« analyse de situations ». Au tableau 12, nous ne reproduisons que le contenu de formation pour cette séquence, mais dans le premier tiers se trouve les notions communes aux trois séquences (3e secondaire).

DEUXIÈME CYCLE DU SECONDAIRE			
1re année	**Solides** – Développement, projection et perspective **Mesure** – Volume; unités de volume du SI; relations entre elles		
	Séquence Culture, société et technique	***Séquence Technico-sciences***	***Séquence Sciences naturelles***
2e année	**Géométrie analytique** – Accroissement : distance, pente, point de partage – Droite et demi-plan : droites parallèles et perpendiculaires **Mesure** – Relations dans le triangle : sinus, cosinus, tangente, loi des sinus et formule de Héron	**Géométrie analytique** – Distance entre deux points – Coordonnées d’un point de partage – Droite : équation, pente, droites parallèles et perpendiculaires, médiatrices **Mesure** – Relations métriques et trigonométriques dans le triangle rectangle	**Figures équivalentes** **Géométrie analytique** – Droite et distance entre deux points **Mesure** – Relations métriques et trigonométriques dans le triangle (sinus, cosinus, tangente, lois des sinus et des cosinus)
3e année	**Figures équivalentes**	**Figures équivalentes** **Géométrie analytique** – Lieu géométrique, position relative : lieux plans et coniques – Cercle trigonométrique et identité trigonométrique – Vecteur (résultante et projection) **Mesure** – Relations métriques dans le cercle et trigonométriques dans le triangle : lois des sinus et des cosinus	**Géométrie analytique** – Cercle trigonométrique et identité trigonométrique – Vecteur – Conique : • parabole • cercle, ellipse et hyperbole centrés à l’origine
	Graphe – Degré, distance, chaîne, cycle – Graphe : orienté, valué (pondéré)		

***Tableau 11** – Évolution des principaux concepts liés à la géométrie et aux graphes au 2e cycle*

Sens spatial et figures géométriques	
Concepts	**Processus**
– Solides • Développement, projection et perspective • Mesure - Volume - Unité de mesure pour les volumes - Relations entre les unités de volume du système international, y compris les mesures de capacité	– Analyse de situations mettant à profit des propriétés des figures • Description et construction d'objets • Représentation dans le plan de figures à trois dimensions à l'aide de différents procédés • Recherche de mesures manquantes - Longueurs ▪ Côtés d'un triangle rectangle (relation de Pythagore) ▪ Segments provenant d'une isométrie, d'une similitude, d'une figure plane ou d'un solide - Aires ▪ Sphère, aire latérale ou totale de cônes droits et de figures décomposables ▪ Figures issues d'une similitude - Volumes ▪ Solides décomposables en prismes droits, en cylindres droits, en pyramides droites, en cônes droits, en boules ▪ Solides issus d'une similitude - Choix approprié d'une unité de mesure ▪ Conversions entre diverses unités de mesure (longueur, aire, volume, capacité)

Sens spatial et figures géométriques	
Concepts de la 2e année du cycle	**Processus**
– Géométrie analytique • Accroissement : distance, pente, point de partage • Droite et demi-plan - Droites parallèles et perpendiculaires – Mesure • Relations dans le triangle : sinus, cosinus, tangente, loi des sinus, formule de Héron	– Analyse de situations • Modélisation et représentation d'une situation à l'aide d'une droite ou d'un demi-plan graphiquement ou algébriquement • Recherche de mesures manquantes ou de positions mettant à profit des propriétés de figures ou des relations métriques ou trigonométriques - Angles d'un triangle - Longueurs ▪ Côté d'un triangle rectangle, hauteur relative à l'hypoténuse ▪ Côté d'un triangle ▪ Segment situé dans un plan cartésien ou distance entre deux points - Aires ▪ Triangles et quadrilatères - Coordonnées de points
Concepts de la 3e année du cycle	**Processus**
– Figures équivalentes	– Analyse de situations • Observation de transformations géométriques dans le plan cartésien - Représentation graphique et interprétation d'une règle • Recherche de mesures manquantes : positions, angles, longueurs, aires, volumes, mettant à profit des figures isométriques, semblables ou équivalentes ainsi que des propriétés des figures, des transformations géométriques et des relations métriques ou trigonométriques • Optimisation dans différents contextes tels que la conception d'objets et les situations économiques - Comparaison et calcul de distances - Choix de la figure appropriée pour respecter les contraintes données
Note : L'équation de la droite sous la forme symétrique et la loi des cosinus ne sont pas au programme de la séquence *Culture, société et technique*. Les transformations géométriques observées ou représentées sont notamment la translation, l'homothétie centrée à l'origine, la réflexion par rapport à l'axe des abscisses et à l'axe des ordonnées ainsi que la dilatation ou la contraction. La rotation centrée à l'origine dont l'angle de rotation est un multiple de 90° est facultative.	

Sens des données représentées à l'aide de graphes	
Concepts de la 3e année du cycle	**Processus**
– Graphe • Degré, distance, chaîne et cycle • Graphe : orienté, valué (pondéré)	– Analyse, optimisation et prise de décisions concernant des situations qui mettent à profit le concept de graphe • Représentation et modélisation d'une situation à l'aide d'un graphe orienté ou non, coloré ou non, valué (pondéré) ou non (y compris les arbres) • Comparaison de différents graphes • Recherche de chaînes ou de cycles eulériens et hamiltoniens, d'un chemin critique, de la chaîne la plus courte, d'un arbre de valeurs minimales ou maximales ou encore du nombre chromatique
Note : La terminologie concernant les graphes est introduite au fur et à mesure qu'ils apparaissent à l'intérieur des situations. Il ne s'agit pas de mémoriser un ensemble de définitions. Les propriétés sont également introduites à l'occasion de situations d'exploration. Certaines propriétés peuvent être démontrées, au besoin, par la mise à profit des propriétés des nombres. Quelques propriétés des graphes sont présentées à l'annexe E.	

Tableau 12 *– Géométrie et graphes de la séquence culture, société et technique*

IV. EXEMPLES DE TRAITEMENT DE THÈMES D'ENSEIGNEMENT

1. Proportionnalité

La notion de proportionnalité apparaît principalement dans les programmes du secondaire. Au préscolaire-primaire, on associe peut-être le sens de la proportionnalité, directe ou inverse, à la compétence « raisonner à l'aide de concepts et de processus mathématiques ». Toutefois, la notion même n'apparaît pas dans les savoirs essentiels, tandis qu'au secondaire on y introduit le raisonnement proportionnel dès le 1er cycle et, dans le développement du contenu arithmétique, elle figure au premier niveau des concepts et des processus (tableau 13).

Concepts	Processus
Sens de la proportionnalité	*Traitement d'une situation de proportionnalité*
– Rapport et taux • Rapports et taux équivalents • Taux unitaire – Proportion • Égalité de rapports et de taux • Rapport et coefficient de proportionnalité – Variation directe ou inverse	– Comparaison de rapports et de taux – Reconnaissance d'une situation de proportionnalité, notamment à l'aide du contexte, d'une table de valeurs ou d'un graphique – Résolution d'une situation de proportionnalité – Repérage de couples de nombres dans le plan cartésien (abscisse et ordonnée d'un point)

Tableau 13 *– La proportionnalité au 1^er^ cycle du secondaire*

De façon générale, le raisonnement proportionnel ou la proportionnalité se lie aux autres contenus de formation (ex. figure 7) et aux autres branches mathématiques du programme (ex. figure 8). Si elles s'attachent naturellement aux compétences *déployer un raisonnement mathématique* et *résoudre une situation-problème*, on les remarque plus souvent de la 1re à la 3e secondaire. Au 1er cycle du secondaire, les éléments de méthode en arithmétique soulèvent l'application du retour à l'unité, du facteur de changement, du coefficient de proportionnalité et du procédé additif. Nous n'avons pas trouvé de mention explicite entre les phénomènes linéaires et la proportionnalité, quoique dans la séquence sciences naturelles, les éléments de méthode du contenu géométrique indiquent :

> Le concept de vecteur s'inscrit dans la continuité de l'étude de la linéarité entreprise au cycle précédent. Il permet d'aborder d'une nouvelle façon certaines situations faisant appel à la géométrie et d'y lier diverses notions, telles la proportionnalité, les fonctions linéaires (et affines), les équations du premier degré et les transformations géométriques associées au déplacement. L'élève peut alors établir un parallèle entre les propriétés des nombres réels et celles des vecteurs. (MÉLS 2007, p. 110)

On ne mentionne pas la propriété de Thalès, mais un énoncé de géométrie euclidienne s'énonce : « Les angles homologues des figures planes ou des solides semblables sont isométriques et les mesures des côtés homologues sont proportionnelles ». Cette idée relative au sens de la proportionnalité géométrique est parfois reprise pour les représentations graphiques en statistique ou dans les autres contenus de formation. Les situations de proportionnalité se situent à l'intersection des trois disciplines mathématiques (figure 8).

2. *Équations quadratiques*

Bien que l'on signale brièvement l'existence de la résolution d'équations du second degré dans les repères culturels en troisième secondaire, le traitement sur les équations quadratiques ou les fonctions du second degré n'apparaissent qu'à partir de la 4e secondaire. On retrouve cette famille de fonctions dans toutes les séquences. Cependant, la manipulation d'identités algébriques, la résolution analytique ou graphique d'équations quadratiques, d'inéquation ou de systèmes dont au moins un des membres est du 2e degré sont typiques de la séquence sciences naturelles (tableau 14). On se réfère même aux coniques pour le développement du sens du nombre réel, des expressions algébriques et des liens de dépendance. Cependant, dans les éléments de méthode d'arithmétique et d'algèbre de la séquence technico-sciences, on spécifie qu'en fin de cycle il faut arriver à compléter le carré :

> C'est peu à peu que l'élève est amené à manipuler des expressions algébriques impliquant la factorisation d'un polynôme (y compris le trinôme du second degré à coefficients entiers). Il explore la mise en évidence simple ou double, la substitution d'une identité remarquable du second degré (différence de carrés ou trinôme carré parfait), puis, à la dernière année du cycle, la complétion du carré. (Ibidem, p. 89)

De plus, on insiste sur le processus d'analyse de situations dans lequel l'élève se doit d'interpréter et de représenter graphiquement la réciproque de fonctions du second degré (relation s'exprimant par deux fonctions racine carrée). Dans cette logique, les fonctions du second degré apparaissent dans la description des compétences *résoudre une situation-problème* et *communiquer à l'aide du langage mathématique*.

DEUXIÈME CYCLE DU SECONDAIRE			
1re année	**Nombres réels : rationnels et irrationnels;** cube et racine cubique **Relation d'inégalité**	**Relation, fonction et réciproque** – Variable dépendante et variable indépendante – Fonction polynomiale de degré 0 ou 1 et système d'équations du 1er degré à deux variables de la forme $y = ax + b$, fonction rationnelle de la forme $f(x) = \frac{k}{x}$ ou $xy = k$	
	Séquence Culture, société et technique	***Séquence Technico-sciences***	***Séquence Sciences naturelles***
2e année	**Expression algébrique** – Inéquation du 1er degré à deux variables **Relation, fonction et réciproque** – Fonction réelle : polynomiale de degré inférieur à 3, exponentielle, périodique, en escalier, définie par parties **Système** – Système d'équations du 1er degré à deux variables	**Expressions arithmétique et algébrique** – Nombres réels : radicaux, puissances de base 2 et 10 – Inéquation du 1er degré à deux variables **Relation, fonction et réciproque** – Fonction réelle : polynomiale de degré 2 (forme canonique), exponentielle, partie entière, périodique, en escalier, définie par parties – Paramètre multiplicatif **Système** – Système d'équations du 1er degré à deux variables	**Expression algébrique** – Identité algébrique, équation et inéquation du 2e degré à une ou deux variables **Fonction réelle** – Fonction en escalier (partie entière); polynomiale de degré 2 (formes canonique, générale et factorisée) – Paramètre **Système** – Système d'équations du 1er degré à deux variables – Système composé d'une équation du 1er degré et d'une équation du 2e degré à deux variables
3e année	**Système** – Système d'inéquations du 1er degré à deux variables	**Relation, fonction et réciproque** – Fonction réelle : polynomiale de degré 2 (forme générale, canonique et factorisée), rationnelle, sinusoïdale, tangente (ainsi que les fonctions introduites l'année précédente et leurs réciproques) – Paramètre additif – Opérations sur les fonctions **Système** – Système d'inéquations du 1er degré à deux variables – Système d'équations et d'inéquations faisant intervenir divers modèles fonctionnels	**Expressions arithmétique et algébrique** – Nombres réels : valeur absolue, radicaux, exposants et logarithmes **Relation, fonction et réciproque** – Fonction réelle : valeur absolue, racine carrée, rationnelle, exponentielle, logarithmique, sinusoïdale, tangente, définie par parties – Opérations sur les fonctions **Système** – Système d'inéquations du 1er degré à deux variables – Système d'équations du 2e degré (en relation avec les coniques)

***Tableau 14** – Évolution des principaux concepts liés à l'arithmétique et à l'algèbre au 2e cycle*

3. Théorème de Pythagore

Le traitement sur le théorème de Pythagore a quelque chose de troublant. De fait, il faudrait plutôt parler de la relation de Pythagore puisqu'on ne la présente jamais comme une propriété caractéristique du triangle rectangle, encore moins dans le sens logique de sa réciproque. À titre de contenu de formation, le programme l'introduit uniquement en géométrie de troisième secondaire et il la décrit comme un processus d'« analyse de situations mettant à profit des propriétés des figures » pour la « recherche de mesures manquantes » sur les « côtés d'un triangle rectangle ». Il y a deux repères culturels où les syntagmes « relation de Pythagore » et « théorème de Pythagore » apparaissent, mais le bénéfice mathématique est subordonné à des considérations générales :

> Dans les activités associées à l'histoire de la mathématique, l'élève pourra remarquer que des concepts et des processus sont souvent attribués à un mathématicien en particulier alors qu'ils sont en réalité le fruit du travail de plusieurs mathématiciens, hommes et femmes, de différentes époques (ex. relation de Pythagore déjà connue à l'époque des Babyloniens) (MÉLS 2007, p. 63)
>
> L'élève pourra également découvrir que le théorème attribué à Pythagore a été démontré de nombreuses façons, soit par Euclide, par les Chinois, par les Arabes, par le président américain Garfield, etc. Le fait de comparer quelques unes de ces démonstrations renforce l'idée que plus d'une solution est possible pour résoudre un problème et incite à explorer plus d'une piste au moment de valider une conjecture. (Ibidem, p. 65)

Pour établir un lien avec les paragraphes précédents, le programme n'envisage pas les relations de proportionnalité entre les triangles formés par la hauteur issue de l'angle droit et, à cause de sa structure, il ne peut pas profiter du traitement avec les équations quadratiques. Pourtant, un an plus tard dans la séquence culture, société et technique, un élément de méthode semble vouloir s'y approcher :

> En mobilisant les raisonnements proportionnel et géométrique à l'aide, notamment, de la relation de Pythagore et des propriétés des triangles semblables, l'élève déduit différentes mesures dans le triangle. (Ibidem, p. 77)

Le seul autre élément de méthode où intervient la relation de Pythagore est pour la séquence sciences naturelles, deuxième année du cycle. Il s'agit de mettre en valeur son apport dans le cercle trigonométrique afin de déterminer les coordonnées remarquables de certains points.

4. Problèmes de modélisation

Dans les programmes de formation, la modélisation est systématiquement une composante de la compétence « résoudre une situation-problème ». Au préscolaire-primaire, on parle de « modéliser la situation-problème » et au secondaire, de « représenter la situation-problème par un modèle mathématique ». De façon classique, modéliser signifie représenter mathématiquement toutes sortes de situations, d'objets et de structures du monde réel afin que l'étude mathématique ou les simulations informatiques de ces représentations nous informent sur le monde réel. En revanche, parce que la notion n’est pas définie directement dans les programmes, il semble qu’on se réfère plutôt à l’étape de mathématisation d’une démarche de modélisation extramathématique :

> Aussi, la résolution de situations-problèmes en mathématique engage-t-elle l’élève dans une suite d’opérations de décodage, de modélisation, de vérification, d’explicitation et de validation. Il s’agit d’un processus dynamique impliquant anticipations, retours en arrière et jugement critique. (MÉLS 2001, p. 126)

> En algèbre, l’élève s’initie au sens de l’expression algébrique par des manipulations telles que la réduction ou le développement d’expressions algébriques, la résolution d’équations à une inconnue et la modélisation de situations par une traduction en écriture algébrique. (MÉLS 2006, p. 243)

L’esprit des programmes est propice aux démarches de modélisation extramathématique, ne serait-ce qu’en soulignant la volonté d’établir des liens interdisciplinaires (ex. figure 7). D’une certaine façon, les programmes se prêtent également aux démarches de modélisation intramathématique (ex. figure 8), surtout lorsqu’on souhaite que l’élève mobilise conjointement plusieurs réseaux de concepts et de processus mathématiques en résolution de problèmes. Mais encore faut-il que la structure mathématique du contenu de formation y soit favorable. Ainsi, l’introduction de la relation de Pythagore avant la résolution d’équation du 2^e degré (paragraphe *Théorème de Pythagore*) montre que les choix des auteurs du programme peut constituer une contraire. De plus, en insistant sur la notion de mesure et sur sa généralisation pour comprendre certaines propriétés géométriques, il semble que l’on favorise nettement le lien de la géométrie vers l’arithmétique et l’algèbre. Pourtant, le modèle géométrique est susceptible de rendre de grands services dans la signification des modèles arithmétique et algébrique, notamment pour la découverte de nouvelles propriétés, la mise en place de preuves visuelles ou simplement pour faire briller l’esthétisme des mathématiques.

<table>
<tr><th colspan="4">DEUXIÈME CYCLE DU SECONDAIRE</th></tr>
<tr><td>1re année</td><td colspan="3">– Variable aléatoire discrète et variable aléatoire continue
Distribution à un caractère
– Méthode d’échantillonnage : stratifié, par grappes
– Représentation graphique : histogramme et diagramme de quartiles
– Mesures de tendance centrale : mode, médiane, moyenne pondérée
– Mesure de dispersion : étendue des quarts</td></tr>
<tr><td></td><td>Séquence Culture, société et technique</td><td>Séquence Technico-sciences</td><td>Séquence Sciences naturelles</td></tr>
<tr><td>2e année</td><td>– Probabilité subjective
– Équité : chance, espérance mathématique
Distribution à un caractère
– Mesure de position : rang centile
– Mesure de dispersion : écart moyen
Distribution à deux caractères
– Corrélation linéaire : coefficient de corrélation et droite de régression</td><td>– Probabilité conditionnelle
– Équité : chance, espérance mathématique
Distribution à un caractère
– Mesures de dispersion : écart moyen, écart type
Distribution à deux caractères
– Corrélation linéaire et autre : coefficient de corrélation, droite de régression et courbes apparentées aux modèles fonctionnels à l’étude</td><td>Distribution à deux caractères
– Corrélation linéaire : coefficient de corrélation et droite de régression</td></tr>
<tr><td>3e année</td><td>– Probabilité conditionnelle</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Tableau 15 *– Évolution des principaux concepts liés aux probabilités et à la statistique au 2e cycle*

Au 2^{e} cycle du secondaire, l'analyse fonctionnelle, la théorie des graphes, les probabilités et la statistique sont employées la plupart du temps dans une perspective de modélisation. Au tableau 15, nous reproduisons l'essentiel des concepts liés aux probabilités et à la statistique et au tableau 16, un groupement des processus de modélisation qui sont dispersés dans contenu de formation.

Première année du cycle

- Analyse de situations
  - Observation, interprétation, description et représentation de différentes situations concrètes
    - Modélisation d'une situation à l'aide d'une fonction polynomiale de degré 0 ou 1, ou d'une fonction rationnelle : verbalement, algébriquement, graphiquement et à l'aide d'une table de valeurs

Séquence technico-sciences

- Analyse de situations
  - Modélisation d'une situation à l'aide de registres de représentation : verbalement, algébriquement, graphiquement et à l'aide d'une table de valeurs
  - Modélisation, optimisation et prise de décisions dans des situations faisant appel à des droites, au concept de distance et au point de partage (plans euclidien et cartésien)
  - Modélisation et optimisation de situations faisant appel aux concepts de vecteur, de distance de lieu géométrique, de mesure ou de figures équivalentes

Séquence culture, société et technique

- Analyse de situations liées à des contextes économiques (ex. finances personnelles), sociaux, techniques ou scientifiques, ou encore à la vie quotidienne
  - Modélisation d'une situation
    - Représentation d'une situation à l'aide d'une table de valeurs, algébriquement dans certains cas et graphiquement avec ou sans soutien technologique
    - Description des propriétés des fonctions réelles à l'aide d'une représentation graphique : domaine, image (codomaine), croissance, décroissance, extrémums, signe, coordonnées à l'origine
- Analyse de situations
  - Modélisation et représentation d'une situation à l'aide d'une droite ou d'un demi-plan graphiquement ou algébriquement

Séquence sciences naturelles

- Analyse de situations
  - Observation, interprétation et description de différentes situations
    - Modélisation de situations et représentation graphique à l'aide d'un nuage de points

***Figure 16** – Les processus de modélisation au 2^{e} cycle du secondaire*

5. *Problèmes de preuve*

Comme pour la modélisation, la notion de preuve n'est pas définie directement dans les programmes de formation, ce qui oblige le lecteur à connaître d'emblée de ce dont il s'agit. Au préscolaire-primaire, la notion n'apparaît qu'à la toute dernière page, dans une section de suggestions pour l'utilisation des technologies de l'information et de la communication, où l'on propose d'« utiliser la technologie pour la preuve des opérations ». Même si on en parle peu, l'idée de valider une solution se montre dans les composantes de deux compétences (figure 17), évoquant indirectement la subtilité de la langue française entre une solution valide (reconnue par l'« autorité mathématique ») et une solution valable (valide dans les limites de l'espace, du temps, de la situation ou des moyens utilisés).

	Préscolaire-primaire		Secondaire	
Compétence	Résoudre une situation-problème mathématique	Raisonner à l'aide de concepts et de processus mathématiques	Résoudre une situation-problème	Déployer un raisonnement mathématique
Composante	Valider la solution	Justifier des actions ou des énoncés en faisant appel à des concepts et à des processus mathématiques	Valider la solution	Réaliser des démonstrations ou des preuves

***Figure 17** – Notion de validation attachée à la conviction, aux preuves et à la démonstration*

Dans les programmes du secondaire, la preuve intervient la plupart du temps avec la notion de démonstration, depuis déjà la formulation d'une composante de la compétence «déployer un raisonnement mathématique» (figure 17). Sans chercher à définir les notions techniques, on y souligne volontiers la contribution des systèmes de signes dans les raisonnements et l'on rapproche naturellement les démarches de validation aux démarches de découverte :

> [Le raisonnement] permet de formuler une conjecture et de modifier sa valeur si les données du contexte ou les connaissances de l'apprenant ont changé. Lorsque certaines conditions particulières sont remplies (preuve, démonstration), le raisonnement peut amener une personne à modifier la valeur de vérité de la conjecture. Par ailleurs, le recours à des supports visuels tirés des systèmes de représentation utilisés en mathématique (diagrammes, figures, graphiques, schémas, etc.) peut donner lieu à un raisonnement plus intuitif, mais non moins rigoureux. Le raisonnement demeure toutefois subordonné, notamment lorsqu'il repose sur des cas de figure, à une démarche plus structurée dans laquelle la symbolique mathématique et les règles de démonstration sont mises à contribution. (MÉLS 2006, p. 242)

> Lorsqu'il déploie un raisonnement mathématique, l'élève dégage des lois et des propriétés en observant des régularités et les met en relation avec des concepts et des processus qui lui serviront à justifier des actions. Au fur et à mesure que le besoin de convaincre ou de prouver se fait sentir, il élabore plusieurs étapes pour conduire son raisonnement. Il apprend à mieux l'expliciter et le structurer et à raffiner son argumentation. L'idée de preuve évolue ainsi graduellement vers la construction d'une démonstration rigoureuse. (MÉLS 2007, p. 33)

L'espace disponible pour les problèmes de preuve est donc assez vaste, mais il faut quand même bémoliser nos propos en ce qui concerne l'usage du raisonnement déductif. La perplexité que nous avons manifestée au paragraphe sur le théorème de Pythagore est due en partie au traitement paradoxal accordé à ce type de raisonnement dans le programme de formation :

> L'évolution du traitement réservé au raisonnement déductif dans les programmes québécois des quarante dernières années a des allures de valse-hésitation entre la valorisation et la mise de côté. (Caron et René de Cotret 2007, p. 127)

Loin d'être nouvelle, il est problable que cette situation soit une contre-réaction à l'introduction des mathématiques modernes dans les années 1960 (Richard 2003), d'autant plus que les manuels scolaires québécois les ont déjà employées conséquemment dans le passé (Richard et Sierpinska 2004).

V. QUELQUES CONSIDÉRATIONS CONNEXES

1. Caractéristiques régionales

Bien que ce soit le Ministère qui établi les orientations et les programmes, le système scolaire québécois est assez décentralisé. L'organisme qui constitue une sorte de gouvernement local et dans lequel tout citoyen peut se présenter aux élections scolaires quadriennales est la commission scolaire. Selon la Fédération des commissions scolaires du Québec (tableau 3), il y a actuellement :

> 72 commissions scolaires qui, dans toutes les régions du Québec, veillent à la réussite des élèves en offrant des services essentiels aux 2 500 établissements d'enseignement pour qu'ils puissent se consacrer entièrement à leur mission éducative.
> (...) Pour remplir cette mission, les élus scolaires, assistés par leur direction générale, assurent un partage équitable des ressources entre les différents établissements de leurs milieux pour donner une chance égale de réussite à tous leurs élèves, peu importe leur situation socioéconomique, géographique ou leur capacité d'apprentissage.

Le rôle des commissions scolaires est assez large puisque ce sont elles qui gèrent les ressources et les services offerts aux écoles, que ce soit pour les infrastructures ou le soutien informatique, le transport scolaire, la gestion de la paye et l'embauche des employés, la réparation, l'entretien ou la construction des écoles, les services éducatifs ou de formation offerts aux écoles. Dans le secteur public, ce sont les commissions scolaires qui embauchent les enseignants, en toute indépendance les unes des autres, de sorte qu'un enseignant pourrait changer d'établissement ou enseigner dans plusieurs écoles d'une même commission scolaire. Dans le secteur privé, cette responsabilité appartient à chaque établissement, tout comme dans les autres ordres d'enseignement (cégeps, universités), cette fois peu importe le secteur.

2. *Stratégies d'implémentation*

En termes de stratégie globale, il convient de souligner l'importance de l'effort macroéconomique québécois dans les ressources allouées à l'éducation. Selon l'édition 2010 des *Indicateurs de l'éducation*[3], en 2008-2009, la dépense globale d'éducation par rapport au produit intérieur brut (PIB) est estimée à 7,6 % au Québec. À titre de comparaison, la part du PIB consacrée à l'éducation dans le reste du Canada s'établissait à 5,9 %. De plus, en comparaison avec le reste du Canada pour les mêmes années :

> La dépense globale par habitant dans les commissions scolaires du Québec s'élevait à 1 429 $, soit 11,0 % de moins que la moyenne du reste du Canada (1 606 $). Elle était 5 % moins élevée dans les universités du Québec que dans celles du reste du Canada (761 $ en comparaison de 798 $). Cependant, la dépense globale par habitant était plus élevée dans les collèges du Québec ; elle s'élevait à 321 $ contre 271 $ dans le reste du Canada. Au Québec, c'est le gouvernement provincial qui assume la majeure partie du financement de la dépense globale (68,8 %) alors qu'ailleurs au Canada cette proportion est beaucoup moins élevée (53,4 %). Au cours des années récentes, le gouvernement du Québec a consacré environ le quart de ses dépenses de programmes à l'éducation. (Indicateurs de l'éducation - 2010)

Contrairement à d'autres régions du monde, il n'y a pas d'inspecteurs de l'éducation nationale au Québec, ni d'ordre professionel d'enseignants. Les Directions générales, qui supervisent l'ensemble des activités administratives des commissions scolaires, ont remplacé historiquement les systèmes d'inspection et assument davantage un rôle de soutien que de contrôle. De plus, ce sont les conventions collectives qui marquent indirectement la déontologie enseignante, au point que certaines conventions servent de référence en adaptation scolaire (voir paragraphe suivant). Puisque chaque école est responsable de l'application fine des programmes, les stratégies d'implémentation curriculaire sont tout aussi différentes que le sont les projets d'école. En plus des écoles de métiers et les parcours de formation professionnelle, certaines écoles offrent un programme international, des formations enrichies ou insistent sur la qualité d'une séquence particulière au 2^{e} cycle du secondaire. D'autres proposent des programmes sports-études, musique-études, théâtre-études, arts plastiques-études ou danse-études, voire une formation artistique au cœur de l'éducation. Encore, plusieurs écoles dite alternatives appuient sur l'« autoformation assistée » dans la formation générale. Cette spécialisation n'est pas l'apanage du secteur privé puisque l'école publique s'est mise à diversifier sa formation générale, souvent depuis le préscolaire.

3. *Adaptation scolaire*

Selon la Fédération des commissions scolaires du Québec[4], plusieurs dossiers ont été au devant de l'actualité au cours des deux dernières années, dont l'aide aux élèves en difficulté, les travaux relatifs au financement et à l'organisation des services éducatifs, ainsi que la négociation des conventions collectives. Ces dernières années, l'ensemble du système de l'éducation vit dans un contexte de renouveau pédagogique qui amène des changements en profondeur, tant sur le plan pédagogique que sur le plan de l'organisation des services. La Loi sur l'instruction publique, la politique de l'adaptation scolaire, la dernière convention collective des enseignants et le financement des commissions scolaires constituent les principaux référentiels en matière d'adaptation scolaire. C'est dans ce contexte que les commissions scolaires assurent l'organisation des services éducatifs. En 2005-2006, 957 882 élèves fréquentaient l'école publique, dont quelque 15,97 % d'entre eux étaient handicapés ou en difficulté d'adaptation ou d'apprentissage. Si ces questions touchaient d'abord l'enseignement de base, elle rejoint également la formation supérieure.

---

[3] Source : http://www.mels.gouv.qc.ca/sections/indicateurs/.
[4] Source : http://www.fcsq.qc.ca/Perfectionnement/Colloques/Adaptation/Actes/_pdf/portraitrv.pdf.

4. *Promotion de l’intérêt pour les mathématiques*

Depuis la modernisation de son système d’éducation dans les années 1960, le Québec est progressivement devenu un pays riche en traditions mathématiques. L’organisation phare qui a bien soutenu l’effort de modernisation demeure l’Association Mathématique du Québec (AMQ). Formé de membres et de collaborateurs, elle regroupe toute personne intéressée à l'enseignement, à la recherche, au développement, à la diffusion ou la vulgarisation de la discipline. Même que les société, école, commission scolaire, collège, université, institut de recherche, société industrielle ou commerciale peuvent être membres institutionnels. Les buts de l’Association sont directement reliés à la promotion de l’intérêt pour les mathématiques[5] :

- Aider les éducateurs dans leur travail en mettant à leur disposition divers services ;
- Susciter par ses activités et ses publications un intérêt plus grand pour les mathématiques ;
- Favoriser une mise à jour continue de l'enseignement des mathématiques, en collaborant avec le ministère de l'Éducation, les institutions d’enseignement et les éditeurs.

L’Association soutient plusieurs groupes d'intérêts, dont le Groupe des didacticiens des mathématiques (GDM), le Groupe de mathématiques appliquées (GMA) et le Groupe des chercheurs en sciences mathématiques (GCSM), particulièrement actif avec les Annales des sciences mathématiques du Québec (voir http://www.labmath.uqam.ca/~annales/). Plusieurs autres groupes y sont affiliés, dont le Groupe des responsables de la mathématique au secondaire (GRMS), la Quebec Association of Mathematics Teachers (QAMT) et la Mathématique virtuelle à l'intention du primaire (MathVIP) qui, d’une certaine façon, vient remplacer l’Association des promoteurs de l'avancement de la mathématique à l'élémentaire (APAME). Sans entrer dans une description des mandats respectifs de chaque groupe, nous citons les principales contributions de l’AMQ en guise d’activités de référence :

- Organisation du congrès annuel de l’Association Mathématique du Québec, dont un volet est spécifique à l’école primaire ;
- Publication trimestrielle du Bulletin AMQ et vente d’affiches de vulgarisation mathématique ;
- Concours de l'Association Mathématique du Québec pour les élèves de niveau collégial et de niveau secondaire ;
- Prix décernés par l'AMQ pour la personnalité de l'année (Prix Abel-Gauthier), le meilleur matériel didactique ou de vulgarisation édité (Prix Adrien-Pouliot), le meilleur article publié dans le Bulletin (Prix Roland-Brossard), le meilleur matériel de didactique ou de vulgarisation non édité (Prix Frère-Robert), la meilleure thèse de doctorat ou le meilleur mémoire de maîtrise (Prix Dieter-Lunkenbein) ;
- Médailles AMQ-GRMS, offertes à l'étudiant qui s'est le plus distingué dans le programme universitaire de formation des maîtres de mathématiques au secondaire, dans chaque faculté d'éducation de l’Université Laval, l’Université de Montréal, l’Université du Québec à Montréal (UQÀM), l’Université du Québec à Trois-Rivières (UQTR) et l’Université de Sherbrooke ;
- Camps mathématiques du collégial et du secondaire, pour lesquels la Société mathématique du Canada (SMC) accorde un soutien financier ;
- Le camp mathématique est une activité parrainée par l'Association Mathématique du Québec dans le but de mettre en contact des étudiants doués pour les mathématiques avec des mathématiciens professionnels.

---

[5] Source : <http://newton.mat.ulaval.ca/amq/>.

Il convient de souligner notamment la contribution de l'Institut des sciences mathematiques (ISM) à la formation et à la collaboration en sciences mathématiques. L'ISI est un consortium de huit universités québécoises (Université Concordia, Université Laval, Université McGill, Université de Montréal, UQÀM, UQTR, Université de Sherbrooke et Université Bishop's), financé par le MÉLS et les huit universités membres. Outre son apport à la formation et à la recherche, dont la formation universitaire aux cycles supérieurs, l'ISI participe à la promotion et à la diffusion des connaissances mathématiques auprès des enseignants, des jeunes ainsi que du grand public en organisant des conférences dans les cégeps et en produisant et distribuant la revue Accromath, dont la qualité est très prisée par les enseignants.

5. Formation des enseignants et autorisation d'enseigner

Comme nous l'avons soulevé au tableau 2, la formation initiale des enseignants dans les universités québécoises s'acquiert en 4 ans. Si à toutes fins utiles, il s'agit d'une obligation qui permet d'enseigner au préscolaire-primaire, on peut y arriver au secondaire en disposant d'abord d'un baccalauréat disciplinaire et en complétant ensuite un programme de maîtrise en éducation, option enseignement au secondaire. Pour enseigner au cégep, il n'y a pas d'obligation de posséder une formation en pédagogie puisqu'en principe, un baccalauréat disciplinaire est suffisant. Cependant, depuis quelques années, une certaine saturation des places disponibles et la difficulté d'obtenir une promotion incitent plusieurs à suivre un microprogramme en formation à l'enseignement postsecondaire. Bien qu'il s'agisse encore d'une formation de 2^{e} cycle, ce programme est en formation continue et il vise une mise à jour des savoirs et un rehaussement des qualifications professionnelles.

Malgré le processus d'agrément que nous avons abordé à la section *Orientation des programmes*, chaque activité ou programme de formation se distingue d'une université à l'autre. De façon générale, la formation enseignante s'inscrit dans une optique de professionnalisation et d'approche culturelle de l'enseignement qui s'appuie sur un référentiel de douze compétences formulées par le MÉLS. Celles-ci se développent suivant une formation théorique, acquise habituellement à l'université, et une formation pratique au cours de stages de formation pratique. Pour les baccalauréats en éducation préscolaire et enseignement primaire, les mathématiques et sa didactique ne sont qu'une référence disciplinaire parmi le français, l'éthique et la culture religieuse, les sciences et la technologie, les sciences humaines puis éventuellement les arts. Par contre, en dehors des stages, la formation dans les didactiques compte pour environ la moitié de la formation. Aux baccalauréats en enseignement des mathématiques au secondaire, il y a presque que deux années complètes qui sont consacrées à l'étude mathématique et la formation peut souvent s'appuyer sur une demi-douzaine de cours dans sa didactique. Enfin, dans les baccalauréats en enseignement en adaptation scolaire, on offre fréquemment trois cours de didactique des mathématiques spécifiques au programme (ex. de l'arithmétique, de l'algèbre, des nombres rationnels ou de la géométrie), que l'on peut adapter lorsqu'ils s'adressent à des étudiants qui choisissent une orientation à l'enseignement au secondaire. Quant à la formation continue des enseignants, elle s'accomplit dans le cadre de programmes de formation professionnelle de 2^{e} cycle universitaire. Elle peut se réaliser au sein de microprogrammes, même déboucher sur un diplôme d'études supérieures spécialisées (DÉSS) ou une maîtrise en éducation. Si certaines activités s'offrent régulièrement (ex. microprogramme en didactique, option orthodidactique des mathématiques), la plupart se destinent aux enseignants, aux conseillers pédagogiques et aux professionnels de l'enseignement, parfois aussi aux directeurs d'établissements scolaires.

6. *Données internationales et pancanadiennes*

Dans les grandes études internationales, le Québec occupe une place enviable. Pour ne citer que le Programme international pour le suivi des acquis des élèves (PISA) de l'Organisation de coopération et de développement économiques (OCDÉ), les jeunes québécois se classent collectivement parmi les premiers au monde et, à part l'année 2003, ils figurent au 1er rang canadien (figure 18)[6].

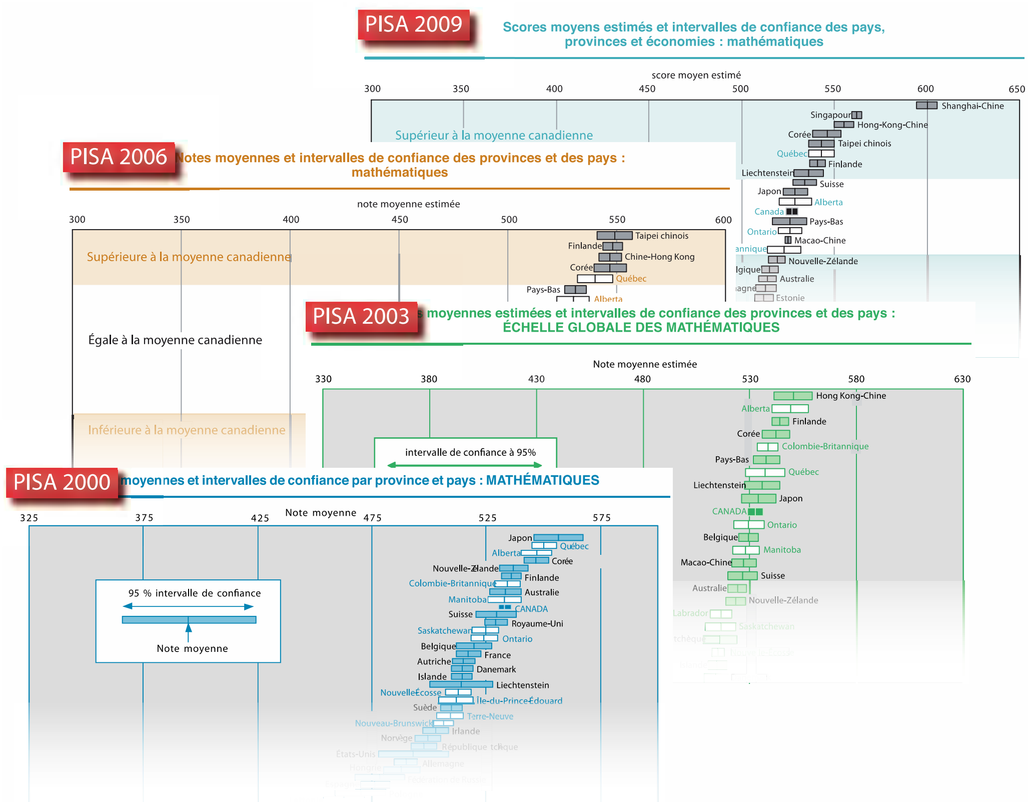


***Figure 18** – Résultats du Québec aux épreuves PISA dans les années 2000*

Cette tendance se confirme dans le récent rapport de l'évaluation pancanadienne en mathématiques, en sciences et en lecture du Conseil des ministres de l'Éducation du Canada (PPCÉ, 2011). À la figure 19, on peut apprécier les scores moyens en mathématiques des élèves canadiens, mais contrairement au programme PISA, où se sont des élèves de 15 ans qui participent à l'étude, celui du PPCÉ porte sur des élèves de 2^{e} secondaire ou 8^{e} année[7].

Hormis un dynamisme certain que nous avons déjà soulevé au paragraphe *Promotion de l'intérêt pour les mathématiques*, il n'est pas simple de savoir pourquoi le Québec se classe systématiquement aussi bien. On peut toutefois avancer une hypothèse générale qui relève d'un choix de société puisqu'au Québec, l'école primaire se termine deux années plus tôt que dans le reste du Canada (cf. tableau 2). En effet, les enseignants au primaire sont des généralistes tandis qu'au secondaire ou dans les High School, ce sont des enseignants formés spécifiquement dans la discipline et dans sa didactique. C'est-à-dire que dès leurs stages de formation, les enseignants au premier cycle du secondaire québécois ont pu approfondir davantage la spécificité des enjeux de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques, dont l'apport culturel issu de la didactique des mathématiques.

[6] Source : http://www.pisa.gc.ca/>.
[7] Source : < http://www.cmec.ca/>.

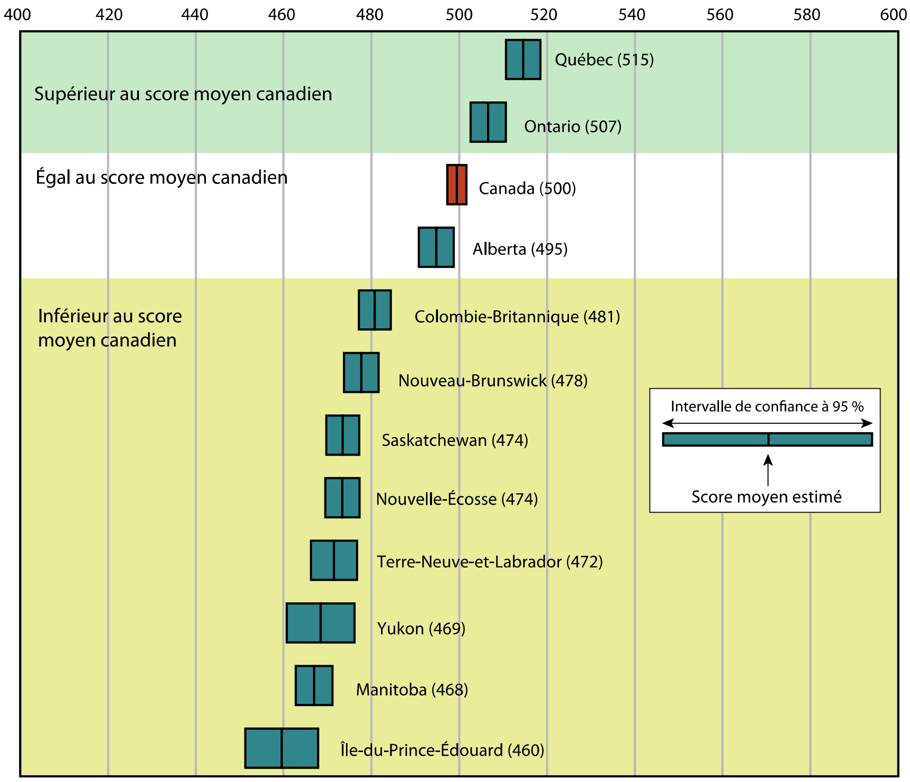


***Figure 19** – Résultats pancanadiens en mathématiques pour l'année 2010*

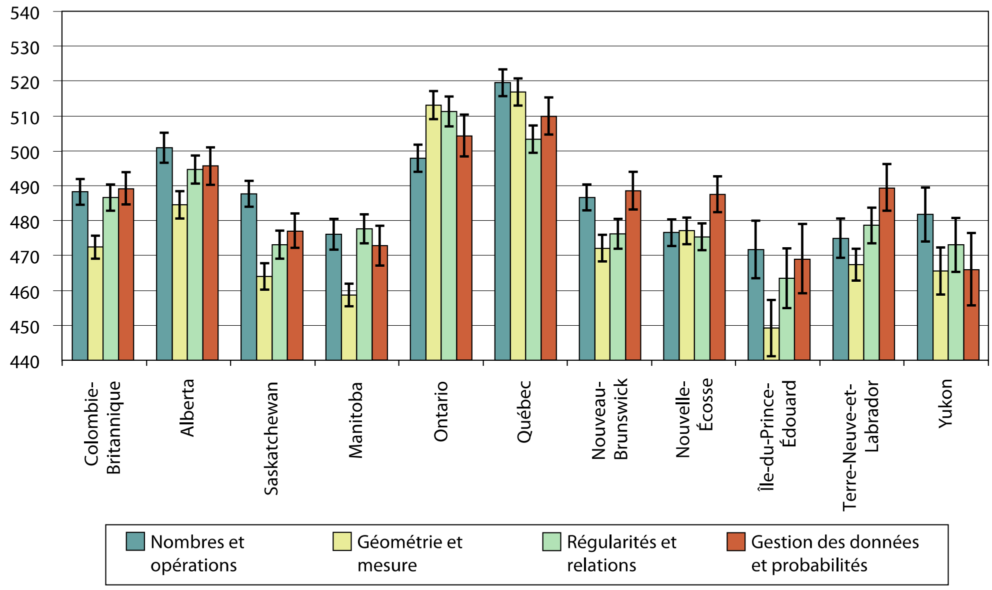


***Figure 20** – Résultats par sous-domaine mathématique*

Dans ce rapport, les mathématiques se composent de quatre sous-domaines. Ceci autorise, en premier lieu, une comparaison plus fine des résultats pancanadiens (figure 20), et en second lieu, une distinction selon le sexe (tableau 21) et une précision selon la langue (tableau 22). Sur la base linguistique justement, l'étude PPCÉ de 2010 dévoile des résultats en résolution de problèmes (figure 23), ce qui confirme derechef la position remarquable des élèves québécois francophones au sein de la fédération canadienne – les résultats de PISA abondaient déjà en ce sens, toutes langues confondues –, de même que celles des francophones en général, partout au Canada.

