L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés

Actes du colloque emf 2006

Sur l'enseignement de la fluctuation d'échantillonnage en classe de seconde en France

Floriane Wozniak, *Université Lyon 1 et IUFM de Lyon, France*

Résumé

Nous présentons ici quelques-uns des résultats de notre recherche sur les conditions et contraintes auxquelles sont soumis les professeurs de mathématiques en France lorsqu'ils conçoivent la partie de leur enseignement dévolue à la statistique – et plus particulièrement, ici, à la fluctuation d'échantillonnage – en classe de seconde générale. Nous avons montré (Wozniak, 2005) comment le recours à la simulation comme outil d'épuration mathématique, permet à l'enseignant, en écartant toute référence au monde extérieur, de maintenir l'isolationnisme caractéristique dans lequel est enfermée aujourd'hui la classe de mathématiques ; en même temps qu'il conduit à une forme d'écrasement de la variabilité du monde par le primat donné à l'étude de la réduction de l'amplitude des fluctuations lorsque croît la taille des échantillons au détriment de celle des fluctuations des distributions de fréquences pour des échantillons de même taille. Pour mieux éclairer notre analyse nous évoquons rapidement le contenu d'un manuel sur ce thème d'étude, d'une part, une organisation de savoir alternative, d'autre part.

1. Le programme de statistique en classe de seconde générale

Avec les programmes entrés en vigueur en septembre 2000, ce sont trois grandes questions qui sont mises au cœur de l'étude de la statistique [1] :

- le problème du choix des résumés numériques d'une série statistique quantitative ;
- la notion de fluctuation d'échantillonnage, vue sous l'aspect élémentaire de la variabilité de la distribution des fréquences ;
- la simulation à l'aide du générateur aléatoire d'une calculatrice.

Le document qui accompagne le programme sépare clairement les commentaires sur la notion de fluctuation d'échantillonnage de ceux relatifs à la notion de simulation. S'agissant de la première notion, ce document apporte d'abord cette précision :

Nous appellerons échantillon de taille n d'une expérience la série des résultats obtenus en réalisant n fois cette expérience ; on dira aussi qu'un échantillon est une liste de résultats de n expériences identiques et indépendantes…

À un échantillon statistique est associée une distribution des fréquences qui, est-il précisé, est « le vecteur dont les composantes sont les fréquences des issues dans l'échantillon ». Pourtant, en même temps, il est prescrit aux professeurs de ne pas donner de définition générale et de se

1 En France, la classe de seconde est la première année des lycées (généraux ou professionnels) : les élèves ont entre 15 et 16 ans. (La scolarité est obligatoire jusqu'à 16 ans.)

contenter de définir cette distribution comme la « liste des fréquences dans chacune des situations que l'on traitera ».

Les concepteurs du programme de seconde font du phénomène de fluctuation d'échantillonnage un élément cardinal de la formation à la statistique en seconde, n'hésitant pas à écrire : « L'esprit statistique naît lorsqu'on prend conscience de l'existence de fluctuations d'échantillonnage. » Cette prise de conscience est en effet essentielle à plusieurs titres. Si l'on définit la statistique comme la science de la variabilité, la première découverte dans le cadre de la construction d'une statistique expérimentale, qui fonde celle-ci comme projet scientifique, est celle de la fluctuation des valeurs recueillies lorsqu'on observe un caractère X : tel est le point de départ absolu. En principe, cette première découverte a été faite au collège, où « les élèves se sont familiarisés avec les phénomènes variables ». L'observation d'une valeur d'une variable X correspond à l'extraction d'un échantillon de taille $n = 1$: la notion d'échantillon vient donc généraliser le cadre du travail statistique ouvert aux élèves [2]. Or la découverte qu'il s'agit de thématiser en seconde, c'est bien que la variabilité des valeurs observées s'étend aux échantillons eux-mêmes, quelle que soit leur taille : deux échantillons de taille 20, par exemple, ne comporteront en général pas les mêmes valeurs (du moins dans le cas où l'ensemble des valeurs possibles est suffisamment grand) et, en tout cas, ne présenteront pas les mêmes distributions d'effectifs des valeurs de la variable, sauf exception empiriquement rarissime. Telle est la grande découverte à laquelle les programmes en vigueur assignent pour lieu la classe de seconde, ce que le document d'accompagnement rappelle sobrement en ces termes :

Les distributions des fréquences varient d'un échantillon à l'autre d'une même expérience : c'est ce qu'on appellera en classe de seconde la fluctuation d'échantillonnage.

