L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés

Actes du colloque emf 2006

Évolution de la rationalité : exemples, contre-exemples et démonstrations

Carole Duval, *IUFM de Franche Comté, France*

Le sujet de ce mémoire est venu d'une réponse d'élève : « $2^2=4$, donc le carré d'un nombre pair est toujours un nombre pair ». La fameuse « preuve par l'exemple », qui pose de nombreux problèmes… En constatant les difficultés de mes élèves – une classe de seconde, 15-16 ans –, j'ai décidé de me pencher un peu plus sur le sujet. D'autant plus que le travail portant sur l'universalité d'un énoncé mathématique, et donc sur le rôle des exemples et contre-exemples, est mentionné dans le document d'accompagnement des programmes de la classe de seconde.

Une des raisons des difficultés des élèves m'est apparue assez rapidement : la logique mathématique est soumise à des règles bien spécifiques, qui ne sont pas les mêmes que celles de la logique « naturelle ». Dès lors, des questions se posent. Comment amener nos élèves à dépasser les réflexes de l'argumentation et de la logique naturelle, pour lesquelles une accumulation d'exemples suffit bien souvent à convaincre ? Comment leur faire intégrer les règles qui régissent le débat mathématique et les amener vers une démarche non plus d'argumentation, mais de démonstration ?

La nécessité de rappeler ou d'instaurer les règles du débat mathématique m'a amenée à conduire une première expérimentation avec mes élèves : un vrai-faux dans un cadre arithmétique. Les élèves avaient plusieurs énoncés mathématiques, ils avaient à se prononcer sur leur véracité et bien entendu à justifier leurs réponses. Pour bâtir cette expérimentation, je me suis basée sur une des théories de l'apprentissage : le constructivisme. L'objectif était que les élèves puissent se rendre compte par eux-mêmes de l'insuffisance des « démonstrations par l'exemple » et qu'ils soient ainsi contraints de chercher d'autres moyens de preuves… Après une courte phase de travail individuel destinée à s'approprier le sujet, ils ont travaillé par groupes de trois ou quatre. Lors de la séance suivante, nous avons mis en place une phase de débat à partir des preuves fournies par chacun des groupes. Leurs productions m'ont amenée à m'intéresser à la typologie des preuves de Balacheff (1987). Celui-ci classe les preuves en deux grandes catégories (qu'il divise ensuite en sous-classes) : les preuves pragmatiques, qui font appel à l'expérience, et les preuves intellectuelles, dont la démonstration fait partie.

La connaissance de cette typologie m'a aidée à analyser les productions de mes élèves. La plupart des groupes ont eu recours à des preuves de type « empirisme naïf », c'est-à-dire qu'un ou deux exemples très simples leur ont paru suffisants pour valider un énoncé. Et surtout, aucun des groupes n'a utilisé le calcul littéral. Tous sont restés attachés à des preuves pragmatiques. En revanche, l'utilisation du contre-exemple pour démontrer qu'une propriété est fausse était relativement répandue et a permis lors de la phase de débat de mettre en évidence l'insuffisance de certaines des preuves proposées, puisqu'elles ne résistaient pas à l'exhibition d'un contre-exemple.

Ce travail a également soulevé de nombreuses autres questions. Pourquoi cette absence totale d'utilisation du calcul littéral ? Est-ce que le recours à ce dernier posait trop de difficultés ? Et surtout, que se passerait-il dans un autre cadre ? Une deuxième expérimentation a donc été mise en place, dans le cadre géométrique cette fois. Au collège, les élèves ne travaillent que par implication. La notion d'équivalence n'est abordée qu'à l'arrivée en seconde. Le second travail s'appuyait donc là-dessus : les élèves, par groupes de deux, disposaient de propositions vraies. Ils devaient en formuler la réciproque, se prononcer sur sa véracité, et le cas échéant, formuler une nouvelle proposition sous forme d'équivalence. Cette phase de travail par deux a été à nouveau suivie d'une phase de débat. Dans l'ensemble, cette deuxième expérimentation s'est relativement bien passée. Les élèves n'ont quasiment pas eu recours à des preuves de type « empirisme naïf ». Pour deux raisons je pense : d'une part j'ose espérer que le premier travail a en partie porté ses fruits, et d'autre part, les preuves relevant de l'empirisme naïf sont moins naturelles dans un cadre géométrique. De nombreux élèves ont fourni des preuves ou des essais de preuves intellectuelles. J'ai d'ailleurs pu constater au travers des deux expériences qu'un élève n'était pas caractérisé par un type de preuves. Le même élève peut fournir aussi bien des preuves de type « empirisme naïf » que des preuves pragmatiques, cela en fonction du cadre, du contexte… Un autre point positif lors de cette deuxième expérimentation concerne la phase de débat : les élèves se sont opposé des arguments, ont réfléchi ensemble aux problèmes posés, et mon rôle s'est presque limité à gérer la prise de parole.

Ce travail sur la rationalité m'a permis bien sûr d'explorer quelques pistes pour que les élèves progressent. Entre autres, l'utilisation du travail en groupes mais aussi du débat en classe. Un autre point important me semble être le travail sur la durée. La rationalité mathématique est loin d'être évidente à acquérir et doit sans doute se développer tout au long de la scolarité de l'élève. Et le dernier point que je soulignerai se rapporte à la typologie des preuves de Balacheff (1987). J'ai été très intéressée par ce « classement » et il me semble que l'on gagnerait à analyser de manière plus fine les démonstrations fournies par les élèves, ainsi que les démarches qui les y ont amenés. L'utilisation de narrations de recherche pourrait être envisagée. Ce ne sont que des pistes, bien évidemment pas des réponses… Et le travail sur ce mémoire, s'il ne m'a pas apporté de réponses définitives, m'a en revanche amenée à me poser de nouvelles questions en lien avec l'apprentissage de la démonstration. Des questions issues de copies d'élèves devant lesquelles je me suis parfois trouvée démunie, ne sachant pas toujours quelle position adopter pour remédier au mieux aux difficultés. Des questions très vastes, concernant l'incompréhension du calcul littéral, la confusion entre hypothèse et conclusion, la compréhension des énoncés, la construction d'un pas déductif, l'écriture d'un texte mathématique… Autant de thèmes à creuser, autant d'expériences à développer avec les élèves dans les prochaines années… Le travail mené n'est finalement pour moi qu'une petite introduction à un travail beaucoup plus vaste qu'il faudra mener dans la durée, et m'a surtout fait prendre conscience d'une chose : il existe une différence, une distance énorme entre élève et professeur lorsque ce dernier se situe sur le plan mathématique. Or, il semble indispensable de tenir compte de cette distance, si nous voulons que notre enseignement porte ses fruits.

Références

ARSAC, G., CHAPIRON, G., COLONNA, A., GERMAIN, G., GUICHARD, Y. et MANTE, M. (1992) *Initiation au raisonnement déductif au collège*. Presses universitaires de Lyon, (188 p.)

BALACHEFF, N. (1987) Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, *18*(2), 147-176.

DUVAL, R. (1992-93) Argumenter, démontrer, expliquer : continuité ou rupture cognitive ? *Petit x*, n° 31, 37-61.

JOSHUA, S. et DUPIN, J.-J. (1993) *Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques*. Paris : Presses universitaires de France. (Chap. 5, La situation d'enseignement et le contrat didactique, Perspectives constructivistes, p. 260-265 et. Chap. 6, Preuves, langages, communication, Processus de preuves, p. 290-293).

Pour joindre l'autrice

Carole Duval
18, rue des Vergers du Puits
25115 Pouilley les Vignes, France
e-mail : duval.carole1@free.fr