L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés

Actes du colloque emf 2006

Les fonctions linéaires et affines dans l'enseignement secondaire et leur relation avec les autres disciplines

Samia Achour, *Université de Tunis, Institut supérieur de l'éducation et de la formation continue, Tunisie*

Résumé

Les programmes officiels tunisiens depuis 1959 invitent les enseignants à utiliser des problèmes concrets pour l'introduction des notions mathématiques. Une étude de manuels scolaires tunisiens montre que l'introduction des notions de fonctions linéaire et affine s'appuie sur une modélisation de phénomènes physiques et concrets – en lien avec les grandeurs. Cette modélisation permet l'introduction des relations de correspondances qui amènent les élèves à faire la représentation graphique et à passer à l'écriture algébrique. Il nous paraît donc important de réfléchir aux modélisations, et par ailleurs, à la construction d'un modèle mathématique soumis à des critères de cohérence, et qui rende compte d'une situation expérimentale ou déduite de la vie courante. Ceci pourrait permettre à l'enseignant de montrer à ses élèves comment la théorie mathématique, les fonctions linéaires et affines dans notre cas, peut modéliser des phénomènes de la vie réelle.

1. Introduction

Les programmes officiels tunisiens, depuis 1959, invitent les enseignants à utiliser des problèmes concrets pour l'introduction des différentes notions mathématiques. En effet, dans les directives relatives à ces programmes, il y a un appel explicite à donner un enseignement des notions mathématiques, les fonctions dans notre cas, à partir d'exemples extraits de la vie quotidienne.

L'utilisation de phénomènes de la vie courante ou extraits d'autres disciplines pour introduire les fonctions linéaires ou affines amène à la modélisation des phénomènes physiques. Cette modélisation devrait répondre au besoin d'enseignement et d'apprentissage de la notion de fonction linéaire et celle de fonction affine. Elle permettrait aux élèves de voir les relations de correspondance entre les objets étudiés, et par la suite favoriserait l'introduction des fonctions.

Nous avons mené une étude de deux manuels scolaires utilisés en Tunisie :

- le manuel scolaire de 1948[1], pour le niveau de la troisième année secondaire (ancien régime) correspondant à la neuvième année actuelle[2] ;
- le manuel scolaire de 2003, pour le niveau de la première année secondaire actuelle.

1 Le manuel de 1948 est rédigé en application des programmes officiels français de 1947.

2 Actuellement, le cursus des études débouchant sur le baccalauréat comprend 9 années d'enseignement de base (6 années à l'école primaire, 3 années au collège : 7^{e}, 8^{e} et 9^{e}) et 4 années d'enseignement secondaire (1re, 2^{e}, 3^{e} et 4^{e}).

2. Notion de modèle

Jusqu'au 19e siècle les domaines de la physique, de la biologie, etc., ont particulièrement modélisé les phénomènes qui en relèvent par des notions mathématiques. Ainsi, le modèle mathématique obtenu d'une situation expérimentale de l'un des domaines (cité ci-dessus) est soumis à des critères de cohérence et de logique. Ce modèle mathématique n'a donc d'intérêt que s'il se réfère à un domaine de la réalité (par exemple allongement d'un ressort en fonction du poids, grandeur de la taille en fonction de l'âge,…). De plus ce modèle se doit de fournir de cette réalité, des descriptions et des prévisions quantifiables dont l'une des fonctions serait de permettre d'éviter de refaire l'expérience dans le monde sensible, puisque l'utilisation du système formalisé qui remplace l'expérience permet la prévision dans le monde virtuel théorique du calcul. Un modèle est « une description formalisée du type de situation auquel il s'applique » (Universalis, 2002, p. 302). Il doit donc avoir plusieurs caractéristiques pour être utile et fiable : il doit être efficace pour rendre compte des phénomènes observés ; exact et quantifié à des approximations près ; raisonnablement prédictif.

C'est cette formalisation qui permet de rationaliser et de « simplifier » le phénomène étudié pour pouvoir en rendre compte dans un système de description.

Cette utilisation de la modélisation pour faire « découvrir » des notions mathématiques a été une caractéristique de l'enseignement des mathématiques durant toute la première moitié du 20e siècle. Un modèle :

> *sert à fixer les lois sur un objet bien structuré, et cette fixation favorise à son tour la conception et l'expérimentation* (Universalis, 2002, p. 294).