Cette découverte définit le cadre dans lequel deux autres découvertes seront réalisées : tout d'abord, la moyenne et la médiane de l'échantillon fluctuent avec l'échantillon ; ensuite, les fluctuations d'échantillonnage tendent à diminuer lorsque la taille de l'échantillon augmente. Ce que le document d'accompagnement explicite dans les termes suivants :

> […] *en seconde, l'élève constatera expérimentalement qu'entre deux échantillons, de même taille ou non, les distributions des fréquences fluctuent ; la moyenne étant la moyenne pondérée des composantes de la distribution des fréquences est, elle aussi, soumise à fluctuation d'échantillonnage ; il en est de même de la médiane. On observera aussi que l'ampleur des fluctuations des distributions de fréquences calculées sur des échantillons de taille n diminue lorsque n augmente.*

Le problème de l'expérimentation dans l'enseignement des mathématiques comporte, s'agissant des phénomènes de variabilité, des contraintes supplémentaires propres au domaine de la statistique [3]. D'une manière générale, notamment, se procurer un échantillon n'est pas chose simple. Or la pratique du recueil des données n'est pas seulement étrangère à la culture de la classe de mathématiques ; elle est encore, indubitablement, une opération intrinsèquement délicate et coûteuse. La

2 Dans un livre intitulé Statistiques commentées (Reeb et Fuchs 1967), les auteurs tirent parti de ce fait en structurant leur exposé autour du passage de $n = 1$ à n quelconque.

3 Les contraintes propres à l'enseignement des mathématiques, tel que l'histoire l'a constitué, apparaissent tenacement hostiles à la pratique de l'expérimentation, à laquelle on refuse obstinément une dignité épistémologique égale à celle accordée au travail théorique.

chose est si connue que, dans un ouvrage intitulé *Principles of Statistics*, l'auteur fait figurer, à côté des notions d'échantillon aléatoire, d'échantillon représentatif et d'échantillon biaisé, la notion d'échantillon disponible, à propos de laquelle il écrit ceci [4] :

> *Beaucoup de recherches sont fondées sur des échantillons disponibles. En fait, aux États-Unis, la recherche effectuée dans le domaine psychologique sur des êtres humains a été caractérisée par l'étude des étudiants de deuxième année, et il est fréquent pour les étudiants suivant des cours d'introduction en psychologie d'être récompensés (par une note meilleure) pour avoir participé à des expériences psychologiques.*

On comprend alors que les auteurs du programme de seconde aient porté leur choix sur un type d'expérimentation le moins coûteux possible, parce qu'il a trait à des phénomènes variables que l'on peut, en quelque sorte, produire et reproduire à volonté, et cela à faible coût. On cherchera donc moins à recueillir un échantillon de tailles ou de poids par exemple (car s'il est vrai qu'obtenir un tel échantillon est déjà difficile, en obtenir deux ou plus l'est bien davantage) qu'à produire des échantillons de lancers de dés, de pièces, etc. Aux deux possibilités distinguées ici, il serait possible d'en ajouter une troisième, consistant à tirer – à l'aide de chiffres au hasard – des échantillons aléatoires d'une population vaste, sur laquelle on se serait procuré les valeurs d'un grand nombre de caractères, comme dans un ouvrage intitulé StatLab dont les auteurs proposaient au lecteur un fichier relatif à 1 296 familles, pour lesquelles les valeurs de 32 variables avaient été recueillies [5]. Mais le programme de seconde ne prend pas ce parti et pousse en avant le recours à des expériences « familières », en arguant des leçons de l'histoire, comme le souligne ce passage du document d'accompagnement :

