L'apprentissage du raisonnement proportionnel de 10 à 16 ans. Le traitement des obstacles didactiques rencontrés par les élèves et des croyances erronées des enseignants : un défi pour la formation.

Pierre-François Burgermeister[1] - Michel Coray[2]

Institut de Formation des Maîtres et Maîtresses de l'Enseignement Secondaire Genève

Résumé: Les deux obstacles didactiques majeurs auxquels se heurte l'apprentissage du raisonnement proportionnel par les élèves de 10 à 16 ans sont la persistance du modèle additif et la généralisation abusive du modèle linéaire. A cela s'ajoute la croyance largement répandue chez les enseignants selon laquelle cet apprentissage se résume à l'acquisition d'une technique de calcul performante.
Notre recherche, enracinée dans les points ci-dessus est basée sur une enquête mettant en évidence les procédures de résolution utilisées par des élèves de 10 à 12 ans confrontés à des problèmes de proportionnalité et de non proportionnalité ayant en commun une structure numérique simple mais différant par leurs contextes. Nous en concluons que le raisonnement proportionnel est, pendant les premières années de son acquisition, une compétence fragmentée.

1. L'enseignement de la proportionnalité actuellement[3]

Dupuis et Pluvinage, cités par Comin[4], avaient identifié trois périodes dans l'évolution de l'enseignement de la proportionnalité en France: celle dite des mathématiques traditionnelles (marquées par la " règle de trois ") celle des " mathématiques modernes " (avec les fonctions linéaires) et celles des " mathématiques concrètes " mettant en avant les tableaux de proportionnalité. En Suisse romande, l'analyse que nous avons réalisée à partir des manuels en usage dans le secondaire inférieur (niveau Collège) à Genève nous amène, jusqu'en 1999, à des catégories du même ordre. Après une période transitoire, une nouvelle génération de manuel est entrée en fonction à la rentrée 2003[5]. C'est dans ce contexte de transition que se situe notre recherche actuelle qui, tout en étant centrée sur le secondaire inférieur, prend appui sur des données recueillies auprès d'élèves de la fin du primaire.

Quelle est donc la place assignée à la proportionnalité au deux niveaux d'enseignement considérés ?

---

[1] Pierre-François BURGERMEISTER :pierre.burgermeister@edu.ge.ch
[2] Michel CORAY : michel.coray@edu.ge.ch
[3] Nous nous référons dans cette contribution à l'enseignement publique en Suisse francophone et plus particulièrement au cas du canton de Genève.
[4] Comin, E. (2003) L'enseignement de la proportionnalité à l'école et au collège. *Recherches en didactique des mathématiques,* vol 22, 2/3, 135-182.

Au primaire, la proportionnalité ne fait l'objet que d'une première sensibilisation au sein du domaine d'étude « applications ». Quelques situations familières aux élèves, comme les problèmes quantité/prix, leur sont soumises, les propositions de résolution sont discutées et, le cas échéant, validées. Mais aucune procédure experte n'est introduite ni aucune généralisation formulée. Les élèves commencent à se familiariser avec l'organisation des données en tableau et leurs représentations sous forme graphique.

Au secondaire inférieur, la proportionnalité figure dans le plan d'étude[6] comme *domaine* au même titre que " nombres et opérations ", " géométrie ", " grandeurs et mesures ", " algèbre ", " gestion, organisation, traitement de données " et " initiation aux fonctions ". L'objectif officiel est de faire découvrir le concept de proportionnalité dans sa globalité par l'élaboration du modèle linéaire dans différents cadres (numérique, algébrique, graphique, des grandeurs), et d'amener l'élève à la maîtrise des différentes situations problématiques rencontrées à ce niveau par l'acquisition de procédures expertes (" produit en croix ", fonction linéaire).