Par suite, l'utilisation d'un modèle revient à construire et à organiser des formes de pensée sur un objet réel ou mathématique. Un modèle serait donc une construction mentale, plus ou moins mathématisée, qui produit des connaissances et qui peut éviter l'expérimentation ou suggérer des expérimentations plus poussées.

Cette définition peut d'ailleurs prendre sens en didactique où l'on peut considérer les théories comme des moyens de modéliser le champ étudié, à savoir celui de la diffusion des connaissances mathématiques dans une institution – l'école – qui se donne pour but l'enseignement.

La notion de modèle mathématisant un phénomène est une notion qui place les mathématiques comme outil modélisant une autre science ; mais les mathématiques elles-mêmes ont besoin de modèles internes ; par exemple pour rendre compte des règles de logique utilisées dans une théorie mathématique, on utilise une autre théorie qui est alors un modèle de ces règles. Il y a donc, du fait du statut spécial des mathématiques[3], une utilisation particulière de la modélisation : en mathématiques, la notion de modèle est utilisée de deux façons différentes, dans les contextes des mathématiques elles-mêmes ou de leurs applications. On retrouve cette dualité dans les phénomènes relatifs à l'enseignement, un modèle étant utilisé :

- soit comme mode de structuration interne à la discipline mathématique : ainsi un modèle mathématique des connaissances logiques utiles à la pratique des mathématiques est fourni

3 Outils pour les sciences expérimentales d'une part, et domaine propre de connaissance d'autre part.

par la théorie (mathématique) de la logique formelle, l'enseignement de la logique formelle se présentera donc comme étant l'enseignement de la «théorie de la validité logique» ;

- soit comme façon d'appuyer la connaissance mathématique sur des phénomènes issus des sciences expérimentales. Ainsi, dans un environnement didactique cette présentation conduirait l'élève à effectuer un lien avec les cours de sciences physiques, de biologie,…

Dans le dernier cas, il ya de plus un retournement (généralement à usage didactique) de la notion primitive de modèle en sciences expérimentales : en effet cette notion signifie habituellement qu'un phénomène – par exemple physique – est représenté par un système mathématique ; ce dernier rend compte, comme nous l'avons dit, de façon satisfaisante du phénomène physique. Or l'utilisation d'une démarche de modélisation, non pour étudier un phénomène physique, mais au contraire pour montrer que la théorie mathématique rend bien compte du phénomène – ceci donc dans un dispositif qui vise à mettre en évidence la notion mathématique supposée non encore identifiée – cette utilisation est bien un retournement de la notion de modèle, puisque les phénomènes physiques ne sont là que comme indices d'un savoir mathématique dont ils sont supposés être des représentants relativement évidents.

3. Analyse de deux manuels scolaires

L'étude de ces deux manuels scolaires montre que l'introduction des notions de fonction linéaire et de fonction affine s'appuie sur des exemples de modélisation de phénomènes physiques ou concrets – en lien avec les grandeurs -. Par exemple, les fonctions linéaires modélisent des situations de proportionnalité en décrivant la relation invariante entre les objets en question. Nous avons constaté que dans ces deux manuels, les fonctions linéaires et les fonctions affines font partie de la rubrique «Algèbre», sachant qu'au collège et au lycée l'appellation «Algèbre» est attribuée à tout travail dans R.

Dans le manuel de 1948, la notion de fonction a été introduite comme étant :

> *Une grandeur A est fonction d'une grandeur B quand à chaque valeur de la grandeur B correspond une valeur de la grandeur A. Exemples :*
>
> *- Le prix d'un coupon d'une pièce d'étoffe est fonction de la longueur de ce coupon. […].*
>
> *- Un nombre est fonction d'un autre nombre quand la connaissance de l'un entraîne la connaissance de l'autre.*

Ainsi, la fonction est définie comme une relation de correspondance entre deux grandeurs dépendant l'une de l'autre. La problématique de modélisation (utilisée ci-dessus) s'appuie sur les grandeurs qui sont prégnantes à cette époque, l'enseignement des mathématiques étant vu comme devant faire émerger des relations entre grandeurs en tant qu'objets mathématiques. Donc les calculs, les relations de correspondance, les graphiques, etc. sont construits à partir des grandeurs.

Une première question peut être posée : comment l'élève va-t-il percevoir le passage des phénomènes étudiés aux modèles mathématiques donc à l'abstraction ?