> *Aborder la notion de fluctuation d'échantillonnage se fera en premier lieu dans des cas simples (lancers de dés, de pièces), où la notion d'expériences identiques et indépendantes est intuitive et ne pose pas de problème ; l'élève reprendra ainsi contact avec des expériences aléatoires familières (lancer de dés équilibrés) et les enrichira. Historiquement, l'honnête homme du XVII^e siècle s'est familiarisé à l'aléatoire en pratiquant les jeux de hasard ; maintenant, les calculatrices et les ordinateurs permettent la production aisée de listes de chiffres au hasard ; la production de telles listes fera partie, à côté des lancers de dés ou de pièces équilibrés, à côté du tirage de boules dans des urnes, du bagage d'expériences de référence de l'élève. L'étude de ces expériences de référence sera ainsi à la base de la formation sur l'aléatoire des élèves.*

Un tel parti pris, nous allons le voir, ne peut être sans conséquences sur le travail transpositif qu'il reste encore à la charge des enseignants ou des auteurs de manuels scolaires.

2. Fluctuation d'échantillonnage et simulation : la leçon d'un manuel

À suivre la structuration adoptée par le texte du programme de seconde, on peut considérer que le domaine statistique comporte à ce niveau d'étude deux grands secteurs : celui, traditionnel, de la

4 Nous citons ici la traduction française de cet ouvrage (McGee 1975, p. 30). L'ouvrage est sous-titré significativement Introduction empirique à la statistique.

5 Voir Hodges, Krech et Crutchfield (1979).

description statistique, et un secteur nouveau, comportant deux thèmes distincts présentés comme solidaires, fluctuation d'échantillonnage et simulation. Il existe entre ces deux secteurs et, au sein de ceux-ci, entre les thèmes qui les composent, des solidarités structurelles et surtout fonctionnelles dont la rupture est de nature à entraîner une perte de signification et d'authenticité dans l'étude de la statistique. Les auteurs du manuel que nous allons rapidement consulter à présent ont choisi de consacrer un chapitre distinct à chacun de ces deux secteurs [6].

Dans ce manuel, l'étude de la fluctuation d'échantillonnage occupe seulement deux pages, l'une sous la rubrique « Cours », l'autre sous la rubrique « Activités ». Par contraste, le sujet de la simulation fait l'objet d'une page de cours mais de dix pages d'activités (comprenant huit activités différentes). L'inégalité de traitement est patente. Il en va de même s'agissant des exercices, au nombre de 24. Deux exercices [7] ont trait de manière spécifique à la fluctuation d'échantillonnage ; tous les autres concernent, d'une manière ou d'une autre, la simulation. Bien que le contenu travaillé réponde au programme, leur traitement ne donne peut-être pas le relief souhaitable au phénomène de fluctuation d'échantillonnage : l'exercice 15, par exemple, pourrait offrir l'occasion d'observer, non seulement la fluctuation de la moyenne, mais aussi celle de la médiane – on pourrait ainsi observer que la distribution des moyennes (ou des médianes) montre une dispersion plus réduite que celle des échantillons eux-mêmes –, ou encore, par exemple, celle de la 3e valeur quand on classe les échantillons de taille 20 par ordre croissant (avec ex aequo), etc. L'unique activité proposée dans ce manuel à propos de fluctuations d'échantillonnage est surtout l'occasion d'utiliser

6 Malaval, J., *et al*. (2000).

7 Exercice 1, page 43. On désigne par A, B, C, D et E cinq chèques bancaires dont voici les caractéristiques :
A : chèque payable sur la place de Paris d'un montant de 151 € ; B : chèque non payable sur la place de Paris d'un montant de 300 € ; C : chèque non payable sur la place de Paris d'un montant de 450 € ; D : chèque payable sur la place de Paris d'un montant de 300 € ; E : chèque non payable sur la place de Paris d'un montant de 225 €. Ces cinq chèques constituent une population.
1. a) Quelle est la fréquence de l'événement E : « le chèque est payable sur la place de Paris » dans cette population ?
b) Quel est le montant moyen d'un chèque de la population ?
2. On extrait des échantillons de taille 3 de cette population.
a) Montrer que l'on peut extraire 10 échantillons sans répétition de taille 3 de cette population.
b) Remplir le tableau suivant et observer les fluctuations de cette distribution d'échantillonnage.

Échantillon	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Chèques entrant dans l'échantillon	A B C									
Fréquence de l'événement E dans l'échantillon	0,33									
Montant moyen d'un chèque de l'échantillon	300									

Exercice 15 page 44.
a) Observer la fluctuation du nombre moyen de jets nécessaires à l'obtention du mot PFPF.
b) Dresser et remplir le tableau ci-dessous en utilisant les résultats cumulés de chacun.

