L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés

Actes du colloque emf 2006

Utiliser une définition, une tâche simple a priori : le cas de la topologie de R^N

Stéphanie Bridoux, *Université de Mons-Hainaut, Belgique*

Résumé

Les définitions des notions topologiques (intérieur, adhérence, ouvert, fermé,…) font intervenir des symboles tels que des quantificateurs, des inclusions d'ensembles, des implications,… Or, les étudiants n'ont jamais manipulé explicitement ces symboles dans l'enseignement secondaire. Après l'introduction des notions topologiques, les exercices proposés aux étudiants consistent à leur faire utiliser les définitions sur des objets qui leur sont familiers, tels que des intervalles dans R. On pourrait penser a priori qu'il s'agit d'une tâche simple et qui est susceptible d'aider les étudiants à mieux comprendre les notions. Nous présentons ici les analyses de ce type d'exercices. Nous montrons que les activités engendrées pour les résoudre nécessitent en réalité de nombreuses adaptations. De plus, elles mobilisent des connaissances antérieures qui sont supposées disponibles et qui ne sont pas des connaissances en topologie. Ainsi, l'utilisation des nouvelles définitions requiert des activités compliquées qui ne reviennent pas sur la notion mise en jeu dans l'énoncé. Ce type de tâche donne une vision essentiellement formelle des notions topologiques et ne se présente pas, a priori, comme une aide à la compréhension des nouvelles notions.

Introduction

Dès leur entrée à l'université, les étudiants sont amenés à manipuler des écritures avec quantificateurs alors que ceux-ci ne sont pas un enjeu explicite de l'enseignement secondaire.

Dans notre mémoire de DEA (Bridoux, 2005), nous nous sommes intéressés à un chapitre spécifique d'un cours d'analyse en première année universitaire dans lequel les quantificateurs sont omniprésents : la topologie de R^N. Nous avons voulu comprendre pourquoi cette partie du cours était source de nombreuses difficultés de compréhension chez les étudiants. Nous faisons l'hypothèse qu'une raison à ces difficultés est liée à l'utilisation des quantificateurs, mais ce n'est sûrement pas la seule.

Le cours d'analyse dont il est question ici est suivi par des étudiants de sections mathématique, physique et informatique à l'Université de Mons-Hainaut, en Belgique. Il constitue le cours le plus volumineux de leur programme et est scindé en une partie théorique et des séances d'exercices. Dans le chapitre sur la topologie, les notions d'intérieur, d'adhérence, d'ouvert et de fermé sont introduites, puis sont utilisées pour démontrer une série de propriétés classiques. Les définitions de ces notions sont rappelées en annexe.

Les notions topologiques sont nouvelles pour les étudiants en ce sens qu'elles n'ont pas du tout été abordées dans l'enseignement secondaire. Dans le cours, elles sont définies de plusieurs façons. Considérons, par exemple, la notion d'ensemble fermé : un ensemble $A \subseteq R^N$ est fermé si $A = \text{adh } A$ (1), ce qui se traduit par les deux propositions équivalentes suivantes :

$\forall x \in R^N, (\forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \varnothing) \Rightarrow (x \in A)$ (2),

$\forall x \in R^N, \forall (x_n) \subseteq A, (x_n \to x) \Rightarrow (x \in A)$ (3).

Il y a donc trois écritures formelles possibles pour définir l'objet « ensemble fermé ». Nous englobons sous le mot « formalisme » l'ensemble de ces écritures. Cet ensemble comprend :

- Des symboles liés à la topologie : « adh ».
- Des symboles liés à la logique élémentaire : quantificateurs, implication.
- Des symboles liés à la théorie des ensembles : intersection d'ensembles.

Or, même si les étudiants ont rencontré certains de ces symboles dans l'enseignement secondaire, ils ne les ont en tout cas pas manipulés explicitement. Le formalisme introduit par les notions topologiques est donc, d'une part, en grande partie nouveau pour les étudiants et, d'autre part, il mélange des symboles appartenant à différents domaines mathématiques, ce qui accroît sa complexité.

