

**Capsules historiques, compétences réflexives
et site interactif**



Richard Pallascio, Université du Québec à Montréal, Canada

Résumé

Nous présentons un dispositif didactique, inspiré d'une approche philosophique appliquée aux mathématiques, permettant à des groupes d'élèves de la francophonie d'interagir par le biais d'un site interactif sur des questions au sujet des mathématiques (Euler.CyberScol.qc.ca/Pythagore/). À l'aide de capsules historiques, mathématiques, philosophiques et pédagogiques, des élèves, ainsi que leurs enseignantes et leurs enseignants, peuvent se saisir du constructivisme historique des mathématiques et ainsi se sentir personnellement impliqués dans la suite de cette construction. Des exemples permettront de constater le développement d'une argumentation socialement ancrée, prenant appui sur des constituants culturels et historiques.

« Apprendre et penser sont des activités
toujours situées dans un cadre culturel. »

Jerôme Bruner

Une équipe anime depuis quelques années un site internet interactif permettant à des groupes d'élèves de 10 à 15 ans, donc du 3^e cycle du primaire et du 1^{er} cycle du secondaire, d'interagir autour de questions au sujet des mathématiques (Pallascio, Charbonneau et Lajoie 2001). L'objectif est de permettre aux élèves de construire une argumentation au sujet de questions pertinentes, afin qu'ils deviennent progressivement par là les « auteurs » de leurs connaissances. Les questions proviennent surtout des élèves, par exemple, « Le hasard existe-t-il ? » ou « Peut-on parler de beauté en mathématiques ? ». Le rôle des animateurs du site est d'élaborer diverses capsules, historiques, mathématiques, philosophiques, pédagogiques, etc., afin de supporter les activités réflexives des élèves et également celles de leurs enseignantes et enseignants.

Une ligne du temps dite évolutive, qui se construit au fur et à mesure que de nouveaux mathématiciens ou mathématiciennes font leur apparition dans les capsules historiques liées aux questions posées dans les forums de discussion, permet aux élèves de naviguer des capsules historiques à la ligne du temps et de là à des sites en langue française dédiés à l'histoire des mathématiques, tels chronomath ou infoscience.

Enfin, les dialogues amènent des élèves du pré-formel à prendre conscience des concepts mathématiques qu'ils manipulent. En s'inscrivant dans une communication virtuelle qui les insère dans un contexte de « coopérative d'idées », les élèves acquièrent ainsi une perception du constructivisme historique à travers lequel se sont constitués les concepts mathématiques. Les groupes virtuels représentent une certaine société pour les élèves, les messages-synthèse représentant et transposant alors la réflexivité des groupes d'élèves entre eux (Pallascio, Daniel et Lafortune 2004).

Les situations éducatives proposées sont des processus interactifs où les élèves ont à interpréter, poser des hypothèses, réfléchir, poser des jugements, bref, à argumenter de manière réflexive (Krummheuer, 2000). L'interaction sociale est une composante nécessaire à tout apprentissage. Les élèves ne font pas qu'apprendre des éléments de la culture, ils la créent. L'interaction est ici de nature argumentative, i.e. basée sur une rationalité discursive. Ils construisent leurs connaissances à travers des débats philosophiques menés sur des questions mathématiques. Les questions discutées proviennent des élèves eux-mêmes, mais sont inspirées de la culture mathématique et de son histoire et donnent lieu à diverses recherches dont les résultats sont mis en commun dans la discussion. Les élèves deviennent ainsi eux-mêmes des producteurs actifs de connaissances et de savoirs qui sont mis en partage et développent ainsi leur pensée critique et des habiletés d'argumentation et de négociation collective des savoirs. Ils développent par là des habiletés cognitives et métacognitives. Ils acquièrent aussi de façon concrète et ancrée une perception et une compréhension du caractère construit des mathématiques. Enfin, l'échange virtuel est l'occasion d'un véritable partage d'idées dans un esprit fort semblable à celui qui anime les membres de communautés scientifiques.