Nombre d'expériences	20	40	60	80	…
Nombre moyen de jets pour obtenir PFPF					

Cet exercice, s'appuie sur l'exercice 14 :
On note P pour « pile » et F pour « face ». On lance une pièce de monnaie parfaitement équilibrée jusqu'à l'apparition du mot PFPF. Simuler 20 fois cette expérience et calculer le nombre moyen de jets nécessaires à l'obtention du mot.

la calculatrice pour produire des nombres au hasard [8], alors que le « cours » faisait encore utiliser réellement des dés – à la maison, avant l'étude en classe des résultats ainsi obtenus. Le phénomène de fluctuation n'est ainsi évoqué qu'à propos de l'échantillonnage de « populations » engendrées virtuellement par un générateur aléatoire simple, matériel ou « immatériel » ; l'observation de ces phénomènes étant dénuée de tout enjeu de connaissance ou d'action : la classe, à ce moment-là, cultive l'art pour l'art.

L'examen du traitement du sujet de la simulation montre dès lors une tendance qui se révélera toute puissante : ce qui va être mis en avant n'est pas tant la fluctuation d'échantillonnage que – au contraire, si l'on peut dire – la stabilisation des fréquences lorsque la taille des échantillons croît. L'abord de la fluctuation d'échantillonnage à propos de populations que, non seulement on peut dire « potentielles » ou « virtuelles [9] », mais qui, en outre, sont engendrées par un générateur aléatoire que l'on peut actionner à volonté (lancer de dés, jets de pièces, etc.), porte à oublier le problème de la fluctuation d'échantillonnage. Dans un tel cas, en effet, il est aisé d'ignorer les fluctuations liées aux petites tailles pour rechercher la stabilisation associée aux grandes et très grandes tailles, à plus forte raison lorsqu'on passe de générateurs aléatoires matériels (dés, pièces, etc.), à des générateurs aléatoires « mathématiques » (programmes de simulation sur calculatrice ou ordinateur). La chose est évidemment d'autant plus prégnante que le compagnonnage relativement ancien des professeurs avec la théorie probabiliste et leur manque de familiarité avec la statistique les portent à passer très vite à la limite, comme si la considération d'échantillons de taille limitée n'était qu'une étape artificiellement imposée par le programme. C'est ainsi qu'au fil de la seule activité relative à la fluctuation d'échantillonnage, trois bilans seront proposés :

– *En comparant les résultats obtenus par chacun, on constate que les distributions des fréquences, que les moyennes des échantillons, que les fréquences de l'événement E, ne sont en général pas les mêmes.*

– *On constate que l'ampleur de la fluctuation d'échantillonnage diminue quand la taille de l'échantillon augmente ? Par exemple, l'écart des fréquences de l'événement E dans deux échantillons de taille 500 est le plus souvent deux fois plus petit que l'écart des fréquences de ce même événement dans deux échantillons de taille 100.*

– *On constate que la fréquence du 0 tend à se stabiliser autour d'une valeur voisine de 0,1.*

8 Il s'agit de l'activité de la page 31 : Individuellement, puis par groupes, les élèves doivent « dresser le tableau donnant la distribution de taille 100 [resp. 500], de chiffres au hasard, obtenus avec la touche RAND de la calculatrice, puis calculer la moyenne de cet échantillon et la fréquence de l'événement E : "Le chiffre observé est pair" ». L'activité se poursuit par la construction, par les élèves, de la représentation graphique de « l'évolution de la fréquence du chiffre 0 en fonction de la taille *n* de l'échantillon », les fréquences du 0 au sein de 30 échantillons de taille 100 à 3 000 étant fournies.

9 Selon un vocabulaire adopté par l'auteur d'un récent ouvrage, qui écrit à ce sujet (Lejeune 2004, p. 68) : « … il n'existe pas nécessairement une population réelle (quelle est la population des appels à un standard, des produits manufacturés par une entreprise ?). Toutefois il nous arrivera de recourir à ce terme comme s'il existait une sorte de population virtuelle dont les observations seraient issues comme par un tirage au hasard. » Ces populations sont à distinguer des populations « actuelles » ou « réelles » (l'ensemble des élèves de seconde de telle académie à la rentrée de telle année scolaire, par exemple).