Nous évoquons ici quelques travaux qui abordent le problème du formalisme sous différents angles.

Dans Dorier *et al*. (1997), le formalisme est étudié du point de vue des prérequis mis en jeu dans sa manipulation. Des enquêtes menées auprès d'étudiants en première année de DEUG révèlent des difficultés liées aux manipulations formelles et montrent comment l'insuffisance de connaissances en logique et en théorie des ensembles provoque des erreurs dans les productions d'étudiants en algèbre linéaire. D'autre part, une étude approfondie des concepts enseignés montre que leurs spécificités sont liées à la nature unificatrice et généralisatrice de la théorie :

> *l'algèbre linéaire est l'aboutissement d'une vaste entreprise de formalisation, qui unifie et rend possible des résolutions économiques et analogues de tous les problèmes qui relèvent du linéaire. Encore faut-il donc, pour avoir accès à ces résolutions, maîtriser un certain degré de formalisme.* (Dorier, 1997)

A. Robert (1998) explique, à ce propos, que « si une notion représente une unification de notions précédentes, elle est nécessairement associée à une généralisation et porteuse d'un nouveau formalisme ». Elle parle de notions formalisatrices, unificatrices et généralisatrices, que nous notons « notions FUG ». L'introduction d'une « notion FUG » est souvent difficile car, pour les étudiants, le degré de généralisation de la notion peut être important, la relation entre ancien et nouveau est difficile à établir. Une difficulté d'enseignement d'une « notion FUG » est donc de parvenir à construire du sens à partir des connaissances antérieures et « malgré » le nouveau formalisme. Nous pensons que, de ce point de vue, les notions topologiques peuvent être interprétées comme des « notions FUG ».

Dans sa thèse, F. Chellougui (2004) aborde la question du formalisme sous l'angle spécifique des quantificateurs. Elle pointe des difficultés que peuvent rencontrer les étudiants en première année d'université pour définir la notion de borne supérieure. Les observations menées auprès d'étudiants mettent notamment en évidence des difficultés de gestion et d'articulation des quantificateurs lorsqu'ils écrivent la définition de borne supérieure, si bien que le formalisme se présente comme un obstacle à la conceptualisation.

En lien avec ces travaux, nous nous sommes demandés si la manipulation du formalisme intervenant dans les définitions des notions topologiques pouvait mener à l'acquisition d'une certaine disponibilité des concepts et à quelles difficultés les étudiants risquaient-ils d'être confrontés dans ce travail manipulatoire.

Nous présentons ici les analyses a priori des premiers énoncés proposés aux étudiants en séances d'exercices. Nous expliquons ensuite, sur la base de ces analyses, comment peut se présenter la dynamique entre le formel et le conceptuel dans l'enseignement de topologie décrit ici en tenant compte du fait que nous ne préjugeons pas du déroulement effectif en classe.

1. Outils d'analyses

Nous utilisons les outils d'analyse des contenus développés par A. Robert (1998). Sur la base d'un corpus d'exercices de topologie que les étudiants sont amenés à résoudre, nous avons regardé d'une part les tâches proposées et d'autre part, les activités potentielles mises en jeu pour résoudre ces tâches. Dans ces analyses, nous nous sommes intéressés aux critères suivants qui, selon nous, étaient susceptibles de dégager les spécificités du travail sur les concepts topologiques :