Sexe	Nombres et opérations	Géométrie et mesure	Régularités et relations	Gestion de données et probabilités
Filles	496 ± 3	499 ± 3	502 ± 3	502 ± 5
Garçons	507 ± 3	503 ± 3	501 ± 3	500 ± 4

Figure 21 *– Résultats par sous-domaine mathématique selon le sexe*

Province ou territoire selon le groupe linguistique		Nombres et opérations	Géométrie et mesure	Régularités et relations	Gestion de données et probabilités
Colombie-Britannique	Anglais	488 ± 4	472 ± 3	487 ± 4	489 ± 6
	Français	513 ± 5	497 ± 5	498 ± 5	498 ± 15
Alberta	Anglais	501 ± 5	485 ± 3	495 ± 4	496 ± 7
	Français	509 ± 6	486 ± 5	505 ± 6	509 ± 14
Saskatchewan	Anglais	488 ± 4	464 ± 3	473 ± 4	477 ± 6
	Français	522 ± 8	481 ± 7	481 ± 7	487 ± 23
Manitoba	Anglais	476 ± 4	458 ± 4	478 ± 4	473 ± 6
	Français	492 ± 4	468 ± 3	482 ± 4	479 ± 12
Ontario	Anglais	498 ± 4	513 ± 5	511± 5	505 ± 6
	Français	502 ± 4	519 ± 3	513 ± 4	505 ± 6
Québec	Anglais	511 ± 6	506 ± 7	500 ± 6	501 ± 9
	Français	521 ± 4	518 ± 3	504 ± 3	511 ± 5
Nouveau-Brunswick	Anglais	479 ± 5	457 ± 4	465 ± 5	479 ± 8
	Français	507 ± 5	508 ± 5	503 ± 5	513 ± 8
Nouvelle-Écosse	Anglais	476 ± 4	476 ± 5	475 ± 4	487 ± 6
	Français	499 ± 3	514 ± 3	494 ± 3	514 ± 13
Île-du-Prince-Édouard	Anglais	471 ± 11	449 ± 10	463 ± 11	470 ± 14
Terre-Neuve-et-Labrador	Anglais	475 ± 5	467 ± 5	479 ± 5	490 ± 8
Yukon	Anglais	481 ± 8	465 ± 7	472 ± 8	464 ± 14
Canada	Anglais	494 ± 2	494 ± 2	499 ± 2	496 ± 4
	Français	519 ± 4	518 ± 4	504 ± 4	511 ± 6

Figure 22 *– Résultats par sous-domaine mathématique selon la langue*

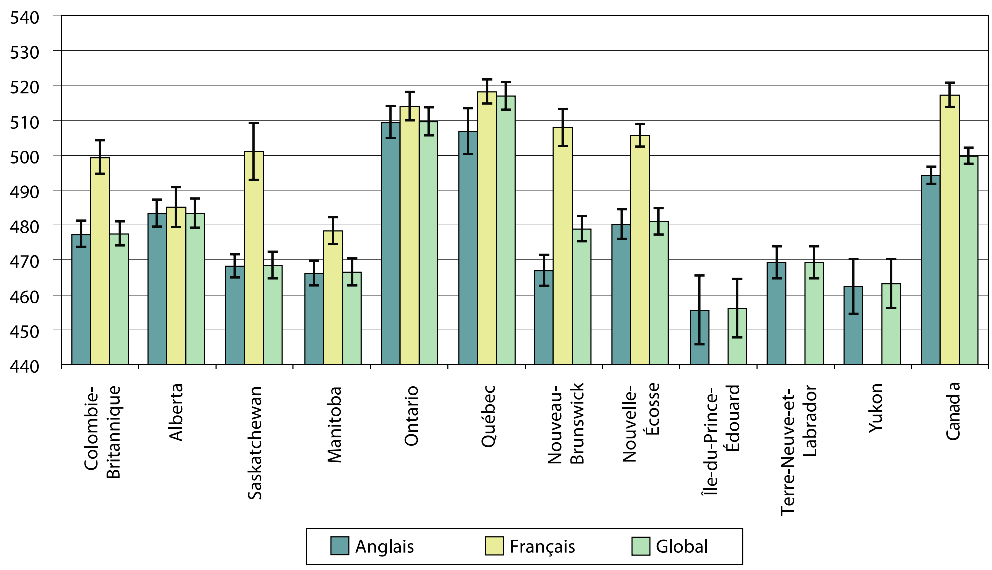


Figure 23 *– Résultats en résolution de problèmes selon la langue*

REFERENCES

Caron F., René de Cotret S. (2007) Un regard didactique sur l'évaluation en mathématiques : genèse d'une perspective. In *Actes du Colloque 2007 du Groupe de didactique des mathématiques du Québec*.

MÉLS (2001, 2006 et 2007) *Programme de formation de l'école québécoise, éducation préscolaire, enseignement primaire* (2001), *enseignement secondaire 1er cycle* (2006) et *enseignement secondaire 2e cycle* (2007). Publications du Gouvernement du Québec.

PISA (2006) Cadre d'évaluation de PISA 2006 – Connaissances et compétences en mathématiques, lecture, science et résolution de problèmes, Publication de l'Organisation de coopération et de développement économiques.

PPCE (2011). *PPCÉ de 2010 - Rapport de l'évaluation pancanadienne en mathématiques, en sciences et en lecture*. Conseil des ministres de l'Éducation du Canada.

Richard P. R. (2003) Continuités et ruptures dans l'évolution des caractéristiques sémiotiques des manuels scolaires de mathématique en usage au Québec depuis le milieu du XIXe siècle. In *Actes du Colloque 2002 du Groupe de didactique des mathématiques du Québec*.

Richard P. R., Sierpinska A. (2004) Étude fonctionnelle-structurelle de deux extraits de manuels anciens de géométrie. *Revue des sciences de l'éducation 30.2*, 379-409.

UN REGARD (EXTÉRIEUR) SUR DEUX SYSTÈMES ÉDUCATIFS : LE LEICESTERSHIRE EN ANGLETERRE ET LE CANTON DE NEUCHÂTEL EN SUISSE

Suzette ROUSSET-BERT*

Résumé – Cette présentation, basée sur l'étude des textes officiels et sur des observations concrètes dans les classes, apporte le regard extérieur d'un observateur étranger sur deux systèmes éducatifs, dans le Leicestershire en Angleterre et dans le canton de Neuchâtel en Suisse.
Des critères ont été choisis pour mettre en évidence les spécificités : les niveaux de pilotage, le rôle de l'échelon national ou local, l'importance des évaluations des élèves et des établissements scolaires, l'hétérogénéité des classes ou l'existence de filières.
Ce sera l'occasion de montrer les répercussions éventuelles de ces organisations sur la manière d'enseigner les mathématiques et de rédiger les programmes.

Mots-clé : système éducatif, enseignement des mathématiques, évaluation, pilotage, programme, curriculum.

Abstract – This presentation is based on the study of official documents and classroom observations, and brings an outsider's view of two different education systems: Leicestershire in England and the canton of Neuchâtel in Switzerland.
The following criteria were chosen to highlight the specificity of each system: the management structures, the roles of the local authority and central government, the importance of pupils assessments and school evaluation, the place of mixed ability classes and the existence of course choice.
The aim is to permit the analysis of the possible effects of each organisation on the teaching and learning of mathematics, and on course planning.

Keywords: education system, mathematics teaching and learning, assesment, management, course, curriculum

I. INTRODUCTION

L'objet de cette contribution est d'apporter un regard extérieur sur deux systèmes éducatifs choisis pour leur grande différence en ce qui concerne les niveaux de décision, le rôle des évaluations ainsi que la manière de concevoir l'enseignement des mathématiques. Il ne s'agit en aucune façon d'une présentation exhaustive de chaque système. Cet exposé s'appuie à la fois sur les textes officiels décrivant les curricula et sur des observations concrètes faites dans les classes lors de séjours dans ces deux pays.

1. *Le contexte de ces voyages d'étude*

Quelques mots de mon parcours professionnel sont nécessaires pour comprendre mes centres d'intérêt lors de ces visites. Professeure de mathématiques de 1970 à 1999 successivement à Lyon, Grenoble et Strasbourg, j'ai été également membre des IREM (Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) dans ces trois villes et ai participé à des travaux de recherche en didactique des mathématiques.

Devenue Inspectrice Pédagogique Régionale[1] de mathématiques dans l'Académie de Strasbourg (de 1999 à 2009), j'ai été chargée entre autres tâches de l'exploitation

* IREM de Strasbourg, inspectrice pédagogique régionale honoraire de l'Académie de Strasbourg – France – suzette.rousset@aliceadsl.fr

[1] Un inspecteur pédagogique régional de mathématiques dans le système français est chargé de l'évaluation des enseignants (évaluation individuelle ou évaluation des équipes pédagogiques) et participe à l'évaluation des établissements. Il peut également être chargé d'autres missions telles que la réflexion sur l'organisation de la

© Rousset-Bert S. (2012) Un regard (extérieur) sur deux systèmes éducatifs : le Leicestershire en Angleterre et le canton de Neuchâtel en Suisse. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (SPE3, pp. 1847–1859). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

pédagogique des résultats des évaluations des élèves et j'ai participé à la mise en place de l'évaluation des établissements scolaires. Dans ce cadre j'ai effectué deux stages en Angleterre l'un organisé par l'Ofsted en 2000 à Manchester, l'autre en 2006 à Nottingham sur le thème de l'évaluation des établissements. A la retraite depuis septembre 2009, j'ai pu prendre le temps de compléter ma réflexion sur le système anglais en passant deux semaines dans le comté de Leicester, partenaire de l'Académie de Strasbourg. Enfin des relations suivies entre l'Académie de Strasbourg et le canton de Neuchâtel à propos de la compétition Mathématiques sans Frontières m'ont permis d'aller observer des classes dans ce canton en novembre 2010.

L'accueil dans chacun des deux pays a été de grande qualité. Les observations de classes, les entretiens avec des responsables du système éducatif, la participation à des séminaires de réflexion ont été très enrichissants.

2. *Quels critères retenir pour une comparaison de systèmes éducatifs ?*

Les critères retenus dans cet exposé ont été choisis parce qu'ils sont d'actualité dans les débats de nombreux pays et parce qu'ils permettent facilement de mettre en évidence des différences. La présentation porte essentiellement sur la **scolarité obligatoire** (jusqu'à 16 ans dans chaque pays).Les deux systèmes sont décrits selon les points de vue suivants :

- les prises de décisions par les différents **niveaux de pilotage** du système, le rôle de l'échelon national (ou fédéral) et des échelons locaux ;
- l'importance des **évaluations** des élèves (tests nationaux ou locaux, examens, évaluation formative et suivi des élèves), l'évaluation des établissements et les répercussions éventuelles sur la manière d'enseigner ;
- l'**hétérogénéité** des classes, l'existence des filières et/ou de groupes de niveaux ;
- les résultats des **évaluations internationales** PISA et leur exploitation dans chaque pays.

C'est à la croisée des chemins entre une approche par le pilotage politique du système et une réflexion didactique sur l'enseignement des mathématiques que se situe cet exposé.

C'est également le regard d'une observatrice française, impliquée pendant de nombreuses années dans les réformes de son propre pays. Un observateur d'un autre pays se serait peut-être attaché à d'autres critères.

II. DESCRIPTION GENERALE DES DEUX SYSTEMES SCOLAIRES

1. *Les différents niveaux de pilotage dans les deux pays : liberté et cadrage*

Au Royaume Uni, il existe des différences importantes entre l'Angleterre, l'Ecosse, l'Irlande du Nord et le pays de Galles. L'exposé est limité aux structures concernant l'Angleterre et les écoles publiques (écoles d'état).

En Angleterre les grandes orientations et le contrôle des résultats sont définis nationalement au sein du Département de l'Éducation dont le responsable est le secrétaire d'état pour l'éducation. Un curriculum national définit les objectifs à atteindre pour l'école primaire et secondaire. A l'échelon des comtés (circonscriptions administratives dans lesquelles les conseillers sont élus), il existe une certaine autonomie de décision. Chaque

---

formation continue, les résultats des évaluations élèves, la formation professionnelle en lien avec les collectivités locales, la prévention de la violence, l'égalité des chances…

comté possède un service de l'enfance et de la jeunesse dont l'une des compétences est l'organisation des écoles et la mise en place de la politique éducative à l'échelon du comté. Les différences peuvent être importantes d'un comté à l'autre en ce qui concerne l'organisation, par exemple le changement de type d'écoles à 14 ans [2] en vigueur dans le Leicestershire n'a pas lieu dans le comté voisin, celui de la ville de Leicester. Le comté est également responsable du suivi de la performance des établissements. L'équipe de suivi est composée de « consultants », recrutés par le comté (en général d'anciens professeurs repérés pour leurs compétences), chargés de l'animation pédagogique des établissements. Ils organisent des visites-conseils des enseignants et élaborent des documents pédagogiques pour accompagner les réformes en cours et aider les établissements à améliorer leurs performances.

Les établissements ont également une certaine autonomie dans les choix de formation, dans la répartition de leurs moyens et dans le recrutement de leurs personnels. Les contraintes sont très fortes en matière de résultats. Les établissements reçoivent très régulièrement la visite de l'Ofsted qui évalue leur performance. L'Ofsted, (Office for standards in education) est un organisme indépendant devant rendre des comptes au parlement. Un guide d'évaluation, important en nombre de pages au moment de ma visite mais simplifié depuis janvier 2012, est disponible sur le site de l'Ofsted. Les choix pédagogiques des établissements sont fortement conditionnés par ce modèle d'évaluation.

La confédération helvétique est une fédération de 26 cantons qui ont chacun compétence en matière d'éducation, du moins pour ce qui concerne l'instruction obligatoire. Chaque canton a un parlement élu, un département de l'éducation et un directeur de l'instruction publique parfois appelé ministre. D'un canton à l'autre les systèmes peuvent être très différents : palier d'orientation en fin de la classe 8 ou classes indifférenciées, cursus en trois ou quatre ans au lycée pour obtenir l'examen de maturité. Depuis quelques années la Suisse est engagée dans un processus d'harmonisation, au niveau des régions linguistiques et au niveau fédéral. Le plan d'étude romand marque la volonté d'obtenir en Suisse romande un système scolaire harmonisé. Il est commun à tous les cantons de la Conférence inter-cantonale de l'instruction publique de la Suisse romande et du Tessin (CIIP).

Il existe également un processus d'harmonisation au niveau fédéral, nommé HarmoS. C'est un concordat auquel peuvent adhérer les cantons après décision du parlement cantonal. La Suisse n'ayant pas de ministère de l'éducation au niveau fédéral, l'autorité nationale de coordination est assumée par la Conférence suisse des directeurs cantonaux de l'instruction publique (CDIP).

2. *Description du système scolaire anglais : un pilotage par les évaluations*

Le tableau situé en annexe 1 montre l'organisation du système dans le Leicestershire en mai 2010 lors de mon séjour. Les structures et le passage d'un type d'école à l'autre sont propres au comté, mais les évaluations nationales sont communes à toute l'Angleterre. Ces évaluations fournissent des renseignements sur les acquis des élèves et sont utilisées pour mesurer la performance de chaque établissement à chaque « étape clé ». Dans cette partie, je décris les évaluations en cours lors de mon séjour en tenant compte des évolutions survenues depuis mai 2010. L'organisme régulateur des évaluations n'est plus le même et le curriculum est en cours de réécriture dans le sens d'une simplification des items au profit des connaissances et compétences fondamentales. Cependant la recherche de la performance des établissements reste un objectif affirmé par le ministère et le rôle des évaluations décrit dans ce qui suit reste d'actualité, même si les référentiels vont subir des modifications.

[2] Voir annexe 1

Description des différentes évaluations

Une première évaluation, **« key stage 1 »** mesure les acquis des élèves **à l'âge de 7 ans**. Les tests émanent en 2010 de l'organisme de régulation des évaluations QCDA.

Les tests sont corrigés localement par les enseignants et envoyés avec les corrections à l'organisme de contrôle.

Le test **« key stage 2 » à l'âge de 11 ans** évalue les acquis des élèves en fin d'école primaire. Les tests sont corrigés par des évaluateurs extérieurs et les résultats publiés dans des tables de performance accessibles à tous.

Le test **« key stage 3 »** n'était plus obligatoire lors de mon séjour. Il mesurait les acquis des élèves à l'âge de 14-15 ans. En 2010, les établissements volontaires avaient remplacé cette évaluation, à titre expérimental, par une évaluation formative (Assessing Pupil Progress). Cette évaluation a conduit à un suivi très détaillé et un peu pointilliste des différents items du curriculum dans des tableaux informatisés.

Le GCSE (General Certificate of Secondary Education), obtenu à l'âge de 16 ans, joue un vrai rôle de certificat de fin de scolarité obligatoire. Il est important pour la suite des études et les résultats seront demandés chaque fois que l'élève présentera son dossier pour s'inscrire à une formation. Cet examen consiste en une série de tests standards écrits ou oraux (langues), passés en plusieurs fois lors des années 10 et 11. Certaines disciplines sont obligatoires, d'autres sont optionnelles.

Les tests écrits sont élaborés par des « agences d'examen » (AQA et Edexcel sont les plus employées dans le Leicestershire). Les sujets d'examen sont achetés à ces agences par les établissements ainsi que les livres qui préparent à ces examens. Les tests sont corrigés par des correcteurs extérieurs recrutés et payés par l'agence. **Les résultats des établissements sont publiés dans des tables de performance accessibles à tous.**

Pour chacune des disciplines présentées à l'examen, on obtient un GCSE avec une mention codifiée de A (le meilleur) à G. Les certificats sont donnés de manière indépendante dans chaque discipline. Les sujets d'examens sont différents suivant que les élèves se présentent à l'examen de niveau supérieur, « higher » correspondant aux mentions allant de A à C ou bien à l'examen de niveau « fundation », pour lequel les mentions attendues vont de C à G. Ce sont les enseignants de la discipline qui décident dès l'année 10 le niveau du diplôme auquel ils présenteront leurs élèves.

Les élèves orientés dans des sections professionnelles peuvent améliorer leurs résultats du GCSE au cours de leurs études professionnelles en repassant des épreuves ou en rendant des travaux complémentaires, ce qui représente une souplesse intéressante du système.

La nature des évaluations et leur rôle de mesure de la performance conditionnent en grande partie l'enseignement dans les classes. En mathématiques, les épreuves d'examens du GCSE sont des tests standards composés de questions courtes, assez souvent présentées sous forme de QCM. Les réponses attendues sont ponctuelles et ne nécessitent que très rarement une argumentation rédigée. L'enseignement est par conséquent un peu standardisé, très découpé en micro-savoirs, essentiellement guidé par la réussite à des tests techniques. Mais un des points positifs de cette focalisation sur la performance est le fait que les enseignants soient très concernés par la réussite individuelle de chacun de leurs élèves.

Le A-level est passé à l'âge de 18 ans. Pour cet examen, les élèves sont totalement libres de choisir les disciplines (en général quatre ou cinq). Aucune matière n'est obligatoire. Pour chaque discipline, on obtient une mention. Le choix des disciplines est très déterminant pour l'inscription à l'université. L'entrée à l'université est sélective et l'acceptation d'un étudiant dans une « bonne » université dépend des mentions obtenues au A-level (des niveaux A*, A ou B sont bien souvent demandés).

Les examens de niveau professionnel (National Vocational Qualification) peuvent être obtenus selon cinq niveaux de qualification. Ces examens se préparent la plupart du temps dans les « colleges of further education », gros établissements offrant de nombreuses formations et délivrant aussi des A-level. Cette variété de formations offertes dans le même établissement rend le système assez souple et les passages d'un niveau de qualification à l'autre sont assez aisés. Il existe aussi une voie de formation par apprentissage très développée dans le pays.

3. *Description du système scolaire dans le canton de Neuchâtel*

Le tableau placé en annexe 2, précise l'organisation dans le canton de Neuchâtel en 2011-2012. La dénomination des degrés n'est pas tout à fait la même que lors de mon séjour puisque l'enseignement est désormais obligatoire de 4 ans à 16 ans. **L'organisation se caractérise actuellement par un gros palier d'orientation au niveau du degré 8.**

En Suisse il existe trois types d'organisation : un palier d'orientation au degré 8 (cantons de Vaud, Neuchâtel, Fribourg et Berne francophone), un système hétérogène (Jura) et un système mixte alliant système homogène à filières et système hétérogène avec des niveaux dans certaines disciplines.

Dans le canton de Neuchâtel, l'enseignement lors du degré 8 est commun pour tous les élèves. Il est réparti entre deux maîtres principaux appelés maîtres d'orientation pour les branches générales et des maîtres spécialisés pour certaines disciplines (EPS, activités manuelles, dessin artistique, éducation musicale). Au terme de la classe d'orientation, l'élève est orienté vers l'une des trois sections prévues au cycle 3 sur la base de trois critères de même importance :

- les moyennes annuelles des notes obtenues dans les disciplines comptant pour la promotion ;
- le préavis du conseil de classe ;
- les résultats obtenus aux épreuves cantonales d'orientation en mathématiques, en français et en allemand.

Les épreuves cantonales d'orientation sont des QCM corrigés informatiquement.

Pour un petit nombre d'élèves, ayant déjà éprouvé des difficultés d'apprentissage et ayant souvent un retard scolaire, la première année secondaire se passe en classe de transition. Ces élèves ne sont pas soumis aux épreuves cantonales d'orientation.

- **La section préprofessionnelle**, dans laquelle l'enseignement est confié à des maîtres généralistes, prépare les élèves à une entrée en apprentissage. Par un raccordement d'une année, certains élèves peuvent également accéder aux formations dans des écoles professionnelles du type école supérieure de commerce ou école de culture générale préparant notamment aux formations paramédicales et sociales.
- **La section moderne** se caractérise surtout par l'enseignement des langues étrangères. L'enseignement est confié à des maîtres spécialistes chargés d'enseigner une ou plusieurs disciplines. Elle permet d'accéder aux formations dans des écoles professionnelles du type école supérieure de commerce, école de culture générale préparant notamment aux formations paramédicales et sociales, écoles techniques.

- **La section maturité.** L'enseignement est confié à des maîtres spécialistes. L'enseignement est orienté vers les études longues visant l'obtention d'une maturité gymnasiale ou professionnelle, avec poursuite des études à l'Université, dans les écoles polytechniques ou les hautes écoles spécialisées. Les autres formations restent naturellement ouvertes.
- **Seuls 30 à 40% des élèves sont orientés en maturités.** Cette orientation précoce n'est pas vécue en Suisse de manière négative comme elle pourrait l'être dans d'autres pays car les élèves orientés en section professionnelle et moderne ont de nombreux débouchés pour leurs études ultérieures.

Au lycée général, les élèves préparent l'examen de maturités. Ce dernier est composé d'un tronc commun, onze matières fondamentales dont certaines sont à choix (comme en mathématiques par exemple) et de deux options. Les options ne sont pas déterminantes pour l'accès aux études universitaires même si certaines sont conseillées en fonction du projet d'études supérieures

Chaque lycée élabore lui-même ses propres sujets. Le lycée doit au préalable satisfaire à un certain nombre de conditions pour que les maturités qu'il délivre aux élèves soient reconnues au niveau fédéral. La correction des copies ainsi que les oraux sont pris en charge par les enseignants de l'établissement accompagnés d'experts extérieurs.

Dans les **écoles techniques**, les élèves peuvent suivre des cursus diversifiés (voie rapide, voie échelonnée) pour obtenir un certificat fédéral de capacité (CFC) ou une maturité professionnelle. Le CFC est fédéral, donc il existe des directives harmonisées pour tous les cantons et un référentiel précis pour l'examen

L'entrée à l'université est en général non sélective (sauf exception) et l'entrée dans les grandes écoles se fait sur dossier.

4. *Les résultats de l'enquête* ***PISA***

	Compréhension de l'écrit	Culture mathématique	Culture scientifique
Moyenne OCDE	493	496	501
Suisse	501	534	517
France	496	497	498
Royaume Uni	494	492	514

Le programme PISA n'est qu'un prisme parmi d'autres pour comparer les résultats des pays. Ses études statistiques détaillées sont riches d'enseignements mais le programme ne teste qu'un certain type de compétences qui ne suffisent pas, à elles seules, à décrire l'efficacité d'un système. Si les résultats de PISA 2009 sont mentionnés dans cette étude, **c'est parce qu'ils participent à la réflexion sur l'évaluation des élèves et parce que l'analyse qui en est faite dans chacun des pays influence, à des degrés divers, les réformes en cours**. Les résultats de la France ont été rajoutés au tableau comme élément supplémentaire de comparaison.

Les résultats des tests étant obtenus sur la base d'un échantillon de 5000 élèves, chaque moyenne de résultats est entachée d'une marge d'erreur estimée à +/- 5 points. La Suisse a ainsi des résultats significativement supérieurs à la moyenne de l'OCDE dans les domaines des mathématiques et des sciences. Les résultats du canton de Neuchâtel ne diffèrent pas des résultats moyens de la Suisse. Les résultats du Royaume Uni sont significativement supérieurs en sciences mais sont comparables à ceux de l'OCDE dans les deux autres domaines, la

France se situant pour les trois domaines dans la moyenne de l'OCDE. La recherche d'explications à ces différences dépasse le cadre de ce texte. Le lecteur intéressé peut se reporter au rapport PISA 2009 de l'OCDE qui donne des éléments de comparaison très intéressants en matière de dispersion des résultats, de milieu socio-économique et culturel, d'ascendance allochtone ou autochtone de l'élève, d'influence du contexte scolaire…

L'enquête a été exploitée dans chacun des pays au travers de documents essentiellement destinés aux décideurs.

Le rapport « viewing the united Kingdom school system through the prism of PISA » disponible en ligne, reprend les conclusions générales de PISA en les personnalisant au Royaume Uni sans procéder à des études régionales. On trouve dans une autre étude publiée sur le site du département de l'éducation quelques éléments comparatifs entre les différentes composantes du Royaume Uni. Les études restent essentiellement statistiques. Le programme PISA ne semble pas avoir entraîné d'intenses bouleversements à propos de la définition des compétences (sauf peut-être une réflexion plus approfondie sur les « funktional skills »), mais il est vrai que le curriculum anglais est déjà organisé en différents niveaux de compétences qui ressemblent à ceux définis dans PISA et que la démarche du programme est assez familière aux pays anglo-saxons.

En Suisse, l'enquête internationale est complétée par une enquête plus spécifique dans les régions et les cantons, portant sur un échantillon d'élèves de 11ème année (anciennement 9ème année avant l'harmonisation). Les deux populations ne se recouvrent pas exactement puisque le nombre d'élèves fréquentant le degré 11 et ayant 15 ans n'est pas exactement le même dans chaque canton en fonction des choix concernant l'orientation.

Ce rapport très riche, intitulé « PISA 2009, les compétences des jeunes romands » est disponible en ligne. Une description des performances y est établie en fonction des contextes cantonaux. Dans les cantons qui ont des filières, on remarque un large recouvrement des performances entre les trois filières. Mais les performances moyennes peuvent être semblables alors même que les organisations scolaires sont différentes. Des niveaux d'explication sont recherchés afin d'apporter un éclairage sur les remédiations possibles.

La Suisse n'ayant pas d'évaluations institutionnelles obligatoires au cours de la scolarité, ce sont les résultats détaillés suivant les cantons de l'enquête PISA qui apportent des éléments sur la réussite des élèves.

Pas plus que pour l'Angleterre, l'étude officielle ne comprend de travail plus didactique sur les enseignements de PISA concernant les compétences et connaissances des élèves. De manière générale, dans la plupart des pays, les études sur PISA s'adressent aux décideurs et restent très centrées sur des indicateurs généraux. Elles ne mettent pas en relation les résultats avec la manière d'enseigner la discipline ou de concevoir la progression des apprentissages, étude complémentaire qui resterait à faire et apporterait sans doute des éclairages nouveaux.

III. DEVELOPPEMENT DES MATHEMATIQUES A TRAVERS LES PROGRAMMES

Pour chacun des deux pays, les documents concernant l'enseignement des mathématiques sont présentés sous forme **d'objectifs à atteindre sur plusieurs années** (et non pas un programme détaillé par année comme dans d'autres pays) mais cette apparente ressemblance, cache de grandes différences dans la conception de l'enseignement des mathématiques. Il est également intéressant de repérer le vocabulaire employé (cibles, objectifs, attentes, progressions, standards, performance…) même si le cadre restreint de cette étude ne me permet pas d'aller plus loin dans l'analyse de ces différences de vocabulaires.

La présentation sera centrée sur les attendus à l'âge de 14-15 ans (cohérence avec la réflexion sur PISA).

Dans le canton de Neuchâtel, au moment de mon séjour, les grands objectifs de l'enseignement des disciplines étaient présentés dans le plan d'étude neuchâtelois, version un peu personnalisée au canton du plan d'étude romand. C'est désormais adopté le plan d'études romand qui a été adopté.

Les mathématiques font partie d'un **domaine commun « mathématiques et sciences de la nature »** domaine dont le but est de développer la résolution de problèmes et la posture scientifique. La pratique des mathématiques et des sciences de la nature implique la connaissance de notions la compréhension de concepts et une posture intellectuelle spécifique au domaine. L'entrée par la résolution de problèmes est très présente. On y décrit également comment le domaine contribue au développement des capacités transversales.

Les mathématiques sont elles-mêmes divisées en cinq champs : espace, nombres, opérations, grandeurs et mesures, modélisation, ce dernier champ étant commun aux mathématiques et aux sciences de la nature. La thématique « grandeurs et mesures », rattachée aux mathématiques se développe aussi au travers des sciences de la nature.

A l'intérieur des cinq champs, des modules spécifiques pour chaque cycle décrivent à la fois **les progressions dans les apprentissages concernant chaque thème mathématique et les attentes en fin de cycle**.

La progression des apprentissages ($9^{ème}$, $10^{ème}$ et $11^{ème}$ années) est déclinée en fonction de plusieurs niveaux de difficulté et de complexité : apprentissages communs, apprentissages complémentaires de niveaux de difficultés spécifiques. Les attentes en fin de cycle sont déclinées selon une logique identique.

Cette double entrée, par les progressions dans les apprentissages en tenant compte des travaux de recherche en didactique des mathématiques et par les attentes en cours et en fin de cycles est particulièrement intéressante. L'exemple de l'algèbre illustrera ces propos.

En Angleterre, l'écriture des documents fixant les objectifs est totalement différente.

Sont étudiés ici les documents présents sur le site officiel du ministère au mois de février 2012 qui reprennent en partie les documents en vigueur lors de mon séjour. On rappelle que le curriculum national est organisé selon quatre évaluations à des étapes clés (voir paragraphe II 1). En attendant une révision des objectifs annoncée pour 2014, le curriculum reste en vigueur et nous étudierons plus spécifiquement le document relatif au « key stage 3 » qui s'intéresse aux compétences des élèves à l'âge de 14 ans. Les programmes proposés définissent des **cibles** à atteindre et les **standards attendus** en ce qui concerne la performance des élèves.

Une première partie précise les objectifs généraux assignés aux mathématiques : une habitude de pensée que l'on pourra utiliser au travail, dans les affaires et la finance, et permettant la prise de décision personnelle du citoyen. Le texte fait également mention de la puissance des mathématiques pour décrire le monde, du plaisir de la recherche de solution et de l'aspect créatif des mathématiques.

La suite du document décrit les concepts clés des mathématiques et les processus et méthodes clés. Dans ces processus clés, on peut distinguer la capacité à représenter un problème sous forme mathématique, l'usage du raisonnement mathématique, l'usage de procédures mathématiques appropriées, l'interprétation des résultats, la communication et la réflexion sur les différentes approches d'un problème.

Une troisième partie présente les contenus, répartis en trois champs : nombres et algèbre, géométrie et mesures, statistiques. Pour chacun de ces trois champs ainsi que pour le domaine général « méthodes mathématiques et applications », les attendus sont décrits en termes de niveaux à atteindre : pour les études secondaires, les niveaux sont au nombre de six. Ils sont nommés niveaux 4, 5, 6, 7, 8 puis niveau de performance exceptionnelle.

Dans ce texte, il n'y a pas d'entrée par la progression des apprentissages en fonction des notions et concepts mathématiques étudiés. Les indications pédagogiques sont données dans d'autres documents que celui du curriculum national, séparant ainsi les objectifs à atteindre et les commentaires pédagogiques.

IV. L'ETUDE DU THEME DE L'ALGEBRE A TRAVERS LES MANUELS

Ce paragraphe s'appuie sur l'étude détaillée des textes de programme et sur l'analyse de deux ouvrages anglais et d'un ouvrage suisse dont les références figurent en annexe.

L'algèbre est un domaine intéressant pour révéler les différences de conceptions de l'enseignement des mathématiques. De nombreuses études didactiques ont en effet montré la difficulté pour les élèves de passer du registre sémiotique de la langue naturelle à celui des écritures algébriques (le terme de registre étant employé au sens de R Duval) et les difficultés liées aux différents usages de la lettre (inconnue, indéterminée, variable).

En Angleterre, l'algèbre est présentée en une ligne dans le domaine « number and algebra » sous la forme « algebra as generalised arithmetic ». Les objectifs à atteindre dans ce domaine sont assez techniques : calculs sur des formules simples, usage approprié des parenthèses, expression littérale des termes d'une suite, résolution d'équations et de systèmes. Dans le niveau de performance exceptionnel seulement, on voit apparaître « exprimer des lois générales sous une forme symbolique ».

L'examen du livre Edexcel GCSE (pour le niveau de base) montre que l'introduction de l'algèbre n'est pas accompagnée d'activités donnant du sens à l'usage de la lettre. Le passage entre la manipulation des nombres et celle des lettres se fait par une analogie formelle rapide. Le livre propose très vite des manipulations techniques dans le registre des écritures algébriques. Suivent quelques exercices, peu nombreux, de transcription d'expressions en langue naturelle dans le langage algébrique.

L'ouvrage « GCSE for middle sets » n'est guère différent dans sa présentation initiale de l'algèbre mais il propose ensuite quelques exemples de preuves utilisant l'algèbre et des problèmes posés dans le cadre géométrique pour lesquels l'algèbre apparaît comme un outil de résolution.

En Suisse, le module 3.3 intitulé « résoudre des problèmes numériques et algébriques » détaille comment mobiliser l'algèbre comme outil de calcul, de preuve ou de généralisation. Il signale que la lettre peut avoir trois statuts différents : indéterminée lors du calcul polynomial, variable dans une expression fonctionnelle ou une formule, inconnue dans une équation. L'attention est attirée sur la différence entre le sens procédural et le sens relationnel du signe =.

Le programme mentionne explicitement l'élaboration d'expressions littérales à partir d'énoncés de problèmes, de figures géométriques ou d'expressions verbales. Des indications pédagogiques signalent les erreurs classiques des élèves à propos desquelles il convient de faire un travail d'invalidation.

L'ouvrage utilisé dans toute la Suisse romande comporte un tome complet consacré à l'algèbre pour les trois années. Il propose une progression pédagogique et contient de nombreux problèmes destinés à faire travailler tous les aspects du calcul algébrique : passage de l'expression française à l'écriture littérale, programmes de calculs, résolution d'équations.

V. CONCLUSION

Cette contribution privilégie une étude comparée suivant quelques critères choisis parce qu'ils sont au cœur des débats actuels sur l'enseignement des mathématiques dans l'ensemble des pays. Elle montre la diversité et la complexité des systèmes éducatifs, chacun ayant des contraintes fortes et des sphères de liberté situées à des niveaux différents.

L'Angleterre est un système éducatif piloté par les évaluations mais dans lequel les pouvoirs locaux et les établissements ont une certaine liberté pédagogique. Le système reste souple pour les élèves et leur permet facilement des changements de cursus.

La Suisse est une fédération de cantons attachés pour des raisons historiques à leurs propres systèmes éducatifs, engagés actuellement dans un processus d'harmonisation respectant les spécificités de chaque canton. La réflexion sur l'existence ou non de filières conduira sans doute à adopter un système mixte dans l'avenir.

Dans chacun des deux pays les objectifs à atteindre en fin de cycle en mathématiques sont déclinés dans des documents de natures très différentes : une entrée par les niveaux de performance des élèves pour l'Angleterre, une entrée double pour le plan d'études romand à la fois par les attentes en fin de cycle et par la progression des apprentissages.

Les observations dans les classes en mathématiques viennent confirmer les tendances repérées dans les textes de cadrage : dans un cas, un enseignement des mathématiques pragmatique, un peu standardisé, avec une attention particulière portée aux niveaux de performance des élèves et à la manière de les faire progresser, dans l'autre cas, un enseignement plus créatif riche d'une palette plus variée d'entrées dans les problèmes de recherche. Les études dont nous disposons ne permettent pas à ce jour de définir des causalités entre les organisations des systèmes et les différentes conceptions de l'enseignement des mathématiques d'une part et les résultats des élèves d'autre part.

Ce que nous retiendrons d'un travail de comparaison est la richesse et la complexité de chaque système et la possibilité de s'inspirer d'idées intéressantes dans chacun d'entre eux.

REFERENCES

Duval R. (1993) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et sciences cognitives* 5.

DEPARTMENT FOR EDUCATION

- *Teaching and learning, secondary curriculum subjects*
  http://www.education.gov.uk/schools/teachingandlearning/curriculum/secondary
- *Statistical release*
  http://media.education.gov.uk/assets/files/pdf/osr292010pdf.pdf

INSTITUT DE RECHERCHE ET DE DOCUMENTATION PEDAGOGIQUE, NEUCHÂTEL, coordination Nideggerc C. PISA 2009, les compétences des jeunes romands.
http://www.irdp.ch/recherche/pisa/2009/pisa_2009_%20rapport_romand.pdf

INSTITUT FRANÇAIS DE L'EDUCATION (2011), *PISA ce que l'on en sait et ce que l'on en fait*, dossier n°66.

LEICESTERSHIRE COUNTY COUNCIL, *Education and learning*
http://www.leics.gov.uk/index/education.htm

OCDE

- *PISA 2009 report, volume I et II* :
  http://www.oecd.org/document/61/0,3746,en_32252351_32235731_46567613_1_1_1_1,00.html
- *Viewing the United Kingdom school system through the prism of PISA*
  http://www.oecd.org/dataoecd/33/8/46624007.pdf

OFSTED, framework for school inspections
http://www.ofsted.gov.uk/resources/framework-for-school-inspection-january-2012

Ouvrages scolaires

AQA, GCSE, Mathematics for middle sets, series editor Glyn Payne.

EDEXCEL GCSE, Mathematics, Linear, Fundation, student book, series editor Graham Cumming.

Chastellain M., Calame J., Brechets M. Conférence Inter-cantonale de la Suisse romande et du Tessin. Calcul littéral. Mathématiques 7, 8, 9.

ANNEXE 1 : ORGANISATION DANS LE LEICESTERSHIRE (MAI 2010)

Ages des élèves à l'entrée	Leicestershire			France		
	Écoles	classes	Évaluations nationales	Écoles	classes	Évaluations nationales
3 ans				École maternelle	Petite section	
4 ans	Infant school	reception			Moyenne section	
5 ans		Année 1			Grande section	
6 ans		Année 2	Key stage 1 : évaluation des acquis des élèves en fin d'année	École primaire	CP classe préparatoire	
7 ans		Année 3			CE1 cours élémentaire $1^{\text{ère}}$ année	Evaluation des acquis des élèves Attestation de la maîtrise des compétences du socle commun palier 1
8 ans	Junior school	Année 4			CE2 cours élémentaire $2^{\text{ème}}$ année	
9 ans		Année 5			CM1 cours moyen $1^{\text{ère}}$ année	
10 ans		Année 6	Key stage 2 : évaluation des acquis des élèves en fin d'année		CM2 cours moyen $2^{\text{ème}}$ année	Evaluation des acquis des élèves Attestation de la maîtrise des compétences du socle commun palier 2
11 ans	High School	Année 7		Collège	$6^{\text{ème}}$	
12 ans		Année 8			$5^{\text{ème}}$	
13 ans		Année 9			$4^{\text{ème}}$	
14 ans	Upper School Orientation possible au College of further education après 16 ans	Année 10			$3^{\text{ème}}$	DNB(15 ans) diplôme national du brevet Attestation de la maîtrise des compétences du socle commun palier 3
15 ans		Année 11	GCSE (16ans) General certificate of secondary education	Lycée d'enseignement général ou lycée professionnel	2^{nde}	
16 ans		Année 12			$1^{\text{ère}}$	
17 ans		Année 13	A-Level (18ans) ou diplôme professionnel		terminale	Baccalauréat général (18 ans) ou diplôme professionnel

ANNEXE 2 : ORGANISATION DANS LE CANTON DE NEUCHÂTEL (2011 – 2012)

Age normal à l'entrée	**degré**	**Cycles**			
4 ans	1	**Cycle 1**			
5 ans	2				
6 ans	3				
7 ans	4				
8 ans	5	**Cycle 2**			
9 ans	6				
10ans	7				
11ans	8	**Classe d'orientation** *(rattachée à l'école primaire bien que dans les locaux du secondaire)*		**Classe de transition**	
Cycle 3 : école secondaire I					
12 ans	9	maturités	moderne	Prépro-fessionnelle	Classes terminales
13 ans	10				
14ans	11				
	12			Classes complémentaires ou de raccordement (rattachées au secondaire II)	
Secondaire II					
15 ans		Lycée Obtention d'une maturité gymnasiale en fin de cycle (18ans)	Ecole de culture générale *Certificat de culture générale*	Écoles professionnelles, écoles de métier, lycées d'enseignement professionnel *Certificats fédéraux de capacité* *Diplôme de commerce, maturité professionnelle*	
16 ans					
17ans					

VULGARISATION DES MATHEMATIQUES

Compte-rendu du projet spécial n°4 – EMF2012

Pierre AUDIN* – Shaula FIORELLI VILMART** – Pierre-Alain CHERIX**

I. LA VULGARISATION MATHEMATIQUE, C'EST QUOI ?

Vulgarisation, médiation, popularisation des mathématiques, les mots sont nombreux et divers, mais recouvrent une idée similaire, faire ou refaire découvrir des mathématiques, par la beauté, le jeu ou le mystère. Ceci dans le but de (re)donner au public un intérêt ou une curiosité pour ce sujet et pour lui faire partager, dans la mesure du possible, non seulement des résultats récents ou plus anciens, mais aussi la démarche de chercheur. Pour cette démarche, la curiosité est le moteur et la joie de la découverte en est la récompense de l'effort gratuit.

Cette définition n'a rien d'exhaustif, certains pourront même ne pas y adhérer, qu'importe la vulgarisation des mathématiques existe et se développe. Quelle en est la raison ?

II. LA VULGARISATION MATHEMATIQUE, POURQUOI ?

Alors que le développement de la recherche mathématique n'a jamais été aussi rapide et que notre environnement est de plus en plus conditionné par cette recherche, l'utilité supposée des mathématiques dans la population et la conscience de ce développement régressent. Pour la majorité des gens, les mathématiques se résument au calcul et, éventuellement, à la géométrie d'Euclide et Pythagore ; pour eux, il n'y a donc plus rien à trouver. Comment expliquer ce paradoxe ?

Parmi les explications possibles, on peut supposer d'une part que les mathématiques sont de moins en moins utilisées consciemment, puisqu'elles sont de plus en plus encapsulées dans des outils technologiques (calculatrices, ordinateurs, téléphones portables, GPS…). D'autre part, la spécialisation et l'abstraction croissantes des mathématiques actuelles les rendent de plus en plus inaccessibles à un public non expert.

Ce divorce entre la réalité de la vie mathématique et le ressenti de la majorité de la population engendre une tension qu'il faut réduire. Autrement, le risque d'un désintérêt de la population pour cette science et son enseignement s'accroît. Or, les mathématiques, en particulier les statistiques, sont de plus en plus présentes, avec plus ou moins de bonheur, dans les discours et les argumentations politiques comme moyen de persuasion. Cette utilisation des nombres de plus en plus fréquente dans le débat politique devrait impliquer une volonté de donner au citoyen de meilleures connaissances dans ce domaine, lui offrant un meilleur recul sur l'utilisation parfois abusive des informations chiffrées et lui permettant de prendre des décisions d'une manière plus éclairée. Réussir ce défi citoyen n'est possible qu'en redonnant aux mathématiques, au sein de la population, un intérêt accru.

Une autre conséquence de la baisse d'intérêt du public pour les mathématiques est une réduction de la relève dans ce domaine, une réduction des financements et, à terme, une diminution de la créativité mathématique. Ainsi, s'il n'y a plus personne pour les développer,

* Palais de la découverte – France – pierre.audin@free.fr
** Université de Genève – Suisse – shaula.fiorelli@unige.ch, pierre-alain.cherix@unige.ch

© Audin P., Fiorelli Vilmart S., Cherix P.-A. (2012) Vulgarisation des mathématiques – *Compte-rendu du projet spécial n°4*. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (SPE4, pp. 1860–1865). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

les outils utiles aux mathématiques pourraient ne pas être là au XXII^{ème} siècle. Or, nos sociétés se doivent de développer l'intérêt et les capacités mathématiques des futurs citoyens. En effet, c'est dans l'inventivité, l'imagination, la créativité, mais aussi dans la rigueur et la capacité d'analyse de ceux-ci que réside le développement des innovations qui sont si importantes pour la bonne santé économique et politique d'un pays.

La vulgarisation est une tentative de réponse à ce problème.

III. POURQUOI DE LA VULGARISATION MATHEMATIQUE DANS UN COLLOQUE DE DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES COMME EMF2012 ?

Il est naturel, dans un colloque de didactique des mathématiques, de réfléchir aux sujets attenants à l'enseignement des mathématiques. Or, la vulgarisation partage avec l'enseignement certains objectifs même si elle s'en distingue par d'autres.

Un aspect important est que la vulgarisation est souvent faite par des enseignants de mathématiques ou des personnes s'intéressant à la didactique de cette branche. De plus, cette activité de médiation n'est que rarement l'activité principale de la personne, mais bien plus souvent une activité secondaire.

Il s'en suit que l'on pratique la vulgarisation, parce que l'on aime cela, que l'on a envie de partager sa passion, mais bien souvent avec un temps et des moyens limités. Il en découle souvent que les personnes développant ce type d'activité le font seules ou localement en petits groupes, mais n'ont pas souvent accès à d'autres expériences du même genre faites ailleurs.

Contrairement aux mathématiques ou à leur didactique, la vulgarisation ne dispose que de peu de lieux institutionnels permettant à ceux qui la pratiquent de se retrouver pour partager leurs expériences et réfléchir sur leurs pratiques.

En dernier lieu, la vulgarisation implique la motivation du public. Or, motiver ou intéresser les gens passe par une présentation de la pertinence ou de la beauté du sujet proposé à la personne qui assiste. Beauté et pertinence sont fortement liées à l'arrière-plan culturel du public visé. Il est donc important pour le vulgarisateur de tenir compte de cet arrière-plan, en particulier la langue de communication dans laquelle cette démarche est entreprise, dans notre cas le français.

Ceci explique la pertinence d'un tel projet dans un congrès comme EMF2012.

IV. L'APPEL A CONTRIBUTIONS

Quand nous avons lancé l'appel à contributions pour ce projet, il nous a semblé pertinent d'essayer d'obtenir des propositions représentant au mieux la diversité de ce que revêt la vulgarisation des mathématiques, en particulier les contraintes liées à tel ou tel public cible. C'est dans cet esprit que nous avons lancé un appel en listant divers aspects de la vulgarisation :

1. La vulgarisation : à quoi ça sert ? L'introduction de ce texte donne un début de réponse générale à cette question. Peut-on être plus précis et plus complets ? (exemples) Il s'agirait dans cette discussion d'aborder de manière générale la ou les raison(s) d'être de la vulgarisation. La pluralité des réponses possibles débouche sur les autres axes que nous proposons et qui se veulent plus pratiques.
2. Les publics de la vulgarisation. Quel public vise-t-on avec une activité de vulgarisation ? En quoi le but diffère-t-il en fonction du public ? (recrutement,

sensibilisation des parents, des politiciens, des journalistes…). Y a-t-il une attente du public, laquelle et pourquoi ?

3. Les formes de la vulgarisation. Quelles modalités la vulgarisation mathématique peut-elle se donner ? Présenter des méthodes, des outils, des approches et par là affiner ce qu'est la vulgarisation mathématique.
4. Les lieux de la vulgarisation. Contrairement à l'enseignement des mathématiques qui a un lieu naturel pour se pratiquer, à savoir l'école, la vulgarisation qu'on appelle aussi médiation, mathématique n'a pas de lieu aussi bien défini. Elle est donc plus libre d'apparaître dans divers contextes (musées, média audiovisuels, internet, écoles, livres, revues, …). Quels sont les avantages et les inconvénients de ces lieux existants ? Y-aurait-il d'autres lieux possibles pour la vulgarisation scientifique ? Comment le lieu influe-t-il sur la médiation en elle-même ? Le lieu change-t-il le but et la forme d'une vulgarisation ? Inversement, les modalités de la médiation imposent-elles un lieu particulier ?
5. Les vulgarisateurs/médiateurs. Doit-on demander à chaque spécialiste de fournir un effort de vulgarisation ? Peut-on le devenir sur le tas ? Doivent-ils être formés ? Quel niveau de spécialisation doit avoir atteint un vulgarisateur/médiateur pour être légitime ? Comment garder le contact avec la recherche pour rester légitime ?
6. La place de la vulgarisation par rapport à l'enseignement (actuel/futur) ? Y-a-t-il dans la médiation mathématique une volonté d'enseignement ? Il y a certainement, dans la vulgarisation, une volonté d'explication, d'accroître l'intérêt du public. Ceci passe par une explication du sens des résultats mathématiques, de leur utilité, des raisons culturelles qui ont poussé des chercheurs à réfléchir à ce type de questions. Mais peut-on parler d'enseignement ? A contrario, on peut poser la question de la nécessité d'une part de vulgarisation dans tout acte d'enseignement mathématique ? De façon générale, quelle interaction existe ou devrait exister entre enseignement et vulgarisation ? Comment la vulgarisation influence l'enseignement des mathématiques et réciproquement ?
7. Y-a-t-il quelque chose de spécifique à la médiation/vulgarisation mathématique par rapport à la médiation/vulgarisation scientifique ? Il paraît en effet plus simple de vulgariser sur des questions scientifiques qui touchent de plus près des préoccupations plus répandues dans le public (planètes, création du monde, bioéthique, etc.). Mais au-delà de ces apparences qu'est-ce qui fait la réelle spécificité des mathématiques par rapport aux sciences quant à la question de la vulgarisation ? Est-ce que le bas degré de culture mathématique n'est pas un atout pour placer n'importe qui en situation de recherche mathématique, ce qui est moins facile dans les autres disciplines ?

V. LES CONTRIBUTIONS

Nous avons reçus neuf contributions dont vous trouverez les textes dans les actes ci-après et qui ont été à la base des discussions du groupe spécial.

De plus, pour mettre en avant la vulgarisation des mathématiques, Pierre-Alain Cherix et Shaula Fiorelli Vilmart ont collaboré à mettre sur pied une exposition au Musée d'Histoire des Sciences de Genève. http://www.ville-ge.ch/mhs/expo_2012_jeux.php.