En amont : une argumentation réflexive au sujet des mathématiques

Le dispositif didactique de ce site est fondé initialement sur le développement de compétences dites réflexives, lesquelles sont reliées à divers modes de pensée reliés entre eux (Pallascio *et al*, 2004). Nous présentons brièvement quelques définitions et liens entre ces modes de pensée, observés lors de recherches récentes, de même que des conditions facilitantes pour toute construction historique des concepts mathématiques rencontrés dans les apprentissages scolaires.

Différents modes de pensée composant une pensée réflexive

Nonobstant les différents sens que nous pouvons donner au concept de « pensée réflexive », des chercheurs et des chercheurs se sont récemment penchés sur des modalités de celle-ci, à savoir une pensée critique, une pensée créative et une pensée métacognitive (cette dernière au sens de Lipman, 1995).

Une pensée critique

On reconnaît de plus en plus l'importance d'une pensée critique. Par exemple, à l'instar de nombreux pays, dans la réforme actuelle du programme de l'école québécoise, on lui a donné une place de choix, l'exercice d'un jugement critique s'avérant l'une des quatre compétences transversales d'ordre intellectuel à développer, où elle est ainsi définie :

« ... la capacité de juger de l'élève pour l'amener à tenir compte des faits, à faire la part de ses émotions, à recourir à l'argumentation logique, à relativiser ses conclusions en fonction du contexte, à faire une place au doute et à l'ambiguïté et à renoncer aux idées arrêtées ou toutes faites. » (Ministère de l'Éducation du Québec, 2001 : 20)

Le concept de pensée critique prenait jadis le sens d'un exercice logique cherchant à vérifier l'exactitude de propositions (« the correct assessing of statements », Kennedy, Fisher et Ennis, 1991), les nouvelles perspectives conceptuelles liées à ce mode de pensée élargissent considérablement

sa portée et sa nature par le fait même. En 1982, Paul propose deux sens au concept de pensée critique, un sens faible dans lequel plusieurs habiletés sont utilisées pour détecter les erreurs de raisonnement et un sens fort dans lequel les penseurs critiques regardent un problème objectivement et sous des perspectives variées en tenant compte de tous les objets impliqués pendant qu'ils reconnaissent leurs propres points de vue égocentrique et sociocentrique. Alors que McPeck (cité par Kennedy *et al.*, 1991 : 13) y voit «l'usage approprié d'un scepticisme réflexif afin de fonder diverses croyances sur des bonnes raisons», Ennis (1987 : 20) définit une pensée critique comme étant une pensée raisonnable et de nature réflexive afin de décider ce qu'il convient de croire ou de faire.

Par extension, une étude récente a fait émerger la définition suivante d'une pensée critique dialogique : La pensée critique dialogique est un processus d'(é)valuation d'un objet, en coopération avec les pairs, pour éliminer les critères non pertinents dans une visée d'amélioration de l'expérience. La pensée critique dialogique est un processus de recherche en commun qui se manifeste dans des attitudes et des habiletés cognitives complexes reliées à la conceptualisation, la transformation, la catégorisation et la correction. Elle nécessite donc l'apport de quatre modalités de pensée, à savoir logique, créative, responsable et métacognitive, qui s'arriment à une perspective épistémologique complexe, c'est-à-dire l'intersubjectivité orientée vers la recherche du sens – dépassant ainsi l'égo-centrisme et le relativisme. Comme résultat, une nouvelle compréhension de l'objet de pensée est généré et une modification de l'idée initiale se manifeste.» (Daniel, Lafortune, Pallascio, Mongeau, Slade, Splitter et De la Garza, 2003).

Une pensée créative interprétative

Certains auteurs font une distinction entre une pensée créative générative (ou créatrice) et une pensée créative interprétative (Slade, 2000 ; Boden, 1994 ; Gardener, 1994). Alors que la première est associée à l'acte créateur de façon globale, la seconde est associée spécifiquement à une réflexion sur le produit d'un acte créateur, par exemple la genèse d'un acte créateur ou l'analyse d'une nouvelle preuve mathématique.