Dans six des huit activités proposées en matière de simulation, le manuel examiné demande à l'élève de comparer les fréquences empiriques observées avec des « fréquences théoriques » fournies par l'énoncé, et cela, non seulement dans des cas simples et culturellement « bien connus » avant toute étude des probabilités (jet d'un dé ou d'une pièce supposés équilibrés), mais aussi dans des cas où le recours aux rudiments du calcul des probabilités s'avère indispensable. Dans l'une des activités proposées – l'activité 2 –, par exemple, le travail porte sur le jeu de loto ; on veut, par simulation, étudier les chances qu'aurait une personne ayant joué les numéros 5, 17, 22, 35, 36, 44 d'avoir trois bons numéros. La probabilité d'un tel événement est $\frac{C_6^3 \times C_{43}^3}{C_{49}^6} = \frac{8\,815}{499\,422} =$ 0,01765040386… La dernière question de l'activité est alors ainsi formulée :

> *Comparer le dernier résultat avec la fréquence « théorique » (arrondie au millionième) de cet événement : 0,017 650.*

La suite des activités proposées en matière de simulation montre alors une reprise ne varietur de quelques « standards » de l'initiation à la méthode de Monte-Carlo, telle que l'exposait Arthur Engel dans son livre classique publié en traduction française en 1975 sous le titre *L'enseignement des probabilités et de la statistique*. On ne saurait mieux illustrer le déroutement – sans doute tout à fait involontaire – qui conduit ainsi ce manuel à délaisser les problèmes de la construction d'une statistique expérimentale et à céder à l'attraction, dominante aujourd'hui dans la culture des professeurs de mathématiques, d'une théorie probabiliste dont le fondement fréquentiste ne doit pas cacher qu'elle ne donne pas par génération spontanée une théorie de la variabilité statistique. Une fois oublié l'engagement dans la construction d'une statistique expérimentale, le champ est libre pour s'adonner à des simulations vues désormais comme une propédeutique à une théorie des probabilités encore à naître. Ainsi la simulation est-elle employée par deux fois pour estimer la fréquence théorique – c'est-à-dire la probabilité – d'un événement. Dans quatre exercices, elle permet d'examiner – par estimation « naïve » – si un jeu simple est équitable ou non. Dans dix exercices, surtout, elle permet d'estimer une moyenne (comme il en va dans l'exercice 14 mentionné plus haut). Plus classiquement, elle permet de tester le caractère aléatoire d'une suite de nombres, etc. On a là un matériel propre à rendre sensible l'opérativité de la simulation comme outil expérimental dans la construction d'une théorie élémentaire des probabilités [10]. Mais, soulignons-le encore, ce n'est pas là le problème essentiel qu'il s'agit d'affronter, même si c'est bien à ce problème que l'on devra ensuite s'attaquer afin de construire une statistique théorique conforme aux résultats obtenus par l'expérimentation.

3. Description statistique et fluctuation d'échantillonnage

Quand on parle de description statistique, l'idée que l'on a en tête, de façon fréquemment floue, il est vrai, c'est que l'on veut décrire une certaine population – elle-même souvent définie au départ de manière implicite et pour cela imprécise. L'objectif est donc bien de décrire une population, et non des échantillons de cette population. La description d'échantillons n'est qu'un moyen au service d'une fin. Les difficultés de description de la population sont alors fondamentalement liées au phénomène de fluctuation d'échantillonnage, qui constitue le principal obstacle au passage de la