Dans la progression du cours, les auteurs présentent un deuxième exemple : « Un physicien a déterminé le poids p de sucre qui peut être dissous, à une température t° dans 100 grammes d'eau. Il a obtenu les nombres suivants où les poids sont en grammes. »

t	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	100°
p	179	190	204	219	238	260	287	320	362	416	487

Cet exercice traduit les résultats d'une expérience physique. Ces résultats qui sont donnés à l'aide de l'ostensif « tableau de valeurs » devraient être traduits en expérience mentale. Les résultats du tableau de valeurs sont représentés graphiquement. Ainsi, l'interprétation de la représentation graphique permet de monter à l'élève que les résultats de cette expérience ne pourraient pas être généralisés et que les résultats donnés par le tableau de valeurs sont limités par les résultats de l'expérience. Ainsi, ce modèle pourrait être exploité pour généraliser les résultats et monter qu'il faudrait passer à l'abstraction, donc un passage immédiat aux nombres. Les auteurs de ce manuel soulignent que ce modèle est limité par l'expérience.

Pour introduire la fonction affine[4], on propose le problème ci-dessous.

Problème : Un bidon vide pèse 6 hectogrammes. On y verse x litres d'une huile qui pèse 8 hectogrammes par litre.

Représenter graphiquement le poids total y du bidon et de l'huile qu'il contient. Le poids y de bidon et de l'huile qu'il contient est en hectogramme : $y = 8x + 6$. Le poids seul de l'huile est $y_1 = 8x$. Il serait représenté sur un graphique par la droite $y_1 = 8x$ tracée ci-contre en pointillé. Mais quel que soit le volume de l'huile, il faut ajouter 6 hectogrammes, pour avoir le poids total. Tout revient à allonger une ordonnée quelconque de la longueur qui représente 6 hectogrammes (6 millimètre sur le graphique), on a à remonter parallèlement à elle-même la droite $y_1 = 8x$ de la longueur 6. Le graphique obtenu est donc encore une droite. Ce n'est plus le poids total, qui est proportionnel au volume d'huile, c'est seulement l'accroissement de ce poids quand on verse de l'huile dans le bidon.

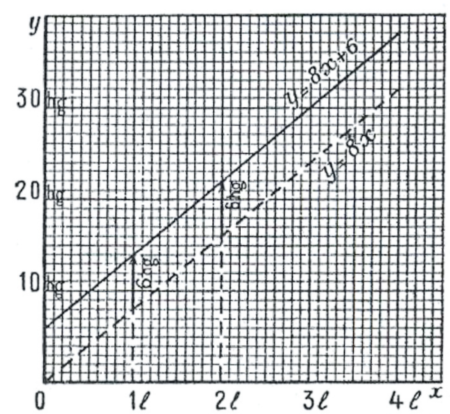


Fig. 25.

Les auteurs introduisent les fonctions affines à accroissement fini en se basant sur la modélisation d'un phénomène lié aux grandeurs.

L'énoncé du problème ci-dessus renvoie à trois types d'objets : des grandeurs, des relations et des graphiques, ce qui laisse penser que le travail dans les registres numérique, algébrique et géométrique, est fructueux.

Notons que la solution de ce problème introduit et explicite l'articulation entre les écritures et les représentations graphiques (sur papier millimétré) des droites $y_1 = 8x$ et $y = 8x + 6$. La désignation des grandeurs (quantités) inconnues et des relations entre les grandeurs connues et inconnues doit

4 À cette époque, on ne parle pas de fonction affine mais on parle de fonction linéaire de la forme $y = ax + b$.

permettre à l'élève de comprendre le rôle de chacune des deux écritures. Ce type d'activité est utilisé en sciences physiques par exemple pour tracer la droite représentant la dilatation d'une barre de fer en fonction du temps, un exercice est donné comme suit : « la longueur d'une barre de fer qui mesure 1 mètre de longueur, à 0°, est donnée, à t degrés, par la formule (valable quand 0° < t < 500°) : L = 1^m × (1 + 0.0000117 × t) ». Cette formule permet, pour chaque valeur de t, de calculer la valeur correspondante de L ; L est une fonction de t.

L'analyse des deux exemples précédents montre que les fonctions affines apparaissent comme étant un outil modélisant un phénomène physique tout en utilisant un modèle interne en mathématiques structurant les formules et les relations mettant en jeu les données du problème. Toutefois, le premier problème pourrait être à la base d'une situation a-didactique.