Le développement d'une pensée créative générative ou créatrice dans un contexte de résolution de problèmes mathématiques, par exemple, consiste en un travail d'imagination et d'invention combiné avec les différents ordres de contraintes de l'apprentissage. Les caractéristiques d'une pensée créative de type interprétatif, selon Lipman, sont la Sensibilité à une multitude de critères, la Formation de jugements, l'Auto-transcendance et la Contextualisation. «Toute discipline qui ne se contente pas d'apprendre à réfléchir à son propos, mais enseigne en outre comment se poser des questions sur cette réflexion elle-même (méthodologie de la réflexion) ne peut qu'encourager le type de pensée élaborée (ou complexe).» (Lipman, 1995 : 175) Pour nous, une pensée créative «trouve ses fondements dans la recherche du sens» (Daniel *et al.*, 2003).

Une pensée métacognitive

Une pensée métacognitive («thinking about thinking» : Fisher, 1998 ; Olson et Astington, 1993) porte essentiellement sur la conscience de ses pensées et de celles de ses interlocuteurs, ainsi que des processus qui les génèrent, par exemple en effectuant un retour sur une preuve logique produite

par un individu au sujet d'un problème mathématique. Une pensée métacognitive est une pensée qui se réfléchit elle-même, qui se prend comme objet de réflexion, et qui peut parfois poser des questions à l'autre afin de le faire réfléchir sur sa propre pensée. Une pensée métacognitive est donc une pensée procédurale à finalité de contrôle conscient, portant essentiellement sur les fonctionnements décontextualisés du sujet. Elle exige donc une capacité à intérioriser ses processus de pensée. Dans le contexte qui nous intéresse, celui d'une pensée réflexive en développement, les habiletés propres à une pensée métacognitive sont donc celles qui prennent sa pensée ou celle de ses interlocuteurs comme objet cognitif.

Le rôle d'une pensée métacognitive est d'aider l'individu à porter un regard sur sa façon de penser de manière réflexive et sur la gestion de ce processus de pensée complexe. L'exercice d'une pensée métacognitive a ainsi pour but que l'individu prenne conscience de sa démarche mentale en vue de s'améliorer et d'agir de manière plus efficace pour mieux penser, comprendre et intégrer ses connaissances. Son exercice tient compte de l'ensemble des pensées personnelles et collectives et traduit la réflexion sur un ensemble de réalisations ou de réflexions dans le but d'en saisir la globalité. C'est dans ce sens qu'il faut interpréter certains auteurs qui décrivent cette compréhension du processus de savoir propre à une pensée métacognitive, comme «le processus qu'un individu invoque pour contrôler la nature épistémique des problèmes et la valeur de vérité des solutions alternatives» (King et Kitchener, 1994 : 225). Enfin, pour nous, une pensée métacognitive «signifie penser à propos des pensées, des croyances, des perspectives (les nôtres et celles des autres) et exercer un certain contrôle sur elles, au lieu de simplement être à la remorque de ces dernières» (Daniel *et al.*, à paraître).

Quelques articulations entre ces modes de pensée

Suite aux questions portant sur des points de vue controversés, avec l'apport de points de vue d'auteurs reconnus dans la littérature scientifique, nous présentons succinctement quelques idées fécondes pour l'éducation.

Pensée critique et pensée métacognitive

Les deux concepts, pensée critique et pensée métacognitive, appartiennent au même champ de la cognition, celui visant le développement d'une pensée réflexive. Alors qu'un penseur critique est «conscient qu'une pensée critique est un processus social et sollicite activement les critiques des autres afin d'améliorer tant sa conscience de soi que sa compréhension de la société» (Cromwell, 1992), il est également disposé à questionner ses pensées et ses actions, et donc à se comporter en amont en «penseur métacognitif».

Kuhn (1999) soutient que le développement de la compréhension métacognitive est essentiel à la pensée critique qui, par définition, implique la réflexion sur les connaissances et sur la façon dont ces connaissances sont justifiées. Les individus avec des habiletés métacognitives bien développées contrôlent leurs propres croyances dans le sens qu'ils exercent un contrôle conscient sur l'évolution de leurs croyances en regard des influences externes. Ils savent ce qu'ils pensent et peuvent le justifier. Leurs habiletés dans la coordination consciente de la théorie et de l'évidence les rendent capables d'évaluer les affirmations des autres.