2. Limites de cet enseignement et difficultés d'apprentissage

Nos expériences d'enseignants de mathématiques dans des écoles secondaires genevoises nous ont souvent confrontés aux deux obstacles didactiques majeurs, symétriques l'un de l'autre, auxquels se heurte l'apprentissage du raisonnement proportionnel par les élèves de 10 à 15 ans. Ces obstacles sont :

O1 : la persistance du modèle additif,

O2 : la généralisation abusive du modèle linéaire.

Le premier est largement décrit dans la littérature. KARPLUS[7], par exemple, étudie les raisonnements utilisés par de jeunes adolescents à qui on demande de comparer le goût supposé de deux limonades en connaissant les dosages respectifs de sucre et de jus de citron qui entrent dans leurs compositions. La persistance du modèle additif consiste, dans ce contexte, à comparer les *différences* entre le nombre de doses de jus de citron et le nombre de doses de sucre (*il y a neuf cuillers de jus de plus qu'il y a de cuillers de sucre*) plutôt que leurs *quotients* (*il y a trois fois plus de cuillers de jus que de cuillers de sucre*). En plaçant le raisonnement proportionnel dans le cadre plus large du concept de nombres rationnels, N et G

[5] Contrairement à d'autres pays, la Suisse romande impose un manuel officiel à toutes ses écoles.
[6] http://www.geneve.ch/co/former/maths.html
[7] R. KARPLUS et al. : Proportional Reasoning of Early Adolescents, In R. Lesh & M. Landau (Ed.) *Acquisition of Mathematics concepts and processes*, (pp. 45-90) Academic Press Inc., Orlando, Florida, 1983.

Brousseau[8] ont élaboré un ensemble de séquences dans lesquelles prend place la célèbre situation-problème du puzzle basée sur un contexte d'agrandissement. Cette situation est fréquemment utilisée dans l'espoir d'aider les élèves à surmonter O1.

Mais à peine semblent-ils avoir surmonté ce premier obstacle, nos élèves se précipitent sur le deuxième (O2), celui que DE BOCK et al.[9] appellent *l'illusion de la linéarité.* En effet, l'euphorie que procure la (supposée) maîtrise d'un nouvel outil semble les entraîner, bien souvent, dans une utilisation abusive de celui-ci, c'est-à-dire dans la mise en oeuvre d'un raisonnement proportionnel hors de son domaine d'application. Tous les enseignants de mathématiques connaissent des exemples de situations pièges, comme celle où l'on demande de calculer la taille d'une personne à partir de son âge ou celle qui lie le temps de cuisson avec le nombre d'œufs placés dans une casserole d'eau bouillante. Dans une récente étude, DE BOCK et al.[10] illustrent la profondeur de ce phénomène en mettant en évidence l'entêtement avec lequel des adolescents de 12 à 16 ans persistent à répondre, en dépit des indices contraires qui leur sont progressivement soumis, qu'il faut trois fois plus de peinture pour peindre une image dont les dimensions sont trois fois plus grandes (alors que, l'image étant à deux dimensions, il faudrait bien sûr neuf fois plus de peinture).

3. Notre étude en cours

3.1 Au primaire

Au printemps 2002, nous avons soumis 184 élèves des deux derniers degrés primaires (de 10 à 12 ans) à un test comportant douze problèmes d'apparence très semblables. Parmi ces problèmes, quatre sont des problèmes dits de quatrième proportionnelle comportant des données numériques identiques. En voici deux exemples :

Les caramels

Pour acheter 8 paquets de caramels, Jean a payé 24 francs.

Pour acheter 32 paquets des mêmes caramels, combien devra-t-il payer ?

---

[8] N. et G. BROUSSEAU *: Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*, IREM de Bordeaux, 1987

[9] D. De BOCK et al. : *The predominance of the linear model in secondary school students' solutions of word problems involving length and area of similar plane figures*, Educational Studies in Mathematics 35, 65-83, 1998.

[10] DE BOCK et al. : *Improper Use of Linear Reasoning : An In-depth Study of The Nature and the Irresistibility of Secondary School Students'Errors, Educational Studies in Mathematics*, 50, 311-334, 2002.