- la dimension outil/objet des notions à utiliser (R. Douady, 1986) ;
- le rôle spécifique du formalisme ;
- l'utilisation de connaissances anciennes ou en cours d'acquisition ;
- les niveaux de mise en fonctionnement des connaissances. A. Robert distingue trois niveaux :
  - le niveau technique : ce niveau correspond à des mises en fonctionnement indiquées, isolées. Il s'agit d'applications immédiates de théorèmes, de définitions,…
  - le niveau des connaissances mobilisables : les mises en fonctionnement sont encore indiquées mais on dépasse l'application simple d'une propriété à la fois ;
  - le niveau des connaissances disponibles : à ce niveau, l'étudiant est capable de résoudre ce qui lui est proposé sans indications, de rechercher dans ses connaissances ce qui peut intervenir ;
- les types de raisonnements mis en jeu ;
- les adaptations à effectuer pour résoudre la tâche. Dans Robert (2005), six types d'adaptations sont dégagés, pouvant intervenir simultanément :
  - les reconnaissances des modalités d'application des notions, théorèmes, méthodes, formules,…
  - l'introduction d'intermédiaires tels que des points, des notations, des expressions,…
  - les mélanges de plusieurs cadres ou notions, les changements de points de vue, de cadres ou de registres, les mises en relation ou interprétations ;
  - l'introduction d'étapes, l'organisation des calculs ou des raisonnements. Les étapes peuvent être standards ou à imaginer ;
  - l'utilisation de questions précédentes dans un problème ;
  - l'existence de choix, forcés ou non ;
- les moyens de contrôle.

Dans notre travail, les analyses des énoncés nous ont également permis de repérer si certaines activités revenaient fréquemment et si les exercices proposés faisaient intervenir les mêmes niveaux de mises en fonctionnement.

2. Les énoncés

Nous analysons les premiers exercices qui sont proposés aux étudiants juste après l'introduction des notions topologiques. Les énoncés consistent à faire utiliser les définitions d'ouvert et de fermé dans R sur des objets familiers : intervalle ouvert, fermé et singleton.

Les analyses sont présentées avec le même souci de détails que celui qui est imposé aux étudiants. Plus précisément, on leur demande de rédiger tous les calculs et tous les enchaînements logiques, en énonçant à chaque étape les résultats utilisés. Ce choix sera discuté au paragraphe 4.

Exercice 1 – Montrez, en utilisant la définition en terme d'intérieur, que]a, b[est un ensemble ouvert.

Analyse de l'exercice

La question est fermée et la méthode est indiquée.

Il s'agit de prouver une égalité entre deux ensembles. Nous sommes donc dans le cadre de la théorie des ensembles. On commence par traduire cette égalité en les deux inclusions $]a,b[\subseteq \text{int}]a,b[$ et $\text{int}]a,b[\subseteq]a,b[$. La production demandée à l'étudiant est donc une démonstration mettant en jeu un raisonnement ensembliste qui contiendra (au moins) deux étapes imposées.

La seconde inclusion est immédiate (reconnaissance de la propriété « $\text{int E} \subseteq \text{E}$ »).

La première inclusion nécessite l'introduction d'un point intermédiaire : on se donne un élément x dans $]a,b[$ et on prouve que x appartient aussi à $\text{int}]a,b[$ (reconnaissance des modalités d'application pour prouver une inclusion d'ensembles).

Le fait que le point x soit dans $\text{int}]a,b[$ se traduit formellement par $\exists r > 0, B(x, r) \subseteq]a,b[$. À partir d'ici, plusieurs étapes sont à envisager. Tout d'abord, il y a lieu de reconnaître la nature d'une boule dans R : $B(x,r)$ est un intervalle ouvert centré en x, c'est-à-dire $]\, x - r, x + r\, [$ (reconnaissance de la définition de boule). L'étape suivante consiste à trouver une valeur possible pour r (choix à effectuer). On peut conjecturer une valeur pour r à l'aide d'un dessin semblable à celui ci-dessous :