L'idée d'une telle exposition est apparue dans le cadre de l'organisation de ce congrès. Madhi Abdeljaouad imaginait que Genève devienne, durant ce congrès, un endroit où la population serait confrontée à des mathématiques de manières diverses. En tant que coordinateurs de ce groupe spécial, il semblait effectivement important de ne pas uniquement parler de ce thème, mais aussi de le mettre en œuvre. Pierre-Alain Cherix et Shaula Fiorelli Vilmart ont alors proposé au Musée d'Histoire des Sciences de Genève l'idée d'une exposition sur les mathématiques. Cela a fait écho à une de leurs envies et a conduit à la réalisation de l'exposition « Les jeux sont faits ! Hasard et probabilités ».

VI. BREF RETOUR DES GROUPES DE DISCUSSION

Nous avons eu trois séances d'une heure et demie pour ce groupe spécial. Chaque participant était supposé avoir lu les contributions au préalable, mais il nous semblait préférable de rappeler brièvement la teneur des contributions avant de les utiliser comme base de discussion et de réflexions.

Il était difficile de préciser des objectifs différents pour chaque séance, car les contributions abordaient naturellement plusieurs problématiques. Nous avons néanmoins proposé les sous-titres suivants :

- *Plage 1* : Qu'est-ce que la vulgarisation mathématique ? Quelle est son utilité ? En quoi est-elle proche ou différente de la vulgarisation scientifique ? Quelles sont les différentes formes de vulgarisation mathématiques ?
- *Plage 2* : Les lieux et les publics de la vulgarisation.
- *Plage 3* : Convergence et divergence entre enseignement et vulgarisation des mathématiques ?

1. Plage 1

Le texte de Rittaud a permis entre autres de débattre de la question, à travers la vulgarisation d'expliquer les enjeux de l'utilisation valable ou fallacieuse des mathématiques dans la vie courante et dans la politique.

Les travaux de l'équipe Maths à modeler de Grenier, fournissent des exemples d'utilisation de problèmes issus des mathématiques discrètes pour illustrer la démarche de recherche mathématique. Dans ces travaux, la vulgarisation vise à rendre le public actif. Pour ce faire, des questions de réflexion non techniques sont idéales et les mathématiques discrètes répondent à ces exigences. Par ailleurs, en parallèle de la dernière séance des affiches, cette équipe a présenté des exemples de situations qu'ils proposent aux élèves. Cette présentation a été fort appréciée.

Les travaux de Pelay et Mercat posent d'une part, les premiers jalons pour définir un cadre théorique pour parler de vulgarisation des mathématiques. D'autre part, ces travaux visent à intéresser le public par la beauté en utilisant des transformations conformes de manière interactive.

Au cours de cette plage, une discussion a été amorcée sur la pertinence de l'utilisation des casse-têtes lors d'activités de vulgarisation mathématique.

2. Plage 2

La seconde plage s'est déroulée au Musée d'Histoire des Sciences, où se tenait l'exposition, car il semblait naturel de parler des lieux et des publics de la vulgarisation dans un lieu qui lui est consacré.

Alvarez nous a montré le film « Dimensions », une réalisation magnifique ouverte sur le monde ; sans doute l'action de vulgarisation présentée au colloque ayant le plus grand impact.

Audin s’est attaché à montrer comment faire vivre des notions mathématiques pour le public avec deux bouts de bois et un cube troué, une utilisation de casse-têtes dans le but de faire réfléchir sur (et éventuellement découvrir) des notions mathématiques au public.

Belbachir nous a présenté sa création d’un palais des sciences en Algérie, un projet enthousiasmant, engendré par les mathématiques.

Dans les discussions qui ont suivi la présentation sur la construction du palais en Algérie, des participants tunisiens ont signalé qu’en Tunisie existait une telle structure et ont proposé des collaborations.

Après la discussion un temps était prévu pour permettre aux participants du groupe spécial de visiter en primeur, l’exposition. Les membres du congrès pouvaient s’y rendre le jour suivant.

3. Plage 3

Comme nous l’avons dit plus haut, dans le cadre d’un colloque sur l’enseignement des mathématiques, il nous semblait pertinent d’axer la troisième séance sur les convergences et les divergences entre enseignement et vulgarisation des mathématiques.

Semri nous a soumis ses questionnements et projets pour voir comment utiliser la vulgarisation des mathématiques en Algérie pour lutter contre la désaffection pour cette science.

Godot nous a présenté l’expérience *math et malices*, qu’elle mène depuis plusieurs annéeS comme un vecteur de diffusion de la culture scientifique sur le temps des loisirs.

Cherix et Fiorelli Vilmart ont, eux, montré un exemple d’activité proposée dans le cadre des cafés des sciences, sur les tablettes babyloniennes. Ils ont abordé la question de la transposition de cette activité dans le cadre de classes et les difficultés associées pour un professeur lié par un contrat didactique fort avec ses élèves.

A notre agréable surprise, Pierre de la Harpe, Professeur honoraire à la Section de mathématiques de l’Université de Genève, est venu à l’improviste nous parler du site « Images des mathématiques » http://images.math.cnrs.fr/, vitrine officielle de la vulgarisation des mathématiques du CNRS.

VII. AVENIR ET PROJETS

Un point qui a été soulevé dans certaines discussions concerne le besoin croissant dans l’enseignement des mathématiques d’une part de vulgarisation pour permettre de remobiliser les élèves. Tout enseignant le sait et le pratique plus ou moins consciemment. Il est donc important que des liens entre didactique et vulgarisation des mathématiques existent et se développent pour permettre aux deux domaines de s’enrichir mutuellement. Parmi les autres projets d’avenir ayant émergé dans les discussions du projet spécial n°4, les suivants nous semblent particulièrement intéressants :

1. Maintenir un lien entre les personnes pratiquant la vulgarisation des mathématiques.
2. Mettre en place un lieu virtuel regroupant les diverses offres de vulgarisation avec des exemples pratiques d’activités.
3. Encourager les collaborations et développer une réflexion sur la pratique de la vulgarisation.

Ces objectifs montrent l'intérêt de poursuivre dans les prochaines éditions de EMF un tel groupe spécial (ou de le transformer en un groupe de travail) dévolu à la vulgarisation des mathématiques.

CONTRIBUTIONS AU SPE4

ALVAREZ A. – *Dimensions* : une promenade mathématique.
BELBACHIR H. – Vers un Palais des Sciences en Algérie : une impulsion des mathématiques.
CHERIX P.-A., FIORELLI VILMART S. – L'expérience des Cafés Mathématiques.
GODOT K. – Maths et malice, un projet pour faire découvrir les mathématiques sur le temps du loisir.
GRENIER D. – Rôle des situations de recherche dans la vulgarisation des mathématiques.
PELAY N., MERCAT C. – Quelle modélisation didactique de la vulgarisation des mathématiques ?
REUILLER G., ATTAL R., AUDIN P., JAMET R. – La vulgarisation des mathématiques par la médiation humaine – Exemple du Palais de la Découverte.
RITTAUD B. – Vulgariser les zones d'ombre.
SEMRI H. – Les mathématiques discrètes comme moyen d'apprentissage et de vulgarisation des mathématiques.

DIMENSIONS : UNE PROMENADE MATHÉMATIQUE

Aurélien ALVAREZ*

Résumé – Dimensions est un film tout public, en particulier destiné aux collégiens, lycéens et étudiants, constitué de 9 chapitres de 13 minutes chacun et de difficulté croissante. Ce film est accompagné d'un site internet qui contient beaucoup d'informations complémentaires pour aller plus loin. Certains professeurs de lycée n'hésitent pas à utiliser Dimensions comme complément de leur cours, en particulier les deux chapitres autour des nombres complexes.

Mots-clefs : film, dimensions, tout public

Abstract – Dimensions is a film of all age groups, particularly aimed at high school and students, consisting of 9 chapters of 13 minutes each and increasing difficulty. This film comes with a website containing a lot of information for those who want to go further. Some teachers in high school do not hesitate to use part of this movie to illustrate their course, particularly the two chapters dealing with complex numbers.

Keywords: film, dimensions, all age groups

Dimensions est une promenade mathématique de 2 heures autour de la dimension 4. C'est un film tout public, en particulier destiné aux collégiens, lycéens et étudiants, constitué de neuf chapitres de 13 minutes chacun et de difficulté croissante. La projection stéréographique, expliquée dès les premières minutes, est le fil conducteur du film qui s'intéresse notamment aux solides platoniciens, aux polyèdres réguliers de l'espace de dimension 4, aux nombres complexes et enfin à la fibration de Hopf.

Ce film (Alvarez, Ghys et Leys 2008) a été réalisé entre janvier 2007 et juillet 2008, sous l'impulsion de trois enthousiastes : Jos Leys, amateur passionné de graphismes (voir son site http://www.josleys.com), Étienne Ghys, mathématicien, et moi-même alors doctorant en mathématiques. Outre le soutien de l'Unité de Mathématiques Pures et Appliquées de l'École Normale Supérieure de Lyon, ce projet a bénéficié de l'aide bénévole de nombreuses personnes puisque ce film est aujourd'hui disponible gratuitement sur internet dans 9 langues et 21 sous-titrages, ainsi qu'en DVD accompagné d'un livret explicatif.

I. COMMENT TOUT A COMMENCE

En mars 2006, alors qu'il préparait une conférence dans le cadre du cycle « Un *texte, un mathématicien* » organisé par la Société Mathématique de France à la Bibliothèque nationale de France (Ghys 2006), Étienne Ghys a eu l'occasion de rencontrer Jos Leys, via internet, pour lui demander l'autorisation d'utiliser quelques-unes de ses images numériques illustrant certains groupes fuchsiens. Après ce premier échange, Étienne et Jos ont commencé à travailler ensemble et le résultat, qui devait illustrer certains points de la prochaine conférence que préparait Étienne, fut très apprécié lors du Congrès International des Mathématiciens de Madrid en 2006 (lire par exemple ce qu'en dit Terence Tao, médaillé Fields cette même année, sur son blog (Tao 2007)). De retour de vacances, l'idée fit son chemin de produire un vrai film de maths et ce fut le point de départ d'une collaboration à trois assez étonnante. Nous avons échangé plus de 5 000 mails en l'espace d'un an ! Et nous aimons à dire que nous nous sommes tous les trois occupés d'un peu tout... Outre la programmation des images bien sûr, il a fallu enregistrer les commentaires, monter la bande son, mixer la musique, insérer des sous-titres (en arabe, de droite à gauche !), bref, tous ces petits détails... De nombreux amis ou collègues nous ont aidés pour les traductions des sous-titres, pour nous conseiller pour les

* Université d'Orléans – France – aurelien.alvarez@univ-orleans.fr

© Alvarez A. (2012) *Dimensions* : une promenade mathématique. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (SPE4, pp. 1866–1872). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

calculs (effectués sur les ordinateurs du PSMN de l'ÉNS Lyon). Florent Ghys, musicien et neveu d'Étienne, a offert une bonne partie de la musique. Pour plus de détails sur toutes ces contributions, on pourra consulter le livret du DVD ou le site internet de *Dimensions*.

http://www.dimensions-math.org

II. BUTS DU FILM

L'idée générale du film est de prendre le spectateur par la main et de le guider vers la quatrième dimension. Le premier chapitre est très élémentaire et peut être compris par un élève du collège. Le niveau requis monte peu à peu et les chapitres les plus élaborés sont destinés à un élève de terminale motivé ou à un élève de classe préparatoire. Les chapitres ne sont pas complètement indépendants mais nous avons fait en sorte qu'un professeur puisse utiliser certains chapitres de manière autonome (par exemple deux chapitres d'introduction aux nombres complexes peuvent facilement être exploités en complément du cours du professeur). Par ailleurs, nous pensons que le film montre de belles images et il est également conçu pour qu'on puisse le regarder et l'apprécier sans nécessairement tout comprendre. Le public principal auquel nous avons pensé est celui des jeunes lycéens mais nous espérons qu'il pourra intéresser les professeurs du secondaire, les étudiants des premiers cycles universitaires mais aussi quelques collègues ! Nous espérons aussi intéresser « l'honnête homme » qui est disposé à voir quelques belles choses... En résumé, si notre film pouvait faire rêver quelques jeunes et leur donner envie de faire de la science, eh bien nous serions satisfaits !

1. Comment utiliser le film ?

Le film est conçu pour que tous les publics (qui le désirent !) puissent l'apprécier, à condition de bien choisir les chapitres. Comme nous l'avons déjà dit, le film est constitué de neuf chapitres qui durent chacun treize minutes. On peut bien sûr s'asseoir devant une télévision ou un ordinateur et regarder l'ensemble des 117 minutes d'une seule traite ! Mais il y aura peut-être des passages qui paraîtront trop rapides, ou au contraire trop élémentaires ; cela dépend des thèmes d'intérêt et/ou des connaissances préalables de celui qui le regarde. On peut aussi se contenter de certains chapitres bien choisis mais il est souvent préférable d'avoir vu un chapitre avant de passer au suivant.

Le chapitre 1, *la dimension 2*, est très élémentaire. Il devrait pouvoir être apprécié par des élèves du collège mais nous pensons que même si on sait déjà ce que sont les méridiens et les parallèles, le public aura peut-être plaisir à voir le spectacle de la Terre qui roule comme une balle !

***Figure 1** – Chap. 1 : Comment dessiner la Terre ?*

***Figure 2** – Chap. 1 : Méridiens et parallèles*

Le chapitre 2, *la dimension 3*, reste élémentaire mais demande un peu d'imagination. On peut très bien le regarder comme un spectacle, qui incite un peu à la philosophie... Il contient même des exercices, pour bien vérifier que l'on a compris. L'idée est la suivante : supposons que le spectateur habite dans un pays en deux dimensions, comment pourrait-il appréhender la dimension 3 ? Le but de ce chapitre est en fait de familiariser le spectateur à des outils qu'il ne connaît pas nécessairement dans un contexte connu : la dimension 3. Ces mêmes outils seront utilisés ensuite pour avoir un aperçu de la dimension 4.

***Figure 3** – Chap. 2 : Les reptiles d'Escher*

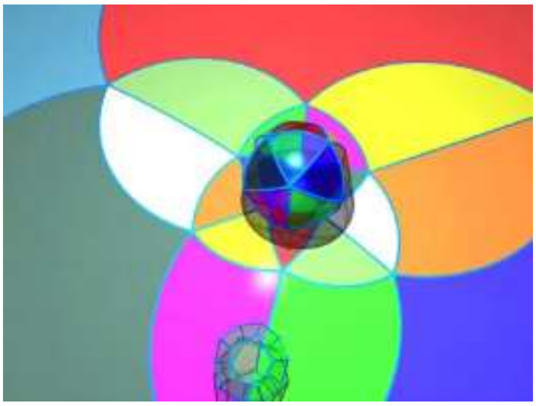


***Figure 4** – Chap. 2 : L'icosaèdre vu par les reptiles*

Les chapitres 3 et 4 présentent la quatrième dimension. C'est bien sûr plus difficile et on peut être pris de vertiges ! Ces chapitres présentent les polyèdres de Schläfli, l'équivalent en dimension 4 des polyèdres réguliers de Platon. Les images les plus spectaculaires sont sans doute les projections orthogonale et stéréographique du polyèdre 600 (voir **Figure 5** et **Figure 6**). Ces deux projections sont deux manières possibles pour se familiariser avec la quatrième dimension ; elles ont été présentées dans le chapitre 2.

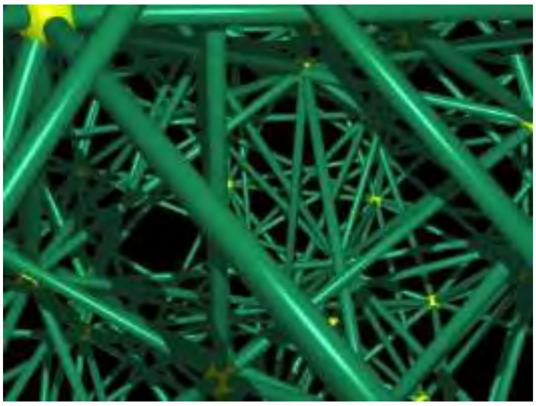


Figure 5 *– Chap. 3 : Le 600 en projection orthogonale*

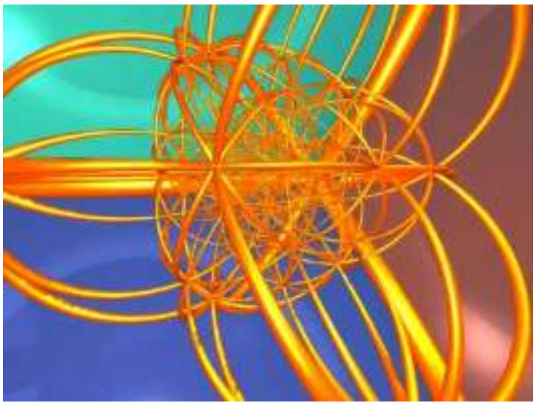


Figure 6 *– Chap. 4 : Le 600 en projection stéréographique*

Les chapitres 5 et 6, *nombres complexes*, proposent une introduction aux nombres complexes, qu'on apprend dans les classes terminales en France. Il ne s'agit pas de se substituer à un cours classique, mais nous pensons que ces chapitres pourraient en être d'agréables compléments. Ces chapitres sont les plus « scolaires » du film.

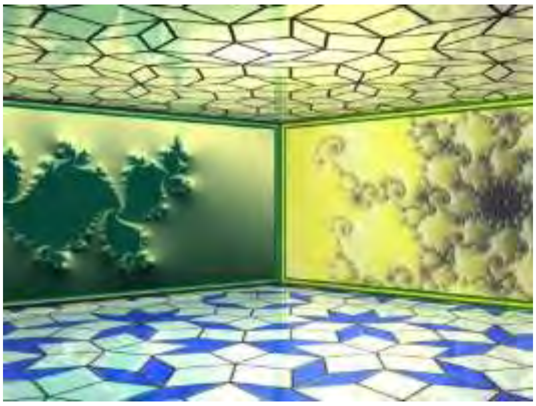


Figure 7 *– Chap. 5 : Nombres complexes*

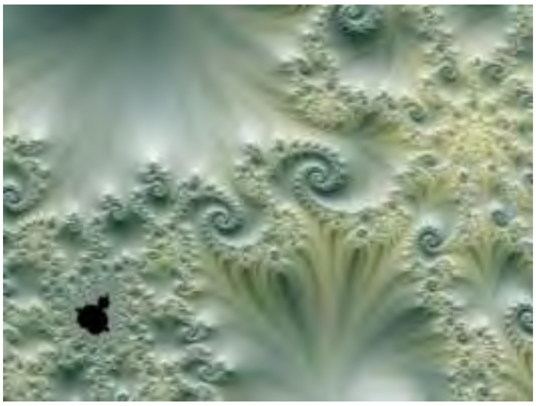


Figure 8 *– Chap. 6 : L'ensemble de Mandelbrot*

Les chapitres 7 et 8 contiennent une introduction à *la fibration de Hopf*, qui n'est pas discutée au lycée, ni même dans les premiers cycles universitaires. Il est donc clair qu'il n'est pas destiné à de vrais débutants. Mais c'est bien joli et cela mérite donc quelques efforts. En principe, tout est expliqué même si, bien sûr, les choses vont parfois un peu vite. Les références données sur le site internet pourront être utiles en cas de difficultés.

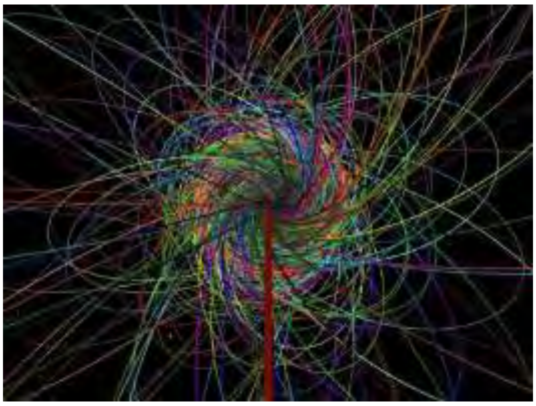


Figure 9 *–Chap. 7 : Fibration*

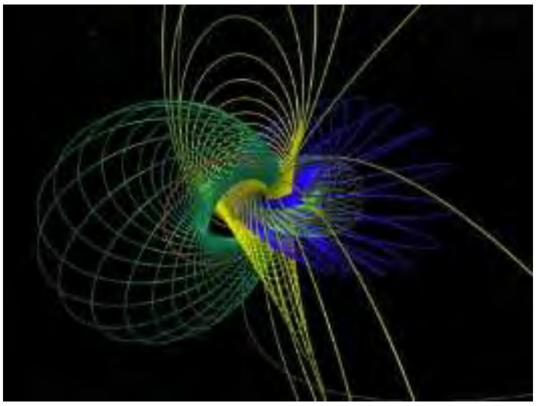


Figure 10 *– Chap. 8 : Cercles de Hopf*

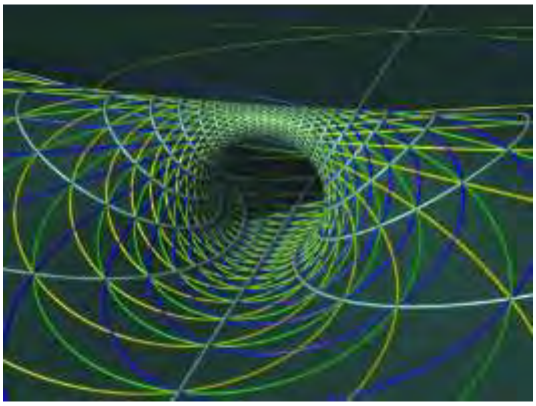


Figure 11 *–Chap. 8 : Cyclides de Dupin d'un côté…*

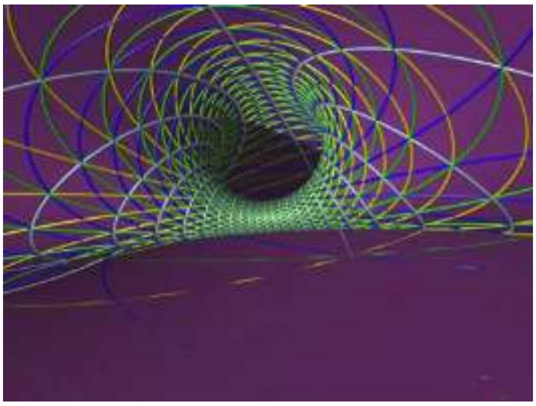


Figure 12 *– ... et de l'autre côté.*

Enfin, **le chapitre 9** a un statut particulier. Il propose *une preuve d'un théorème de géométrie*. Cette démonstration est en principe compréhensible par un collégien et ce chapitre aurait pu être placé après le chapitre 1. Les mathématiques n'existeraient pas si les théorèmes n'étaient pas démontrés. Nous avons voulu exprimer cela clairement à la fin du film dont l'essentiel est de montrer des objets mathématiques.

Voici quelques parcours possibles :

Collégien : 1 ou 1-2 ou 1-2-9
Lycéen : 1-2-(3-4)-9
Lycéen scientifique 5-6
Etudiant de premier cycle scientifique : 2-3-4-5-6 ou 5-6-(7-8-9)
Second cycle scientifique : 7-8-(9)
Public général : 1-2-3-4-(9)

III. QUELQUES EXPÉRIENCES

Il est possible à partir du site internet de déposer un commentaire. Trois ans après la sortie de Dimensions, nous continuons tous les jours de recevoir des messages, toujours très agréables à lire. Régulièremen,t certains professeurs de lycée nous racontent qu’ils n’hésitent pas à montrer des extraits du film comme complément de leurs cours. Ces exemples concernent surtout les chapitres 5 et 6 autour des nombres complexes que de nombreux professeurs de classes terminales apprécient particulièrement.

Plus rarement, quelques professeurs de collège montrent à leurs élèves le dernier chapitre, une belle occasion de démontrer une propriété fondamentale de la projection stéréographique avec les théorèmes de Thalès et de Pythagore. Il est vrai que ce chapitre est beaucoup moins spectaculaire que les autres au niveau des images mais nous pensons qu'il constitue un excellent outil pédagogique.

Certains collègues universitaires encouragent vivement leurs étudiants à étudier les chapitres 7 et 8 autour de la fibration de Hopf. Les images que nous montrons sont un beau complément à un cours de topologie en basse dimension, d'autant plus que la fibration de Hopf a joué un rôle essentiel dans le développement de la topologie et de la topologie algébrique dans la première moitié du XXe siècle.

Enfin, nous recevons énormément de messages d'amateurs de mathématiques qui nous font part du plaisir qu'ils ont pris avec ce film et de leur admiration. Presque tous ces messages se terminent par la même question : quand sortira Dimensions II ?

IV. UN SITE INTERNET POUR ACCOMPAGNER LE FILM

Le site internet du projet[1] contient beaucoup d'informations complémentaires. Nous y avons inclus une description précise du scénario du film en y ajoutant des références internet qui permettent d'approfondir le sujet. C'est grâce à la gentillesse de nombreux collègues et d'anonymes sur internet que le site de *Dimensions* est aujourd'hui accessible dans 9 langues. Pour la distribution, nous avons choisi une licence « *Creative Commons* » qui autorise de reproduire, distribuer, et communiquer gratuitement à condition de citer les auteurs, de ne pas modifier le contenu, et de ne pas l'utiliser à des fins commerciales[2]. Concrètement, nous mettons à disposition les fichiers du film sur notre site pour téléchargement gratuit. Il nous semble en effet que notre public est pour l'essentiel constitué de grands utilisateurs d'internet. Par ailleurs, certaines personnes seront probablement intéressées par l'acquisition d'un DVD ou ne voudront pas télécharger le film. Ils pourront le commander directement sur le même site au prix de 10 euros, frais de port compris indépendamment du pays. Les bénéfices sur chaque DVD vendu nous permettent de distribuer gratuitement des DVD, comme ce fut par exemple le cas pour le congrès de l'APMEP en 2008 à La Rochelle (800 exemplaires offerts), aux participants des Olympiades Internationales de Mathématiques en 2008 à Madrid (500 exemplaires), au CIMPA (500 exemplaires), etc. Des collègues japonais ont traduit en japonais le livret explicatif et ont distribué 2 000 exemplaires du DVD à des enseignants du secondaire.

En plus de notre site www.dimensions-math.org hébergé à Lyon, *Dimensions* peut être téléchargé à partir de quatre autres sites miroirs situés au Brésil, en Chine, au Japon, au Mexique et aux États-Unis. Le serveur lyonnais reçoit lui seul environ 1 000 visites quotidiennement et, d'après Google Analytics, chacun des 209 pays du monde référencés est venu nous visiter ! Nous avons également le plaisir de recevoir de nombreux commentaires venus du monde entier, presque toujours très enthousiastes, certains d'entre eux étant même émouvants. Beaucoup nous félicitent aussi pour avoir choisi une diffusion « Creative Commons » et il nous semble clair que nous avons en effet fait le bon choix avec ce type de copyright. Dans la mesure où nous n'avons aucune ambition financière, ce type de distribution est le meilleur et il a sans aucun doute augmenté le nombre de ventes de DVD.

En 2010, nous avons reçu le *Prix d'Alembert* de la Société Mathématique de France. Cette belle récompense est certainement pour nous un encouragement vers d'autres aventures...

---

[1] www.dimensions-math.org
[2] voir http://creativecommons.org

RÉFÉRENCES

Alvarez A., Ghys E., Leys J. (2008) *Dimensions*.
http://www.dimensions-math.org
Ghys E. (2006) *Henri Poincaré et le monde non euclidien*.
http://smf.emath.fr/cycle_texte_mathematiciens
Tao T. (2007) *Étienne Ghys, Knots and dynamics*.
http://terrytao.wordpress.com/2007/08/03/2006-icm-etienne-ghys-knots-and-dynamics/

VERS UN PALAIS DES SCIENCES EN ALGERIE : UNE IMPULSION DES MATHEMATIQUES

Hacène BELBACHIR*

Résumé – En mars 2010, à Alger, « la semaine de la Science » a été organisée avec le Palais de la Découverte de Paris, sous le signe des mathématiques. Elle s'est poursuivie avec « la caravane du savoir » qui a sillonné 16 villes du pays. Pour la seconde édition de la semaine de la Science, la physique et la chimie étaient aussi au rendez-vous. Entretemps, en octobre, une rencontre algéro-française sur l'enseignement supérieur et la recherche scientifique annonce le projet de création d'un Palais des Sciences en Algérie. C'est cette expérience, passage de l'événementiel au permanent, que nous présentons ici.

Mots-clefs : vulgarisation des mathématiques, caravane du Savoir, Palais des Sciences en Algérie, « médiateurs scientifiques », culture scientifique

Abstract – In March 2010, in Algiers, the "Science Week" was organized in collaboration with the Palais de la Découverte in Paris, under the theme sign of mathematics. This was followed by the "caravan of knowledge" that crisscrossed the country and visited 16 cities. For the second edition of the national week of Science, physics and chemistry were also at the meeting. Between the two events, an Algerian-French meeting on Higher Education and Scientific Research announced the creation of an exhibition hall of Sciences in Algeria. It is this experience we wish to present.

Keywords: popularization of mathematics, caravan of Knowledge, Science Palace in Algeria, mediators, Science culture

I. INTRODUCTION

1. La situation en Algérie

La Science est le domaine réservé de l'école et de l'université. Une sensibilisation des jeunes aux Sciences est presque inexistante en dehors des programmes scolaires. La culture scientifique et technique n'est pas diffusée, du moins sous une forme organisée, en direction de tous ceux qui ne sont plus dans un cadre scolaire ou universitaire.

2. La volonté d'un Scientifique investi d'un pouvoir politique

La décision de création d'un Palais des Sciences en Algérie, comme bien d'autres initiatives majeures visant la promotion de la recherche tient, pour l'essentiel, à un homme, scientifique passionné et de notoriété établie, en l'occurrence l'actuel Directeur Général de la Recherche Scientifique et du Développement Technologique en Algérie. Il n'est pas superflu de rappeler ici que, à l'orée du vingtième siècle, la création du Palais de la Découverte à Paris avait été aussi la cristallisation d'une idée du célèbre Prix Nobel de physique Jean Perrin. Il avait réussi à fédérer autour du concept quelques grands noms de la Science française de l'époque parmi lesquels on peut citer en particulier le mathématicien Emile Borel et les physiciens Paul Painlevé et Paul Langevin. Dans la situation actuelle, c'est aussi un homme de Science de renom, qui prend en charge l'initiative. Le parallèle n'est pas fait pour surprendre. Il faut avoir compris pour voir s'éclairer les chemins à suivre…

3. Le pourquoi

Pour accompagner le développement scientifique de l'Algérie, pour montrer au grand public les avancées de la Science, et en particulier celles qui sont l'œuvre de chercheurs algériens, et

* Direction Générale de la Recherche Scientifique – Algérie – hacene.belbachir@nasr-dz.org

© Belbachir H. (2012) Vers un Palais des Sciences en Algérie : une impulsion des mathématiques. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (SPE4, pp. 1873–1882). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

aussi pour créer un climat favorable afin de susciter des vocations scientifiques, la création d'un Palais des Sciences s'impose. Les missions de cette structure sont claires et faciles à énoncer. Elles devront être remplies progressivement :

- être un lieu d'exposition que le public peut visiter (de 2 à 102 ans) ;
- être une tête de réseau pour la diffusion de la culture scientifique à travers le territoire national ;
- être un soutien ou un complément au système scolaire et universitaire qui pourrait préparer et/ou assister les réalités pratiques de certains enseignements, sans contrainte d'évaluation.

4. *Qui explique la Science au public ?*

Pour servir d'intermédiaire entre le public et la Science, un métier s'est dégagé et développé, celui de médiateur scientifique. Ce métier n'existe pas en Algérie, il est indispensable de le créer pour le futur Palais des Sciences. Pour la semaine de la Science et la caravane du savoir, ce sont des étudiants en master ou équivalent qui ont pris en charge la médiation avec une courte formation réalisée principalement par des membres du département de mathématiques du Palais de la Découverte de Paris, et beaucoup d'improvisation et d'imagination.

II. LA SEMAINE DE LA SCIENCE ET LA CARAVANE DU SAVOIR

Ces deux événements ont eu comme objectifs d'attirer les jeunes et les moins jeunes vers les Sciences et la Technologie. Ils se sont déroulés principalement sous le signe des mathématiques.

***Figure 1** – le bus qui a servi à la caravane du savoir, préparé pour l'occasion*

Beaucoup d'aspects des mathématiques sont largement accessibles quand est levé le voile de l'*a priori*, et nombre d'entre eux se retrouvent très souvent, dans la vie quotidienne sous des formes déguisées et donc occultées, sauf peut-être pour un esprit quelque peu avisé. Il y a lieu donc d'œuvrer pour dégager ce voile et de mettre le doigt sur l'essence des choses. C'est donc une entreprise très porteuse et à développer que d'investir dans la vulgarisation de la Science en direction de tous les publics. La caravane du savoir a été conçue d'emblée comme une activité pérenne. Elle comporte actuellement trois ateliers.

1. Les ateliers

Un premier atelier : « récréation mathématique », réalisé en partenariat avec le Palais de la Découverte. Il consiste en des jeux et des manipulations qui visent à défier l'esprit des visiteurs qui sont accompagnés progressivement dans leur démarche intellectuelle par des animateurs formés à cette tâche.

Graphes eulériens

Cubes de Conway

Petits cubes

Cylindres colorés

Pavages par des dominos

Pavages par des équerres

Pavage quasi-périodiques

Pavage II

Demi-tétraèdres

Tour de Hanoï

Cubes et les perspectives

Triangles magiques

Figure 2 *– Les manips proposées au premier atelier*

<u>Deuxième atelier</u> « mathématiques expérimentales » (une activité proposée par l'UNESCO), d'un niveau plus élaboré, consiste en des animations mathématiques qui se déroulent essentiellement en face d'un ordinateur, et qui permettent de répondre d'une manière ludique aux questions « pourquoi les mathématiques ».

Dix thèmes sont abordés :

- **optimiser** (bulles de savon, le plus court chemin, la meilleure forme) ;
- **remplir l'espace** (empiler les oranges, polyèdres, problèmes complexes,..) ;
- **lire la nature** (spirales dans la nature, monde fractale, coniques de l'espace) ;
- **paver le sol** (l'art des pavages, kaléidoscopes, où suis-je ?) ;
- **prouver** (Pythagore, nombres et figures, est-ce bien vrai ?) ;
- **construire** (courbes et vitesses, courbes et volumes, courbes lisses) :
- **estimer – prévoir** (deux boules rouges ?, Bingo !, et le gagnant est ?) ;
- **calculer** (avec la tête et les mains, nombres premiers, images numériques) ;
- **se connecter** (un seul trait, quatre couleurs suffisent, allo c'est toi ?) ;
- **conclure** (expérimentez, faites des hypothèses, prouvez !).

<u>Troisième atelier</u> (aussi en partenariat avec le Palais de la Découverte) est une activité de groupe qui, à partir de figures géométriques planes classiques, permet de réaliser des polyèdres géants : ballon géant de 5 mètres de diamètre (constitué de 20 hexagones et 12 pentagones), un tétraèdre géant de 4m d'arête, un icosaèdre, …

Figure 3 *– Le ballon géant et le tétraèdre géant*
Après la réalisation du tétraèdre, une question est posée :
combien de triangles équilatéraux contient-il ?

Figure 4 *– Tlemcen 2011 : improvisation des étudiants, construction d'icosaèdres les uns inscrits à l'intérieur des autres. Le bleu de méthylène des chimistes (l'atelier de vulgarisation de la chimie n'est pas très loin) permet de colorier presque toutes les tiges du petit icosaèdre.*

Enfin, il y a eu aussi un cycle de conférences de vulgarisation des mathématiques.

2. *Le parcours*

Un groupe d'une quinzaine de personnes a parcouru le territoire national. Cinq wilayas ont été visitées par semaine, afin de rapprocher les mathématiques d'un maximum de public : Alger et certaines régions périphériques, Chlef, Mostaganem, Oran, Tlemcen, Sidi Bel Abbes, Sétif, Constantine, Annaba, Guelma, Batna, Djelfa, Laghouat, Ouargla, El Oued, Biskra.

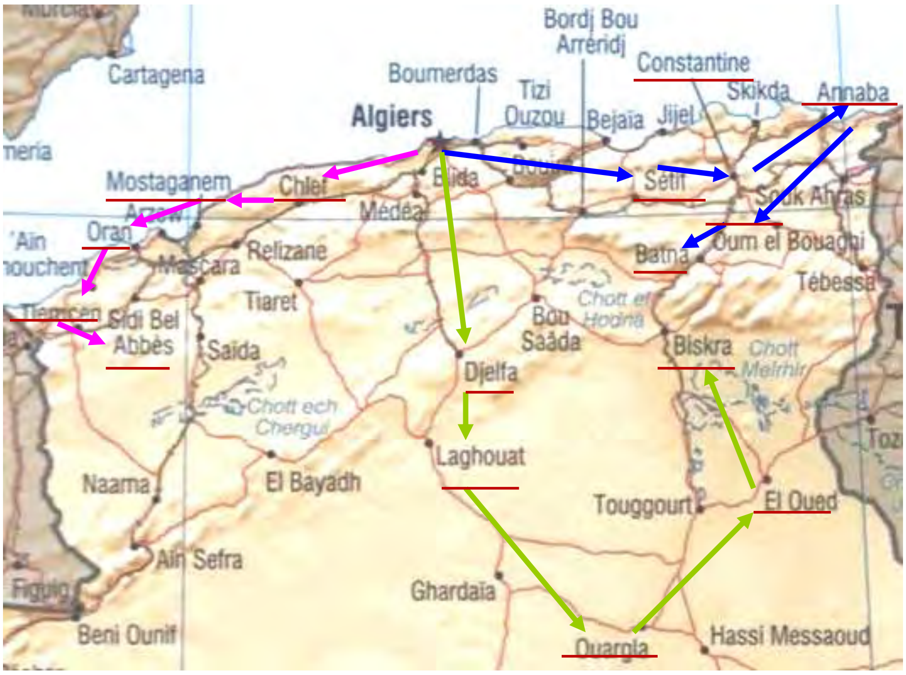


Figure 5 *– Les trois parcours de la caravane*

3. Partenariat Palais de la Découverte - DGRSDT

L'atelier « récréation mathématique » et l'atelier « figures géométriques géantes » sont le résultat d'un partenariat conclu entre le Palais de la Découverte (Paris) et la Direction Générale de la Recherche Scientifique et du Développement Technologique (DGRSDT) en Algérie. Il a été concrétisé par un apport de matériel pédagogique et didactique, ainsi que par l'apport de formation spécialisée à destination des animateurs. Les animateurs du Palais de la Découverte, se sont acquittés de cette tâche dans les locaux du Centre de Recherche sur l'Information Scientifique et Technique (CERIST). Au-delà de cette formation à proprement parler des animateurs de la caravane, ces personnes ont perfectionné cet encadrement durant toute la première semaine de la caravane qui s'est rendue sur plusieurs sites à Alger : Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene (USTHB), Ecole Militaire Polytechnique (EMP), Ecole Normale Supérieure de Kouba, maison de jeunes du boulevard des martyrs affiliée au Ministère de la Jeunesse et des Sports.

L'atelier « mathématiques expérimentales » de l'UNESCO a été présenté au CERIST et la formation aux diverses animations a été prise en charge par le Directeur Général de la DGRSDT.

4. Partenariat Ministère de la Jeunesse et des Sports

Ce parcours, sur un vaste territoire, n'aurait pu se réaliser sans la contribution forte du secteur de la jeunesse et des sports à travers ses directions locales et ses auberges de jeunesse mises gracieusement à disposition pour les équipes itinérantes. Ces structures ont pris en charge l'hébergement et la restauration des animateurs de la caravane. Elles ont aussi mis à la disposition de la caravane les lieux où les activités se sont déroulées avec la participation de jeunes et moins jeunes, collaborant aux animations des maisons de jeunes.

Leur action de mobilisation des jeunes, parfois accompagnés de leurs formateurs ou animateurs, a créé un engouement certain pour les jeux mathématiques.

5. Animateurs-Etudiants

Toute la caravane a été portée avec enthousiasme et efficacité par nos jeunes universitaires issus des départements de Recherche Opérationnel et d'Informatique de l'université de Bab Ezzouar, de l'INPS, de l'Ecole Normale d'Agronomie (ENA), et de l'association El Khawarizmia d'El Oued ainsi que du département de mathématiques du Centre Universitaire d'El Oued. Ils ont été les maîtres d'œuvre de cette entreprise avec passion, courage et abnégation. Rien n'aurait été possible sans eux. Ils ont, par ailleurs, apporté des innovations et des améliorations pour intéresser le public néophyte en leur insufflant attractivité, interactivité et créativité.

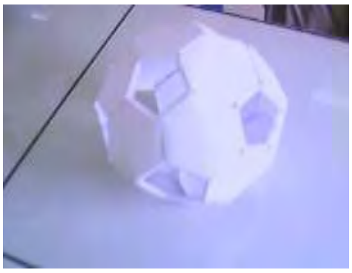
Des enseignants de l'université d'Oran-Es-Sénia et du Centre universitaire d'El Oued ont aussi accompagné la caravane et apporté leur soutien aux diverses activités.

Il est à noter qu'à la suite de leur périple, les jeunes animateurs de l'association El Khawarizmia d'El Oued ont reproduit, ce qui était évidemment autorisé et même souhaité, l'ensemble des manipulations de l'atelier 1, à l'identique de ceux offerts par le Palais de la Découverte de Paris. Il ne peut y avoir de témoignages de la réussite de l'entreprise et de la passion qu'elle a engendrée. Ces aptitudes montrent toute l'ampleur des potentialités qui ne demandent qu'à éclore pourvue qu'un minimum de conditions soit réunies.

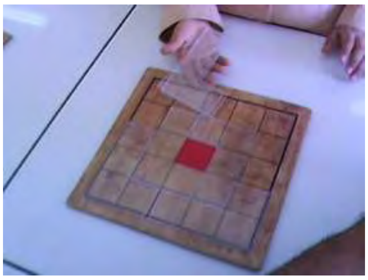
Rangement

Tetraèdre

Graphes eulériens



Le ballon de foot



Pavages

Cubes de Conway

Triangles magiques

Tour de Hanoï

Cylindres colorés

Figure 6 *– reproduction du matériel de vulgarisation par l'association El Khawarzmia*

6. Cycle de formation des animateurs

Pour assurer le bon déroulement des activités, une formation préalable était indispensable. Elle a été menée en partenariat avec :

- Le Palais de la Découverte (Paris)
- Le CERIST (centre de recherche en information scientifique et technique)

Elle a été dispensée à destination :

- ✓ des animateurs du ministère de la jeunesse et des sports,
- ✓ des étudiants du département de mathématiques du Centre universitaire d'El Oued,
- ✓ des membres de l'association El Khawarizmia d'El Oued,
- ✓ des étudiants du département de mathématiques de l'ENS Kouba,
- ✓ des étudiants du département de Recherche Opérationnel de l'USTHB,
- ✓ des étudiants du département d'Informatique de l'USTHB,
- ✓ des étudiants du département de Statistiques Appliquées de l'Institut National de la Planification et de la Statistique (INPS).

7. *Impact de la caravane*

Quel que fussent les lieux où l'équipe s'est déplacée, nous fûmes littéralement frappés par le fait que tous les participants, de tous les âges ont fait montre d'un enthousiasme sans égal à franchir le premier pas qui brise l'intimidation, à se prendre « au jeu », à s'investir, à se tester, à vouloir aller jusqu'au bout, à résoudre, à réussir, à se prouver qu'on est aussi capable de faire…On a rencontré le même scénario pour toutes les activités.

Bien des maisons de jeunes ont, à la suite de ces journées d'animation, exprimé le souhait d'intégrer ces activités dans leurs programmes permanents à destination des clubs et des jeunes inscrits, ce fût le cas de la direction de la jeunesse et des sports de la ville de Chlef qui a émis le souhait d'être accompagnée afin d'organiser deux journées de vulgarisation des mathématiques, les 31 octobre et 01 novembre 2010, et ce fut un succès. Il faut lire ici une autre facette de la réussite de l'opération.

III. LA CONFERENCE ALGERO-FRANÇAISE DE NOVEMBRE 2010

Lors d'une conférence algéro-française sur l'enseignement supérieur et la recherche scientifique a été présentée une communication d'un des membres du département de mathématiques du Palais de la Découverte de Paris sur l'expérience vécue durant la semaine nationale de la recherche et de la caravane du savoir. Il a exposé les grandes lignes de la vulgarisation et a soufflé l'idée de la création d'une structure semblable au Palais de la Découverte en tenant compte des spécificités culturelles algériennes. La prise de la décision ne s'est pas fait attendre. En effet, convaincu depuis longtemps de son utilité absolue, le Directeur Général de la Recherche Scientifique et du Développement Technologique a annoncé, lors de la cérémonie de clôture, le projet de création d'un Palais des Sciences en Algérie pour 2013.

IV. DES MATHEMATICIENS QUI SE PRETENT A LA VULGARISATION

On voit leurs visages s'illuminer au moment où des enfants réussissent, sans aucune aide majeure, le test du tétraèdre scindé.

Figure 7 *– deux mathématiciens professionnels, l'un Professeur des universités, l'autre jeune chargé de recherche dans un centre de recherches, se prêtent à la vulgarisation*

Figure 8 *– le mathématicien applaudit de joie au moment où les enfants réussissent le test du tétraèdre scindé*

V. LA VULGARISATION QUI MENE AUX MATHEMATIQUES

On ne peut pas s'improviser apte à vulgariser la mathématique. Un préalable est certainement de comprendre au moins certains aspects de cette vaste discipline, la plus vaste de toutes sans doute. Un médiateur dans cette discipline doit être au fait des variantes d'une forme de pédagogie qui doit s'adapter aux âges et surtout être capable d'identifier chez tout un chacun les éléments qui constituent la base de son savoir mathématique pour pouvoir adapter sa stratégie de cheminement intellectuel vers l'explication du phénomène objet de la curiosité. Cet aspect est essentiel et incontournable. Cela nécessite une formation et surtout une passion pour le métier.

Il est remarquable que les échanges d'explications et d'idées lors d'une activité de vulgarisation des mathématiques puissent déboucher sur des apports divers aux intervenants impliqués. Certains, « les curieux » repartent avec un éclairage nouveau sur leur « savoir », une meilleure compréhension et donc beaucoup de plaisir, alors que d'autres, les professionnels de la discipline, toujours à l'affût d'idées nouvelles, « déformation professionnelle oblige » y trouvent l'inspiration pour d'autres développements et d'autres présentations de leurs travaux et, ce qui n'est pas rare, des réponses à des interrogations profondes. La naïveté de certaines questions est souvent source d'illuminations. Un tel exemple, quoique modeste, est celui relatif à la manière à placer un minimum de jetons afin d'empêcher un « trimino » de se poser sur un damier. Le résultat obtenu est le fruit d'une discussion entre un mathématicien, un médiateur expérimenté du Palais de la Découverte et une jeune étudiante aspirant à devenir médiatrice. Un poster sera proposé sur le sujet par cette étudiante.

VI. CONCLUSION : DE L'EVENEMENTIEL AU PERMANENT

Les événements ponctuels : **caravane du savoir**, **semaines de la science**,… sont-ils suffisants pour changer la tendance au désintéressement/éloignement des mathématiques (ou des sciences en général) par le public ?

L'expérience des caravanes telle qu'elle a été décrite plus haut est sans nul doute d'un apport considérable et indéniable dans le domaine de la vulgarisation des Sciences. Mais, il faut se rendre à l'évidence, que cette façon d'opérer n'a, par essence même, qu'un impact relatif dans l'espace et dans le temps. Quels que soient les moyens investis, les objectifs ne peuvent être que modestes. Le matériel à transporter impose des limitations naturelles et un personnel itinérant, quand même animé par la meilleure volonté, est toujours à rendement limité. Une structure construite, localisée, spacieuse et permanente s'impose dès lors que l'on vise à toucher un plus large public, à diversifier les activités, à les programmer sur le long terme, à planifier les visites de groupes et à réaliser des expériences d'envergure parfois spectaculaires, surement enrichissantes, qui nécessitent la mobilisation d'un matériel lourd et souvent coûteux qui ne tolérerait aucun déplacement sans risquer d'être endommagé. Un autre objectif d'une telle structure est sa capacité à abriter la formation et le perfectionnement des médiateurs scientifiques, et à élaborer une démarche de présentation qui soit attractive, apte à placer les expériences dans un contexte propice à captiver l'assistance. Elle offre aussi l'opportunité aux chercheurs de se rendre compte de la perception que peuvent avoir les curieux de l'utilité de leur recherche. Elle est adaptée à servir de point fixe pour les visiteurs étrangers versés dans ce cadre afin qu'ils apportent leur contribution de manière sereine, effective et efficace dans l'élaboration et le développement des activités à termes divers et en prenant en compte les spécificités culturelles et sociales locales. N'oublions pas que le Maghreb au sens large est un peuple à vocation orale plutôt qu'écrite.