Pas à pas

Thierry et son père font une promenade à pied.

Lorsque son père fait 8 pas, Thierry doit en faire 24.

Lorsque son père fera 32 pas, combien Thierry devra-t-il en faire ?

Quatre autres problèmes utilisent les mêmes données numériques, mais en mettant en scène des grandeurs non proportionnelles. Par exemple :

Les âges

Pierre a 8 ans et Aline a 24 ans.

Lorsque Pierre aura 32 ans, quel sera l'âge d'Aline?

Les dents

A 8 ans, Sarah avait 24 dents.

A 32 ans, combien de dents aura-t-elle ?

Enfin, quatre problèmes de proportionnalité utilisent des données numériques différentes des 8 autres problèmes, ceci essentiellement afin d'éviter les répétitions mécaniques d'une même démarche pour tous les problèmes du test.

Nous avons ensuite classifié les procédures de résolution employées par les élèves en distinguant 3 procédures multiplicatives :

- emploi de *l'opérateur scalaire* (permettant le passage d'une grandeur à la même grandeur), ici égal à 4 :

  4 x 8 paquets = 32 paquets

  4 x 24 francs = <u>96 francs</u>,

- emploi de *l'opérateur fonction*, ou *coefficient de proportionnalité*, (permettant de passer de la première grandeur à la deuxième), ici égal à 3 :

  3 x 8 paquets = 24 francs

  3 x 32 francs = <u>96 francs</u>,

- retour à l'unité : *24 : 8 = 3 francs par paquet*

  32 paquets x 3 francs par paquet = <u>96 francs</u>,

et une procédure additive :

- *8 paquets + 24 = 32 paquets*

  24 francs+ 24 = <u>48 francs</u>

ou

- *8 paquets + 16 = 24 francs*

  32 paquets + 16 = <u>48 francs</u>,

ainsi que diverses procédures non pertinentes.

Cette enquête nous a permis, en premier lieu, de vérifier que le raisonnement proportionnel est, à l'entrée au secondaire, une *compétence fragmentée*. Nous entendons par là que les élèves sont souvent capables de résoudre des problèmes simples de recherche d'une quatrième proportionnelle dans différents contextes familiers, mais qu'ils ne perçoivent pas leur isomorphie structurelle. Lorsque ces problèmes sont transposés d'un contexte à un autre, nonobstant la permanence des valeurs numériques, ils s'engagent dans d'autres procédures de résolution en optant notamment pour des procédure additives alors qu'ils avaient utilisé des procédures multiplicatives, ou alors en utilisant un rapport scalaire plutôt qu'un rapport fonctionnel ou vice versa.

D'autre part, l'analyse des fréquences d'utilisation des différentes procédures selon les problèmes nous a livré plusieurs renseignements utiles. Par exemple :

a) L'utilisation massive de procédures additives dans le problème *pas à pas*, comparée avec leur quasi-absence dans celui des *caramels*, nous semble révélatrice de l'impact différentiel du contexte qu'évoquent les deux problèmes : plus précisément, les élèves qui raisonnent additivement pour *pas à pas* savent bien que Thierry fera <u>plus</u> de pas que son père mais ce « plus » se traduit aussi souvent par « 16 pas de plus » que par « 3 fois plus de pas ». Dans *les caramels* en revanche, presque tous les élèves optent pour une procédure multiplicative. Pourquoi cette différence ? Il est probable que les sujets de cet âge n'ont pour la plupart pas encore été attentifs, en situation réelle, à la relation fonctionnelle[11] existant entre les nombres de pas de deux personnes de tailles différentes marchant à la même vitesse (c'est d'ailleurs ce que suggère l'absence du retour à l'unité parmi les procédures de résolutions employées pour *pas à pas*). D'autre part la modélisation de cette situation en termes de proportionnalité est vraisemblablement perturbée par des considérations annexes plus ou moins pertinentes : l'enfant peut se mettre à courir, ils peuvent tous les deux ralentir leur allure, etc. (notons cependant qu'une telle considération, le rabais pour grande quantité, pertinente dans la situation des *caramels*, n'est jamais retenue par les élèves testés).