Les deux processus sont producteurs de jugements. Le recours à une pensée métacognitive mène normalement à un jugement sur sa façon de penser, alors que l'exercice d'une pensée critique conduit à produire un jugement sur un des objets mentionnés ci-dessus (énoncé, opinion, idée, concept, croyance ou savoir). Alors qu'un penseur critique se doit d'assumer « la responsabilité de sa pensée en étant apte et disposé à expliquer sa signification et les conséquences qu'elle comporte » (Kuhn, 1999 :21), cette démarche est intrinsèquement celle réalisée par le penseur métacognitif. Lorsque l'objet de la pensée critique est sa propre pensée ou un de ses produits (p. ex : une démonstration mathématique), cette démarche rejoint essentiellement l'exercice métacognitif sur sa pensée. En examinant les présupposés ainsi que la validité de communications, le penseur critique est « engagé dans une réflexion sur les présupposés qui guident notre représentation et notre interprétation de la réalité » (Kuhn, 1999, p. 21) Ce faisant, notre penseur critique ne peut que se comporter en penseur métacognitif.

Exercer une pensée critique signifie entre autres la présence d'une « conscience critique du processus de pensée lui-même et de ses produits » (Cromwell, 1992 : 43) et doit être perçu comme une « approche de la connaissance et de la vie qui combine un engagement à l'égard des opérations intellectuelles à une ferme volonté de critiquer ces opérations mêmes » (Pallascio, 2000 : 255). Tout en formulant des jugements selon des ensembles de critères clairement définis, en étant conscient du contexte dans lequel ses jugements sont formulés, en reconnaissant et acceptant la contradiction et l'ambiguïté et en étant conscient du caractère problématique et ambigu de la réalité, le penseur critique et créatif doit également reconnaître ses propres capacités et limites intellectuelles dans la construction de sa pensée, et donc manifester une pensée métacognitive. En définitive, la pensée métacognitive permet de se construire une pensée « métacritique » facilitant le transfert et la rapidité d'adaptation de la fonction critique de la pensée dans un nouveau contexte.

Pensée créative interprétative et pensée métacognitive

Le développement d'une pensée créative et celui d'une pensée métacognitive sont-ils parallèles, interdépendants ou séquentiels ? Ces modes de pensée pouvant opérer d'une façon plus ou moins consciente, comment une pensée créative générative, par exemple, durant la résolution d'un problème mathématique, contribue-t-elle au développement d'une pensée métacognitive ou vice-versa ? De ce point de vue, une formation en pensée créative générative est-elle facilitante ? La pensée créative d'un enfant aurait tendance à « s'émousser » au fur et à mesure qu'il vieillit, par exemple, en passant du primaire au secondaire. Est-ce que ce lent recul a un impact sur les habiletés métacognitives de l'apprenant à long terme sur ses propres processus de pensée ? Enfin, le caractère souvent inconscient de l'exercice d'une pensée métacognitive le rend-t-il incompatible pendant l'acte créateur ?

Rappelons qu'une pensée créative générative ou créatrice est associée à l'acte créateur, et qu'une pensée créative interprétative est associée à une réflexion sur le produit d'un acte créateur, par exemple la genèse d'un acte créateur, l'analyse d'une nouvelle preuve mathématique... En ce sens, une pensée créative interprétative, contrairement à une pensée créatrice qui se manifeste pendant un acte créateur, semble nécessiter l'exercice d'une pensée métacognitive. Une pensée créative interprétative prendra toute sa dimension et son sens dans la mesure où l'individu sera capable

d'être non seulement conscient de son processus cognitif, mais aussi d'être en mesure de réguler celui-ci et de savoir le pourquoi du produit de cette pensée.