Remerciements. *Je souhaite ici exprimer mes vifs remerciements aux collègues de la Direction Générale de la Recherche Scientifique et du Développement Technologique et aux collègues du Palais de la Découverte (Paris) en particulier les membres du Département de Mathématiques, pour leur aide, leurs conseils et soutiens. J'ai pu aussi profiter de discussions très fructueuses et instructives avec les professeurs Abdelkader Bouyakoub et Gérard Tronel. A tous un grand merci.*

L'EXPÉRIENCE DES CAFÉS MATHÉMATIQUES

Pierre-Alain CHERIX* – Shaula FIORELLI VILMART*

Résumé – Nous présentons une expérience de vulgarisation mathématique nommée Café des Sciences ayant cours dans les écoles du bassin genevois depuis quelques années. Notre présentation se base sur l'analyse d'une des activités présentées, à savoir l'élucidation d'une tablette babylonienne.

Mots-clefs : Café des Sciences, tablette babylonienne, vulgarisation mathématique, école

Abstract – We present a mathematical vulgarization process, called « Café des Sciences » which are done in the region of Geneva for the last few years. Our presentation is based on the analysis of one activity that we use and which consists to understand a Babylonian tablet.

Keywords: Café des Sciences, Babylonian tablet, mathematical vulgarization, school

I. LES CAFÉS DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE GENÈVE

Qu'est-ce qu'un café des sciences ? Prenez deux ou trois scientifiques, un problème original ou un thème de société, ainsi qu'un modérateur. Mettez-les dans un cadre informel et invitez des élèves. Dans le cas d'un thème de société, le débat peut être lancé par un extrait de film puis, comme dans un débat entre scientifiques et élèves, le dialogue s'installe sous la forme de questions-réponses, le tout dirigé par le modérateur qui permet de dynamiser les échanges, assurer les transitions et gérer le temps.

Si les scientifiques ont amené un ou plusieurs problèmes, le schéma est légèrement différent. Dans ce cas, le temps est partagé entre des moments de réflexion de la part des élèves qui travaillent généralement en petits groupes et des moments d'explications ou de relances de la part des intervenants, toujours dirigés par le modérateur qui, parfois, se fait aussi le porte-parole des élèves plus timides qui n'osent pas poser des questions.

1. *Historique des Cafés des sciences de l'UniGE*

L'aventure des cafés des sciences à Genève commence vers 1998 à l'initiative de l'association franco-suisse EuroScience-Léman[1] (ESL) fondée par Robert Klapisch, ancien Directeur de la Recherche du CERN, et Didier Raboud, docteur en astrophysique et actuellement directeur de la communication de l'Université de Genève (UniGE). Le projet principal de cette association était d'organiser la Fête de la Science dans le département français de l'Ain ; ce n'est que par la suite que Robert Klapisch ramène de Paris, et plus particulièrement de la Cité des métiers, l'idée d'organiser des cafés scientifiques. Il est intéressant de noter qu'il s'agit d'une idée qui commençait à se propager en Europe vers 1999 et qui a été reprise à Genève non seulement par EuroScience-Léman mais aussi par l'association Bancs Publics[2]. Ainsi commencent à Genève, une fois par mois, les cafés des sciences destinés essentiellement aux adultes et, à plusieurs reprises, les intervenants de ces cafés sont des membres de l'UniGE.

* Section de mathématiques de l'Université de Genève – Suisse – pierre-alain.cherix@unige.ch, shaula.fiorelli@unige.ch

[1] Section régionale de l'Association transeuropéenne Euroscience ; l'Association Euroscience-Léman couvre la région entourant le lac Léman, soit les Cantons de Genève, Vaud et Valais pour la partie Suisse, et les Départements de l'Ain et la Haute-Savoie pour la partie française.

[2] L'association « Bancs publics » a été créée en mars 1999. Elle regroupe différentes personnes actives dans le domaine de la culture scientifique de Genève et Lausanne (journalistes scientifiques ou non spécialisés, directeurs de musée, sociologues des sciences, etc.), soucieuses « de favoriser les débats, la réflexion et les échanges dans le domaine scientifique » (article 2.1 de leurs statuts). www.bancspublics.ch

© Cherix P-A., Fiorelli Vilmart S. (2012) L'expérience des cafés mathématiques. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (SPE4, pp. 1883–1894). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

En 2003, dans le but de motiver ses élèves pour les sciences, le lycée international de Ferney-Voltaire demande à ESL d'organiser deux fois par an des cafés des sciences destinés aux élèves des classes de 2nde, 1ère, et terminales au sein de l'établissement ; naissent ainsi les Cafés Junior. Ce n'est qu'en 2005, suite à la demande d'enseignants d'établissements genevois que sont mis en place les cafés des sciences dans les écoles genevoises à l'occasion de l'année internationale de la physique.

Avec la professionnalisation progressive de la communication scientifique s'est opéré un transfert graduel de l'Association EuroSciences-Léman vers l'UniGe tant pour les intervenants que pour l'organisation des cafés. Petit à petit et à la demande des enseignants, les « cafés de l'UniGE » évoluent de pur café des sciences à une formule qui allie débat scientifique et promotion des filières universitaires. Actuellement, seuls les cafés dans les écoles sont encore organisés, les derniers cafés tout publics ayant été organisés lors du 450^e anniversaire de l'UniGE en 2009 et depuis remplacés par les *Grandes Conférences de l'UniGe*.

Les formes prises par les différents cafés sont variées. Elles dépendent non seulement du domaine, mais aussi des animateurs du café.

2. Comment et pourquoi des cafés mathématiques ?

Les cafés mathématiques ont commencé il y a environ trois ans suite à la demande de certains établissements scolaires d'avoir des interventions portant sur les mathématiques.

L'intérêt affiché par les enseignants qui nous interpellent pour ce type d'interventions mathématiques est souvent de confronter les élèves à des questionnements différents de ceux vus en classe de math. Ceci ranime la curiosité des élèves, alors qu'elle est souvent plus faible dans les cours de mathématiques classiques. La présence d'un ou plusieurs intervenants extérieurs et d'un médiateur permet aussi de différencier un café d'un cours classique. Ceci laisse aux élèves plus de liberté pour essayer et chercher.

Il est clair que nous voulons permettre aux élèves de mieux appréhender les mathématiques qu'ils connaissent en les confrontant à des situations qui se veulent plus proches de la vie courante. Il est frustrant de voir des élèves refuser de raisonner logiquement sous prétexte que l'on « fait des maths ».

Il est intéressant de remarquer que certains établissements réitèrent ces demandes ; preuve qu'ils y trouvent une démarche valable.

3. Comment fonctionne un café mathématique ?

Le médiateur commence en général par expliquer le mode de fonctionnement du café ; les élèves sont installés en petits groupes de quatre à six personnes autour d'une table souvent avec des boissons à disposition pour casser l'image de la classe et évoquer celle d'un café.

Nous avons dès le départ pris l'option de faire faire des mathématiques au public en les confrontant à une énigme. Il nous semble nécessaire de mettre les participants en action pour qu'ils puissent d'une part s'approprier les notions, mais surtout pour qu'ils comprennent la motivation d'un mathématicien qui veut répondre à une question. Notre but est de faire comprendre aux élèves que la curiosité est le moteur de la recherche en mathématiques, ainsi que de bien des activités humaines.

A un autre niveau, cette démarche se rapproche de la théorie des situations de Brousseau (Brousseau 1998). Celle-ci met en évidence le fait que l'apprentissage d'une notion se fait au travers d'essais et d'erreurs, permettant à l'apprenant se s'approprier cette notion. Une activité interactive, comme celle des tablettes babyloniennes, laissant une large place à la découverte personnelle, peut certainement entrer dans ce type de démarche.

La durée moyenne d'un café est d'une heure trente ; durant ce laps de temps, on aborde en général deux problèmes. Il est important d'avoir des questions de nature différente, car cela permet à des élèves ayant des intérêts différents d'avoir une accroche.

Voici quelques thèmes classiques que nous présentons lors des cafés :

- le problème des **ponts de Königsberg** (voir Figure 1) ;
- l'**existence des suites de Skolem** (en annexe, p. 1894) ;
- la **construction de la perspective** selon la méthode décrite par Dürer dans ses tableaux (voir Figure 2) avec, pour les élèves les plus âgés, la possibilité de découvrir la formule de projection centrale ;
- le problème du **Coup de ciseaux** : un polygone est dessiné sur une feuille, comment plier cette feuille pour pouvoir découper le polygone en un coup de ciseau rectiligne (voir Figure 3). Ce problème est tiré d'un article de recherche (Demaine, Demaine, & Lubiw, 1998); c'est une occasion de montrer que la recherche en mathématiques ne s'est pas arrêtée pas au Théorème de Pythagore ou au calcul intégral et qu'elle peut s'intéresser à des sujets qui paraissent loin des calculs algébriques auxquels les élèves sont habituellement confrontés et répondre à des questions parfaitement intelligibles pour chacun ;
- le déchiffrement d'une **tablette babylonienne** (voir Figure 4).

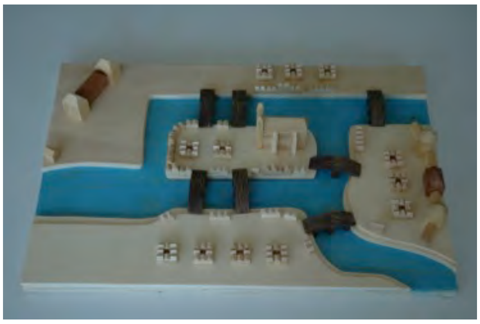


Figure 1 *— La maquette de Königsberg par Pierre-Alain Cherix*

Pour expliquer notre démarche, nous abordons plus précisément ce dernier thème.

Figure 2 *– Albrecht Dürer : Homme dessinant un luth (1525), gravure sur bois, Metropolitan Museum of Art, New York*

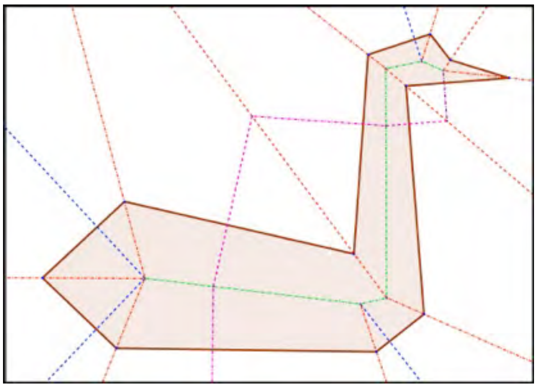


Figure 3 *– Les plis pour pouvoir découper le cygne en un seul coup de ciseau rectiligne*

II. EXEMPLE D'ACTIVITÉ : UNE MYSTÉRIEUSE TABLETTE BABYLONIENNE

Voici une activité que nous avons souvent utilisée concernant les mathématiques babyloniennes et qui a le mérite de mélanger arithmétique et algèbre. Il s'agit de faire découvrir aux élèves la signification de la tablette babylonienne présentée dans la Figure 4.

1. But

Le but est de donner un sens à la tablette qui permette d'expliquer de manière cohérente à la fois les symboles cunéiformes (représentant des nombres) et le dessin formé de diverses lignes.

Figure 4 *– La mystérieuse tablette babylonienne*
Yale Babylonian Collection YBC 7289

2. Ce que représente cette tablette

L'interprétation la plus probable de cette tablette est le calcul de la longueur de la diagonale d'un carré de côté 30 (ou ½, voir le paragraphe V.2 p. 1892). Cette interprétation permet de donner un sens cohérent à tous les symboles arithmétiques et géométriques présents sur cette tablette (voir Fowler et Robson 1998).

3. Matériel

On distribue à chaque élève des copies papier de la tablette sur laquelle les symboles ont été accentués pour aider la lecture. On distribue de plus l'image d'une deuxième tablette « d'entraînement » (voir Figure 5) qui permet aux élèves de découvrir et de se familiariser avec le système sexagésimal babylonien. Les questions et les relances sont formulées oralement ou vidéoprojetées.

Figure 5 *– La tablette « d'entraînement »*

4. Analyse des étapes du raisonnement

Les étapes du raisonnement que font les élèves ou que nous induisons par nos questions de relance sont les suivantes :

***Figure 6** – La tablette d'entraînement, détail de la ligne 5*

1. mettre en place une stratégie de recherche,
2. s'approprier la notation numérique par position en base 60 utilisée par les Babyloniens,
3. repérer un carré et sa diagonale,
4. comprendre que les nombres représentent des longueurs de segments,
5. passer des nombres entiers aux nombres à virgules dans cette base.

Analysons chacune de ces étapes.

Mettre en place une stratégie de recherche. Dans un premier temps les élèves doivent se rendre compte de la présence de deux types de signes sur la tablette, les uns ressemblant à une écriture (qu'ils doivent associer à des nombres), les autres étant des lignes représentant une forme géométrique. Ils doivent ensuite comprendre qu'il leur faut trouver une interprétation reliant ces deux types de signes.

S'approprier la notation numérique par position en base 60 utilisée par les Babyloniens. Pour que les élèves découvrent et s'approprient la notation numérique babylonienne, nous leur distribuons la photo d'une « tablette d'entraînement » (Figure 5) sur laquelle se trouvent uniquement des symboles arithmétiques, chaque ligne représentant toujours le même calcul. Ceci n'est pas dévoilé aux élèves, mais laissé à leur sagacité. Les élèves repèrent assez vite que dans chaque ligne, la somme des deux premières colonnes est égale à la troisième. Sachant cela, ils parviennent rapidement à la conclusion que le symbole ▼ représente 1 et que le chevron ‹ représente 10. Cette interprétation permet de résoudre les quatre premières lignes. C'est à la cinquième que les élèves doivent parvenir à passer d'une notation additive à une notation par position (voir Figure 6). Cette cinquième ligne déroute beaucoup les élèves. En effet, ils pensent rarement d'emblée à la notation par position. Généralement, ils parviennent à la conclusion que le symbole ▼ prend la valeur de 60 ou de 1. Lorsqu'on leur demande alors combien vaut en écriture décimale le nombre

‹ ▼ ‹ ▼▼

les élèves répondent 82 (= 70 + 12) et non 672 (= 11 60 + 12). La relance usuelle est de les laisser réfléchir sur le nombre décimal 121 (ou tout autre nombre contenant deux chiffres identiques). A la suite de cette réflexion, ils parviennent à comprendre que l'écriture babylonienne des nombres est à la fois par position et additive.

Une fois que les élèves ont compris l'écriture babylonienne, on leur demande de la pratiquer en complétant la partie manquante de la tablette. A ce moment, il est possible d'aborder le problème du zéro, puisque le résultat de la dernière ligne est 60 (noté donc ▼). Les élèves sont généralement déroutés par ce résultat dont la signification dépend du contexte et donc la question du zéro apparaît d'elle-même.

Repérer un carré et sa diagonale. Plusieurs réponses apparaissent dont voici les plus fréquentes : un carré, un losange, quatre triangles. Pour ceux qui parlent d'un quadrilatère, la question de savoir ce que sont les lignes internes (diagonales) est assez simple, même si elle doit souvent être posée par un intervenant.

Comprendre que les nombres représentent des longueurs de segments. L'idée que des nombres indiqués sur un croquis puissent être des cotes est assez naturelle. Ainsi, les élèves se rendent rapidement compte que le nombre noté ‹‹‹ positionné le long d'un côté du carré en représente la longueur ; ils pensent aussi que l'un des deux nombres noté sur la diagonale doit représenter la longueur de la diagonale. Ils sont cependant un peu déroutés par la présence du deuxième nombre.

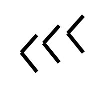
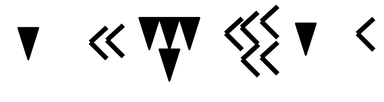
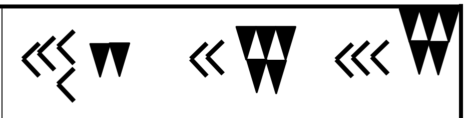
Symboles babyloniens			
Traduction en notation moderne	30	(1 ; 24 ; 51 ; 10)	(42 ; 25 ; 35)

***Tableau 1** – Les symboles inscrits sur la tablette et leur signification*

Souvent, une partie des élèves se lancent dans le calcul en base 10 des deux nombres (1 ; 24 ; 51 ;10) et (42 ; 25 ; 35) (voir Tableau 1) vus comme des entiers naturels, avec pour résultat des nombres faramineux qu'ils peinent à associer au dessin. Une relance consiste alors à interroger les élèves sur la valeur de la diagonale d'un carré relativement à son côté. Les élèves ayant rencontré le théorème de Pythagore savent en général que le rapport entre le côté d'un carré et sa diagonale vaut$\sqrt{2}$. Que ce nombre vaille environ 1,4142 n'est pas toujours connu mais est facilement obtenu par les élèves à l'aide des calculatrices. Ceci amène à la cinquième partie qui est certainement la plus difficile à appréhender pour les élèves.

Passer des nombres entiers aux nombres à virgules dans cette base. Il est peu probable que les élèves puissent imaginer seuls la notation fractionnaire pour la base 60 dans le système babylonien et ce pour deux raisons : l'une vient du fait que la notation décimale n'est pas vue aussi clairement comme notation par position dans une base donnée, mais plutôt comme un outil de représentation des nombres non entiers. Ainsi le nombre 2,35 est bien compris comme 2 + 0,35, mais n'est pas directement vu comme$2 + 3 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2}$. Ceci empêche la généralisation immédiate de cette notation « à virgule » dans d'autres bases. L'autre obstacle à la découverte des élèves de cette notation vient du système babylonien lui-même dans lequel la position de la virgule est implicite et contextuelle. Il n'y a donc pas de signe permettant de distinguer quelle est la partie entière et quelle est la partie fractionnaire.

Comme cet obstacle est rédhibitoire pour les élèves, il faut trouver une autre stratégie pour les aider à surmonter cette difficulté. L'explication mathématique et la démarche qui s'en suit sont détaillées dans l'annexe 1.

5. *En conclusion*

Cette activité est intéressante, car elle met en œuvre un objet d'une culture ancienne et cela aiguillonne la curiosité des participants. Cela replace aussi les mathématiques dans la culture humaine ce qui permet de contrer au moins en partie l'image désincarnée de la branche. De plus elle met en œuvre des sujets mathématiques distincts (géométrique et arithmétique) et force une réflexion sur les systèmes de numération par position pour une base donnée. Elle permet de mettre en action la numération par position de manière consciente. Partant d'un objet inconnu, elle force les personnes à émettre des conjectures et à en vérifier la cohérence directement, elle entre donc complètement dans une démarche d'investigation.

III. ENSEIGNER ET VULGARISER - RESSEMBLANCES ET DIFFÉRENCES

Concernant les mathématiques, dans toute médiation comme dans tout enseignement, il y a une ambition de mise en valeur d’un thème ou de certaines idées, que ce soit en permettant au public de comprendre certaines démarches et les motivations attenantes, en expliquant l’utilisation et les propriétés de certaines notions ou en décrivant les applications possibles et les avantages liés à telles ou telles avancées.

La différence principale entre ces deux démarches se trouve, à notre avis, dans l’intentionnalité des couples de protagonistes enseignant/enseigné et médiateur/public. Dans le premier cas, le but premier de l’enseignant est la passation de connaissances, dans le second, le but du médiateur est l’attrait du public. Ceci induit donc des démarches différentes.

Dans un acte d’enseignement, on choisit au préalable une notion qui doit être appréhendée et comprise par les apprenants. Pour y parvenir, on choisit ensuite des activités ou des questionnements qui permettent de faire apparaître cette notion et de la rattacher à des notions connues et maîtrisées. Cependant, ces choix sont subordonnés au premier choix, à savoir la notion à faire apprendre.

A l’opposé, dans le cas d’une médiation mathématique, le choix initial est lié à l’intérêt que l’on peut susciter dans le public. Ce choix peut dépendre de conditions extérieures ; si vous préparez une présentation dans le cadre d’une journée des sciences ayant tel ou tel thème, votre choix sera influencé par ce dernier. De plus, votre public étant hétérogène dans ses connaissances, il est beaucoup plus difficile de se baser sur des prérequis pour atteindre une notion donnée. Le choix s’effectue donc dans l’autre sens, on choisit des activités correspondant bien au thème, puis on les scénarise de telle sorte qu’elles permettent d’activer la curiosité du public en le poussant à découvrir telle ou telle démarche, phénomène ou notion.

Ainsi, des activités identiques peuvent être utilisées dans un contexte de médiation ou dans un contexte d’enseignement mais, ce qui change, c’est l’intentionnalité de la personne qui présente.

1. Les raisons qui nous poussent à mettre en place ce genre d’activité

La première raison est certainement personnelle ; il s’agit avant tout de partager la passion des mathématiques en montrant ce qui nous motive nous-mêmes, c’est-à-dire parvenir à faire comprendre que le moteur d’une interrogation mathématique est avant tout la curiosité et que c’est cette envie de comprendre qui nous amène à développer des stratégies de plus en plus complexes pour répondre à des questions variées, l’abstraction étant le prix à payer pour pouvoir appliquer ces stratégies dans des contextes différents. Or, la curiosité est liée aux choses que nous ne comprenons pas, elle est donc personnelle. Cela a pour conséquence que cette dernière n’est pas nécessairement satisfaite dans le cas d’une présentation frontale d’une situation ; cela nous pousse donc à « faire faire des maths », plutôt qu’à en montrer. C’est en essayant de réactiver la curiosité des gens pour des questions mathématiques et en leur donnant la possibilité de se confronter à une recherche personnelle que nous pouvons, nous semble-t-il, augmenter l’intérêt pour ce sujet.

Cette conviction rejoint d’ailleurs des considérations exprimées largement dans les pays industrialisés, à savoir le désintérêt des jeunes pour les études scientifiques comme le montre la citation suivante tirée d’un rapport destiné à l’Union européenne écrit par l’ancien premier ministre français Michel Rocard :

> Ces dernières années, de nombreuses études ont mis en évidence un déclin inquiétant de l'intérêt des jeunes pour les études scientifiques et mathématiques. […]…Si des mesures plus efficaces ne sont pas adoptées, la capacité d'innovation à long terme de l'Europe, ainsi que la qualité de sa recherche, sont également appelées à décliner. (Rocard, 2007).

Cette phrase montre à quel point, il est important de raviver l'intérêt des élèves pour les sciences en général et pour les mathématiques en particulier, mais aussi de l'ensemble de la population. Il est frappant de voir combien la conscience du développement et de l'impact des maths sur notre vie s'est réduite, alors que leur développement n'a jamais été aussi rapide et que leur impact sur notre vie courante est de plus en plus important, quoique de plus en plus caché.

IV. LES DIFFICULTÉS ASSOCIÉES À CE TYPE DE DÉMARCHE

Comme nous l'avons déjà dit, même si médiation et enseignement sont fortement liés, il s'agit tout de même d'activités fondamentalement différentes. Certaines difficultés peuvent surgir à trop vouloir identifier ces deux types d'activités.

1. Utilisation de l'activité par l'enseignant dans le cadre d'un cours

Plusieurs enseignants ont voulu utiliser l'activité des tablettes avec leurs classes. Dans ce cadre est apparue une difficulté liée au contrat didactique entre l'enseignant et les élèves. A plusieurs reprises, dans ces classes différentes et dans des degrés distincts aussi bien au Secondaire I (13-15 ans) qu'au Secondaire II (16-19 ans), l'activité n'a pas eu l'impact espéré, car elle était appréhendée par les élèves comme hors champ et donc ne faisant pas partie de la matière à traiter ; les élèves ne s'investissaient donc pas dans cette activité, car ils ne la percevaient pas comme faisant partie de leur travail scolaire. Pourtant, dans des classes de même niveau où nous étions allés dans le cadre des cafés, cette activité avait parfaitement fonctionné. La différence qui nous semble être prépondérante est le statut donné à l'intervenant : quand il s'agit d'un café, les élèves entrent dans la démarche puisqu'ils savent que cette activité leur est proposée en dehors du champ scolaire par des intervenants extérieurs à l'institution. Ils acceptent donc d'entrer dans cette démarche et se posent plus facilement des questions non directement liées à leur réussite scolaire.

Dans le cas où l'enseignant lui-même propose cette activité, il est plus difficile de voir quelle est sa posture et les élèves ont tendance à rester dans un cadre purement scolaire et à ne s'investir que si l'activité sera évaluée. Ce constat est un peu déprimant puisqu'il suggère une dissociation profonde – et difficilement réconciliable – entre la posture des élèves lors d'activités mathématiques faites en classe ou dans la vie courante. On observe un refus fréquent de la part des élèves d'utiliser leur réflexion naturelle dans le cadre d'une recherche scientifique. La phrase la plus marquante dans ce cas étant : « Mais ce n'est pas logique, c'est des maths ! ». Une manière possible de surmonter cette difficulté est d'intégrer plus fréquemment ce processus de recherche et de réflexion dans le cadre scolaire, ainsi l'élève ne sera pas surpris sur deux plans différents, d'un côté la démarche et de l'autre le thème, face à une activité hors champ (même si on peut se demander si la réflexion sur cette tablette n'est justement pas complètement dans le champ scolaire). S'ils sont habitués à rechercher, ils entreront peut-être plus facilement dans cette démarche face à des problèmes vus comme extérieurs à l'école.

2. *Les maths, ce n'est pas que du jeu*

Le deuxième piège que nous voulons mettre en évidence est le suivant. Dans une médiation, l'accent est fortement mis sur l'intérêt, voire l'attrait ludique du problème. Il faut néanmoins faire attention de ne pas donner l'impression que « faire des mathématiques » ne consiste qu'à s'amuser. Il est nécessaire de faire comprendre que la curiosité est, certes, le moteur de la démarche mathématique, mais qu'elle implique aussi un sérieux et un investissement important et qu'elle est souvent aussi motivée par des questions ayant des conséquences ou des applications pratiques, contrairement à ce que pourraient laisser penser certaines activités de médiation trop basées sur le jeu. Il est néanmoins indispensable pour éviter ce désamour croissant des maths par la population de faire percevoir au public qu'il est possible de se faire plaisir en faisant des mathématiques. C'est pour cette raison que nous croyons à la médiation mathématique et que nous continuons à nous y investir.

V. CONCLUSION

En conclusion, il nous semble que ces cafés répondent à une demande. Nous n'avons pas le recul nécessaire, ni d'ailleurs les effectifs suffisants, pour en déduire des résultats statistiques sur l'impact de ces cafés sur la vision, voire le choix d'orientation, des élèves touchés. Par contre, l'expérience quelque peu similaire menée à plus grande échelle par la section de physique de l'UniGe dans le cadre du PhysiScope[3], montre que ce type de démarche a certainement un impact sur le choix des jeunes. Même s'il est difficile de montrer une quelconque causalité, le nombre d'inscriptions pour des études de physique est en nette augmentation ces dernières années alors qu'ils étaient plutôt stables auparavant ; cette augmentation commence justement peu après le début de l'expérience PhysiScope.

REFERENCES

Brousseau G. (1998) *Théorie des situations didactiques.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Demaine E. D., Demaine M. L., Lubiw A. (1998). Folding and Cutting Paper. *Revised Papers from the Japan Conference on Discrete and Computational Geometry (JCDCG'98) 1763*, 104-117.

Fowler D., Robson E. (1998) Square Root Approximations in Old Babylonian Mathematics : YBC 7289 in Context. *Historia Mathematica 25*, 366-78.

Rocard M. (2007) *L'enseignement scientifique aujourd'hui : une pédagogie renouvelée pour l'avenir de l'Europe.* Luxembourg : Office des publications officielles des Communautés européennes.

[3] Le PhysiScope (www.physiscope.ch) est un projet de sensibilisation lancé par le Pôle de recherche du Fonds national suisse de la recherche MaNEP (Materials with Novel Electronic Properties). Il a été développé en collaboration avec la Section de physique de l'Université de Genève. Le PhysiScope est une sorte de laboratoire de démonstration, où la physique est présentée de manière vivante via des expériences et des discussions qui illustrent ses lois fondamentales. Elles permettent ainsi aux visiteurs de comprendre certains des plus grands enjeux de la recherche actuelle : la supraconductivité, le grand collisionneur de particules du CERN (LHC), les énergies renouvelables, les nanotechnologies, la découverte de nouvelles planètes, etc.

ANNEXES

1. Une stratégie pour aider les élèves à appréhender de la notation « à virgule » babylonienne

Revenons sur les nombres reportés dans le Tableau 1 (voir p. 1888) avec leur traduction en notation décimale. Comme nous l'avons dit plus haut, la position du 30 laisse supposer que le carré à un côté égal à 30. Reste à analyser les deux autres nombres qui, par leur position, semblent être liées à la diagonale.

La diagonale d'un carré de côté 30 vaut environ 42,426406 ; la partie entière est 42 qui s'écrit aussi 42 en base soixante. On voit donc apparaître le premier terme de la deuxième suite. Cela pourrait indiquer que (25 ;35) représente la partie fractionnaire du nombre calculons donc

$$25 \cdot 60^{-1} + 35 \cdot 60^{-2} = 0.4263\overline{8}.$$

Si on suppose que la virgule contextuelle des babyloniens est positionnée entre le 42 et le 35, on trouve que le nombre décrit par (42 ; 25 ; 35) est égal à$0.4263\overline{8}$, ce qui est une très bonne approximation de$30\sqrt{2}$.

Reste à interpréter la suite (1 ; 24 ; 51 ; 10) ; sa position laisse aussi penser que ce nombre a un lien avec la diagonale. La difficulté réside à nouveau dans le fait que la virgule, si elle existe, n'est pas explicitement indiquée. Comme le premier nombre est 1, il devrait exister un lien avec$\sqrt{2}$. Supposons que la virgule se positionne entre le 1 et le 24 et calculons

$$1 + 24 \cdot 60^{-1} + 51 \cdot 60^{-2} + 10 \cdot 60^{-3} \cong 1.41421296296$$

qui est une très bonne approximation de $\sqrt{2}$ en base 60.

Ces réflexions permettent de donner une interprétation plausible de cette tablette. Elle contiendrait le calcul de la longueur de la diagonale d'un carré de côté 30 connaissant celle d'un carré de côté 1. Bien sûr, rien ne permet d'être absolument certain que cette interprétation soit la bonne, mais elle est plausible puisqu'elle permet de donner un sens cohérent à tous les symboles de la tablette. Si c'est le cas, il s'agit d'une connaissance d'un résultat ressemblant au théorème de Pythagore, … 1500 ans avant Pythagore ; ceci peut amener à une réflexion sur le choix du nom de théorème de Pythagore avec une mise en évidence de la notion de démonstration dans le cas des résultats mathématiques.

2. Une explication possible du choix de ‹‹‹ comme côté du carré

Un autre lien entre ces trois nombres a été découvert par un groupe d'élèves lors d'un de nos cafés. A postériori, nous avons trouvé ce même lien, ainsi qu'une tentative d'explication, décrit, dans (Fowler & Robson, 1998).

Ces élèves ont remarqué que si on prend la moitié de (1 ; 24 ; 51 ; 10), vu comme $1 + 24/60 + 51/60^2 + 10/60^3$, on trouve 0,707106481, ce qui est exactement $42/60 + 25/60^2 + 35/60^3$. Ainsi, si on interprète (42 ; 25 ; 35) comme nous venons de le faire, on obtient non seulement un nombre et sa moitié, mais aussi un nombre et son inverse multiplicatif puisque le nombre initial est $\sqrt[2]{2}$. Or, il semble que la recherche de nombres inverses l'un de l'autres était utile et pratiquée par les babyloniens. Donc, si on interprète le nombre babylonien ‹‹‹ non pas comme 30 mais comme $30/60$, les nombres indiqués sur la tablette se lisent alors comme 0,5 , $\sqrt[2]{2}$ et $\frac{\sqrt[2]{2}}{2}$ et ces derniers sont inverses l'un de l'autre. Ceci donne une interprétation plausible de la valeur ‹‹‹.

Faisons une dernière remarque concernant cette tablette : sa forme et la taille des caractères suggèrent qu'il s'agit d'un travail d'étudiant. En effet, les symboles cunéiformes sont plus gros et moins réguliers que sur des tablettes attribuées à des scribes confirmés. Ceci tendrait à prouver que cette tablette est bien l'œuvre d'un étudiant résolvant un exercice. Mais quel pourrait être cet exercice ? Dans (Fowler & Robson, 1998) les auteurs suggèrent qu'il ne s'agit pas d'une tentative de calcul de $\sqrt[2]{2}$, mais plutôt, partant d'une valeur tabulée de $\sqrt[2]{2}$ (on a retrouvé des tablettes de nombres utiles) de calculer son inverse multiplicatif.

3. Pour aller plus loin

Le problème de la tablette babylonienne amène naturellement à se demander comment calculer $\sqrt{2}$ dans une base donnée (en particulier en base 60) si on connaît son développement décimal (ou du moins le début de ce dernier). On procède de la manière suivante :

$$\sqrt{2} = 1.414213562373095\ldots = \mathrm{p} + \frac{\mathrm{a}}{60} + \frac{\mathrm{b}}{60^2} + \frac{\mathrm{c}}{60^3} + \ldots$$

La partie entière étant 1, elle s'écrit aussi 1 en base 60 ainsi p=1.

On soustrait cette partie entière de chaque côté et on obtient :

$$0.414213562373095\ldots = \frac{\mathrm{a}}{60} + \frac{\mathrm{b}}{60^2} + \frac{\mathrm{c}}{60^3} + \ldots$$

En multipliant par 60 les deux côtés de l'équation on obtient :

$$24{,}8528137423857\ldots = \mathrm{a} + \frac{\mathrm{b}}{60} + \frac{\mathrm{c}}{60^2} + \cdots$$

Ainsi a=24, en continuant le processus on obtient b=51 et c =10.

Cette démarche n'est presque jamais abordée dans le cadre des Cafés mais peut être utile dans un cours.

4. *Exemple d'activité : l'existence des suites de Skolem*

Temps de surveillance

La ville de Königsberg veut organiser une manifestation culturelle qui dure huit jours.

Elle s'adresse alors à la société de surveillance XXX qui lui envoie ses quatre meilleurs surveillants : **Umberto, Denis, Tristan et Quentin**.

Leur mission sera d'assurer chacun leur tour pendant deux jours la sécurité des visiteurs.

Lors de la signature du contrat, Umberto, Denis, Tristan et Quentin posent cependant leurs conditions :

- Umberto veut avoir ses **deux jours de travail consécutifs** ;
- Denis veut **un jour de repos** entre ses deux jours de travail ;
- Tristan veut **deux jours de repos**,
- Quentin veut **trois jours de repos**.

Consciente qu'elle a devant elle les quatre meilleurs surveillants de la ville, l'organisatrice de la manifestation accepte leurs conditions et promet de leur donner leur horaire le lundi suivant.

Pouvez-vous l'aider ?

L'organisatrice de la manifestation, un peu désespérée, appelle un de ses amis mathématiciens :

« Nous allons modéliser le problème, ainsi tu pourras par la suite le résoudre pour un nombre quelconque de surveillants !

Numérotons tout d'abord les jours de surveillance de 1 à 8.

Numérotons aussi les surveillants de la manière suivante :

Umberto : 1
Denis : 2
Tristan : 3
Quentin : 4

Notons a_i et b_i les deux jours où le i-ème surveillant est en faction.

Par exemple, si Tristan surveille le 4ème jour et le 7ème jour, alors a_i=4 et b_i=7.

Les quatre conditions demandées par les surveillants s'écrivent alors

$$b_i - a_i = i \quad \text{pour i allant de 1 à 4}$$

Dans l'exemple de Tristan : b_i-a_i= 7 - 4=3 !

Donc, pour que tous les jours soient surveillés, il faut que dans la suite a_1, b_1, … , a_4 , b_4 tous les nombre de 1 à 8 se retrouvent une et une seule fois. Si on écrit les choses ainsi, on pourra satisfaire les requêtes d'un nombre n quelconque de surveillants engagés pendant 2n jours, et même déterminer si c'est possible ou non pour tout n ! »

**Comme l'organisatrice, essayez, à l'aide de la table, de satisfaire les requêtes de n surveillants pour n=1, n=2, n=3, n=4,…
Est-ce possible pour tout n ?**

MATHS ET MALICE, UN PROJET POUR FAIRE DÉCOUVRIR LES MATHÉMATIQUES SUR LE TEMPS DU LOISIR

Karine GODOT*

Résumé – Notre contribution cherche à présenter l'animation scientifique, un vecteur de diffusion de la culture scientifique sur le temps du loisir, ses acteurs, principes et actions. Nous étudierons plus particulièrement les actions proposées autour des mathématiques. Enfin, nous présenterons le projet Maths et malice développé en partenariat entre une association d'éducation populaire grenobloise, Sciences et malice, et l'ERTé Maths à modeler et visant à offrir une approche des mathématiques sur le temps du loisir, ludique, interactive, porteuse de sens, où le public, en particulier les 8-12 ans, est amené à rentrer dans une démarche de recherche tout en portant un regard épistémologique sur cette discipline.

Mots-clefs : vulgarisation, situation de recherche, activité mathématique, didactique des mathématiques, animation scientifique

Abstract – Our purpose is to present the components of scientific animation, its different actors, their characteristics, their approaches, their tools… in particular of the animations which are proposed about mathematics. Then, we present the project named « Maths et malice » organised by the association « Sciences et Malice » and the ERTé Maths à modeler, which propose to young children (from 8 to 12 years old) to meet mathematics outside of the school, by games, research situations and help them to find sense into this science.

Keywords: vulgarisation, research situation, mathematics activities, didactic, scientific animation

I. INTRODUCTION

Le projet Maths et Malice est né d'un partenariat entre l'ERTé Maths à modeler[1] et l'association Sciences et malice[2], une association d'éducation populaire grenobloise qui encadre depuis près de dix ans des ateliers d'animation scientifique principalement sur le temps du loisir (centre de loisirs, MJC[3]…), au sein de laquelle j'interviens depuis plusieurs années. En mélant démarche expérimentale, bricolage et arts plastiques, cette structure propose aux enfants de 4 à 12 ans de découvrir les sciences et leurs applications.

L'ERTé Maths à modeler est une équipe de recherche pluridisciplinaire constituée de chercheurs en mathématiques et de didacticiens qui étudient depuis plusieurs années des « Situations Recherche » amenant l'élève, du primaire à l'université[4], ou le grand public, principalement lors d'événements tels que la Fête de la Science, à devenir apprenti chercheur en mathématiques, à entrer dans une démarche de recherche en mathématiques, c'est-à-dire essayer, observer, élaborer des stratégies de recherche, conjecturer, fournir des contre-exemples, prouver…

En 2005, suite à ma thèse « Situations recherche et jeux mathématiques pour la formation et la vulgarisation » (Godot 2005), l'idée d'une collaboration entre ces deux structures est née afin de pouvoir étendre le champ d'application des situations développées au sein de Maths à modeler à celui de l'animation scientifique. Ainsi, des ateliers autour des mathématiques ont été mis en place dans un cadre extrascolaire, en particulier lors de stages pendant les

* Association Sciences et malice/ERTé Maths à modeler – France – karine.godot@sciencesetmalice.com

1 http://mathsamodeler.ujf-grenoble.fr

2 http://sciencesetmalice.com

3 Maisons des Jeunes et de la Culture

4 parmi les nombreuses publications de l'équipe, le lecteur aura un aperçu de ses différents axes de recherche dans le cadre scolaire à travers la lecture de (Gandit et al. 2011).

© Godot K (2012) Maths et Malice, un projet pour faire découvrir les mathématiques sur le temps du loisir. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (SPE4, pp. 1895–1904). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

vacances, sur le temps de cantine ou après l'école. Cela a aussi débouché sur l'organisation de formations en partenariat avec la Direction Départementale de la Cohésion Sociale (DDCS)[5] de l'Isère destinées aux animateurs des structures d'accueil de loisir et visant à leur permettre d'encadrer auprès des enfants des activités autour des mathématiques. Une exposition « Les mathématiques, c'est magique » a également été élaborée pour la Fête de la Science 2007 à l'occasion de laquelle les visiteurs étaient amenés à chercher en mathématiques au cours de plusieurs ateliers, dont certains étaient des « Situations Recherche » développées par Maths à modeler.

Dans le cadre de cette communication, nous nous proposons tout d'abord de dresser un rapide portrait de l'animation scientifique, vecteur de médiation de la culture scientifique vers lequel nous avons centré nos recherches depuis 2005, et de ses caractéristiques, en particulier au niveau du contrat didactique. Dans un deuxième temps, nous présenterons les résultats de notre thèse relatifs à l'image des mathématiques que peut avoir le grand public et à celle présente dans l'institution scolaire ainsi qu'à l'étude de la spécificité des mathématiques par rapport aux autres sciences vulgarisées par l'animation scientifique et les autres acteurs de la communication scientifique. Enfin, nous expliciterons en quoi le projet Maths et Malice cherche à proposer une approche des mathématiques sur le temps du loisir tenant compte des caractéristiques de l'animation scientifique et visant à montrer comment se construisent les mathématiques, notamment par des situations amenant les participants à chercher.

II. QU'EST-CE QUE L'ANIMATION SCIENTIFIQUE ?

1. Petit historique et grands principes

Nous regroupons sous les termes **« animation scientifique »,** une forme de vulgarisation des sciences mise en oeuvre dans le cadre d'activités socioculturelles. Elle trouve ses origines dans la mouvance « éducation populaire », née au XIX^{e} siècle à travers la volonté d'une démocratisation du savoir (Godot 1999). Parallèlement au développement de l'école primaire destinée à former les jeunes esprits à la société industrielle naissante, ce mouvement se mit en place à travers diverses actions afin d'aider les travailleurs manuels à conquérir le savoir. Le succès de ces initiatives peut être attribué à deux facteurs.

Tout d'abord, l'histoire de l'éducation populaire va de pair avec l'histoire de la conquête des loisirs par la mise en place des congés payés en 1936. Les Français eurent alors plus de temps à consacrer à des formations complémentaires extérieures à leur travail. La Libération, les mouvements de lutte pour la personne humaine nés dans la Résistance, l'esprit corporatif, donnent, par ailleurs, à l'éducation populaire des structures et la possibilité d'exister officiellement dans la France en reconstruction. Dès lors, de nombreuses associations vont voir le jour à l'initiative de bénévoles.

Parmi les nombreuses structures nées de ce mouvement, certaines d'entre elles centrèrent leurs actions sur des activités liées au développement des jeunes. Elles organisèrent alors des colonies de vacances et participèrent par la suite à l'aménagement du temps périscolaire.

2. Qui ?

Il est difficile de dresser une liste exhaustive de l'ensemble des acteurs de l'animation scientifique tant les initiatives locales sont nombreuses. Parmi les acteurs de l'animation socioculturelle, certains furent particulièrement sensibles à l'importance du développement

[5] Ex-Direction Départementale de la Jeunesse et des Sports.

d'une culture scientifique chez les enfants et complétèrent leurs actions par des activités liées aux sciences. Citons notamment les C.E.M.E.A[6] (créés en 1938), les Francas (1944), ou les MJC (1948). Pour certaines, la popularisation des sciences est l'objectif principal de l'association, comme pour Planète Sciences (ex-ANSTJ, créée en 1962), les Petits Débrouillards (1986), MATHs. en JEANS (1989), Graines de chimistes (1990), Ebullisciences (1995), Sciences et malice (2000), les Atomes Crochus (2002)… Loin d'être en compétition, mais bien souvent travaillant en partenariat, chacune d'entre elles propose aux enfants une approche des sciences qui lui est propre.

L'animation scientifique est également présente sous forme d'ateliers d'accompagnement aux expositions au sein du réseau des CCSTI[7] (créés en 1979) ainsi que dans les musées scientifiques.

3. Comment ?

Il s'agit de mettre en place sur **le temps du loisir** un rapport particulier avec les jeunes de 3 à 18 ans en vue de leur transmettre des connaissances scientifiques, avec une volonté de laïcité, de solidarité, de développement de la citoyenneté ainsi que d'**éducation** et du **plaisir d'apprendre**. L'animateur n'a pas un statut de détenteur de savoirs mais est considéré comme un guide. **Le public est actif,** l'animateur favorise les échanges entre les participants, est à l'écoute de chacun, leur laisse une grande part d'initiative et cherche à développer leur créativité, leur curiosité, leur esprit critique, leur personnalité, leur rapport au monde, en s'appuyant souvent sur le jeu.

Les rencontres peuvent se faire sous forme d'ateliers ponctuels, réguliers, de clubs, de stages pendant les vacances, d'ateliers flash lors d'événements « grand public » (Fête de la science), avoir lieu sur le temps du loisir (mercredi, vacances), le temps périscolaire, à l'école mais aussi dans divers lieux publics (bibliothèques, rue…)

De par ces caractéristiques, il nous est apparu que le contrat didactique inhérent à de telles activités peut être ainsi supposé (Godot 2005, chap II.3, p. 319-320) :

- ce qui est proposé est porteur de connaissances susceptibles d'intéresser les participants,
- l'animateur est là pour expliquer ce qu'il faut faire, vérifier que cela est bien compris, apporter son aide, guider dans la découverte et veiller à la sécurité
- le public est actif, il touche, il fabrique, il manipule...

Alors que ces trois premières composantes peuvent être mises en parallèle avec les pratiques de la classe de mathématiques, d'autres s'en démarquent, voire s'y opposent, complètement :

- les activités proposées doivent procurer du plaisir ;
- le public est libre de faire ou de ne pas faire ;
- il est invité à apprendre des choses mais ce qu'il apprend ne sera pas évalué ;
- on peut consacrer le temps que l'on souhaite aux activités proposées.

Ce contrat didactique où **le plaisir et le libre choix ont une place importante**, est donc éloigné de celui habituellement établi dans l'institution scolaire bien qu'ils aient des points en commun. A contrario, du fait de ses caractéristiques, il comporte de nombreuses similarités

[6] Centres d'Entraînement Aux Méthodes d'Éducation Actives.
[7] Centres de Culture Scientifique , Technique et Industrielle.

avec le contrat didactique associé aux situations recherche en classe développées par Maths à modeler (Grenier et Payan 2002).

Cependant, un tel contrat didactique implique que les situations de vulgarisation soient suffisamment attirantes et que

> l'animateur maintienne une interaction ludique et de plaisir tout au long de l'activité

par le biais de différents ressorts (Pelay 2011), afin d'une part que le public ait envie d'y participer et d'autre part pour qu'il ait envie d'y rester, d'y consacrer de son temps.

4. La démarche expérimentale comme vecteur de médiation

Parmi toutes les démarches mises en place par les différents acteurs de l'animation scientifique, nous nous attacherons à présenter plus particulièrement les actions dites « expérimentalisées » où il est

> proposé aux participants d'expérimenter les sciences et les techniques à travers des manipulations, des productions d'objets techniques, (Sousa do Nascimento et al. 2002, p. 41)

dans l'intention de les sensibiliser à la démarche expérimentale. Nous avons identifié trois types d'approches, classés par degré croissant d'initiative laissée au public :

- des animations-démonstrations : l'animateur montre des expériences au public, le fait interagir, par exemple sur un stand lors de la Fête de la Science.
- des protocoles à suivre : par exemple les animations proposées par Graine de chimistes. En plus de connaissances scientifiques, il s'agit de permettre aux enfants l'acquisition d'habileté gestuelle, sous la direction de l'animateur.
- des ateliers où les participants pratiquent la démarche expérimentale, ce sont eux qui formulent les hypothèses, qui déterminent les protocoles expérimentaux, en collaboration avec l'animateur, comme dans les ateliers Petits débrouillards ou à Sciences et Malice. Comme R-E Eastes, nous pensons que

> ce sont ces activités qui auront l'impact éducatif le plus fort et seront à l'origine des plus grandes motivations, étant celles qui permettent au participant de s'impliquer le plus largement. (Eastes 2004, p. 32)

5. L'animateur scientifique et comment le devenir

L'animateur scientifique, indispensable à toute animation scientifique au sens où nous l'entendons, est d'origines diverses. Ce peut être un animateur curieux de sciences, un étudiant ou un chercheur en sciences désireux de transmettre sa passion, ou un « monsieur tout le monde » qui trouve là un moyen d'accroître sa culture scientifique et celle de ses concitoyens.

L'animation scientifique bénéficie de très peu d'offres de formations professionnelles. La majorité est proposée dans le cadre de la formation au Brevet d'Aptitude aux Fonctions d'Animateur (BAFA) et est principalement orientée vers l'éducation à l'environnement. Certaines DDCS organisent des formations continues pour les animateurs socioculturels mais à ce jour, il n'est pas prévu de brevet professionnel « animation scientifique ». Une spécialisation est proposée lors de la formation au Brevet d'État d'Animateur Technicien de l'Éducation Populaire (BPJEPS) option « loisirs pour tous ». Cependant moins de cinq organismes de formation dispensent ce certificat pour toute la France. La principale offre de formation s'avère donc être les formations internes aux associations spécialisées.