Nous remarquons que dans ce processus d'enseignement suivi en 1948, la notion de modèle est très développée et, les modèles construits ont un aspect quantitatif. Les premiers modèles empiriques sont utilisés pour théoriser et définir des relations de correspondance entre deux variables, ceux-ci devraient être utilisés pour introduire la notion de fonction. L'expérience physique a servi de modèle introduisant la fonction y = ax + b.

Les relations entretenues par les grandeurs physiques sont introduites de sorte à amener les élèves à trouver des correspondances et des relations mathématiques. Ainsi, la généralisation et l'éloignement du sens de l'écriture conduisent l'élève à se détacher de l'expérience pour passer à la notion de dépendance fonctionnelle par rapport à une variable donc à l'abstraction de la notion de fonction.

L'introduction des fonctions est déduite à partir des relations entre objets (concrets) qui amènent les élèves à un passage intelligible aux mathématiques (résolution graphique, numérique et algébrique).

Dans le manuel de 2003, l'introduction des fonctions linéaires est faite à partir de questions se rapportant à des thèmes différents et auxquelles l'élève doit choisir une réponse. Nous citons le quatrième énoncé de l'exercice d'introduction et qui est conçu pour utiliser les connaissances antérieures et qui est présenté comme suit (une question et trois réponses possibles).

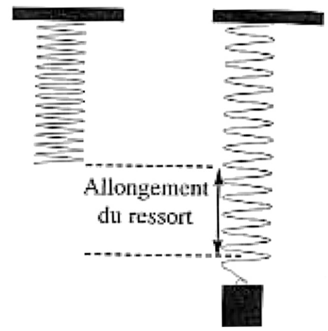
Réponses / Énoncés	A	B	C
Si un mobile roule à une vitesse constante V et parcourt une distance d en un temps t alors	d = $\frac{V}{t}$	d = Vt	t = $\frac{d}{V}$

Cet énoncé représente un problème de modélisation d'un exercice vu en cours de physique. Il est question d'une situation concrète permettant de traduire le langage naturel en langage symbolique. La recherche du modèle est caractérisée par une technique propre à la mécanique, discipline nouvelle pour l'élève.

Ce genre de problème permettrait à l'élève d'articuler entre la vie courante, les sciences physiques et les mathématiques. Ainsi, l'enseignant pourrait s'attendre de la part de l'élève à un certain raisonnement qui s'extériorise et à l'utilisation de certaines techniques de calculs.

La rubrique « découvrir » a pour objectif de « développer [la capacité de l'élève] à chercher, à expérimenter, à modéliser, à conjecturer et à raisonner et à construire les savoirs et savoir-faire à connaître », citons quelques activités.

Découvrir – Activité 1



On sait que l'allongement d'un ressort et la masse qui est suspendue à son extrémité sont des grandeurs proportionnelles.

1- Recopier et compléter le tableau ci-dessous.

Masse en g	0	1	3	6	9		15
Allongement en cm	0	0,5				6	

× a

2- Calculer le coefficient de proportionnalité a.

3- On désigne par x la masse (en grammes). Exprimer en fonction de x l'allongement (en cm) f(x) du ressort.

4- Pour une masse de 24 g, quel est l'allongement correspondant ?

5- Quelle est la masse qui donne un allongement de 5 cm ?

6- Que représente l'allongement dû à la masse 9 g par rapport aux allongements dus aux masses 3 g et 6 g ? ».

L'activité commence par énoncer une loi de la mécanique, « supposée » vue par les élèves en cours de sciences physiques (dans les premiers chapitres) disant que l'allongement du ressort est proportionnel à la masse suspendue. Nous distinguons dans cette situation :

- Un milieu matériel qui serait évoqué à partir d'une expérience rencontrée en cours de physique : l'allongement du ressort dépend de la masse qui lui est accrochée. Par ailleurs, nous pouvons souligner que la dépendance « allongement – masse » est traduite par l'expression de la langue française « exprimer en fonction de ». Il ne s'agit pas encore de mathématiques, ni d'une terminologie spécifique aux mathématiques. Nous sommes donc dans le registre langagier.
- Un milieu de référence permettrait un débat mathématique sur ce que devrait être la fonction pour que le modèle mathématique « proportionnel » réponde à la tâche demandée.
- Un milieu objectif serait celui où l'élève ferait des essais / erreurs par rapport à la règle mathématique de correspondances.