10 Pour un point de vue apparenté, voir par exemple Markovitch (2002).

description d'échantillons à la description de la population tout entière. Or, dans une certaine tradition d'enseignement le lien entre fin et moyens se trouve rompu ou, du moins, fortement affaibli. Dans le programme de seconde en vigueur « statistique descriptive », c'est-à-dire statistique descriptive d'échantillons, et ébauche de « statistique inférentielle » y constituent toujours deux mondes séparés, dans la tradition d'une transposition didactique malheureuse de la problématique et de la science statistiques [11]. En conséquence, le phénomène des fluctuations d'échantillonnage ne peut guère être abordé que de façon formelle, dès lors qu'il n'apparaît plus comme l'obstacle entre la description d'échantillons et la description de la population dont les échantillons sont extraits. Il est à cet égard éclairant de considérer la possibilité évoquée un peu plus haut (que les concepteurs du programme ont, semble-t-il, écartée) : l'extraction d'échantillons d'un fichier de données relatives à une population nombreuse (pouvant dépasser sans grand dommage, aujourd'hui, la taille de la population des familles évoquée plus haut : 1 296), en vue de parvenir à une bonne description de ladite population. Plusieurs contraintes ont certainement joué pour disqualifier une solution pourtant proche de la problématique statistique la plus authentique. Le foyer de la difficulté tient toujours, nous semble-t-il, à l'extrême réticence manifestée, dans la noosphère de l'enseignement des mathématiques et chez les professeurs eux-mêmes, à voir la classe de mathématiques mise en relation organique, voire vitale, avec des mondes non mathématiques. Cette culture de l'autarcie « ontologique » peut expliquer, ainsi, que l'on n'ait pas envisagé de mettre à la disposition des enseignants, à titre de document d'accompagnement du programme, un ou plusieurs équivalents du fichier des 1 296 familles et des 32 variables du manuel Statlab. L'argument éventuel qui mettrait en avant la difficulté pratique à rendre disponible aux professeurs de mathématiques de tels outils de travail apparaît bien peu crédible devant la simple observation que, en physique-chimie, le document d'accompagnement actuel occupe, pour la physique, 192 pages (et 20 Mo) tandis que celui de la chimie occupe 193 pages (et « seulement » 2 Mo). En réalité, c'est moins la contrainte liée au contenant éventuel qui a joué que la contrainte touchant au contenu même. À l'étude d'une ou plusieurs grandes populations (finies, mais nombreuses), authentiquement décrites par un nombre substantiel de caractères, la tradition de confinement de la classe de mathématiques conduit à préférer des données fabriquées in situ à l'aide d'un matériel restreint, discret – parce qu'« abstrait » – de dés et de pièces, et à préférer davantage encore, parce que relevant d'un niveau supérieur d'abstraction, les données simulées à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur. Ce choix, habile en ce qu'il contourne certaines contraintes traditionnelles de l'enseignement des mathématiques au secondaire, paraît pourtant générateur de troubles dans la concrétisation du projet d'enseigner la statistique.

Pour mieux éclairer notre analyse, nous évoquerons rapidement une organisation alternative, qui vaudra ici surtout par le contraste qu'elle propose. Au lieu de lier la simulation à la fluctuation d'échantillonnage, le choix aurait pu être fait d'introduire de façon franche la problématique de la description de populations et le grand problème qui lui est intrinsèquement associé : le passage de l'étude d'échantillons à la connaissance de la population. À titre d'illustration d'un tel parcours d'étude et de recherche, nous citerons un peu longuement le début de la 13e des 25 « unités » (c'est-

11 Cette transposition didactique opportuniste – s'agissant en particulier des institutions où les mathématiques de l'inférence statistique apparaissent peu abordables – est peut-être en même temps le rejeton du long conflit historique entre tenants des recensements exhaustifs et partisans des sondages : sur ce point, voir par exemple Droesbeke et Tassi (1990), chapitre IV.

à-dire chapitres) dont se compose le manuel Statlab déjà mentionné, unité intitulée Théorème central limite, erreurs types et intervalles de confiance, où l'on voit s'affirmer nettement la dialectique de l'expérimentation et de la théorisation [12] :

