Un siècle de proportionnalité dans l'enseignement obligatoire français

Magali HERSANT
DIDIREM

Dans l'enseignement de la proportionnalité au 20ème siècle, le calcul de la 4ème proportionnelle est une tâche classique et emblématique. C'est pourquoi nous proposons une étude de l'évolution de la transposition didactique[1] de la proportionnalité directe dans l'enseignement obligatoire français (1887-2000) à partir de l'évolution des savoirs et savoir-faire[2] relatifs au calcul de 4ème proportionnelle. L'étude, menée dans le cadre de notre thèse en cours[3], à partir de textes officiels (programmes, instructions et répartition des programmes) et de manuels, permet de distinguer 5 périodes. L'analyse des textes officiels permet de cerner les positions institutionnelles et de délimiter des périodes. L'analyse de manuels permet de montrer l'activité de la noosphère pour rendre ou maintenir cohérentes les organisations locales. Cette étude précise, selon nous, en quoi la transposition didactique actuelle est héritière des transpositions didactiques passées.

Remarque : La “ proportionnalité ” n'a pas toujours été un objet d'enseignement. Le terme n'apparaît dans les programmes du primaire qu'en 1970. Au début du siècle, on enseignait les grandeurs proportionnelles. Pour nous, le mot proportionnalité recouvre les notions de grandeurs proportionnelles, suites numériques proportionnelles, application linéaire et proportionnalité.

1. 1887-1923 : grandeurs qui varient dans le même rapport, problèmes de règle de trois et technique de réduction à l'unité.

A cette époque, l'école prépare les enfants à leur vie professionnelle future. L'enseignement de la proportionnalité se fait dès le CM2 à partir de l'étude des grandeurs proportionnelles et des problèmes de règle de trois.

---

[1] Chevallard, 1985, La transposition didactique, Ed. La Pensée Sauvage

[2] Bosch, Chevallard, 1999, La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs, objets d'étude problématique, *Recherches en Didactique des Mathématiques Vol 19.1*

[3] Le titre provisoire de cette thèse est “ Etude des interactions didactiques dans l'enseignement de la proportionnalité au collège ”.

La théorie de référence est celle des proportions, mais les programmes ne prévoient pas de l'enseigner explicitement. La technique institutionnelle est la technique de réduction à l'unité :

> Problème : 18 mètres d'étoffe ont coûté 189 fr. Combien 13 mètres coûteront-ils ?
>
> Si 18 mètres coûtent 189 fr.
> 1 mètre coûtera 18 fois moins, ou $\frac{189}{18}$
> et 13 mètres coûteront 13 fois plus qu'un mètre ou $\frac{189 \times 13}{18}$
> d'où $x = \frac{189 \times 13}{18} = 136 fr 50$
>
> (F.F., CM, 1904, p 196-197)

Mais dans les manuels, les choix restent fortement marqués par les problématiques de la théorie des proportions. Cela se traduit de deux façons :

- les techniques des rapports ou proportions[4] sont utilisées dans certains manuels.
- certains auteurs refusent d'utiliser des rapports de grandeurs de nature différente (c'est nous qui soulignons) :

> **497. -** Les raisonnements précédents ne conviennent évidemment que pour des proportions de nombres. Voici un raisonnement qui s'applique aux proportions de quatre grandeurs de même espèce.
> **Théorème. -** Étant donnée une proportion de **quatre grandeurs de même espèce**, on en obtient une autre : soit en permutant les extrêmes, soit en permutant les moyens, soit en mettant les extrêmes à la place des moyens et réciproquement. (p 293)
>
> **501**. Propriété. – Théorème. – Quand deux grandeurs **de même espèce** sont directement proportionnelles le rapport d'une valeur **quelconque** de la 1ère à la valeur correspondante de la 2ème est un **nombre invariable**. (p 299)
>
> **502**. – Si les grandeurs directement proportionnelles ne sont pas de même espèce, le raisonnement du numéro 501 est en défaut, puisqu'il est impossible de permuter les moyens de la proportion ; l'écriture nouvelle n'aurait aucun sens.
>
> **(Beil, Vareil CS, 1909, p 288-299)**

[4] La technique des rapports utilise le fait que les grandeurs varient dans le même rapport. Ainsi le problème précédent serait résolu de la façon suivante : La longueur d'étoffe et le prix de cette étoffe varient dans le même rapport, donc : $x = 189 \times \frac{13}{18}$. La technique des proportions utilise le fait que les valeurs des grandeurs proportionnelles forment une proportion et la propriété : " dans une proportion le produit des extrêmes est égal au produit des moyens ". avec cette technique le problème précédent se résout ainsi : 18 mètres est à 13 mètres comme 189 est à x donc : $\frac{18}{13} = \frac{189}{x}$ et $x = \frac{189 \times 13}{18}$

2. 1923-1945 : la méthode de réduction à l'unité contestée, vers le coefficient de proportionnalité ?