$r = x - a$ $\qquad\qquad$ $r = b - x$

L'observation graphique permet de choisir $r = \min\{x - a, b - x\}$ (travail sur l'ordre dans R). Il reste maintenant à prouver que $B(x, r) \subseteq]a, b[$. Le mode d'organisation est le suivant : on considère un point $y \in B(x, r)$ et on montre que $y \in]a, b[$ (un nouvel intermédiaire est introduit). Ces deux informations se traduisent de la façon suivante : on $a \mid y - x \mid < \min\{x - a, b - x\}$ et on doit montrer que $a < y < b$ (mise en jeu d'une technique locale liée à l'ordre sur R : la manipulation d'inégalités). Deux cas sont à envisager selon que $r = x - a$ ou $r = b - x$. L'étudiant doit faire appel aux propriétés de la valeur absolue et plus précisément, à la résolution d'une inéquation de la forme $| \varphi | \leq a$ (mise en jeu de connaissances antérieures) et utiliser le fait que $x - a < b - x$ si $r = x - a$ (mise en jeu d'un travail sur l'ordre) pour en déduire que $y \in\ ]a, b[$. Une dernière étape consiste à revenir au fait que tous ces calculs montrent l'inclusion $B(x,r) \subseteq\ ]a, b[$, ce qui achève la démonstration.

Conclusion

L'énoncé est une tâche simple et isolée en topologie puisqu'il consiste à utiliser une définition.

Dès que l'égalité $]a, b[= \mathrm{int}]a, b[$ est traduite en deux inclusions, on passe dans le cadre de la théorie des ensembles et à ce stade de l'exercice, le travail à réaliser n'a plus de lien direct avec la compréhension d'ensemble ouvert. La démonstration de l'inclusion non triviale contient des éléments implicites : des points intermédiaires sont introduits, des quantificateurs sont cachés au départ et apparaissent au fil de l'exercice quand une inclusion est à prouver. Plusieurs arguments sont à articuler. Beaucoup d'informations doivent être interprétées. Des connaissances antérieures sur la manipulation d'inégalités et donc de l'ordre sur R sont nécessaires. Un problème d'existence lié à cet ordre intervient dans la démonstration. Ce problème peut être résolu grâce à l'utilisation d'un dessin.

La tâche, au départ simple et isolée en topologie, a donc engendré des activités qui nécessitent de nombreuses adaptations mais aussi, la disponibilité de connaissances antérieures sur les propriétés des réels. Ces activités sont réalisées dans les cadres de la logique élémentaire et de la théorie des ensembles. De nombreuses initiatives sont laissées à la charge de l'étudiant. Les activités relèvent donc du niveau des connaissances disponibles.

Exercice 2 – Montrez, en utilisant la définition en terme de boule, que [-1, 4] est un ensemble fermé.

Analyse de l'exercice

La question est fermée et la méthode est indiquée.

Il s'agit de montrer que l'écriture quantifiée suivante est vérifiée :

$\forall x \in \mathrm{R}, (\forall r > 0, B(x, r) \cap [-1, 4] \neq \emptyset) \Rightarrow (x \in [-1, 4])$.

L'organisation logique est donnée par : prendre un réel quelconque x, supposer ensuite qu'on a $\forall \mathrm{r} > 0, B(x, r) \cap [-1, 4] \neq \emptyset$, pour en déduire que $x \in [-1, 4]$.

Une technique vue au cours théorique est utilisée (introduction d'une technique locale) : puisque l'hypothèse est valable $\forall r > 0$, on attribue une série de valeurs à r. L'idée est de choisir des valeurs de plus en plus petites pour obtenir une suite de nombres qui converge vers 0.

- Si $r = 1$, alors on a $B(x, 1) \cap [-1, 4] \neq \emptyset$. Cette information se traduit en l'existence d'un point, noté x_1, qui est à la fois dans $B(x, 1)$ et dans [-1, 4].
- Si $r = 1/2$, alors il existe un élément noté x_2 tel que $x_2 \in B(x,1/2)$ et $x_2 \in [-1, 4]$.
- … et ainsi de suite.