Cependant, les échanges au niveau du développement d'une pensée créatrice (ou créative génératrice), par exemple celle pouvant donner lieu à l'exercice d'une pensée divergente, à de l'anticipation, à une production d'une variété d'informations, au travail sur des problèmes ouverts, aux méthodes procédant par essais et erreurs, faisant appel à l'imagination, à la production de réponses imprévues, nouvelles, originales, mettant de l'avant des habiletés cognitives telles imaginer, associer, relier, comparer, etc., ne nous ont pas permis d'y supposer en tout temps la nécessité d'une pensée métacognitive.

Ces échanges nous ont donc amené à restreindre l'apport d'une pensée créative dans l'économie générale du développement d'une pensée réflexive à sa seule dimension interprétative.

Pensée critique et pensée créative interprétative

Les échanges engagés par les chercheurs convergent vers une interdépendance des manifestations associées à ceux-ci. Par exemple, une chercheuse dira, en référence à la pensée créative : « Mon expérience avec les enfants [...] m'a appris que cette opération n'est pas spontanée et qu'elle est même très difficile à effectuer. En effet, pour poser une question philosophique (et non de compréhension de texte, par exemple), la personne doit, soit douter d'un acquis ou d'une croyance établie, soit chercher à établir des relations entre divers éléments. Or, douter et créer des relations supposent d'emblée que la personne entre dans un processus de recherche. Et qui dit « recherche », dit « inconnu ». Cela relève autant d'une pensée créative que d'une pensée critique. »

Certains diront qu'une pensée critique est plutôt de nature évaluative, tandis qu'une pensée créative serait plutôt de nature productrice, par exemple, en étant « capable de prendre (comprendre) des faits et des concepts hors contexte et de les appliquer à de nouvelles situations ». En ce sens, une chercheuse ajoutera : « une pensée critique suppose également une part de créativité. En effet, si la pensée critique suppose la capacité de contester ce qui est dit ou fait, elle suppose aussi la capacité de faire ressortir les manques, les limites, les nuances. Pour parvenir à ce dernier élément, l'élève doit faire des relations nouvelles, douter de ce qui a été avancé, questionner les acquis et les croyances, bref, il doit s'engager dans une zone encore inconnue et inexplorée par lui. Une pensée créative semble donc constituer le fondement de la pensée critique – bien qu'elle en soit différente ». Quant à sa dimension interprétative, elle est clairement évaluative, par conséquent proche d'une pensée critique.

Dans le contexte d'une éducation au sens critique par les mathématiques, des participants aux forums de discussion décriront les manifestations d'un penseur critique par une capacité à repérer des erreurs ou des contradictions dans les contextes les plus variés, par celle de rechercher les informations nécessaires pour atteindre un objectif, celle permettant d'estimer, de formuler des hypothèses ou de vérifier les résultats, ou encore celle de poser des questions ou d'inventer de manière autonome un problème. On peut constater ici, qu'il y a « une homologie de structure entre la pensée créative ou innovatrice, et la pensée critique. Du point de vue du sens commun, le développement d'une pensée critique consiste en un travail d'imagination et d'invention combiné

avec les différents ordres de contraintes de l'apprentissage» (Angenot, Pallascio, Gosselin, Julien, Juneau, Lafortune et Nachbauer, 1997: 34).

Conditions facilitantes

Parmi les conditions facilitantes, nous retrouvons la mise en place d'un contexte coopératif, participatif et interactif permettant la construction d'un dialogue du type de celui que l'on retrouve dans les communautés de recherche prônées par l'approche «Philosophie pour enfants». Nous retrouvons également le recours à des habiletés argumentatives, lesquelles vont évidemment continuer à progresser à travers le développement anticipé d'une pensée critique et métacognitive, principalement. Enfin, nous y retrouvons l'importance accordée aux habiletés métacognitives dont la présence dans tout apprentissage s'avère un élément de plus en plus déterminant.

Un exemple

Un exemple de dialogue entre classes d'élèves va permettre de situer le type d'argumentaires élaborés suite à des échanges de nature réflexive, où des activités mathématiques et historiques ont joué le rôle de déclencheur. La question portait sur «L'Univers est-il infini?»