Le passage de l'expérience physique à l'abstraction mathématique, est évidemment, transparent pour le professeur. En est-il de même pour les élèves ?

Pour compléter le tableau, l'élève devrait écrire une égalité de rapports internes (une proportion). C'est l'algorithme du produit en croix qui l'amène à calculer à chaque fois la quatrième proportionnelle. Notons que l'ostensif « tableau » de valeurs est accompagné d'une flèche et d'un signe « × » de multiplication permettant la visualisation de la technique. L'élève se trouve plongé dans le registre numérique puisque le rapport des grandeurs est défini par le rapport des mesures.

La deuxième question appelle l'élève à calculer le coefficient de proportionnalité «a». La flèche accompagnant le tableau indique la technique que l'élève devrait utiliser pour faire le calcul. Nous pouvons relever ici (ainsi qu'à la question précédente) un effet de contrat, «l'effet Topaze». En effet, bien que la technique visée repose sur un calcul de proportions, la flèche réduit le travail de l'élève à une simple division. Ainsi, les connaissances des élèves et leurs capacités de retrouver un algorithme pour calculer le coefficient de proportionnalité «a», ne sont pas vérifiées.

La familiarité des élèves avec les grandeurs (supposée acquise en cours de physique) doit leur permettre d'expliciter une relation entre ces grandeurs. Cette relation doit favoriser la réponse à la question 3 et injecte une technologie justifiant un passage crucial du concret à l'abstrait. L'introduction de la variable x, dans cette question, permet la mise en équation, ce qui presserait l'élève à abandonner le registre des grandeurs.

Une troisième façon est à envisager. Sachant que l'élève a déjà complété le tableau, la réponse pourrait émaner de la lecture et l'interprétation des résultats de ce tableau : remarquant que la mesure de l'allongement est la moitié de celle de la masse, l'élève peut répondre directement.

La deuxième activité dans la rubrique « découvrir » est la suivante.

1- Reproduire puis compléter le tableau ci-dessous.

Situation	Modélisation
f(x) est le périmètre d'un carré de côté x.	f(x) = 4x
x désigne le nombre d'habitants (en milliers) d'une ville et k(x) désigne le nombre d'habitants (en milliers) de cette ville après une augmentation de 12 %.	k(x) =
On désigne par s(x) l'aire d'un carré de côté x.	s(x) =
V(x) désigne le volume d'un cube d'arête x.	V(x) =

2- Préciser les situations auxquelles on peut associer une fonction linéaire.

Le tableau ci-dessus présente deux colonnes.

La première colonne, intitulée « situation » présente des énoncés écrits dans un langage simple et utilisant les ostensifs : f(x), k(x), s(x) et V(x) qui utilisent des lettres distinctes f, k, s, V pour désigner des fonctions distinctes.

Dans la deuxième colonne « modélisation », la première ligne donne un exemple de réponse attendue pour le premier énoncé. L'élève devrait donner les autres réponses par analogie.

Les auteurs s'appuient sur quelques énoncés familiers (appelés situations ce qui serait très discutable) pour amener l'élève vers une écriture formelle (modélisation) qui est l'écriture de l'équation représentant la fonction modélisant l'énoncé à l'aide d'ostensifs.

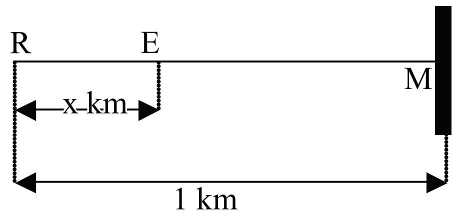
La deuxième question consiste à distinguer la fonction linéaire (à partir de son écriture) des autres fonctions. Rappelons que cette activité doit se dérouler en présence du professeur qui est censé valider les réponses proposées par les élèves.

On remarque ici que le concept « fonction linéaire » est supposé disponible et que les élèves n'ont plus besoin de recourir à des supports concrets.

La rubrique mobiliser ses compétences présente des situations accompagnées chacune d'une stratégie de résolution. Citons la situation ci-dessous :

La vitesse du son

Un émetteur E est situé entre un récepteur R et un mur M.