On construit selon ce procédé une suite (x_n) telle que $\forall n \geq 1$, $x_n \in B(x,1/n)$ et $x_n \in [-1, 4]$. Ces deux informations se traduisent en $\forall n \geq 1$, $|x_n - x| < 1/n$ et $-1 \leq x_n \leq 4$. La première inégalité dit que $x_n \to x$. Pour le montrer, il faut articuler les arguments suivants : on passe à la limite dans $|x_n - x| < 1/n$, on a vu que $1/n \to 0$, l'inégalité stricte devient large par passage à la limite, la continuité de la valeur absolue permet d'écrire $|\lim x_n - x| \leq 0$, et on conclut par le fait qu'une valeur absolue est positive ou nulle (mise en fonctionnement de résultats du cours). On déduit que $x \in [-1, 4]$ en passant à la limite dans les deux autres inégalités.

Conclusion

L'énoncé est une tâche simple et isolée en topologie puisqu'il consiste à utiliser une définition. Comme dans l'exercice précédent, de nombreuses adaptations sont à réaliser : reconnaissance des modalités d'application des formules, interprétations, introduction d'intermédiaires, arguments à articuler. Certains de ces éléments sont cachés implicitement dans la définition. Nous remarquons aussi l'importance du parenthésage. Si les parenthèses étaient mal placées ou absentes dans la définition, l'organisation logique à prévoir serait différente et mènerait à une manipulation erronée de la définition de fermé. Des résultats antérieurs sur la convergence des suites, sur le passage à la limite dans des inégalités et sur les propriétés des réels sont aussi utilisés.

Nous relevons, une fois encore, la différence entre le niveau de difficulté de la tâche et celui des activités engendrées. Celles-ci relèvent en effet du niveau des connaissances disponibles.

Exercice 3 – L'ensemble $\{2\}$ est-il ouvert ?

Analyse de l'exercice

La question est ouverte et aucune méthode n'est indiquée. L'étudiant doit choisir l'outil qui lui permettra de répondre à la question, ce qui revient à choisir avec quelle définition il travaillera. De plus, il doit, avant d'entrer dans la tâche, avoir une idée sur le fait que l'ensemble est ouvert ou non, ce qui implique une bonne compréhension, une bonne interprétation et un certain degré de visualisation des définitions.

– **Solution 1**

On travaille avec la définition en termes de boules. Montrer que $\{2\}$ est ouvert reviendrait à prouver que $\forall x \in \{2\}, \exists r > 0, B(x, r) \subseteq \{2\}$ (*). L'information $\forall x \in \{2\}$ est interprétée comme $x = 2$.

Un support graphique peut aider à comprendre qu'un tel r est impossible à trouver. Ainsi, $\{2\}$ n'est pas ouvert et on est ramené à prouver la négation de (*) (reconnaissance de modalités d'application des formules). On est alors dans le cadre de la logique élémentaire mélangé à celui de la théorie des ensembles (une inclusion d'ensembles apparaît). En distribuant la négation dans (*), on a : $\exists x \in \{2\}, \forall r > 0, B(x, r) \not\subset \{2\}$.

Comme $x = 2$, l'information « $B(x, r) \not\subset \{2\}$ » se traduit en l'existence d'un point y dans $B(2, r)$ différent de 2 (introduction d'un intermédiaire). L'organisation logique est la suivante : on considère $x = 2$ et on fixe un réel arbitraire $r > 0$. On cherche alors un point y tel que $y \in]\, 2 - r, 2 + r\, [$

et $y \neq 2$ (utilisation de la définition de boule dans R). Par exemple, $y = 2+r/2$ convient (choix lié à l'ordre sur R).

– **Solution 2**

On utilise la définition en termes de suites :

$\forall x \in \{2\}, \forall (x_n) \subseteq \mathrm{R}, (x_n \to x) \Rightarrow (\exists n_0, \forall n \geq n_0, x_n \in \{2\})$.

Une interprétation correcte de cette définition aide à comprendre qu'il existe des suites qui convergent vers 2 sans devenir ultimement constantes.

Il faut donc montrer la négation de la définition ci-dessus (reconnaissance des modalités d'application des formules) :

$\exists x \in \{2\}, \exists (x_n) \subseteq \mathrm{R}, x_n \to x$ et $\forall n_0, \exists n \geq n_0, x_n \notin \{2\}$.