Cette période voit de nombreux changements de programme à tous les niveaux d'enseignement. Pour la proportionnalité, c'est une période de transition qui marque le début de changements importants.

Dans les textes officiels (programmes de 1923 pour le CM et 1931 pour le CS) la proportionnalité n'est plus seulement envisagée comme une convention sociale (problèmes de commerce), mais aussi comme un outil de modélisation de phénomènes physiques (introduction de problèmes de mouvement uniforme, densité, échelle dans le champ des problèmes de proportionnalité, étude de nombreuses grandeurs et calculs de mesures de grandeurs avec des formules). De plus la notion de valeur de l'unité apparaît implicitement au CS à travers par exemple les notions de poids spécifique, prix d'une marchandise et quantité de marchandise correspondant à une unité de monnaie. Les changements de programmes ultérieurs confirment et accentuent cette tendance.

Dans les manuels, il y a globalement une prise de distance par rapport à la théorie des proportions (moindre utilisation de la technique des proportions). Parallèlement, la technique de réduction à l'unité est ouvertement contestée et la technique du coefficient commence à apparaître au CS.

> **140**. - La **méthode de réduction à l'unité** est d'un *emploi facile* ; mais, si on l'applique machinalement, elle peut conduire à des *raisonnements trop longs* ou même *absurdes*. (...)
>
> *Gay et Mortreux, CEP-CS (1933)*

Mais le changement de technique amorcé n'est pas encore accompagné dans les manuels d'une modification conséquente des propriétés des grandeurs proportionnelles.

Par ailleurs, nous notons deux freins possibles à l'emploi massif de la technique du coefficient. La technique n'est pas " automatisable ", contrairement à la technique de réduction à l'unité (selon le coefficient choisi on fait une division ou une multiplication). Elle n'est pas valable pour les grandeurs inversement proportionnelles, étudiées en même temps que les grandeurs directement proportionnelles à l'époque.

3. 1945-1970 : utilisation de la valeur unitaire et algébrisation des techniques

Entre 1945 et 1947, il y a une réorganisation de l'enseignement primaire élémentaire.
Les instructions pour le CM institutionnalisent la valeur de l'unité et précisent les rapports du coefficient de proportionnalité avec la règle de trois, les pourcentages et les fractions :

Le programme comprend explicitement l'étude du prix et du poids à l'unité et des exemples analogues de quotients qui peuvent être compris dans la dénomination générale de " valeur de l'unité ". [...] Leur calcul et leur emploi sont résumés dans la formule :

Valeur totale = valeur de l'unité ∞ nombre d'unités.

Cette formule donne la règle de calcul, soit du premier nombre par une multiplication, soit de l'un des termes du deuxième membre par une division.

(...) Les problèmes usuels de règle de trois conduisent à la recherche d'un quotient intermédiaire qui peut être, soit la valeur d'une unité, soit un nombre d'unités.

Les formules suivantes en donnent deux exemples typiques :

$$\frac{\text{valeur de la première parcelle}}{\text{surface de la première parcelle}} = \text{prix unitaire}$$

$$\text{prix de l'hectolitre} = \frac{\text{valeur totale}}{\text{nombre d'hectolitres}}$$

Des exemples simples de quotient permettent, de même, de justifier sommairement les diverses modes de calcul des problèmes de règles de trois :

$$\frac{a \times b}{c} \; ; \; a \times \frac{b}{c} \; ; \; \frac{a}{c} \times b$$

ainsi que des procédés de vérification (division par un même nombre d'un des facteurs et du diviseur).

Ces modifications permettent l'algébrisation des techniques de calcul de 4ème proportionnelle et préservent la référence aux grandeurs proportionnelles.