> *L'idée vous est maintenant devenue familière selon laquelle on peut utiliser une statistique d'échantillon pour estimer le paramètre correspondant de la population. Par exemple le revenu médian de votre échantillon de 40 familles permet d'estimer le revenu médian des 1 296 familles STATLAB ; de même le score Peabody moyen de votre échantillon permet d'estimer la moyenne de tous les scores Peabody obtenus par les enfants STATLAB. De plus, d'après la loi des grands nombres, de telles estimations seront vraisemblablement exactes si l'échantillon est assez grand. Mais quelle est la précision de vos estimations compte tenu de la taille de l'échantillon que vous avez utilisé ? En fait, quel critère permettrait-il d'apprécier la précision d'une estimation lorsque la vraie valeur du paramètre estimé de la population peut n'être jamais connue avec certitude ?*
>
> *Nous verrons dans cette unité que l'on dispose d'un théorème mathématique clé grâce auquel la voie est ouverte pour obtenir des réponses concrètes et numériques à ces questions fondamentales. À l'aide des données et des statistiques que vous-même et vos camarades avez collectées et calculées, vous aurez non seulement la possibilité de voir comment ce théorème répond à ces questions, mais vous aurez aussi l'occasion de tester de façon empirique la validité de ce théorème, c'est-à-dire de constater dans quelle mesure se vérifient dans la pratique les résultats qu'implique le raisonnement mathématique contenu dans ce théorème. Ensuite, par application des résultats de ce théorème à l'analyse statistique du STATLAB que vous menez de façon continue, vous pourrez effectuer de nouvelles estimations de certaines caractéristiques physiques, économiques et intellectuelles de la population STATLAB, mais en les assortissant maintenant d'un degré de confiance spécifié.*

Une telle problématique conduirait concrètement à restructurer le programme de statistique en y découpant deux grands secteurs. Le premier secteur, consacré à la description statistique (de populations) comporterait trois thèmes : celui de la description d'échantillons, celui de la fluctuation d'échantillonnage et enfin le thème de l'estimation « naïve » [13]. Le second secteur serait consacré aux prémisses de la modélisation probabiliste des phénomènes statistiques, et inclurait à ce titre la partie du programme actuel consacré à la simulation : il constituerait ainsi une première étape dans une étude développée plus largement dans les classes suivantes.

12 Op. cit., p. 110. Le « score Peabody » évoqué est le score obtenu par l'enfant au Peabody Picture Vocabulary Test (PPVT), dont la première édition date de 1959. Ce test, utilisable avec des enfants à partir de deux ans et demi, vise d'une part à déterminer le niveau lexical réceptif d'un sujet (le vocabulaire qu'il comprend) et, d'autre part, à dépister les difficultés d'apprentissage chez des enfants d'âge scolaire.

13 Ce thème incorporerait notamment ce qui, dans l'actuel programme, a trait – de manière facultative – à la question des sondages.

En guise de conclusion

Les situations que nous avons rapidement évoquées ici illustrent le jeu de certaines contraintes auxquelles les enseignants sont soumis [14]. En premier lieu, il faut compter parmi ces contraintes la présence, dans la culture mathématique des professeurs de mathématiques, d'une organisation de savoir au pouvoir attractif violent : la théorie (fréquentiste) des probabilités. Sous son influence, nous voyons la simulation se mettre au service de l'abord expérimental des probabilités, et, corrélativement, les phénomènes de fluctuation, si importants pour une appréhension statistiquement plus juste des phénomènes de la vie quotidienne, se trouver en quelque sorte oblitérés par l'accent mis sur l'atténuation de l'amplitude de ces fluctuations lorsque la taille croît. Mais la forte présence de la théorie des probabilités dans la culture mathématique de l'enseignement secondaire n'est pas la seule contrainte qu'il faut invoquer s'agissant du tableau que nous venons, un peu rapidement, de brosser à partir du manuel examiné. Car à cette présence relativement prégnante fait pendant, surtout, une absence dont les effets rendent possibles les glissements que nous avons soulignés : l'absence d'une culture statistique qui rende incontournable le problème du passage de l'étude d'un échantillon disponible à la connaissance de la population parente. Il conviendrait, ici, d'évoquer la situation où se trouvent – à l'instar des professeurs – les auteurs de manuels. L'utilisation de la simulation au service de l'étude de la statistique reste aujourd'hui à construire. La situation constatée à propos du manuel examiné constitue, de ce point de vue, un symptôme clair de la carence évoquée : loin d'entamer une réflexion – qui, au vrai, ne saurait incomber ni à chaque professeur, ni même à chaque équipe d'auteurs de manuels – sur ce que serait un usage pertinent de la simulation dans l'étude des phénomènes statistiques, et d'abord du phénomène de fluctuation d'échantillonnage, ces auteurs reprennent une élaboration intermédiaire proposée dans un ouvrage publié un quart de siècle plus tôt [15], selon une problématique démarquant elle-même l'usage des méthodes de Monte-Carlo dans la sphère savante – où, à propos de problèmes d'analyse notamment, on construit des modèles probabilistes que l'on simule alors pour obtenir des résultats approchés [16]. Il y a donc tout un travail transpositif, qui incombe à la noosphère de l'enseignement des mathématiques au plus large, et qui est ici en souffrance au point de constituer une menace sérieuse sur la diffusion scolaire d'une véritable culture statistique élémentaire.