b) L'emploi de l'opérateur scalaire est majoritaire chez les élèves qui résolvent *les caramels* multiplicativement, alors que ceux qui résolvent *pas à pas* multiplicativement préfèrent largement employer l'opérateur fonction. Et pourtant les données numériques sont les mêmes et rien ne porte à croire qu'il est plus difficile de

[11] Une hypothèse similaire peut être émise pour la relation scalaire.

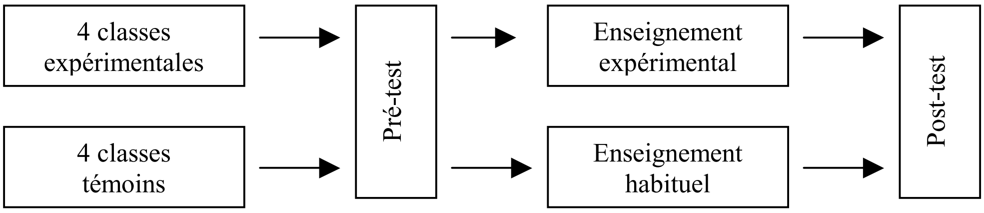
calculer 8x3 que 8x4. Cette différence semble illustrer le fait que le *coefficient de proportionnalité peut être plus ou moins porteur de sens* selon le contexte et le type de grandeurs en jeu. Dans le problème *pas à pas*, les grandeurs en jeu (nombre de pas de Thierry et nombre de pas du père) s'expriment dans la même unité (bien que les pas soient attribués à des personnes distinctes) , facilitant ainsi le raisonnement « l'un fait trois fois plus de pas que l'autre ». Dans le cas où l'opérateur fonction s'exprime dans une unité composée (francs par paquet, kilomètres par heure, etc.), quel est le rôle joué par le degré de familiarité avec cette unité ? Un retour sur les productions écrites des élèves afin de débusquer des indices de tâtonnements dans l'ordre de traitement des valeurs numériques pourrait être un indice à creuser, mais force est d'admettre que sans une série d'entretiens auprès d'un échantillon contrasté d'élèves invités à évoquer les raisons de leur traitement, il est difficile de réduire l'incertitude quant à l'interprétation de ces résultats.

Parmi les éléments à prendre en compte il y a aussi l'ordre de présentation des problèmes : sur cet aspect vient se greffer la composante contractuelle des réponses fournies. En effet, le fait que les élèves se trouvent régulièrement confrontés aux mêmes valeurs numériques dans des énoncés différents pourraient les inciter à chercher diverses manières de faire, en vertu d'une acception courante du contrat didactique selon laquelle le professeur ne poserait pas plusieurs fois le même problème dans le même test sans attendre des réponses différentes.

c) Les deux tiers des élèves testés cherchent, dans le problème des *dents*, à faire un calcul à partir des données numériques, puis répondent que Sarah possèdera 48, 96, voire 768 dents. Il faut vraisemblablement voir là l'influence d'un *contrat didactique* selon lequel tous les nombres fournis dans l'énoncé doivent être employés pour calculer une réponse, l'élève ne se sentant pas responsable de la conformité de cette réponse avec les caractéristiques du monde 'réel'.