1) Groupe A: «Où le paradoxe de Zénon est utilisé pour réfléchir sur le fini et l'infini?»

Bonjour! Quand c'est fini, c'est qu'il y a une fin; on peut le mesurer. Quand c'est infini, ça ne finit jamais. Par exemple, la suite des nombres entiers est infinie, car tout nombre a un suivant. Les philosophes grecs ont discuté le paradoxe d'Achille et la tortue. Achille, qui va 10 fois plus vite que la tortue qu'il poursuit, pendant qu'il se rend là où était la tortue, voit la tortue avancer le 1/10 de ce chemin. Pendant qu'Achille fait ce bout de chemin, la tortue parcourt le 1/10 de ce bout de chemin. Etc. Achille semble ne jamais rejoindre la tortue. Mais on sait qu'il la rejoint et la dépasse.

2) Groupe B: «Où une représentation imagée – pensée créative générative et interprétative – est utilisée?»

Selon la théorie du Big Bang, notre univers serait né il y a 15 milliards d'années. Les objets de l'Univers, comme la Terre, s'éloignent les uns des autres. L'astronome Hubert Reeves, un Québécois qui travaille en France, prend l'exemple de raisins dans la pâte à pain qui s'éloignent les uns des autres pendant la cuisson! D'autres scientifiques parlent du Big Crunch où les objets de l'Univers, après un certain temps, reviendraient les uns sur les autres! Mais cela veut-il dire qu'il n'y aurait pas d'autres Big Bang ou qu'il n'y en a pas déjà eu d'autres? Qu'en pensez-vous?

3) Groupe A: «Où intervient une analogie à l'aide de la géométrie sphérique?»

Bonjour! Einstein a écrit une théorie disant que l'Univers était fini mais illimité! Pour avoir une idée de ce qu'il voulait dire, on peut prendre comme exemple la Terre: si on part de Longueuil (Québec) et qu'on se dirige vers Fursac (France) par le chemin le plus court, on va se promener sur un grand cercle qui «coupe» la Terre en deux parties égales. Et si on continue toujours dans la même direction, on va finir par revenir à notre point de départ! Donc on pourrait se promener aussi longtemps que l'on voudrait (illimité), mais la circonférence de la Terre est finie!

D'autres questions sont accessibles en archives sur le site de L'Agora de Pythagore (voir aussi Pallascio, 2003).

Conclusion

L'apprentissage d'une argumentation au sujet de questions liées aux mathématiques permet aux élèves de saisir le caractère historiquement construit des mathématiques et de se sentir personnellement impliqués dans la suite de cette construction. Un contexte, celui d'une approche philosophique au sujet de questions mathématiques, permet aux élèves de développer une argumentation socialement ancrée.

Références

- Angenot, P., Pallascio, R., Gosselin, G., Julien, L., Juneau, P., Lafortune, L. et Nachbauer, L. (1997). Développer l'argumentation ou rallier à une cause, *In* P. Charest (dir.), *Recherche et formation: une complicité à créer* (p. 31-45). *Actes du colloque 1996 du doctorat en éducation*. Trois-Rivières: UQTR.
- Boden, M. (dir.) (1994). *Dimensions of Creativity*. Cambridge, Mass: MIT Press.
- Cromwell L. (1992). Assessing critical thinking. *New Directions for Community Colleges*, 77, 37-50.
- Daniel, M.-F., Lafortune, L., Pallascio, R., Mongeau, P., Splitter, L., Slade, C. et De la Garza, T. (2003). The developmental of dialogical critical thinking in children. *Inquiry: Critical Thinking across the Disciplines*, 22(4), 43-55.
- Ennis, R. (1987). A taxonomy of critical thinking dispositions and abilities. *In* J. Baron et R. Sternberg (dir.), *Teaching Thinking Skills: Theory and Practice* (p. 9-26). New York: W.H. Freeman.
- Fisher, R. (1998). Thinking about Thinking: Developing Metacognition in Children. *Early Child Development and Care*, 141, 1-13.
- Gardener, H. (1994). The Creator's Patterns. *In* M. Boden (dir.) (1994). *Dimensions of Creativity* (p. 143-159). Cambridge: MIT Press.
- Kennedy, M., Fisher, M.B. et Ennis, R.H. (1991). Critical thinking: Literature review and needed research. *In* F.J. Beau et I. Lorna (dir.) *Educational values and cognitive instruction: Implications for reform* (p. 11-40). North Central Regional Educational Laboratory, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
- King, P.M. et Kitchener, K.S. (1994). *Developing reflexive judgment*. New-York: Jossey-Bass.
- Kuhn, D. (1999). A Developmental Model of Critical Thinking. *Educational Researcher*, 28(1), 16-25.
- Krummheuer, G. (2000). Mathematics learning in narrative classroom cultures: Studies of argumentation in primary mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 20(1), 22-32.
- Lipman, M. (1995). *À l'école de la pensée*. Bruxelles: De Boeck Université.
- Ministère de l'Éducation (2001). *Programme de formation de l'école québécoise*. Québec: Gouvernement du Québec.
- Olson, D.R. et Astington, J.W. (1993). Thinking about thinking: Learning how to take statements and hold beliefs. *Educational Psychologist*, 28(1), 7-23.