III. MATHEMATIQUES ET VULGARISATION

1. Animation scientifique : un manque d'outils adaptés

Dans le cadre de notre thèse, nous avons étudié les différents acteurs (presse écrite, édition, radio, musées, internet, association…) et supports de communication prenant part à la vulgarisation des mathématiques (Godot, chapitre II.1). Il apparaît que les mathématiques sont quasi absentes des activités proposées par les principales associations d'éducation populaire[8], alors qu'elles sont toutes actives dans la diffusion de la culture scientifique, que ce soit en physique, chimie, mécanique, astronomie, biologie, entomologie...

Selon notre étude, la raison principale avancée réside dans la difficulté de la mise en place d'activités autour des mathématiques. Ces associations ne parviennent pas à reproduire ce qu'elles font dans le cas des autres sciences, car, selon elles, le caractère abstrait des mathématiques est un obstacle à des mises en situation concrète. Elles ne voient donc pas comment les faire aborder via une approche ludique, interactive et matérielle, où le public est amené à expérimenter, dans le sens de faire des essais, observer, conjecturer, valider ou réfuter...

Nous avons donc cherché à établir plus en détail l'image des mathématiques que pouvaient avoir les animateurs. Nous faisons l'hypothèse qu'à leurs yeux, comme pour tout un chacun, les mathématiques ne sont pas perçues comme une science où le public peut manipuler, être actif, entrer dans une démarche de recherche mais sont, comme nous l'avons montré (Godot, chap II.2), bien souvent réduites au calcul, à l'apprentissage de savoirs notionnels et de savoirs faire, comme cela a lieu habituellement à l'école au regard de notre analyse des programmes scolaires ainsi que de manuels utilisés à l'école primaire (Godot, chap I.1).

2. Quelles autres formes de vulgarisation des mathématiques ?

Nos recherches ont montré qu'hormis sur internet, dans quelques revues spécialisées et dans les grands musées scientifiques parisiens, là encore, les mathématiques sont beaucoup moins médiatisées que les autres sciences. La populaire émission « C'est pas sorcier !» par exemple ne parle que très rarement de mathématiques.

Parmi les actions que nous avons étudiées, notamment les expositions permanentes de la Cité des Sciences et du Palais de la découverte, les expositions itinérantes élaborées par le CCSTI Centre Science, les revues Tangente et Cosinus, plusieurs approches peuvent être distinguées :

- **S'appuyer sur l'histoire des mathématiques** et de leurs découvertes : portraits de mathématiciens plus ou moins romancés, histoire des découvertes (la numération, le zéro…).
- **Montrer où sont les mathématiques,** leur place, leur contribution dans la vie quotidienne, par exemple, les mathématiques dans la nature.
- **Faire du spectaculaire** : cela est bien moins facile que dans d'autres domaines scientifiques ! Il s'agit donc généralement d'une présentation de leur « bestiaire » accompagnée le plus souvent d'une action du public (table de Galton, surfaces minimales et bulles de savon, fractales...)

[8] regroupées au sein du CIRASTI (Collectif Inter associatif pour la Réalisation d'Activités Scientifiques et Techniques Internationales) : Afa (astronomie), Céméa, CMJCF, CRILJ, EEDF, FN Léo Lagrange, FFMJC, La ligue de l'enseignement, Les Francas, Les Petits débrouillards, Planète science, PIE (insectes).

- **Expliquer ce que sont les mathématiques** en abordant par exemple des notions transversales aux mathématiques comme la modélisation, la démonstration, ou à travers le témoignage, la rencontre de mathématiciens. On peut noter que cette approche est plutôt rare.
- **Inciter les gens à faire des maths**, à les fabriquer : quelques initiatives isolées proposent des jeux mathématiques mais les problèmes sont le plus souvent fermés et comportent tous une solution. De plus, le modèle mathématique n'étant pas toujours accessible, le hasard a donc le plus souvent une large place dans la recherche.

Les thèmes abordés par le biais de ces différentes approches sont bien souvent les mêmes de l'une à l'autre et sont proches de ceux développés au collège ou au lycée, agrémentés d'un ton plus ludique et de quelques curiosités.

Ainsi, la majorité des acteurs de la communication scientifique, y compris l'animation, ne propose pas de rencontrer les mathématiques en dehors de l'école et s'ils le font, le public est très rarement amené à chercher. Cependant, il nous semble important que cette discipline ne soit pas abordée seulement dans l'institution scolaire. En effet, il apparaît que cette dernière induit une image des mathématiques bien souvent réduite au calcul où le raisonnement, la démarche de recherche sont très rarement mis en avant, ce qui débouche comme le soulignent les auteurs d'ERMEL sur

> une conception des mathématiques comme détachées, la plupart du temps, des questions qui ont été à l'origine de leur production et réduites aux théories telles qu'elles sont exposées. L'activité du mathématicien est en partie masquée.(...) Toute théorie mathématique aboutit comme un cristal sans défaut dans des traités et des manuels. (ERMEL 2004, p. 39)

Si aucune autre occasion d'appréhender les mathématiques sous un autre regard n'est proposée, elles n'auront que peu de sens et seront souvent mal perçues, voire « traumatisantes » si l'on se réfère à certaines réactions lorsque est prononcé le mot « mathématiques ».

Il nous est donc apparu important de développer des outils permettant de montrer ce que sont les mathématiques, comment elles se construisent, et cela en particulier dans le cadre de l'animation scientifique, afin de sensibiliser le plus grand nombre.

IV. LE PROJET MATHS ET MALICE

Le projet Maths et malice s'insère depuis 2005 dans le catalogue des actions de l'association Sciences et malice. Il s'agit de proposer des activités autour des mathématiques sur le temps extrascolaire dans des structures d'accueil de loisirs, en parallèle des ateliers autour des autres disciplines scientifiques abordées par l'association (physique, chimie, astronomie, entomologie, géologie, etc). Nous cherchons à travers le choix des activités proposées, avant tout, à détacher les mathématiques du calcul et mettre en valeur le raisonnement, la démarche de recherche comme critères significatifs d'une activité mathématique et à contribuer, ainsi, à leur donner plus de sens. Etant à l'intiative de ce projet, j'encadre la majorité des ateliers, le reste est encadré par des animateurs qui ont été formés dans le cadre de formations Maths et malice.

1. Des ateliers

Ce projet s'articule sur plusieurs séances de 1h à 1h30 destinées à des enfants de 8 ans ou plus. Il peut avoir lieu par exemple sur le temps de cantine, lors des temps d'animation mis en place après le repas, ou après l'école dans le cadre des activités proposées par la MJC d'un quartier en partenariat avec l'école primaire (notamment via le dispositif Projet Éducatif Local) ou encore pendant les vacances scolaires lors d'un stage organisé en séances quotidiennes. À l'heure actuelle, la majorité des actions ont été menées au sein de quartiers dits sensibles.

À travers une dizaine d'heures d'intervention, il s'agit de proposer aux enfants de découvrir les mathématiques de la même manière qu'ils sont amenés à découvrir les autres sciences lors des ateliers mis en place par l'association Sciences et malice. Il est donc important qu'ils observent, manipulent, réfléchissent, imaginent, conjecturent, débattent, mais aussi jouent et bricolent.

Les premières séances cherchent à faire prendre conscience du caractère fondamental de la preuve en mathématiques à travers l'observation et la fabrication de plusieurs illusions d'optique et ainsi à remonter le temps pour comprendre pourquoi nos ancêtres en sont venus à prouver après avoir observé et à poser ainsi, les bases de toute activité mathématique.

Ensuite, nous cherchons à identifier ce qui dans notre environnement proche et dans la nature les a amenés à définir certains objets remarquables notamment en géométrie (architecture, végétaux, cristaux..) puis à en décrire les caractéristiques avant d'en construire des modèles.

Par le biais de plusieurs activités ludiques, dont certaines sont des Situations recherche du projet Maths à modeler[9], les enfants sont ensuite conduits à mettre en place un raisonnement mathématique afin de percer les secrets d'un tour de cartes, d'une énigme ou de relever un défi. Dans les choix des situations, nous nous attachons à en proposer qui comportent des cas impossibles afin qu'ils soient amenés à devoir trancher entre « est-ce difficile ou est ce impossible ? » et donc à la nécessité de prouver.

Enfin, l'accent est mis sur des domaines de recherche contemporains (mathématiques discrètes, fractales, topologie...) afin de leur montrer que les mathématiques sont une aventure humaine en perpétuelle évolution.

2. Des formations

En parallèle des activités proposées au jeune public, des formations d'une journée sont organisées à destination des animateurs des structures d'accueil de loisirs dans le cadre d'un cycle de formations continues mis en place par la DDCS de l'Isère et les acteurs de l'animation scientifique de l'agglomération grenobloise. Parmi des journées autour de l'astronomie, l'entomologie, la géologie, l'optique, l'éducation à l'environnement, les curieux de sciences et de nouvelles pratiques ont la possibilité de suivre une formation Maths et Malice.

Les participants sont pour la plupart des animateurs, permanents ou vacataires, ou des bénévoles intervenant dans le cadre des activités d'aide aux devoirs mises en place dans les MJC et autres structures d'animation socioculturelle.

Tout en faisant découvrir des outils d'animation, ces formations visent à faire évoluer l'image des mathématiques des animateurs, proche de celle présente dans l'institution scolaire au regard de nos observations, en les amenant à se questionner sur la discipline, en leur montrant en quoi elles peuvent être une science qui se construit au fil du temps, à partir d'un raisonnement logique.

[9] Voir exemples en annexe.

Il s'agit par ailleurs de les inciter à réfléchir sur l'importance de proposer dans le cadre du loisir une approche différente de celle présente à l'école (et donc de celle qu'ils ont rencontrée dans leur passé d'élève) afin de contribuer à aider certains enfants à se réconcilier avec cette discipline en lui donnant plus de sens.

L'objectif, enfin, est de les sensibiliser à ce que peut être la recherche en mathématiques, notamment à partir des mathématiques discrètes et de les inviter ainsi à mettre en place dans leurs structures des ateliers de recherche Maths à modeler, en leur montrant les apports de telles activités et quel peut être le rôle de l'animateur dans leur gestion. Nous leur présentons aussi le dispositif d'accompagnement :un chercheur vient régulièrement rencontrer le groupe d'apprentis chercheurs et la recherche peut être finalisée par un séminaire junior où sont conviés des chercheurs de l'équipe Maths à modeler, comme cela a lieu dans le cadre scolaire (Pastori 2011).

3. Quel impact ?

Cela fait maintenant plusieurs années que ce projet se développe. Plusieurs formations ont été proposées, de nombreux ateliers ont été mis en place, dans différents cadres. A la vue de nos observations et du retour du public, enfants ou adultes, les actions Maths et malice participent à un changement de regard sur les mathématiques, en montrant au public comment elles se construisent, par qui et pourquoi et en lui donnant l'occasion de les appréhender par le faire, de s'y sentir acteur. Plusieurs participants nous ont dit avoir eu ensuite une autre image des mathématiques, avoir mieux compris en quoi elles n'étaient pas juste une discipline scolaire mais une aventure humaine, un outil né pour comprendre le monde et réduire le doute. Une grande partie des animateurs a réinvesti les outils présentés lors des activités qu'ils encadrent, en particulier l'aide aux devoirs, plusieurs nous ont dit souhaiter mettre en place un groupe de recherche dans leurs structures mais à l'heure actuelle, cela n'a pu se concrétiser faute de temps et de moyens humains pour les accompagner.

V. CONCLUSION

Au cours de nos recherches, il nous est apparu que l'animation scientifique est peu étudiée et donc peu connue (Godot 2008), l'animation scientifique autour des mathématiques qui plus est. Or, il se développe au sein de ce vecteur de la diffusion de la culture scientifique des actions complémentaires à l'enseignement. Ainsi, dispositifs d'accompagnement à la scolarité mis en place dans les structures de loisirs, stages « sciences » organisés pendant les vacances ou après l'école, ateliers en parallèle d'expositions, proposés au sein des CCSTI ou organisés pendant la Fête de la science, où sont accueillis de nombreux scolaires, peuvent aider à combler certains manques et contribuer à donner une image positive de la science, notamment auprès d'un public en échec à l'école.

L'étude de ce cadre de médiation peut donc permettre de développer des supports destinés à l'enseignement, attachés, comme dans le cas du projet Maths et malice, à proposer une approche interactive, ludique et porteuse de sens, conduisant à porter un regard épistémologique sur la science, et plus particulièrement sur les mathématiques, et ainsi participer à donner plus de sens à leur apprentissage.

REFERENCES

Cartier L. (2008) *Le graphe comme outil pour enseigner la preuve et la modélisation*. Thèse de l'université Joseph Fourier, Grenoble.

Eastes R.-E. (2004) Contribuer au partage de la culture scientifique. *L'Actualité chimique* 280-281, 29-35.

ERMEL (2004) *Vrai !? Faux!?...On en débat !! De l'argumentation vers la preuve en mathématiques au cycle 3*. Lyon :INRP.

Gandit M., Giroud N., Godot K. (2011) Les situations de recherche en classe : un modèle de situations pour travailler la demarche scientifique en mathématiques. In *Les démarches d'investigation dans l'enseignement scientifique, actes 1ères journées S-TEAM*, pp 35-49, Lyon : Ecole Normale Supérieure de Lyon.

Godot K. (1999) *Etude de la communication scientifique destinée à la jeunesse.* Mémoire de Master2 CST, Institut de la Communication et des Médias, Université Stendhal, Grenoble.

Godot K. (2005) *Situations recherche et jeux mathématiques pour la formation et la vulgarisation, exemple de la roue aux couleurs*. Thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble.

Godot K. (2008) L'animation scientifique, un vecteur pour diffuser la culture scientifique vers le plus grand nombre. *29 ème Journées Internationales sur la Communication, l'Education et la culture Scientifiques, techniques et industrielles*, Chamonix, avril 2008.

Grenier D., Payan C (2002) Situations de recherche en classe : essai de caractérisation et proposition de modélisation. *Cahiers du séminaire national de recherche en didactique des mathématiques*. Paris, 19 Octobre 2002.

Pastori M. (2011) Faire pratiquer une démarche d'investigation en classe en mathématiques, un exemple : Les ateliers Maths à Modeler et séminaires juniors. In *2èmes journées d'étude S-TEAM, IUFM Grenoble*, Mai 2011.

Pelay N. (2011) *Jeu et apprentissages mathématiques : élaboration du concept de contrat didactique et ludique en contexte d'animation scientifique*. Thèse de l'Université Claude Bernard, Lyon 1.

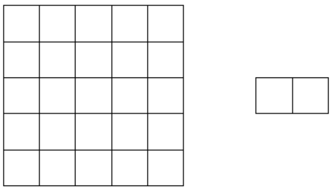
Sousa do nascimento S (1999) *L'animation scientifique : essai d'objectivisation de la pratique des associations de culture scientifique et technique françaises.* Thèse de l'Université Pierre et Marie Curie, Paris 6.

Sousa do nascimento S., Weil-Barais A. (2002) L'animation scientifique : des démarches éducatives différentes. In *Hétérogénéité et différenciation*, Aster 35.

ANNEXES

1. Pavages

Cette situation est issue de problèmes de recouvrement. Paver signifie recouvrir une forme donnée par plusieurs formes plus petites et toutes identiques, sans laisser de trous et sans que ça déborde. À l'heure actuelle, les chercheurs ne savent pas résoudre ce genre de problèmes, ils ne savent pas dire si a priori cela va être possible ou pas. La seule façon de trancher est d'étudier tous les possibles via un ordinateur. Considérons un cas plus simple : le pavage d'une grille carrée par un domino.



Dans le cas d'une grille de côté pair, très vite, on s'aperçoit que cela s'avère impossible…alors rajoutons un trou. Le problème devient : selon la place du trou est-il toujours possible de paver ?

Pour les grilles « paires », est-ce toujours possible si l'on remplace un domino par deux trous, non nécessairement contigus ?

2. Parcours eulériens

Cette situation a été étudiée dans le cadre d'une thèse (Cartier 2008) : à partir d'une configuration donnée, est-il possible de relier tous les points à l'aide d'une ficelle en passant une seule fois sur chaque trait ?

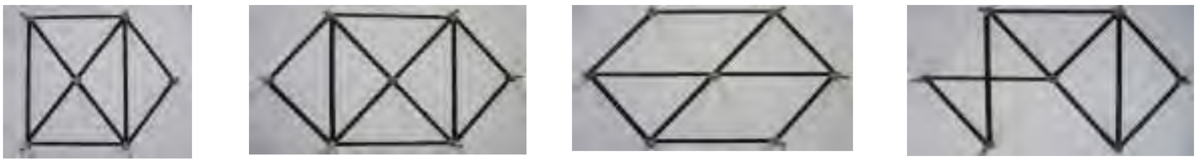


Figure 1 – *Parcours eulériens, exemples de configurations*

3. Tout noir, tout blanc

Il s'agit d'un problème de configuration sur un graphe. On dispose là encore d'une grille dont chaque case est recouverte par un pion biface tel qu'une face soit blanche et l'autre noire. Au départ, tous sont placés du côté noir. Le but du jeu est de retourner tous les pions du côté blanc. On doit les retourner en respectant la règle suivante : si l'on retourne un pion, on doit retourner à chaque fois les pions (et seulement ceux-là) qui sont à droite, à gauche, au-dessus et au-dessous de ce jeton. Les pions peuvent donc être retournés plusieurs fois.

Exemple :

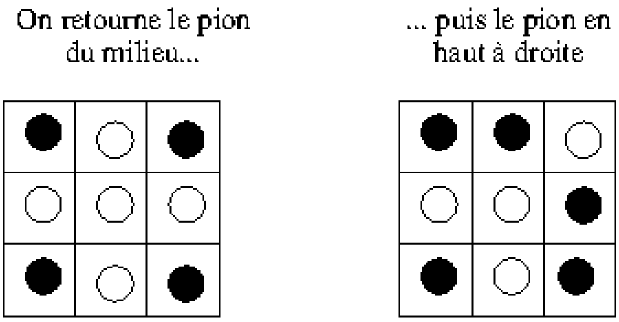


Figure 2 – *Tout noir, tout blanc, exemple de jeu*

ROLE DES SITUATIONS DE RECHERCHE DANS LA VULGARISATION DES MATHEMATIQUES

Denise GRENIER*

Résumé – Nous partons de l'hypothèse qu'une « bonne » vulgarisation des mathématiques nécessite – sans que cela soit exclusif – de mettre le visiteur dans des situations où il va « faire des mathématiques », c'est-à-dire expérimenter, étudier des conjectures, prouver, pour répondre à une question posée. Notre équipe Maths-à-modeler construit et étudie depuis de nombreuses années des Situations de Recherche susceptibles de remplir cet objectif. Après avoir décrit – pour les mettre au débat – différentes modalités de vulgarisation, nous présentons quelques Situations de Recherche qui permettraient de donner une autre image culturelle des mathématiques.

Mots-clefs : modalités de vulgarisation, situation de recherche, activité mathématique, didactique des mathématiques

Abstract – Our thesis is that a "good" vulgarization of mathematics requires (non exclusively) to place the visitor in a situation where he is "actively practicing mathematics", that is, experimenting, studying conjectures, producing proofs, in order to answer an assigned question. Our research team "Maths-à-modeler" has constructed and studied for many years "Research Situations" that have the potential to meet that goal. After describing and discussing several vulgarization modalities, we present a few Research Situations which would hopefully foster a different cultural perception of mathematics.

Keywords: modes of popularization, research situation, mathematical activity, didactics of mathematics

I. INTRODUCTION

La vulgarisation des mathématiques se fait sous des modalités très différentes, tant par leur contenu que par le rapport qu'elles vont créer à cette discipline. Ces choix sont cruciaux, car ils vont déterminer l'image culturelle de ce domaine scientifique. Nous distinguerons, par le type de situation qu'elles proposent au « visiteur »[1], quatre modalités : *ostensive, participative, interactive*, et celle qui nous concerne le plus, la modalité *de recherche*.

Nous faisons l'hypothèse que *l'expérimentation est possible en mathématiques,* comme en sciences expérimentales, disciplines très favorisées dans les principaux médias et les musées scientifiques, parce que l'on peut apprendre et se faire plaisir, sans être expert, en touchant, expérimentalement, en créant soi-même des phénomènes visibles.

Les institutions de vulgarisation (musées, associations, médias écrits ou visuels, revues, etc..) ont la tâche complexe d'intéresser et d'instruire un public large, ayant un rapport et des connaissances très diverses à la discipline. Nous donnerons les résultats principaux d'un travail de synthèse réalisé à l'occasion d'une thèse en didactique des mathématiques sur ce sujet (Godot 2005). Enfin, pour nous, une « bonne » vulgarisation doit permettre au visiteur d'*apprendre et de comprendre des mathématiques*, et de repartir avec des connaissances nouvelles. Ce postulat pourra être débattu.

Les Situations de Recherche que nous construisons et étudions depuis 1995 dans Maths-à-modeler se situent dans une modalité plus rare, que nous avons nommée « modalité de recherche ». Certaines d'entre elles se situent au carrefour des institutions de vulgarisation ou de loisir et de l'institution didactique. Nous préciserons leurs spécificités et donnerons une analyse didactique de quelques-unes d'entre elles.

* Combinatoire et Didactique des mathématiques Institut Fourier (UMR CNRS 5582) Université Grenoble I – France – denise.grenier@ujf-grenoble.fr

[1] Nous nommerons « visiteur » un participant à une situation de vulgarisation, il ne s'agit ni d'un élève, ni d'un enseignant, ni d'une personne en formation.

© Grenier D. (2012) Rôle des situations de recherche dans la vulgarisation des mathématiques. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (SPE4, pp. 1905–1913). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

II. DIFFERENTES MODALITES DE VULGARISATION

1. Vulgarisation ostensive

Dans cette modalité, les mathématiques sont « montrées » – par des images, des calculs ou des objets en trois dimensions, etc. –, accompagnés d'explications choisies pour être accessibles à un grand nombre de personnes. Les énoncés sont transposés pour être faciles d'accès, intégrés dans un contexte ludique ou esthétique. L'objectif est de transmettre des questions historiques ou des résultats fondamentaux de mathématiques – théorèmes classiques qui peuvent évoquer des souvenirs (théorème de Pythagore, nombres premiers, etc.), ou conjectures qui ont résisté aux mathématiciens pendant des siècles – ou encore des questions actuelles de la recherche. La tâche du « visiteur », seul ou accompagné d'un guide, est de lire, regarder, écouter, pour découvrir des mathématiques *exposées*. Citons pour exemple la « salle π » du Palais de la Découverte (754 décimales affichées sur les murs d'une salle consacrée entièrement à ce nombre). Ou encore, la présentation des surfaces minimales s'appuyant sur des courbes matérialisées par des structures trempées dans un liquide savonneux. Cette modalité de vulgarisation peut appuyer de courts exposés d'Histoire des mathématiques (par exemple, l'histoire de la découverte de l'irrationalité de π) ou la mise en relation des mathématiques avec d'autres disciplines (physique, chimie, peinture, architecture).

2. Vulgarisation participative ou interactive

Dans cette modalité, on propose au visiteur de découvrir une propriété, de répondre à une question ou de comprendre un phénomène, à l'aide d'un matériel dont il peut de servir librement, pour calculer, tracer, construire. Citons comme exemple les classiques ensembles de formes polygonales régulières, la tâche étant de choisir et assembler les « bons » polygones pour construire les polyèdres réguliers de l'espace. On peut aussi mettre dans cette catégorie l'accès à des logiciels de calcul ou de géométrie dynamique « prêts à l'emploi ». La tâche peut consister à simplement lancer un programme (en appuyant sur des boutons) ou, de manière plus intéressante, à construire des objets géométriques à partir de macros d'un logiciel. Parfois, la participation du visiteur reste à un niveau très technique, mais on trouve aussi des situations pour lesquelles la résolution demande de la réflexion et du temps. Enfin, entrent dans cette modalité certains problèmes proposés par des revues, sous formes de jeux, énigmes ou casse-tête logiques, avec solutions différées (au numéro suivant).

3. Vulgarisation par la recherche

Nous prenons comme postulat que pour comprendre ce que sont les mathématiques, il faut, à un moment donné, se confronter à des situations proches de celles que rencontre un chercheur. L'activité d'un mathématicien, c'est, pour une grande part, choisir une question, expérimenter et étudier de cas particuliers, choisir un cadre de résolution, modéliser, énoncer de conjectures et les valider ou invalider, définir, changer éventuellement la question initiale. Les savoir-faire associés sont constitutifs de la démarche scientifique, ils sont nécessaires pour faire des mathématiques et ne peuvent être réduits à des techniques ou à des méthodes.

Évidemment, les vrais problèmes de la recherche ne peuvent être donnés tels quels à résoudre. Il faut les transposer, inventer des situations spécifiques – c'est-à-dire des problèmes et leur mise en scène – qui recréent artificiellement les conditions de la recherche, et qui soient accessibles à un large public. Ceci impose que l'énoncé soit non mathématique ou peu mathématisé. Le « visiteur » doit pouvoir s'engager dans la résolution, sans pour autant que celle-ci soit immédiate par une technique usuelle. Il doit pouvoir faire des vraies conjectures et les étudier.

L'association MATH-en-JEANS[2] est un des initiateurs de ce type d'approche des mathématiques. Elle organise une initiation à la recherche mathématique dans les établissements scolaires pour des élèves volontaires encadrés d'enseignants et de chercheurs. Cependant, les situations proposées en général aux élèves nécessitent du temps – ceux-ci travaillent plusieurs semaines sur le même problème de recherche. Il nous semble que le dispositif se situe, comme celui de Maths-à-modeler, entre l'enseignement et la vulgarisation, les situations Maths-à-modeler étant prévues pour être plus « courtes » dans le temps.

III. L'IMAGE DES MATHEMATIQUES VEHICULEE PAR LES INSTITUTIONS DE « LOISIRS SCIENTIFIQUES »

Dans sa thèse (chapitre II.1, pp. 257-292, 2005), K. Godot a mené une étude très fouillée de l'image des mathématiques véhiculée par les institutions de « loisirs scientifiques » françaises. Nous reprenons ici quelques résultats de cette étude. Les mathématiques semblent faire peur aux médias de type radio et télévision, si l'on en juge par la place faible voire inexistante des mathématiques dans leurs émissions scientifiques. C'est comme si les mathématiques étaient pour ces médias uniquement rattachées (et intéressantes) à l'école et non « vulgarisables ». Sur internet, en revanche, les mathématiques sont présentes, mais quasi exclusivement sous forme de jeux, avec des thèmes privilégiés : paradoxes logiques ou géométriques, arithmétique combinatoire, algorithmique. Ils laissent une double impression que les mathématiques peuvent être ludiques et amusantes, mais aussi de vrais casse-tête souvent difficiles (d'où leur nom !) et pas toujours solubles. La presse écrite est probablement le média qui permet une approche la plus positive et la plus juste des mathématiques. Les magazines spécialisés pour les jeunes, les « jeux pour tous » montrent des mathématiques à la fois attrayantes et utiles, dans ses aspects les plus modernes. L'offre éditoriale, quant-à-elle, présente une particularité : le choix d'un « style romanesque », dont l'objectif est « de rendre encore plus palpitante la grande aventure des mathématiques » (Godot, op. cit.).

K. Godot a étudié aussi les mathématiques dans les institutions de vulgarisation « directe », c'est-à-dire les musées parisiens (Cité des sciences et Palais de la découverte), les CCSTI, les expositions internationales (UNESCO, pour l'année mondiale des mathématiques en 2000). Elle a noté une volonté de ne pas seulement « montrer » des mathématiques, mais d'en « faire faire » au public, en proposant des jeux ou des problèmes accessibles, et où la manipulation permet de se poser des questions, faire des « conjectures » et résoudre des cas particuliers.

L'animation socio-culturelle, les initiatives spécifiques (« aventure scientifique » et universités d'été de la FFJM) mettent en avant les mathématiques ludiques, parfois par opposition aux mathématiques scolaires, et avec plus ou moins de succès. A ce sujet, N. Pelay, dans sa thèse (soutenue le 6 mai 2011 à l'UCB Lyon) a étudié pendant 10 ans, les difficultés à faire coexister un contrat didactique avec un « contrat ludique » dans une colonie de vacances dont il est animateur.

Les modalités et les initiatives actuelles dans les institutions de loisir semblent toutes aller vers une connaissance plus idoine des mathématiques, en montrant qu'elles sont vivantes, en incitant le public à en faire, et en essayant de convaincre que les mathématiques de l'école et les mathématiques ludiques ne sont pas différentes.

---

[2] http://mathenjeans.free.fr/amej/accueil.htm.

IV. LE ROLE DE L'EXPERIMENTAL DANS LA VULGARISATION

Notre postulat est qu'il n'y a pas de vraie vulgarisation des mathématiques sans une confrontation, à un moment donné, à une situation qui offre la possibilité de « jouer au chercheur », avec un certain succès si on ne veut pas créer un effet inverse de celui visé. Pour cela, une solution qui a fait ses preuves en sciences expérimentales est de permettre au public d'étudier une question en manipulant des objets, et d'en déduire des réponses, mêmes partielles. Nous prenons le verbe manipuler dans le sens de « manier avec soin en vue d'expériences ou d'opérations scientifiques ou techniques » (le nouveau Petit Robert de la langue française 2009). Il faut cependant distinguer différents types d'expérimentations. Certaines permettent d'observer un phénomène qui sera ensuite commenté et expliqué par le gestionnaire de la situation. L'observation sert d'appui visuel au discours explicatif du présentateur, et de « validation » de la propriété décrite. On trouve de nombreux exemples de ce type dans les fêtes des sciences ou musées, en chimie ou physique : électrostatique et réactions chimiques ont un grand succès médiatique parce qu'ils offrent des expériences spectaculaires.

En mathématique, la preuve est une composante incontournable de l'activité de recherche. Il faut donc se donner les moyens de confronter le public à l'élaboration de preuves … au moins partielles ! Et pour qu'il y ait une motivation à prouver un résultat, les conjectures doivent être à la fois faciles à exprimer et non évidemment vraies.

V. LES SITUATIONS DE RECHERCHE

1. Présentation générale et caractéristiques

Le domaine des *mathématiques discrètes*[3] se révèle pertinent pour construire ces situations, pour des raisons qui sont décrites dans Grenier et Payan (1998). Il offre la possibilité de poser des problèmes impliquant des concepts faciles d'accès pour tous. D'autre part, n'étant pas enseigné avant l'université, il favorise l'expérimentation, le raisonnement et la preuve, dans des conditions de découverte proches de celles de la recherche.

Notre équipe de recherche Maths-à-Modeler étudie depuis de nombreuses années des « Situations de Recherche » susceptibles de mettre des participants de tous niveaux dans une activité de recherche mathématique. Ces situations ont été expérimentées dans de nombreux contextes, scolaires et extra-scolaires - fêtes de la science, festivals divers, ateliers mathématiques, etc. Nous en avons des analyses a priori fiables, qui décrivent les conditions permettant de « faire faire des mathématiques » à un public large. Certaines de situations sont accessibles à des niveaux de connaissances très divers, sans être caduques même pour ceux qui ont étudié cette discipline. Elles sont pensées pour être « résolues » au moins en partie dans un temps raisonnable, ce qui permet de les intégrer dans des dispositifs divers (enseignement, vulgarisation). Les résultats de nos travaux (thèses et publications de recherche depuis plus de 15 ans) montrent que cet objectif ambitieux est réalisable, mais aussi que les conditions de faisabilité sont précises : que ce soit en classe ou dans un club de maths, il ne suffit pas de mettre les personnes en activité pour qu'elles fassent des mathématiques pertinentes en quasi autonomie.

[3]Les parties des mathématiques discrètes qui nous concernent le plus sont la combinatoire géométrique, la théorie des graphes, et des éléments de la théorie des nombres.

2. *La place de l'expérimental dans nos situations de recherche*

Un des aspects essentiels de nos situations est que la « mise en scène » du problème mathématique invite à manier des *objets matériels* (en bois, métal, plastique, papier, carton), soit parce que la question concerne l'objet matériel donné, comme représentant d'un objet mathématique, soit parce que le problème ne peut être abordé qu'en manipulant. Cette phase expérimentale et de manipulation va permettre la résolution de cas particuliers, puis conduire, par un raisonnement inductif, à des conjectures qu'il reste à prouver. L'interface d'ordinateur est pour nous un autre dispositif expérimental, que nous n'avons pas choisi dans nos situations de recherche.

Nos recherches ont conduit à la construction d'un ensemble de situations « fiables ». Parmi elles, les situations de *pavages de polyminos*, parmi les premières étudiées, se sont révélées fondamentales pour l'acquisition des savoir faire de base de l'activité mathématique, et ce à tous les niveaux de connaissance. Leurs analyses didactiques ont été largement publiées, nous renvoyons le lecteur à Grenier et Godot 2004, Grenier 2007, Grenier et Payan 2007.

Plus récemment, nous avons repris le problème classique de la détermination des polyèdres de Platon pour en faire une situation de recherche. Le matériel expérimental choisi et les questions posées jouent un rôle central dans le questionnement des interactions entre la géométrie plane et la géométrie de l'espace, et dans la détermination des caractéristiques des polyèdres réguliers. Cette étude est publiée dans Grenier et Tanguay 2008, 2009 et 2011.

3. *Un premier exemple. La chasse à la bête*

Cette situation est issue d'une recherche en mathématiques discrètes (Duchêne[4] 2006). Elle a été expérimentée et analysée dans le cadre d'un mémoire de Master de didactique des mathématiques (Chassan 2009). Elle est devenue classique aussi bien dans les fêtes des sciences et autres festivals que dans les classes (du CM1 au Masters) et en formation d'enseignants.

Dans son énoncé le plus général, le joueur dispose d'un territoire (un polymino, c'est-à-dire un ensemble de cases carrées identiques et connexes), de pièges (des carrés de la taille d'une case du territoire, que nous appelons uniminos) et de bêtes (petits polyminos composés de plusieurs carrés). Il y a différents types de bête, qui ne se mélangent pas (chacun correspond à un problème particulier) : dominos, triminos, quadriminos, pentaminos, etc.). Les bêtes se posent selon les cases (et non n'importe comment). Le but du jeu est de trouver le minimum de pièges qui protègent le territoire. Pour cela il faut que toute position possible de la bête sur le territoire rencontre au moins un piège. L'ensemble des bêtes est aussi grand que l'on veut.

Si aucune restriction n'est donnée sur la taille et la forme du territoire et des bêtes, ce problème est difficile voire impossible à résoudre. L'énoncé que nous avons choisi et qui a fait ses preuves est le suivant. Il est donné à l'identique à tous les publics sans distinction, aussi bien dans le cadre scolaire que dans des cadres ludiques.

> On veut protéger un territoire quadrillé (ici, un carré 5x5) de nuages de bêtes. Pour cela, on dispose de « pièges » (uniminos). Une bête est un polymino donné, nous en considérerons (successivement) trois types : dominos, triminos droits, triminos coudés. Les bêtes se posent le long des carreaux (et non en travers). Le but est de disposer le plus petit nombre de pièges sur le territoire de telle sorte qu'aucune bête ne puisse se poser sans toucher un piège.

[4] Duchêne E. (2006) *Jeux combinatoires sur les graphes*. Thèse en mathématiques discrètes, Université Joseph Fourier.

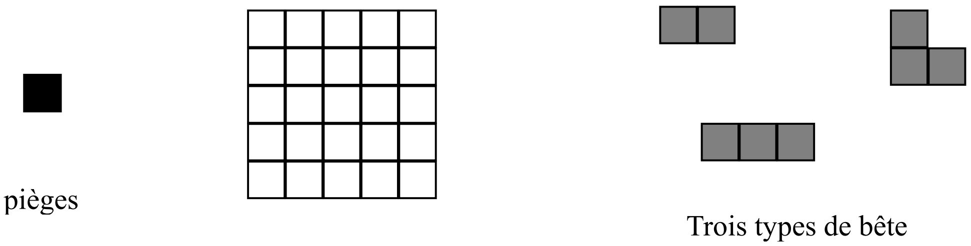


Image 1 *– Chasse à la bête avec trois types de bête différents*

Donnons quelques éléments d'analyse didactique de cette situation.

Expérimenter avec du matériel (que l'on peut facilement construire en carton, bois, mousse, etc..) est indispensable pour résoudre la question. Avec seulement papier et crayon, il devient vite fastidieux d'examiner et de représenter différentes configurations des pièges, alors que la manipulation des dominos et triminos permet une exploration rapide, facile et amusante. Faire résoudre le problème à plusieurs est idéal, chacun essayant de placer et déplacer les pièges de manière à faire mieux que les autres.

Commencer avec les bêtes-dominos permet de faire une « bonne » dévolution de la question. La solution optimale est en général trouvée assez vite, même par des enfants de 10 ans et les arguments de preuve sont faciles d'accès tout en étant non évidents. Voici, par exemple, une configuration à 13 pièges, qui sort régulièrement.

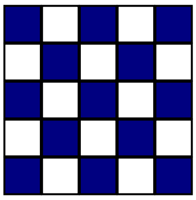


Image 2 *– Une configuration qui « marche » mais non optimale pour les dominos*

Il est facile de justifier et de se convaincre que le territoire est bien protégé : un domino couvre deux cases adjacentes et il n'y a pas deux cases adjacentes sans piège. Il est facile aussi de se convaincre que si on enlève n'importe lequel des 13 pièges, le territoire n'est plus protégé – il suffit de le faire ! Mais est-ce la solution optimale, ou bien existe-t-il une configuration avec moins de pièges ? On obtient alors très souvent l'argument faux suivant : « C'est la meilleure, car si j'enlève un seul des pièges, le territoire n'est plus protégé ». L'invalidation de cet argument est donnée par la solution optimale elle-même (que nous vous laissons découvrir) !

On poursuit ensuite avec les triminos longs, puis les triminos en L. Par exemple, pour les deux types de triminos, la configuration à 13 pièges ci-dessous protège le territoire. Est-elle optimale pour l'un des deux ? Il faudra un travail d'exploration de la figure et de raisonnements à la fois géométriques et numériques pour résoudre la question.

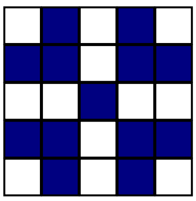


Image 3 *– Une configuration qui « marche » pour les triminos. Est-elle optimale ?*

Les mathématiques en jeu dans cette situation sont bien sûr les savoir-faire de toute activité mathématique : faire des conjectures en expérimentant et étudiant des cas particuliers, les valider ou invalider. Pour trouver le nombre optimal de pièges, on procède en fait par encadrements successifs de plus en plus précis du nombre cherché. Ainsi, pour les bêtes-triminos longs, si N est le nombre optimal de pièges, « 13 suffisent » se traduit par $N \leq 13$. Si par ailleurs on démontre que 5 ne suffisent pas (ce qui se peut se faire facilement par un raisonnement par l'absurde), on a $N \geq 5$. On a donc $5 \leq N \leq 13$. Bien sûr, réduire l'intervalle est un vrai *résultat* dans la situation de recherche, car il fait progresser vers la solution optimale. On a l'optimal lorsque l'intervalle est réduit à un seul nombre entier.

4. *Un second exemple : Le jeu des jetons « tout noir-tout blanc »*

Ce problème est aussi un classique des fêtes des sciences ou des festivals scientifiques. Il est actuellement étudié en mathématiques discrètes sous des formes proches de celles que nous proposons. Il a été étudié dans le groupe « modélisation et preuve » de l'IREM de Grenoble[5].

> Énoncé
>
> On dispose d'une grille rectangulaire de taille finie quelconque. Sur chacune de ses cases est posé un jeton bicolore (une face blanche et une face noire). Nous dirons qu'un jeton sur la grille est blanc (resp. noir) lorsque sa face visible est blanche (resp. noire). Etant donnée une configuration quelconque, c'est-à-dire une grille avec des jetons blancs et des jetons noirs, le but du jeu est de la transformer en une configuration monochrome (dont tous les jetons ont la même couleur visible), en appliquant une « règle de retournement » fixée. On choisit la règle de retournement suivante :
>
> *Jouer un jeton consiste à retourner ce jeton et ses voisins directs, c'est-à-dire ceux qui sont sur des cases ayant un côté commun avec la sienne, et ce, quelles que soient les couleurs du jeton choisi et de ses voisins.*

Trois variables déterminent la complexité du jeu : les dimensions de la grille, la configuration de départ (tout blanc, tout noir, ou quelconque) et, surtout, la règle de retournement. Par exemple, si on prenait la règle « on peut retourner un jeton sans conséquence pour les autres », on imagine facilement que le jeu n'aurait aucun intérêt : il suffirait de retourner les jetons qui n'ont pas la bonne couleur !

Avec la règle ci-dessus, un *coup* consiste à retourner 5, 4 ou 3 jetons, selon la position dans la grille du jeton choisi (intérieur, bord, coin). On distingue un jeton **joué,** celui qui est choisi pour un coup, des jetons qui sont **retournés** automatiquement par application de la règle de retournement. Sont donc retournés, celui qui est joué et ses voisins directs.

Exemple : Deux coups successifs sur un damier « blanc ».

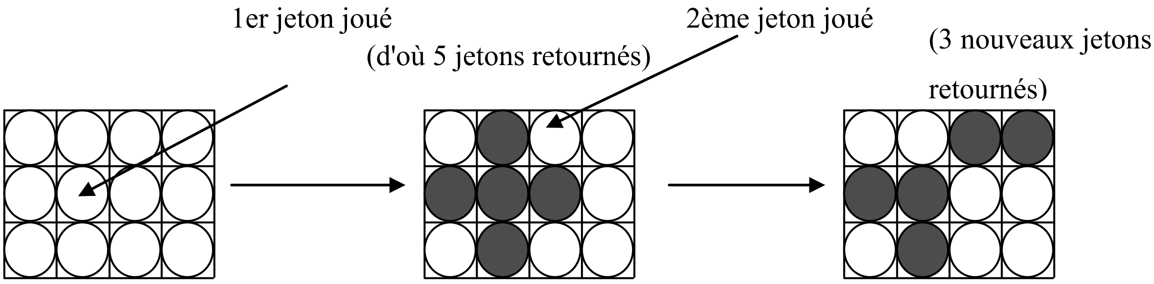


***Image 4** – Le jeu des jetons « tout noir- tout blanc »*
Exemple de deux coups avec la règle de retournement choisie.

[5] En particulier, une analyse mathématique et didactique non encore publiée a été menée par Françoise Richard, maitre de conférence à l'Université de Chambéry.

Le problème consiste à étudier s'il est possible d'obtenir une configuration « tout blanc » en partant d'une configuration de départ aléatoire, puis, lorsque cela est possible, de donner l'ensemble des coups à jouer pour y arriver. On peut ensuite chercher le nombre minimum de coups à jouer pour passer d'une configuration donnée à la configuration « tout blanc ». On a donc aussi une question **d'optimisation**.

Des **propriétés** peuvent émerger, en jouant plusieurs fois sur des cas particuliers, qui vont permettre de trouver une stratégie efficace. En voici les principales.

- Jouer un même jeton deux fois de suite (en respectant la règle de retournement) ne change pas la configuration. C'est donc inutile.
- Jouer un même jeton deux fois, pas nécessairement à la suite, ne sert à rien, pour la même raison (cette propriété est plus difficile à voir que la précédente).
- L'ordre dans lequel on joue deux jetons, successivement ou non, n'a pas de conséquence sur la configuration finale.
- Un jeton peut être retourné soit parce qu'il a été choisi pour être joué, soit parce qu'il est voisin direct d'un jeton joué. En conséquence, lorsqu'on a obtenu une configuration « tout blanc », chaque jeton de la configuration de départ a été retourné un nombre pair de fois s'il était blanc, et un nombre impair de fois s'il était noir.

Une solution est donc un ensemble S non ordonné et sans répétition de jetons de la grille, ce sont ceux qu'il suffit de retourner pour obtenir « tout blanc ». Tout jeton de S a un nombre pair de voisins dans S, et tous les autres ont un nombre impair de voisins dans S. Pour arriver à cette conclusion, il faut bien sûr avoir reconnu les propriétés de commutativité par composition et d'involution, de l'action « jouer un jeton ». Dans ce problème, il y a une part de modélisation, qui consiste en particulier dans la représentation et le codage d'une configuration (codage des positions des jetons et de leurs couleurs) et la représentation et le codage d'un coup (jouer un jeton). La résolution complète sera accessible dans une publication de IREM de Grenoble (2002).

VI. CONCLUSION

Nous avons présenté des Situations de Recherche comme une modalité particulière (non exclusive) de vulgarisation des mathématiques, l'objectif étant d'introduire un débat plus général sur les caractéristiques d'une « bonne » vulgarisation. Nous avons développé l'hypothèse que si l'on veut améliorer le rapport aux mathématiques dans la culture générale, les activités permettant l'expérimentation et la recherche doivent être au cœur et des dispositifs proposés au visiteur. Les travaux de l'équipe Maths-à-Modeler montrent que c'est possible de faire faire des mathématiques à un public hétérogène, de manière ludique et formatrice à la fois.

REFERENCES

Chassan G. (2009) *Apport des situations de recherche à l'apprentissage des savoirs transversaux*. Mémoire de Master2 ICCA Didactique des sciences. UJF.

Godot K. (2005) *Situations de recherche et jeux mathématiques pour la formation et la vulgarisation. Exemple de la roue aux couleurs.* Thèse de l'université Joseph Fourier, Grenoble.

Godot K., Grenier D. (2004) Situations de recherche pour la classe. Objectifs, caractéristiques pour une dévolution à l'élève, condition pour une gestion pour l'enseignant. In *Actes de l'université d'été « La place des Mathématiques Vivantes dans l'enseignement »*, Saint-Flour, 22-27/08/2004.

Grenier D. (2008) Expérimentation et preuve en mathématiques. In Viennot L. (Dir.) *Didactique, épistémologie et histoire des sciences*. ollection « Science, histoire et société ». PUF.

Grenier D. (2007) Des problèmes de recherche pour l'apprentissage de la modélisation et de la preuve en mathématique. In *Actes du colloque AMQ*, Sherbrooke, Québec, juin 2006.

Grenier D., Payan C. (2007) Des « situations recherche » pour l'apprentissage des savoirs transversaux. In A*ctes du colloque Espace Mathématique Francophone EMF*, Sherbrooke, mai 2006.

Grenier D., Payan C. (2003) Situation de recherche en classe : essai de caractérisation et proposition de modélisation, *Cahiers du séminaire national de recherche en didactique des mathématiques*. Paris, Octobre 2002.

Grenier D., Payan C. (1998) Spécificités de la preuve et de la modélisation en mathématiques discrètes. *Recherches en didactique des mathématiques*18.2, 59-100.

Grenier, D., Tanguay, D. (2008) L'angle dièdre, notion incontournable dans les constructions pratique et théorique des polyèdres réguliers. *Petit x* 78, 26-52.

Tanguay D., Grenier D. (2011) Experimentation and Proof in a spatial Geometry Teaching Situation, *For the Learning of Mathematics* (FLM publishing association) Cubberley Education Library, Stanford.

Tanguay D., Grenier D. (2009) A classroom situation confronting experimentation and proof in solig geometry. In *Proceedings of ICMI Study19 "Proof and Proving, in Mathematics Education".* (vol.2 pp. 232-238). ISBN 978-986-01-8210-1.

Pelay N. (2011) *Jeu et apprentissages mathématiques. Elaboration du concept de contrat didactique et ludique en contexte d'animation scientifique.* Thèse de l'Université Claude–Bernard-Lyon-I.

Poisard C. (2005) *Ateliers de fabrication et d'étude d'objets mathématiques, le cas des instruments à calculer*. Thèse de l'Université d'Aix-Marseille I.

QUELLE MODELISATION DIDACTIQUE
DE LA VULGARISATION DES MATHEMATIQUES ?

Nicolas PELAY[*] – Christian MERCAT[**]

Résumé – Nous cherchons à caractériser de façon générale une action de diffusion des mathématiques en n'opposant pas enseignement et vulgarisation, mais au contraire en les articulant. En illustrant comment deux dispositifs didactiques très différents sont chacun utilisés dans des contextes variés, nous montrons que les notions d'intention et d'enjeu, de contrat didactique, d'épaisseur didactique sont centrales pour caractériser les points communs et les différences d'une action de diffusion menée dans différents contextes.

Mots-clefs : vulgarisation, diffusion, contrat didactique et ludique

Abstract – We try to characterise in a general manner a mathematics dissemination action, without antagonizing teaching and popularization, but on the contrary, by articulating their links. We illustrate how two very different didactical organizations, which are used in various contexts in different ways, lead us to consider that the notions of intents and stakes, of didactical contracts, of didactical thickness, are central in order to characterise common points and differences between different contexts for the same dissemination action.