Un son est émis par E. Le récepteur R reçoit directement le son émis par E, ainsi que l'écho qui résulte de la réflexion du son sur le mur. On désigne par t(x) le temps (en secondes) mis par le son pour parcourir la distance ER. On désigne par t'(x) le temps (en secondes) mis par le son pour parcourir la distance EM + MR.

1- a) Sachant que la vitesse du son est 340 m/s, exprimer t(x) en fonction de x.

b) Représenter la fonction affine associée et colorer les points qui conviennent aux données.

2- Exprimer t'(x) en fonction de x.

3- Sachant que le récepteur a reçu l'écho quatre secondes après le son, calculer ER.

Stratégie de résolution

1- a) Évident puisque la vitesse du son est constante.

1- b) Considérer la fonction affine t qui à tout réel x associe t(x). Représenter t et colorer les points M d'abscisses x tels que

$0 < x < 1$.

2- Remarquer que la distance EM + MR est le produit du temps mis pour parcourir cette distance par la vitesse du son.

3- Écrire la relation qui lie t'(x) à t(x) dans ce cas.

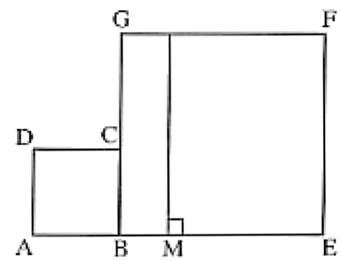
À partir d'une situation vue en cours de physique, l'élève est appelé à écrire le modèle mathématique correspondant en suivant la stratégie proposée. Il doit se rappeler la formule x = vt pour trouver t(x) $\frac{x}{v} = \frac{1}{0{,}340}x = \frac{1000}{340}x$.

Nous venons de retrouver une fonction linéaire ; il faut remarquer une ambiguïté concernant les demandes exprimées par les auteurs et qui sont difficilement réalisables. L'élève doit être capable de faire la conversion des unités de mesure, qui est une tâche non évidente, pour pouvoir faire ses calculs (la vitesse du son est donnée en m/s alors que l'unité de longueur choisie est le km).

Les fonctions affines sont introduites à partir des connaissances des élèves sur les fonctions linéaires. Il est à noter que dans l'activité 2 de la rubrique découvrir, l'unité choisie étant le cm, on considère la figure ci-contre où ABCD et EBGF de côtés respectifs 3 et 5 ; M est un point du côté [BE]. On pose AM = x.

1. Calculer l'aire de la partie colorée pour x = 3,5 puis pour x=4.
2. L'aire de la partie colorée varie-t-elle linéairement en fonction de x ? Justifier.
3. Exprimer en fonction de x, l'aire f(x) de la partie colorée.
4. Réduire l'expression de f(x).
5. Déterminer la position du point M pour que l'aire f(x) soit égale à la moitié de l'aire du carré BEFG.

Il s'agit d'une modélisation interne aux mathématiques. Cette activité se place dans le cadre géométrique et a pour objet de résoudre des problèmes d'aires en utilisant l'outil algébrique, l'application affine qui en résulte servant à modéliser la situation. Les questions 1 et 2 renvoient les élèves au registre numérique pour calculer l'aire de la partie colorée lorsque x est donné. Il est question ensuite de vérifier si l'écriture obtenue varie linéairement en fonction de x.



La tâche consistant à substituer une valeur numérique à la variable x, qui est une tâche du cadre algébrique, permettant la conversion vers le numérique. Notons que le théorème implicite est supposé évident : « l'aire de deux surfaces qui n'empiètent pas l'une sur l'autre est la somme des aires de chacune des deux surfaces »[5].

Cela se traduit ici par « aire de la partie colorée » est égale à la somme de l'aire du carré ABCD et de l'aire du rectangle BMNG où N est la projection orthogonale de M sur (GF). Pour compléter cette tâche, on voit qu'il est nécessaire d'introduire de nouveaux ostensifs, l'un N, pour distinguer le quatrième sommet du rectangle et l'autre pour distinguer la partie colorée, par exemple P ;

Aire P = Aire (ABCD) + Aire (BMNG)

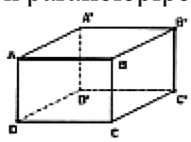
Aire P = 9 + 5x

Une fois cette équation établie, la réponse à la question 2 est évidente. Aire P dépend bien de x, mais cette dépendance n'est pas linéaire puisqu'elle n'est pas de la forme $x \mapsto ax$.