- Pallascio, R. (2003). *Le secret des Cybermatics*. Québec : Le Loup de Gouttière.
- Pallascio, R. (2000). Manifestations d'une pensée réflexive dans une communauté philosophique virtuelle en mathématiques au primaire. In R. Pallascio et L. Lafortune (dir.) *Pour une pensée réflexive en éducation*. Québec : PUQ : 245-259.
- Pallascio, R. Charbonneau, L. et Lajoie, C. (2001, septembre). *L'Agora de Pythagore*. Consultation 2006, <http://Euler.CyberScol.qc.ca/Pythagore/>
- Pallascio, R., Daniel, M.-F. et Lafortune, L. (2004). Une pensée réflexive pour l'éducation. In R. Pallascio, M.-F. Daniel et L. Lafortune (dir.), *Pensée et réflexivité : theories et pratiques* (p. 1-12). Québec : Presses de l'Université du Québec.
- Slade, C. (2000). Pensée critique et créative. In R. Pallascio et L. Lafortune (dir.), *Pour une pensée réflexive en éducation* (p. 31-46). Québec : PUQ.

Pour joindre l'auteur

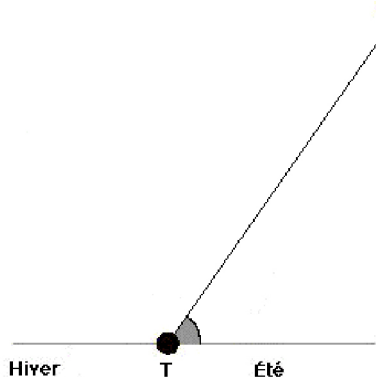
Richard Pallascio
Département de mathématiques, UQAM
C.P. 8888, suc. Centre-ville, Montréal (Qc), Canada H3C 3P8
Pallascio.Richard@uqam.ca

Annexe

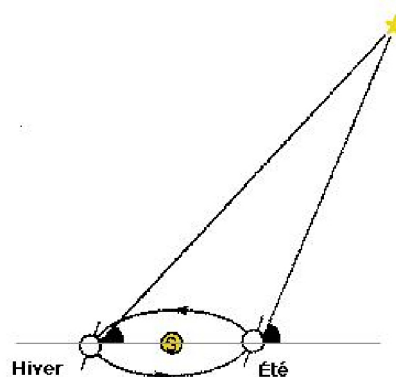
Capsules historiques – Où se trouve l'infini en mathématiques ?