Keywords: popularization, dissemination, didactic and ludic contract

INTRODUCTION

Le terme de « vulgarisation scientifique » est défini de façon assez commune comme une forme de diffusion des connaissances qui cherche à mettre un savoir scientifique expert à portée du grand public. Ce terme renvoie de façon plus ou moins explicite à une simplification et une réduction de ce savoir expert pour qu'une partie puisse en être rendue accessible :

> L'expression « vulgarisation de la science » apparaît au XIX^e siècle pour désigner le fait de diffuser les connaissances savantes en les mettant à la portée du grand public. Le terme vulgaire, du latin vulgus, concernait jusque-là la foule, qualifiant ce qui est ordinaire, général et commun ; il prend sa tournure péjorative au fur et à mesure que s'affirment les valeurs bourgeoises, pour désigner en contre point les comportements populaires. Dans le même temps, la vulgarisation se substitue progressivement à l'expression de « familiarisation de la science » qui datait, elle, du début du siècle des lumières. Aujourd'hui on préfère parler de « communication scientifique et technique ». Entre ces trois termes se devinent différents rapports que les profanes, le peuple, la société civile peuvent nouer avec la science et la technique. (Rasse 2002)

Nous nous intéressons à la vulgarisation avec une perspective didactique : quels connaissances et savoirs mathématiques sont transmis, et existe-t-il une spécificité de la vulgarisation par rapport à d'autres formes de diffusion (enseignement, formation, médiation, animation, éducation, etc.) ?

Notre perspective est la suivante : dans le contexte actuel d'évolution profonde des rapports aux savoirs dans nos sociétés, nous pensons que les formes de diffusion sont de plus en plus articulées et complémentaires, selon les lieux, contextes, publics, dans lesquelles elles se déroulent. Plutôt que d'opposer a priori *vulgarisation* et *enseignement*, et sans nier pour autant qu'il existe des différences, il s'agit pour nous de comprendre les liens et articulations qui existent les différentes formes de diffusion des mathématiques, et nous cherchons à

[*] Institut Camille Jordan, Lyon – France – christian.mercat@math.univ-lyon1.fr
[**] Laboratoire de Didactique André Revuz, Paris – France – nicolas.pelay@univ-paris-diderot.fr

© Pelay N., Mercat C. (2012) Quelle modélisation didactique de la vulgarisation des mathématiques. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21^e siècle – Actes du colloque EMF2012* (SPE4, pp. 1914–1925). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

développer des outils conceptuels et théoriques pour caractériser de façon générale une action de diffusion des mathématiques.

Ce projet est très lié à l'expérience importante des deux auteurs dans le champ de l'animation et de la vulgarisation scientifique. Nous avons en effet constaté que nous utilisons chacun un même dispositif didactique, mais que nous en faisons une utilisation qui pouvait varier selon que nous étions en contexte d'animation, de vulgarisation, d'enseignement, etc. En s'intéressant de plus près au déroulement d'une séance ou d'un atelier, nous avons observé que l'animateur modulait l'utilisation d'un même dispositif didactique, en fonction de nombreux paramètres. C'est ces paramètres que nous souhaitons objectiver pour mieux décrire et comprendre le déroulement d'une action de diffusion des mathématiques.

Nous allons tout d'abord décrire deux de nos dispositifs de diffusion des mathématiques, qui ont le point commun d'avoir été réalisés de nombreuses fois dans des contextes et avec des publics très divers. Nous présentons tout d'abord une ingénierie didactique et ludique élaborée et expérimentée dans le cadre de la thèse de Nicolas Pelay (2011), puis l'atelier « webcams mathématiques » , développé par Christian Mercat. Cela nous permettra, dans une troisième partie, de donner quelques éléments d'élaboration théorique, en nous appuyant sur des travaux didactiques menés dans le contexte de l'animation scientifique (Sousa do Nascimento 1999 ; Godot 2005 ; Pelay 2011).

I. UNE INGÉNIERIE DIDACTIQUE ET LUDIQUE « LA SOMME DES 10 CONSECUTIFS » – NICOLAS PELAY

1. Objectifs et enjeux personnels

Animateur socioculturel et scientifique depuis 2001, je suis particulièrement impliqué dans les séjours de vacances scientifiques. C'est un cadre qui me permet de faire partager mon intérêt et plaisir pour les sciences tout en participant au développement, à l'éducation et à l'épanouissement des enfants.

Je réalise des animations scientifiques dans des colonies thématiques, où la dimension scientifique est présente, mais pas exclusive : les enfants choisissent leurs activités selon leurs préférences parmi des activités scientifiques, artistiques, manuelles, historiques, littéraires, etc. Dans ce type de séjour, les ateliers mathématiques sont peu présents, et c'est en faisant ce constat que j'ai souhaité en concevoir et en proposer en lien avec des théories didactiques dans le but de proposer des activités ludiques et attractives avec de réelles potentialités didactiques. Ce travail s'est réalisé dans le cadre d'une thèse (Pelay 2011) où j'ai étudié l'articulation entre jeu et apprentissages mathématiques en séjours de vacances. J'ai ainsi conçu et expérimenté des « ingénieries didactiques et ludiques », réalisés à partir de situations didactiques de la théorie des situations (Brousseau 1998).

2. Description de la « situation des 10 consécutifs »

L'atelier est réalisé à partir de l'adaptation d'une situation didactique conçue par Barallobres dans sa thèse (2007)[1]. Elle a initialement été conçue dans le but de construire un milieu pour l'entrée des élèves de la deuxième année de l'enseignement secondaire dans des pratiques algébriques. Il s'agit de faire calculer le plus rapidement possible la somme de 10 nombres consécutifs dont la liste est fournie aux élèves, et dont le premier nombre de la liste augmente.

[1] Cette situation a été présentée lors du colloque EMF 2006 : Barallobres G., Giroux J. (2006) Carences et régulations des milieux en situation de validation. *Actes de l'Espace Mathématiques Francophone, 2006.*

Cette situation se déroule en trois phases : une phase d'appropriation du jeu, une phase de course entre équipe, et une phase de débat. L'objectif est non seulement que les élèves produisent une formule algébrique, mais qu'ils puissent ensuite la justifier.

Cette situation présente de nombreux intérêts pour l'animation scientifique (Pelay 2011). D'une part, elle contient de nombreuses potentialités mathématiques et didactiques pour développer des connaissances algébriques (liées à l'apparition de la formule) et des connaissances liées à la preuve ; elle contient en outre une dimension expérimentale importante, car les enfants trouvent les stratégies gagnantes en repérant des régularités dans les calculs. Nous avons montré expérimentalement que des enfants à partir de 8 ans pouvaient trouver la stratégie « multiplier le premier nombre par 10 et ajouter 45 » en s'appuyant sur des stratégies liées au point de vue « numération décimale de position ». Nous avons identifié deux grands types de stratégies :

- Les stratégies « Successeur » : elles sont basées sur l'écart entre les nombres. Par exemple, chaque nombre peut être exprimé par son écart au 1er nombre. La somme des écarts est donc un nombre fixe (45 lorsque la liste comporte 10 nombres consécutifs). Ces stratégies sont toujours valables lors du passage de la variable didactique de 10 à 8 ou à 12 ; elles sont liées aux connaissances algébriques pour laquelle la situation a originellement été conçue.
- Les stratégies « Numération décimale de position » : elles sont liées au fait que la variable didactique soit fixée à 10 : dans une liste de 10 nombres entiers consécutifs, la liste des chiffres des unités est toujours formée exactement des chiffres de 0 à 9 inclus. Cette propriété n'est plus vérifiée lorsque le nombre d'éléments de la liste est par exemple 8 ou 12.

D'autre part, il existe un ressort ludique dans la situation qui est le moteur de la dévolution : être l'équipe la plus rapide pour gagner le jeu. Il est possible de faire coexister jeu et apprentissage dans la phase de course, ce qui la rend adaptable en contexte d'animation.

Figure 1 *– Situation des 10 consécutifs menée sur le thème de la magie*

3. *Observations dans de nombreux contextes*

Cet atelier a été mené plus d'une vingtaine de fois dans différents contextes : séjours de vacances, classes scientifiques[2], classes scolaires, fête de la science. Cette animation est très amusante et plaît beaucoup aux enfants entre 8 et 14 ans dans tous les contextes dans lesquels

[2] Les enfants partent en classe découverte avec leur enseignant en dehors de leur établissement. Ils sont pris en charge par des animateurs scientifiques qui leur proposent des ateliers scientifiques.

elle a été menée. Mise sous forme d'une histoire, elle a été réalisée sur des séjours thématiques (piraterie, magie, animaux, etc.). Les enfants entrent dans le jeu de la course avec beaucoup de plaisir, développent des stratégies, et parviennent souvent à trouver des stratégies liée à la formule 10X+45. Une fois les stratégies trouvées, l'animateur met en place une phase de débat mathématique investie par les enfants.

L'animateur réalise de nombreux ajustements pour s'adapter à de nombreux paramètres :

- <u>Age et niveau scolaire des enfants</u> : dans la phase de course, il donne des nombres plus petits aux enfants du primaire qu'aux enfants du collège pour que la durée de calcul ne soit pas trop longue et maintenir la dimension ludique de la course. Dans la phase de débat, il ne réalise pas les mêmes institutionnalisations. Avec des primaires, la formulation des stratégies et le débat sur leur validité sont centraux. Les enjeux d'écriture de formule algébrique sont peu présents. A l'inverse, chez les collégiens, l'animateur investit les enjeux didactiques liés à la formule 10X+45 lorsqu'elle elle a été formulée les enfants. Il rejoue quand il a le temps la situation en changeant la valeur de variable didactique « nombre d'éléments dans la liste », par exemple en proposant des listes de 8 nombres consécutifs, et institutionnalise des savoirs algébriques.
- <u>Durée de l'animation</u> : Elle n'est pas forcément décidée par l'animateur : entre 1h et 1h15 en séjours de vacances, 45 minutes à la fête de la science, deux fois 45 minutes dans les classes scientifiques, 2h dans les classes scolaires. Elle peut aussi prendre place dans une animation de longue durée : dans un séjour mathématique, les ateliers s'étalaient sur 3 séances de 1h15. l'atelier a donc été mis en place pendant 1h30 dans un atelier intitulé « Maths & magie » où les enfants apprenaient aussi à faire des tours de magie liés aux nombres et à l'algèbre.
- <u>Contexte</u> : A la fête de la science ou dans les classes scientifiques, les ateliers sont menés sous le regard de l'enseignant par l'animateur, et nous avons pu constater que ce dernier a tendance à institutionnaliser davantage qu'en séjour de vacances. La dimension ludique de l'activité, bien que présente, est moins mise en avant qu'en séjour de vacances où il arrive même que l'animateur renonce à des phases de débat et propose l'activité sous une forme purement ludique.

Ces quelques exemples nous montrent que les enjeux et objectifs varient selon le contexte. Même s'il y a dans tous les contextes une volonté de l'animateur de diffuser de nouvelles connaissances liées aux mathématiques, on constate qu'elle s'exprime différemment dans chacun des cas. On peut le repérer dans le discours qui varie d'un contexte à l'autre : alors qu'en contexte scolaire, le discours est très lié à l'institutionnalisation des savoirs du programme, l'animateur a un discours parfois plus général dans le contexte de la fête de la science : il ne se contente pas d'évoquer les connaissances algébriques de la situation, mais parle aussi de l'algèbre en tant que branche mathématique à part entière, faisant des détours historiques ou évoquant des concepts comme ceux des groupes, corps, anneaux, etc.

II. L'ATELIER « WEBCAMS MATHEMATIQUES » – CHRISTIAN MERCAT

1. *Objectifs et enjeux personnels*

Je m'intéresse à la place de l'image dans notre société et dans l'activité mathématique. Les jeunes aujourd'hui sont bombardés d'images captivantes et très bien faites, ciselées à grands frais par les professionnels de la communication pour capter leur attention. Les diffuseurs de savoirs doivent faire face à cette concurrence très agressive du marketing, avec des moyens bien inférieurs.

Alors que d'autres sciences comme la physique ou la biologie s'accommodent tout à fait de donner à voir et de vulgariser des concepts avancés qui dépassent de très loin le bagage scientifique du public, les mathématiciens ont des difficultés à véhiculer leur message par le biais d'images, ce qui explique en partie selon moi le manque de visibilité de cette science pourtant centrale dans le grand public. J'avance pour cela l'hypothèse que l'image est souvent considérée comme trompeuse par de nombreux mathématiciens, spécialement en France, qui considèrent son « témoignage » avec suspicion ; seule une théorie formatée où l'image devient formule, diagramme, graphe l'élève du statut de « béquille honteuse pour la pensée » à celui d'outil formalisé dont l'évidence graphique cesse d'être considérée comme frauduleuse. On peut le constater par l'extrême sécheresse graphique des articles de recherche (et par mimétisme des livres de cours), alors même que les brouillons des mathématiciens foisonnent en général d'inventivité graphique. La preuve n'est quasiment jamais présentée comme un processus d'élaboration mentale du résultat mais comme une vérification syntaxique et logique dépouillée de tout contexte sémantique, induisant une confusion dans l'esprit du public sur la réalité de l'activité mathématique, comprise à tort comme dénuée de toute inventivité, déconnectée de la créativité.

Mon projet de diffusion des mathématiques s'inscrit dans la volonté de donner aux images un statut plus conforme à l'importance qu'elles ont implicitement pour les mathématiciens : de véritables jalons mentaux nécessaires à la compréhension et à l'élaboration théorique elle-même. En montrant de telles images, mon objectif est également de passer outre le tabou de la vulgarisation mathématique qui rechigne à donner à voir ce qui n'est pas maîtrisé par le public. J'ai ainsi développé des webcams visant à illustrer diverses notions de mathématiques avancées. Le participant à l'atelier voit son image prise par une caméra vidéo numérique portative (communément appelée « webcam ») et déformée suivant un algorithme, dont les paramètres sont contrôlés par l'utilisateur par une formule explicite. Ces notions de mathématiques sont enseignées à l'université mais ne sont cependant pas à la pointe contemporaine de la recherche, et plutôt associées à des théories du XIX$^{\text{ème}}$ siècle : équations différentielles, géométrie des surfaces, transformation de Fourier, pavages du plan et analyse complexe. L'idée est de proposer des outils techniques qui permettent de fabriquer, à partir de concepts avancés, des images qui puissent donner un visage à une théorie mathématique dont la première utilité est, par delà un savoir théorique non maîtrisé par la plupart des spectateurs (ce qui est également le cas de la vulgarisation scientifique en physique théorique par exemple), de fabriquer des images étranges, belles ou amusantes, sans se soucier au premier chef des apprentissages.

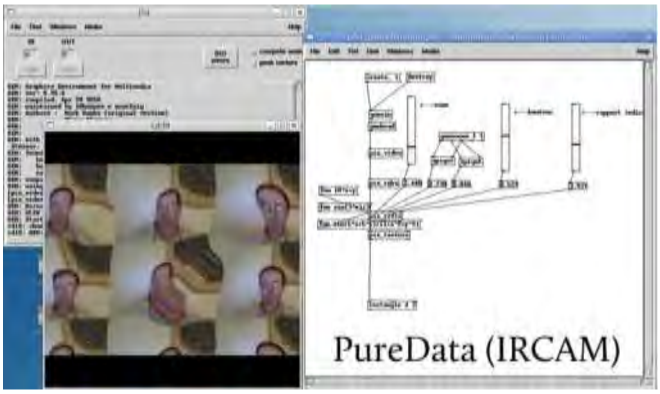


Figure 2 *– La webcam « miroir déformant » dans l'environnement PureData*

2. *Description de la webcam conforme*[3]

Un point de l'image projetée à l'écran est associé à un nombre complexe z. Une fonction analytique $z \longmapsto f(z)$ est choisie par l'utilisateur, entrée explicitement au clavier ou choisie parmi une liste, les paramètres entrant dans la formule pouvant être manipulés par des ostensifs d'interface utilisateur tels que des ascenseurs ou des points à faire glisser. L'image provenant de la webcam est vue comme pavant le plan complexe *image d'arrivée* de la fonction. Le point de départ z est colorié de la couleur du point d'arrivée $f(z)$. Prenons comme exemple $z \longmapsto z^3$, illustré par la figure ci-contre.

Figure 3 *– Un participant à un atelier webcam se met « la tête au cube »* $z \longmapsto z^3$

L'image est, à part au centre, partout reconnaissable comme une déformation locale de l'image de départ, cette déformation étant la composée d'une translation, d'une rotation et d'une homothétie, c'est-à-dire une similitude. Le rapport de cette similitude s'appelle (l'inverse de) la dérivée de la fonction f. Le point central est l'origine du repère. Le participant a ici joué à centrer sa bouche de manière à expérimenter visuellement le fait que le cercle unité (sa bouche) est globalement invariant, tout en étant répété trois fois car $(e^{i\theta})^3 = e^{3i\theta}$. On voit que les points 0 (le centre) et ±1 (les joues gauche et droites) sont également invariants, ils sont à la place où une simple image non déformée de la webcam les aurait projetés. Par contre, le menton et le nez sont échangés, ce qui se traduit mathématiquement par l'échange de $+i$ et $-i$. On peut également lire sur l'image, dans la fine tranche de l'axe horizontal qui est la partie réelle de l'image, que la fonction réelle associée $x \longmapsto x^3$ est une fonction croissante car le public est « la tête en haut », ce qui signifie que la dérivée est positive, avec un point d'inflexion à l'origine où le facteur d'échelle devient infini, c'est-à-dire que la dérivée y est nulle. Les monômes de degré différents sont également simples à comprendre, après les translations, homothéties, symétries et similitudes. Puis viennent les polynômes, les pôles, les fractions rationnelles. Ensuite on peut aborder les transformations polaire/rectangulaire à l'aide des fonctions exponentielle et logarithme. Les spirales logarithmiques, auto-similaires, sont particulièrement amusantes visuellement, en lien avec les notions de séries, de singularités essentielles...

[3] Voir aussi http://images.math.cnrs.fr/Applications-conformes.html.

Figure 4 *– La comparaison entre la fonction tangente et son développement en polynôme de Taylor permet de rendre visuel la notion de disque de convergence dans lequel la série converge vers la fonction (la différence entre les deux images y est très faible) et en dehors duquel elle diverge*

3. Contextes d'expérimentation

Ces dispositifs ont été utilisés quelques dizaines de fois, dans des contextes de diffusion des mathématiques différents, principalement lors de fêtes de la science, de conférences de vulgarisation et de rencontres avec des artistes, mais également comme outil d'enseignement et lors de conférences scientifiques. Les expérimentations ne s'inscrivant pas pour l'instant dans un cadre théorique formalisé, nous présentons des observations empiriques.

Figure 5 *– Des enfants jouent avec des spirales logarithmiques*

Lors des fêtes de la science, par exemple celles de 2009 et 2010 à Montpellier, des demi-classes de collège ou de lycée étaient inscrites et participaient à l'atelier pendant une demi-heure. L'enseignant est souvent placé à la manipulation du dispositif car l'effet comique du visage déformé de l'enseignant est un ressort ludique appréciable. Quelques tâches lui sont données, comme tenir des cibles rondes ou carrées devant la caméra, bouger des objets etc. Les élèves spectateurs dans le champ de la caméra participent invariablement à l'expérience, en faisant des grimaces, des gestes, en se déplaçant, en étant surpris par ce qui se passe et en contrôlant leur rétroaction pour obtenir l'effet désiré... Souvent, les enseignants commencent par prévenir l'animateur que les élèves n'ont pas vu telle ou telle notion et qu'ils ne vont rien retenir de l'atelier. L'aspect ludique est clairement important ici : montrer que les mathématiques peuvent produire des images belles et amusantes est déjà un objectif en soi. L'injonction didactique est très faible, et la compréhension des notions n'est pas la finalité du dispositif : l'objectif est plutôt la mise en place des mots-clefs associés à ces images, aux processus qui produisent ces images « ah, c'est un pôle, comme l'inversion de tout-à-l'heure » « on est la tête en bas, la dérivée est négative ». Nous pouvons constater que certains participants deviennent des « accros » qui ont une réelle soif de maîtriser le phénomène et produire les déformations voulues : ils modifient les équations sur le mode purement expérimental d'essais/erreurs, d'observation empirique. Des tâches simples effectuées par les participants permettent de suivre le degré de compréhension de l'auditoire comme dénombrer les zéros ou les pôles d'une fraction rationnelle ainsi que leur degré.

Le dispositif a également été utilisé en contexte d'enseignement et de recherche, par exemple lors du cours d'Analyse Complexe du Master 1 de l'université Montpellier 2 où la totalité du cours a été illustrée par ce procédé. Les étudiants m'ont déclaré que l'illustration du disque de convergence d'une série par exemple est rendue très explicite visuellement comme la zone où l'image du polynôme de Taylor et de la fonction sont visuellement identiques. Dans cette situation, l'outil est utilisé de manière complètement différente, de longues minutes sont passées à explorer une image interactive, non pas en faisant des grimaces, mais en dessinant interactivement des lignes au tableau, en soulignant des zones d'intérêt avec un pointeur, en comptant des nombres de tours en tournant autour d'une singularité, etc. L'instrumentalisation de l'artefact est toute autre et l'enjeu n'est pas de poser un jalon minimal d'un nom et d'une image, première prise sur une théorie, mais de consolider un savoir académique. La mesure précise du gain de l'utilisation pédagogique de ce dispositif est encore à faire, et je ne prétends pas qu'il permette de gommer la difficulté de l'apprentissage de l'analyse complexe qui reste difficile.

L'analyse didactique de ce dispositif est maintenant à réaliser pour étayer des hypothèses que nous avons pu élaborer. En particulier, nous pensons que les élèves, à tous les niveaux, retiennent majoritairement une notion comme « la dérivée d'une fonction est un taux d'accroissement local ».

III. PREMIERS ÉLÉMENTS DE RÉFLEXION THÉORIQUE

Dans les animations présentées, nous pouvons constater que des connaissances mathématiques sont toujours diffusées, mais que les contextes et institutions ne semblent pas donner à ces connaissances le même poids, la même portée. En contexte scolaire, l'enseignant semble souvent s'en tenir aux savoirs qu'il souhaite transmettre ; à l'inverse, l'animateur peut se permettre de « déborder » même s'il sait que cela ne sera pas forcément compris, ou au contraire renoncer à des objectifs didactiques pour faciliter une compréhension plus générale. Il semble certes y avoir une intention de diffuser des connaissances mathématiques, mais aussi l'intention d'en dire et d'en montrer plus pour donner un accès aux savoirs experts et pour susciter l'envie d'aller explorer ces domaines. L'animateur n'est pas placé face aux mêmes enjeux et aux mêmes obligations dans les différentes « institutions » de diffusion dans lesquelles il intervient.

Aussi, nous définissons une action de diffusion des mathématiques comme la mise en place d'un *dispositif mathématique* dans un *contexte* donné, par un *acteur de la diffusion* et pour un *public donné*. Elle se développe autour des *enjeux* et *intentions* de l'animateur, de l'institution dans laquelle il intervient, et du public qui a aussi ses propres attentes. La dimension temporelle joue un rôle important, puisque les enjeux et intentions évoluent, de façon implicite ou explicite, dans le cours des interactions entre les participants et l'animateur.

1. Enjeux et intentions d'une action de diffusion des mathématiques

Sousa Do Nascimento a distingué dans sa thèse (1999) les intentions et enjeux existants dans le mouvement de vulgarisation des sciences :

INTENTIONS	ENJEUX	ROLE DE L'ANIMATEUR
Elucidation	Valeurs (conscientisation, démystification)	Militant
Production	Procédures (règles, normes, techniques de fabrication)	Technicien
Médiation	Culture scientifique et technique partagée	Médiateur
Instruction	Connaissances scientifiques	Instructeur
Loisirs	Plaisir, sensibilisation	Amuseur

Tableau 1 *– Les modèles d'analyse de l'animation scientifique*

Ce tableau[4] nous permet de mettre en évidence le fait que l'intervenant est amené à endosser différents rôles et à réaliser son activité en menant conjointement différents objectifs. Cet aspect est essentiel, car il vient conforter notre thèse principale selon laquelle une action de diffusion peut être étudiée de façon globale en n'opposant pas vulgarisation et enseignement. L'enjeu d'enseignement est présent dans la dimension appelée « instruction », mais il s'articule avec d'autres enjeux, et il devient ainsi possible de chercher à décrire une action de diffusion dans la façon dont les enjeux s'articulent ou non. Ainsi, en contexte scolaire, il semble très net que l'intention d'enseigner est centrale et prioritaire : elle est même plus qu'une intention puisque l'institution scolaire traditionnelle fait porter à l'enseignant une injonction d'enseigner (Brousseau 1998). A l'inverse, il existe d'autres institutions éducatives où l'injonction didactique n'est pas présente. Pelay (2011) a montré dans sa thèse avec la situation des 10 consécutifs que dans les séjours de vacances où il expérimentait, les enjeux ludiques s'articulaient de façon importante avec les enjeux didactiques, et pouvaient même prendre le pas sur ces derniers. Ceci l'a conduit à introduire le concept de contrat didactique et ludique pour décrire de manière théorique ces articulations.

2. *Un concept émergent : le contrat didactique et ludique*

Comme nous venons de le voir, l'enjeu d'enseignement coexiste avec d'autres enjeux dans une action de diffusion des mathématiques. Cela conduit à changer la nature des interactions entre l'intervenant et les participants, qui ne peuvent plus être uniquement modélisées par un contrat didactique. Les expérimentations menées en séjour de vacances ont conduit Pelay (2009, 2011) à élaborer le concept de contrat didactique et ludique, pour modéliser les interactions ludiques et didactiques entre les enfants et l'animateur : il a montré comment celui-ci changeait par exemple les règles du jeu ou les variables didactiques pour tenter d'articuler simultanément les enjeux didactiques et ludiques.

Les nombreuses observations ont montré que, dans le contexte des séjours de vacances, l'animateur n'est pas confronté au paradoxe de la dévolution identifié par Brousseau :

> Le maître souhaite que l'élève veuille ne tenir la réponse que de lui-même, mais en même temps, il a le devoir social de vouloir que l'élève donne la bonne réponse. Il doit donc communiquer ce savoir sans avoir à le dévoiler, ce qui est incompatible avec une relation contractuelle. (Brousseau 1998, p. 303)

[4] Ce tableau doit probablement être complété et enrichi, mais ce n'est pas ici l'objet de notre exposé. Par exemple, les enjeux artistiques ou de beauté liés aux mathématiques n'apparaissent pas, alors qu'ils sont très importants, comme le montre les animations réalisées par les webcams mathématiques, et le travail de collaboration avec des artistes.

En effet, les animations ne se déroulent pas suivant cette logique : l'animateur peut avoir une intention d'enseigner et les enfants une intention d'apprendre, mais il n'y a bien souvent aucune obligation d'enseignement. Celui-ci n'a pas de contrainte qui le conduise à devoir diffuser des savoirs mathématiques déterminés. Il s'ajuste à l'attitude et aux capacités de son public. En contexte d'animation, la notion d'obligation ou d'« injonction didactique » tend à être remplacée par la notion de libre choix. Le public choisit de participer, et il peut même choisir quand stopper l'activité. On constate ainsi un véritable renversement vis-à-vis du contrat didactique habituel, puisque la responsabilité didactique est transférée en partie du côté du public : c'est leur volonté et leur désir personnel qui deviennent moteurs.

Nous faisons l'hypothèse que le concept de contrat didactique et ludique est pertinent pour étudier les contextes de diffusion des mathématiques où les enjeux d'enseignement ne sont pas présents et s'articulent avec d'autres enjeux, en particulier ceux de rendre l'activité attractive et plaisante. Cela peut conduire à identifier d'autres logiques de diffusion, avec ses propres paradoxes. Nous pouvons ici donner en exemple celui que nous appelons le paradoxe du libre choix : il est lié au paradoxe de la dévolution. Comme nous venons de le voir, l'animateur n'est pas obligé généralement en contexte d'animation de donner une réponse ou des indications à un problème posé, puisqu'il n'a aucune injonction d'enseigner. Mais on constate très souvent que le public est demandeur de réponses. L'animateur peut refuser, mais il y a le risque que le participant quitte l'activité (il peut aller à un autre stand par exemple dans le cadre de la fête de la science), d'où le fait qu'il puisse donner des indications pour maintenir l'interaction.

3. Dispositif didactique et « épaisseur didactique »

Nous pensons avoir mis en évidence la complexité des actions de diffusion des mathématiques que nous proposons dans différents contextes. Nous proposons ci-dessous un premier essai de modélisation.

Un dispositif de diffusion des mathématiques est considéré comme un vaste territoire mathématique que l'intervenant peut exploiter différemment en fonction du contexte et de son public, et en s'appuyant sur différents ressorts (didactiques, ludiques, magiques, etc.) : il peut poser des jalons et des étapes, et organiser temporellement son action pour réaliser les enjeux fixés. Une action de diffusion des mathématiques est alors définie comme une trajectoire qui se réalise dans la zone de diffusion permise par le dispositif didactique.

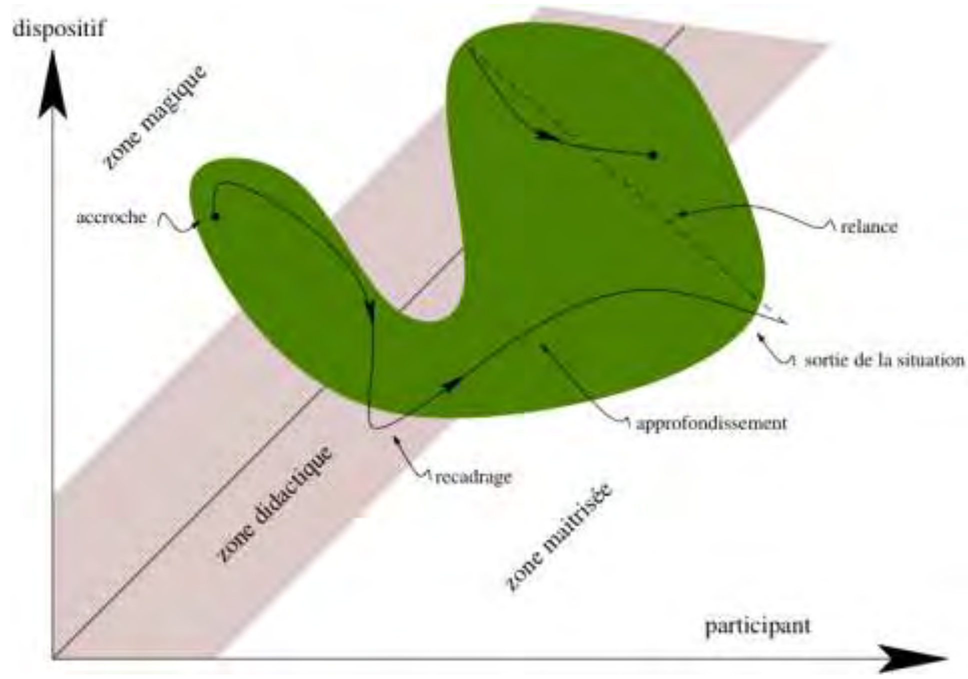


***Figure 6** – Une activité est vue comme une trajectoire individuelle et collective dans l'espace des connaissances*

Une action de diffusion transmet des connaissances et savoirs mathématiques qui sont répartis dans les différentes zones en lien avec les connaissances du public. Nous distinguons trois zones :

- la zone magique est la zone où le public n'a aucune prise sur ce dont on lui parle. Il ne peut pas faire de référence à des choses déjà connues. Plus la distance est grande, plus les mathématiques paraissent inaccessibles et en quelque sorte magique pour le public. Le savoir expert est tellement éloigné de celui du public que celui-ci ne peut en avoir un rapport « rationnel ». Nous parlons de « magie » dans le sens où le public n'a aucune prise sur la réalité mathématique qui lui est proposée : elle lui est même invisible, incompréhensible, inaccessible. Les technologies embarquées dans les objets électroniques qui peuplent nos quotidiens (ordinateurs, téléphones, cartes bleues, etc.) sont aujourd'hui très peu accessibles aux citoyens, et nous faisons l'hypothèse que le retour au magique (cf. par exemple le succès de « Harry Potter ») n'est pas sans lien avec cette déconnection des sciences du grand public.
- la zone maîtrisée est la zone où le public a une certaine maîtrise du contenu mathématique. Les connaissances mathématiques évoquées ont du sens, et il peut se « raccrocher » à des choses connues. Il peut toujours y avoir des approfondissements dans cette zone.
- la zone didactique est la zone où une compréhension et un approfondissement est possible autour d'une notion, d'un théorème, d'une technique, etc.

Dans la figure 6, nous représentons horizontalement les connaissances de l'apprenant, et verticalement les savoirs portés par le dispositif. Une seule dimension de savoirs est ici présentée mais une situation riche articule en général plusieurs dimensions : elle peut par exemple consolider des compétences calculatoires acquises tout en ouvrant à la construction de compétences de raisonnement non encore maîtrisées.

Ce qui nous paraît aussi central dans les deux animations présentées, c'est qu'elles s'appuient toutes les deux sur un dispositif qui est utilisé différemment selon le contexte, les enjeux, le niveau mathématique des participants, etc. Si cela est rendu possible, c'est parce que le dispositif semble présenter un potentiel mathématique et didactique que l'animateur peut exploiter différemment selon le contexte. Nous introduisons la notion d'épaisseur didactique d'une action de diffusion des mathématiques pour décrire sa capacité à diffuser plus ou moins de connaissances mathématiques à un public plus ou moins important. Cette notion d'épaisseur didactique nous semble particulièrement présente dans les activités menées par le groupe Math-A-Modeler : les situations de recherche pour la classe (SIRC) qu'ils conçoivent leur permettent d'intervenir dans des contextes très diversifiés avec des enjeux didactiques pour tout niveau mathématique : la même situation peut être proposée à des enfants de primaire, à des étudiants de master en mathématiques, et à des chercheurs en mathématiques (Grenier et Payan 2003).

IV. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Dans les deux dispositifs présentés, vulgarisation et enseignement ne semblent pas s'opposer mais au contraire s'articuler selon les contextes. Il existe souvent une dimension d'instruction dans une action de diffusion des mathématiques, mais la dimension didactique s'articule avec d'autres enjeux dans une animation et n'est pas forcément prioritaire. Nous faisons l'hypothèse qu'il est possible de chercher à catégoriser les différentes actions de diffusion, selon la part respective donnée aux différents enjeux. Chaque institution possède des spécificités qui peuvent être mises en évidence par contraste les unes par rapport aux autres. Selon cette perspective, une action d'enseignement pourrait se définir comme une action de diffusion des mathématiques où les intentions didactiques sont prioritaires sur tous les autres enjeux ; et une action de vulgarisation comme une action de diffusion où d'autres enjeux prennent le pas sur les intentions didactiques. A ce stade de notre travail, les recherches doivent être approfondies pour consolider nos hypothèses et notre élaboration théorique.

REFERENCES

Barallobres G. (2006) *Enseignement introductif de l'algèbre et validation*. Thèse de doctorat. Université de Montréal.

Brousseau G. (1998) *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La pensée Sauvage.

Godot K. (2005) *Situations recherche et jeux mathématiques pour la formation et la vulgarisation*. Thèse de l'université Joseph Fourier - Grenoble 1.

Grenier D., Payan C. (2003) Situation de recherche en classe : essai de caractérisation et proposition de modélisation. In Durand-Guerrier V., Tisseron C. (Eds) *Actes du séminaire national de recherche en didactique des mathématiques,* Paris : ARDM - IREM Paris 7-DIDIREM.

Pelay N. (2009) Vers le concept de contrat didactique et ludique. In *Actes de la 15ème école d'été de didactique des mathématiques*. Clermont-Ferrand.

Pelay N. (2011) *Jeu et apprentissages mathématiques, Elaboration du concept de contrat didactique et ludique en contexte d'animation scientifique*. Thèse de l'université Lyon I.

Rasse J. (2002) La médiation scientifique et technique, entre vulgarisation et espace public. *Quaderni* 46, 73-94.

Sousa Do Nascimento S. (1999) *L'animation scientifique : essai d'objectivation de la pratique des associations de culture scientifique et de techniques françaises*. Thèse de l'université Paris VI.

LA VULGARISATION DES MATHÉMATIQUES PAR LA MÉDIATION HUMAINE – EXEMPLE DU PALAIS DE LA DÉCOUVERTE

Romain ATTAL* – Pierre AUDIN* – Robin JAMET* – Guillaume REUILLER*

Résumé – « Montrer la science en train de se faire ». Avec ce slogan, affiché depuis sa création, par Jean Perrin en 1937, le Palais de la découverte est un exemple d'institution où l'on pratique la vulgarisation scientifique sous toutes ses formes (médiation humaine, expositions, Internet, revue, …), en particulier dans le secteur des mathématiques. S'il y a de grandes différences entre ces pratiques et l'enseignement, le grand nombre de jeunes visiteurs que nous recevons seuls, en famille, entre amis, ou lors d'une sortie scolaire encadrée par des enseignants, montre que la vulgarisation des mathématiques participe aussi à la formation mathématique du public.

Mots-clefs : Palais de la découverte, tous publics, exposé, atelier, expérimentation

Abstract – "To display science in the making", such was the challenge imagined by Jean Perrin when he created the Palais de la découverte in 1937. Nearly twenty five years later, the place remains true to its original challenge as an institution specially devoted to the popularization of science. The example of the mathematics sector, with a variety of ressources and workshops requiring trained staff, illustrates the role of a science centre in the diffusion of mathematical knowledge and its impact on visitors, especially the younger ones whether they come with their family or friends or in a school group.

Keywords: Palais de la découverte, visitors, talk, workshop, experiment

Le Palais de la découverte a été créé en 1937 par des scientifiques de renom, Jean Perrin en tête, bien sûr, mais aussi Emile Borel pour les mathématiques. Il s'agissait pour eux de montrer à la société la valeur de leur travail, la pertinence de l'investissement public dans la recherche scientifique, et aussi de susciter des vocations de chercheurs.

Dès l'origine, le but du Palais de la découverte était de montrer la science en train de se faire, ce qui pouvait s'entendre de différentes façons. Il y avait d'abord les conférences de scientifiques qui venaient au Palais de la découverte pour expliquer au public leurs travaux en cours. Il y avait aussi des démonstrateurs qui, face au public, réalisaient des expériences scientifiques : en ce sens la science était bien « en train de se faire » sous leurs yeux. Au fur et à mesure, les démonstrateurs sont devenus des « chargés d'exposés » puis des « médiateurs scientifiques ». Leurs activités se sont développées et diversifiées, mais le contact direct avec le public reste leur cœur de métier.

Le but de cette présentation est de décrire la vulgarisation en mathématiques telle que nous la pratiquons au Palais de la découverte, 75 ans après sa création, et de préciser les objectifs que nous poursuivons. La spécificité du Palais de la découverte étant la médiation humaine (comme en témoignent les dizaines d'exposés et ateliers proposés quotidiennement à notre public), nous avons volontairement choisi de n'aborder que cet aspect de notre travail, en occultant la médiation muséale, écrite et numérique.

I. UN MÉDIATEUR, DU PUBLIC, ET DES MATHÉMATIQUES

Notre offre de médiation humaine peut être classée de deux façons :

- du point de vue des publics : groupes scolaires en semaine et grand public pendant les week-ends et les vacances scolaires,
- du point de vue de nos pratiques : exposés, en « salle π » (figure 1), ou ateliers, en salle du « balcon des maths ».

* Membres du département de mathématiques du Palais de la découverte – France – math@palais-decouverte.fr

© Attal R., Audin P., Jamet R., Reuiller G. (2012) La vulgarisation des mathématiques par la médiation humaine – Exemple du Palais de la Découverte. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (SPE4, pp. 1926–1932). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

A chaque situation, son objectif.

***Figure 1** – Un médiateur scientifique en « Promenade dans les mathématiques » (exposé grand public) en salle π © Palais de la découverte*

1. L'exposé tous publics

Le déroulement d'un exposé tous publics peut varier beaucoup d'une séance à l'autre : notre volonté est de le personnaliser en tenant compte du public présent, de ses réactions au fur et à mesure de la séance. Chaque médiateur a alors une approche qui lui est personnelle et que son expérience lui permet d'améliorer au fil de ses rencontres. Le contenu et le déroulement exact de ces exposés ne sont pas fixés d'avance car ils dépendent des personnes présentes, de leurs goûts, de leur âge, de leur nombre et des interactions avec le médiateur.

Après les présentations d'usage, il est important d'établir un contact personnel avec les membres du public, qui permet de situer le niveau initial de l'exposé. Il s'agit de signaler aux personnes ayant déjà des connaissances mathématiques que l'exposé ne leur est pas directement destiné, car par principe, l'objectif est de permettre à toutes les personnes présentes de suivre. Il est bon de rappeler à tous les présents que les questions sont toujours bienvenues, même si cela oriente l'exposé dans une direction non prévue.

Beaucoup d'enfants assistent aux exposés tous publics, généralement de leur plein gré. Ceux que l'on force à venir font rapidement connaître leur ennui et le public est libre de quitter la salle à tout instant.

Il est essentiel de débuter l'exposé au niveau de connaissance le plus modeste, généralement celui des plus jeunes (ou des personnes qui ne font qu'en accompagner d'autres, en étant persuadées qu'elles ne comprendront rien) afin de ne pas les perdre dès le début. Le niveau de l'exposé peut alors s'élever progressivement et même si certains « décrochent » en fin de parcours, le public accepte la plupart du temps de ne pas avoir tout compris, pourvu qu'il ait le sentiment qu'avec un petit effort supplémentaire il pourrait clarifier les points qui lui ont semblé obscurs. L'idéal serait que chaque visiteur sorte de l'exposé avec une idée intéressante qu'il puisse ramener à la maison, ou avec l'envie d'en savoir plus sur les thèmes abordés. Se donner comme objectif de tout faire comprendre à tout le monde nous condamnerait à rester au degré zéro du savoir. Chacun, même parmi ceux qui suivent le mieux, doit pouvoir trouver de l'intérêt à l'exposé.

Prenons comme exemple un exposé général sur les nombres. Selon les goûts du public, l'exposé peut prendre une tournure historique en retraçant l'évolution des systèmes de numération à travers les âges et les différentes civilisations, ou devenir plus technique en étudiant la classification des nombres (entiers naturels ou relatifs, rationnels ou réels…). Si les plus jeunes sont encore attentifs, l'exposé peut aller plus loin : même avec un bagage mathématique modeste, il est possible d'aborder des domaines comme l'arithmétique modulaire, l'infini ou les nombres premiers, pourtant généralement relégués aux études supérieures. Après un exposé, le médiateur est parfois surpris du chemin parcouru avec des visiteurs qu'il ne connaissait pas une heure auparavant…

2. *Les ateliers*

Le concept a été créé par Jean Brette, ancien responsable du département de mathématiques, qui répondait ainsi à la demande de Michel Hulin, alors directeur du Palais de la découverte, de trouver le moyen de s'adresser à nos jeunes visiteurs. La plupart des visiteurs semblant intéressés par cette activité, nous faisons régulièrement des séances ouvertes à tous les publics, à partir de 9 ans et en accès libre : chaque visiteur vient quand il veut et repart quand il veut. Nous lui proposons comme test d'entrée un petit casse-tête constitué deux pièces de bois, qui semble d'abord impossible et se révèle « trop facile » assez rapidement. Un casse-tête de deux pièces paraît de prime abord si simple que même ceux qui déclarent « n'avoir jamais rien compris aux mathématiques » se laissent tenter. L'objectif est de préparer le visiteur à des activités ludiques mais nécessitant un peu de réflexion.

Chaque activité se présente sous la forme d'un jeu ou d'un casse-tête, mais l'objectif n'est pas d'arriver à faire ce qui est demandé dans la règle du jeu. Le visiteur va chercher à comprendre la situation et c'est la démarche mathématique qu'il va mettre en œuvre pour résoudre le problème qui importe (notion de condition nécessaire et/ou suffisante, démonstration d'impossibilité, récurrence, etc.). En général, à la fin de la recherche, le jeu ne présente plus grand intérêt pour le visiteur.

Les situations proposées relèvent de l'arithmétique élémentaire, de la combinatoire, de la théorie des graphes, de la topologie. Par exemple, combien de trous y a-t-il dans un cube percé de part en part au centre de chaque face (figure 2) ? La discussion s'engage : le cube a 6 trous parce qu'il a 6 faces ; ou 3 trous parce qu'il y a 3 directions pour percer ; des trous en plus quand on regarde de l'intérieur ; un seul trou parce qu'ils communiquent tous ensemble au centre, etc. De l'importance de la définition pour pouvoir faire des mathématiques avec elle … Et de l'importance de disposer d'un tableau, voire d'outils plus modernes, pour prolonger la discussion.

Figure 2 *– Le cube troué, une des « récréations mathématiques » que nous soumettons à la sagacité de notre public. © Palais de la découverte / Christian Judéi*

Ces ateliers ne sont pas des exposés : le médiateur scientifique n'est pas là pour développer un discours mais pour préciser la situation proposée, aider le visiteur dans sa démarche en lui posant des questions, ou lui permettre d'aller plus loin. Les échanges se font d'ailleurs autant entre élèves, entre parents et enfants, entre amis, ou même entre visiteurs qui ne se connaissaient pas, qu'entre les visiteurs et le médiateur (figure 3).

Figure 3 *– Les ateliers de « Récréations mathématiques », notamment parce qu'ils ne supposent quasiment aucune connaissance mathématique préalable, sont source d'échanges intergénérationnels très riches.*
© Palais de la découverte / Guillaume Reuiller

3. La spécificité des mathématiques

Un enseignant de physique ne dispose pas dans sa classe d'un aimant de 1 tesla ou d'un générateur électrostatique permettant d'atteindre 300.000 volts. Au Palais de la découverte, un médiateur scientifique du département de physique a ces outils à sa disposition. La spécificité des mathématiques fait qu'un médiateur qui veut vulgariser cette discipline scientifique a beaucoup moins d'outils « spectaculaires » pour tenir en haleine son public…Il est donc assez légitime de se demander quels sont les moyens dont nous disposons pour nos activités de médiation humaine.

Au département de mathématiques nous ne faisons pas des gerbes d'étincelles mais les ateliers de menuiserie, de mécanique, de plasturgie peuvent réaliser des objets manipulables par le public ou par le médiateur qui permettent d'apporter du concret et de varier les supports de médiation. Par exemple, pour parler de hasard dans les mathématiques, nous avons fait fabriquer une planche de Galton (revisitée par Paul-Louis Hennequin) et une bouteille d'échantillonnage sphérique, que nous pouvons utiliser dans nos exposés tous publics ou pour les scolaires (figure 4).

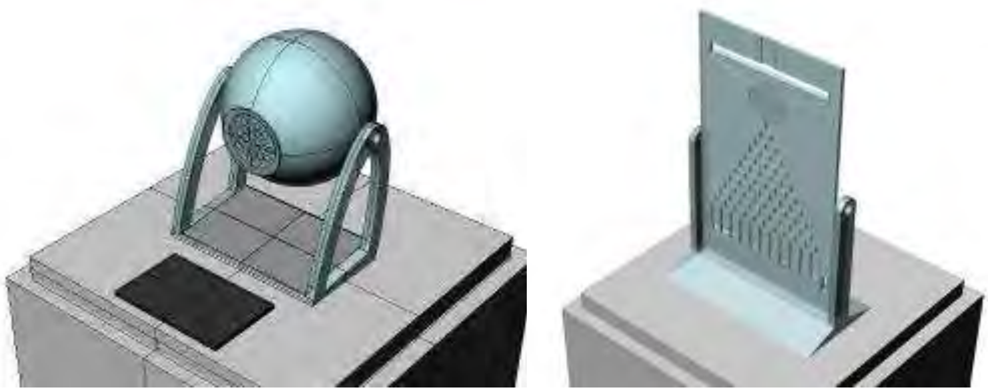


Figure 4 *– Une bouteille d'échantillonage et une planche de Galton*

Ces objets sont un support utile, mais ce ne sont pas les seuls. Nous profitons des ouvertures possibles vers d'autres champs disciplinaires pour arriver à nos fins. Ainsi, une exposition temporaire sur la construction des pyramides nous a permis de mener, régulièrement et en direct avec le public, un algorithme de construction d'une pyramide « grand format » à l'intérieur du Palais de la découverte (figure 5).