La question 3 propose aux élèves de généraliser la réponse à la question 1, donc d'exprimer en fonction de x l'aire f(x) de la partie cherchée.

5 Voir à ce sujet André Pressiat, Grandeurs et mesures : évolution des organisations mathématiques de référence et problèmes de transposition. Actes de la 11^{e} école d'été de didactique des mathématiques, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 2001.

Citons l'activité 4 de la rubrique découvrir.

Situation	Modélisation
p(x) désigne le coût de x unités d'électricité. On sait que le montant des frais fixes est de 5^{D},200 et le prix unitaire est de 0^{D},092.	p(x) = 0,092 x + 5,200
Dans un club de sport, on paie 50^{D} de cotisation annuelle et 3^{D} la séance. f(x) désigne le prix à payer après x séances.	
ABC est un triangle de hauteur AH et M est un point de [BC]. On sait que AH = 7 cm et BM = x. On désigne par A(x) l'aire du triangle ABM	.
ABCDA'B'C'D' est un parallélépipède rectangle tel que AB  = BB' = x et BC = 3. On désigne par v(x) son volume.	

b) Préciser les situations auxquelles on peut associer une fonction affine.

Ces activités précisent que l'intérêt de la modélisation, c'est de donner un sens aux mathématiques par le biais de motivations externes aux mathématiques, même si le modèle mathématique n'est pas très proche de la réalité. Ainsi, l'enseignant, par l'intermédiaire de la modélisation du réel semble vouloir amener les élèves à trouver un sens aux exercices proposés, et donc à entrer dans le jeu mathématique. Or, l'utilisation d'un modèle de fonctions et le recours à la forme y=ax+ b (sa pertinence) devrait émaner de l'élève.

Il s'agit d'amener l'élève à comprendre le sens du problème en le rapprochant d'une réalité quelconque, l'enjeu étant de : « […] faire l'expérience de la nécessité des énoncés mathématiques et que le fruit de cette expérience est un savoir à acquérir » (Sackur *et al.*, 1997, p. 65).

La question a) consiste à reproduire et compléter un tableau à deux colonnes. Une situation est proposée, dans la première colonne, dans un langage simple et il est question d'écrire, dans la seconde, la modélisation mathématique correspondante (en utilisant des ostensifs signes et symboles). La première modélisation est donnée à titre d'exemple.

La question b) consiste à préciser les cas où il est question de fonction affine.

L'auteur voudrait, d'abord, que les élèves trouvent un modèle mathématique à partir d'un énoncé donné dans des situations impliquant des grandeurs. Il leur est demandé ensuite de vérifier si le modèle (mathématique) trouvé est une fonction affine. La modélisation par le biais de fonctions est l'objectif de cette activité. Notons qu'implicitement les unités de grandeurs ne sont pas supposées poser problème dans cette modélisation demandée.

4. Conclusion

Nous avons montré comment les auteurs des deux manuels scolaires (1948 et 2003) ont introduit les fonctions linéaires et affines en soulignant l'intérêt de la modélisation. En fait les auteurs des deux manuels ont essayé de donner un sens aux fonctions linéaires et affines (en mathématiques) par le biais de motivations externes aux mathématiques essentiellement. Par ailleurs, les auteurs n'ont pas occulté la modélisation interne aux mathématiques.

Le manuel de 1948 permet de voir un processus d'enseignement où la notion de modèle est très développée et ayant un aspect quantitatif. L'introduction des fonctions s'appuie sur des exemples extraits de la physique ou de phénomènes concrets en lien avec les grandeurs. La fonction est alors considérée comme une relation de correspondance entre deux grandeurs dépendant l'une de l'autre. Toutefois, les auteurs ne cessent d'utiliser des modèles internes aux mathématiques (ceci se voit nettement dans l'introduction des fonctions affines). Notons que les auteurs du manuel soulignent la nécessité de passer des grandeurs aux nombres vu leurs insuffisances pour le travail mathématique. Par suite, la généralisation et l'éloignement du sens de l'écriture conduit l'élève à se détacher de l'expérience pour passer à la notion de dépendance fonctionnelle par rapport à une variable donc à l'abstraction de la notion de fonction.

Le manuel de 2003 permet d'utiliser des phénomènes vus en cours de physique en les traduisant en langage symbolique. Ce passage de l'expérience physique à l'abstraction mathématique est évidemment transparent pour le professeur. En est-il de même pour les élèves ?