Rédigées par Louis Charbonneau, UQAM

• Dans son livre *De Revolutionibus*, publié en 1543, Copernic révolutionne l'astronomie en présentant un système du monde dans lequel le Soleil est situé au centre de l'univers. L'une des conséquences de cette « nouveauté » est que, si le nouveau modèle correspond à la réalité, l'univers doit être très grand... peut-être infini. Pourquoi ? Voici quelques explications. Dans le modèle astronomique où la Terre est au centre de l'univers, lorsqu'on regarde une étoile, elle se trouve toujours, quel que soit le moment de l'année, à la même hauteur par rapport à l'équateur céleste (le plan qui divise en deux la sphère des étoiles). Dans le modèle de Copernic, la Terre tournant autour du Soleil, l'angle que fait une étoile avec l'équateur céleste en hiver devrait être différent de l'angle fait en été. Or, à l'époque de Copernic, on n'avait jamais remarqué une telle différence. Si donc le modèle de Copernic est juste, cela voudrait dire que les étoiles sont tellement éloignées qu'effectivement un changement dans l'angle n'est pas perceptible.



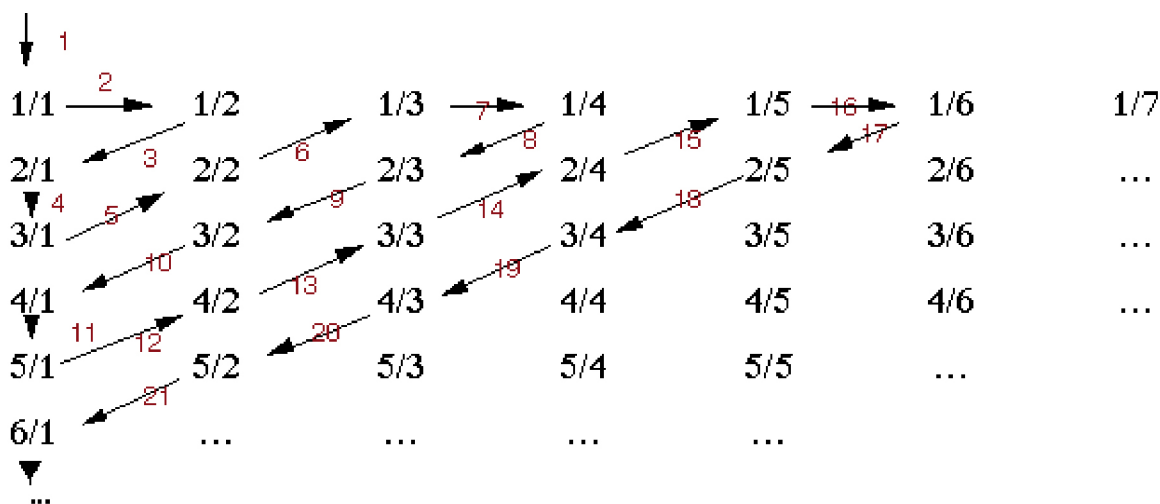
Terre au centre de l'univers



Soleil au centre de l'univers

Est-ce que l'on peut alors dire que notre univers est infini ? Si on arrive à cette conclusion, est-ce que cela veut dire que l'univers est infini à cause des mathématiques, en particulier ici de la géométrie ?

• Nous savons tous qu'entre deux nombres naturels, il y a une infinité de nombres fractionnaires. Il semble alors tombé sous le sens qu'il y a beaucoup plus de fractions que de nombres naturels. Pourtant, Georges Cantor (1845-1918), un mathématicien allemand, a trouvé une façon de compter toutes les fractions en utilisant uniquement les nombres naturels. Comment a-t-il fait cela ? En plaçant toutes les fractions sur un genre d'échiquier de dimensions infinies et en les comptant en partant du haut à gauche et en se déplaçant, en comptant, sur les diagonales successives, il a pu ainsi compter toutes les fractions.



Vous en doutez ? Choisissez une fraction et comptez en allant jusqu'à celle-ci. Peut-être cela prendra-t-il du temps ! Mais vous y arriverez. Tout cela soulève des questions ? Si je peux associer ainsi un nombre naturel à chaque fraction, c'est qu'il n'y a pas plus de fractions que d'entier ? En effet, autrement, j'épuiserais les nombres naturels avant que j'aie compté toutes les fractions. Cela va vraiment à l'encontre de notre intuition. Qui a raison ? Notre intuition ou Cantor ?