***Figure 5** – Un algorithme de construction d'une pyramide de 5 mètres de haut. © Palais de la découverte*

4. Les spécificités du public scolaire

S'adresser à un groupe scolaire présente des avantages et des inconvénients. L'avantage évident, c'est que les connaissances mathématiques des élèves sont assez homogènes : des élèves de CM1 ne connaissent pas le théorème de Pythagore, et des élèves de Terminale ne sont pas forcément des virtuoses du théorème de Pythagore mais ils le connaissent. Il est donc plus facile de savoir comment poser le niveau mathématique du discours à tenir avec le public. Par ailleurs, ce public particulier va rester le temps prévu : il est captif, ce qui permet de prévoir la séance et de mieux la rythmer. Le revers de la médaille, c'est la motivation des élèves : elle n'est pas acquise, contrairement à celle du grand public, et si l'enseignant est sans doute motivé pour emmener ses élèves assister à un exposé ou un atelier de mathématiques, il est probable qu'il n'y a pas unanimité des élèves à ce sujet…

Cependant, les élèves sont mis dans une situation assez différente de leurs habitudes (figure 6) : ils ne sont pas dans leur classe, leur interlocuteur n'est pas l'enseignant, il n'est pas en mesure de les évaluer, et finalement leurs postures sont assez différentes aussi. Il n'est pas rare d'avoir après la séance des commentaires enthousiastes de l'enseignant sur le comportement inhabituel de tel ou tel de ses élèves.

***Figure 6** – Un groupe scolaire en salle π. © Palais de la découverte / Philippe Lévy*

II. LE RÔLE D'UN MÉDIATEUR SCIENTIFIQUE

1. Un médiateur scientifique n'est pas un enseignant

Un enseignant a en charge des élèves sur toute une année scolaire, parfois plusieurs années, et il doit évaluer des savoirs et des compétences afin de vérifier leur acquisition. Le médiateur scientifique s'adresse à un public qu'il ne connaît pas, qu'il rencontre seulement quelques minutes et qu'il ne reverra plus, même s'il y a des exceptions. Il a aussi des objectifs d'apprentissage, mais aucun moyen d'évaluer s'il y a réellement apprentissage ni quel apprentissage. Faire acquérir des connaissances, en l'occurrence mathématiques, ne peut donc pas être l'objectif principal du médiateur scientifique. Mais alors quels sont ses objectifs ?

2. Susciter la curiosité et l'émerveillement

La culture mathématique, qui intègre aussi leur histoire et les ponts vers d'autres disciplines, scientifiques, artistiques ou humaines, est riche, foisonnante, vivante… et quasiment inconnue du grand public. Le médiateur scientifique en mathématiques est à la fois un défricheur et un déchiffreur : il s'immerge dans cette culture, l'explore pour y trouver des pépites susceptibles d'être comprises par un public non initié, de l'émerveiller et de lui donner envie de découvrir par lui-même le monde des mathématiques. Cela nécessite du temps pour se documenter et pour identifier, parmi tous les supports à notre disposition (site Internet, expositions, article pour la revue du Palais de la découverte, médiation humaine) le plus adapté et le plus à même de trouver son public.

Avec les groupes scolaires, puisque nous voulons montrer aux élèves que les mathématiques sont beaucoup plus vastes que ce qu'ils en voient à l'école, nous abordons des thèmes qui ne sont pas dans leurs programmes. Il serait illusoire de traiter en quelques minutes un thème du programme pour lequel l'enseignant dispose de plusieurs heures qui lui permettront de l'approfondir. Bien sûr, les thèmes abordés ne sont pas toujours déconnectés des mathématiques que les élèves connaissent, mais les titres et les contenus sont clairement différents. Voici quelques exemples : « Escaliers, ananas et nombre d'or » ; « Le nombre π » ; « Du jeu aux mathématiques » ; « Pavages et cristaux » ; « Espaces et dimensions » ; « Mathématiques et arts » ; « L'infini en une heure » ; « Du déterminisme au chaos » ; etc.

L'ironie du sort, c'est que nous sommes parfois rattrapés par les programmes. Par exemple, nous sommes très sollicités par les enseignants de Seconde qui, à l'occasion de la nouvelle option MPS (Méthodes et Pratiques Scientifiques), ont besoin d'éléments sur la cryptographie, ou les rapports entre mathématiques et musique. Ils viennent alors avec leurs groupes pour que nous leurs proposions des pistes qu'ils vont explorer avec leurs élèves en classe.

3. Répondre à une attente

Il y a aussi une partie de notre public qui est déjà passionée par les mathématiques. Pour eux, il ne s'agit pas de susciter la curiosité et l'émerveillement mais de répondre à leurs questions et leurs attentes. Parfois il s'agit d'attentes un peu forcées, comme des élèves qui mènent des travaux personnels, mais souvent il s'agit de demandes réellement motivées, comme des apprentis psychanalystes qui veulent comprendre les exemples disséminés dans les ouvrages de Lacan, ou de simples visiteurs heureux de nous rencontrer pour nous poser une question qui les hante et qu'il faut souvent aider à formuler. Avec nos visiteurs les plus brillants nous avons le plaisir d'élever le niveau de la discussion : c'est le cas lorsque nous recevons des lauréats de concours ou d'olympiades.

Parfois aussi, c'est une demande institutionnelle : lors de l'épidémie de grippe aviaire de 2007, le CNDP avait reçu pour mission de pouvoir diffuser des programmes télévisés pour les scolaires et la pauvreté du stock d'émissions mathématiques les a incités à venir filmer des émissions de culture mathématique au Palais de la découverte.

4. Faire faire des mathématiques

On ne comprend bien les mathématiques qu'en en faisant. Un de nos rôles est de permettre au public de « faire » des mathématiques, à la façon d'un chercheur, même si les questions posées sont élémentaires. Le but est de faire comprendre à notre public qu'il est important de trouver des réponses mais qu'il est plus important encore d'avoir envie de (se) poser des questions et de trouver des méthodes pour les aborder. Et que face à un problème rencontré dans la vie courante, il peut être envisageable de chercher soi même une solution, et c'est même agréable.

5. Les mathématiques font partie de la culture

Quand un médiateur demande à une classe, lors d'un exposé, si quelqu'un a entendu parler de telle ou telle notion, il n'est pas rare que l'enseignant intervienne pour dire « non, ce n'est pas dans le programme » ou « nous ne l'avons pas encore fait ». Notre rôle est aussi de faire comprendre aux élèves et aux enseignants que l'on a le droit de s'intéresser aux mathématiques en dehors de l'école, grâce à des lieux comme le Palais de la découverte, ou à des magazines, des livres des vulgarisation, des conférences.

III. POUR QUELS RÉSULTATS ?

1. Susciter des vocations ?

Si beaucoup de scientifiques disent avoir reçu le virus de la science d'un enseignant qui les a marqués, nombreux sont les visiteurs (scientifiques, enseignants, ingénieurs…) qui témoignent du fait que la visite du Palais de la découverte a été déterminante pour leur orientation scolaire et pour leur choix de carrière. (**56 % des scientifiques parisiens de plus de 30 ans et 41 % des scientifiques parisiens de moins de 30 ans indiquent que le Palais de la Découverte a joué un rôle dans leur vocation scientifique**. Rapport n°354 par M. Philippe Adnot au Sénat le 27 juin 2007)

2. Pour quels publics ?

Le public que nous pouvons toucher, celui qui vient au Palais de la découverte de son plein gré ou poussé par un enseignant, est-il réellement le « grand public » ? On peut en douter. C'est pourquoi nous nous déplaçons volontiers vers des publics nouveaux pour les faire profiter de nos activités : Fête de la Science, Salon de la culture et des jeux mathématiques, Rencontres sciences et citoyens, Salon ADREP (animation et développement des relations école-profession), voire des événements internationaux (Caravane de la Science en Algérie, festival de science en Allemagne).

IV. CONCLUSION

Nous ne sommes pas au terme de nos activités de vulgarisation. Dans une société dite « de la connaissance », on peut supposer que notre métier de médiateur scientifique ira en se développant. Il nous incombe de participer à ce développement en formant d'autres médiateurs scientifiques ainsi que des enseignants qui suivent chaque année les formations que nous leur proposons.

Dans le cadre d'*Universcience*, l'établissement qui englobe désormais le Palais de la découverte, nous sommes amenés à construire une école de la médiation, en partenariat avec des universités. C'est dire que le Palais de la découverte suit le chemin montré par son fondateur en évoluant de concert avec la société.

VULGARISER LES ZONES D'OMBRE

Benoît RITTAUD*

Résumé – Nous nous penchons sur la question de l'esprit critique, en montrant dans quelques types de situations qu'il convient de réfléchir sur une vulgarisation qui ne fasse pas systématiquement la part trop belle aux mathématiques. L'adoration naïve pour les « chiffres », la compréhension impropre des probabilités et autres problèmes du même ordre doivent nous interroger sur le meilleur moyen de présenter les limites des mathématiques, et non pas seulement leurs succès.

Mots-clefs : limites des mathématiques, esprit critique, nombres, probabilités

Abstract – We consider the question of critical mind, showing in several cases that we need to think to a popularization which would not systematically show mathematics in a positive way. Naive fascination for « figures », incorrect understanding of probabilities and other problems of the same kind ask us on the best way to present the limits of mathematics, and not only their success.

Keywords: limits of mathematics, critical mind, numbers, probability

Il est courant de définir la vulgarisation d'un domaine donné du savoir comme une tentative d'explication non-scolaire de ce en quoi ce domaine consiste. Dans une telle perspective, un élément fort de la discussion porte naturellement, indépendamment des questions de méthode, sur la « dose raisonnable », c'est-à-dire le niveau où placer le curseur entre cours magistral exhaustif et présentation générale et simplifiée (la réponse dépendant, bien entendu, du public visé). Même si l'on se met d'accord sur une vulgarisation dépouillée de tout contenu technique, mêlée d'éléments ludiques ou encore accordant une large place aux liens avec d'autres domaines (du savoir, de la culture, ou autre), il s'agit de permettre au récepteur de s'enrichir d'outils nouveaux. Outre le modèle de l'enseignement, dont il est toujours difficile de s'extraire complètement, l'on voit percer ici l'intention parfois publicitaire de la vulgarisation, intention explicitement formulée lorsqu'on en soutient la légitimité et l'importance au motif qu'il faudrait « faire changer le regard du public », voire « attirer davantage d'étudiants ».

De telles intentions laissent naturellement peu de place à une vulgarisation qui s'attacherait moins aux succès qu'aux zones d'ombre. S'agissant des mathématiques, force est pourtant de reconnaître que ces dernières ne manquent pas. L'objectif de ce qui suit est de présenter quelques éléments pour une vulgarisation qui en tiendrait compte. Il ne s'agit pas, bien sûr, de proposer de faire une quelconque contre-publicité aux mathématiques pour le seul plaisir de se démarquer. Notre objectif est de donner des pistes pour une vulgarisation des mathématiques qui valoriserait avant tout la *lucidité* du public. Il ne s'agit donc pas de vulgarisation au sens courant, mais plutôt d'une invitation au sens critique. Un tel travail de « méta-vulgarisation » a vocation à être mené par les mathématiciens eux-mêmes ou au moins par leurs médiateurs les plus reconnus et les mieux identifiés de public. Il s'agit en effet d'éviter toute méprise, car il va de soi qu'un discours sur les limites des outils mathématiques ne sera pas compris de la même manière selon qu'il émane d'un mathématicien ou de quelqu'un d'extérieur aux mathématiques. Ce point me semble mériter une attention toute particulière dans le contexte actuelle de défiance grandissante du public envers la science en général.

Pour mener ces réflexions, je me fonde sur une expérience ancienne de la vulgarisation (articles de magazines, livres, conférences, émissions de radio et de télévision) auprès de publics variés - avec une préférence pour les publics les plus éloignés des mathématiques

* Université Paris-13, Institut Galilée, Laboratoire Analyse, Géométrie et Applications – France – rittaud@math.univ-paris13.fr

© Rittaud B. (2012) Vulgariser les zones d'ombre. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (SPE4, pp. 1933–1938). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

(établissements scolaires non scientifiques, comités d'entreprise, universités populaires). Ma relative visibilité médiatique me vaut régulièrement des contacts avec des publics assez différents. Par ailleurs, ayant publiquement pris position dans le débat hautement polémique sur les changements climatiques, j'ai pu observer de près la manière dont la science en générale et les mathématiques en particulier sont mal comprises par nos contemporains, non seulement dans leurs aspects techniques mais, surtout, dans leur dimension intellectuelle elle-même.

I. L'ADORATION NAÏVE DES MATHEMATIQUES

Un passage obligé des discours sur la vulgarisation des mathématiques consiste à se désoler du peu de cas que la société civile fait des mathématiques. Ce discours, qui contient bien sûr une part de vérité, ne doit pourtant pas masquer le fait qu'il existe une réelle fascination pour les mathématiques, fascination qui touche un très large public. Selon l'expérience de l'auteur, et contrairement à une représentation courante, cette fascination ne s'exerce pas principalement sur les applications des mathématiques, pourtant immenses et essentielles au fonctionnement de nos sociétés actuelles. Si les mathématiques fascinent, c'est d'abord pour la part de « magie » qui semble les habiter. On ne compte plus les amateurs naïfs qui s'attellent, aujourd'hui comme hier et sans aucun doute demain, à l'étude des nombres premiers, à celles de la quadrature du cercle, ou encore à celle du nombre d'or, perçu comme une « clé de l'univers ».

Malheureusement, l'adoration presque mystique pour les mathématiques ne se cantonne pas à ces passionnés plutôt sympathiques. C'est en effet au cœur même de notre information quotidienne qu'elle se niche désormais, habillée de tout le sérieux qui convient. Un exemple récent a été donné par le Département des Affaires Économiques et Sociales des Nations Unies, dans ses prospectives sur la population mondiale (révision 2010, rendue publique le 3 mai 2011). Sur la page de leur site internet consacrée aux questions les plus fréquentes[1], l'on apprend que la population mondiale a atteint les trois milliards le 20 octobre 1959, les quatre milliards le 27 juin 1974, et ainsi de suite. Les dix milliards seront atteints très exactement le 18 juin 2083. Une telle manière de présenter les choses rappelle ce que Jean-Pierre Kahane a une fois appelé la *crétinisation*, la tentative délibérée d'abaisser le niveau intellectuel du public à des fins de communication. Les dates précédentes ont bel et bien été *calculées*, par interpolation exponentielle des estimations annuelles de population mondiale. À l'heure où ces lignes sont écrites, il est trop tôt pour savoir si des médias se seront fait l'écho, le 31 octobre 2011, de l'estimation onusienne selon laquelle nous atteindrons très exactement les sept milliards d'individus ce jour-là. Il est à craindre que oui, et que la compréhension par le public des notions d'approximation, d'intervalle de confiance et d'ordre de grandeur en sera une fois encore affaiblie.

Cette fascination aussi naïve pour les mathématiques est bien sûre exploitée à l'envi pour obtenir la confiance ou l'adhésion, y compris dans des milieux dont on pourrait attendre un esprit critique en éveil. Ainsi, dans tel rapport sur telle politique publique, l'on trouve force formules mathématiques destinées à illustrer combien les conclusions du rapport sont « statistiquement fondées ». Des formules plus d'une fois inutiles, voire fausses, et la plupart du temps fort mal expliquées. Des formules qui n'ont bien entendu été lues par personne, seulement aperçues, juste assez pour créer une impression favorable de « sérieux scientifique ».

[1] http://esa.un.org/unpd/wpp/Other-Information/faq.htm

Côté pile, on peut se réjouir de voir que les mathématiques disposent d'une aura telle qu'on ne juge plus nécessaire de questionner la pertinence de tout ce qui tâche de s'y rattacher. Côté face, il y a de quoi se lamenter de ces si nombreuses utilisations fautives qui en sont faites. S'il serait bien sûr contre-productif de combattre la fascination du public pour les mathématiques, du moins doit-on se poser sérieusement la question de la meilleure manière de la rediriger.

II. LE SYNDROME DU « CHIFFRE DU JOUR »

Le « chiffre du jour » est une rubrique qui apparaît désormais très régulièrement dans de nombreux médias d'information. Ce type de rubrique consiste en un titre qui prend la forme d'une simple valeur (résultat d'un sondage, somme d'argent record associée à tel événement, nombre de personnes ayant assisté à telle rencontre sportive…), suivi d'une explication qui dépasse rarement deux phrases.

La première réaction d'un mathématicien un peu informé devant une rubrique de ce genre consiste à questionner la pertinence de la valeur fournie, par exemple en posant la question de l'intervalle de confiance ou de la méthodologie suivie lorsqu'il s'agit du résultat d'un sondage. C'est là, bien sûr, un aspect important du problème, mais qui passe à côté d'un autre élément au moins aussi crucial : fondamentalement, une rubrique du type « le chiffre du jour » tente de faire croire qu'une grandeur pourrait se suffire à elle-même, qu'elle serait comme un condensé d'information et de raisonnement. Un mathématicien qui se contente de poser des questions techniques sur le « chiffre » délivré par la rubrique se met ainsi dans une position décalée, comparable à celle d'un historien qui s'interrogerait sur l'exactitude historique d'une brève biographie du « saint du jour » mais ne se poserait pas la question du prosélytisme qu'une telle biographie peut impliquer.

Dans la perspective d'une vulgarisation mathématique tournée vers l'information des citoyens, il apparaît comme essentiel et urgent de favoriser la réflexion critique sur l'utilisation médiatique des nombres, trop souvent réduits au rôle de slogans auxquels on croit pouvoir attacher une caution mathématique ou scientifique. Il y a quelques mois, lors de la séance de questions qui suivait une conférence que je présentais (au sujet des changements climatiques), un responsable politique présent a pris la parole pour critiquer mon point de vue en ces termes : « J'attire l'attention [du public] sur le fait que, dans cette conférence, il ne nous a été montré aucun chiffre ! » C'était là, selon lui, la preuve manifeste que mon point de vue n'était pas scientifique. Mon exposé n'avait certes pas manqué de courbes diverses et évoquait de nombreuses questions de tendances et d'ordres de grandeur. Aux yeux de mon critique, il aurait pourtant fallu y ajouter quelques « valeurs exactes » car, pour lui, c'était là la marque de la scientificité véritable.

Ce cas n'est malheureusement pas isolé, et les expressions du langage courant comme « la réponse tient en un chiffre », « les chiffres nous disent que », ou encore « les chiffres parlent d'eux-mêmes » disent assez que le trait d'esprit de Jacques Mailhot selon lequel « 80% des gens croient une phrase qui contient un pourcentage » n'a sans doute pas fini d'être d'actualité.

Une autre catégorie d'utilisation abusive du pouvoir de conviction des « chiffres » est celle des slogans politiques ou revendicatifs qui consistent à mettre face à face deux valeurs qui, ainsi rapprochées, doivent conduire à une conclusion prédéfinie (bien sûr, le caractère abusif du procédé ne permet pas de conclure quoi que ce soit sur le bien-fondé de la revendication ou de l'intention elle-même). Un exemple est donné par le rapprochement entre les bénéfices et le nombre de licenciements d'une entreprise la même année, « démontrant » que ces licenciements n'ont pas lieu d'être. Sur le strict plan de l'utilisation des « chiffres », un tel procédé est structurellement identique à celui des slogans politiques du type « trois millions de chômeurs, trois millions d'immigrés » (que l'on retrouve sous diverses formes selon les époques, l'une d'elles remontant aux affiches de campagne du parti nazi, au début des années trente du vingtième siècle). Face à un tel slogan, se lancer dans une « bataille de chiffres » pour expliquer le caractère fallacieux du rapprochement est un combat perdu d'avance, car une telle démarche implique des raisonnements qui n'auront jamais la brutale efficacité d'un slogan qui tient en une phrase. La tactique consistant à invoquer des principes moraux pour délégitimer le slogan est tout aussi délicate, et expose à un contre-argument facile du type : « vous vous réfugiez derrière votre idéologie et refusez de voir en face la réalité des chiffres ».

Certes, il est de toute façon difficile de lutter contre un slogan du type précédent, et il ne saurait être question ici de prétendre lui avoir trouvé une parade définitive. Il me semble pourtant qu'une approche utile, mais bien entendu non exclusive, consisterait à donner au citoyen, en amont, les moyens d'exercer son esprit critique sur le sens même de ce qu'est un nombre. Non pas un objet « magique » qui pourrait penser à notre place, non pas un outil mystérieux utilisé par quelques alchimistes selon des modalités qui resteront à jamais hermétiques au profane, mais un élément parmi d'autres pour raisonner, qui a bien entendu son intérêt mais aussi (et surtout, serait-on ici tenté d'écrire) ses limites. Quiconque prétend substituer des nombres à un raisonnement rationnel devrait, dans une société de citoyens formés à l'esprit critique sur les mathématiques, inspirer *a priori* le soupçon et non la confiance.

III. LES PROBABILITES : ENTRE INCERTITUDE ET IGNORANCE

Les probabilités sont l'une des théories dont le rayonnement extra-mathématique est le plus fort. C'est aussi un domaine des mathématiques où l'intuition est le plus facilement prise en défaut. Pour n'en donner qu'une illustration classique, rappelons le petit paradoxe de la situation suivante : mon voisin a deux enfants dont au moins une fille. Quelle est la probabilité (sous les hypothèses ordinaires d'indépendance et d'équiprobabilité des sexes) que l'autre enfant soit un garçon ? Un simple dénombrement montre en à peine une ligne que cette probabilité n'est pas de 1/2 mais de 2/3, et il faut n'avoir jamais fait cet exercice devant des étudiants pour ignorer combien peut être grande la résistance à ce résultat.

L'on entend parfois affirmer que les mathématiques favoriseraient, par l'exactitude de ses raisonnements, une voie possible vers une certaine forme de sagesse. Elles permettraient, dit-on, de dissiper les illusions causées par un manque de connaissances. Un contre-exemple très simple à cette idée est donné par les jeux de hasard du type Loto. C'est l'un des tous premiers exercices d'analyse combinatoire que de calculer la probabilité de gagner le gros lot au Loto, pour en déduire l'espérance mathématique de gain. Quelle que soit la variante considérée du jeu, la conclusion est invariablement la même : le Loto est très défavorable au joueur. Tout étudiant des filières mathématiques sait cela, et pourtant il se trouve des mathématiciens tout à fait sérieux qui jouent régulièrement au Loto en se justifiant à l'aide d'arguments aussi candides que ceux des joueurs les moins versés dans les mathématiques (alors qu'il existe pourtant aussi quelques arguments mathématiques plus solides en faveur du joueur de Loto). Un éminent chercheur m'a ainsi confié qu'il jouait la même grille depuis des années et « estimait donc ne plus pouvoir s'arrêter », car il jugeait confusément que ses chances augmentaient au fil du temps. Un autre exemple m'a été donné par un chercheur d'une équipe de… probabilités, qui, lui, cherchait carrément des « martingales » pour anticiper les bons numéros à partir des résultats des tirages précédents ! (En me confessant son pêché mignon, il m'a fait jurer de n'en jamais rien dire à son responsable d'équipe…)

Bien sûr, il est utile de connaître l'espérance mathématique de gain à un jeu de hasard avant d'y jouer. Il est incontestable qu'un tel calcul est d'une aide précieuse pour permettre au joueur potentiel d'agir en connaissance de cause. Mais le point est ailleurs : il est que la question des jeux de hasard ne se réduit pas à un calcul, et que se limiter au seul aspect mathématique, c'est abandonner une part essentielle de l'explication du fait que tant de gens raisonnent improprement sur les probabilités, y compris lorsqu'ils disposent des moyens intellectuels nécessaires pour tenir un raisonnement correct.

Historiquement, l'un des tous premiers exemples (si ce n'est le premier) de raisonnement probabiliste erroné est aussi ancien que la théorie des probabilités elles-mêmes, puisqu'on le trouve sous la plume de Blaise Pascal. Son fameux « pari » consiste en effet en une tentative de démontrer que miser sur l'existence du dieu chrétien est un jeu favorable au joueur. Dans le jeu proposé par Pascal, il y a une probabilité p que Dieu existe. Le jeu consiste à miser sa vie sur son existence ou son inexistence. Le joueur qui se trompe perd une (sa) vie. Si Dieu n'existe pas et que le joueur n'a pas été dupe, il gagne une vie. Si Dieu existe et que le joueur avait choisi d'y croire, il gagne une infinité de vies (la vie éternelle promise par les Écritures). Un calcul d'espérance mathématique conduit alors Pascal à estimer que, puisque $p\times\infty = \infty$ pour tout $p > 0$, l'intérêt du joueur est toujours de choisir la foi. Ce n'est qu'au milieu du XX^e^ siècle qu'Émile Borel a publié une note qui explique où se niche l'erreur mathématique du raisonnement de Pascal (celle-ci tient au fait, compris seulement au début du XX^e^ siècle avec la théorie de la mesure d'Henri Lebesgue, qu'un événement peut être possible tout en étant de probabilité nulle ; il est donc licite de choisir $p = 0$ sans nier toute possibilité à l'existence de Dieu ; ce choix implique le calcul de $0\times\infty$ qui, dans ce contexte, donne le résultat 0).

Pour notre sujet, l'illustre cas du pari pascalien est riche de deux enseignements plus ou moins inverses. Le premier est que force est de constater que ce pari n'a probablement jamais converti personne à la foi chrétienne, si bien que même un raisonnement mathématique ayant toutes les apparences de l'exactitude n'emporte pas nécessairement l'adhésion. Seul celui qui a une foi inébranlable en la force de l'argumentation rationnelle en sera surpris : si des contre-arguments au pari ont été donnés très vite, ceux-ci n'avaient rien de mathématique. Rétrospectivement, l'on peut se dire qu'il est heureux que l'on ne se fie pas qu'à elles et que le sens critique permette à l'occasion de ne pas être dupe de leurs erreurs - celle concernant le pari a tout de même tenu bon quatre siècles avant d'être détectée !

A contrario, la structure du pari pascalien est aujourd'hui souvent reprise pour soutenir tel ou tel point de vue, principalement pour légitimer une peur quelconque. Par exemple, l'on dira que, certes, il n'est pas certain que tel produit chimique soit dangereux, mais que s'il l'était, les conséquences redoutées seraient si grandes qu'il n'est pas possible de prendre le risque d'autoriser l'utilisation de ce produit. Tel quel, ce raisonnement est mathématiquement identique à celui du pari, à la seule différence que le $+\infty$ de la vie éternelle de Pascal est remplacé, dans le nouveau calcul, par un apocalyptique $-\infty$. À nouveau, sans doute, il est permis de penser que ce type de raisonnement ne persuade que ceux qui ne demandent qu'à être convaincus. L'apparente exactitude du raisonnement n'est donc, à bien y regarder, qu'un outil de communication mis au service de telle ou telle cause. En ce sens, nous avons affaire à une instrumentalisation des mathématiques qui, même si elle n'est pas nécessairement volontaire ou consciente, doit être combattue. Nul autre qu'un mathématicien n'est mieux placé pour le faire.

IV. ÉLEMENTS DE META-VULGARISATION

Les zones d'ombres prennent plusieurs formes, en voici quelques unes auxquelles il me semble important de songer dans le cadre de la vulgarisation des mathématiques :

- les mathématiques ne sont pas terminées ; beaucoup de questions restent en suspens, dont certaines depuis très longtemps.
- les mathématiciens ne sont pas infaillibles (ni les ordinateurs, d'ailleurs).
- il ne suffit pas d'habiller une question par des formules mathématiques ou des modèles informatiques pour que la bonne réponse surgisse.
- pour certains problèmes, les mathématiques ne sont pas un outil pertinent.

Parmi les types d'erreurs qui jalonnent l'histoire des mathématiques et de leurs applications, mentionnons :

- les erreurs de calcul, de raisonnement ou de programmation (ce dernier point recelant de nombreux cas spectaculaires).
- les erreurs dans l'interprétation d'un calcul ou dans l'évaluation de sa portée (cas tout particulièrement fréquent en statistiques).
- les erreurs fondamentales (moyennes portant sur des grandeurs de natures différentes, hypothèse non valide de linéarité des phénomènes…).

Enfin, parmi les causes d'erreur, mentionnons :

- la confiance excessive dans la puissance des mathématiques et/ou de celle de l'ordinateur.
- le biais intellectuel (opinions politiques, croyances religieuses…).
- la difficulté à remettre en question sa façon de voir les choses.
- le comportement panurgique.

Certes, expliquer pourquoi les « chiffres » ne sont pas la solution à tous les problèmes, ou exhiber des exemples où la confiance naïve en des données quantitatives seules a conduit à des échecs, constitue un programme qui ne semble guère épouser les objectifs traditionnels de la vulgarisation telle que peut la percevoir le monde académique, qui préfère donner de son domaine une image plus positive. Les mathématiciens peuvent d'autant moins ignorer les questions d'« image » qu'il leur faut tenir compte du problème grandissant de la désaffection des étudiants pour les filières scientifiques en général et mathématiques en particulier. Il reste que faire confiance aux capacités du citoyen de faire la part des choses, c'est faire le pari de l'intelligence. C'est ce pari qui structure l'idée même de vulgarisation.

LES MATHÉMATIQUES DISCRETES COMME MOYEN D'APPRENTISSAGE ET DE VULGARISATION DES MATHEMATIQUES

Ahmed SEMRI*

Résumé – Il est clairement établi aujourd'hui que les filières de mathématiques ont subi une véritable saignée en termes d'effectif d'élèves, une tendance qui se trouve être à l'échelle internationale. Les causes de cette désaffection sont de plusieurs ordres (pédagogiques, culturelles…) et la vulgarisation peut être un moyen pouvant rendre les mathématiques plus attrayantes et accessibles à une large communauté. Nous faisons l'hypothèse que l'apprentissage des mathématiques passerait beaucoup mieux en introduisant des problèmes de type combinatoire et pourquoi pas, des jeux mathématiques et participerait à une vulgarisation et popularisation des mathématiques.

Mots-clefs : Mathématiques Discrètes, modélisation, jeux, apprentissage, problèmes ouverts

Abstract – It is clear today that math courses have been a real drain in terms of student enrollment, a trend that happens to be international. The causes of this decline are several kinds (educational, cultural...) and extension may be a way that can make mathematics more attractive and accessible to a wider community. We hypothesize that the learning of Mathematics happen much better by introducing type combinatorial problems and why not, mathematical games and participate in an extension and popularization of mathematics.

Keywords: Discrete mathematics, modeling, games, learning, open problems

I. INTRODUCTION

La désaffection grandissante des filières scientifiques en général et mathématiques en particulier (observée en Algérie comme ailleurs) associée d'une baisse sensible du niveau ne peut nous laisser indifférents. De nombreux enseignants chercheurs en mathématiques et en didactique des mathématiques se sont d'ailleurs investis et se sont penchés sur les moyens à mettre en œuvre pour rendre les mathématiques plus attrayantes et accessibles à une plus large communauté.

Ces actions sont menées à travers des séances de vulgarisation, de jeux, de situations de recherche, de séminaire et de concours suscitant un esprit compétitif et motivant. Aussi, il est important de lancer ce travail à tous les niveaux et dès le cycle primaire.

Cet exposé présente une partie d'une étude menée conjointement avec l'équipe Grenobloise « maths à modeler » sur le thème de recherche de la place de la combinatoire (au sens le plus large, c'est à dire des mathématiques discrètes) dans l'enseignement et comme culture mathématiques.

II. VULGARISATION ET APPRENTISSAGE PAR LES MATHEMATIQUES DISCRETES

1. Pourquoi les mathématiques discrètes ?

La combinatoire a, dans la communauté mathématique au sens large, une image un peu stéréotypée. Pour beaucoup, un exercice combinatoire sera associé à un casse-tête, un problème s'énonçant rapidement et ne nécessitant pas de connaissances particulières pour sa résolution. Ainsi donc, les mathématiques discrètes sont fortement associées aux jeux

* Laid3, USTHB – Algérie – ahmedsemri@yahoo.fr

© Semri A. (2012) Les mathématiques discrètes comme moyen d'apprentissage et de vulgarisation des mathématiques. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des Mathématiques et Contrat Social : Enjeux et Défis pour le 21e siècle – Actes Du Colloque EMF2012* (SPE4, pp. 1939-1952). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

mathématiques et autres olympiades de même que souvent ce sont des problèmes de mathématiques discrètes que les revues de vulgarisation scientifique « Science et avenir », « Pour la science » ou « La Recherche » proposent à leurs lecteurs. Ces revues de vulgarisation ou de diffusion scientifique s'adressent à un public large, d'origine majoritairement scientifique et ayant, à priori, une formation mathématique non négligeable.

Les mathématiques discrètes (dont le nom commun est combinatoire) s'intéressent à toutes configurations descriptibles par un ensemble fini ou dénombrable de relations numériques ou géométriques. Elles construisent aussi des objets et des méthodes spécifiques (décomposition/recomposition, structuration, induction, coloration...).

Comme un problème qui s'énonce facilement se résout facilement est une idée répandue, les problèmes font de parfaits candidats au rang de casse-tête, jeu, amusement. Ainsi, si la combinatoire conserve cette image amusante, c'est essentiellement dû au fait qu'elle est peu connue, reconnue. Le seule crédit qui lui est accordée se trouve peut être du côté du dénombrement.

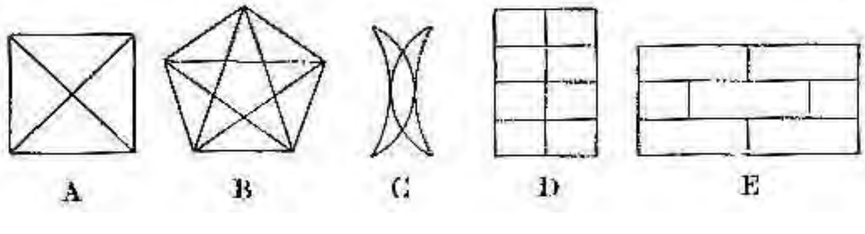
En Algérie, la combinatoire au sens large est inexistante en tant que savoir institutionnel jusqu'au cycle universitaire, à l'exception d'un moment en terminale sur le chapitre dénombrement ou analyse combinatoire. En France, ce n'est qu'à la faveur des nouveaux programmes mis en place en 2002 que la combinatoire a été introduite d'une manière timide en classe de terminale de certaines filières spécialisées. Dans d'autres pays tel la Hongrie ou les Etats-Unis, les mathématiques discrètes ont une position bien plus centrale, ce qui explique peut être leur très bon classement lors des olympiades de mathématiques. En Hongrie par exemple, les mathématiques discrètes apparaissent dès l'équivalent de la classe de quatrième, dans un chapitre intitulé « *combinatoire* » au même niveau que l'algèbre ou la géométrie. Ce chapitre est scindé en cinq parties, des exercices d'introduction, le principe des cages à pigeons, le crible logique, le dénombrement (permutation, arrangement) et la récurrence. L'apprentissage de savoirs discrets, qui passe notamment par la théorie des graphes, se poursuit jusqu'à l'examen correspondant au baccalauréat.

L'idée d'une transposition de cette partie des mathématiques dans l'enseignement secondaire et même au collège (totalement évacué jusque là) trouve ainsi son essence. Se pose alors la question essentielle de la caractérisation d'un milieu au sens didactique du terme pour la combinatoire. Cette question est d'autant plus complexe que les problèmes des mathématiques discrètes font appel à des concepts nombreux et variés et parfois complexes.

Nous développerons notre thèse sur les possibilités qu'offrent, à faible coût du côté des savoirs, quelques problèmes de base de combinatoire pour l'apprentissage de la preuve et de la modélisation, en s'appuyant sur des exemples d'exercices de combinatoire et sur des expérimentations menées à différents niveaux en France et en Algérie avec des étudiants et des enseignants sur un problème d'empilement de cercles dans des domaines simple.

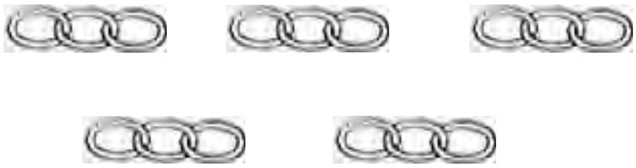
2. *Exemples de problèmes combinatoires*

Exemple 1 : Un problème très ancien était de dire s'il était possible de dessiner d'un seul trait de plume les figures suivantes :



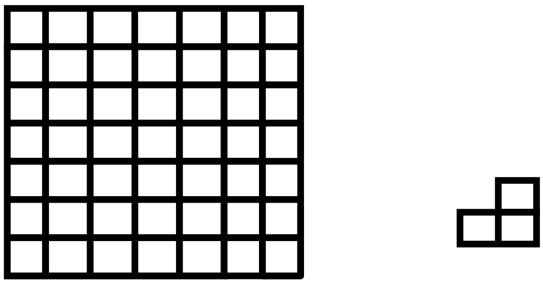
La réponse à ce type de problème fut apportée par le théorème d'Euler grâce à la théorie des graphes.

Exemple 2 : On dispose de 5 chaînettes formées chacune de 3 anneaux. Combien d'anneaux faut-il dessouder puis ressouder pour former une seule chaînette de 15 anneaux ?



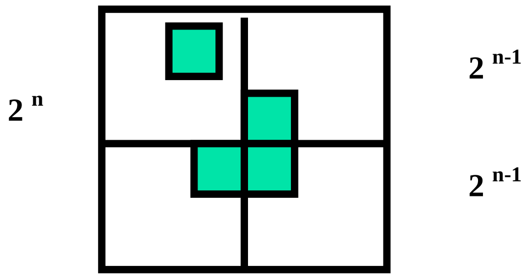
- Solution optimale : 3 anneaux qui sont obtenus en décomposant complètement une chaînette pour ensuite recomposer l'ensemble, une procédure pas évidente à voir

Exemple 3 : Peut-on paver un polymino carré de côté 2^n privé d'une case par des triminos en L ?



Preuve par induction

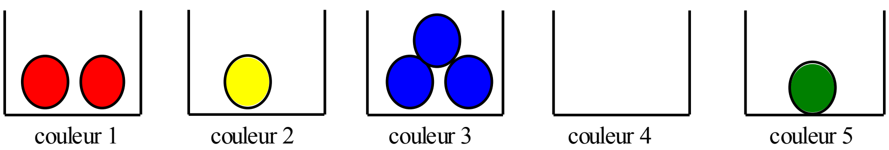
A. pour n = 0 la solution est évidente.
B. pour n > 0, en coupant le carré en quatre, et en plaçant un trimino "au centre", on obtient quatre carrés de cotés 2^{n-1} privés d'une case, qui par hypothèse de récurrence sont pavables par des triminos.



Exemple 4 : « Quel est le nombre de façons différentes de colorier n boules en au plus k couleurs ? »

Un travail de modélisation permet de résoudre efficacement le problème :

- Affecter des couleurs aux boules, (non pertinent)
- Affecter des boules aux couleurs.



O O / O / O O O / / O

0 0 1 0 1 0 0 0 1 1 0

Ce qui ramène le problème à : « Avec deux lettres « 0 » et « 1 », combien peut-on former de mots différents de longueur n+k-1, comportant n « 0 » » ?

3. *La vulgarisation pour tous les âges*

De nombreuses équipes de recherches pilotent des activités présentées sous formes plus ou moins ludiques (Maths en jeans, Rallye, Fête de la Science, etc..). La création d'activités « supplémentaires » de ce type, qui amèneraient les élèves à travailler sur des problèmes mathématiques ouverts présentés sous forme ludique, visent à réhabiliter les élèves et/ou la société avec la culture mathématique.

Exemple des Ateliers et les Séminaires Juniors

Fort de l'expérience de l'équipe grenobloise « maths à modeler » avec laquelle nous travaillons en étroite collaboration, l'idée d'ateliers encadrés par des enseignants du primaire autour de problèmes ouverts de mathématiques qui seront proposés à des élèves nous semble un moyen intéressant et à moindre coût pour réhabiliter cette discipline auprès de nos élèves.

L'objectif fondamental de la recherche est l'introduction des mathématiques discrètes comme un outil de formation pédagogique, au travers de situations de recherche pour les élèves, ou de manifestations de vulgarisation scientifique pour le grand public. En effet, l'étude didactique des situations de recherche montre la mise en œuvre de notions transversales au savoir (notions de modélisation, preuve, définition, optimisation…) des concepts abstraits difficiles à transmettre par les voies traditionnelles de l'enseignement.

Les moniteurs présentent aux élèves une situation de recherche issue de problèmes actuels en mathématiques discrètes. La forme est ludique et peut utiliser des supports matériels.

Aucun prérequis n'est nécessaire. Le problème est présenté dans un contexte général, puis on propose aux élèves d'y réfléchir sur des cas plus restreints, d'où ils peuvent extraire plusieurs résultats à leur portée. On prend soin de laisser la plus grande liberté aux élèves dans leurs démarches. L'obligation de résultat n'est pas privilégiée.

Les situations proposées mettent souvent l'accent sur les notions de preuve, conjecture, induction, exemple, contre-exemple…

Le Séminaire Junior

A l'issue des travaux de l'atelier qui s'étalera sur plusieurs séances, on pourrait envisager l'organisation d'une demi-journée à l'université où les élèves pourraient venir dans les laboratoires présenter leurs résultats sous forme d'un séminaire junior.

Cette façon de faire permettra un rapprochement entre les acteurs des deux paliers (Education nationale et l'Enseignement Supérieur) et sera une sorte de porte ouverte sur la recherche en mathématiques à l'université.

Stands des savoirs

Il est indispensable de faire en sorte que la culture mathématique dépasse les murs des écoles et des universités. Pour cela, il faudra que enseignants et chercheurs investissent les lieux publics et « prêchent » la bonne discipline à l'instar de ce qui se fait en France lors de la fête de la science, où des stands sont implantés dans les principales places publiques et animés par des chercheurs.

Ce type d'expérience a été testée pour la première fois l'année dernière en Algérie, appelée « caravane du savoir » où des « jeunes talents » ont sillonné le territoire Algérien au moyen d'un bus, proposant tout une panoplie de jeux et d'activités mathématiques à chacune de leur escale. Les animateurs au nombre de quinze étaient constitués essentiellement d'étudiants en Recherche Opérationnelle, Informatique, Statistiques, d'autres de l'ENA et d'une association scientifique. Au préalable, Ils ont été formés à l'initiative de la Direction de la recherche, ceci en collaboration avec le Palais de la Découverte (Paris). A chacune des escales effectuées dans seize villes du pays, la caravane visé une université ou un centre universitaire.

III. EXPERIMENTATION DU PROBLEME D'EMPILEMENT DE DISQUES

Parmi les problèmes ouverts (ouvert dans le sens qu'il s'agit d'un problème de recherche non résolu pour tous les cas) en mathématiques discrètes, celui de l'empilement de disques égaux dans des domaines simples a été étudié et expérimenté en France à différents niveaux (IUFM, Universités, etc..). Cette expérimentation a été renouvelée et ses résultats analysés par la suite en Algérie (l'unique pour le moment). Notre choix pour ce problème est due essentiellement au fait qu'il requiert une activité importante de modélisation et de preuve et se pose en terme d'optimisation et l'analyse des différentes productions dresse le même constat à savoir une grande difficulté à modéliser et démontrer qu'une configuration est optimale. Nous présentons brièvement l'expérimentation réalisée à Alger (étalée sur 6 séances d'une heure et demie) avec 6 étudiants (deux groupes de trois) de DEA en recherche opérationnelle qui ont tous suivi des cours spécialisés de modélisation et d'optimisation.

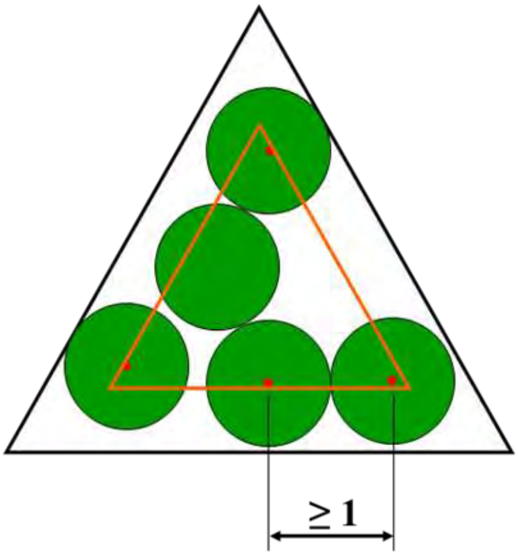
1. Description et présentation du dispositif expérimental

Situation : *Voici un problème ouvert de mathématiques : Déterminer l'empilement optimal (au sens de la densité) de n disques égaux de diamètre* 1 *dans un triangle équilatéral ?*

Une formulation différente de la situation est : *Quel est le plus petit triangle équilatéral pouvant contenir n disques (cercles) égaux de diamètre* 1 *?*

Plus précisément il s'agira de traiter l'empilement de n disques égaux dans un triangle équilatéral pour des valeurs de n de 1 à 6 puis dans un carré pour les valeurs de n de 2 à 5 et de répertorier les différentes stratégies et les savoirs spécifiques mis en en avant pour la résolution de ce problème

Les empilements ci -dessus de 8 ; 9 et 10 disques sont-ils optimaux ?
En considérant les centres des cercles, le problème se modélise en termes de placement de points à l'intérieur d'un triangle équilatéral plus petit tel que deux points quelconques sont distants d'au moins 1.



2. *Analyse a priori du problème*

Nous présentons ici, quelques résultats de l'analyse didactique du problème d'empilement. Nous faisons l'hypothèse que les étudiants se saisiront du problème avec les outils de la géométrie traditionnelle (scolaire), du moins pour les quatre premières valeurs de n ($n < 4$). Un des facteurs plaidant en faveur de cette hypothèse est le fait que les objets en présence sont des objets assez simples (triangle équilatéral, cercles) et pour lesquels plusieurs propriétés connues pourront être utilisées.

Un autre élément non négligeable à considérer est l'énoncé du problème. Si le mot « optimal » présent dans l'énoncé peut être révélateur du caractère combinatoire du problème car très usité dans le vocabulaire en cours d'optimisation combinatoire et de programmation mathématique, rien n'indique pour autant que celui ci requiert une activité importante de modélisation. D'autant plus que ce problème diffère totalement de ceux sur lesquels les étudiants ont l'habitude de travailler qui sont souvent d'ordre économique ou industriel, et qui se traduisent souvent par la reconnaissance des variables et la formulation des contraintes et de la fonction objectif à optimiser.

La nature combinatoire du problème conjuguée avec la simplicité des objets, induit une écriture de l'énoncé en des termes simples (le problème devient accessible même pour des non spécialistes). L'absence dans l'énoncé de termes spécifiques ou relatifs à des notions précises fera que les étudiants ne sauront pas forcement quels sont les savoirs et les connaissances q'.il faut mettre en œuvre pour la résolution du problème. Compte tenu de la simplicité des premiers cas du problème d'un point de vue perceptif, les étudiants l'aborderont d'un point de vue géométrique.

L'élément essentiel sur lequel les étudiants vont s'appuyer pour résoudre le problème est naturellement la figure géométrique. En effet, les différents dessins représentant les dispositions possibles des cercles pour un cas donné va permettre aux étudiants de dire que tel placement est meilleur par rapport aux autres et parfois même de poser des conjectures sur l'optimalité d'un empilement donné. Sur ce point précis et quelle que soit la valeur de n considérée, il est très probable que des étudiants prennent ces conjectures pour des preuves « implicites » et développent des calculs pour la recherche du côté du triangle pour une disposition donnée des cercles sans pour autant montrer que celle ci soit optimale.

Le passage du cas $n = 2$ à celui de $n = 3$ va amener les étudiants à se poser la question de savoir si la solution optimale de 2 est une solution pour 3, en plaçant le troisième cercle sur le coin du triangle. Pour y répondre, Il est attendu que les étudiants procèdent par des calculs sur les aires en comparant l'aire du triangle équilatéral à celle occupée par les 3 disques.

Cette méthode permet seulement de dire s'il y a impossibilité dans le cas où l'aire du domaine est inférieure à celle des disques. Autrement, rien ne permet de conclure à cause des espaces qui se créent entre les cercles et qu'il est difficile de calculer.

Il est attendu que du côté des étudiants, la difficulté du problème va se ressentir crescendo au fur et à mesure qu.ils progressent dans l'étude des cas. Si pour $n \leq 3$ les dispositions optimales des cercles peuvent sembler presque « naturelles », il n'en est pas de même pour les cas suivants. En effet, la disposition de 4 ; 5 à 6 cercles dans le triangle équilatéral admet plusieurs variantes et il faudra en choisir une parmi plusieurs. Les étudiants rentreront dans une logique d'optimisation combinatoire, une notion mathématique qu'ils connaissent mais qu'ils n'ont jamais abordée sous cet aspect.