La familiarité des élèves avec les grandeurs (supposé acquise en cours de physique) doit leur permettre d'expliciter une relation entre ces grandeurs ; seulement cette notion de grandeurs va disparaître puisque l'élève va se trouver devant des écritures abstraites (obtenues en remplaçant la masse par x dans le cas de l'allongement du ressort en fonction de la masse) et le passage aux nombres et aux écritures algébriques devrait aller de soi.

Ainsi, par l'intermédiaire de la modélisation du réel, le manuel semble vouloir amener les élèves à trouver un sens aux exercices proposés, et donc à entrer dans le jeu mathématique. Il s'agit d'amener l'élève à comprendre le sens du problème en le rapprochant d'une réalité supposée adéquate. Par la suite, le passage du modèle proposé (expérimental ou mathématique) devrait permettre à l'élève de passer à l'écriture fonctionnelle des fonctions linéaires et des fonctions affines.

Conformément à la culture scientifique de l'époque, le manuel de 1948 opte pour un ancrage fort sur les problèmes physiques modélisés. Le risque est de ne pas identifier de façon suffisante les objets mathématiques modélisant ces phénomènes. C'est d'ailleurs en partie ce qui avait motivé la réforme des « maths modernes »: ses tenants voulaient introduire à une identification et une autonomie suffisante des mathématiques.

Le manuel de 2003 prend les phénomènes modélisés comme motivation – au sens de la TAD – de la construction des objets mathématiques. Le risque cette fois est que le passage des phénomènes modélisés aux objets mathématiques, ces derniers identifiés comme étant les vrais enjeux de l'enseignement, soit escamoté et que les « activités préliminaires » n'apparaissent que comme prétextes à l'introduction des mathématiques. Il est d'autant plus grand que ce passage n'a rien d'évident : il est marqué par des changements de dénotation (noms des variables) et la nécessité d'identifier une structure commune sous des habillages différents. Ce risque serait accentué par une compréhension insuffisante des enjeux de ce passage côté professeur. Surtout, cet effet d'escamotage peut créer un nouvel obstacle à l'introduction des objets mathématiques visés, l'élève ne sachant plus sur quel savoir il doit se focaliser : les phénomènes modélisés, ou les objets finalement introduits ? Le contrat didactique risque d'en être obscurci.

Références

ACHOUR S. (2005). *L'introduction des fonctions linéaires et affines dans l'enseignement secondaire, d'une problématique de modélisation physique à l'ostension algébrique : quelles alternatives possibles ?* Mémoire de DEA, Université de Tunis, ISEFC.

BLOCH I. (1999). L'articulation du travail de mathématique du professeur et de l'élève dans l'enseignement de l'analyse en première scientifique – Détermination d'un milieu – connaissances et savoirs. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol.19/2. La Pensée Sauvage, Grenoble.

BLOCH I. (2000). *L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée / université. Savoirs, connaissances et conditions relatives à la validation*. Thèse, Université Bordeaux I.

BLOCH I. (2001). Différents niveaux de modèles de milieu dans la théorie des situations – Recherche d'une dialectique scientifique entre analyses théoriques et contingence. *In Actes de la 11e École d'Été de Didactique des Mathématiques*, p. 125- 139. La Pensée Sauvage Éditions.

DUVAL R. (1995). *Sémiosis et Pensée Humaine – Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Bern : Éditions scientifiques européennes.

SACKUR C. *et al*. (1997). Comment recueillir des connaissances cachées en algèbre et qu'en faire ? *Repères – IREM* – n° 28.

WALLISER B. (1977). *Systèmes et modèles – Introduction critique à l'analyse de systèmes*. Paris : Éditions du seuil.

Dictionnaires

Encyclopaedia Universalis, (2002). Corpus 15, France : Éditeur à Paris.

Manuels Scolaires

MAILLARD et MILLET (1948). *Mathématiques : classe de 3e*. Librairie Hachette.

MCHERREK R. *et al*. (2003). *Mathématiques – Première année secondaire*. Tunis : Centre National Pédagogique.

Pour joindre l'auteur

Samia Achour
Université de Tunis
Adresse postale : 41, Rue Hèdi Saidi – 2034 Ezzahra
Tunis – Tunisie
Adresse électronique :
samiaachour@yahoo.fr / samia.achour@ipelsht.rnu.tn