On est passé dans le cadre de la logique élémentaire. Il faut aussi, à ce stade, se rappeler de la négation d'une implication.

On prendra, par exemple, la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ définie par $x_n = 2+1/n$ (choix à effectuer).

Conclusion

La tâche est simple et isolée en topologie puisqu'elle porte sur l'utilisation de la définition d'ensemble ouvert.

L'entrée dans la tâche demande cependant une compréhension fine de la définition d'ouvert puisqu'il faut se rendre compte que cette définition n'est pas vérifiée. Une initiative est laissée à la charge de l'étudiant puisqu'il doit choisir avec quel type de définition il va travailler. Dès que l'étudiant a choisi une définition, le cadre de la logique élémentaire est mobilisé puisqu'il faut la nier. Dès ce moment, la production demandée sort du cadre de la topologie puisqu'elle consiste à prouver une écriture quantifiée dans laquelle les concepts topologiques n'interviennent pas. Il y a un problème d'existence dans chaque solution.

Les activités mises en jeu pour résoudre la tâche nécessitent des adaptations variées et un travail qui mélange plusieurs cadres. L'ordre sur R apparaît aussi comme une connaissance antérieure qui doit être disponible. Mais dans l'enseignement secondaire, les propriétés d'ordre de R ne sont pas explicitement exigibles et les élèves ne les maîtrisent pas.

Ainsi, la tâche, simple et isolée du point de vue de la topologie, donne lieu à des activités pour lesquelles les étudiants ont à utiliser des connaissances non topologiques devant de plus être disponibles, comme par exemple la notion de convergence d'une suite dans un cadre général, alors que jusque-là, on étudiait plutôt des exemples de suites convergentes.

3. Comment les notions sont-elles travaillées a priori ?

Comme nous l'avons précisé au début de ce texte, le chapitre sur la topologie se résume à la présentation des notions et à la démonstration de quelques propriétés. La plupart des exercices[1] qui sont proposés aux étudiants consistent principalement à utiliser les définitions dans R et R^2, qui sont des espaces de référence dans le bagage mathématique des étudiants.

Dans les exercices analysés au paragraphe 2, nous avons montré que ce type de tâches se ramène à prouver qu'une écriture avec quantificateurs est vérifiée. Nous avons donc, au départ, un énoncé qui est posé dans le cadre de la topologie mais dès que celui-ci est traduit en langage formel, ce sont les cadres de la logique élémentaire et de la théorie des ensembles qui sont mobilisés. Les activités engendrées par la manipulation de ces écritures formelles mettent en jeu des connaissances supposées disponibles sur la convergence des suites, les passages à la limite, les inégalités, l'ordre sur R. Il ne s'agit donc pas de connaissances en topologie. De plus, la plupart de ces connaissances datent de l'année en cours et non pas de l'enseignement secondaire, elles ne sont donc pas réellement anciennes et peut-être pas non plus disponibles chez tous les étudiants. La manipulation des écritures formelles ne revient donc pas sur la notion topologique qui apparaît initialement dans l'énoncé. Ainsi, faire utiliser les définitions peut ne pas se présenter a priori comme une aide à la compréhension de la notion topologique mise en jeu dans l'énoncé.

Enfin, une difficulté rencontrée dans la manipulation des écritures formelles est que les étudiants ne disposent d'aucun moyen de contrôle pour vérifier que leur production est correcte. Leurs seuls fils conducteurs sont leur argumentation logique et les détails de calculs.

Nous devons bien entendu tenir compte du fait que nous nous livrons ici à des analyses a priori. Les activités que nous avons décrites précédemment sont les activités attendues, ce ne sont pas nécessairement celles qui seront effectivement réalisées en classe.

4. Caractéristiques du cours de topologie

Les analyses présentées au paragraphe 2 mettent en évidence deux caractéristiques du cours de topologie décrit ici.