Du fait que plus on avance dans les valeurs de n et plus les stratégies basées sur la géométrie deviennent moins pertinentes, de même que les calculs pour trouver le côté du carré (qui peuvent ne pas paraître facultatifs si on ne passe pas au modèle point) qui deviennent complexes, il est donc attendu qu'un blocage se fasse à ce niveau. A partir de là, trois alternatives se présentent pour faire passer les étudiants de la situation initiale au problème modélisé avec les points :

a. Estimant qu'à travers les activités des étudiants il n'y a aucune chance que le modèle point puisse apparaître, celui ci est donné par l'enseignant. L'activité de modélisation devient dans ce cas quasiment caduque et les étudiants seront dans un nouveau problème dont on demandera d'accepter ou bien de travailler l'équivalence.

b. En partant du problème, l'enseignant demande de le modéliser en exprimant la question posée, les contraintes du problème, la variabilité des positions etc.
Cette modélisation peut être celle souhaitée si elle est menée en privilégiant les objets, de même qu'elle peut s'avérer mauvaise si elle se traduit comme un changement de cadre uniquement et dans lequel on n'est pas plus dotés d'outils qu'au départ.

a. L'enseignant propose aux étudiants de modéliser le problème en favorisant l'émergence d'une modélisation des objets en présence (cercles et triangles). Cette démarche permet de rentrer dans une véritable activité de modélisation partant des objets et aboutissant à des modèles pouvant être validés ou invalidés par des retours au problème initial.

Notre choix s'est porté sur cette dernière alternative pour mener notre étude en raison de ce qu'elle pose comme problématique de modélisation de même que nous faisons l'hypothèse que c'est la démarche qui favorise le plus l'apparition du modèle points.

Essayer de déterminer les zones susceptibles de contenir des cercles, mènerait les étudiants à rentrer dans une pré-modélisation du problème, sans pour autant parvenir au modèle points. En effet, il est attendu que les étudiants représentent le centre des cercles et traduisent la contrainte de tangence par le fait que deux centres quelconques doivent être distants d'au moins 1, ceci sans que les cercles ne disparaissent de leurs figures.

Un autre obstacle à l'émergence du modèle point est le fait que les étudiants ne vont pas penser à réduire le domaine en un domaine plus petit qui de facto fera disparaître les cercles. La raison essentielle est due à notre avis aux dessins des étudiants qui auront tendance à faire des représentations d'empilements denses pour essayer de dégager des conjectures.

De ce point de vue, nous prévoyons une approche purement statique des étudiants sur l'optimisation alors qu.il est clair que l'on perd beaucoup lorsqu'on évacue l'approche dynamique. En effet, l'idée de travailler sur un domaine plus petit est nettement mieux perçue si on représente une disposition non optimale des disques qui se trouvent tous à l'intérieur du domaine, offrant ainsi la possibilité de voir émerger une démarche dans laquelle on fera bouger les objets. Le passage à une disposition meilleure s'obtient en procédant par une première réduction évidente du domaine de façon à ce qu'un des disques (qui sera le plus près) vient toucher une des frontières. L'idée d'une seconde réduction du domaine a plus de chance de survenir en se ramenant aux centres des cercles (à condition que ceux ci apparaissent dans cette représentation) en disant qu'un cercle est tangent au domaine revient à dire que le centre du cercle est sur la frontière d'un domaine plus petit obtenu en mordant sur les frontières d'une manière proportionnelle en avançant l'argument qu'une solution n'est bonne que si un des cercles au moins touche un côté.

3. Exemples de production des étudiants

Une fois le scénario arrêté et le contrat didactique établi, l'expérimentation a eu lieu et nous présentons ici quelques figures issues des productions des étudiants.

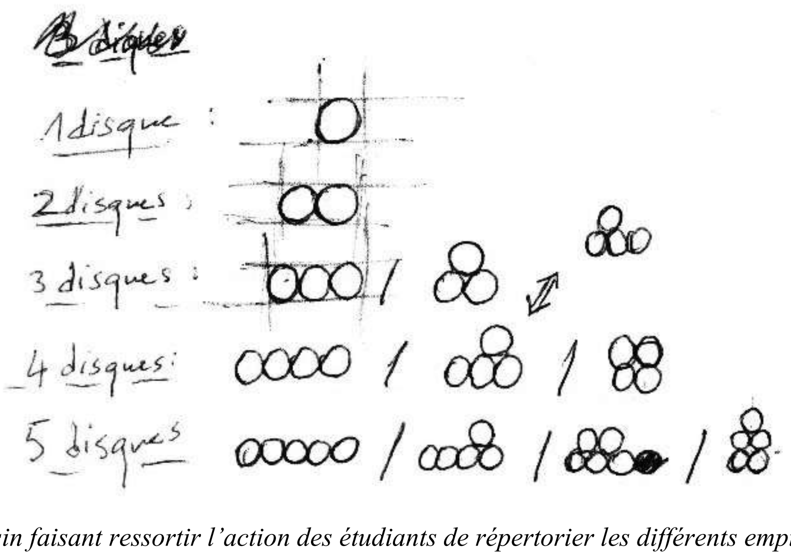


***Figure 1** – Dessin faisant ressortir l'action des étudiants de répertorier les différents empilements possibles des triangles.*

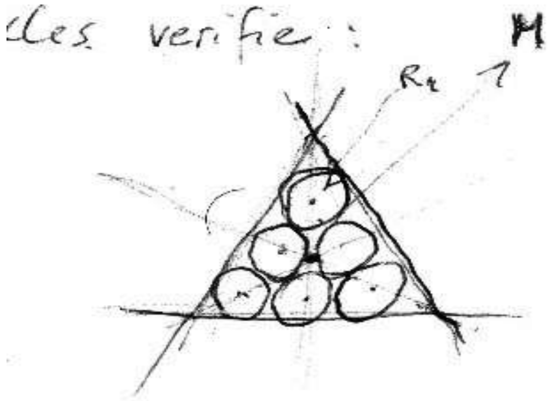


Figure 2 – *Production des étudiants faisant intervenir le « centre de gravité »*

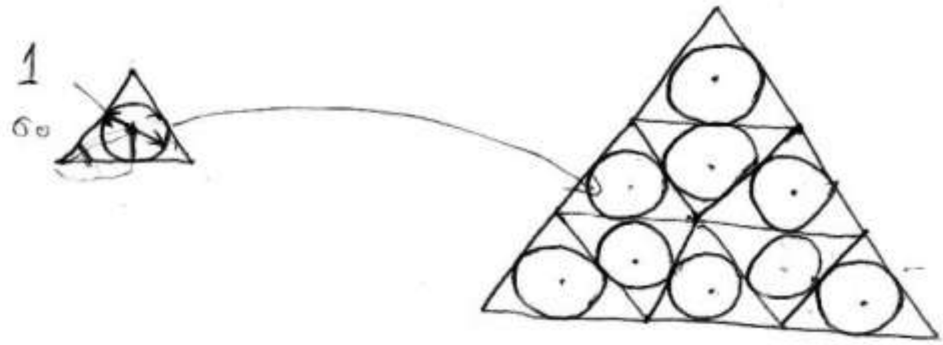


Figure 3 – *Production qui interpelle la notion d'optimum local et l'optimum global*

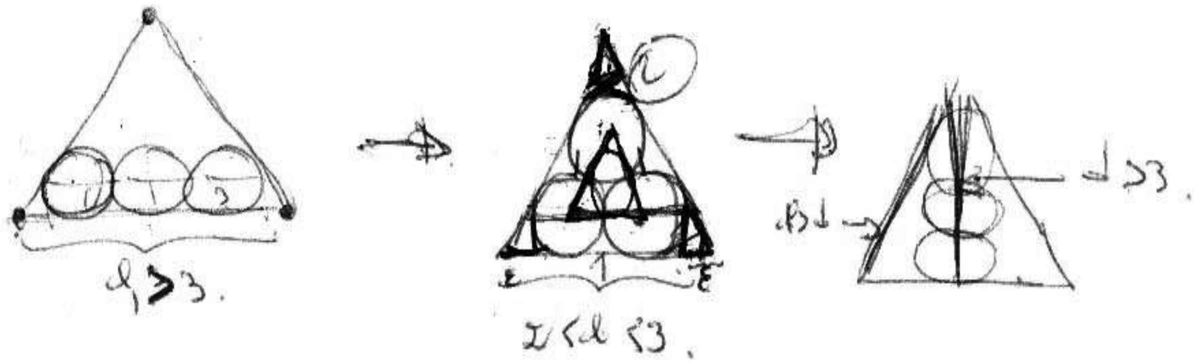


Figure 4 – *Pour n=3, trois empilements « candidats » pour être la solution sont retenus et le problème se ramène à déterminer la meilleure disposition parmi les 3*

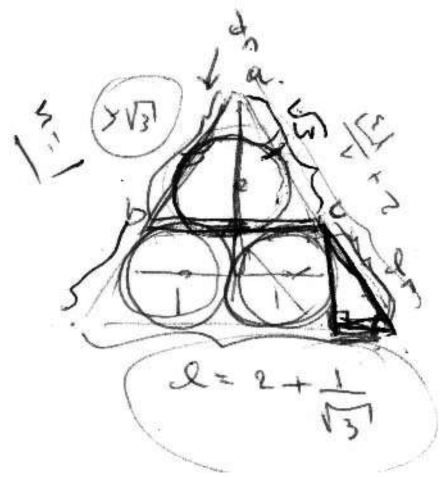


Figure 5 *– Production d'étudiant montrant les calculs du côté du triangle pour n=3 et pour cette configuration*

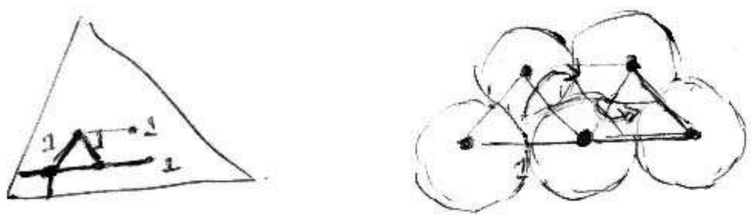


Figure 6 *– Représentation d'étudiants après que l'enseignant a donné le modèle « points »*

4. Analyse d'un point de vu cognitif de l'expérimentation

Il s'agit dans ce paragraphe de cerner les conceptions des étudiants sur les objets et les notions présentes dans le problème qui leur était proposé et les conséquences qu'ont eues ces conceptions sur l'activité de modélisation.

Des cercles et un triangle équilatéral, voilà deux objets géométriques très connus par les étudiants. Les propriétés relatives au triangle équilatéral ont été rapidement retrouvées (hauteur, médiane, bissectrice, Thalès, ..), à l'exception du calcul de l'aire qui pour certains est confondu avec celui du triangle rectangle isocèle.

Concernant l'objet cercle, si ses quelques propriétés intrinsèques (d'ordre géométrique) ne semblent pas avoir posé de problèmes aux étudiants, il semble que le regard porté sur cet objet est essentiellement axé sur sa forme géométrique. En effet, il apparaît clairement dans la production des étudiants que la représentation des cercles se fait sous forme de disques c'est à dire sans aucune référence à leur centre. Cette perception de l'objet restera présente même lorsqu.il s'agira de traduire le fait que la distance entre deux cercles (sous entendu entre les centres des cercles) doit être supérieure ou égale à 1. Cette contrainte étant très vite mise en œuvre lorsqu'il s'agit de la formuler analytiquement (c.et à dire en terme d'équations ou d'inéquations) en prenant comme variables les coordonnées des centres des cercles mais pas sur le plan géométrique où les cercles, qu'ils soient tangents ou disjoints sont représentés en occultant leur centre.

Ainsi, le fait que le raisonnement des étudiants s'appuyait sur ces figures a induit ces derniers à ne pas traduire la contrainte en termes de distance entre les centres des disques mais plutôt en termes de contact entre les contours, chose visible dans les représentations. Ce regard qu'ont eu les étudiants sur l'objet cercle a constitué à notre sens le premier obstacle à une modélisation du problème en terme de points. En effet, le rôle des centres des cercles est déterminant pour une modélisation du problème alors que leurs contours deviennent inutiles. Inversement, un disque peut très bien être représenté sans faire référence à son centre. Etant donné que sur le plan institutionnel le cercle est toujours présenté comme une figure géométrique définie par son centre et son rayon, le regard porté par les étudiants lors de ce problème aurait pu être induit par l'énoncé où l'on parle de disques et non de cercles, même si une remarque à ce sujet a été faite par l'enseignant à l'entame de l'expérimentation.

Placer des cercles égaux dans un triangle équilatéral se ramène à une mise en relation entre les deux objets géométriques que sont le triangle équilatéral et le cercle. De cet exercice, un groupe d'étudiants a semblé mal à l'aise révélant ainsi des lacunes en géométrie résultant de la difficulté d'associer deux objets différents « qui en plus sont mobiles » et ceci a engendré des erreurs comme celle relative aux points de tangence d'un cercle avec le triangle équilatéral.

L'autre volet important inhérent à ce problème est le concept d'optimisation. Si le programme scolaire évacue totalement cette notion en dehors de l'aspect recherche d'extremum d'une fonction, les étudiants en présence ont suivi lors de leur formation des cours spécialisés en la matière en graduation et en D.E.A, de même qu.ils ont tous été confrontés à des problèmes pratiques d'optimisation combinatoire au cours de leur mémoire de fin d'étude.

Lors de cette expérimentation, on a relevé que les étudiants focalisent leur attention beaucoup plus sur l'objectif du problème que sur les objets en présence, le premier réflexe étant de déterminer une fonction objectif à maximiser ou à minimiser. Dans la mesure où dans ce problème les variables de la fonction objectif ne sont pas facilement identifiables, cette vision étroite portée par les étudiants sur la notion d'optimisation a constitué un véritable obstacle. Un début d'explication à cela peut être obtenu lorsqu'on consulte le contenu des programmes d'enseignement suivis par les étudiants. En effet, en épluchant ces programmes, il ressort qu.il n'y a pas de module spécifique à la notion de modélisation. Cette notion est en fait présentée beaucoup plus en tant qu'outil de résolution dans deux modules, l'un de programmation linéaire où il s'agit à partir d'un énoncé de traduire le problème en terme mathématiques et l'autre de théorie des graphes.

Ainsi, on peut avancer le fait que la modélisation du problème par les étudiants n'apparaît pas en raison des conceptions que ces derniers se font sur les concepts de géométrie et d'optimisation ainsi que de la manière dont s'est déroulé l'apprentissage des étudiants à l'activité de modélisation (souvent associée dans les modules enseignés à un programme mathématique). Les problèmes posés sont toujours d'ordre économiques et/ou industriels pour lesquels la modélisation consiste à repérer et définir toutes les variables et d'écrire les contraintes du problème tous cela d'une manière analytique. La réitération de ce type d'activité finit ainsi par consacrer une sorte d'algorithmisation, une culture présente dans les pratiques d'enseignement « Le professeur justifie théoriquement l'algorithme et montre son fonctionnement, l'élève apprend à le reproduire. La difficulté resurgira au moment de l'appliquer, c'est à dire de reconnaître sa pertinence comme outil dans des problèmes nouveaux » (S. Johsua, J.J. Dupin).

Un autre point intéressant relevé au cours de cette expérimentation a trait aux conceptions des étudiants et de leur réaction vis à vis d'une connaissance nouvelle. En effet, lors des premières séances, il s'est nettement dégagé que des éléments d'un groupe (B) sont rentrés dans le problème avec des outils qui leur ont permis d'avoir des résultats (même partiels) contrairement aux autres membres (groupe A) qui semblaient un peu perdus développant programme mathématique erroné et calculs inutiles. Le fait marquant est qu'une fois le modèle point connu (donné par l'enseignant), ce groupe a été plus prompt à abandonner les outils utilisés jusque là et de s'emparer du modèle ceci à l'inverse du groupe (B) dont les éléments ont résisté avant d'abandonner leur stratégie en continuant à utiliser leurs propres « outils » malgré les difficultés rencontrées. Ceci corrobore les hypothèses constructivistes de notre conception de l'apprentissage au sens de Arsac dont certaines peuvent être explicitées par la métaphore du bricoleur avec sa boite à outils confronté à un problème de bricolage nouveau pour lui.

Nous terminons par relever la réaction très positive des étudiants tout au long de cette expérimentation. En effet, les étudiants sont venus spontanément témoigner leur intérêt à ce type d'activité déclarant n'avoir pas l'habitude de travailler sous cette forme. De même qu'ils ont reconnu que le problème proposé leur a paru de prime abord très élémentaire et avouent avoir été étonnés par sa difficulté.

IV. LA VULGARISATION POUR REMEDIER A LA DESAFFECTION DES MATHEMATIQUES : QUELLE PORTEE EN ALGERIE ?

Sans diminuer de l'importance de la vulgarisation des mathématiques dans la formation et la diffusion de la culture, on est amené à se poser la question suivante :

« Eu égard à la réalité et la spécificité du système éducatif et de la société Algérienne, la vulgarisation suffit-elle à elle seule à résoudre le problème de désamour des jeunes des mathématiques? Sinon, quelles autres mesures d'accompagnement doivent être prises pour y remédier ? »

Cette question était au centre d'un atelier que la Faculté de Mathématiques a organisé et qui a vu la participation de tous les responsables institutionnels en charge des problèmes d'enseignement des Mathématiques à différents niveaux.

De cet atelier, il en est sorti un certain nombre de recommandations dont certaines ont déjà été mises en place telles que :

- Organisation de tournois mathématiques entre établissements de même cycle au niveau primaire et secondaire.
- Encourager et soutenir les bons élèves à participer aux olympiades de mathématiques.
- Adopter l'enseignement des mathématiques assisté par approche expérimentale.
- Ouverture d'offres de formation universitaires sur les mathématiques appliquées en adéquation avec le monde socioprofessionnel, telles les mathématiques financières et actuariat, économétrie, cryptographie, géométrie virtuelle,...
- Encourager la recherche sur la didactique et l'histoire des mathématiques.
- Favoriser la création d'associations savantes : la Société des Mathématiciens d'Algérie (SMA) qui vient d'être agréée récemment, compte jouer un rôle important dans le développement des mathématiques en Algérie. Elle renferme en son sein une commission « enseignement » et s'attelle à adhérer aux organisations savantes internationales telles que IMU, ICME, UMA.

Parmi les autres recommandations qui ont été faites, certaines, même si elles n'ont pas encore été initiées, semblent constituer des actions prioritaires, on peut citer :

- Création d'un centre de recherche en enseignement des mathématiques doté de ressources humaines qualifiées et de moyens matériels modernes adaptés.

- Utilisation des approches didactiques et pédagogiques modernes de l'enseignement des mathématiques, notamment le travail de manière collectif, au sein de la même classe et entre classes via une plate forme sur internet, approche participative plus efficace et moins univoque des mathématiques.
- Sensibilisation de la société civile sur l'intérêt et l'utilité des mathématiques, à travers les associations des parents d'élèves.
- Diffusion de la culture mathématique à travers des séminaires et conférences de vulgarisation en ayant recours aux médias et les TIC.
- Valorisation sociale du métier d'enseignant des mathématiques, au niveau primaire et secondaire.

Un appel pressant a été lancé, émanant de responsables du Ministère de l'Eduction, pour la prise en charge des problèmes liés à l'enseignement des Mathématiques par des chercheurs universitaires spécialistes en didactique. Il faut savoir qu'en Algérie, la didactique des Sciences en général et des Mathématiques en particulier, a toujours été considérée comme une non science et les enseignants qui s'y intéressent parfois mal compris. Nonobstant cela, quelques chercheurs ont persévéré et ont constitué un petit noyau, et ce n'est que récemment, lors de la mise en œuvre des réformes du système éducatif et des difficultés qui ont surgi que le besoin de regards de spécialistes en la matière s'est fait sentir. C'est ainsi, que la Direction de la recherche a, dans le cadre des projets nationaux de recherche, agréé deux projets sur l'enseignement des Mathématiques.

Un des projets se penchent sur la recherche de situations problèmes pour l'apprentissage des Mathématiques, tandis que le second dont je suis porteur traite de la vulgarisation des mathématiques. Nous ambitionnons à travers ce projet, en collaboration avec des collègues français, de créer une antenne de « maths à modeler » comme ce fut le cas de l'université belge de Liège pour promouvoir des activités de vulgarisation.

V. CONCLUSION

Les mathématiques, science par excellence et outil incontournable à tout autre discipline scientifique, sont en passe de devenir un véritable cauchemar pour nos élèves et une science « fiction » pour notre société tant elles sont devenues inaccessibles. L'avènement de la révolution numérique avec tout ce qu'elle a engendré comme changement en termes d'enseignement et de recherche (logiciels, spécialisation précoce, abstraction, décontextualisation, etc..) a accentué cette désaffection. Dans ce travail, nous montrons le rôle que pourraient jouer les mathématiques discrètes dans l'enseignement et dans le domaine de la vulgarisation. En particulier, nous faisons l'hypothèse que l'apprentissage de concepts difficiles tels que la modélisation et l'activité de preuve passerait beaucoup mieux s'il se faisait sur toutes ou du moins plusieurs situations différentes, notamment sur des jeux mathématiques et des problèmes de type combinatoire et participerait à une vulgarisation et popularisation des mathématiques en général.

REFERENCES

Arsac G., Chapiron G., Colonna A., Germain G., Guichard Y., Mante M. (1992) *Initiation au raisonnement déductif au collège*. Lyon : Presse universitaire de Lyon, IREM.

Di Martino H., Legrand M., Pintard D. (1995) Modélisation et situations fondamentales. In *Actes de la VIIème école d'été de Didactiques des Mathématiques.*

Grenier D., Payan C. (1999) Spécificités de la preuve et de la modélisation en mathématiques discrètes. *Recherches en didactique des mathématiques.*

Grenier D., Paya. C., Semri A. (2003) Réflexion sur les Notions de Modélisation et d'Optimisation : Analyse d'une Expérimentation sur un Problème d'Empilement de Cercles Egaux. In *Actes du Colloque International Espace Mathématique Francophone, 19-23 décembre 2003,* Tozeur, Tunisie.

Godot K. (2005) *Situations recherche et jeux mathématiques pour la formation et la vulgarisation*. Thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble.

Johsua S., Dupin J.-J. (1993) *Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques*. Paris :PUF.

Payan C., Semri A. (2006),About the proofs on the packing of 16, 25 and 36 equal circles on a square. *Geombinatorics* XVI, issue 1, 235-241.

Semri. A (2002) Jeux mathématiques : une image de la combinatoire. In *Communication aux journées d'études nationales sur les méthodes d'enseignement de mathématiques*, Université de Tebessa.

Semri A. (2007) Les Mathématiques Discrètes comme moyen d'apprentissage de savoirs transversaux et de popularisation des mathématiques. In *Communication aux journées Didactiques et Pédagogiques de Mathématiques* JPDM'7, USTHB.

Sousa do Nascimento S. (1999) *L'animation scientifique : essai d'objectivisation de la pratique des associations de culture scientifique et technique françaises.* Thèse de l'Université Pierre et Marie Curie, Paris 6.

Maha Abboud-Blanchard, *LDAR – Université Paris Diderot, France.*

Comment la conception de ressources pourrait intervenir dans la formation de formateurs

Nous traitons dans cette communication la question générale de l'interaction entre les résultats des recherches et le développement professionnel des formateurs d'enseignants dans le domaine des TICE. Nous l'abordons plus particulièrement à travers l'étude du rôle de la conception de ressources relatives aux technologies dans la formation des formateurs.

Nous présentons la mise en place d'un environnement collaboratif de formation basé sur un double mouvement : à travers le premier, les enseignants, futurs formateurs, partagent leurs expériences, pratiques et visions relatives à l'intégration des TICE dans l'enseignement ; le deuxième, consiste à les amener à accéder aux résultats des recherches relatives à ce domaine et à s'emparer des questions qui y sont débattues tout en y portant un regard critique soutenu par leurs propres expériences. Cette collaboration « prend forme » à travers la conception de ressources destinées à être utilisées en formation des enseignants. Nous présentons quelques-unes des ressources construites ainsi que les analyses que nous en avons faites eu égard à nos objectifs de recherche.

Samia Achour, *Université de Tunis, Tunisie.*

Etude des pratiques enseignantes à travers l'analyse d'une situation de classe ordinaire – Cas de l'introduction de la trigonométrie

Notre étude des pratiques enseignantes vise essentiellement l'étude de l'apprentissage mathématique des étudiants (dans ce cas celui de la trigonométrie), ceci nous a porté à mettre le travail des élèves et les savoirs de la trigonométrie au cœur de nos choix méthodologiques d'analyse de ces pratiques.

De ce fait, l'appui sur l'analyse de la transcription d'une séance ordinaire d'introduction de la trigonométrie dans une classe du secondaire, nous a permis d'investiguer les thèmes suivants :

La gestion de l'enseignant à travers notamment la question relative au passage entre les différentes unités de mesure des angles, essentiellement le passage du degré au radian, ainsi que la question du recours aux problèmes de modélisation supposés favorables à l'apprentissage des premières notions de trigonométrie.

Le travail des élèves, en particulier celui relatif aux formulations et validations issues de leur culture « trigonométrique ».

Nathalie Anwandter-Cuellar*, Université Montpellier 2, France.*

L'enseignement des grandeurs au cœur de la formation mathématique du citoyen français

Suite à la réforme de l'éducation de 1970, les grandeurs ont été rejetées en grande partie en dehors des mathématiques. Cependant, la plupart des liens entre les mathématiques et les autres disciplines, et aussi entre les mathématiques et la vie réelle, ne sont possibles qu'à travers l'étude des objets concrets, laquelle prend appui sur les grandeurs. Aujourd'hui, la société et les programmes en France présentent les mathématiques comme un moyen d'exploration et modélisation de la nature, redonnant une place très importante aux grandeurs dans l'enseignement.

A travers ce poster, nous voulons montrer quelle est la place et quel est le rôle des grandeurs dans la construction des connaissances conformes aux attentes de la société pour la formation mathématique des citoyens.

Baghdad Benmia, *Enseignant/formateur à Oran, Algérie.*

Les origines et fondement de compétence : la compétence mathématique et ses signifiants

Le savoir ne se résume pas au « je sais que h », la civilisation arabe a permis de mettre trois conditions, ou facteurs, du savoir. Ils sont communément désignés par condition de vérité : la proposition doit être vraie ; condition d'acceptation ou de croyance : la proposition doit être acceptée et condition de justification : la proposition doit être justifiée. Toutes les trois ont des figures homologues dans la preuve. L'œuvre des mathématiciens du 7ème siècle nous permettra aussi d'illustrer l'intérêt de considérer deux niveaux praxéologiques essentiels grâce auxquels nous entendons articuler deux traits saillants de la théorie anthropologique du didactique (TAD) : les assertions et les représentations.

Caroline Bisson, *Université de Sherbrooke, Canada.*

Les pratiques évaluatives en mathématiques auprès d'élèves en difficulté du primaire : étude de cas

De plus en plus de chercheurs s'intéressent aux pratiques enseignantes en mathématiques, mais très peu s'attardent aux pratiques évaluatives dans ce même domaine. Pourtant, nous savons qu'un nombre important d'élèves éprouvent des difficultés en mathématiques et qu'il y a peu de moyens déployés en ce qui a trait à l'évaluation. Quelles sont donc les pratiques évaluatives auprès des élèves en difficulté en mathématiques au primaire ? Pour répondre à cette question, nous avons réalisé une étude de cas (Gagnon 2005) avec un enseignant qui a évalué plusieurs élèves sur divers concepts mathématiques.

Christian Blanvillain, *Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Suisse.*

Trisection du Carré

La trisection du carré, ou partition du carré en trois carrés congruents, est un très vieux problème de géométrie dont les racines remontent aux premières démonstrations géométriques du Théorème de Pythagore. Cette affiche présente les principales solutions découvertes pour ce problème depuis 1000 ans. Elle est basée sur la publication d'une nouvelle trisection trouvée à l'EPFL en 2010. Les réponses aux questions posées dans l'affiche sont disponibles sur le site web http://qucub.com/EMF2012.

Jean-Claude Bossel, *Gymnase Auguste Piccard, Lausanne, Suisse.*

Le projet multimédia VIDEOMATH

Le projet multimédia VIDÉOMATH comporte deux parties principales. La première est une réponse pédagogique à la fois concrète, moderne et réaliste, à une question fréquemment posée par les élèves : « A quoi ça sert, les maths ? ». Dans cet esprit, des reportages vidéo seront réalisés, accompagnés de fiches d'exercices « en situation », montrant comment les mathématiques sont utilisées dans des domaines professionnels tels que SCIENCES & TECHNOLOGIE, ÉCONOMIE & COMMERCE, ARTS & CULTURE. La seconde partie du projet VIDÉOMATH consiste à produire des supports de cours et des corrigés d'exercices de mathématiques en format vidéo, complémentaires aux parties théoriques et aux exercices se trouvant, sous forme écrite, dans les brochures de mathématiques de la collection BAC-CH. Ces différents documents pédagogiques pourront être consultés gratuitement sur internet. Informations régulièrement mises à jour sur les sites http://www.videomath.ch et http://www.bac-ch.ch.

Françoise Maria Capacchi, *AGERS Ministère de l'Education et de la Recherche, France.*

Construction de calendriers à l'école primaire, rapport autre au *temps* et aux *mathématiques*

Dans cette présentation nous proposerons un moment de la mise en scène des savoirs mathématiques liés à la construction des calendriers et nous mettrons en évidence, à travers deux exemples les apports didactiques des constructions collectives affichées en salle de classe. Ainsi nous envisagerons en deuxième primaire le calendrier mensuel sous l'angle des comptages, comparaisons, établissement de correspondances et fractionnements qu'il favorise et des codes en jeu, puis en troisième la réalisation d'un calendrier saisonnier en deux ou trois dimensions, le lexique, les concepts mathématiques liés à la mesure du temps, les défis et les manipulations d'instruments.

Sylvia Coutat, DiMaGe, *FAPSE – Université de Genève –, Suisse.*
Michèle Vernex,’ *Ecole Primaire DIP Genève, Suisse.*

La démarche d'investigation en primaire avec un logiciel de géométrie dynamique

Nous cherchons à analyser dans quelle mesure un logiciel de géométrie dynamique permet la mise en place d'une démarche d'investigation dans une classe de primaire (9/10 ans). Cette recherche prend la forme d'une ingénierie didactique qui vise dans un premier temps l'appropriation du logiciel par les élèves et plus particulièrement du déplacement. Dans un second temps nous visons la mise en œuvre d'une démarche d'investigation à travers une activité de reconstruction en géométrie. Nos analyses vont se focaliser sur l'élève mais elles pourront aussi s'orienter vers la place de l'enseignant dans la gestion de l'activité.

Jean-Philippe Drouhard, Université *de Nice (URE I3DL) et OPHRIS (Marseille), France.*

Vers la construction d'un outil diagnostic épistémographique en mathématiques

En matière de diagnostic des difficultés mathématiques des élèves, on en est à peu près encore au niveau des médecins de Molière. On repère bien qu'il y a difficultés et on observe quelques symptômes isolés, mais sans lien systématique avec une théorie de la connaissance mathématique.

Or les savoirs mis en jeu sont de natures très diverses. D'où l'importance de bien les différencier, pour pouvoir mettre en place un diagnostic des difficultés et envisager des démarches de remédiation pertinentes (et intelligentes !)

Nous nous basons pour cela sur une typologie des connaissances, l'« épistémographie », laquelle postule que les objets mathématiques présentent (au moins) trois aspects (dimensions) indissociables : sémiolinguistique, praxique et théorique.

Sarah Dufour, *Université du Québec à Montréal, Canada.*

Problématique d'un projet doctoral : l'utilisation de différentes représentations en calcul différentiel

Le projet doctoral proposé s'intéresse à la compréhension des étudiants en lien avec un cours de calcul différentiel. La problématique du projet en question se présente en deux aspects. D'abord, quelques facteurs explicatifs des difficultés des étudiants sont mis de l'avant : des conceptions des étudiants par rapport aux concepts du cours de calcul, des obstacles épistémologiques possibles et des approches d'enseignement. Puis, quelques pistes de solutions suggérées par différents auteurs pour permettre une compréhension plus profonde des concepts sont visitées dont l'utilisation de différentes représentations. Enfin, des objectifs et questions de recherche sont envisagés.

Naim El Rouadi, *Université de Balamand, Liban.*

Le cas de Sami (Elève Dyscalculique)

Le Département des Sciences de l'Éducation de l'Université de Balamand a découvert un cas rare d'un enfant (Sami) souffrant de déficit : la dyscalculie. Un groupe de travail a été formé pour suivre ce cas et assurer l'inclusion de cet enfant au sein de sa classe. L'intervention a été de deux façons : au sein de la classe à travers la stagiaire et en dehors de la classe à travers des leçons préparées afin d'être suivi en parallèle. Le groupe a travaillé sur le développement des compétences numériques chez l'apprenant dyscalculique. Il a adapté la méthodologie d'enseignement/apprentissage selon Gagné qui consiste à organiser les meilleures conditions pour aider à l'apprentissage.

Doris Jeannotte, *Université du Québec à Montréal, Canada.*

Le raisonnement mathématique, portrait de la littérature scientifique et synopsis d'un modèle

Le raisonnement mathématique est un terme souvent employé en recherche en éducation sans vraiment être défini et en prenant pour acquis qu'il y a consensus sur le sens qu'on lui accorde. Toutefois, une exploration de la littérature amène bien des questions sur les différents sens de ce concept. À la suite d'une recension des écrits en didactique des mathématiques traitant du sujet, quelques composantes permettant d'arriver à un modèle du concept de raisonnement Mathématique ont émergé. Une synthèse de deux de ces composantes, à savoir forme et processus, et des liens possibles entre ces deux composantes sont ici présentés.

Nicoletta Lanciano, *Università di Roma « La Sapienza », Italie.*
Enrica Giordano, *Università di Milano Bicocca, Italie.*
Sabrina Rossi, *Università di Milano Bicocca, Italie.*
Mariangela Berardo , *Università di Roma « La Sapienza », Italie.*

La sphère de la terre entre Géométrie et Astronomie et le Projet International Globo Local

Les conceptions initiales à propos de la planète Terre en tant qu'objet sphérique pour la géométrie, la physique et l'astronomie.

Le problème de mettre « en résonance » l'observation directe des phénomènes astronomiques avec les images statiques.

« Être sur la surface de la Terre » et « être dans la sphère du ciel ». Une sphère blanche est mise au Soleil : de la sphère à la mappemonde pour lire les cas limites par rapport à l'espace (Pôles, Équateur…) et au temps (Equinoxes, aubes…).

La mappemonde, libérée de son support fixe, devient un « globe local » sur lequel lire, en temps réel, ce qu'il se passe sur la Terre en relation avec le Soleil : elle devient ainsi un instrument de démocratie et d'attention multiculturelle.

Marie-Hélène Lécureux-Têtu, *Université Toulouse 2 (IUFM), France*.
Gisèle Cirade, *Université Toulouse 2 (IUFM), France*.

La profession de professeur : comment éviter un crash social ?

Dans notre recherche, menée dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique (TAD), nous nous appuyons sur la notion de « degré de professionnalisation de la noosphère du métier » pour étudier l'état actuel du métier de professeur de mathématiques en le comparant, sous certains de ses aspects, à celui du métier de pilote de ligne. Grâce à l'analyse de réglementations, de médias, de sites personnels et d'interviews de professeurs ou de pilotes, etc., nous avons pu dégager, par comparaison, quelques éléments mettant en lumière certaines déficiences ou inadéquations de l'équipement praxéologique actuel de la profession de professeur. Nous présentons ici quelques-uns de ces résultats.

Bernard Le Feuvre, *IREM Rennes et LDAR, France.*

Enseigner et Apprendre des Mathématiques avec les TICE, le cas des fonctions au lycée avec Casyopée

Les fonctions occupent aujourd'hui une place centrale dans l'enseignement des Mathématiques au lycée. Les TICE sont incontournables et notre groupe développe le logiciel Casyopée et des ressources pour les enseignants (http://casyopee.eu). Casyopée comprend un module symbolique où les élèves travaillent sur les aspects algébriques des fonctions et un module de géométrique dynamique où ils peuvent concevoir les fonctions comme modèles de dépendances.

Une caractéristique de Casyopée est d'aider les élèves à relier ces deux aspects des fonctions dans une démarche de modélisation : créer un calcul géométrique exprimant la valeur d'une grandeur, en explorer les valeurs numériques, choisir une grandeur adéquate comme variable et finalement exporter dans le module symbolique la dépendance fonctionnelle, si elle existe, entre cette variable et le calcul géométrique pour obtenir une fonction mathématique exprimant cette dépendance.

Iranete Lima, *Universidade Federal de Pernambuco, Brésil.*
Fabiana Faria, *Universidade Federal de Pernambuco, Brésil.*

L'activité de l'enseignant des mathématiques en classe de terminale du lycée au Brésil : connaissances et conceptions

La recherche a eu pour but d'identifier les connaissances et les conceptions des professeurs de mathématiques qui enseignent en classe de terminale du lycée, en prenant en compte les exigences des procédures sélectives d'accès à l'enseignement supérieur au Brésil. Pour réaliser cette étude, nous avons utilisé le Modèle des Niveaux d'Activité du Professeur (Margolinas 2002). L'étude a été réalisée auprès de trois enseignants d'un lycée public de référence dans l'état de Pernambouc et les données ont été recueillies par le biais de deux entretiens semi-structurés et de l'observation de cours. Les résultats montrent que les enseignants font face à une tension qui s'exprime, d'un côté, par le besoin de former l'élève et, d'un autre côté, par l'urgence de le préparer pour l'entrée à l'Université. Les tensions se reflètent aussi dans les conceptions d'enseignement mobilisées par ces professeurs.

Jean-François Maheux, *Université du Québec à Montréal, Canada.*

L'art ? Heidegger et la Calculatrice au Primaire

Les dimensions historiques, épistémologiques ou esthétiques attachées aux technologies sont rarement prise en comptes en didactique. Or, lire Heidegger avec en tête, par exemple, le cas de la calculatrice au primaire, permet d'en illustrer toute la puissance. Je vais explique ceci en articulant le 'danger' totalisateur que pose la technologie, et le pouvoir de 'sauver' qui vient avec une approche artistique plutôt que technique. Quelques exemples d'activités sont discutés et, en lien avec le colloque, j'offrirai aussi quelques parallèles et distinctions entre le travail de Heidegger et celui de Rousseau.

Fernand Malonga-Moungabio, *GREMA – IREM de Paris 7 – Université Paris Diderot.*
Bernadette Denys*, GREMA – IREM de Paris 7 – Université Paris Diderot.*

Le logarithme au Collège et au Lycée : cas du Congo-Brazzaville
Articulation entre nombre et fonction dans les programmes et les manuels

Nous examinons le processus d'apparition de la notion de logarithme dans les programmes d'enseignement au Collège et au Lycée au Congo-Brazzaville. Le logarithme est introduit au Collège comme nombre puis au Lycée comme fonction ; nous analysons son passage du statut de nombre au statut de fonction dans les programmes et les manuels, ainsi que la réapparition au Lycée des connaissances du Collège.

Notre étude montre que l'articulation entre les deux statuts du logarithme n'est pas assurée par les programmes ; de plus, le passage du concept de nombre au concept de fonction ainsi que le changement de notation dans les manuels peuvent donner lieu, chez l'élève, à la conception de deux objets mathématiques différents.

Michela Maschietto, *Università di Modena e Reggio Emilia, Italie.*

Les machines mathématiques comme ressources : de la formation à la classe

Ce poster veut contribuer à la discussion sur ressources et dispositif de formation, en particulier sur les moyens de suivre est accompagner les usages de ressources. Il concerne des aspects d'une formation continue sur le laboratoire de mathématique avec artefacts culturels (les « machines mathématiques », www.mmlab.unimore.it) réservée principalement aux enseignants du secondaire. Cette formation a permis aux enseignants d'expérimenter le parcours de l'appropriation d'une ressource comme une machine mathématique (disponibles dans les salles équipées par le Projet) à la conception de documents pour les expérimentations en classe, dans le cadre du laboratoire de mathématiques.

Alexandre Mopondi-Bedenko, *GREMA – IREM de Paris 7 – Université Paris Diderot***.**
Fiancée-Gernavey Bantaba, *GREMA – IREM de Paris 7 – Université Paris Diderot.*

Ngola : le jeu royal de calcul en Afrique Centrale

Le jeu de Ngola est moins connu que le jeu d'Awalé. Cela explique pour beaucoup la presque absence de travaux mathématiques et didactiques le concernant. Mais les travaux sur l'Awalé peuvent être reproduits sur le Ngola.

Les premières approches didactiques du jeu de Ngola, à travers l'analyse a priori, montrent qu'il n'est pas évident pour l'enseignant de gérer les différentes stratégies des joueurs. Les premières utilisations didactiques du jeu de Ngola requièrent de travailler la « fabrication du matériel du jeu de Ngola » pour introduire la notion de division euclidienne. Sont mis en jeu comme variables pertinentes : le nombre de pions, le nombre de pions par trou, le nombre de trous, le nombre de rangées par joueur.

Déborah Nadeau, *Université du Québec à Montréal, Canada.*

Le vécu des futurs enseignants durant leur formation mathématique universitaire : investiguer l'hypothèse de ruptures

Ce projet s'intéresse à la formation mathématique offerte aux futurs enseignants à l'intérieur des cours de mathématiques avancées, et les expériences qu'ils y vivent et retirent. Certains auteurs soulignent que les étudiants vivant ce type de formation finissent par être « déconnectés » des mathématiques enseignées au secondaire et ils insistent sur le fait qu'il existe certaines ruptures vécues entre les mathématiques avancées et les mathématiques de l'école. L'objectif de cette recherche est de tenter de mieux comprendre l'expérience de préparation mathématique vécue par les futurs enseignants dans leur formation mathématique à travers des cours de mathématiques avancées.

Mabel Panizza, *Université de Buenos Aires, CBC, Argentine.*

Processus de catégorisation des objets de l'algèbre

Y a-t-il beaucoup d'autres irrationnels que les racines de 2 et de 3 ? y = ax est-elle une fonction affine ?

Le modèle « analytique » des conditions nécessaires et suffisantes, selon lequel un objet est défini par un ensemble de propriétés, lequel ensemble caractérise à son tour une catégorie, est pertinent du point de vue mathématique mais ne permet pas de comprendre les processus cognitifs au moyen desquels sont établies les catégories. Une conception de la catégorie fondée sur la notion de prototype explique à notre avis beaucoup mieux quelques processus de catégorisation des étudiants dans le domaine de l'algèbre.

Valériane Passaro, *Université de Montréal, Canada*.

Rôle du travail sur la covariation dans l'apprentissage du concept de fonction

L'apprentissage du concept de fonction pose des difficultés aux élèves. Notre recherche propose d'envisager le travail sur la covariation comme élément clé de la compréhension de ce concept. Nous posons alors la question suivante : quel est l'apport du travail sur la covariation dans le processus de conceptualisation de la fonction ? Nous apportons des premiers éléments de réponse à partir d'une analyse de la compréhension de la fonction s'appuyant sur plusieurs perspectives des processus de compréhension d'un concept mathématique et sur quelques éléments historiques.

Marie-Jeanne Perrin-Glorian, *Laboratoire de Didactique André Revuz, Université d'Artois, France.*

Produire des ressources pour les enseignants à l'articulation école-collège. Elaboration d'un projet de recherche

Le poster présente un projet de recherche en cours d'élaboration. La problématique est double : produire des ressources pour l'enseignement, la formation des maîtres et la recherche et réfléchir à la continuité de l'enseignement des mathématiques. Ces ressources, centrées sur les contenus enseignés en primaire, en pensant la manière dont ils sont repris et articulés avec des contenus nouveaux au collège, doivent être compatibles avec les pratiques ordinaires des enseignants mais amener suffisamment d'éléments de questionnement pour les faire évoluer. Les questions portent sur l'élaboration de la ressource, l'utilisation par les enseignants et l'évolution de leurs pratiques, l'accompagnement en formation.

Carine Reydy, IUFM *d'Aquitaine, Université Bordeaux IV, France.*

La soustraction posée en classe spéciale ?

Faut-il enseigner une technique opératoire de la soustraction aux élèves de classes spéciales ? Si oui, laquelle ? Faut-il en justifier le fonctionnement ? Y a-t-il des modifications à apporter liées à la spécificité du public visé ?

On s'interroge ici sur ces questions, sur les réponses que les enseignants spécialisés y apportent et sur les raisons qui motivent leurs choix.

Le premier volet de cette étude est consacré à l'analyse des pratiques enseignantes. Il s'appuie sur des témoignages spontanés et les résultats d'un questionnaire. Le second propose une analyse épistémologique d'une séquence mise en place en classe spéciale et permet d'ouvrir des perspectives dans l'élaboration de situations.

My Lhassan Riouch, *Equipe du conseiller pédagogique, Délégation : Elhajeb – Maroc.*

Intégration des technologies d'informations et de communications dans l'enseignement des mathématiques

Ce travail s'inscrit dans le programme de formation continue du conseiller pédagogique de la délégation d'Elhajeb – Maroc .Il vise à Créer des nouvelles situations d'apprentissages permettant l'intégration des TIC dans l'enseignement des mathématiques et à mettre à la disposition des enseignants des ressources numériques et des outils didactiques pouvant les aider à modéliser certaines situations et à adopter de nouvelles méthodes de travail dans la classe.

Françoise Venand, *Université de Québec, Montréal.*

Utilisation des ressources en ligne dans l'enseignement des mathématiques.

Julianna Zsidó, *Université Montpellier II.*
Viviane Durand-Guerrier, *Université Montpellier II.*
Joanne Antonetti, *Université Montpellier II.*

Math-Bridge, une plate-forme multilingue

Dans le cadre du projet européen Math-Bridge, nous conduisons une recherche exploratoire sur les possibilités que pourrait offrir cet environnement pour une prise en charge explicite des difficultés linguistiques rencontrées par des étudiants étudiant les mathématiques dans une langue autre que leur langue maternelle. Ce projet a pour but de développer une plate-forme en ligne, fournissant du contenu mathématique disponible en plusieurs langues. Notre pré-expérimentation concerne une étudiante hispanophone qui a réalisé trois séances de travail autonome sur Math-Bridge, avec les consignes de changer de langue lorsqu'elle en éprouve le besoin afin d'identifier des hypothèses sur les éléments qui provoquent le changement de langue, d'observer les effets de ce changement de langue sur l'avancée du travail mathématique, ainsi que l'identification des obstacles éventuels liés aux traductions.

ACTES EMF2012 – SOMMAIRE

GT5 – *Enseignement et apprentissage des mathématiques : Interactions avec les autres disciplines scolaires et les pratiques professionnelles*

PROJETS SPÉCIAUX

SPE2 – *Evaluation, compétences et orientation dans les transitions scolaire : rôle des mathématiques*

SPE3 – *Comparaison de l'enseignement des mathématiques à travers les pays francophones : résultats, sens et usages*

SPE4 – *Vulgarisation des mathématiques*

AFFICHES (POSTERS)

DUFOUR S. – Problématique d’un projet doctoral : l’utilisation de différentes représentations en calcul différentiel.

EL ROUADI N. – Le cas de Sami (élève dyscalculique).

JEANNOTTE D. – Le raisonnement mathématique, portrait de la littérature scientifique et synopsis d’un modèle.

LANCIANO N., GIORDANO E., ROSSI S., BERARDO M. – La sphère de la terre entre Géométrie et Astronomie et le Projet International Globo Local.

LECUREUX-TETU M.-H., CIRADE G. – La profession de professeur : comment éviter un crash social ?

LE FEUVRE B., LAGRANGE J.-B., HALBERT R., MANENS M.-C., LE BIHAN C., MEYRIER X., MINH T. K. – Enseigner et Apprendre des Mathématiques avec les TICE, le cas des fonctions au lycée avec Casyopée.

LIMA I., FARIA F. – L’activité de l'enseignant des mathématiques en classe de terminale du lycée au Brésil : connaissances et conceptions.

MAHEUX J.-F. – L’art ? Heidegger et la Calculatrice au Primaire.

MALONGA MOUNGABIO F., DENYS B. – Le logarithme au Collège et au Lycée : cas du Congo-Brazzaville. Articulation entre nombre et fonction dans les programmes et les manuels.

MASCHIETTO M. – Les machines mathématiques comme ressources : de la formation à la classe.

MOPONDI-BENDEKO A., BANTABA F.-G. – Ngola : le jeu royal de calcul en Afrique Centrale.

NADEAU D. – Le vécu des futurs enseignants durant leur formation mathématique universitaire : investiguer l'hypothèse de ruptures.

PANIZZA M. – Processus de catégorisation des objets de l’algèbre.

PASSARO V. – Rôle du travail sur la covariation dans l’apprentissage du concept de fonction.

PERRIN-GLORIAN M.-J. – Produire des ressources pour les enseignants à l’articulation école-collège. Elaboration d’un projet de recherche.

REYDY C. – La soustraction posée en classe spéciale ?

RIOUCH M. L. – Intégration des technologies d’informations et de communications dans l’enseignement des mathématiques.

VENANT F. – Utilisation des ressources en ligne dans l’enseignement des mathématiques.

ZSIDO J., DURAND-GUERRIER V., ANTONETTI J. – Math-Bridge, une plate-forme multilingue.

ANNEXES

Programme

Liste des participants

Ouverture (présentation power point)

Petit film de clôture

Photos