3.2. <u>Au secondaire</u>

L’analyse des observations récoltées au primaire nous a amené à élaborer et à tester un dispositif expérimental d’enseignement de la proportionnalité pour le premier degré du secondaire (élèves de 12 à 13 ans). La démarche expérimentale adoptée peut être ainsi schématisée :



Le pré-test est calqué sur l’enquête conduite à la fin du primaire. Il permet notamment d’isoler, dans les classes expérimentales et témoins un ensemble comparable d’élèves. Le post-test (très proche du pré-test) comparera ensuite l’évolution de ces deux groupes. Il convient de préciser que les classes témoins bénéficient d’un enseignement sur cette partie du programme donné “ comme d’habitude ” par les professeurs de mathématique de ces classes. Dans le cas des classes expérimentales, là aussi ce sont les enseignants titulaires qui assurent l’enseignement après échange avec nous sur les choix didactiques à mettre en œuvre. Sans pouvoir entrer dans le détail nous dirons que cet enseignement est caractérisé par :

- un *contrat didactique* (peu habituel à la fois pour les élèves et pour les professeurs concernés) censé conférer à l’élève la responsabilité de s’interroger, avant tout calcul, sur la pertinence des données d’un énoncé[12] et lui donner le droit de fournir une réponse, dûment justifiée, n’incluant aucun calcul ou du type *on ne peut pas savoir* lorsqu’il l’estime adéquate ;
- un entraînement à une *démarche analytique*, c’est-à-dire à l’analyse – débattue dans des groupes d’élèves - des relations qui lient les grandeurs en jeu dans un problème, plutôt qu’algorithmique (application d’une procédure stéréotypée) ;
- un *choix des procédures de résolution laissé ouvert* aux élèves, aucune d’entre elles n’étant mise en exergue par l’enseignant.

[12] Les énoncés traités sont du type de ceux qui composent le test passé au primaire (voir les exemples donnés en 3.1.), adaptation faite des variables numériques afin que les quotients à calculer ne soient pas toujours des nombres entiers.

La liberté de manœuvre ainsi laissée aux élèves des classes expérimentales et l'acquisition par eux de la démarche analytique devaient leur permettre, selon notre hypothèse, de surmonter O1 et O2 plus efficacement que ne le font ceux des classes témoins.

Ce dispositif a été mis en œuvre dans les quatre classes expérimentales au printemps 2003. Bien qu'une analyse fine des vidéos des séances de travail des classes expérimentales reste à faire, nous pouvons d'ores et déjà tirer des résultats du post-test les quelques constats suivants :

1. par comparaison avec le pré-test, les deux groupes (expérimental et témoin) progressent fortement en ce qui concerne les problèmes de proportionnalité ;
2. pour tous les problèmes de proportionnalité, le taux de procédures additives est sensiblement plus faible dans le groupe expérimental que dans le groupe témoin, ce qui semble indiquer un progrès plus marqué en direction du dépassement de l'obstacle O1. Cette différence est particulièrement nette en ce qui concerne les problèmes qui produisaient préalablement une part importante de procédures additives (par exemple *pas à pas*) ;
3. l'obstacle O2, par contre, ne paraît pas mieux surmonté par un groupe que par l'autre. En effet, les deux groupes affichent des taux de procédures multiplicatives remarquablement égaux dans les problèmes qui ne relèvent pas de la proportionnalité (par exemple *les âges*), à l'exception toutefois des problèmes pour lesquels l'influence du contrat didactique peut être supposée forte (par exemple *les dents*) et qui ont produit une part de procédures multiplicatives nettement supérieure dans le groupe témoin ;
4. les élèves des classes expérimentales (qui ont pris connaissance des diverses procédures multiplicatives, y compris le produit en croix, à travers l'affichage des démarches de leurs camarades) n'utilisent pas, en moyenne, un nombre plus élevé de procédures multiplicatives distinctes que les autres élèves. Mais ils font preuve de plus de discernement en sachant plus souvent choisir la procédure la plus économique en calcul (en utilisant, par exemple, une procédure scalaire lorsque l'opérateur scalaire est un nombre entier et l'opérateur fonction un nombre non entier).

Dans l'optique de vérifier ces constats, nous nous proposons, à partir du printemps 2004, d'étendre notre dispositif aux trois degrés du secondaire inférieur (élèves de 12 à 15 ans) et d'en analyser les effets.