La première concerne l'abondance de détails exigée dans la rédaction des solutions. Il s'agit d'un choix commun aux enseignants du département de mathématique de notre université. Nous pensons que cet effort incite les étudiants à s'interroger sur ce qu'ils écrivent et que cette démarche peut les aider à développer un raisonnement mathématique cohérent.

Une autre caractéristique du cours de topologie est son aspect très formalisé. Comme nous l'avons mentionné au début de ce texte, ce cours est suivi par des étudiants des sections mathématique, physique et informatique. La manipulation du formalisme joue donc un rôle important dans leur formation. Or, nous savons que les étudiants qui entrent en première année universitaire ne sont pas familiers avec les écritures formelles. Pourtant, ils sont confrontés à ce type d'écritures dès que

1 La liste complète des exercices et les analyses correspondantes sont données dans notre mémoire de DEA (Bridoux, 2005).

de nouveaux objets sont introduits. C'est pourquoi, les premiers exercices qui leur sont proposés consistent à utiliser les définitions de façon à leur faire manipuler immédiatement le formalisme.

5. Conclusion

Lorsque de nouveaux objets sont introduits, on pourrait penser que de faire utiliser leurs définitions est une tâche simple pour les étudiants et qui peut les aider à donner du sens aux notions. Or, dans le cas des notions topologiques, nous avons montré que ce type de tâche ne requiert pas une compréhension fine des concepts puisqu'il ne met pas en jeu de réelles connaissances en topologie. De plus, nos analyses ont mis en évidence l'existence d'un décalage important entre les tâches à effectuer, simples et isolées du point de vue de la topologie, et les activités engendrées qui relèvent d'un niveau de connaissances disponibles. Les analyses présentées dans notre mémoire de DEA ont pourtant révélé que la majorité des tâches proposées se ramènent à l'utilisation des définitions.

Nous pensons que ces résultats sont typiques des notions formalisatrices, unificatrices et généralisatrices. Le début de l'enseignement d'une « notion FUG » est un travail sur les définitions, donc une tâche qui est, a priori, facile. Or, ce travail engendre des activités compliquées qui mobilisent des connaissances antérieures qui sont supposées disponibles alors qu'elles ne le sont pas.

En conclusion, le travail sur les définitions que nous proposons dans l'enseignement de topologie analysé ici donne une vision peu intuitive et essentiellement formelle des notions. La dynamique entre le formel et le conceptuel risque donc de ne pas être productive chez un certain nombre d'étudiants.

Une voie à explorer serait d'essayer de réduire le degré de formalisme en proposant aux étudiants davantage d'exercices où on ne leur impose pas d'utiliser les définitions. Par exemple, pour montrer qu'un ensemble est ouvert, des techniques telles que le passage au complémentaire ou l'utilisation de résultats sur la réunion ou l'intersection d'ensembles peuvent être employées. Il est par contre difficile d'évaluer si ce type d'approche permet de développer une meilleure conceptualisation chez les étudiants.

Références

Bridoux, S. (2005). *Analyse d'un enseignement de topologie en première année d'université*. Mémoire de Master de didactique des mathématiques, Université Paris 7.

Chellougui, F. (2004). *L'utilisation des quantificateurs universel et existentiel en première année universitaire entre l'explicite et l'implicite*. Thèse de Doctorat, Université Lyon 1.

Dorier, J.L. (1997). *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*. Grenoble : La pensée sauvage.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil/objet. *Recherches en didactique des mathématiques*, *7*(2), 5-32.

Robert, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en didactique des mathématiques*, *18*(2), 139–190.

Robert, A. (2005). Deux exemples d'activités en formation des enseignants de mathématiques du second degré. *Petit x*, *67*, 63-76.

Pour joindre l'auteur

Stéphanie Bridoux
Université de Mons-Hainaut
Rue Louis Blanqui, 127
7390 Quaregnon
Belgique
Courriel : stephanie.bridoux@umh.ac.be