14 Pour une étude beaucoup plus complète, voir Wozniak (2005). Le cadre de la théorie anthropologique du didactique, et en particulier la notion d'échelle des niveaux de détermination didactique, permet efficacement de différencier et coordonner les principaux types de conditions et de contraintes constitutifs de l'écologie scolaire des savoirs : voir, par exemple, Chevallard (2001) et Chevallard (2004).

15 Le titre original allemand de l'ouvrage d'Engel était Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, « Calcul des probabilités et statistique » ; le titre français – L'enseignement des probabilités et de la statistique – explicite plus clairement explicite le besoin noosphérien que le travail d'Engel cherche de fait à satisfaire.

16 Dès les années 1930, le physicien italo-américain Enrico Fermi (1901-1954) avait utilisé une méthode aléatoire pour calculer les propriétés du neutron (dont l'existence venait d'être mise en évidence). Mais de telles méthodes eurent surtout une importance décisive dans le projet Manhattan qui visait à mettre au point les premières armes nucléaires. Bien que demeurées secrètes jusqu'à la fin de la Seconde Guerre mondiale, les « méthodes de Monte-Carlo » furent nommées ainsi et développées à Los Alamos par John von Neumann (1903-1957), Stanisław Ulam (1909-1984) et Nicholas Metropolis (1915-1999) notamment, pour résoudre des problèmes de calcul d'intégrales définies dans des cas où les méthodes déterministes connues (Simpson, etc.) deviennent tout à fait impraticables (voir par exemple Hayoun, 2002).

Références

Chevallard, Y. (2001). Structures et fonctions. *In* J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot, et R. Floris (Eds), *Actes de la 11e École d'Été de Didactique des Mathématiques* (p. 3-22). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (2004). La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire : transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire. *In* J.-L. Hennequin (Ed.), *Actes de la 3e Université d'été Animath*.

Droesbeke, J.-J., et Tassi, P. (1990). *Histoire de la statistique*. Paris : PUF.

Engel, A. (1975). *L'enseignement des probabilités et de la statistique*. Paris : Cédic.

Hayoun, M. (2002). La méthode de Monte Carlo Metropolis. *École « Simulation Numérique en Matière Condensée »* (Paris, 29-31 mai 2002). Consulté le 21 août 2006 sur http://www.cpt.univ-mrs.fr/~crepieux/stock/MC_Metropolis.pdf

Hodges, J. L., Krech, D., et Crutchfield, R. S. (1979). *StatLab. Introduction empirique à la statistique*. Paris : Economica.

Lejeune, M.(2004). *Statistique. La théorie et ses applications*. Paris : Springer.

Malaval, J., *et al*. (2000). *Math 2e. Collection Hyperbole*. Paris : Nathan.

McGee, V. E. (1975). *Principes de statistiques*. Paris : Vuibert.

Markovitch, S. (2002). *Probabilités. Une approche expérimentale*. Paris : Hachette.

Reeb, G., et Fuchs, A. (1967). *Statistiques commentées*. Paris : Gauthier-Villlars.

Wozniak, F. (2005). *Conditions et contraintes de l'enseignement de la statistique en classe de seconde générale. Un repérage didactique*. Thèse de doctorat de l'Université Claude Bernard Lyon 1, Lyon, France. [en ligne : http://tel.ccsd.cnrs.fr/docs/00/06/41/60/PDF/these_wozniak_floriane.pdf]

Pour joindre l'autrice

Floriane Wozniak
Université Claude Bernard Lyon 1
LIRDHIST. Bâtiment « La Pagode »
38 Boulevard Niels Bohr – Campus de la DOUA
69622 Villeurbanne Cedex.
Courriel : floriane.wozniak@lyon.iufm.fr