Dans les manuels du primaire, nous relevons deux choses :

- la technique de réduction à l'unité continue d'être employée, mais le petit discours technologique qui l'accompagnait jusque là tend à être remplacé par différents ostensifs dans de nombreux manuels.
- une " nouvelle " technique de calcul de quatrième proportionnelle apparaît dans un manuel qui n'aborde pas l'étude des grandeurs inversement proportionnelles, le produit en croix :

Pour trouver la réponse, il faut multiplier les 2 nombres connus d'une branche de la croix et diviser le produit obtenu par e nombre connu isolé de l'autre branche.

Piète, Scialara, Berthoul, CM2-CS, 1962, p 101

Avec la fusion des filières " courte " et " longue " en 1959-1960, les programmes du collège changent : les problèmes de règle de trois et l'étude des grandeurs proportionnelles disparaissent des programmes.

Ces modifications se traduisent dans les manuels par des points de vue rétrogrades ou avant-gardistes. Ainsi, le Cluzel-Court (3ème, 1963) traite de Grandeurs proportionnelles, étudie les rapports, proportions et nombres proportionnels et emploie la technique des proportions ; au contraire le Queysanne-Revuz (3ème, 1968) n'aborde pas les grandeurs proportionnelles, associe les rapports et proportions à la fonction linéaire et aux suites numériques proportionnelles et ne propose que des exercices de partages proportionnels.

4. 1970-1977 : la proportionnalité, relation multiplicative entre deux listes de nombres.

La réforme des mathématiques modernes accélère l'évolution de l'enseignement de la proportionnalité. Les principales modifications concernent les savoirs à enseigner.

Le terme proportionnalité est défini dans les programmes du primaire :

> Lorsque l'opérateur est " multiplier par ... " ou " diviser par ... " la correspondance qui permet de passer d'une liste à l'autre est la *proportionnalité.*
>
> Instructions CM 1970

L'application linéaire devient la référence institutionnelle et l'étude des grandeurs proportionnelles est abandonnée. Le tableau devient l'outil institutionnel de résolution des problèmes de proportionnalité :

> La plupart des problèmes traités au cours moyen mettent en œuvre des problèmes dans lesquels la proportionnalité doit être explicitée.
> D'une façon générale, tous les problèmes traités au moyen de la " règle de trois " relèvent du modèle mathématique précédent. Il est essentiel de savoir qu'il s'agit d'un seul et même problème, qu'il convient d'expliquer en termes nouveaux.
>
> *Exemple 1* : Pour une fête, des enfants font des colliers composés tous du même nombre de perles.
> Un enfant a utilisé 45 perles pour faire trois colliers.
> Le tableau ci-contre permet de répondre aux deux questions :
> Combien faut-il de perles pour fabriquer 7 colliers ?
> Combien de colliers peut-on fabriquer avec 135 perles ?

Collier	Perles
3	45
7	?
?	135

> Programmes de 1970, CM

La proportionnalité disparaît du secondaire.

Mais ces modifications engendrent deux glissements perceptibles dans certains manuels :
- la confusion entre situation multiplicative et situation de proportionnalité. En effet, tous les problèmes qui se représentent dans un tableau avec un coefficient multiplicatif ne sont pas des problèmes de proportionnalité (le problème précédent est un problème de division euclidienne).
- le tableau de proportionnalité devient objet d'enseignement.

Par ailleurs, la technique du coefficient est abondamment utilisée dans les manuels. Elle est souvent accompagnée d'autres techniques (produit en croix ou techniques basées sur la linéarité).

5. 19977-1999 : un retour aux situations, les suites numériques finies

Nous insisterons surtout sur les ruptures avec la période précédente.

Les programmes de 1977 marquent le retour de l'étude de la proportionnalité dans l'enseignement secondaire. Ils constituent aussi un retour à l'étude de situations concrètes.
La proportionnalité est présentée à partir de l'étude de suites numériques finies et le recours au tableau de proportionnalité n'est pas systématique.
Enfin, pour cette période il y a aussi une plus grande palette de techniques utilisables et en particulier il n'y a pas de technique institutionnelle.

Dans les manuels, et pour tous les niveaux, les registres utilisés sont diversifiés (graphique, tableau, langage naturel).

Ainsi, au-delà des trois périodes classiquement distinguées[5], cette étude montre que la transposition didactique actuelle est héritière des transpositions passées. Elle est issue de modifications par petites touches et d'une recherche de cohérence entamées dans les années 20.

---

[5] Pluvinage, Dupuis, 1981, La proportionnalité et son utilisation, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol 2.2